Livro Eletrônico

Aula 02

Matemática III p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - 2019

Italo Marinho Sá Barreto

Aula 02: Quadriláteros.

Sumário

Olá estimado aluno. É um prazer tê-lo conosco neste novo trajeto para o aprendizado da matemática! Sou o professor **Italo Marinho**, formado em matemática pela UERJ; atuo no ensino de matemática e física no estado do Rio de Janeiro há 12 anos com enfoque em concursos militares. Me especializei na produção de materiais didáticos dentro do mesmo enfoque.

A matemática é uma ciência constante. Galera, ela não muda. É sempre a mesma. Sabem o que, de fato, muda? Nossa perspectiva. Nosso objetivo aqui é fazer **você** mudar a forma de ver a matemática. Pode ter a certeza de que a abordagem a ser tomada aqui é diferente de qualquer experiência negativa que você, estudante, possa ter vindo a ter no decorrer de sua vida de estudos. A aeronáutica cobra elementos padronizados em suas provas. Pretendo fazer você visualizar esse padrão e, a partir de muita prática, alcançar seus objetivos. Sem mais delongas, vamos ao que interessa!

Fizemos uma divisão bastante precisa de edital para você, aluno. Separamos a matemática em três grandes partes. A matemática I, a matemática II e a matemática III (a toda linda e bela geometria). Esse livro eletrônico tratará, claro, de geometria. Mas de geometria para concursos militares, que tem um enfoque bastante específico. Antes de você começar a ler esse material, gostaria de fazer algumas ressalvas. Esse material já contemplará mais questões da ESA, mas lembre-se do que sempre te digo: não fique se focando nas questões do seu concurso. Não há muitas, e devemos sim desenvolver nossas técnicas geométricas em termos de outras bancas. Então, cabe a você, estudante, confiar nas reuniões feitas aqui e acreditar na experiência que tenho em sala de aula para identificar os pontos mais baixos de um aluno que almeja a carreira militar. Faça todos os exercícios independente de ser ou não da ESA. Geometria se aprende assim. Coloquei inicialmente algumas questões de concursos mais complicados, devido à complexidade que se pode tomar do assunto. Mas, deixemos de conversa. Então, vamos lá!

DISPONÍVEL	*CONTEÚDO*
Aula 00	*Fundamentos da Geometria Plana: elementos primitivos, axiomas e postulados. Ângulos: definição, elementos, notações, unidades de medida, classificação, ângulos consecutivos, ângulos adjacentes, bissetriz de um ângulo, ângulos opostos pelo vértice, retas paralelas cortadas por transversais. Triângulos: definição, elementos, relações angulares, condição de existência, classificação, cevianas, pontos notáveis, base média, congruência.*
Aula 01	*Teorema de Tales, semelhança de triângulos e teorema das bissetrizes. Relações métricas no triângulo retângulo. Polígonos: definição, elementos, nomenclatura, polígonos côncavos, polígonos convexos, classificação, relações angulares e número de diagonais.*
Aula 02	*Quadriláteros notáveis: definição, elementos, relações angulares, classificação, base média e mediana de Euler.*
Aula 03	*Polígonos regulares: Polígonos regulares inscritos e polígonos regulares circunscritos. Circunferência: definição de circunferência e de círculo, elementos, posições relativas, ângulos na circunferência, quadriláteros inscritíveis, teorema de Pitot,e potência de ponto.*
Aula 04	*Trigonometria: razões trigonométricas no triângulo retângulo, trigonometria num triângulo qualquer (Lei dos senos e dos cossenos)*
Aula 05	*Circunferência trigonométrica, operações com arcos (adição, subtração e arco duplo) e funções trigonométricas.*
Aula 06	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 07	*Áreas de figuras planas.*
Aula 08	*Introdução à Geometria Espacial. Prismas: definição, elementos, classificação, planificação, áreas, volume e casos especiais: cubos e paralelepípedos. Cilindros: definição, elementos, classificação, planificação, áreas e volume.*
Aula 09	*Pirâmides: definição, elementos, classificação, relações métricas na pirâmide, áreas e volume. Cones: definição, elementos, classificação, relação métricas no cone, áreas e volume.*
Aula 10	*Esferas: definição, elementos, secção esférica, área da superfície esférica e volume. Troncos.*
Aula 11	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

1.0– Quadriláteros

1.1– Características gerais dos quadriláteros

Visão geral

Finalmente estamos aqui falando sobre quadriláteros. Estamos indo longe em geometria, não estamos, caro estudante? Parece que foi ontem mesmo que estávamos falando sobre os primeiros conceitos, ponto, reta, plano.

E aí, como você está indo nesse quesito? Estamos indo bem? Você tem estudado? Tem feito seus trabalhos, resumos, revisões? Tem assistido às videoaulas? É muito importante que o faça, jovem, só assim conseguiremos garantir uma aprendizagem de qualidade para você. Confie em mim quando falo isso para você. Sei como pode ser frustrante a aprendizagem sem a perspectiva de resultado. Mas o início é assim mesmo. Estudamos, estudamos, mas não temos muita noção de quando conseguiremos vislumbrar nossa evolução. Faz parte. Essa ilusão de que nada está dando certo nada mais é do que a própria palavra diz: uma ilusão. Continue estudando, estudando e estudando. Não espere pelo conforto chegar para estudar. Estude sob lágrimas de sangue, mas estude. A batalha cerrada e violenta que fará nesse período de sua vida influenciará em TODA ela. Então, vale a pena.

Vamos lá então falar sobre quadriláteros.

Hahaha, tô ligado, coruja. Conheço bem o seu coração, assim como o coração do jovem que lê esse material nesse momento. Nosso coração fica muito machucado enquanto estudamos. Tudo parece dar errado. Tudo parece estar sempre envolto numa maré de caos absoluta. E o pior: esse estudante está com a perspectiva correta: é puro caos mesmo. Estudar, como eu sempre digo, é um ato de desequilíbrio. Devemos tomar muito cuidado com as nossas expectativas, e daí o porquê de eu de vez em quando, tanto em vídeo quanto em texto, encher o saco com minhas ações motivacionais. Vamos indo então, coruja.

O tema quadriláteros é tema super comum nos concursos militares. Devemos conhecer sobre as suas propriedades assim como sobre as suas características mais intrínsecas. Ainda nesse material estudaremos sobre círculos, e em um material seguinte, estudaremos sobre dois tipos super específicos de quadriláteros: os quadriláteros inscritíveis e os quadriláteros circunscritíveis (aonde desenvolveremos o conhecido *Teorema de Pitot*). Mas por enquanto, o que precisamos é descrever detalhadamente e sempre pressa os conceitos que definem e especificam cada um dos quadriláteros.

Bom, um quadrilátero[1] é um polígono de gênero 4 (vimos isso na aula anterior). Vejamos alguns exemplos de quadriláteros

Como vimos na aula imediatamente anterior a essa, os dois primeiros quadriláteros acima são ditos *quadriláteros convexos*. Lembra-se do porquê? É porque quaisquer dois pontos de seu interior são extremidades de um segmento de reta inteiramente contido nesse quadrilátero. Porém, o terceiro quadrilátero exposto na figura anterior é um *quadrilátero côncavo*. Neste material, estaremos interessados somente nos quadriláteros convexos.

Se esquecer não. Muito forte essa expressão. Acho que fica melhor dizer que sua atenção estará majoritariamente voltada para os côncavos. Farei assim simplesmente porque 99% das questões de quadriláteros envolvem os côncavos. Esse 1% é cobrado de forma puramente teórica, portanto bata que você saiba que existem.

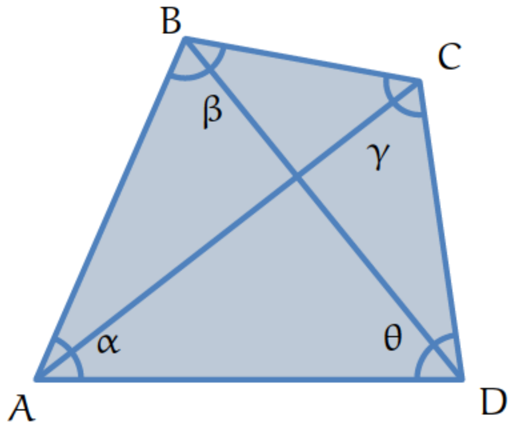
Estudaremos especificamente cinco tipos de quadriláteros: paralelogramos, losangos, retângulos, quadrados e trapézios. Cada um desses carrega suas próprias propriedades. Então, vamos nessa e lembre-se de nos avisar de qualquer dúvida que porventura possa vir a surgir. Sigamos!

Propriedades gerais

Falarei em seguida de algumas propriedades dos quadriláteros em geral. As duas últimas que veremos não são as mais importantes do mundo, mas devem ser consideradas. As outras, porém, são muito importante. Dê-las a devida atenção. Temos de tomar muito cuidado aqui para não julgarmos errado aquilo que devemos ou não estudar. Aliás, esse deve ser um cuidado constante para com a nossa forma de estudar.

[1] Alguns textos se referem a quadriláteros como *quadrângulos*.

- Observe abaixo um quadrilátero convexo qualquer (doravante não mais especificarei que e trata de um quadrilátero convexo; quando não o for, farei a referência para que saiba que se trata de um côncavo; caso contrário sempre estaremos nos referindo a quadriláteros convexos).



Observamos então as suas principais características.

Como todo polígono de gênero 4, ele possui quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos internos. Ainda, lembremo-nos da fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de gênero n:

$$S_n \quad 180^\circ \cdot (n-2).$$

Como em nosso caso estamos interessados em $n \quad 4$, temos:

$$\begin{aligned} S_4 \quad & 180^\circ \cdot (4-2) \\ & 180^\circ \cdot 2 \\ & 360^\circ. \end{aligned}$$

Isso nos diz que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer sempre será igual a 360°.

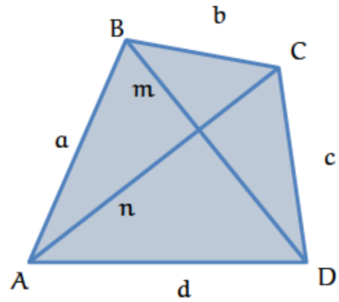
- Todo quadrilátero possui duas diagonais. Podemos verificar isso por simples observação ou utilizando-nos da expressão que nos permite achar a quantidade de diagonais de um polígono de gênero n:

$$d \quad \frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

Em nosso caso, como $n \quad 4$:

$$\begin{aligned} d \quad & \frac{n\cdot(n-3)}{2} \\ & \frac{4\cdot(4-3)}{2} \\ & \frac{4\cdot 1}{2} \\ & 2. \end{aligned}$$

- Observe o quadrilátero abaixo:

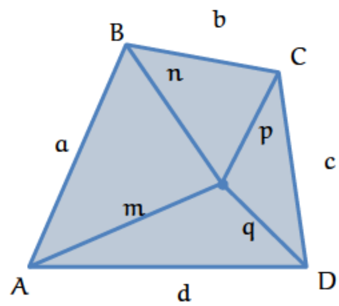


Definimos como p o *semiperímetro* desse quadrilátero. Semiperímetro, aqui, deve ser entendido como a metade da soma dos lados do quadrilátero, isto é: $p \quad \frac{a+b+c+d}{2}$. É claro então que $2p$ será o *perímetro* desse quadrilátero.

Pois bem, acerca disso, é possível demonstrarmos que a soma das medidas das diagonais é um número sempre maior que o semiperímetro e sempre menor que o perímetro desse quadrilátero. Em termos algébricos:

$$p < m + n < 2p.$$

- Observe o quadrilátero abaixo:



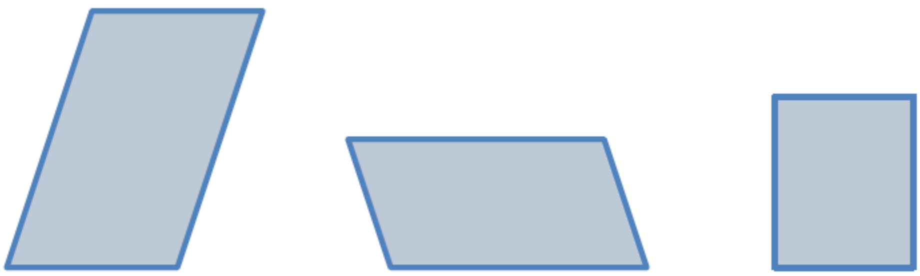
O ponto Q é um ponto qualquer do interior desse quadrilátero. Daí, é possível demonstrarmos o seguinte: a soma das distâncias desses pontos aos vértices do quadrilátero é um número maior que p e sempre menor que $3p$.

Sim, sim, coruja! Para todo e qualquer quadrilátero. São propriedades gerais, são passíveis de utilização para todo o conjunto dos quadriláteros. Veremos, porém, a partir de agora, o conteúdo para os quadriláteros específicos. Trataremos cada um como conteúdos à parte, para que nada fuja à nossa visão. Então, vamos lá!

1.2– Quadriláteros notáveis

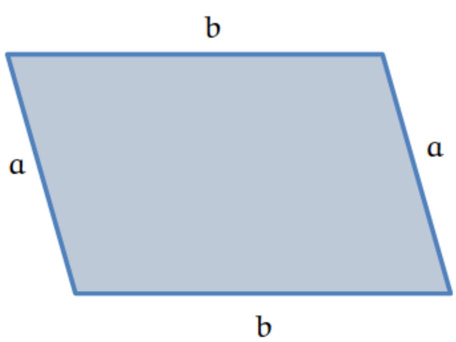
Paralelogramos

Iniciemos então o estudo dos principais quadriláteros, aqueles que mais aparecem em nossos exames. Começaremos pelos paralelogramos, os mais populosos. Paralelogramos são quadriláteros em que os lados opostos são paralelos. Essa é a única condição para que um quadrilátero seja um paralelogramo, de fato. Nada mais é necessário. Veja, então, alguns exemplos de paralelogramos:



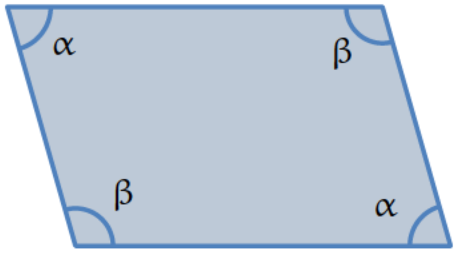
Perceba que, de fato, em todos os exemplos dados, os lados opostos dos quadriláteros são paralelos entre si. Isso é característica fundamental de um paralelogramo (e, inclusive, daí o seu nome). Bom, não demonstraremos aqui as propriedades devidas de um paralelogramo, mas falaremos de cada uma delas. Vejamos:

- Em todo paralelogramo os lados opostos são iguais. Veja como fica a configuração de um paralelogramo qualquer sob esse aspecto:



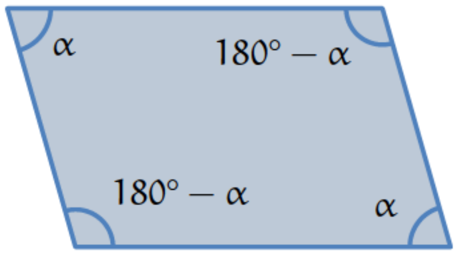
Veja que os lados opostos medem a e b, isso porque se trata de um paralelogramo.

- Em todo paralelogramo os ângulos opostos são iguais. Vejamos isso em uma figura ilustrativa:



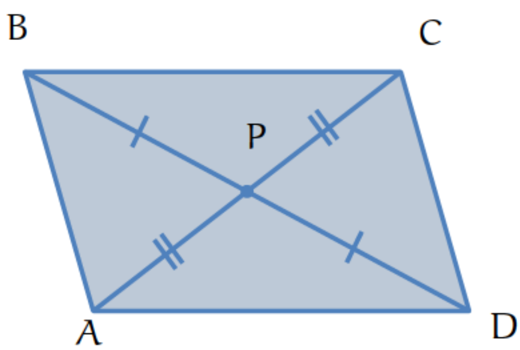
Em nossa figura, os ângulos opostos medem α e β.

- Em todo paralelogramo, ângulos consecutivos são suplementares. Ângulos consecutivos são ângulos que tenham um lado em comum. Veja na figura a seguir:



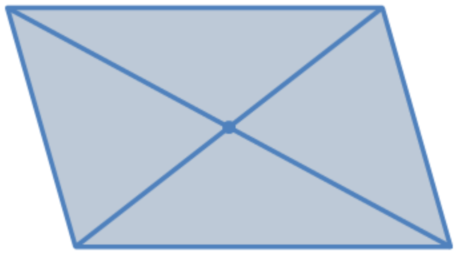
Nessa figura, são suplementares os ângulos α e $180^\circ - \alpha$.

- Ao duas diagonais de qualquer paralelogramo sempre se intersectam em seus pontos médios. Veja na figura a seguir:



Na figura acima, temos: AP CP e BP DP, visto que P é o ponto médio de AC e BD mutuamente.

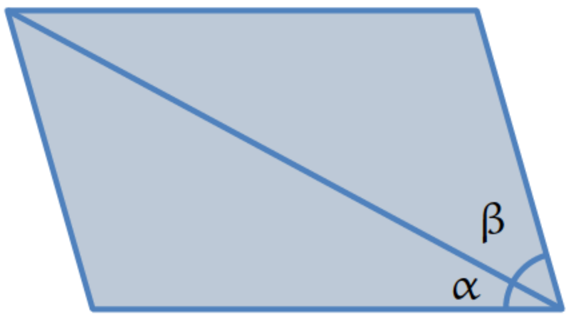
- Observe a figura formada ao traçarmos as duas diagonais de um paralelogramo qualquer:



Pois bem, olha que propriedade útil: TODOS os quatro triângulos menores formados têm a área (ainda não vimos esse conteúdo, mas já vamos deixar essa propriedade exposta aqui para futuras referências). Isso nos ajudará muito em questões em que são pedidas as áreas menores do interior de um paralelogramo, conforme veremos em exercícios futuros.

E essas são as propriedades de um paralelogramo.

Ahh, coruja, pois é. Isso nem sempre é verdade. Parece muito não é mesmo? Muitas vezes a gente vai lá e desenha as diagonais do paralelogramo como bissetrizes e assume aquilo como verdade. Eu mesmo já vi isso acontecer inúmeras vezes com um monte de estudantes desavisados. Você, estudante, que não entendeu o que a nossa querida coruja quis dizer, observe a figura abaixo:

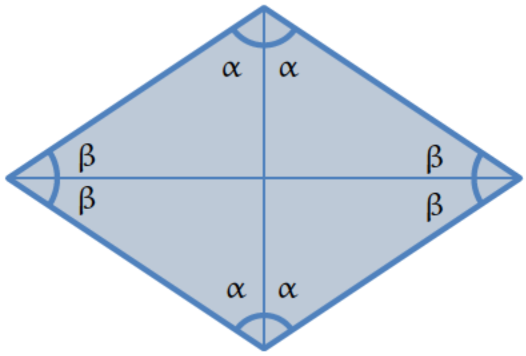


O que a nossa corujinha está achando que é verdade é que, independente do paralelogramo, sempre teremos α β. Isso não é necessariamente verdade. Digo mais. Isso só será verdade para um tipo específico de paralelogramo chamado de *losango*. Serão justamente os próximos quadriláteros a serem analisados. Então, se for um paralelogramo geral, qualquer, não faça α β, pelo amor de Deus!

Losangos

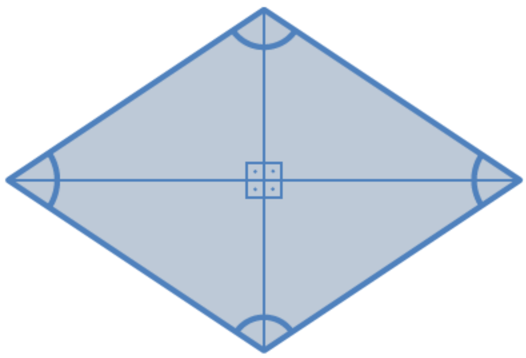
Losangos são paralelogramos equiláteros, isto é, com todos os lados iguais. Percebeu que eu falei que um losango é um paralelogramo também? Isso significa que TODAS as propriedades referentes aos paralelogramos também servem para os losangos. Porém: os losangos possuem propriedades próprias, isto é, exclusivas deles. Vejamos cada uma delas (não são muitas):

- As diagonais de um losango são bissetrizes dos ângulos de onde partem. Veja uma figura ilustrativa:



Veja na figura acima os pares de ângulos formados pelas diagonais: α e β. Isso faz das diagonais bissetrizes de seus ângulos.

- As diagonais de um losango são perpendiculares entre si.



Veja o ângulo reto formado entre elas. Perceba também o utilíssimo fato de que, com isso, ao traçarmos as diagonais desse losango, formarmos quatro *triângulos retângulos congruentes*. é por isso que muitas vezes as questões de losangos são resumidas à utilização do Teorema de Pitágoras. Beleza?

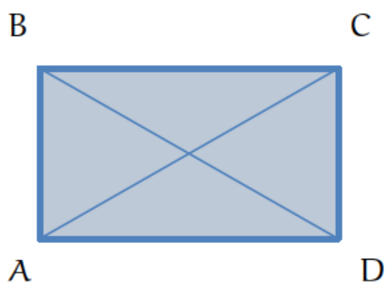
Continuemos então. Agora falaremos sobre os retângulos. Partiu?

Retângulos

Haha, é, de fato, são bastante famosos. E super intuitivos também. Geralmente, o que achamos sobre os retângulos está correto. O que talvez nos falte aqui é saber defini-lo. Você sabe, coruja? Definir o que vem a ser um retângulo? E você, jovem estudante? Sabe definir o que vem a ser um retângulo? Vejamos então detalhadamente a teoria sobre retângulos em sua essência.

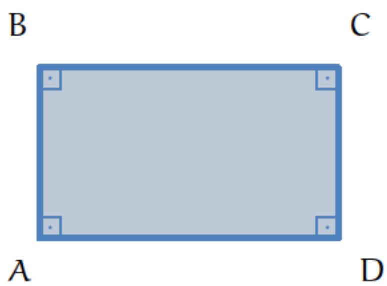
Retângulos são paralelogramos equiângulos, isto é, com todos os ângulos internos iguais. Novamente, citamos aqui que um retângulo também é paralelogramo. Isso faz com que não só o losango mas também o retângulo carregue todas as propriedades dos paralelogramos. Vejamos, a seguir, as propriedades específicas de um retângulo:

- As diagonais de um retângulo têm sempre as mesmas medidas, isto é, são congruentes. Veja:



A figura acima sendo um retângulo, teremos $AC \quad BD$.

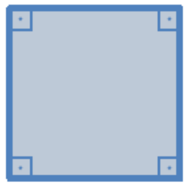
- Todos os ângulos internos de um retângulo são ângulos retos (daí o nome do quadrilátero em questão). Veja:



Não estamos demonstrando os fatos aqui; mas esse é razoavelmente simples de ser demonstrado. Consegue ver o porquê de os ângulos internos de um retângulo terem de ser necessariamente retos?

Quadrados

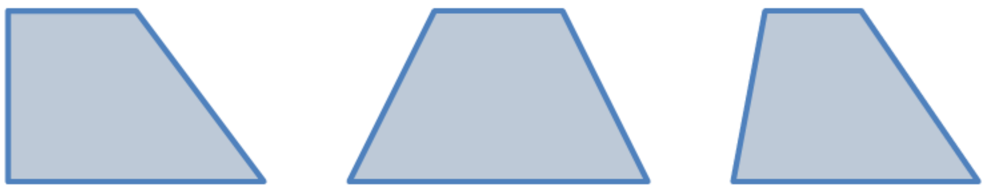
Quadrados são losangos que também são retângulos. Vê a abrangência dessa definição? Isso significa que os quadrados são ao mesmo tempo, paralelogramos, losangos e retângulos, isto é, carregam todas as propriedades anteriores. Veja abaixo o exemplo de um quadrado:



Vemos na figura apresentada que não só os lados de um quadrado são todos iguais mas também todos os seus ângulos internos o são.

Trapézios

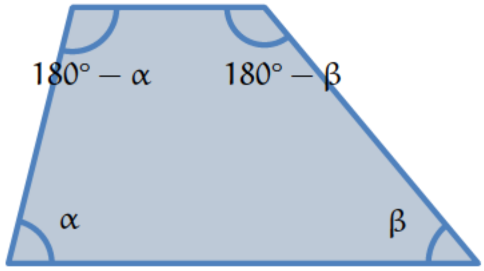
Trapézios são quadriláteros que possuem apenas um par de lados paralelos. Temos aqui o nosso primeiro e único quadrilátero notável que não é um paralelogramo. Possui propriedades super importantes, além de algumas construções geométricas muito recorrentes em provas militares. Seguem abaixo alguns exemplos de trapézios:



O primeiro trapézio da figura é chamado de *trapézio retângulo*, devido aos óbvios ângulos retos nele presentes. O segundo trapézio é dito um *trapézio isósceles*, devido à congruência dos lados não-paralelos. O último trapézio é dito um *trapézio escaleno*, situação em que os dois lados não-paralelos têm medidas diferentes (perceba que, com isso, um trapézio retângulo sempre será um trapézio escaleno; consegue ver o porquê?).

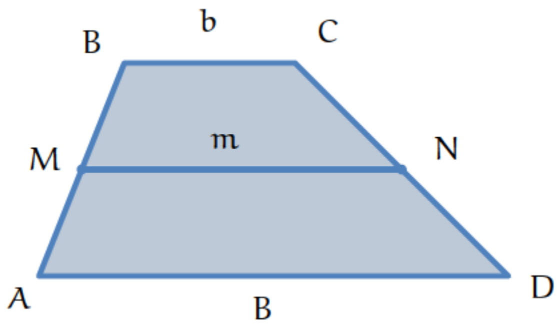
Com isso, vejamos algumas propriedades e construções importantes:

- Ângulos consecutivos sobre lados não-paralelos são sempre suplementares:



Veja então na figura que os ângulos α e $180° - \alpha$, assim como β e $180° - \beta$, são pares suplementares de ângulos. Ambos os pares estão justamente sobre os lados não-paralelos de ângulos.

- Considere um trapézio qualquer, em que foram marcados os pontos médios dos lados não-paralelos:

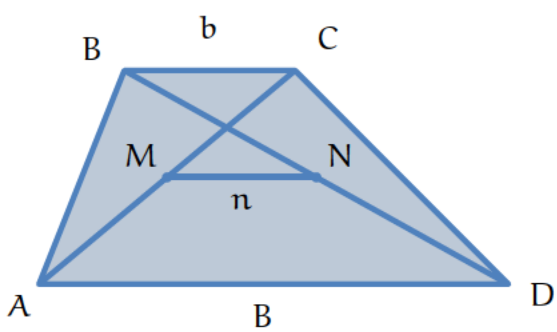


Na figura acima, considere que M seja o ponto médio de AB, assim como N é ponto médio de CD. Ao segmento MN damos o nome de *base média*. É possível demonstrarmos que a base média de um trapézio medirá exatamente a semissoma (média aritmética) entre as suas duas bases. Algebricamente falando:

$$m \quad \frac{B+b}{2}.$$

Além disso, outro fato importante sobre a base média é que ela é *paralela às bases do trapézio*.

- Ainda, considere a figura a seguir, onde foram traçadas as duas diagonais de um trapézio qualquer.

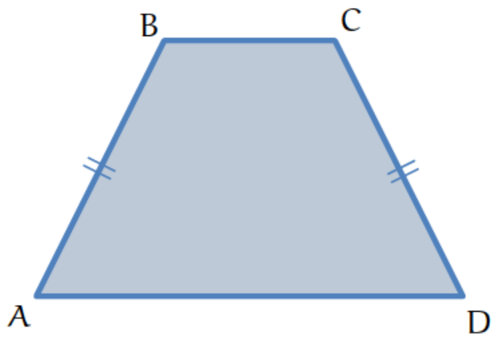


Considere M e N como os pontos médios das diagonais AC e BC, respectivamente. Ao segmento $\overline{MN}$ dá-se o nome de *mediana de Euler*, identificada algebricamente pela letra n. É possível calcular n por meio da expressão a seguir:

$$n \quad \frac{B-b}{2}.$$

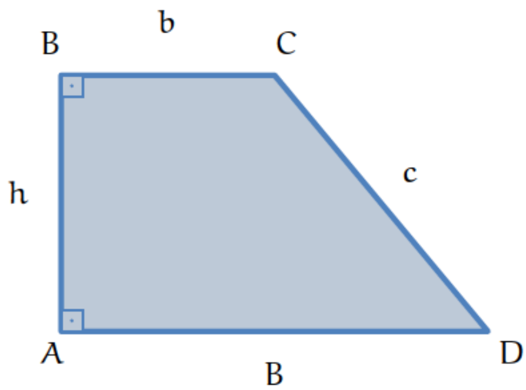
Além disso, outro fato importante sobre a mediana de Euler é que ela é *paralela às bases do trapézio*.

- Em qualquer trapézio isósceles as diagonais têm medidas iguais, isto é, são congruentes. Veja a figura abaixo:

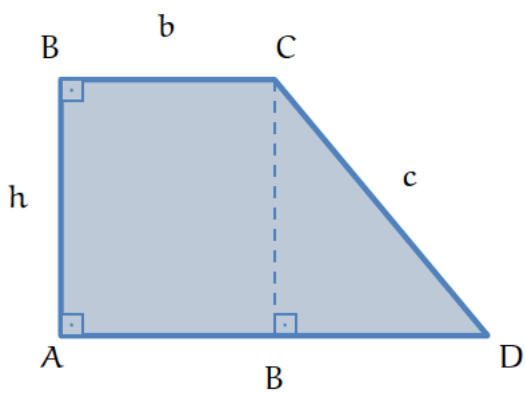


Na figura acima temos um trapézio isósceles (pois $AB \quad CD$) e, por isso, pode-se demonstrar que $AC \quad BD$.

- Considere o trapézio retângulo a seguir:



Podemos sempre baixar a altura AH, formando o triângulo retângulo ABC, muito útil para a resolução de exercícios, como já dito:



Poderíamos montar o Teorema de Pitágoras para tal triângulo, formando a seguinte equação:

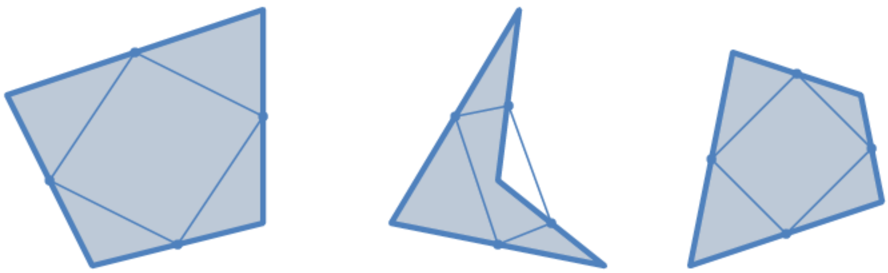
$$c^2 \quad (B-b)^2+h^2.$$

Mas nada de ficar decorando essas fórmulas. Entenda o raciocínio, é muito mais eficiente, ok? Aqui vai um desafio pra você. Considere um ponto M, ponto médio de CD. Tente provar que $BM \quad AM$. Consegue? Tente, e se não conseguir, dê uma olhada nos meus artigos no site do Estratégia Concursos. Terei demonstrado esse fato por lá.

Teorema de Varignon

Por fim, antes de partirmos para os exercícios, aqui vai um teorema razoavelmente desconhecido acerca de quadriláteros em geral (e aqui, até mesmo os côncavos entram na história).

Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Sejam também M, N, P e Q os pontos médios dos lados desse quadrilátero. Então, certamente $MNPQ$ é um paralelogramo. Não demonstrarei esse teorema aqui, mas observe abaixo alguns exemplos desse teorema em ação:

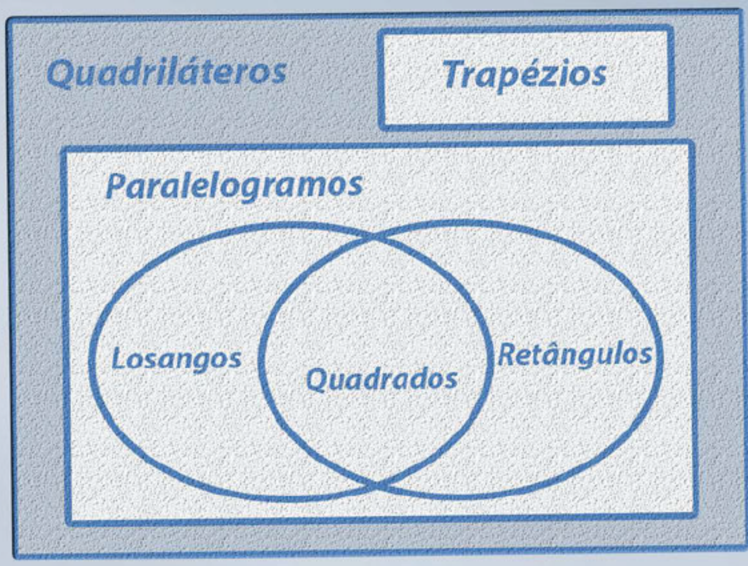


Vemos na figura acima três quadriláteros com seus pontos médios destacados. Perceba que ao conectá-los, formamos o então dito paralelogramo.

Hahaha, eu me lembro. Pois é, parece mágica mesmo. Mas na verdade podemos mostrar que isso é sempre verdade simplesmente traçando as diagonais do quadrilátero em questão e trabalharmos usando as bases médias dos triângulos formados. Já para quadriláteros côncavos fica um pouco mais complicado de demonstrarmos. Ainda assim, tudo, tudo, TUDO tem um porquê. O estudante esperto é aquele que procura saber esses porquês. Menos esperto é quele que acha que pode pular as demonstrações ou deixar para lá. Bom, vamos continuando

Finalmente, segue abaixo um resumo bem básico, do ponto de vista de conjuntos, de como os quadriláteros notáveis se dispõem no universo dos quadriláteros.

Divisão dos quadriláteros notáveis



E agora, vamos para os exercícios! Somente assim conseguiremos assentar esse conteúdo na nossa cabeça. Partiu então?

QUESTÕES PARA MEMORIZAÇÃO

QUESTÃO 1

Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Todo retângulo que tem dois lados congruentes é quadrado.

b) Todo paralelogramo que tem dois lados adjacentes congruentes é losango.

c) Se um paralelogramo tem dois ângulos de vértices consecutivos congruentes, então ele é um retângulo.

d) Se dois ângulos opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.

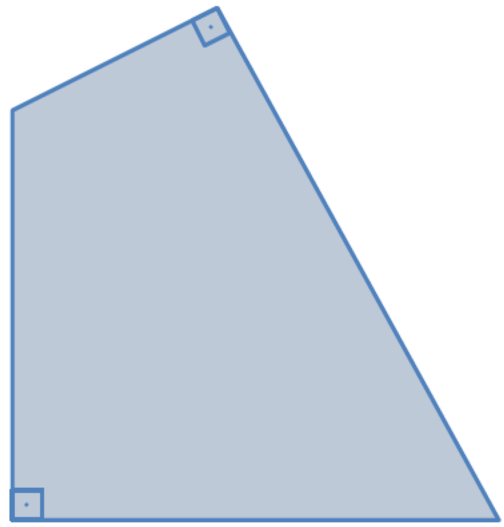
R: Vamos lá então começar a comentar essas afirmações:

a) **Falso.** É falso, porque na verdade *qualquer* retângulo tem dois lados congruentes (aqueles opostos entre si). O correto seria dizer que se dois retângulos têm dois lados *consecutivos* congruentes será, então, quadrado.

b) **Verdadeiro.** De fato, se dois lados adjacentes são congruentes, todos os outros também serão, visto que lados opostos de qualquer paralelogramo são iguais.

c) **Verdadeiro.** Ângulos consecutivos de um paralelogramo são sempre suplementares. Se são congruentes, só podem medir 90° tratando-se, portanto, de um retângulo.

d) **Falso.** Veja abaixo um exemplo:



Temos um quadrilátero com dois ângulos opostos congruentes e nem por isso temos um paralelogramo.

QUESTÃO 2

Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se dois lados de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.

b) Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.

c) Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então ele é um paralelogramo.

R: Continuemos, então, a comentar as afirmativas feitas:

a) **Falso.** Um trapézio isósceles, por exemplo, tem dois lados opostos iguais, mas não é um paralelogramo.

b) **Falso.** Mesma justificativa anterior. Um trapézio isósceles serve de contra-exemplo para essa afirmativa.

c) **Verdadeiro.** De fato, ao traçarmos dois segmentos paralelos de mesmas medidas, os outros dois que conectam suas extremidades a fim de formar um polígono serão necessariamente paralelos.

QUESTÃO 3

Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) As diagonais de um losango são congruentes.

b) As diagonais de um retângulo são perpendiculares.

c) As diagonais de um retângulo são bissetrizes dos seus ângulos.

d) As diagonais de um paralelogramo são bissetrizes dos seus ângulos.

e) As diagonais de um quadrado são bissetrizes de seus ângulos e são perpendiculares.

f) Se as diagonais de um quadrilátero são bissetrizes de seus ângulos, então ele é um losango.

g) Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares, então elas são bissetrizes dos ângulos dele.

h) Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e perpendiculares, então ele é um quadrado.

R: Próximas afirmativas, vamos lá:

a) **Falso.** Nem em todo losango isso acontece. Acontecerá apenas se esse losango também for quadrado.

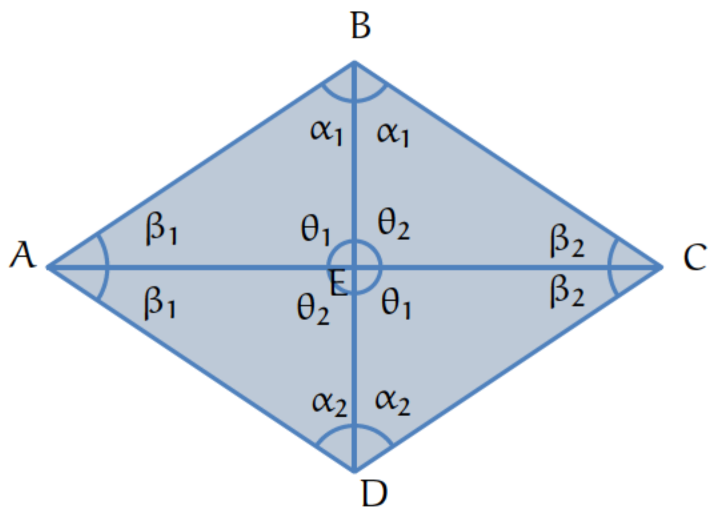
b) **Falso.** Novamente, isso só acontecerá se esse retângulo for quadrado.

c) **Falso.** Isso novamente só acontece quando esse retângulo for quadrado.

d) **Falso.** Somente acontecerá esse fato quando esse paralelogramo for losango. Caso contrário, nada feito.

e) **Verdadeiro.** Um quadrado é um paralelogramo que é ao mesmo tempo um losango e um retângulo. O fato de ser losango por si só já garante o perpendicularismo das diagonais e o fato de serem bissetrizes.

f) **Verdadeiro.** Vamos a uma justificativa. Considere o quadrilátero abaixo aonde traçamos as diagonais como bissetrizes:



Agora, vamos fazer algumas conclusões geométricas. O ângulo θ_2 é externo do triângulo ABE, e portanto, $\theta_2 \quad \alpha_1 + \beta_1$. Da mesma forma, θ_1 é externo do triângulo BCE, e portanto, $\theta_1 \quad \alpha_1 + \beta_2$.

Os outros dois ângulos θ_1 e θ_2 permitem concluir ainda que: $\theta_1 \quad \alpha_2 + \beta_1$ e $\theta_2 \quad \alpha_2 + \beta_2$.

Ainda, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $360°$. Então:

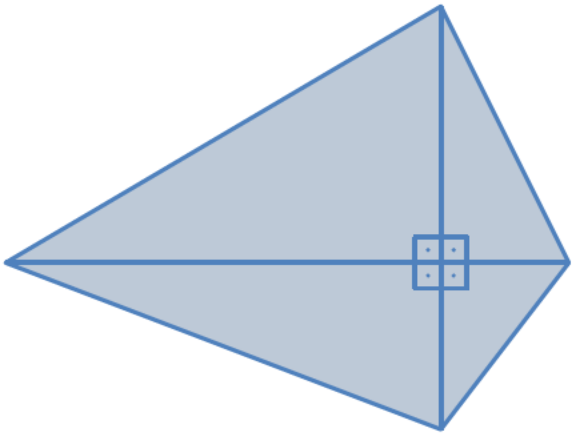
$$
\begin{aligned}
2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\alpha_2 + 2\beta_2 &\quad 360° \\
\underbrace{\alpha_1 + \beta_1}_{\theta_2} + \underbrace{\alpha_2 + \beta_2}_{\theta_2} &\quad 180° \\
2\theta_2 &\quad 180° \\
\theta_2 &\quad 90°.
\end{aligned}
$$

Daí $\theta_1 \quad 180° - 90° \quad 90°$ e, portanto, $\theta_1 \quad \theta_2$. Logo:

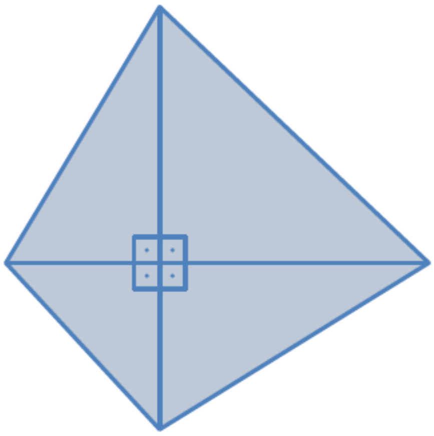
$$
\begin{aligned}
\alpha_1 + \beta_1 &\quad \alpha_1 + \beta_2 \\
\cancel{\alpha_1} + \beta_1 &\quad \cancel{\alpha_1} + \beta_2 \\
\beta_1 &\quad \beta_2.
\end{aligned}
$$

isso permite concluir que $\alpha_1 \quad \alpha_2$ e, portanto, $AB \quad BC \quad CD \quad AD$, fazendo de $ABCD$ um losango.

g) **Falso.** Veja abaixo um quadrilátero que satisfaz as condições apresentadas e que, nem por isso, tem diagonais como bissetrizes.

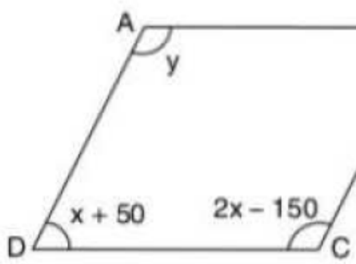


h) **Falso.** Veja a figura abaixo, representando um quadrilátero com duas diagonais congruentes e que, nem por isso, é um quadrado.



QUESTÃO 4

Na figura, calcule y.



(a) $\dfrac{80°}{3}$

(b) $\dfrac{110°}{3}$

(c) $\dfrac{130°}{3}$

(d) $\frac{140^\circ}{3}$

(e) $\frac{160^\circ}{3}$

R: Visto que dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são sempre suplementares, temos:

$$
\begin{aligned}
2x - 150^\circ + x + 50^\circ &\quad 180^\circ \\
3x - 100^\circ &\quad 180^\circ \\
3x &\quad 280^\circ \\
x &\quad \frac{280^\circ}{3}.
\end{aligned}
$$

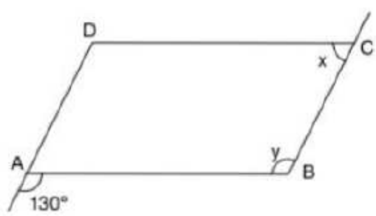
Como y e $x + 50^\circ$ também são consecutivos:

$$
\begin{aligned}
y + x + 50^\circ &\quad 180^\circ \\
y + \frac{280^\circ}{3} + 50^\circ &\quad 180^\circ \\
y &\quad 130^\circ - \frac{280^\circ}{3} \\
y &\quad \frac{390^\circ - 280^\circ}{3} \\
y &\quad \frac{110^\circ}{3}.
\end{aligned}
$$

Gabarito: B

QUESTÃO 5

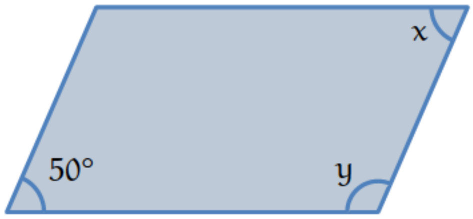
Calcule x e y.



(a) $x \quad 50^\circ$ e $y \quad 130^\circ$.

(b) $x \quad 130^\circ$ e $y \quad 50^\circ$.
(c) $x \quad 40^\circ$ e $y \quad 140^\circ$.
(d) $x \quad 60^\circ$ e $y \quad 120^\circ$.
(e) $x \quad 70^\circ$ e $y \quad 110^\circ$.

R: Vejamos a figura com o ângulo suplementar de 130°:



Como y e 50° são suplementares, podemos afirmar que $y \quad 180^\circ - 50^\circ \quad 130^\circ$ (poderíamos ter tirado essa conclusão verificando que y e 130°, na figura, são alternos externos; consegue ver isso, jovem estudante?).
Ainda, visto que ângulos opostos de um paralelogramo são sempre congruentes, temos $x \quad 50^\circ$.

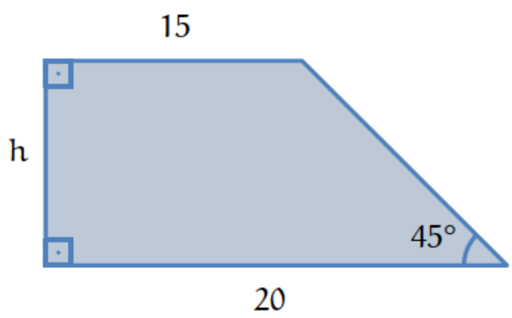
Gabarito: A

QUESTÃO 6

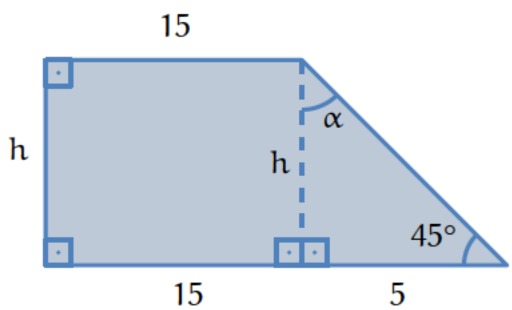
Em um trapézio retângulo em que o ângulo agudo mede 45°, temos as bases medindo $20\,\text{cm}$ e $15\,\text{cm}$. Calcule a altura desse trapézio.

(a) $5\,\text{cm}$
(b) $10\,\text{cm}$
(c) $15\,\text{cm}$
(d) $20\,\text{cm}$
(e) $25\,\text{cm}$

R: Observemos a figura formada:



Aqui, estudante, gostaria de chamar a sua atenção para algo. Em seguida, eu farei um traçado que, à primeira vista, poderia elevar à sua cabeça a seguinte pergunta: *mas como eu ia pensar nisso?*. Essa é a verdadeira razão de exercitarmos nossa geometria com resolução de questões. É para que você quando se depare com uma questão mais complicada, não seja pego de surpresa. Fazer muitas questões é o segredo para que reconheçamos os padrões do que chamam por aí de "pegadinhas". Baixando uma altura desse trapézio, obtemos a seguinte configuração:



Veja que no triângulo retângulo formado:

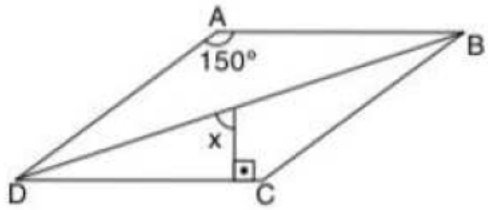
$$\begin{aligned} \alpha + 90^\circ + 45^\circ &\quad 180^\circ \\ \alpha + 135^\circ &\quad 180^\circ \\ \alpha &\quad 180^\circ - 135^\circ \\ \alpha &\quad 45^\circ. \end{aligned}$$

Vemos então que aquele triângulo além de retângulo é também isósceles. E daí, portanto, $h \quad 5\,\text{cm}$.

Gabarito: A

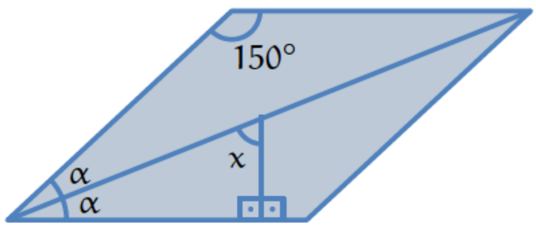
QUESTÃO 7

No losango, calcule x.



(a) $15°$
(b) $30°$
(c) $45°$
(d) $60°$
(e) $75°$

R: Vamos lá então, utilizemos as propriedades do losango. Sabemos que as diagonais de um losango são bissetrizes dos ângulos de onde partem. Entao, podemos desenhar:



Os ângulos 2α e $150°$ são suplementares, visto que dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são sempre suplementares. Então:

$$\begin{aligned} 2\alpha + 150° &\quad 180° \\ 2\alpha &\quad 180° - 150° \\ 2\alpha &\quad 30° \\ \alpha &\quad 15°. \end{aligned}$$

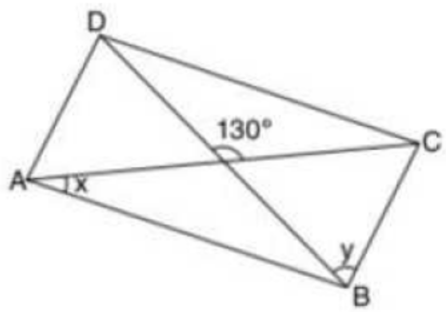
No triângulo retângulo formado, finalmente:

$$\begin{aligned} \alpha + x + 90^\circ &\quad 180^\circ \\ 15^\circ + x + 90^\circ &\quad 180^\circ \\ 105^\circ + x &\quad 180^\circ \\ x &\quad 180^\circ - 105^\circ \\ x &\quad 75^\circ. \end{aligned}$$

Gabarito: E

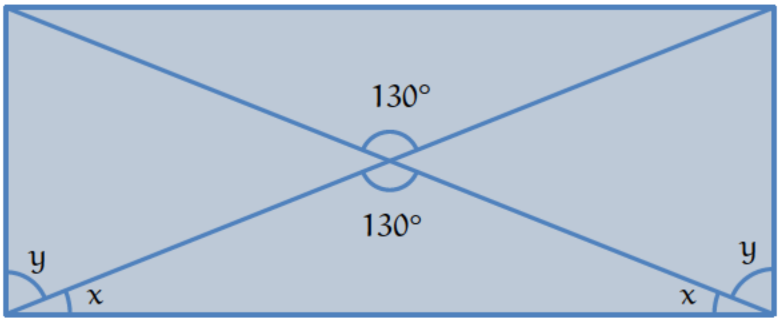
QUESTÃO 8

Sendo $ABCD$ um retângulo, calcule x e y.



(a) $x \quad 15^\circ$ e $y \quad 75^\circ$
(b) $x \quad 20^\circ$ e $y \quad 70^\circ$
(c) $x \quad 25^\circ$ e $y \quad 65^\circ$
(d) $x \quad 30^\circ$ e $y \quad 60^\circ$
(e) $x \quad 35^\circ$ e $y \quad 55^\circ$

R: Observemos a figura:



Termos então:

$$
\begin{aligned}
x + x + 130^\circ &\quad 180^\circ \\
2x &\quad 180^\circ - 130^\circ \\
2x &\quad 50^\circ \\
x &\quad 25^\circ
\end{aligned}
$$

Para calcularmos y:

$$
\begin{aligned}
x + y &\quad 90^\circ \\
25^\circ + y &\quad 90^\circ \\
y &\quad 90^\circ - 25^\circ \\
y &\quad 65^\circ.
\end{aligned}
$$

Gabarito: C

QUESTÃO 9

Em um losango, a medida do ângulo obtuso é igual ao triplo da medida do ângulo agudo. Calcule a diferença entre um dos ângulos obtusos e um dos ângulos agudos.

(a) 30°
(b) 45°
(c) 60°
(d) 75°

(e) 90°

R: São dois ângulos agudos (α) e dois ângulos obtusos (3α). Como a soma dos ângulos de qualquer quatrilátero é 360°:

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + 3\alpha + 3\alpha &\quad 360^\circ \\ 8\alpha &\quad 360^\circ \\ \alpha &\quad \frac{360^\circ}{8} \\ \alpha &\quad 45^\circ. \end{aligned}$$

Então os ângulos agudos medem 45° e os obtusos $3 \cdot 45^\circ \quad 135^\circ$. Logo, $135^\circ - 45^\circ \quad 90^\circ$.

Gabarito: E

QUESTÃO 10

A medida de cada ângulo obtuso de um losango é expressa por $2x + 5^\circ$ e a medida de cada ângulo agudo, por $x + 40^\circ$. Calcule a diferença entre um dos ângulos obtusos e um dos ângulos agudos.

(a) 5°
(b) 10°
(c) 15°
(d) 20°
(e) 25°

R: Somando os quatro ângulos internos de um quadrilátero, como já vimos, encontramos 360°. Daí:

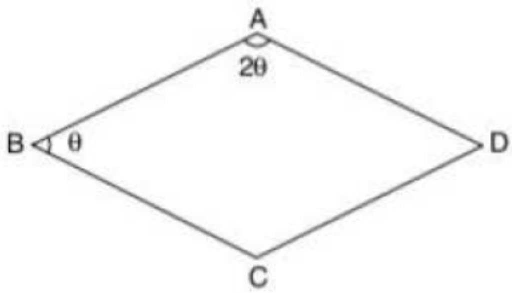
$$\begin{aligned} (2x + 5^\circ) + (2x + 5^\circ) + (x + 40^\circ) + (x + 40^\circ) &\quad 360^\circ \\ 6x + 90^\circ &\quad 360^\circ \\ 6x &\quad 360^\circ - 90^\circ \\ 6x &\quad 270^\circ \\ x &\quad 45^\circ. \end{aligned}$$

Daí o ângulo obtuso mede: $2x + 5° \quad 2 \cdot 45° + 5° \quad 95°$. O agudo mede, portanto, $180° - 95° \quad 85°$ (já que, como já cansamos de ver, ângulos consecutivos de um paralelogramo são sempre suplementares). Portanto, a diferença entre os ângulos é $95° - 85° \quad 10°$.

Gabarito: B

QUESTÃO 11

Na figura a seguir, tem-se representado o losango $ABCD$, cuja diagonal menor mede $4\,\text{cm}$.



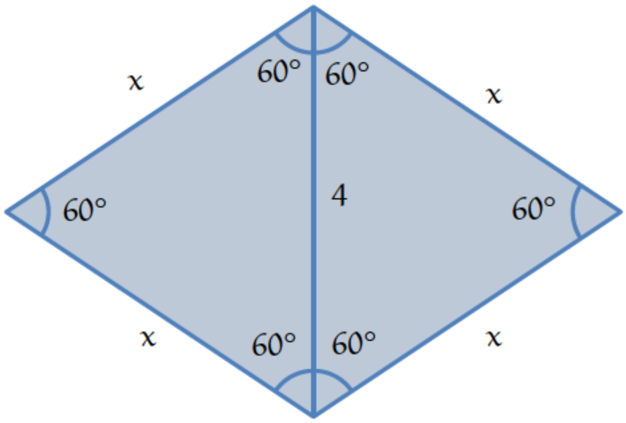
A medida do lado desse losango, cm centímetros, é:

(a) $6\sqrt{2}$
(b) $4\sqrt{2}$
(c) $2\sqrt{2}$
(d) 6
(e) 4

R: Os ângulos θ e 2θ são suplementares. Logo:

$$\begin{aligned} \theta + 2\theta &\quad 180° \\ 3\theta &\quad 180° \\ \theta &\quad 60°. \end{aligned}$$

Podemos desenhar a figura da seguinte forma, então, lembrando-nos de que as diagonais de um losango sempre são bissetrizes de seus ângulos:

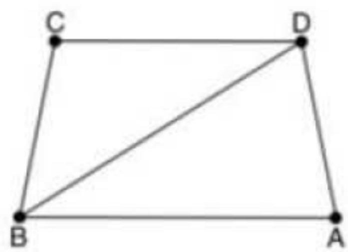


Os triângulos formados são, portanto, equiláteros (por terem todos os seus ângulos internos iguais), e daí $x \quad 4\,\text{cm}$.

Gabarito: E

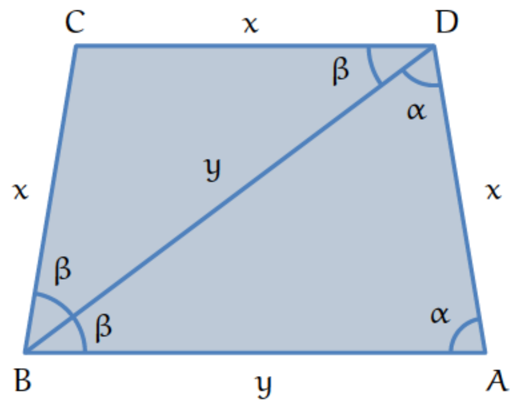
QUESTÃO 12

No trapézio da figura, $AD \quad DC \quad CB$ e $BD \quad BA$. Calcule o ângulo $\hat{A}$.



(a) $6°$
(b) $18°$
(c) $36°$
(d) $54°$
(e) $72°$

R: Observemos a figura:



Os dois ângulos α no triângulo ABD são justificados pelo fato de ser isósceles. Os dois ângulos β no triângulo BCD são justificados pela mesma razão.

Já $\angle DBA \quad \beta$ porque é alterno interno com $\angle BDC$. Daí, temos que $\alpha \quad 2\beta$, pois o trapézio é isósceles ($BC \quad AD$). Somando os ângulos internos do triângulo BDA:

$$\begin{aligned} \beta + \alpha + \alpha &\quad 180^\circ \\ \beta + 2\alpha &\quad 180^\circ \\ \beta + 2 \cdot 2\beta &\quad 180^\circ \\ \beta + 4\beta &\quad 180^\circ \\ 5\beta &\quad 180^\circ \\ \beta &\quad 36^\circ. \end{aligned}$$

Gabarito: C

QUESTÕES COMENTADAS

(EEAR-2002) QUESTÃO 13

Dadas as afirmações:

I. Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares.

II. Quaisquer dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

III. Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e se cruzam no seu ponto médio, então este paralelogramo é um losango.

Pode-se garantir que

(a) todas são verdadeiras.
(b) apenas I e II são verdadeiras.
(c) apenas I e III são verdadeiras.
(d) apenas II e III são verdadeiras.

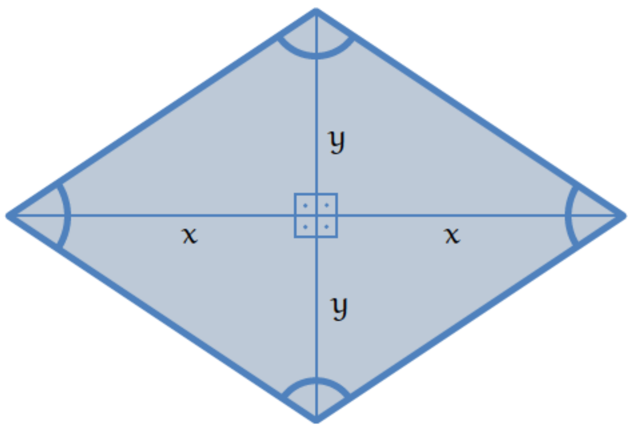
R: Comentemos afirmação por afirmação:

I. Isso não é necessariamente verdade. Não podemos afirmar que qualquer quadrilátero terá essa propriedade. Apresenremos em aulas seguintes que os únicos quadriláteros que possuem essa propriedade específica são os quadriláteros *inscritíveis*[2].

II. De fato, contanto que sejam consecutivos, serão suplementares, como vimos. Afirmação verdadeira.

III. Parece ser verdadeira, não é? Vamos tentar mostrar que isso é, de fato, verdade.

[2] Quadriláteros cujos vértices pertencem a uma mesma circunferência

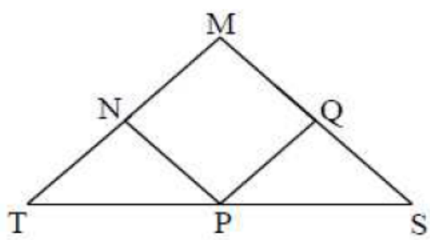


Veja que os quatro triângulos formados são congruentes pelo caso LAL de congruência de triângulos e, portanto, o lado restante é igual para todos. Isso nos diz que esse quadrilátero tem todos os seus lados iguais e, portanto, trata-se de fato de um losango.

Gabarito: D

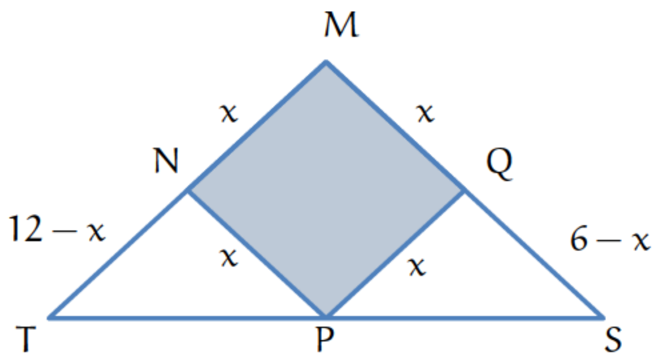
(EEAR-2002) QUESTÃO 14

Na figura, $MNPQ$ é um losango. Se $MT \quad 12$cm e $MS \quad 6$cm, então o lado do losango, em cm, mede



(a) 2.
(b) 4.
(c) 8.
(d) 12.

R: Temos de redesenhar a figura para podermos ter uma melhor noção do que faremos. Lembrando-nos de que losangos são quadriláteros em que todos os lados são iguais:



Podemos fazer então uma semelhança entre os triângulos MTS e NTP:

$$\begin{array}{rl}
\dfrac{NT}{MT} & \dfrac{NP}{MS} \\
\dfrac{12-x}{12} & \dfrac{x}{6} \\
\dfrac{12-x}{2} & x \\
2x & 12-x \\
2x+x & 12 \\
3x & 12 \\
x & 4.
\end{array}$$

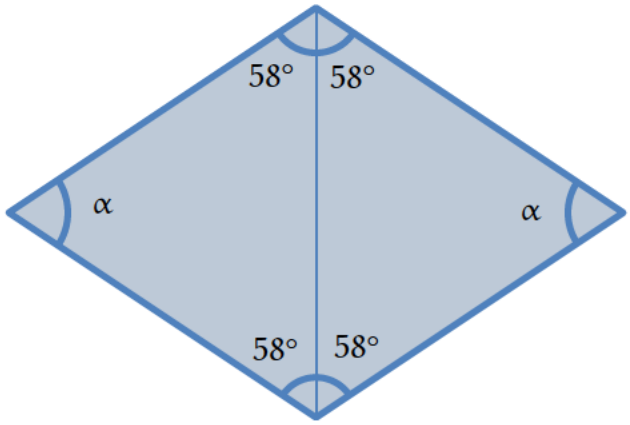
Dessa forma concluímos que o lado desse losango mede $4\,\text{cm}$.

Gabarito: B

(EEAR-2003) QUESTÃO 15

Em um losango, uma diagonal forma um ângulo de $58°$ com um de seus lados. A medida do menor ângulo desse losango é

(a) $58°$
(b) $64°$
(c) $116°$
(d) $122°$



R: Observe a figura formada:

Um dos ângulos desse losango é $58° + 58° \quad 116°$. Como todo losango também é um paralelogramo, temos que ângulos consecutivos sempre são suplementares; portanto:

$$\begin{aligned} \alpha + 116° &\quad 180° \\ \alpha &\quad 180° - 116° \\ \alpha &\quad 64°. \end{aligned}$$

O menor ângulo interno desse losango é, então, $64°$.

Gabarito: B

(EEAR-2003) QUESTÃO 16

Seja P o conjunto dos retângulos, Q o conjunto dos quadrados e L o conjunto dos losangos. É correto afirmar que

(a) $L \cap P \quad L - P$
(b) $L \cap Q \quad L - Q$
(c) $L \cap Q \quad P$
(d) $L \cap P \quad Q$

R: Visto que um quadrado é ao mesmo tempo um losango e um retângulo, temos que o conjunto de todos os quadrados é a interseção entre o conjunto dos retângulos e o conjunto dos losangos. Logo, $L \cap P \quad Q$.

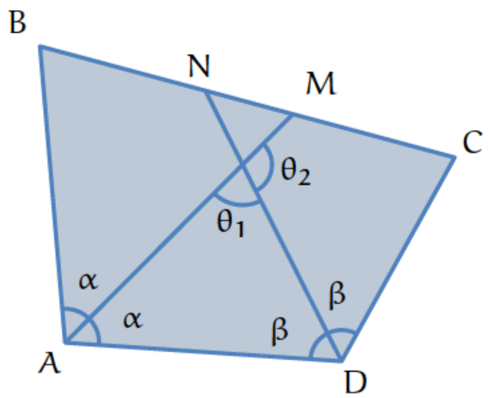
Gabarito: D

(EEAR-2003) QUESTÃO 17

Num quadrilátero convexo, a soma de dois ângulos internos consecutivos é 190°. O maior dos ângulos formados pelas bissetrizes internas dos outros dois ângulos desse quadrilátero mede

(a) 105°
(b) 100°
(c) 95°
(d) 85°

R: Questão um pouco difícil de se compreender, mas tenha calma que tudo dá certo. Vamos lá:



Veja que AM e DN são as bissetrizes dos ângulos $\hat{D}AB$ e $\hat{C}DA$, respectivamente. Essas bissetrizes formam, entre si, os ângulos θ_1 e θ_2. A questão pede o maior deles, visto que ela quer saber qual é o maior ângulo formado entre as bissetrizes.
A questão também afirma que a soma de dois ângulos consecutivos é 190°. Então, temos que:

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2\beta &\quad 190^\circ \\ 2(\alpha + \beta) &\quad 190^\circ \\ \alpha + \beta &\quad 95^\circ. \end{aligned}$$

Visto que θ_2 é um ângulo externo do triângulo formado, temos que:

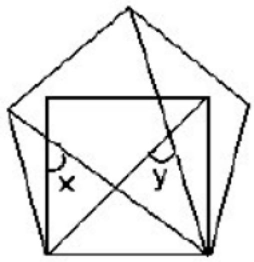
$$\begin{aligned} \theta_2 &\quad \alpha + \beta \\ &\quad 95^\circ. \end{aligned}$$

Vemos que $\theta_1 < \theta_2$, e portanto, o maior dos ângulos formados é $95°$.

Gabarito: C

(EEAR-2004) QUESTÃO 18

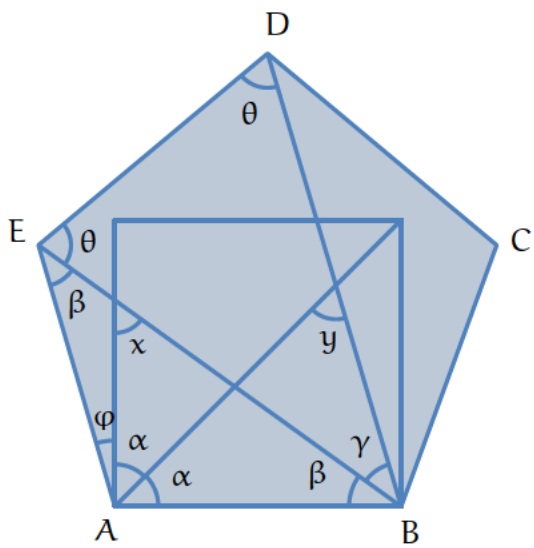
Na figura, tem-se um pentágono regular e um quadrado.



O valor de $x + y$ é

(a) $126°$.
(b) $102°$.
(c) $117°$.
(d) $114°$.

R: Outra questão razoavelmente complexa. Vejamos a figura redesenhada e com alguns ângulos marcados:



Os dois ângulos α marcados são iguais porque em todo losango as diagonais são bissetrizes (lembre-se de que um quadrado também é um losango). Visto que $ABCDE$ é um pentágono regular, seus ângulos internos são:

$$\begin{aligned}
\alpha_i &\quad \frac{180° \cdot (n-2)}{n} \\
\alpha_i &\quad \frac{180° \cdot (5-2)}{5} \\
\alpha_i &\quad \frac{180° \cdot 3}{5} \\
\alpha_i &\quad \frac{540°}{5} \\
\alpha_i &\quad 180°.
\end{aligned}$$

Veja então que os triângulos ABE e BCD são congruentes pelo caso LAL de congruência de triângulos. Então $BE \quad BD$, fazendo com que o triângulo BDE seja isósceles e justificando, com isso, o par de ângulos θ nele marcados. O mesmo serve para justificar o par de ângulos β no triângulo ABE (veja que $\triangle ABE$ é isósceles, pois $AE \quad AB$). Agora vamos começar a encontrar os ângulos mencionados até finalmente chegarmos em x e y, que são os que queremos de fato.
Bom, em primeiro lugar, veja que $\alpha + \alpha \quad 90°$ e com isso $\alpha \quad 45°$.
Veja também que $2\alpha + \varphi \quad 108°$. Como $2\alpha \quad 90°$, temos $\varphi \quad 108° - 90° \quad 18°$.
No triângulo ABE, temos a soma de seus ângulos internos igual a $180°$. Logo:

$$\begin{aligned}
\beta + \beta + 108° &\quad 180° \\
2\beta &\quad 180° - 108° \\
2\beta &\quad 72° \\
\beta &\quad 36°.
\end{aligned}$$

Como $x \quad \varphi + \beta$ (o ângulo externo de um triângulo é sempre igual à soma de seus internos não-adjacentes), temos:

$$\begin{aligned}
x &\quad \varphi + \beta \\
x &\quad 18° + 36° \\
x &\quad 54°.
\end{aligned}$$

Veja que $\beta + \theta \quad 108°$ e portanto:

$$\begin{aligned} \beta + \theta &\quad 108^\circ \\ 36^\circ + \theta &\quad 108^\circ \\ \theta &\quad 108^\circ - 36^\circ \\ \theta &\quad 72^\circ. \end{aligned}$$

Agora, somando os ângulos internos de $\triangle BDE$ temos:

$$\begin{aligned} \theta + \theta + \gamma &\quad 180^\circ \\ 2\theta + \gamma &\quad 180^\circ \\ 2 \cdot 72^\circ + \gamma &\quad 180^\circ \\ 144^\circ + \gamma &\quad 180^\circ \\ \gamma \quad 180^\circ &- 144^\circ \\ \gamma &\quad 36^\circ. \end{aligned}$$

Daí, finalmente, como $\alpha + \beta + \gamma + y \quad 180^\circ$:

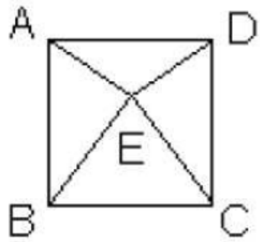
$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + y &\quad 180^\circ \\ 45^\circ + 36^\circ + 36^\circ + y &\quad 180^\circ \\ 117^\circ + y &\quad 180^\circ \\ y &\quad 180^\circ - 117^\circ \\ y &\quad 63^\circ. \end{aligned}$$

Logo, $x + y \quad 63^\circ + 54^\circ \quad 117^\circ$.

Gabarito: C

(EEAR-2004) QUESTÃO 19

Se $ABCD$ é um quadrado e BEC é um triângulo equilátero, então a medida do ângulo $E\hat{A}B$ é



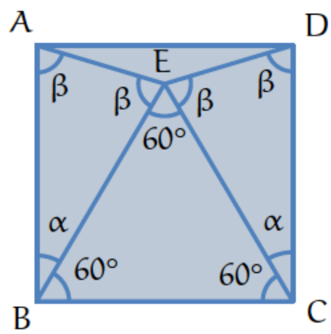
(a) 75°.

(b) 60°.

(c) 30°.

(d) 85°.

R: Identifiquemos alguns ângulos da figura:



Veja que os triângulos ABE e CDE são isósceles porque $AB \quad BC \quad CD \quad CE \quad BE$ (visto que $ABCD$ é um quadrado e BCE é um triângulo equilátero). O ângulo $\angle ABC$ é reto, logo $\alpha \quad 90^\circ - 60^\circ \quad 30^\circ$. Daí, fazendo a soma dos ângulos internos do triângulo ABE:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \beta &\quad 180^\circ \\ 30^\circ + 2\beta &\quad 180^\circ \\ 2\beta &\quad 150^\circ \\ \beta &\quad 75^\circ. \end{aligned}$$

Gabarito: A

(EEAR-2004) QUESTÃO 20

É correto afirmar que

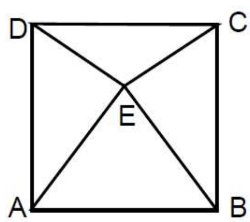
(a) todo quadrilátero de lados congruentes é um quadrado.
(b) os ângulos opostos de qualquer paralelogramo são suplementares.
(c) as bissetrizes dos ângulos opostos de qualquer paralelogramo são perpendiculares entre si.
(d) os pontos médios dos lados consecutivos de todo quadrilátero convexo são vértices de um paralelogramo.

R: Comentemos afirmativa por afirmativa e vamos tentar achar a verdadeira:

(a) Falso. Quadriláteros de lados congruentes são os losangos, e nem todo losango é um quadrado.
(b) Já vimos há pouco que isso só será verdadeiro para quadriláteros inscritíveis. Anunciar isso verdadeiro para qualquer quadrilátero é falso.
(c) Falso. Um quadrado, por exemplo, tem bissetrizes de ângulos opostos coincidentes com a sua diagonal. Consegue ver isso? Digo mais: essa afirmativa proposta nunca será verdadeira. Essas bissetrizes serão, na verdade, sempre *paralelas*. Tente verificar o porquê.
(d) Verdadeiro, trata-se do *teorema de Varignon*.

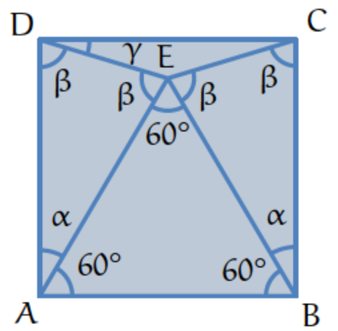
(EEAR-2004) QUESTÃO 21

A figura $ABCD$ é um quadrado, e ABE é um triângulo equilátero.



Nessas condições, a medida do ângulo $E\hat{D}C$ é

(a) $5°$.
(b) $10°$.
(c) $15°$.
(d) $20°$.



R: Questão super parecida com a que fizemos há pouco:

Como já fizemos anteriormente, deduzimos que $\beta \quad 75^\circ$. estamos interessados em γ, então, basta achar o complementar de 75°: $90^\circ - 75^\circ \quad 15^\circ$.

Gabarito: C

(EEAR-2006) QUESTÃO 22

Num trapézio isósceles $ABCD$ as bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ medem, respectivamente, $16\,cm$ e $4\,cm$. Traçando-se $\overline{EF}$ paralelo às bases, sendo $E \in \overline{AD}$ e $F \in \overline{BC}$, obtêm-se os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{DE}$, de modo que $\frac{AE}{DE} \quad \frac{1}{5}$. O comprimento de $\overline{EF}$, em cm, é

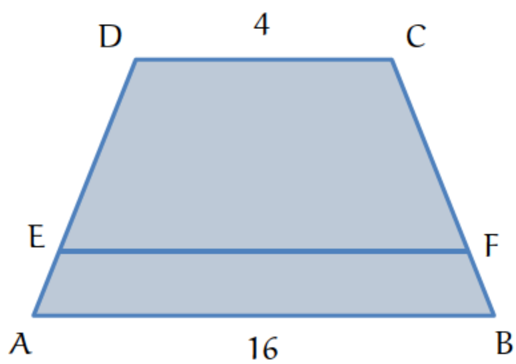
(a) 8.

(b) 10.

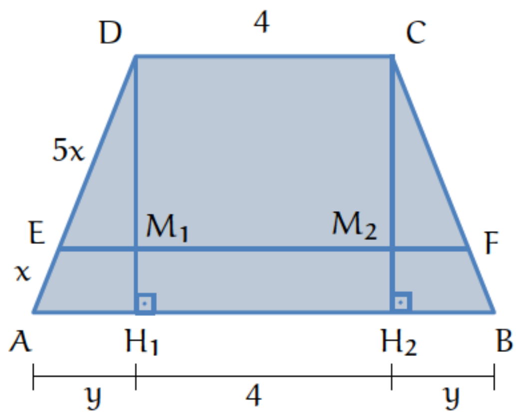
(c) 12.

(d) 14.

R: Temos a seguinte figura:



Para lidarmos com essas circunstâncias, é uma boa ideia traçarmos algumas perpendiculares, como ilustro abaixo:



Veja que nomeei $AE \quad x$. Como $\frac{AE}{DE} \quad \frac{1}{5}$, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{DE} &\quad \frac{1}{5}\\
DE &\quad 5x.
\end{aligned}
$$

Da figura e do informado pela questão, temos:

$$
\begin{aligned}
2y+4 &\quad 16\\
2y &\quad 12\\
y &\quad 6.
\end{aligned}
$$

Agora fazemos uma semelhança entre os triângulos DEM_1 e DAH_1:

$$
\begin{aligned}
\frac{DE}{EM_1} &\quad \frac{DA}{AH_1}\\
\frac{5x}{EM_1} &\quad \frac{5x+x}{6}\\
\frac{5x}{EM_1} &\quad \frac{6x}{6}\\
\frac{5x}{EM_1} &\quad x\\
\frac{5}{EM_1} &\quad 1\\
EM_1 &\quad 5.
\end{aligned}
$$

Temos então finalmente $EF \quad EM_1 + M_1M_2 + M_2F \quad 5+4+5 \quad 14\,\text{cm}$. Essa questão poderia ser resolvida por P.A. também; consegue ver essa forma de resolução? Não se esqueça de dar uma olhada nos artigos da plataforma.

Gabarito: D

(EEAR-2006) QUESTÃO 23

Dois quadrados são tais que um deles tem como lado a diagonal do outro, que por sua vez tem o lado medindo 10cm. O módulo da diferença entre as medidas de suas diagonais, em cm, é

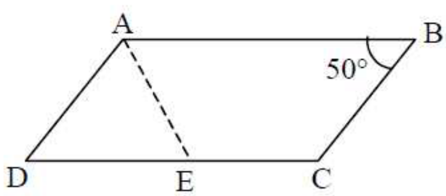
(a) $10(2-\sqrt{2})$
(b) $10(\sqrt{2}-1)$
(c) $5(2-\sqrt{2})$
(d) $5(\sqrt{2}-1)$

R: Essa questão nem necessita da figura. Esse "outro" quadrado, tem lado medindo 10cm. A diagonal de um quadrado pode ser calculada pela expressão $L\sqrt{2}$, onde L é o lado do quadrado; portanto, esse outro quadrado tem $10\sqrt{2}$cm de diagonal.
O primeiro dos quadrados tem lado igual à diagonal deste que acabamos de calcular; logo, o lado desse primeiro quadrado é $10\sqrt{2}$cm. Sua diagonal será, então: $10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ 20. Daí a diferença das diagonais será: $20-10\sqrt{2}$ $10(2-\sqrt{2})$.

Gabarito: A

(EEAR-2008) QUESTÃO 24

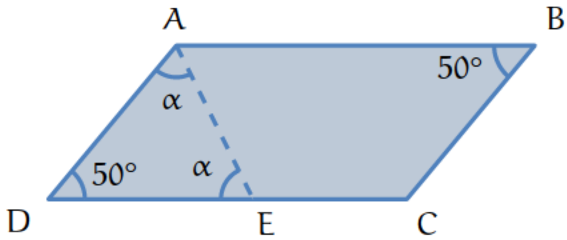
No paralelogramo $ABCD$, AD DE. A medida de $D\hat{E}A$ é



(a) $50°$.
(b) $55°$.
(c) $60°$.

(d) $65°$.

R: Podemos transferir o ângulo $\angle ABC$ para o ângulo $\angle ADE$, pois ângulos opostos de um paralelogramo são sempre iguais. Assim:



Veja ainda que o triângulo ADE é isósceles, daí o par de ângulos α em seu interior.
Daí, basta somar os ângulos internos desse triângulo e encontraremos o ângulo pedido:

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + 50° &\quad 180° \\ 2\alpha &\quad 180° - 50° \\ 2\alpha &\quad 130° \\ \alpha &\quad 65°. \end{aligned}$$

Gabarito: D

(EEAR-2008) QUESTÃO 25

Em um trapézio, a base média mede $6{,}5$ cm e a base maior, 8 cm. A base menor desse trapézio mede, em cm,

(a) 4.
(b) 5.
(c) 6.
(d) 7.

R: Consideremos um trapézio de base maior B e base menor b. Sabemos que a sua base média m pode ser calculada por:

$$m \quad \frac{B+b}{2}.$$

Daí, substituindo o informado pelo problema:

$$\begin{aligned} m &\quad \frac{B+b}{2} \\ 6,5 &\quad \frac{8+b}{2} \\ 6,5\cdot 2 &\quad 8+b \\ 13 &\quad 8+b \\ b &\quad 13-8 \\ b &\quad 5. \end{aligned}$$

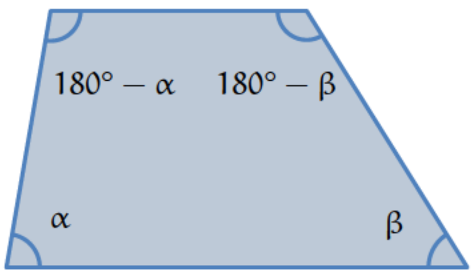
Gabarito: B

(EEAR-2009) QUESTÃO 26

Os ângulos da base maior de um trapézio são complementares, e a diferença entre suas medidas é 18°. O maior ângulo desse trapézio mede

(a) 100°.
(b) 126°.
(c) 144°.
(d) 152°.

R: Observemos esse trapézio com seus ângulos destacados:



Visto que os ângulos da base são complementares, temos $\alpha + \beta \quad 90°$. A diferença entre as suas medidas é 18°, logo $\alpha - \beta \quad 18°$. Montando o sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta \quad 90° \\ \alpha - \beta \quad 18° \end{cases}$$

Somando as duas equações temos:

$$2\alpha \quad 108^\circ$$
$$\alpha \quad 54^\circ.$$

Daí, claro que $\beta \quad 90^\circ - 54^\circ \quad 36^\circ$. O maior ângulo desse trapézio será, então:
$180^\circ - \beta \quad 180^\circ - 36^\circ \quad 144^\circ$.

Gabarito: C

(EEAR-2011) QUESTÃO 27

Um polígono convexo $ABCD$ é tal que apenas dois de seus lados são paralelos entre si e os outros dois lados são congruentes. Dessa forma, pode-se dizer que ABCD é um

(a) losango.
(b) paralelogramo.
(c) trapézio isósceles.
(d) trapézio retângulo.

R: Veja que esse polígono tem quatro lados, e portanto trata-se de um quadrilátero. O único quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos é o trapézio. O trapézio com lados paralelos congruentes é o trapézio isósceles.

Gabarito: C

(EEAR-2012) QUESTÃO 28

Um trapézio de bases $x+3$ e $4x-3$, tem base média $2x+2$. A menor base mede

(a) 7.
(b) 8.
(c) 9.

(d) 10.

R: Apliquemos mais uma vez a nossa fórmula:

$$m \quad \frac{B+b}{2}.$$

Temos:

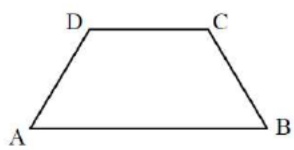
$$\begin{aligned} m &\quad \frac{B+b}{2} \\ 2x+2 &\quad \frac{4x-3+x+3}{2} \\ 2x+2 &\quad \frac{5x}{2} \\ 4x+4 &\quad 5x \\ x &\quad 4. \end{aligned}$$

As bases são: $4+3 \quad 7$ e $4 \cdot 4 - 3 \quad 13$, logo, a menor base mede 7.

Gabarito: A

(EEAR-2013) QUESTÃO 29

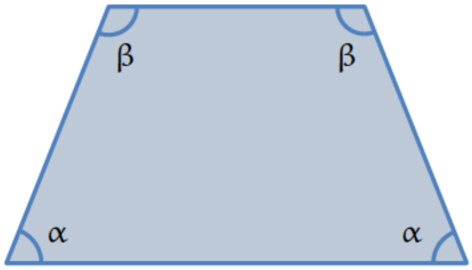
Seja $ABCD$ o trapézio isósceles da figura.



A soma das medidas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ é

(a) $90°$.
(b) $120°$.
(c) $150°$.
(d) $180°$.

R: Na figura podemos perceber que como se trata de um trapézio isósceles, os ângulos nas bases são congruentes. Temos então:

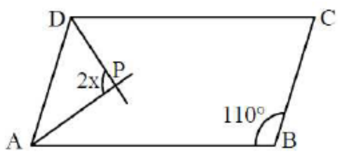


Queremos $\alpha + \beta$. Como ângulos consecutivos sobre os lados não-paralelos de um trapézio são suplementares, temos $\alpha + \beta \quad 180^\circ$.

Gabarito: D

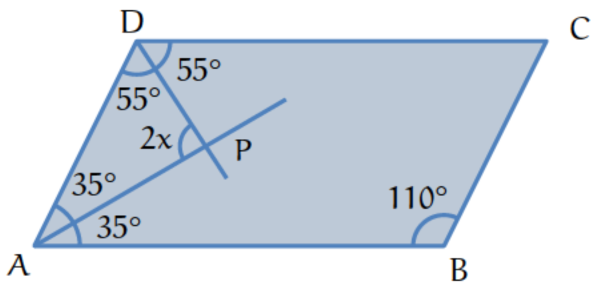
(EEAR-2013) QUESTÃO 30

Seja o paralelogramo $ABCD$. Sabendo que $\overline{AP}$ e $\overline{DP}$ são bissetrizes dos ângulos internos $\hat{D}$ e $\hat{A}$, respectivamente, o valor de x é



(a) 55°
(b) 45°
(c) 30°
(d) 15°

R: O ângulo $\angle DAB$ é suplementar a 110°, e portanto, $\angle DAB \quad 180^\circ - 110^\circ \quad 70^\circ$. Ainda, o ângulo $\angle ADC$ é igual ao ângulo 110°. Podemos desenhar, então, lembrabdo-nos de que DP e AP são bissetrizes:



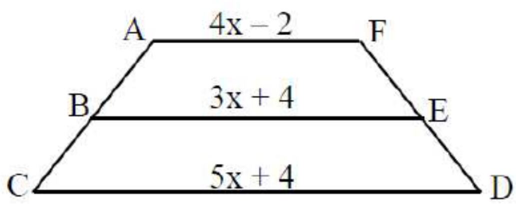
Daí, somando os ângulos internos do triângulo ADP:

$$\begin{aligned} 55^\circ + 35^\circ + 2x &\quad 180^\circ \\ 90^\circ + 2x &\quad 180^\circ \\ 2x &\quad 90^\circ \\ x &\quad 45^\circ. \end{aligned}$$

Gabarito: B

(EEAR-2017) QUESTÃO 31

No trapézio $ACDF$ abaixo, considere $\overline{AB}$ $\quad \overline{BC}$ e $\overline{DE}$ $\quad \overline{EF}$.



Assim, o valor de x^2 é

(a) 1
(b) 4
(c) 9
(d) 16

R: Pelo informado, B e E são respectivamente os pontos médios de AC e FD. Assim, BE é base média desse trapézio e portanto:

$$3x+4 \quad \frac{4x-2+5x+4}{2}$$
$$6x+8 \quad 9x+2$$
$$3x \quad 6$$
$$x \quad 2.$$

Dessa forma, $x^2 \quad 2^2 \quad 4$.

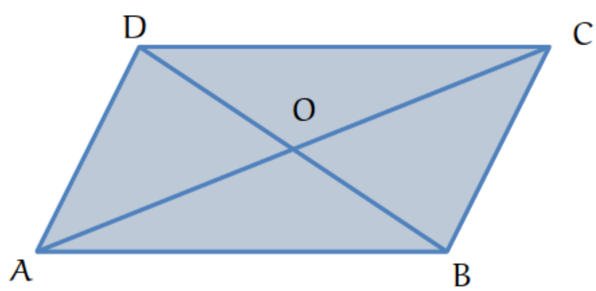
Gabarito: B

■■■(EEAR-2018) QUESTÃO 32

Seja $ABCD$ um paralelogramo com $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Se a interseção de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ é o ponto O, sempre é possível garantir que

(a) $AO \quad BO$
(b) $AB \quad CB$
(c) $DO \quad BO$
(d) $AD \quad CD$

R: Veja a figura proposta:

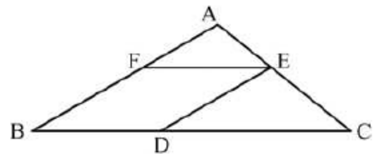


Lembrando-nos de que uma das propriedades de todo paralelogramo é a de que suas diagonais se intersectam em seus pontos médios, temos que $DO \quad BO$.

Gabarito: C

(EEAR-2018) QUESTÃO 33

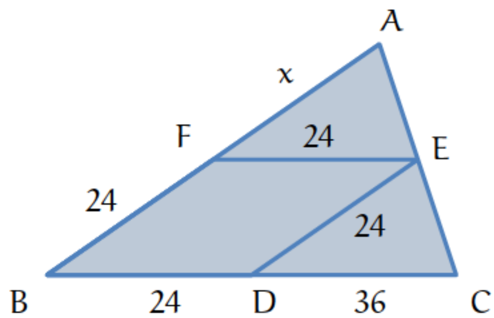
Seja $BDEF$ um losango de lado medindo $24\,\text{cm}$, inscrito no triângulo ABC.



Se $BC \quad 60\,\text{cm}$, então $AB \quad$ ____cm.

(a) 36
(b) 40
(c) 42
(d) 48

R: Como $BD \quad 24$ e $BC \quad 60$, temos $DC \quad 60 - 24 \quad 36$. Assim, ficamos com:



Daí, aplicando semelhança entre os triângulos AFE e EDC:

$$\frac{x}{24} \quad \frac{24}{36}$$
$$x \quad \frac{24 \cdot 24}{36}$$
$$x \quad 16.$$

Dessa forma, temos $AB \quad 24 + 16 \quad 40\,\text{cm}$.

Gabarito: B

(EAM-2006) QUESTÃO 34

Um quadrado $ABCD$ tem 64cm de perímetro. Quanto mede o lado de um quadrado cujo perímetro é o dobro do perímetro do quadrado $ABCD$?

(a) 8
(b) 16
(c) 18
(d) 28
(e) 32

R: O dobro de 64 é 128. Se um quadrado tem 128cm de perímetro, então o seu lado medirá:
$\frac{128}{4} \quad 32.$

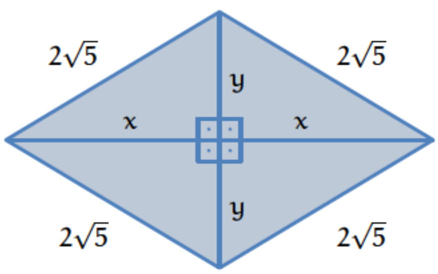
Gabarito: E

(EAM-2004) QUESTÃO 35

O lado de um losango mede $2\sqrt{5}$cm. A diagonal menor é a metade da maior. Qual o valor da soma das diagonais em centímetros?

(a) 3
(b) 6
(c) 10
(d) 12
(e) $6\sqrt{2}$

R: Temos a seguinte figura:



Como a diagonal menor é a metade da maior, temos:

$$2y \qquad \frac{2x}{2}$$
$$x \qquad 2y.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos formados:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &\quad (2\sqrt{5})^2 \\ (2y)^2+y^2 &\quad 4\cdot 5 \\ 4y^2+y^2 &\quad 20 \\ 5y^2 &\quad 20 \\ y^2 &\quad 4 \\ y &\quad 2. \end{aligned}$$

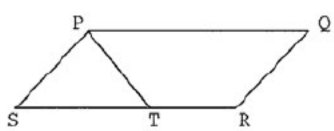
Dessa forma, $x \quad 2\cdot 2 \quad 4$, e a soma das diagonais se torna:

$$\begin{aligned} 2x+2y &\quad 2\cdot 4+2\cdot 2 \\ &\quad 8+4 \\ &\quad 12. \end{aligned}$$

Gabarito: D

(EAM-2009) QUESTÃO 36

Observe a representação abaixo.



No paralelogramo PQRS, $PS \quad ST$, e o ângulo $P\hat{Q}R$ mede $56°$, conforme mostra a figura. A medida do ângulo $S\hat{T}P$, em graus, é

(a) 59

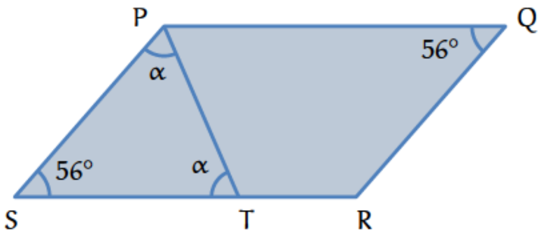
(b) 60

(c) 61

(d) 62

(e) 64

R: Questão parecida com a que fizemos há pouco, concorda? Vejamos:



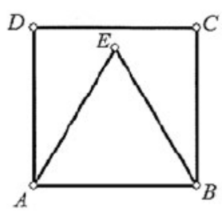
Somando os ângulos internos o triângulo PST:

$$
\begin{aligned}
\alpha + \alpha + 56^\circ &\quad 180^\circ \\
2\alpha &\quad 180^\circ - 56^\circ \\
2\alpha &\quad 180^\circ - 56^\circ \\
2\alpha &\quad 124^\circ \\
\alpha &\quad 62^\circ.
\end{aligned}
$$

Gabarito: D

(EAM-2011) QUESTÃO 37

Observe a figura abaixo.



Na figura apresentada, $ABCD$ é um quadrado e ABE é um triângulo equilátero. Nestas condições, é correto afirmar que o triângulo AED é

(a) retângulo em E

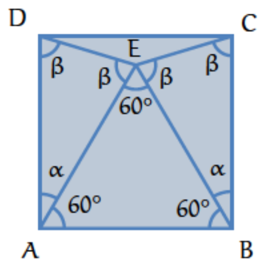
(b) escaleno e com ângulo $A\hat{E}D \quad 60^\circ$

(c) isósceles e com ângulo $A\hat{E}D \quad 75^\circ$

(d) acutângulo e com ângulo $A\hat{E}D \quad 65^\circ$

(e) obtusângulo e com ângulo $A\hat{E}D \quad 105^\circ$

R: Questão idêntica à que fizemos há pouco:

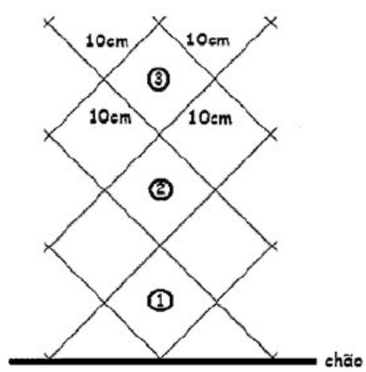


Veja que os triângulos ADE e BCE são isósceles porque $AD \quad AB \quad BC \quad BE \quad AE$ (visto que $ABCD$ é um quadrado e ABE é um triângulo equilátero). O ângulo $\angle DAB$ é reto, logo $\alpha \quad 90^\circ - 60^\circ \quad 30^\circ$. Daí, fazendo a soma dos ângulos internos do triângulo DAE:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \beta &\quad 180^\circ \\ 30^\circ + 2\beta &\quad 180^\circ \\ 2\beta &\quad 150^\circ \\ \beta &\quad 75^\circ. \end{aligned}$$

(EAM-2011) QUESTÃO 38

Observe a figura a seguir.



Na figura acima, observa-se a representação de três níveis da grade de uma cerca quadriculada, cujos quadradinhos tem lados de $10\,\text{cm}$. No total, esta cerca, é composta de 20 níveis iguais aos que foram representados acima. Qual a altura aproximada, em metros, dessa cerca de 20 níveis? (dados: se necessário, utilize $\sqrt{2} \quad 1,4$; $\sqrt{3} \quad 1,7$)

(a) $3,4$
(b) $3,1$
(c) $2,8$
(d) $2,5$
(e) $2,2$

R: A cada nível corresponde a diagonal de um desses quadrados. Como cada quadrado tem $10\,\text{cm}$ de lado, terá $10\sqrt{2}\,\text{cm}$ de diagonal. Aproximando do jeito que o problema pediu, temos $10 \cdot 1,4 \quad 14\,\text{cm}$ de nível. Sendo 20 níveis, temos: $20 \cdot 14 \quad 280\,\text{cm} \quad 2,8\,\text{m}$.

Gabarito: C

(EAM-2018) QUESTÃO 39

Analise as afirmativas abaixo:

I. Todo quadrado é um losango.

II. Todo quadrado é um retângulo.

III. Todo retângulo é um paralelogramo.

IV. Todo triângulo equilátero é isósceles.

Assinale a opção correta.

(a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(b) As afirmativas I, II, III e IV são verdadeiras.
(c) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
(d) Apenas as afirmativas III e IV são verdadeiras.
(e) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

R: Comentemos afirmativa por afirmativa:

I. Verdade. A definição de quadrado inclui o fato dele ter todos os lados iguais caracterizando-se, portanto, como um losango.

II. Verdade. Novamente, a definição de quadrado inclui o fato dele ter todos os ângulos iguais caracterizando-se, portanto, como um retângulo.

III. Verdade. Novamente, a definição de retângulo inclui o fato dele ser paralelogramo.

IV. Verdade. Para que um triângulo seja isósceles, basta que ao menos dois de seus lados sejam congruentes. Um triângulo equilátero cumpre essa condição por ter três de seus lados congruentes.

Gabarito: B

(EFOMM-2010) QUESTÃO 40

Analise as afirmativas abaixo.

I- Seja K o conjunto dos quadriláteros planos cujos subconjuntos são:

$p \quad \{x \in K \mid x$ possui lados opostos paralelos$\}$;

$L \quad \{x \in K \mid x$ possui 4 lados congruentes$\}$;

$R \quad \{x \in K \mid x$ possui 4 ângulos retos$\}$;

$Q \quad \{x \in K \mid x$ possui 4 lados congruentes e 2 ângulos com medidas iguais$\}$.

Logo $L \cap R \quad L \cap Q$.

II- Seja o conjunto $A \quad \{1, 2, 3, 4\}$, nota-se que A possui somente 4 subconjuntos.

III- Observando as seguintes relações entre conjuntos: $\{a, b, c, d\} \cup Z \quad \{a, b, c, d, e\}$, $\{c, d\} \cup Z \quad \{a, c, d, e\}$ e $\{b, c, d\} \cap Z \quad \{c\}$; pode-se concluir que $Z \quad \{a, c, e\}$.

Em relação às afirmativas acima, assinale a opção correta.

(a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(b) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(c) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(d) Apenas a afirmativa III é verdadeira.

(e) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

R: Novamente, comentemos afirmativa por afirmativa:

I. Afirmativa falsa. Da forma que foi exposta, podemos caracterizar os conjuntos apresentados da seguinte forma:

- p é o conjunto de todos os paralelogramos;
- L é o conjunto de todos os losangos;
- R é o conjunto de todos os retângulos;
- Q, por incrível que pareça, não é um conjunto somente de quadrados. Q também é um conjunto de losangos, visto que um losango por si só tem quatro lados congruentes e, por ser paralelogramo, sempre tem dois ângulos com medidas iguais.

Com isso, $L \cap R$ é a interseção dos losangos com os retângulos, que seria o conjunto de todos os quadrados. Já $L \cap Q$ é apenas o conjunto dos losangos, visto que $L \quad Q$ e portanto, $L \cap Q \quad L$. Com isso, a igualdade apresentada não é verdadeira.

II. Afirmativa falsa. O número de subconjuntos de A será $2^4 \quad 16$.

III. Afirmativa verdadeira. Do exposto, podemos concluir que:

- $e \in Z$ e, no máximo, possui mais quatro elementos: a, b, c e d;
- $a, e \in Z$, e $b \notin Z$, sobrando então c e d como possibilidades de elementos de Z;
- $c \in Z$ e $d \notin Z$.

Logo, de fato, $Z \quad \{a, c, e\}$.

Gabarito: D

1.2– Índice Remissivo