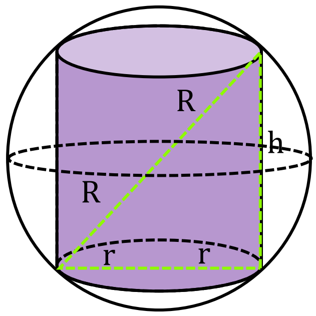
INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO

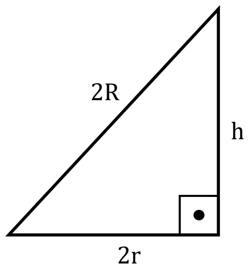
Nas apostilas anteriores, estudamos vários sólidos que compõem a geometria espacial. O que veremos a seguir são as relações destes sólidos entre si através da **inscrição** e **circunscrição**. Lembrando que, se temos um sólido X que engloba um outro sólido Y, dizemos que Y está **inscrito** em X e que X **circunscreve** Y.

Esfera e Cilindro

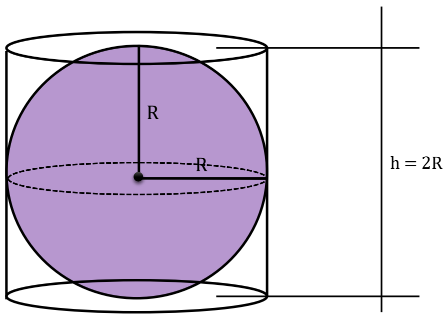
Para iniciar nosso estudo, estamos interessados exclusivamente na inscrição e circunscrição de outros sólidos com a esfera. Vamos começar para o caso do cilindro reto ilustrado na figura abaixo, que está inscrito numa esfera de raio R.



Este cilindro possui o raio da base igual à r. Observe que a inscrição na esfera forma um triângulo retângulo de hipotenusa $2R$ e catetos $2r$ e h:



Por outro lado, se colocarmos agora um cilindro reto circunscrito numa esfera de mesmo raio R, teremos a seguinte configuração:



Note que este cilindro possui um raio da base igual à R e uma altura equivalente à $2R$.

Vamos fazer um exercício para exercitar estes conceitos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um cilindro de altura $\boldsymbol{4\ cm}$ e área lateral igual à $\boldsymbol{12\pi\ cm^2}$ está inscrito em uma esfera. Qual é o volume ocupado por essa esfera?

Resolução:

Primeiramente note que o exercício nos forneceu o valor da área lateral do cilindro, juntamente com sua altura. Neste caso, é possível descobrir o valor do raio da base do cilindro:

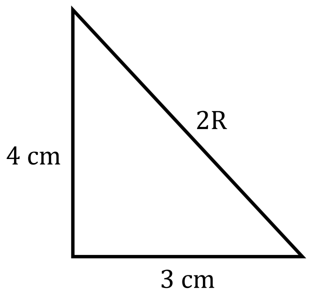
$$A_{lateral\ cilindro} = 2\pi.r.h$$

$$12\pi = 2\pi.r.4$$

$$r = \frac{12}{8}$$

$$r = \frac{3}{2}\ cm$$

Assim, sabendo o valor do raio da base do cilindro, podemos construir o triângulo retângulo que relaciona ele com a esfera circunscrita:



Escrevemos então o teorema de Pitágoras correspondente:

$$(2R)^2 = 4^2 + 3^2$$

$$(2R)^2 = 25$$

$$2R = 5$$

$$R = \frac{5}{2}\ cm$$

Uma vez que temos o raio da esfera, calculamos então o seu volume:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^3$$

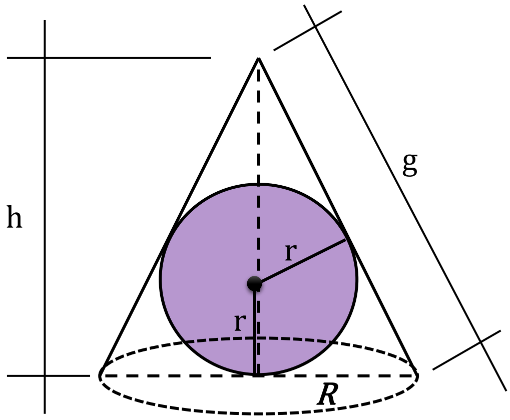
$$V = \frac{4}{3}\pi.\frac{125}{8}$$

$$V = \frac{125}{6}\pi\ cm^3$$

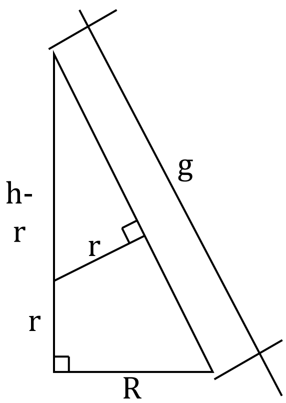
Logo, a esfera ocupa um volume igual à $\frac{125}{6}\pi\ cm^3$.

Esfera e Cone

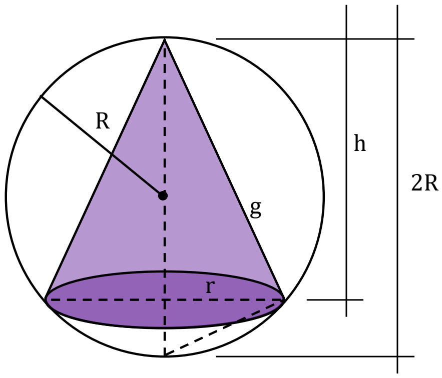
Vamos para o nosso segundo caso de estudo: o cone. Abaixo, representamos um cone de raio da base R que circunscreve uma esfera de raio r.



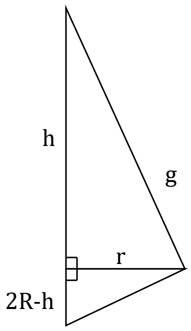
Notamos que a geratriz, a altura e o raio da base do cone se relacionam com a esfera a partir de dois triângulos retângulos, o qual ilustramos abaixo.



Sob outra perspectiva, quando um cone de raio da base r está inscrito numa esfera de raio R, temos a composição mostrada na figura abaixo:

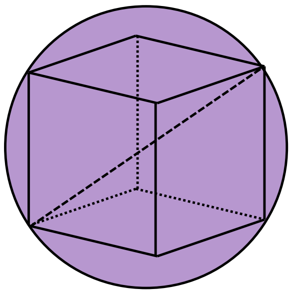


Novamente, os dois sólidos vão se relacionar através de dois triângulos retângulos, representados a seguir.



Esfera e Cubo

Em nosso terceiro caso, vamos analisar como acontece a inscrição e circunscrição que relaciona um cubo e a esfera. Observe a imagem abaixo, onde um cubo de lado a está inscrito em uma esfera.



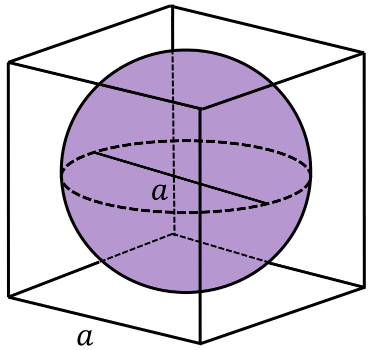
A partir deste cubo, observamos que o valor do diâmetro da esfera corresponde exatamente ao valor da diagonal do cubo. Ora, sabemos que a diagonal do cubo pode ser calculada em função do seu lado da seguinte maneira:

$$D_{cubo} = a\sqrt{3}$$

Assim, se quisermos obter o raio dessa esfera, basta dividir o valor da diagonal do cubo por dois! Obtemos então:

$$R_{esf} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Em contrapartida, ao analisarmos o caso em que o cubo circunscreve a esfera, temos a seguinte perspectiva:

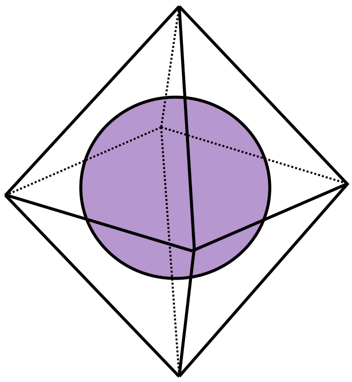


Note que o lado do cubo corresponde agora ao diâmetro da esfera inscrita. Desta forma, podemos afirmar que:

$$a = 2.R_{esf}$$

Esfera e Octaedro Regular

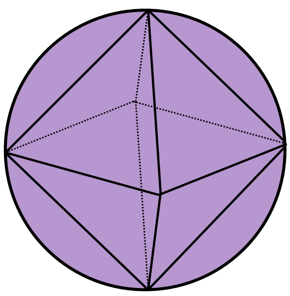
Para o último caso envolvendo a esfera, vamos estudar sobre sua relação com o octaedro regular. Se você não recorda, o octaedro regular é o poliedro que possui oito faces congruentes. Observe na figura abaixo o octaedro regular que circunscreve uma esfera.



Se supormos que o octaedro regular possui arestas de comprimento a, deduz-se que o raio da esfera inscrita é calculado através da seguinte equação:

$$R_{esf} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Agora, quando o octaedro regular está inscrito na esfera, temos a seguinte configuração:



Perceba que no "centro" do octaedro regular de aresta medindo a, existe um quadrado cujo lado possui o mesmo comprimento. O raio da esfera coincide exatamente com metade da diagonal desse quadrado. Sabemos de estudos anteriores que a diagonal do quadrado mede $a\sqrt{2}$, logo, o raio da esfera é obtido a partir dessa informação:

$$R_{esf} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Uma bola de futebol completamente esférica, de área total equivalente à $\boldsymbol{16\pi}$ $\boldsymbol{cm}^2$, necessita ser guardada dentro de uma caixa cúbica. Qual é o volume mínimo necessário desta caixa para que consiga encaixar a bola?

Resolução:

Para estabelecer uma relação entre o volume da caixa e a esfera, necessitamos primeiro encontrar o valor do raio da esfera:

$$A_{esf} = 4\pi R^2$$

$$16\pi = 4\pi R^2$$

$$R^2 = 4$$

$$R = 2\ cm$$

Como a esfera deverá caber dentro da caixa cúbica, sua aresta deverá ter, no mínimo, o dobro do raio encontrado:

$$a_{cubo} = 4\ cm$$

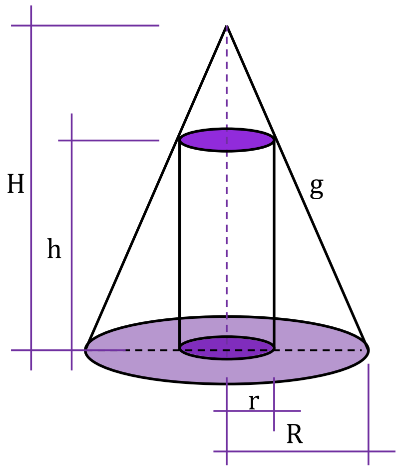
Logo, o volume mínimo necessário para a caixa é:

$$V_{caixa} = 4^3 = 64\ cm^3$$

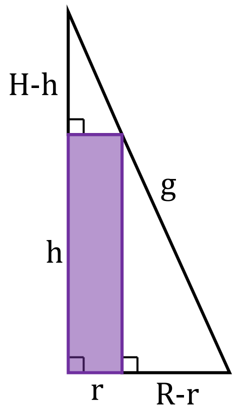
Assim, a caixa deverá ter no mínimo um volume de $64\ cm^3$.

Cilindro e Cone

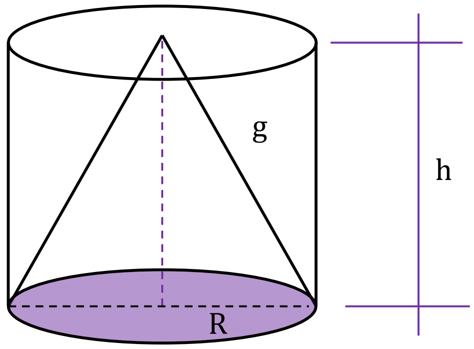
Vamos nos concentrar agora em mais alguns casos de inscrição e circunscrição, que não envolvam esferas. Para começar, observe abaixo um cilindro de raio da base r, inscrito em um cone de raio da base R:



Este cone possui altura de valor H, geratriz com valor g e está relacionado com o cilindro de altura h através do triângulo abaixo:



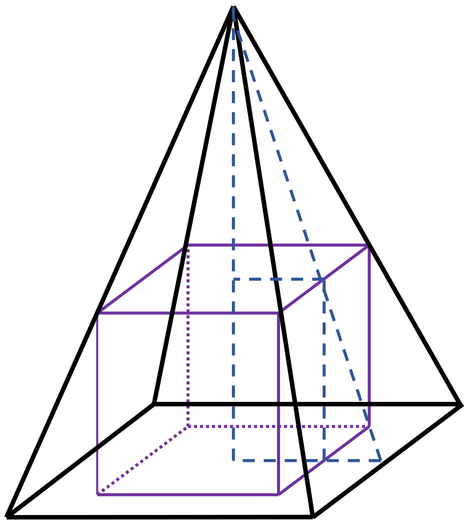
Analisando agora o processo contrário, ou seja, o cone inscrito em um cilindro, chegamos em uma representação como a mostrada abaixo:



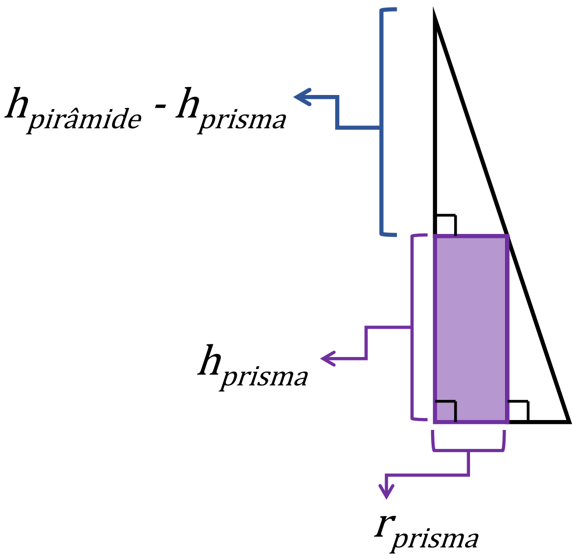
Obs.: Neste caso, ambos os sólidos possuem a mesma altura (representada acima como h) e o mesmo raio da base (representado acima como R).

Prisma e Pirâmide

Prosseguimos para examinar o caso de um prisma inscrito em uma pirâmide:

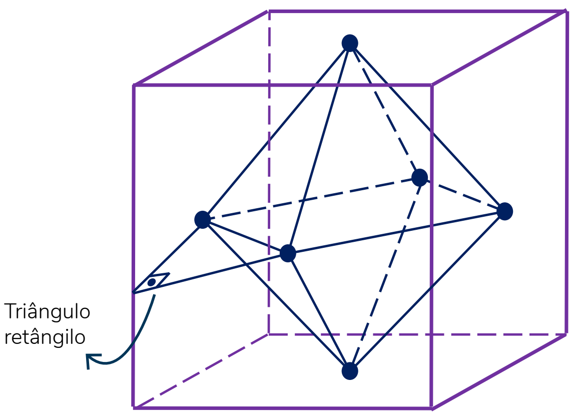


Observe que, no conjunto acima, podemos novamente formar um triângulo para relacionar as grandezas envolvidas:

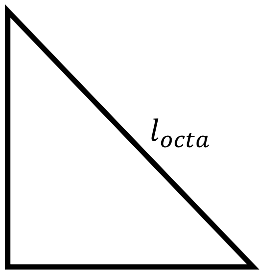


Octaedro Regular e Cubo

E, por último, há o caso de um octaedro regular estar inscrito em um cubo de aresta a, como na figura abaixo:



Perceba que os vértices do tetraedro regular atingem exatamente o centro das faces do cubo (que é o ponto médio do lado do cubo). Assim, tomando dois desses vértices, conseguimos obter um triângulo retângulo com as seguintes medidas:



Podemos escrever o Teorema de Pitágoras correspondente:

$$(l_{octa})^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$(l_{octa})^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$(l_{octa})^2 = 2.\frac{a^2}{2^2}$$

$$(l_{octa})^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$l_{octa} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{2}\right)}$$

$$l_{octa} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$l_{octa} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

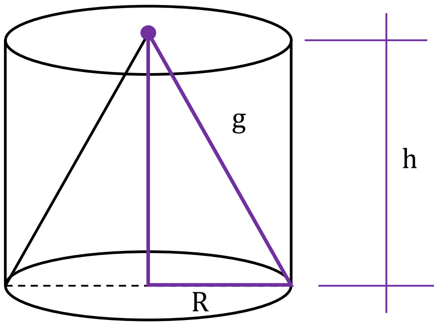
Temos assim o valor da aresta do octaedro regular em função da aresta do cubo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um aquário em formato cilíndrico possui altura igual à 4 m e dispõe de um segundo aquário dentro, em formato cônico, para separar algumas espécies das outras. Se o raio da base desse cone mede 5 m, qual é o valor da geratriz associada?

Resolução:

Desenhamos abaixo a configuração destes dois aquários juntos.



É possível observar um triângulo retângulo que associa o cone inscrito ao cilindro. Logo, escrevemos o Teorema de Pitágoras:

$$R^2 + h^2 = g^2$$

$$5^2 + 4^2 = g^2$$

$$g = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}\, m$$

Assim, a geratriz associada ao aquário cônico é de $\sqrt{41}\, m$.

ANOTAÇÕES

Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@biologiatotaloficial
@Prof_jubilut
biologiajubilut