# 1. Aceleração angular

Consideremos uma partícula em movimento circular de raio *R*. Se num instante $t_1$ sua velocidade angular é $\omega_1$ e no instante $t_2$ (posterior a $t_1$) sua velocidade angular é $\omega_2$, a **aceleração angular média** ($\gamma_m$) entre os instantes $t_1$ e $t_2$ é dada por:

$$\gamma_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

A aceleração angular instantânea ($\gamma$) é definida como sendo o limite da razão $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ para $\Delta t$ tendendo a zero:

$$\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Se $\gamma$ for constante, teremos:

$$\gamma = \gamma_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \quad (1)$$

No SI temos:

$$\text{unidade de } \gamma = \frac{\text{rad/s}}{\text{s}} = \text{rad/s}^2 = \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

A equação dimensional de $\gamma$ é:

$$[\gamma] = T^{-2}$$

Sendo $v_1$ e $v_2$ as velocidades escalares nos instantes $t_1$ e $t_2$, respectivamente, a partir da equação (1) temos:

$$\gamma = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{v_2}{R} - \frac{v_1}{R}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{R}\underbrace{\left(\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}\right)}_{\alpha} = \frac{\alpha}{R}$$

ou:

$$\gamma = \frac{\alpha}{R}$$

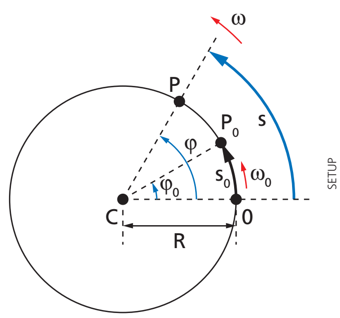
sendo $\alpha$ a aceleração escalar.

# 2. Movimento circular uniformemente variado (MCUV)

O movimento circular uniformemente variado não é periódico, uma vez que, sendo a aceleração linear não nula, cada volta é realizada em intervalos de tempo diferentes, não sendo possível definir período ou frequência para esse movimento.

No MCUV a aceleração angular média coincide com a aceleração angular instantânea.

Considere a figura ao lado, que representa um móvel realizando movimento circular uniformemente variado no sentido anti-horário, considerado positivo. Seja $P_0$ a posição do móvel no instante $t = 0$, caracterizada pela posição inicial $s_0$ e pela velocidade linear inicial $v_0$. As equações horárias da posição *s* e da velocidade *v* e a equação de Torricelli são as seguintes:




$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$v = v_0 + \alpha t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha\Delta s$$

Considerando as grandezas angulares, sendo $\varphi_0$ a posição angular inicial, $\omega_0$ a velocidade angular inicial e $\gamma$ a aceleração angular, podemos obter as respectivas equações angulares dividindo as equações anteriores pelo raio *R* da trajetória ou por $R^2$, no caso da última:

$$\frac{s}{R} = \frac{s_0}{R} + \frac{v_0}{R}t + \frac{\alpha}{R} \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\gamma t^2}{2}$$

$$\frac{v}{R} = \frac{v_0}{R} + \frac{\alpha}{R}t \Rightarrow \omega = \omega_0 + \gamma t$$

$$\frac{v^2}{R^2} = \frac{v_0^2}{R^2} + 2 \cdot \frac{\alpha}{R} \cdot \frac{\Delta s}{R} \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\gamma\Delta\varphi$$

## Exercícios

**1.** A velocidade angular de um móvel em movimento circular aumenta uniformemente de 5,0π rad/s em t = 0 para 12π rad/s em t = 3,5 s. Determine:

a) a aceleração angular;

b) a equação horária da velocidade angular;

c) quantas voltas o corpo executa nesse intervalo de tempo.

**Resolução:**

a) Sendo $\omega_0 = 5{,}0\pi$ rad/s e $\omega = 12\pi$ rad/s, temos:

$\Delta\omega = \omega - \omega_0$

$\Delta\omega = 12\pi - 5{,}0\pi$

$\Delta\omega = 7{,}0\pi$ rad/s

em $\Delta t = 3{,}5$ s

A aceleração angular será:

$$\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\gamma = \frac{7{,}0\pi}{3{,}5}$$

$$\boxed{\gamma = 2{,}0\pi \text{ rad/s}^2}$$

b) A equação horária da velocidade angular obedece à forma $\omega = \omega_0 + \gamma t$. Assim:

$$\boxed{\omega = 5{,}0\pi + 2{,}0\pi t}$$

O deslocamento angular descrito pode ser calculado pela equação de Torricelli:

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\gamma\Delta\varphi$

$144\pi^2 = 25\pi^2 + 2 \cdot 2{,}0\pi \cdot \Delta\varphi$

$\Delta\varphi \cong 29{,}7\pi$ rad

ou pela equação horária do espaço angular:

$$\Delta\varphi = \omega_0 t + \frac{\gamma t^2}{2}$$

$$\Delta\varphi = 5\pi \cdot 3{,}5 + \frac{2\pi \cdot (3{,}5)^2}{2}$$

$\Delta\varphi \cong 29{,}7\pi$ rad

Por regra de três simples e direta:

$$\left.\begin{array}{lcl} 1 \text{ volta} & \text{———} & 2{,}0\pi \text{ rad} \\ n & \text{———} & 29{,}7\pi \text{ rad} \end{array}\right\} n = \frac{29{,}7\pi}{2\pi}$$

$$\boxed{n \cong 14{,}8 \text{ voltas}}$$

**2.** Uma roda gira à razão de 10π rad/s, quando é desligado o motor que a faz funcionar. A partir desse instante, a roda realiza um movimento circular uniformemente variado, parado em 20 s. Determine:

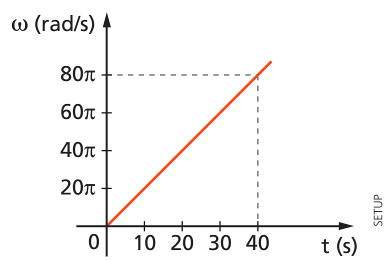
a) a aceleração angular da roda;

b) a equação horária da velocidade angular da roda, a partir do instante em que o motor foi desligado;

c) o número de voltas que a roda realiza, desde que o motor é desligado até parar.

**3.** Uma partícula move-se sobre uma circunferência de raio 2,0 m com aceleração escalar constante e igual a 6,0 m/s². Calcule a aceleração angular do movimento.

Instruções para as questões 4 e 5:
O gráfico representa a velocidade angular, em função do tempo, de uma polia que gira ao redor de um eixo.



**4.** (UF-BA) A aceleração angular da polia é igual a:

a) $2\pi$ rad/s²
b) $15\pi$ rad/s²
c) $20\pi$ rad/s²
d) $100\pi$ rad/s²
e) $200\pi$ rad/s²

**5.** (UF-BA) O número de voltas completas realizadas pela polia, de 0 a 40 s, é igual a:

a) $3,0 \cdot 10^2$
b) $4,0 \cdot 10^2$
c) $8,0 \cdot 10^2$
d) $1,2 \cdot 10^3$
e) $1,6 \cdot 10^3$

**6.** (UF-PE) A parte mais externa de um disco, com 0,25 m de raio, gira com uma velocidade linear de 15 m/s. O disco começa então a desacelerar uniformemente até parar, em um tempo de 0,5 min. Qual o módulo da aceleração angular do disco em rad/s²?

**7.** (Mackenzie-SP) O motor de um ventilador é ligado e, do repouso, seu eixo gasta 4,0 s para atingir uma velocidade cujo módulo permanecerá constante, proporcionando um movimento periódico de 10 Hz. A aceleração angular média desse eixo, nos referidos 4,0 s, foi:

a) 5,0 rad/s²
b) $5,0\pi$ rad/s²
c) 10 rad/s²
d) 20 rad/s²
e) $20\pi$ rad/s²

**8.** (Aman-RJ) Um ponto material parte do repouso e se desloca em MUV sobre um plano horizontal em trajetória circular de 5 metros de raio. Após 10 segundos o ponto material percorreu 100 metros. A velocidade angular do ponto material nesse instante vale:

a) $16 \text{ rad} \cdot s^{-1}$
b) $4 \text{ rad} \cdot s^{-1}$
c) $20 \text{ rad} \cdot s^{-1}$
d) $2 \text{ rad} \cdot s^{-1}$
e) $0,4 \text{ rad} \cdot s^{-1}$

**9.** (UF-PR) Um ventilador gira à razão de 900 rpm. Ao desligá-lo, seu movimento passa a ser uniformemente retardado, até parar após 75 voltas. Qual o tempo decorrido desde o movimento em que foi desligado até a sua parada completa?

**10.** (Mackenzie-SP) Um disco inicia um movimento uniformemente acelerado a partir do repouso e, depois de 10 revoluções, a sua velocidade angular é de 20 rad/s. Podemos concluir que a aceleração angular da roda em rad/s² é aproximadamente igual a:

a) 3,5
b) 3,2
c) 3,0
d) 3,8
e) nenhuma das anteriores