2020 - 2022

CONJUNTOS

CONJUNTOS

Aqui você aprenderá sobre conjuntos, operações entre conjuntos, conjuntos numéricos e intervalos numéricos.

Esta subárea é composta pelos módulos:

1. Conjuntos e suas Operações
2. Conjuntos Numéricos
3. Intervalos Numéricos

CONJUNTOS E SUAS OPERAÇÕES

Sempre ouvimos falar da famosa teoria de conjuntos. Tal área da matemática estuda os tipos de conjuntos e suas operações. Um conjunto nada mais é do que uma coleção de itens, sendo esses itens algo qualquer.

Por exemplo, os alunos de uma sala, camisetas da mesma cor, livros didáticos de uma disciplina, são conjuntos.

Já na matemática, são conjuntos os números pares, os números ímpares, os números primos, os números múltiplos de dois e a lista de exemplos segue infinitamente.

Os itens que compõem o conjunto são chamados de **elementos**. No exemplo dos alunos de uma sala, o conjunto é a sala de aula e cada aluno é um elemento do conjunto.

No exemplo dos alunos de uma sala, percebemos que esse conjunto tem um número limitado de elementos. No caso do conjunto dos números ímpares, percebemos que esse conjunto tem infinitos elementos. Os primeiros são chamados de conjuntos finitos e os últimos são chamados de conjuntos infinitos.

Na matemática sempre que possível procuramos uma forma mais prática de escrever algo extenso. Iniciemos pela notação e representação de conjuntos.

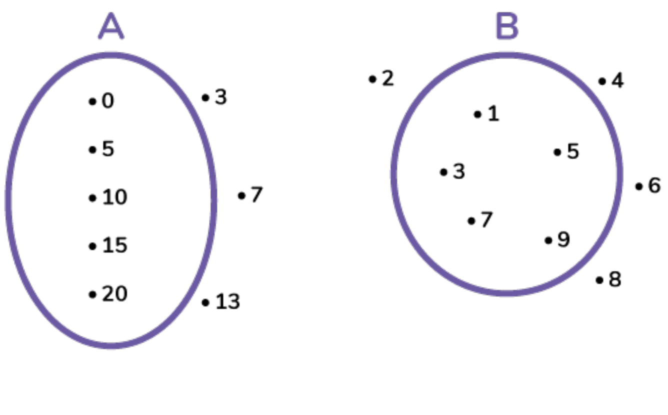
NOTAÇÃO E REPRESENTAÇÃO

Habitualmente, os conjuntos são designados por **letras maiúsculas** do nosso alfabeto (A, B, C, D, ..., Z) e os **elementos** são designados pelas **letras minúsculas** (a, b, c, d, ..., z).

A forma mais básica de representar os conjuntos é a **listagem de elementos:** nessa representação, os elementos do conjunto estão entre chaves e separados por vírgula ou ponto e vírgula. Exemplos:

1. O conjunto dos números pares: A = {0, 2, 4, 6, ...}
2. O conjunto das vogais: B = {a, e, i, o, u}
3. O conjunto dos números múltiplos de 3: M = {0, 3, 6, 9, 12, ...}

Outra forma de representação é pelo chamado **Diagrama de Venn**, que é uma representação gráfica. Nesse formato os elementos do conjunto são representados dentro de uma linha fechada. Os elementos que não estão no conjunto são representados fora da linha. Exemplos:



Uma terceira forma de representar conjuntos é a chamada **propriedade de seus elementos:** usamos essa forma quando queremos dar ênfase à propriedade que é satisfeita pelos elementos do conjunto. Nessa representação os conjuntos são apresentados da forma

{x/x tem a propriedade P}

e a propriedade é descrita entre chaves. Lemos essa representação como "o conjunto dos elementos x tal que x satisfaz a propriedade P" e o "tal que" se refere à barra. A vantagem dessa representação é a sua utilidade em casos de conjuntos que possuem infinitos elementos. Como exemplo temos:

1. C = {x/x é múltiplo de 3}

2. D = {x/x é número primo}

Nos exemplos acima lemos: o conjunto C é o conjunto dos números x tais que x é um múltiplo de 3 e o conjunto D é o conjunto dos números x tais que x é um número primo.

Observação: a barra / pode ser substituída por : ou ; sem mudança de significado.

Outros símbolos matemáticos:

- $\forall$: significa "para todo", "para qualquer", "qualquer que seja".
- $\exists$: significa "existe".
- $\nexists$: significa "não existe".
- $\Rightarrow$: significa "se, então", ou seja, que a sentença é válida da esquerda para a direita.
- $\Leftrightarrow$: significa "se, e somente se", ou seja, que a sentença é válida da esquerda para a direita e da direita para a esquerda.

CONJUNTO VAZIO, CONJUNTO UNITÁRIO E CONJUNTO UNIVERSO

Até agora, trabalhamos com conjuntos que possuem vários elementos. Mas será que é possível existir algum conjunto que não possui elemento? Sim, é possível!

Esse conjunto que não possui elementos é o famoso **conjunto vazio** e é denotado por $\varnothing$ ou { }.

O conjunto vazio nada mais é do que um conjunto que tem uma propriedade, mas não existe nenhum elemento que a satisfaça. Por exemplo:

1. $A = \{x/x \neq x\}$ é o conjunto vazio porque não existe nenhum elemento x que seja diferente de si mesmo.

Observação: o conjunto vazio é considerado um conjunto finito.

Tratamos sobre um conjunto que não possui nenhum elemento. E se o conjunto possuir apenas um elemento? Nesse caso o conjunto é chamado de **conjunto unitário**, ou seja, o conjunto unitário é aquele que possui apenas um elemento. Por exemplo:

1. $B = \{2\}$ é um conjunto unitário porque é formado apenas pelo número 2.

Ainda, existe também o chamado **conjunto universo**. O conjunto universo é relativo ao estudo em questão. A notação para o conjunto universo é $\mathbb{U}$ e esse conjunto é definido como aquele ao qual todos os elementos do estudo pertencem.

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

A partir de agora, quando um elemento estiver em um conjunto, vamos começar a dizer que tal elemento **pertence** àquele conjunto. O símbolo matemático para a pertinência é o $\in$.

Como exemplo, suponha o conjunto $M = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$. Se quisermos dizer que o número 6 pertence ao conjunto, basta escrevermos $6 \in M$. Tal sentença é lida como "o número 6 pertence ao conjunto M".

Caso algum elemento não pertença ao conjunto de estudo, por exemplo o número 7, nós escrevemos $7 \notin M$ e tal sentença é lida como "o número 7 não pertence ao conjunto M".

Exemplo: Considere o conjunto $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$. Podemos dizer então que:

$$1 \in Y,\ 3 \in Y,\ 4 \in Y,\ -1 \notin Y,\ 0 \notin Y \text{ e por aí vai.}$$

Temos então o seguinte caso geral:

Dado um conjunto X qualquer, se um elemento **a** estiver no conjunto, dizemos que **a** pertence ao conjunto X e escrevemos $a \in X$. Caso **a** não seja elemento de X, dizemos que **a** não pertence ao conjunto X e escrevemos $a \notin X$.

SUBCONJUNTOS E RELAÇÃO DE INCLUSÃO

Consideremos inicialmente o conjunto X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Notemos que conseguimos criar outros conjuntos a partir do conjunto X, como por exemplo:

1. {0, 1, 2, 3}

2. {1, 2}

3. {4, 5, 6, 7, 8}

4. ...

Tais conjuntos são ditos **subconjuntos do conjunto X**, mas por que eles recebem esse nome? Eles são chamados dessa forma porque todo elemento de um desses conjuntos é também elemento do conjunto X. Dando uma definição um pouco mais formal :

Dados dois conjuntos A e B, dizemos que o conjunto A é subconjunto do conjunto B quando todo elemento do conjunto A é também elemento do conjunto B. Nesse caso escrevemos $A \subset B$ e lemos como “O conjunto A está contido no conjunto B”.

Caso exista pelo menos um elemento no conjunto A que não seja elemento do conjunto B dizemos que o conjunto A não é subconjunto do conjunto B. Nesse caso escrevemos $A \not\subset B$ e lemos como “O conjunto A não está contido no conjunto B”.

Exemplo: O conjunto X' = {1, 2, 15} não é subconjunto de X, pois $15 \in X'$ mas $15 \notin X$.

Vale ressaltar ainda que se A é um subconjunto de B, com $A \neq \varnothing$ e $A \neq B$, A é chamado de **subconjunto próprio** de B.

Observações:

- O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto;
- Todo conjunto está contido em si mesmo;
- A expressão $A \subseteq B$ é lida como “A está contido em B ou A é igual a B”;
- A expressão $B \supset A$ é lida como “B contém A”.

Lembre-se: a relação de **pertinência** vale **entre elemento e conjunto** e a relação de **inclusão** vale **entre conjuntos!**

CONJUNTO DAS PARTES

O conjunto das partes é definido como o conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto. Temos então a seguinte definição matemática:

Dado um conjunto A, o conjunto das partes de A, denotado por P(A) é o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto A. Na linguagem matemática:

$$P(A) = \{X / X \subset A\}$$

Ficou confuso? Vamos para um exemplo: considere o conjunto $A = \{a, b, c\}$. Os subconjuntos de A são os conjuntos:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \varnothing$$

Perceba que além do conjunto vazio e do próprio conjunto, montamos conjuntos com um elemento e conjuntos com dois elementos. Esse é o procedimento para construirmos os subconjuntos de um conjunto dado: começamos formando subconjuntos unitários, depois com 2 elementos, com 3 elementos e assim até chegarmos no próprio conjunto. Depois, adicionamos na lista o conjunto vazio.

Sendo assim o conjunto das partes de A é o conjunto:

$$P(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \varnothing\}$$

Agora vamos pensar no número de subconjuntos de um conjunto dado. Notemos que o conjunto A tem 3 elementos e ele possui $8 = 2^3$ subconjuntos. Coincidência? Não!

Se um conjunto A qualquer tiver **n** elementos, ele terá 2^n subconjuntos e, consequentemente o número de elementos de P(A) também será 2^n.

Observações:

- Escrevemos n(A) quando estamos falando do número de elementos do conjunto A.
- Só faz sentido falarmos de número de subconjuntos de um conjunto se o conjunto em questão for finito!

IGUALDADE DE CONJUNTOS

Agora suponha que temos os conjuntos $A = \{1, 4, 5\}$ e $B = \{5, 1, 4\}$. Esses conjuntos são iguais ou diferentes? Notemos que, não só todo elemento de A é também elemento de B e assim $A \subset B$, mas também todo elemento de B é também elemento de A e assim $B \subset A$. Como isso ocorre, os conjuntos A e B são iguais. Mais formalmente temos:

Dois conjuntos A e B são iguais quando $A \subset B$ e $B \subset A$. Nesse caso escrevemos $A = B$.

Observação: Note que a igualdade não se refere a ordem dos elementos no conjunto, mas sim em equivalência dos elementos que compõem os conjuntos!

OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

Da mesma forma que conseguimos fazer operações com os números, também é possível fazer operações com os conjuntos. As operações entre conjuntos são: união (ou reunião), intersecção, diferença de conjuntos e complementar. Todos os exemplos serão feitos em conjuntos finitos, mas podemos estender as operações para conjuntos infinitos.

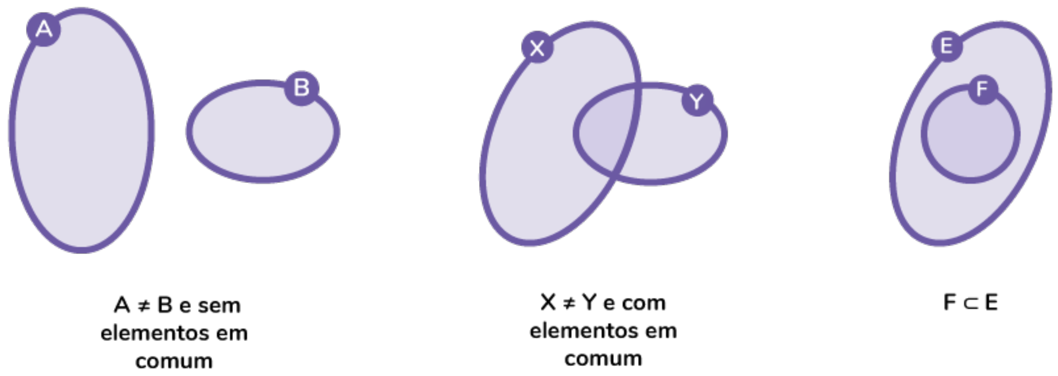
UNIÃO DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B, a união é o conjunto formado por todos os elementos que estão em A ou que estão em B. Esse conjunto é representado por $A \cup B$ e é lido como "A união B". Usando linguagem matemática temos:

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplo: Considere os conjuntos $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Então: $X \cup Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Representamos a união pelo diagrama de Venn da seguinte forma:



Toda a zona lilás representa a união de conjuntos em cada um dos casos.

Observação: na união os elementos podem pertencer ao conjunto A, ao conjunto B ou a ambos os conjuntos.

Perceba que quando vamos escrever a união, os elementos em comum entre X e Y são escritos uma única vez.

Propriedades da união: Sejam A, B e C conjuntos quaisquer:

- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$
- Associatividade: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- A união de qualquer conjunto com o conjunto vazio é sempre o próprio conjunto.
- A união de qualquer conjunto com ele mesmo é sempre ele mesmo.
- A união de qualquer conjunto com o conjunto universo é sempre o conjunto universo.

Observação: Podemos fazer a união de uma quantidade maior de conjuntos.

INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

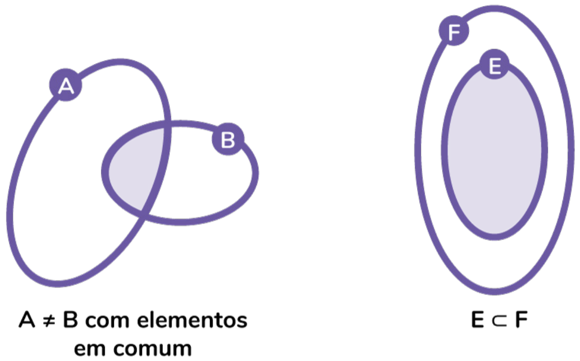
Dados dois conjuntos A e B, a intersecção é o conjunto formado pelos elementos em comum entre A e B. Esse conjunto é representado por $A \cap B$ e é lido como “A intersecção B” ou “A inter B”. Usado linguagem matemática temos:

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Exemplo: Considere os conjuntos X = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, Y = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Então: $X \cap Y = \{3, 4, 5\}$.

Representamos a intersecção pelo diagrama de Venn da seguinte forma:



Toda a zona lilás representa a intersecção de conjuntos em cada um dos casos.

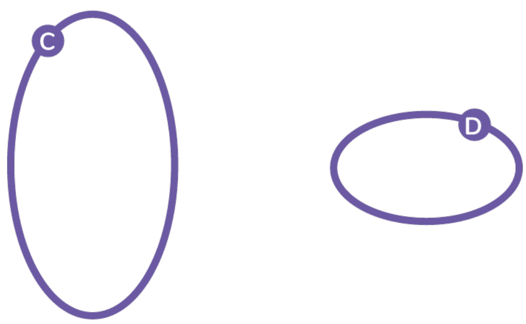
Observação: Na representação $A \cap B = \{x/x \in A \text{ e } x \in B\}$, **e** indica que os elementos da intersecção pertencem ao conjunto A e ao conjunto B **simultaneamente**.

Mas e se os conjuntos não tiverem elementos em comum, ou seja, quando a intersecção for o conjunto vazio? Nesse caso, eles são chamados de **conjuntos disjuntos**. Na linguagem matemática temos:

Dois conjuntos A e B quaisquer são conjuntos disjuntos quando $A \cap B = \varnothing$.

Exemplo: Considere os conjuntos C = {2, 3, 4} e D = {6, 7, 8}. Então: $C \cap D = \varnothing$.

Representamos os conjuntos disjuntos por diagrama de Venn da seguinte forma:



Intersecção de conjuntos disjuntos

Propriedades da Intersecção: Sejam A, B e C conjuntos quaisquer:

- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
- Comutatividade: $A \cap B = B \cap A$.
- Associatividade: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- Distributiva da intersecção em relação à união: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Distributiva da união em relação à intersecção: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- A intersecção de qualquer conjunto com o conjunto vazio é sempre o conjunto vazio.
- A intersecção de um conjunto com ele mesmo é sempre ele mesmo.
- A intersecção de um conjunto com o conjunto universo é sempre o próprio conjunto.

Observação: Podemos fazer a intersecção de uma quantidade maior de conjuntos.

NÚMERO DE ELEMENTOS DA UNIÃO

Agora que já estudamos a união e a intersecção, podemos calcular o número de elementos da união. Se estivermos tratando de dois conjuntos A e B quaisquer temos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Caso estivermos tratando de três conjuntos A, B e C quaisquer temos que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Exemplo: Se 120 pessoas gostam das disciplinas de matemática e física e, sabendo que 30 pessoas gostam de matemática e 10 gostam das duas disciplinas, quantas pessoas gostam de física?

Representemos as disciplinas de matemática e física por M e F, respectivamente. Temos então:

$n(M \cup F) = 120$, $n(M) = 30$, e $n(M \cap F) = 10$ e queremos descobrir $n(F)$. Assim:

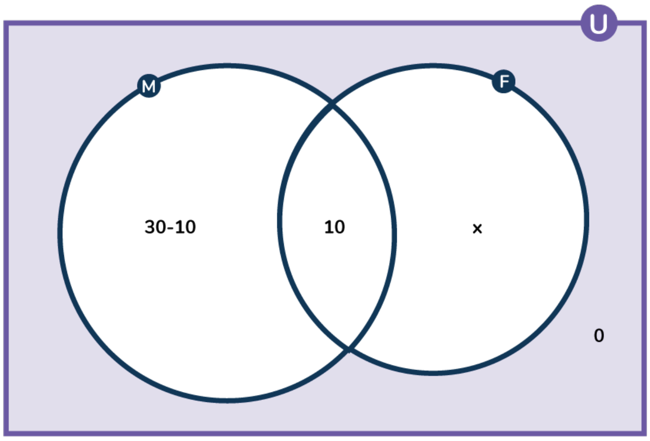
$$n(M \cup F) = n(M) + n(F) - n(M \cap F)$$

$$120 = 30 + n(F) - 10$$

$$120 - 30 + 10 = n(F)$$

$$n(F) = 100$$

Podemos resolver esse exemplo através do diagrama de Venn, da seguinte forma: cada matéria, denotada por M e F, recebe uma linha fechada, compreendidas no retângulo que representa o conjunto universo, conforme imagem abaixo:



Começamos preenchendo o diagrama com as nossas informações pela intersecção, sempre que for possível. Sabemos que 10 pessoas gostam das duas matérias e que 30 gostam de matemática, mas como já temos 10 pessoas na intersecção, sobram 30-10 = 20 que gostam apenas de matemática. Estamos interessados em descobrir quantas pessoas gostam de física. Já sabemos que 10 pessoas na intersecção gostam de física. Precisamos saber quantas gostam apenas de física. Seja x essa quantidade. São 120 pessoas no total e todo mundo gosta de matemática, de física, ou de ambas, por isso temos 0 pessoas no conjunto universo. Sendo assim temos:

$$20 + 10 + x = 120$$

$$30 + x = 120$$

$$x = 120 - 30$$

$$x = 90$$

Segue que 90 pessoas gostam apenas de física. Por fim, temos 90+10 = 100 pessoas que gostam de física.

DIFERENÇA DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B, a diferença de A e B (nessa ordem) é o conjunto formado por todos os elementos que estão em A e que não estão em B. Esse conjunto é representado por A-B e é lido como “A menos B”. Na linguagem matemática temos:

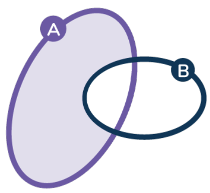
$$A - B = \{x / x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplos:

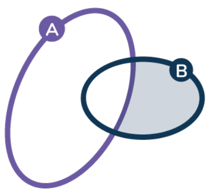
- Considere os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 5, 6} e B = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Então: A - B = {0, 1} e B - A = {4, 7, 8}.

- Considere os conjuntos $A = \{10,11,12,13\}$ e $B = \{14,15\}$. Então: $A - B = A$ e $B - A = B$.
- Considere os conjuntos: $A = \{20,21,22,23\}$ e $B = \{21,22\}$. Então: $A - B = \{20,23\}$ e $B - A = \varnothing$.

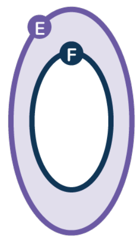
Cada um dos casos de diferença também pode ser representado pelo diagrama de Venn da seguinte forma:



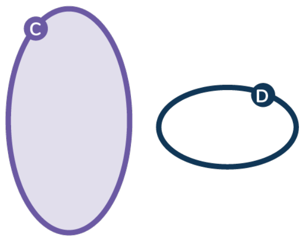
A - B quando
$A \cap B \neq \varnothing$



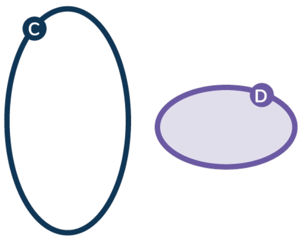
B - A quando
$A \cap B \neq \varnothing$



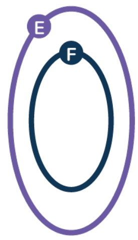
E - F quando
$F \subset E$



C - D quando
$C \cap D = \varnothing$



D - C quando
$C \cap D = \varnothing$



$F - E = \varnothing$
quando $F \subset E$

Observações:

- $A \neq B \Leftrightarrow A - B \neq B - A$
- A diferença de conjuntos também pode ter a notação $A \backslash B$.

COMPLEMENTAR DE UM CONJUNTO

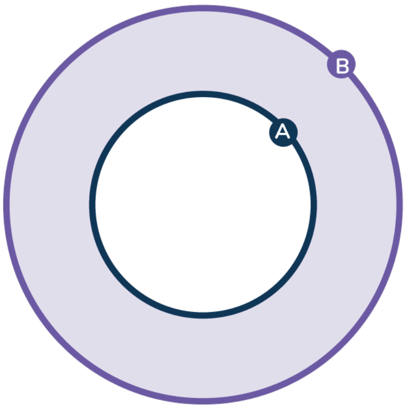
Dados dois conjuntos A e B tais que $A \subset B$ o complementar de A em relação a B é o conjunto dos números que estão em B mas que não estão em A. Esse conjunto é representado por C_B^A e é lido como "complementar de A em B". Na linguagem matemática temos:

$$C_B^A = \{x \in B \,/\, x \notin A\}$$

Em outras palavras, o complementar de A em relação a B é o conjunto dos números que precisaríamos adicionar em A para que ele se torne o conjunto B.

Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{3,4,5,6\}$ e $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Então: $C_B^A = \{1,2,7,8,9,10\}$.

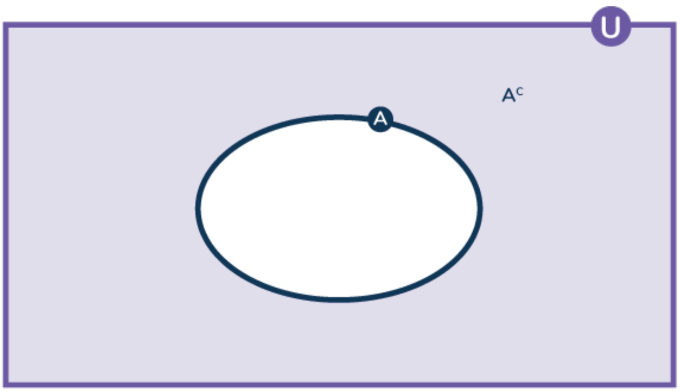
Representamos o complementar pelo diagrama de Venn da seguinte forma:



Toda a zona lilás representa C_B^A

Quando B é o conjunto universo, denotamos o complementar por A^C e matematicamente temos $A^C = \{ x/x \notin A\}$.

Representamos o complementar nesse caso pelo diagrama de Venn da seguinte forma:



Toda a zona lilás representa o complementar de A, que será indicado por A^C. Note que o conjunto universo é representado graficamente como um retângulo exterior ao conjunto em estudo

Observações:

- O complementar também pode ser representado por $\overline{A}$.
- O complementar do conjunto A em relação ao conjunto B é justamente a diferença de B e A, ou seja, $C_B^A = B - A$.
- O conjunto e o seu complementar sempre são conjuntos disjuntos, ou seja, $A \cap A^C = \varnothing$.
- Se acontecer de $A \not\subset B$, então não existe C_B^A.

Leis de De Morgan: Considere os conjuntos A e B quaisquer. Então são válidas:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$