AULA 2
PERMUTAÇÕES SIMPLES, PERMUTAÇÃO CIRCULAR, COMBINAÇÃO SIMPLES E PERMUTAÇÃO DE ELEMENTOS REPETIDOS.

Vamos agora, aplicar o Princípio Fundamental da Contagem em problemas mais específicos de contagem. Vamos entender o que é uma permutação, um anagrama, vamos aprender a diferenciar uma combinação simples de uma permutação simples e vamos contar permutações quando existem objetos repetidos.

PERMUTAÇÕES SIMPLES

Você sabe o significado do termo permutar? Segundo o Aurélio: "**Permutar, dar mutuamente; Trocar**". Na matemática uma permutação é também uma troca, uma troca de lugares. Suponha que temos 3 objetos distintos, que por comodidade, chamaremos 1,2 e 3. Estes objetos estão sentados um do lado do outro, em uma determinada ordem. É claro que a ordem que podemos acomodá-los não é única. Estes números podem se acomodar da seguinte maneira: 123, 132, 213, 231, 312, 321 que são seis maneiras. E se forem mais de três objetos? Admita que sejam *n*. O primeiro pode se acomodar de *n* modos, o segundo de *n* – 1, o terceiro de *n* – 2 e assim por diante. O coitado do último obviamente só pode ser acomodado de 1 modo: É o que sobrar. Portanto o número de permutações simples (por que estamos admitindo que os objetos **sejam todos diferentes**) de *n* objetos é $n!$.

Exemplo 1. Existem 7 garotos e 3 garotas em uma reunião. De quantos modos eles podem ser colocados em uma fila de modo que;

a) As 3 garotas fiquem juntas?

b) A primeira e a última posição sejam ocupadas por garotos e não existam garotas adjacentes?

Solução:

a) Como as 3 garotas devem ficar juntas, podemos considerá-las como um **único objeto**. O número de maneiras de ordenar os 7 garotos e este objeto é (7 + 1)! = 8!. Como as garotas podem se arrumar de 3! Maneiras, pelo Princípio Multiplicativo, concluímos que a quantidade desejada é $8!\cdot 3!$.

b) Existem 7! Maneiras de permutar garotos. Dentre estas, considere uma arbitrária. Como as posições extremas são ocupadas por garotos, existem somente 6 espaços disponíveis para as 3 garotas. A primeira tem 6 escolhas a segunda tem 5 escolhas e a terceira tem 4 escolhas. Então pelo Princípio Multiplicativo, o número procurado é $7!\times 6\times 5\times 4$.

PERMUTAÇÕES CIRCULARES

Começaremos com a seguinte pergunta! De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?

Solução: Na roda o que importa é a posição relativa das crianças entre si. Suponha as crianças A, B, C, D, E. Assim a roda ABCDE pode ser uma "virada" na roda EABCD por uma rotação. Assim escolhemos uma ordem para as crianças, ou seja, fazemos as possíveis permutações, que são ao todo 5! = 120. Como cada roda por ser "virada" de cinco modos, a nossa contagem de 120 modos, contou cada roda 5 vezes e a resposta é

de um modo geral, se tivermos n crianças e queremos coloca-las em uma roda, então temos $(n-1)!$ modos de fazer isto. Vamos analisar a impressão de localização de um elemento específico no círculo em relação aos demais. Fixemos um elemento e permutamos os demais $n-1$ em todos os lugares possíveis, assim, existem $(n-1)!$ formas de este elemento específico ter impressões diferentes de localização em relação aos demais elementos. Como na permutação circular o que importa é exatamente esta impressão de localização, então podemos afirmar que existem $(n-1)!$ permutações de n elementos distintos .

Exemplo 2. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças, de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

Solução: Podemos formar 4! rodas com as cinco outras crianças. Há agora 5 modos de colocar a criança *A* na roda e depois há 4 modos de colocar a criança *B* na roda sem colocá-la junto de *A*. A resposta é $4!\cdot(5\times 4)=480$.

COMBINAÇÕES SIMPLES

Começaremos com a seguinte pergunta: Seja *A* = {*a*, *b*, *c*, *d*}. Quantos são os subconjuntos de *A* que possuem 2 elementos?. Podemos responder listando todos os subconjuntos: {*a*, *b*}, {*b*, *c*}, {*c*, *d*}, {*a*, *c*}, {*b*, *d*} e {*a*, *d*} que são num total de 6 subconjuntos. E se tivéssemos um conjunto $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{100}\}$ e quiséssemos saber quantos subconjuntos de *A*, possuíam 2, 3, 4 ou 5 elementos?. É claro que listar todos os subconjuntos não é nada fácil, assim devemos ir à busca de uma "Fórmula" que nos de quantos são estes subconjuntos. Primeiramente precisaremos da seguinte:

Definição. Seja A um conjunto com m elementos, isto é, $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_m\}$. Chama-se combinação dos m elementos tomados r a r, aos subconjuntos de A constituídos de r elementos.

Proposição 1. O número de modos de escolhermos p objetos distintos entre n objetos distintos dados é dado por: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemplo 3. Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de dez funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

Solução: Notemos que cada comissão é um subconjunto de três elementos (pois em cada comissão não importa a ordem dos elementos) logo o número de comissões é $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120.$

Exemplo 4. De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em 2 grupos de 4 pessoas cada?

Solução: O primeiro grupo pode ser escolhido de $\binom{8}{4}$ modos. Escolhido o 1º grupo, sobram 4 pessoas e só há 1 modo de formar o 2º grupo. A resposta parece ser $\binom{8}{4} \cdot 1$, entretanto, contamos cada divisão duas vezes. Por exemplo, {*a*,*b*,*c*,*d*} , {*e*,*f*,*g*,*h*} é idêntica a {*e*,*f*,*g*,*h*}, {*a*,*b*,*c*,*d*} e foi contada como se fosse diferente. A resposta é: $\frac{\binom{8}{4} \times 1}{2} = 35$.

PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS NEM TODOS DISTINTOS

Suponha que queremos saber quantas são as permutações da palavra **CARA**, não podemos dizer que é 4!=24, pois existem duas letras **A** iguais na verdade existem 12 permutações distintas. De fato, temos $\binom{4}{2}$ modos de escolher os lugares para os dois A as duas letras restantes temos 2! Assim temos um total de $\binom{4}{2} \cdot 2! = \frac{4!}{2!}$.

Proposição 2. Consideremos *k* – elementos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Suponha que temos x_1 elementos a_1, x_2 elementos a_2 até x_k elementos a_k. Suponha que $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n$ onde $x_i \geq 1$. Então o número de maneiras de colocar os *n* objetos em fila é $\frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot x_3! \cdot \ldots \cdot x_k!}$ onde $\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{x_1}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{x_2}, \ldots, \underbrace{a_k, a_k, \ldots, a_k}_{x_k}$.

Exemplo 5. Quantos são os anagramas da palavra: **FARIASMAIA**?

Solução: Existem 4 letras A, 2 letras I, 1 letra F, 1 letra F, e 1 letra R, uma letra M e uma letra S,então a resposta é : $\frac{10!}{4!2!1!1!1!}$.

PROBLEMAS DE APRENDIZAGEM 2

1.Responda o que se pede:

a)De quantos modos podemos colocar em fila, n objetos distintos?

b)Considere o conjunto $A = \{a_1, a_2, .., a_n\}$. Quantos são os subconjuntos de A que possuem k elementos?

c)De quantos modos, podemos formar uma roda de com n objetos distintos?

d)De quantos modos podemos permutar as letras da palavra: **VESTSELLER**?

2.Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem se sentar juntos e o do Iraque e o dos Estados Unidos não podem sentar juntos?

3.De quantas maneiras 6 meninos e 6 meninas podem formar uma roda de ciranda de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

4.De quantas maneiras podemos distribuir 11 brinquedos distintos para 10 crianças de modo que toda criança receba pelo menos um brinquedo?

5.Considere 35 pessoas, Dentre elas A,B,C,D,E. De quantos modos podemos colocá-las em fila de modo que A fique sempre na frente de B,C,D,E não necessariamente em posições consecutivas?

6.De quantas maneiras as letras da palavra **INDIVISIBILIDADE** podem ser permutadas de modo que duas letras I nunca fiquem juntas?

7.(IME 1984/1985) Um exame de vestibular se constitui de 10 provas distintas, 3 das quais da área de matemática. Determine de quantas formas é possível programar a sequência das 10 provas, de maneira que duas provas da área de matemática não se sucedam.

8.Quantos são os números de dez dígitos múltiplos de 9, formados pelos dígitos 1,2 e 3, de modo que o dígito 3 aparece exatamente duas vezes?

9.Paulo e Maria fazem parte de um grupo de oito pessoas. De quantos modos eles podem formar uma roda de ciranda, de modo, que entre Paulo e Maria, haja três pessoas?

10. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$, pede-se o número de subconjuntos de A com 3 elementos, tal que a soma destes seja um múltiplo de 3.

11. Quantas são as maneiras de colocar os números 21,31,41,51,61,71 e 81 em fila de modo que a soma de quaisquer quatro números consecutivos seja múltiplo de 3?

12. Uma roda-gigante possui 4 bancos de dois lugares cada um. De quantos modos 8 crianças podem ocupar seus bancos, ficando duas em cada banco?

13. Uma fila de cadeiras no cinema tem 20 poltronas. De quantos modos 6 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?

14. Considere $(a_1, a_2, \dots, a_{12})$ uma permutação de (1,2,....,12) tal que:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 \;\; e \;\; a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10} < a_{11} < a_{12}$$

Um exemplo é (6,5,4,3,2,1,7,8,9,10,11,12) . Determine o número de todas estas permutações.

15.(IME 2003/2004) Ao final de um campeonato de futebol, somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os outros adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

16.(IME 1992/1993) Numa escola há 15 comissões, todas com igual número de alunos. Cada aluno pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro em comum. Todos os alunos participam.

a)Quantos alunos têm a escola?
b)Quantos alunos participam de cada comissão?

17.(ITA/2016) Pintam-se N cubos iguais utilizando-se 6 cores diferentes, uma para cada face. Considerando que cada cubo pode ser perfeitamente distinguido dos demais, o maior valor possível de N é igual a?

18. Inês escolheu quatro números distintos do conjunto {1,2,3,..,9}. Formou com eles todos os possíveis números de quatro algarismos distintos e somou todos estes números obtendo como soma 193314. Encontre os quatro algarismos que Inês escolheu.

19. De quantas maneiras as letras da palavra: **SERRILHOU** podem ser permutadas, mantendo-se as vogais em sua ordem natural e não permitindo que duas letras R fiquem juntas?

20. Prove que, para todo natural m, $(m^3)!$ é divisível por $(m!)^{m^2+m+1}$.

PROBLEMAS DE FIXAÇÃO 2

1.Quantos são os anagramas da palavra **CAPITULO;**

a)Que começam por consoante e terminam por vogal?

b)Que têm as letras C,A,P juntas nessa ordem?

c)Que têm as letras C,A,P juntas em qualquer ordem?

d)Que têm as vogais e as consoantes intercaladas?

e)Que têm a letra C no 1° lugar e a letra A no 2° lugar?

f)Que têm a letra C no 1° lugar ou a letra A no 2° lugar ou a letra P no 3° lugar?

2.De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?

3.De quantos modos podemos escolher 6 pessoas incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de 7 homens e 4 mulheres?

4.De quantas maneiras podem ser escolhidos três números distintos do conjunto $\{1,2,3,..,30\}$,de modo que a soma dos números escolhidos seja par?

5.Quantos anagramas da palavra ***ARATACA*** começam por consoante?

6.Quantos números de cinco algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos 1,1,1,1,2 e 3?

7.Quantos são os anagramas da palavra **ARARAQUARA** que não possuem duas letras A juntas?

8.Quantos são os anagramas da palavra **CARAGUATATUBA**? Quantas começam por vogal?

9.Considere um aparelho para tocar CD's com espaço para 6 CD's. A bandeja que os armazena tem formato circular, sendo que os espaços para os CD's são círculos de mesmo raio cujos centros se encontram igualmente espaçados na circunferência única que os contêm. Dispondo de 80 CD's distintos, responda o que segue:

a)Considerando que os espaços para os CD's sejam numerados de 1 a 6, de quantas maneiras o aparelho pode ser carregado com 6 CD's?

b)Supondo agora que os espaços sejam indistinguíveis de quantas maneiras podemosfazer o mesmo carregamento de item (a)?

10. Queremos formar uma roda com cinco meninos e cinco meninas, entre elas João e Maria. Quermos formar a roda, de modo que menino e meninas fiquem em posições alternadas e João e Maria não fiquem juntos. De quantos modo podemos formar tal roda ?

11. Luís, Raul e Macximus vão formar uma roda, juntamente com outras 6 pessoas. De quantas formas essa roda poderá ser formada, de modo que os três fiquem juntos, mas com Raul entre Luís e Macximus?

12. Cinco mulheres e seis homens devem ser distribuídos nas onze cadeiras de uma mesa redonda, de modo que as mulheres se sentem em posicões consecutivas. A posição absoluta das cadeiras não é importante, ou seja, apenas a posição relativa entre as pessoas interessa. De quantos modos esse distribuicãoo pode ser feita?

13. Encontre o número de maneiras de se acomodarem 12 pessoas tais que 7 delas fiquem numa mesa redonda e as 5 restantes em outra mesa redonda.

14. Encontre o número de maneiras de se acomodarem 12 pessoas tais que 7 delas fiquem numa mesa redonda e as 5 restantes fiquem num banco.

15. De quantas maneiras 27 livros diferentes podem ser distribuídos entre as pessoas A, B e C d mdo que A e C fiquem, juntos, com dobro de livros de B e ninguém fique com todos os livros?

16. Quantas diagonais possui:

a)Um octaedro regular

b)Um icosaedro regular

c)Um cubo

d)Um prisma hexagonal regular

e)Um prisma hexagonal regular?

f)Um dodecaedro regular?

17. De quantos modos podemos dividir 12 pessoas:

a)Em dois grupos de 6?

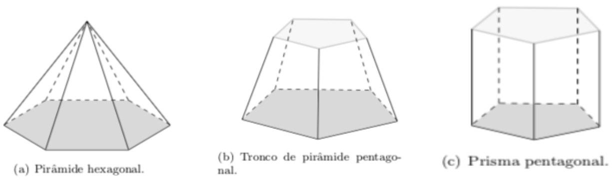
b)Em três grupo de 4?

c)Em um grupo de 5 e um grupo de 7?

d)Em seis grupos de 2?

e)Em dois grupos de 4 e dois grupos de 2?

18. Para cada um dos sólidos da figura abaixo, calcule o número de maneiras em que podemos colorir suas faces usando um conjunto de 7 cores, de modo que cada face receba uma cor diferente. Em cada caso, assuma que os polígonos que determinam as bases dos sólidos são regulares, e que as faces laterais são triângulos isósceles (no caso da pirâmide hexagonal), trapézios isósceles (no caso do tronco de pirâmide pentagonal) e retângulos (no caso do prisma pentagonal).


(a) Pirâmide hexagonal. (b) Tronco de pirâmide pentagonal. (c) Prisma pentagonal.

19. Consideremos n casais.

a)De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher?

b)De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça do lado de sua mulher e que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

20. De quantas maneiras dez pedras preciosas distintas podem ser colocadas num cordão de modo a formar um colar sem fecho? (Obs: O fato de ser sem fecho, quer dizer que ele pode ser rotacionado livrimente no pescoço).

21. Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces indistinguíveis de um cubo de madeira?

22. Resolva o problema anterior para:

a)Números de 1 a 4, tetraedro regula;

b)Números de 1 a 8, octaedro regular;

c)Números de 1 a 12, dodecaedro regular;

d)Números de 1 a 20; icosaedro regular;

e)Números de 1 a 8, prisma hexagonal regular;

f)Números de 1 a 5, pirâmide quadrangular regular.

23. Determine a quantidade de números naturais de modo que o produto de seus dígitos é 48 e nenhum de seus dígitos é 1.

24. Quantos são os anagramas da palavra **MISSISSIPI** que não possuem duas letras I juntas?

25. Um gafanhoto pula exatamente 1 metro. Ele está em um ponto A de uma reta, só pula sobre ela, e deseja atingir um ponto B dessa mesma reta que está a 5 metros de distância de A com exatamente 9 pulos. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

26. Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes o dígito 8 exatamente 2 vezes?

27. Um homem tem 5 amigas e 7 amigos. De quantos modos eles podem convidar 6 amigas e 6 amigos, se cada um deve convidar 6 pessoas?

28. Dizemos que uma palavra *Q* é *quase-anagrama* de outra palavra *P* quando *Q* pode ser obtida retirando-se uma letra de *P* e trocando a ordem das letras restantes, resultando em uma palavra com uma letra a menos do que *P*. Um quase-anagrama pode ter sentido em algum idioma ou não. Por exemplo, RARO, RACR e ARCO são quase-anagramas de CARRO. Quantos são os quase-anagramas da palavra BACANA que começam com A?

29. Quantas permutações de 1, 2, 3, ...,9 há com a propriedade de que, para todo $1 \le i < 9$, os números que aparecem entre *i* e *i* + 1 (onde *i* pode aparecer tanto antes como depois de *i* + 1) são todos menores do que *i*? Por exemplo, 976412358 é uma permutação com esta propriedade.

30. Quantas são as permutações simples dos números $(1, 2, 3, \dots, 2008)$ nas quais o elemento que ocupa a $k - ésima$ posição é inferior a $k + 4$, para todo k?

31. Pablo escreveu todos os números de quatro algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos a, b, c e d e satisfazem as condições:

$$a \neq 0, b = a + 2, c = b + 2, d = c + 2$$
Calcule a soma de todos os números que Pablo escreveu.

32. Nove cientistas trabalham num projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados de modo que só é possível abri-los todos se houver pelo menos 5 cientistas presentes;

a)Qual é o número mínimo possível de cadeados?
b)Na situação (do item a), quantas chaves cada cientista deve ter?

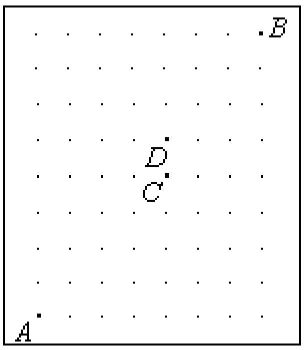
33. Quantos são os números formados por exatamente 8 algarismos, escolhidos do conjunto {1, 2, 3, 4}, onde o algarismo1aparece no máximo três vezes, o algarismo 2 aparece no máximo quatro vezes e os demais algarismos aparecem exatamente uma vez cada?

34.A figura abaixo representa 17 ruas que se cortam perpendicularmente, sendo 8 verticais. Quantos caminhos mínimos uma pessoa pode percorrer para ir do ponto *A* ao ponto *B*:

a) sem restrições?

b) sem passar por *C*?

c) sem passar por *C* e *D*?



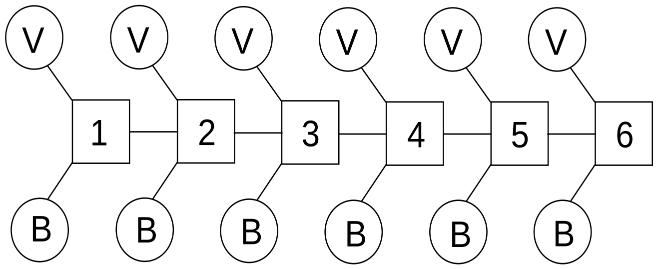
35.(AIME) Quantas permutações de (1,2,....,9) satisfazem as três condições

a)O 1 está a esquerda do 2

b)O 3 está a esquerda do 4

c)O 5 está a esquerda do 6

36.(IME/1982) Deseja-se transmitir sinais luminosos de um farol, representado pela figura abaixo. Em cada um dos seis pontos de luz do farol existem uma lâmpada branca e uma vermelha. Sabe-se que em cada ponto de luz não pode haver mais que uma lâmpada acesa e que pelo menos três pontos de luz devem ficar iluminados. Determine o número total de configurações que podem ser obtidas.



37. Dada a seqüência $(1, 2, 3, ..., n)$, $(n \geq 3)$, quantas são as seqüências crescentes de 3 números distintos, nas quais não aparecem dois números consecutivos?

38. Um baralho de 32 cartas é formado pelos 8 “grupos” seguintes: 7, 8, 9, 10, valete, dama rei e ás. Retiram-se desse baralho, simultaneamente, cinco cartas, Quantos são os agrupamentos possíveis em que aparece em que aparecem um “par”? (Entende-se por “par” todo conjunto de 5 cartas em que aparecem 2 cartas de um mesmo grupo, e as outras 3 de 3 grupos diferentes.)

39. De todas as permutações das 9 letras *AAABBBCCC*, quantas não possuem:

a) duas letras *A* juntas?
b) duas letras *A* e duas letras *B* juntas?
c) duas letras *A*, duas letras *B* e duas letras *C* juntas?

40. De quantos modos se podem sentar em fila, 3 ingleses, 3 franceses e 3 turcos, de modo que não fiquem dois compatriotas juntos?

GABARITO

1) a) 11520 b) 720 c) 4320 d) 1152 e) 720	11) 1440	21) 30	31) 399960
2) 3600	12) 86400	22) a) 2 b) 1680 c) 7983320 e) 3360 d) 20!/60 f) 30	32) a) 126 b) 70
3) 721	13) 13685760	23) 38	33) 1960
4) 560	14) 68428800	24) 1050	34) a) 6435 b) 3985 c) 5035
5) 90	15) $\binom{27}{9}(2^{18}-2)$	25) 36	35) 45360
6) 30	16) a) 3 b) 36 c) 100 d) 4 e) 18	26) 12960	36) 656
7) 128	17) *	27) 267148	37) *
8) a) 12972960 b)6985440	18) a) 840 b) 1008 c) 504	28) 60	38) 107520
9) a)2163014400 b)36060024000	19) a) $(n-1)!\cdot 2^n$ b) $2.(n-1)!$	29) 256	39) a)700 b) 340 c) 174
10) 1728	20) 9!/2	30) $6\cdot 4^{2005}$	40) 37584

17) a) 462 b) $\frac{12!}{3!\cdot(4!)^3}$ c) 792 d) $\frac{12!10395}{6!\cdot 2!^6}$ e) 51975

37) $\dfrac{(n-1)(n-3)(n-4)}{6}$

SUGESTÕES OU RESOLUÇÕES

1) Solução:

a) Há 4 modos de escolher a consoante que será a primeira letra do anagrama e 4 modos de selecionar a vogal que será a última letra do anagrama. Depois disso, há 6! Modos de arrumar as demais letras entre a primeira e a ultima. A resposta é $4\cdot 4\cdot 6! = 4\cdot 4\cdot 720 = 11520$

b)Tudo se passa como se CAP fosse uma única letra. Devemos, portanto, arrumar em fila 6 objetos: CAP,I,T,U,L,O. A resposta é $6! = 720$.

c) Primeiramente, devemos escolher a ordem em que as letras C,A,P aparecerão. Há 3! Modos. Depois, devemos arrumar em fila 6 objetos; o bloco das letras C,A,P e as 5 letras I,T,U,L,O. Há 6! Modos. A resposta é $3!\cdot 6! = 6\cdot 720 = 4320$.

d) As vogais e consoantes podem aparecer na ordem CV CV CV CV ou na ordem VC VC VC VC.. No primeiro caso, devemos colocar as 4 vogais nos 4 lugares de ordem par (4! Modos) e as 4 consoantes nos 4 lugares de ordem ímpar (4! Modos). Há $4!\cdot 4! = 24\cdot 24 = 576$ anagramas do primerio tipo. Analogamente, há 576 anagramas do segundo tipo. A resposta é $567 + 567 = 1152$

e) basta arrumar em fila, depois do CA, as restantes 6 letras. A resposta é 6!=720.

2) Solução: O número total de modos de sentar 7 pessoas em 7 cadeiras é o número de modos de arrumar 7 pessoas em fia, 7!. O número de modos de arrumar 7 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, A e B, fiquem juntas e $2\cdot 6!$, pois, para formar uma tal fila, devemos inicialmente decidir em que ordem se colocarão A e B (AB ou BA), e, em seguida, formar uma fila de 6 objetos: o bloco das pessoas A e B; as demais 5 pessoas. A resposta é $7! - 2\cdot 6! = 5040 - 1440 = 3600$.

6) Solução: Usando 1, 1, 1, 1 e 2 há $P_5^{4,1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$ números. Usando 1, 1, 1, 1 e 3 há outros 5 números. Usando 1, 1, 1, 2 e 3 há $P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!1!1!} = 20$ números.
A resposta é 5 + 5 + 20 = 30.

8) Solução: Em CARAGUATATUBA a letra A aparece 5 vezes, U aparece 2 vezes, T aparece 2 vezes e as letra C, R, G e B aparecem 1 vez cada uma, havendo, portanto, 13 letras na palavra.

a)Para formar um anagrama, devemos escolher 5 das 13 posições para colocar as letras A, o que pode ser feito de C_{13}^5 modos, 2 das 8 posições restantes para colocar as letras U, o que pode ser feito de C_8^2 modos, 2 das 6 posições restantes para colocar as letras T, o que pode ser feito de C_6^2 modos, e arrumar as letras

C, R, G e B nas 4 posições restantes, o que pode ser feito de $4!$ modos.

A resposta é $C_{13}^5 \times C_8^2 \times C_6^2 \times 4! = 12.972.960$.

b)Há $C_{12}^4 \times C_8^2 \times C_6^2 \times 4!$ anagramas que começam por A e $C_{12}^5 \times C_7^2 \times 5!$ que começam por U.

A resposta é $C_{13}^5 \times C_8^2 \times C_6^2 \times 4! + C_{12}^5 \times C_7^2 \times 5! = 6.985.440$.

10) Solução: Temos 4! = 24 maneiras de distribuir os meninos. Dada uma dessas distribuições, observamos as cincos posições que podem ser ocupadas pelas meninas. Como Maria é a menina que mais possui restrições, iremos alocá-la primeiro. Como ela não pode ficar nas duas posições vizinhas a João, há apenas 3 possíveis lugares onde ela pode ser colocada. As Demais 4 meninas podem ser distribuídas nas 4 posições restantes, o que pode ser feito de 4! maneiras. Logo, o total de maneiras de formar a roda é igual a: 4!·3·4! = 1728.

11) Solução: Luís (L), Raul (R) e Macximus (M) devem formar um bloco de modo que temos as opções podem ser: **"L RM"** ou **"MRL"**. Agora devemos permutar circularmente o bloco e as outras 7 pessoas. Isso pode ser feito de 6! = 720 maneiras. Finalmente, como temos duas opções de blocos, o total de distribuições será 2 × 720 = 1440.

12) Solução: Daremos duas soluções para esse problema.

Primeira Solução: Podemos formar uma ordem com os homens de $(PC)_6$ = 5! Modos. Depois, devemos escolher um dos 6 espaços entre os homens (o que pode ser feito de 6 modos) para aí colocarmos todas as mulheres. Finalmente, devemos decidir em que ordem as 5 mulheres colocarão nesse espaço (5! modos).

A reposta é 5!.6.5! = 120x6x120 = 86400.

Segunda Solução: Vamos numerar as cadeiras em torno da mesa com os números de 1 a 11, nessa ordem. Podemos assumir, sem perda da generalidade, que as cadeiras de 1 a 5 serão ocupadas pelas mulheres e as cadeiras de 6 a 11 pelos homens. Uma vez escolhida essa orientação, temos 5! maneiras de permutar as cinco mulheres entre suas cadeiras e 6! maneiras de permutar os homens. Sendo assim, o total de maneiras de distribuir as pessoas nas cadeiras é igual a 5! · 6! = 86.400. Note que, aqui, não há necessidade de dividir o resultado por 11, pois, a priori, já não estamos considerando os casos em que as mulheres ocupam as outras 11 sequencias de 5 cadeiras consecutivas (ou seja, os casos em que elas ocupam as cadeiras 2 a 6, ou as cadeiras 3 a 7 etc).

16) Solução:

Os segmentos que unem dois vértices de um poliedro ou são arestas ou são diagonais de faces ou são diagonais do poliedro.

a)O octaedro regular é um poliedro formado por 8 faces triangulares e que tem 6 vértices e 12 arestas. Há $C_6^2 = 15$ segmentos que unem dois vértices do poliedro, 12 dos quais são as arestas e 0 dos quais é diagonal de face. A resposta é $15 - 12 - 0 = 3$.

b)O icosaedro regular é um poliedro formado por 20 faces triangulares e que tem 12 vértices e 30 arestas. Há $C_{12}^2 = 66$ segmentos que unem dois vértices do poliedro, 30 dos quais são as arestas e 0 dos quais é diagonal de face. A resposta é $66 - 30 - 0 = 36$.

c) O dodecaedro regular é um poliedro formado por 12 faces triangulares e que tem 20 vértices e 30 arestas. Há $C_{20}^2 = 190$ segmentos que unem dois vértices do poliedro, 30 dos quais são as arestas e $12\frac{5(5-3)}{2} = 60$ dos quais são diagonais de face.A resposta é $190 - 30 - 60 = 100$.

d)O cubo é um poliedro formado por 6 faces quadradas e que tem 8 vértices e 12 arestas. Há $C_8^2 = 28$ segmentos que unem dois vértices do poliedro, 12 dos quais são as arestas e $6\frac{4(4-3)}{2} = 12$ dos quais são diagonais de face.A resposta é $28 - 12 - 12 = 4$.

e)O prisma hexagonal é um poliedro formado por 6 faces quadrangulares e 2 faces hexagonais e que tem 12 vértices do poliedro e 18 arestas. Há $C_{12}^2 = 66$ segmentos que unem dois vértices do poliedro, 18 dos quais são as arestas e $6\frac{4(4-3)}{2} + 2\frac{6(6-3)}{2} = 30$ dos quais é diagonal de faces. A resposta é $66 - 18 - 30 = 18$.

17) Solução:

a)Forme uma fila com as 12 pessoas. Isso automaticamente as divide em dois grupos de 6: as seis primeiras formam um grupo e as seis últimas, outos. Há 12! Modos de formar a fila. Entretanto, uma mesma divisão em grupos corresponde a várias filas diferentes, o que faz com que no resultado 12! Cada divisão tenha sido contada várias vezes. Devemos corrigir nossa contagem dividindo o resultado pelo número de vezes que cada divisão foi contada. Uma divisão como com abcdef em grupo e ghijkl em outro foi contada cada vez que formamos uma fila com abcdef ocupando, em qualquer ordem, os seis primeiros lugares e ghijkl, os seis últimos ($6! \cdot 6!$ modos de formar uma tal fila) ou vice-versa ($6! \cdot 6!$ modos). A resposta é

$$\frac{12!}{2!\,6! \cdot 6!} = 462$$

b)Forme uma fila com os doze elementos e tome como grupos os formados pelos quatros primeiros elementos, pelos quatro seguinte e pelos quatros últimos. O número de filá e 12!, mas cada divisão em grupos entre se (3!

Modos) ou trocando a posição dos elementos em cada um dos três grupos ($4!^3$ modos). A resposta é

$$\frac{12!}{3!\cdot(4!)^3}$$

c)Forme uma fila com os doze elementos e tome como grupos os formados pelos cinco primeiros elementos e pelos sete últimos. O número de fila é 12!, mas cada divisão em grupos corresponde a várias filas, obtidas trocando a posição dos elementos em cada um dos dois grupos ($5!\cdot 7$ modos). A resposta é

$$\frac{12!}{5!\cdot 7!}=792$$

d)Forme uma fila com os doze elementos e tome como grupos os formados pelos dois primeiros elementos, pelos dois seguintes,... e pelos dois últimos. O número de filas e 12!, mas cada divisão em grupos corresponde a várias filas, obtidas trocando os grupos entre si (6! Modos) ou trocando a posição dos elementos em cada um dos três grupos ($2!^6$ modos). A resposta é

$$\frac{12!\,10395}{6!\cdot 2!^6}$$

e)Forme um fila com os doze elementos e tome como grupos os formados pelos quatro primeiros elementos, pelos quatro seguintes, pelos dois seguintes e pelos dois últimos. O número de divisão de filas é 12!, mas cada divisão em grupos corresponde a várias filas, obtidas trocando os grupos de quatro entre si (2! Modos), ou trocando os grupos de dois entre si (2! Modos), ou trocando a posição dos elementos em cada um dos quatros grupos ($4!^2\cdot 2!^2$ modos). A resposta é:

$$\frac{12!}{2!\cdot 2!\cdot(4!)^2\cdot(2!)^2}=51975$$

18) Solução: Observe que cada um dos sólidos possui exatamente 7 faces. Como cada face deve receber uma cor diferente, concluímos que cada cor deve ser usada exatamente uma vez.

a)No caso da pirâmide, devemos inicialmente escolher uma cor para colorir sua base. Isso pode ser feito de 7 maneiras diferentes, já que qualquer uma das cores pode ser usada. Resta, agora, colorir as faces laterais. Como a base da pirâmide é regular, uma forma de pintar as faces laterais é indistinguível de outra que seja obtida rotacionando-se a base. Sendo assim, o número de maneiras diferentes de pintar as faces laterais é 5! = 120. Logo, o total de maneiras de pintar a pirâmide é, pelo princípio multiplicativo, igual a 7 · 120 = 840.

b)Como no item anterior, iremos primeiro escolher a cor que será usada na base inferior e, em seguida, aquela que será usada na base superior. Como as bases possuem tamanhos diferentes, a ordem em que escolheremos essas duas cores é relevante. Logo, isso pode ser feito de 7 · 6 = 42 maneiras. Também como antes, o número de maneiras de colorir as faces laterais é o número de permutações circulares do conjunto das (cinco) cores restantes, ou seja, 4! = 24. Logo (e novamente pelo princípio multiplicativo), o total de maneiras de colorir o tronco é igual a 42 · 24 = 1008.

c)Nesse caso, o tamanho da base inferior é igual ao da base superior. Assim, a ordem em que escolheremos as duas cores que serão usadas nas bases não é relevante. Portanto, o número de maneiras de escolher tais cores passa a ser $\binom{7}{2}=21.$ Para terminar, veja que, como antes, o número de maneiras de colorir as faces laterais com as demais 5 cores é 4! = 24. Logo, o total de maneiras de colorir o prisma é 21 · 24 = 504.

19) Solução:

a)Há (n -1)! Modos de formar uma roda com as *n* mulheres. Depois disso, para cada um dos *n* maridos há dois modos de entrar na roda: à direita ou à esquerda de sua mulher.

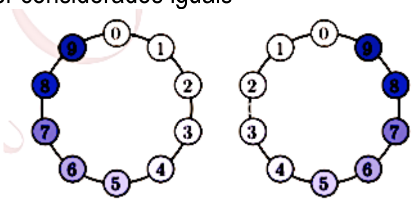
A reposta é $(n-1)!2^n$.

Há (n-1)! modos de formar uma roda com as n mulheres. Depois disso, há dois modos de pôr os maridos na roda: à direita ou à esquerda de sua mulher.

A reposta é 2.(n-1)!.

20) Solução:

Temos um problema que envolve permutações circulares, o qual nos gera, a princípio, (10 − 1)!= 9! maneiras de ordenar as pedras no colar. Contudo, veja que o colar também pode ser virado, ou seja, ele pode ser colocado no pescoço de duas formas. Por exemplo, os dois colares da figura abaixo devem ser considerados iguais



Mais geralmente que a figura acima, podemos agrupar as 9! maneiras de distribuir as pedras em torno do círculo em pares, tais que, em cada par, uma das configurações seja o reverso da outra. Sendo assim, o número total de colares distintos é igual a 9!/2.

21)Solução:
Façamos de conta que as faces são diferentes, então teremos 720 dados. Como as faces são indistinguíveis, o mesmo dado foi contado várias vezes. Por exemplo, pense em um dado que tenha o 6 na face de baixo (face preta) e o 1 na face de cima (face branca). Ele é, certamente, diferente de um dado que tenha 1 na face de baixo (face preta) e o 6 na face de cima (face branca). Mas sendo as faces indistinguíveis, o dado que tem o 6 na face de baixo e o 1 na face de cima é igual ao dado que tem o 1 na face de baixo e o 6 na faixa de cima; este é, simplesmente, aquele de cabeça para baixo. Esse mesmo dado aprece outra vez com o 1 na face da frente e o 6 na face da direita, etc. Em suma, o mesmo dado foi contado tantas vezes quantos são as posições de colocá-lo. O número de posições de colocar um cubo é $6 \cdot 4 = 24$, pois há 6 modos de escolher a face de baixo e 4 de escolher, nessa face, o lado que fica de frente. A resposta é $\frac{720}{24} = 30$.

Observação: alguns preferem visualizar um cubo apoiado por um vértice; para esses, o número de posições de colocar um cubo é $8 \cdot 3 = 24$, pois há 8 modos de escolher o vértice de apoio e 3 de escolher, dentre as arestas que incidem nesse vértice, a que fica de frente.

22) Solução:
a)O número de posições para um tetraedro regular é $4 \cdot 3 = 12$, pois há 4 modos de escolher a face de apoio e 4 de escolher, nessa face, o lado que fica de frente. A resposta é: $\frac{4!}{12} = 2$

b)O número de posições para um octaedro regular é $6 \cdot 4 = 24$, pois há 6 modos de escolher o vértice de apoio e 4 de escolher, dentre as arestas que incidem nesse vértice, a que fica de frente. A resposta é:

$$\frac{8!}{24} = 1680.$$

c)O número de posições para dodecaedro regular é $12 \cdot 5 = 60$, pois há 12 modos de escolher a face de apoio e 5 de escolher, nessa face, o lado que fica de frente. A resposta é

$$\frac{12!}{60} = 7983360$$

d)O número de posições para um icosaedro regular é $20 \cdot 3 = 60$, pois há 20 modos de escolher a face de apoio e 3 de escolher, nessa face, o lado que fica de frente. A resposta é:

$$\frac{20!}{60} = 40548366802944000 \cong 4 \cdot 10^{16}$$

e)O número de posições para um prisma hexagonal regular é $2 \cdot 6 = 12$, pois há 2 modos de escolher a base de apoio e 6 de escolher, nessa base, o lado que fica de frente. A resposta é:

$$\frac{8!}{12} = 3360.$$

f)O número de posições para uma pirâmide quadrangular é $1 \cdot 4 = 4$, pois há 1 modo de escolher a base de apoio e 4 de escolher, nessa base, o lado quefica de frente. A resposta:

$$\frac{5!}{4} = 30$$

25) Solução: Imagine que B esteja a direita de A. O gafanhoto deve, em alguma ordem, dar 7 pulos para a Direita e 2 para a Esquerda. Uma trajetória possível é, por exemplo, DDDEDDEDD. O número de listas deste tipo é $C_9^2 = 36$.

26) Solução:
Vamos esquecer que a primeira casa do número não pode ser igual a zero. Isso fará com que contemos a mais e, depois, descontaremos o que foi contado indevidamente. Há C_7^3 modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo dígito 4; depois disso, há C_4^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo dígito 8; finalmente, as duas casas restantes podem ser preenchidas de 8×8 modos (não podemos usar nessas casas os dígitos 4 e 8). A "resposta" seria $C_7^3 \times C_4^2 \times 8 \times 8 = 35 + 6 + 64 = 13.440$. Devemos subtrair os números começando por 0. Se o número começar por 0, há C_6^2 modos de escolher as casas que serão ocupadas pelo dígito 4; depois disso, há C_3^2 modos de selecionar as casas que serão ocupadas pelo dígito 8; finalmente, a casa restante pode ser preenchida de 8 modos (não podemos usar nessa casa os dígitos 4 e 8). Há $C_6^3 \times C_3^2 \times 8 = 20 \times 3 \cup 8 = 480$ números começando por 0. A resposta é $13.440 - 480 = 12.960$.

27) Solução: Há seis casos a considerar:
i) o homem convida 1 homem e 5 mulheres, a mulher convida 5 homens e 1 mulher; isso pode ser feito de $C_7^1 \cdot C_5^5 \cdot C_5^5 \cdot C_7^1 = \left[C_7^1 \cdot C_5^5\right]^2$ modos;
ii) o homem convida 2 homens e 4 mulheres, a mulher convida 4 homens e 2 mulheres; isso pode ser feito de $C_7^2 \cdot C_5^4 \cdot C_5^4 \cdot C_7^2 = [C_7^2 \cdot C_5^4]^2$ modos;
iii) o homem convida 3 homens e 3 mulheres, a mulher convida 3 homens e 3 mulheres; isso pode ser feito de $C_7^3 \cdot C_5^3 \cdot C_5^3 \cdot C_7^3 = \left[C_7^3 \cdot C_5^3\right]^2$ modos;
iv) o homem convida 4 homens e 2 mulheres, a mulher convida 2 homens e 4 mulheres; isso pode ser feito de $C_7^4 \cdot C_5^2 \cdot C_5^2 \cdot C_7^4 = [C_7^4 \cdot C_5^2]^2$ modos;
v) o homem convida 5 homens e 1 mulher, a mulher convida 1 homem e 5 mulheres; isso pode ser feito de $C_7^5 \cdot C_5^1 \cdot C_5^1 \cdot C_7^5 = \left[C_7^5 \cdot C_5^1\right]^2$ modos;
vi) o homem convida 6 homens e a mulher convida 6 mulheres; isso pode ser feito de $C_7^6 \cdot C_7^6 = [C_7^6]^2$ modos;
A resposta é $\left[C_7^1 \cdot C_5^5\right]^2 + [C_7^2 \cdot C_5^4]^2 + \left[C_7^3 \cdot C_5^3\right]^2 + [C_7^4 \cdot C_5^2]^2 + \left[C_7^5 \cdot C_5^1\right]^2 + [C_7^6]^2 = [7 \times 1]^2 + [7 \times 1]^2 + [21 \times 5]^2 + [35 \times 10]^2 + [35 \times 10]^2 + [21 \times 5]^2 + 7^2 = 267.148.$

28)Solução: Retirando-se um A, devemos achar anagramas de BACAN que começam com A, que são 4!=24. Retirando-se um B, devemos achar anagramas de ACANA que começam com A, que são 4!/2!=12. Retirando-se C ou N, obtemos também 12 anagramas começados com A. Esses anagramas obtidos são quase-anagramas de BACANA, um total de 60 quase-anagramas.

29)Soluçao: Da propriedade, decorre que 9 só pode aparecer ou como primeiro ou como último elemento da permutação e que os elementos de 1 a 8 formam uma permutação com a mesma propriedade. Assim, o número pedido é o dobro do número de permutações de 1, 2,...,8 com a mesma propriedade. Da mesma forma, o número de permutações de 1, 2,.., 8 com a propriedade é o dobro do número de permutações de 1, 2,.., 7 com a propriedade. Repetindo o raciocínio, concluímos que o número pedido é portanto $2^8 = 256$.

30) Solução: façamos o problema no caso geral.
O primeiro elemento da permutação deve ser inferior a 5. Pode ser escolhido de 4 modos.
O segundo elemento da permutação deve ser inferior a 6; haveria 5 possibilidades, mas uma delas já foi usada na escolha do primeiro algarismos. Pode ser escolhido de 4 modos.Prosseguindo com esse raciocínio, vemos que a cada nova casa abranda-se a restrição, criando uma possibilidade a mais, mas ao mesmo tempo diminui-se uma possibilidade, pois uma delas é usada no preenchimento da casa anterior. Ou seja, há 4 possibilidades para cada casa de ordem $n - 3$.O elemento de posição $n-3$ deve ser inferior $n-3+4=n+1$; n possibilidades, mas $n-4$ delas já foram usadas na escolha dos elementos anteriores. Pode ser escolhido de $n-(n-4)=4$ modos. O elemento de posição $n-2$ deve ser inferior a $n-2+4=n+2$; haveria n possibilidades, mas $n-3$ delas já foram usadas na escolha dos elementos anteriores. Pode ser escolhido de $n-(n-3)=3$ modos. O elemento de posição $n-1$ deve ser inferior a $n-1+4=n+3$; haveria n mas $n-2$ delas já foram usadas na escolha dos elementos anteriores. Pode ser escolhido de $n-(n-2)=2$ modos. Finamente, o elemento de posição n deve ser inferior a $n-4$; haveria n possibilidades, mas $n-1$ delas já foram usadas na escolha dos elementos anteriores. Pode ser escolhido de $n-(n-1)=1$ modo. A resposta é $4^{n-3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.4^{n-3}$.

32) Solução: Chegam 4 cientistas A, B, C, D. Com as chaves que possuem, abrem alguns cadeados, mas não todos. Existe pelo menos um cadeado que eles não conseguem abri. Na situação do número mínimo de cadeados, existe exatamente um cadeado que eles não conseguem abrir. Batize tal cadeado de ABCD. Portanto, ABCD é o cadeado cuja chave não está em poder de A, nem B, nem de C e nem de D. Qualquer outro cientista tem a chave desse cadeado, pois esse cientista e A, B, C, e D formam um grupo de 5 cientistas e, portanto, nesse grupo alguém possui a chave. Como o alguém não é nem A, nem B, nem C e nem D, deve ser o outro. Analogamente batize os demais cadeados. Verifique agora que a correspondência entre cadeados e seus nomes é biunívoca, isto é, cadeados diferentes têm nomes diferentes (isso porque estamos na situação do número mínimo de cadeados) e cadeados de nomes diferentes são diferentes (se X está no nome de um cadeado e não está no nome do outro, X tem a chave deste e não tem a chave daquele).

a)O número mínimo de cadeados é igual ao número de nomes de cadeados $C_9^4 = 126$.

b)Cientista X possui as chaves dos cadeados que não possuem X no nome, $C_8^4 = 70$.

33)Solução: Note que, aqui, não nos é informado o número exato de vezes que os algarismos 1 e 2 devem aparecer. Sabemos apenas o número máximo de vezes. Vejamos primeiro como determinar os possíveis valores para o número de vezes em que eles podem aparecer. Como o número deve possuir 8 algarismos e os algarismos 3 e 4 aparecem exatamente uma vez, segue que os números 1 e 2 devem aparecer, conjuntamente, seis vezes. Veja que, se o número 1 aparecesse apenas uma vez, o número 2 precisaria aparecer cinco vezes, mas isso não é permitido pelo enunciado. Logo, temos apenas duas possibilidades:

Caso 1. O algarismo 1 aparece exatamente duas vezes, o que implica que o algarismo 2 aparece quatro vezes: nesse caso, o número formado terá que ser uma permutaão da sequência 11222234. A quantidade de tais permutações é 840.

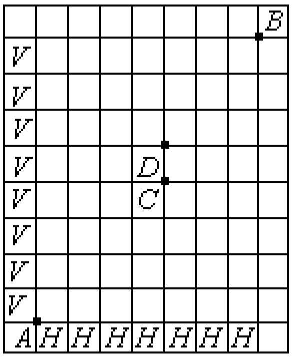
Caso 2. O algarismo 1 aparece exatamente três vezes, o que implica que o algarismo 2 aparece três vezes: nesse caso, o número formado terá que ser uma permutação da sequência 11122234. A quantidade de tais permutações é 1120.

Portanto a resposta será: 840 + 1120 = 1.960.

34) Solução:
a) Entende-se por caminho mínimo de A e B, qualquer percurso efetuado, partindo de A e caminhando sempre para cima ou para a direita, até alcançar B.
Representemos por *H* cada segmento horizontal compreendido entre duas verticais consecutivas, e por *V* cada segmento vertical compreendido entre duas horizontais consecutivas. Desse modo, podemos associar cada cominho mínimo de *A* e *B* com uma permutação das 15 letras *HHHHHHHVVVVVVVV* e reciprocamente.
Assim, por exemplo, as permutações:

$$H\ H\ H\ H\ H\ H\ H\ V\ V\ V\ V\ V\ V\ V\ V$$
$$H\ H\ H\ V\ V\ H\ H\ V\ V\ V\ V\ V\ V\ H\ H$$
$$V\ H\ H\ V\ V\ H\ H\ V\ H\ H\ V\ V\ V\ H\ V$$

representam 3 caminhos mínimos distintos de *A* e *B* (ver figura abaixo).



Logo, o número de caminhos mínimos de *A* a *B* é:

$$P_{15}^{7\cdot 8} = \frac{15!}{7!8!} = 6435$$

b) Calculemos o número de caminhos mínimos passando por *C*.

Acontecimentos	*Nº de ocorrências*
A_1 : percurso de *A* a *C*	$P_8^{4\cdot 4}$
A_2 : percurso de *C* a *B*, após ter ocorrido A_1	$P_7^{3\cdot 4}$

Pelo P.M., o número de caminhos mínimos passando por *C* é: $P_8^{4\cdot 4}\cdot P_7^{3\cdot 4}$.
Logo, o número de caminhos mínimos não passando por *C* é:

$$P_{15}^{7\cdot 8} - P_8^{4\cdot 4}\cdot P_7^{3\cdot 4} = 3985$$

c) Calculemos o número de caminhos mínimos passando por *C* e *D*.

Acontecimentos	*Nº de ocorrências*
A_1 : percurso de *A* a *C*.	$P_8^{4\cdot 4}$
A_2 : percurso de *C* a *D*, após terem ocorrido A_1.	1
A_3 : percurso de *D* a *B*, após terem ocorrido A_1 e A_2.	$P_6^{3\cdot 3}$

Assim, o número de caminhos mínimos não passando por *C* e *D* é:

$$P_{15}^{7\cdot 8} - P_8^{4\cdot 4}\cdot P_6^{3\cdot 3} = 5\,035$$

Solução:
Com exatamente k lâmpadas acesas, têm-se $\binom{6}{k}2^k$ possibilidades. Logo, o total T de possibilidades é

$$\begin{aligned} T &= \binom{6}{3}2^3 + \binom{6}{4}2^4 + \binom{6}{5}2^5 + \binom{6}{6}2^6 \\ &= \frac{6!}{3!3!}2^3 + \frac{6!}{4!2!}2^4 + \frac{6!}{5!1!}2^5 + \frac{6!}{6!0!}2^6 \\ &= 160 + 240 + 192 + 64 \\ &= 656 \end{aligned}$$

37)Solução:
a) Número de seqüências crescentes com 3 números: C_n^3.
b) Número de seqüências crescentes com 3 números consecutivos. As seqüências são as seguintes: $(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 4)$, $(3,\ 4,\ 5)$, ... , $(n-2,\ n-1,\ n)$, em número de $(n-2)$ seqüências.
c) Número de seqüências crescentes de 3 números, nas quais aparecem apenas 2 números consecutivos.
Consideremos os pares de 2 números consecutivos: $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$, ... , $(n-1,\ n)$, em número de $(n-1)$ pares.
O primeiro e o último par fornecem, cada um, $(n-3)$ seqüências de 3 números com apenas dois consecutivos.

De fato, consideremos as seqüências com 3 números, formadas com o par $(1,\ 2)$, e eliminemos todas as seqüências crescentes já contadas em (b) e aquelas que contrariam o enunciado do problema.

$$(1,\ 2)\begin{cases} 1 & (1,1,2) \quad \text{contraria o enunciado do problema} \\ 2 & (1,2,2) \quad \text{contraria o enunciado do problema} \\ 3 & (1,2,3), \quad \text{já contada em (b)} \\ 4 & \\ 5 & \\ 6 & \\ . & \\ . & \\ . & \\ n-1 & \\ n & \end{cases}$$

O mesmo ocorre com o par $(n-1,\ n)$. Cada um dos $(n-3)$ pares intermediários: $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 5)$, ..., $(n-2,\ n-1)$ fornece $(n-4)$ seqüências de 3 números com 2 números consecutivos.

De fato, escolhamos um par qualquer, por exemplo $(2,\ 3)$; formemos todas as seqüências de 3 números formados com o par $(2,\ 3)$ e eliminemos todas as seqüências crescentes já contadas em (b) e aquelas que contrariam o enunciado do problema.

$$(2,\ 3)\begin{cases} 1 & (1,2,3) \quad \text{já contada em (b)} \\ 2 & (2,2,3) \quad \text{contraria o enunciado do problema} \\ 3 & (2,3,3), \quad \text{contraria o enunciado do problema} \\ 4 & (2,3,4) \quad \text{já contada em (b)} \\ 5 & (2,3,5) \\ 6 & \\ . & \\ . & \\ . & \\ n-1 & (2,3,n-1) \\ n & (2,3,n) \end{cases}$$

Por conseguinte, os $(n-1)$ pares de 2 números consecutivos fornecem $2\cdot(n-3)+(n-3)\cdot(n-4)$ seqüências de 3 números consecutivos.

Assim, o total de seqüências de 3 números em que figuram pelo menos 2 números consecutivos é:

$$(n-2)+2\cdot(n-3)+(n-3)\cdot(n-4)=(n-2)^2.$$

Logo, a resposta do problema é: $C_n^3-(n-2)^2=\dfrac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{6}$.

38) Solução: Consideremos os grupos onde:

C, *E*, *O*, *P* designam, respectivamente, os naipes de copas, espadas, ouros e paus.

A, *D*, *R*, *V* designam, respectivamente, ás, dama, rei e valete.

Consideremos, então:

Acontecimentos	*Nº de ocorrências*
A_1: escolha de um dos 8 grupos para retirarmos 2 cartas do grupo escolhido	C_8^1
A_2: escolha de 2 cartas do grupo escolhido, após ter ocorrido A_1	C_4^2
A_3: Escolha 3 grupos dos 7 restantes, para de cada um deles extrair uma carta, após terem ocorrido A_1 e A_2.	C_4^3
A_4: escolha de uma carta de cada um dos 3 grupos escolhidos, após terem ocorrido, A_1, A_2 e A_3	4^3, pois em cada grupo podemos efetuar 4 escolhas

Logo, pelo P.M., o número pedido é: $C_8^1\cdot C_4^2\cdot C_4^3\cdot 4^3=107\,520$

39) *Solução:*

a) Consideremos a configuração $\bullet B\bullet B\bullet B\bullet C\bullet C\bullet C\bullet$ e os seguintes acontecimentos com seus respectivos números de ocorrências:

Acontecimentos	*Nº de ocorrências*
A_1: colocação das 3 letras *A* em 3 das 7 posições indicadas por pontos, na configuração acima.	C_7^3
A_2: permutação das letras, *BBBCCC* após ter ocorrido A_1.	$\dfrac{6!}{3!3!}$

Logo, pelo P.M., o número de permutações das 9 letras, não tendo duas letras *A* juntas é: $C_7^3\cdot\dfrac{6!}{3!3!}=700$

b) Separemos as $\frac{6!}{3!3!}=20$ permutações das letras *B B B C C C*, em três classes:
1.ª) Permutações não tendo letras *B* adjacentes. Examinando a configuração $\bullet C\bullet C\bullet C\bullet$ vemos que o número de tais permutações é: $C_4^3=4$.

2.ª) Permutação tendo apenas duas letras *B* adjacentes. Consideremos a configuração: $\bullet C\bullet C\bullet C\bullet$ e o par (*B B*, *B*).
O número de permutações das letras *B B B C C C* tendo apenas duas letras *B* juntas é: $C_4^2\cdot 2!=12$.

3.ª) Permutação tendo as três letras *B* juntas. Consideremos a configuração $\bullet C\bullet C\bullet C\bullet$. É trivial que o número de permutações tendo as três letras *B* juntas e $C_4^1=4$

Agora, procuremos encaixar as 3 letras *A* nas permutações de cada classe.
i) Uma das 4 permutações da 1.ª classe é, por exemplo. $\bullet B\bullet C\bullet B\bullet C\bullet B\bullet C\bullet$. Observemos que existem C_7^3 permutações não tendo duas letras *A* e duas letras *B* juntas.
ii) Uma das 12 permutações da segunda classe é, por exemplo.

$$\bullet B\bullet B\bullet C\bullet B\bullet C\bullet C\bullet$$

Fixando uma letra *A* entre os *B* adjacentes, obtemos a configuração

$$\bullet BAB\bullet C\bullet B\bullet C\bullet C\bullet$$

Assim, existem C_6^5 modos de encaixarmos as outras duas letras *A*.
Logo, as 12 permutações da 2.ª classe fornecem $12C_6^5$ permutações não tendo duas letras *A* e duas letras *B* adjacentes.

iii) Uma das 4 permutações da 3.ª classe é, por exemplo.

$$\bullet B\bullet B\bullet B\bullet C\bullet C\bullet C\bullet$$

Fixando uma letra *A* entre o primeiro e segundo *B*, e outra letra *A* entre o segundo e terceiro *B*. obtemos a configuração $\bullet BABAB\bullet C\bullet C\bullet C\bullet$. Vemos que existem C_5^1 modos de encaixarmos a última letra *A*.
Assim, as 4 permutações da 3.ª classe fornecem $4C_5^1$ permutações não tendo duas letras *A* e duas letras *B* juntas.
Logo, o número total de permutações não tendo duas letras *A* e duas letras *B* adjacentes é: $4C_7^3+12C_6^2+4_5^1=340$.

c) Consideremos as 6 letras *A A A B B B* e as $\frac{4!}{2!2!}=6$ permutações dessas letras, começando pelo grupo *A B*:

$\underline{A\ B}\ A\ A\ B\ B$	$\underline{A\ B}\ B\ A\ B\ A$
$\underline{A\ B}\ A\ B\ A\ B$	$\underline{A\ B}\ B\ B\ A\ A$
$\underline{A\ B}\ B\ A\ A\ B$	$\underline{A\ B}\ A\ B\ B\ A$

A letra *C* pode ser encaixada em cada uma dessas permutações, respectivamente, dos seguintes modos: C_3^1, C_5^3, C_3^1, C_4^2, C_3^3, C_4^2.
Assim, agrupamento *AB* fornece $C_3^1+C_5^3+C_3^1+C_4^2+C_3^3+C_4^2=29$ permutações nas quais não existem duas letras *A* juntas, duas a duas letras *B* juntas e duas letras *C* juntas.
O mesmo raciocínio pode ser feito para os grupos *BA*, *AC*, *CA*, *BC* e *CB*.
Logo, o número de permutações das 9 letras *AAABBBCCC*, nas quais não aparecem juntas duas letras *A*, duas letras *B* e duas letras *C*, é: $6\cdot 29=174$

40) ***Solução:***Se cada letra A representa um inglês, cada letra B um francês, e cada letra C um turco, o problema consiste em determinar o número de permutações das 9 letras $A_1A_2A_3B_1B_2B_3C_1C_2C_3$ que não possuem duas letras A juntas, duas letras B juntas e duas letras C juntas.
Retirando-se os índices dessas letras, recaímos no problema anterior, cujo número é, como vimos, 174.
Se em cada uma dessas 174 permutações afetarmos as letras de índices e permutarmos as letras A_1, A_2, A_3, entre si, B_1, B_2, B_3, entre si, e C_1, C_2, C_3, entre si, obteremos $(3!)^3$ permutações das 9 pessoas, que não possuem 2 compatriotas juntos.
Por conseguinte, o número pedido é: $174\cdot(3!)^3=37584$.