Complementos de teoria e leituras

O cálculo diferencial e integral

Devemos a Isaac Newton (1642-1727) a criação do Cálculo Diferencial e Integral. Conforme nos conta a história, em 1666 uma grande peste assolou a Grã-Bretanha. As escolas foram fechadas e Newton, que acabara de obter o título de bacharel na Universidade de Cambridge, refugiou-se em sua casa na zona rural. Foi nesse período que ele elaborou uma teoria matemática que daria origem ao cálculo diferencial. Hoje sabemos que outro matemático, Leibniz, também chegara, independentemente, às mesmas descobertas de Newton.

Apenas as quatro operações matemáticas são insuficientes para uma definição rigorosa da velocidade escalar instantânea. Esse rigor só se tornou possível com o cálculo diferencial.

Cálculo da velocidade instantânea usando o limite

O limite da velocidade escalar média, à medida que fazemos Δt tender a zero, é a velocidade escalar instantânea naquela posição da trajetória.

Simbolicamente se escreve:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m$$

Leia-se: limite de velocidade média para Δt tendendo a zero.

Mais uma vez, chamamos sua atenção para o fato de dizermos que **Δt tende a zero**, o que não significa que ele será zero, apenas que queremos nos referir a intervalos de tempo sempre menores que o antecedente.

O cálculo de limites não é objeto de estudo nos cursos de Matemática do ensino médio. Seu estudo será realizado apenas em nível universitário. Ficaremos aqui com o conceito e alguns exemplos.

Exemplo 1

Neste exemplo vamos calcular uma velocidade escalar instantânea usando o conceito de limite.

Tomaremos dois instantes t_1 e t_2 muito próximos um do outro, isto é, o intervalo de tempo Δt é muito pequeno. As respectivas abscissas são s_1 e s_2.

Vamos usar, como exemplo, uma equação horária do 2º grau em t:

$s = 2 + 3t + 5t^2$ (unidades SI)

1º) No instante $t_1 = t$, temos:

$s_1 = 2 + 3t_1 + 5t_1^2 \Rightarrow s_1 = 2 + 3t + 5t^2$

2º) No instante $t_2 = t + \Delta t$, temos:

$s_2 = 2 + 3t_2 + 5t_2^2 \Rightarrow s_2 = 2 + 3(t + \Delta t) + 5(t + \Delta t)^2$

Desenvolvendo:

$s_2 = 2 + 3t + 3 \cdot \Delta t + 5(t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + \Delta t^2) \Rightarrow s_2 = 2 + 3t + 3 \cdot \Delta t + 5t^2 + 10 \cdot t \cdot \Delta t + 5 \cdot \Delta t^2$

A variação de abscissa no intervalo de tempo considerado é:

$\Delta s = s_2 - s_1 = 3 \cdot \Delta t + 10 \cdot t \cdot \Delta t + 5 \cdot \Delta t^2$

A velocidade escalar média fica:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \frac{3 \cdot \Delta t + 10 \cdot t \cdot \Delta t + 5 \cdot \Delta t^2}{\Delta t} = 3 + 10 \cdot t + 5 \cdot \Delta t$$

Porém, o nosso objetivo é calcular a velocidade escalar instantânea usando o conceito de limite. Assim:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m \Rightarrow v = \lim_{\Delta t \to 0} (3 + 10t + 5 \cdot \Delta t)$$

O termo $(5 \cdot \Delta t)$ tende a zero e resta:

$v = 3 + 10 \cdot t$

Derivada: um processo prático para se chegar à velocidade escalar instantânea

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

Esse limite é denominado **derivada da abscissa *s* em relação ao tempo *t*.**

Indicamos a derivada de *s* em relação a *t* por: $\frac{ds}{dt}$

Assim, podemos escrever:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \text{ ou simplesmente: } v = \frac{ds}{dt}$$

Derivar uma equação horária de 1º grau ou de 2º grau em *t* é simplesmente calcular o limite acima. No entanto, em se tratando de equações polinomiais em *t*, existem regrinhas práticas que facilitam o cálculo dessa derivada, sem usarmos o processo do limite. A regra prática é a seguinte:

1º) Em cada monômio da expressão polinomial, multiplica-se o expoente pelo coeficiente.

2º) Subtrai-se uma unidade do expoente.

Exemplo 2

Vamos calcular a velocidade escalar instantânea, usando o cálculo de derivada.

a) $s = 4t^3 \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = (3 \cdot 4)t^{3-1} \Rightarrow v = 12t^2$

b) $s = 5t^2 - 3t \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = (5 \cdot 2)t^{2-1} - (3 \cdot 1)t^{1-1} \Rightarrow v = 10t - 3$

c) $s = K$ (em que *K* é uma constante), ou seja, o móvel se encontra em repouso na posição *K*. Sua velocidade escalar vale zero. Donde se conclui que a derivada de uma constante vale zero.

$$s = 8{,}5 \text{ m} \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = 0$$

Outro modo de se obter o mesmo resultado é fazendo:

$s = 8{,}5t^0 \Rightarrow v = (0 \cdot 8{,}5)t^{-1} = 0$

d) $s = 2 + 3t - 5t^2 - 8t^3 \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = 0 + 3 - 10t - 24t^2 \Rightarrow v = 3 - 10t - 24t^2$

Conforme nossos exemplos mostraram, a derivada nos leva a outra equação horária, e não ao valor da velocidade num dado instante. Precisamos de um valor de tempo para substituir na equação horária da velocidade obtida.

Aceleração escalar instantânea

A aceleração escalar instantânea α é o limite para o qual tende $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero e escreve-se:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

O limite de $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero é a derivada da velocidade escalar em relação ao tempo.

$$\alpha = \frac{dv}{dt}$$

Exemplo:

$$v = 4t^3 - 3t^2 + 6t \Rightarrow \alpha = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \alpha = 12t^2 - 6t + 6$$

Mais uma vez constatamos que a derivada nos levou a uma outra equação horária. Precisamos do valor do tempo.

Demonstração da equação horária das posições do MUV

Como vimos, a equação horária da velocidade é dada, no movimento uniformemente variado, pela equação:

$$v = v_0 + \alpha \cdot t \text{ (equação do 1º grau em } t\text{)}$$

Sempre que derivamos uma função de grau *n* (para $n \geqslant 1$), obtemos outra função de grau $(n - 1)$.

A equação horária da velocidade é a derivada da equação horária de posição (abscissas). Ora, se a primeira é do 1º grau em *t*, conclui-se que esta outra é do 2º grau em *t*.

Assim, vamos representá-la por:

$$s = A + B \cdot t + C \cdot t^2 \text{ (com } A, B, C \text{ constantes e } C \neq 0)$$

Vamos determinar os significados físicos de cada parâmetro *A*, *B*, *C*.

- Fazendo-se $t = 0$, teremos $s = s_0$ e $s = A$.

Logo: $A = s_0$

- Derivando-se a equação proposta:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = B + 2C \cdot t$$

- Identificando termo a termo com a equação:

$$v = v_0 + \alpha \cdot t$$

podemos concluir:

$$B = v_0$$

$$2C = \alpha \Rightarrow C = \frac{\alpha}{2}$$

Voltando à equação proposta:

$$s = A + B \cdot t + C \cdot t^2$$
$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot t^2$$

Obtendo a aceleração escalar a partir da equação horária das posições

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{\alpha}{2} \cdot t^2$$

1ª derivada:

$$\frac{ds}{dt} = 0 + v_0 + \frac{2\alpha}{2} \cdot t \Rightarrow v = v_0 + \alpha \cdot t \text{ (equação horária da velocidade)}$$

2ª derivada:

$$\frac{dv}{dt} = 0 + \alpha \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \alpha \text{ (aceleração)}$$

A aceleração escalar é derivada segunda da equação horária das posições.

Exemplo 3

É conhecida a equação horária das posições de um movimento:

$$s = 5{,}0 + 2{,}0 \cdot t - 0{,}50 \cdot t^2 \text{ (unidades SI)}$$

a) Vamos determinar, usando derivada, a equação horária da velocidade e a aceleração escalar.

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = 0 + 2{,}0 - 1{,}0t \Rightarrow v = 2{,}0 - 1{,}0t \text{ (SI)}$$

$$\alpha = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \alpha = 0 - 1{,}0 \Rightarrow \alpha = -1{,}0 \text{ m/s}^2$$

b) Vamos classificar o movimento para $t_1 = 3{,}0$ s.

Para $t_1 = 3{,}0$ s:

$v_1 = 2{,}0 - 1{,}0 \cdot 3{,}0 \Rightarrow v_1 = -1{,}0$ m/s

$\alpha \cdot v_1 = (-1, 0) \cdot (-1, 0) = +1{,}0$

Logo, o movimento é retrógrado ($v < 0$) e acelerado ($\alpha \cdot v > 0$).