

COPE
ENSINO **MÉDIO**

PAULISTAS 2019

RESOLUÇÃO

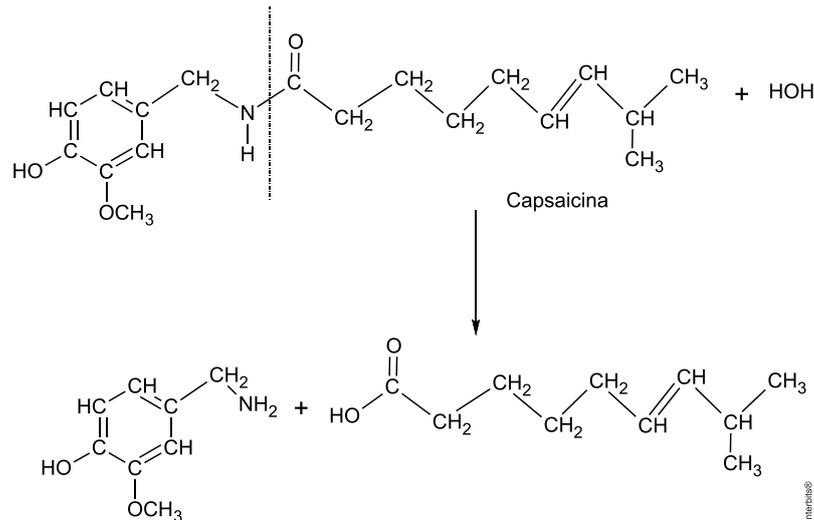
Biologia 1 - Fisiologia Animal e Humana

01| **A****[Resposta do ponto de vista da disciplina de Química]**

Nas sinapses, a propagação dos impulsos nervosos, desencadeados pelo consumo dessa pimenta, se dá pela ação de neurotransmissores.

O processo de evaporação do suor é endotérmico (absorve calor): $H_2O(l) + calor \rightarrow H_2O(v)$.

Produtos da hidrólise ácida da capsaicina:

**[Resposta do ponto de vista da disciplina de Biologia]**

Os neurotransmissores são substâncias químicas responsáveis pela transmissão de impulsos nervosos nas sinapses entre neurônios e entre axônios de neurônios e órgãos, tais como, músculos e glândulas.

02|

- Os artrópodes secretam um exoesqueleto constituído por quitina, um polissacarídeo. Os vertebrados são dotados de um endoesqueleto predominantemente ósseo e rico em fosfato de cálcio.
- A seleção natural é o fator evolutivo que age sobre as variações, preservando aquelas que são favoráveis para a sobrevivência e reprodução das espécies. Os machos com os "chifres" maiores, designados por **G**, obtêm maior sucesso na cópula e transmitem esse traço para a maioria dos descendentes machos, configurando a ação da seleção sexual.

03|

- Deveria optar pelo alimento 2, pois nele encontramos um valor menor de sódio, que deve ser evitado por pessoas hipertensas (motivo explicado na resposta do item b).
- Os dois componentes do rótulo que podem influenciar no aumento da pressão arterial são o sódio e as gorduras totais (que englobam as gorduras saturadas e gorduras trans). O sódio promove a entrada de água no leito vascular, aumentando o volume de sangue circulado no corpo (hipervolemia), com conseqüente aumento da pressão arterial. As gorduras totais em excesso, em longo prazo, se depositam nas paredes internas das artérias, promovendo seu enrijecimento (aterosclerose). Com esse enrijecimento, um pequeno aumento no volume sanguíneo já provoca um grande aumento da pressão arterial.

04|

Tabela I (tubos-teste)		
Tubo 1	Tubo 2	Tubo 3
pH: 2 enzima: - substrato: + temperatura: 30°C	pH: 2 enzima: - substrato: + temperatura: 40°C	pH: 2 enzima: - substrato: + temperatura: 50°C
Tubo 4	Tubo 5	Tubo 6
pH: 2 enzima: M substrato: + temperatura: 30°C	pH: 2 enzima: M substrato: + temperatura: 40°C	pH: 2 enzima: M substrato: + temperatura: 50°C

Tabela II (tubos-controles)		
Tubo 7	Tubo 8	Tubo 9
pH: 2 enzima: M substrato: + temperatura: 40°C	pH: 2 enzima: M substrato: + temperatura: 40°C	pH: 2 enzima: M substrato: + temperatura: 40°C
Tubo 10	Tubo 11	Tubo 12
pH: 2 enzima: - substrato: + temperatura: 30°C	pH: 2 enzima: - substrato: + temperatura: 40°C	pH: 2 enzima: - substrato: + temperatura: 50°C

Obs.: Esta questão admite diversas interpretações e, portanto, respostas distintas.

05|

- O paciente C, porque apresenta hemoglobina abaixo do normal. D, porque está com um débito cardíaco baixo.
- O paciente E, porque a taxa de oxigênio no sangue venoso é muito próxima à taxa observada no sangue arterial.
- O O gás carbônico estimula o bulbo raquidiano a aumentar a frequência respiratória.

06|

- a) Os insetos citados apresentam desenvolvimento indireto. Os gafanhotos são hemimetábolos com metamorfose incompleta. Os lepidópteros são holometábolos com metamorfose completa.
- b) Fases do desenvolvimento do gafanhoto alado: ovo → ninfas → adulto (imago).
Fases do desenvolvimento da lagarta-do-cartucho: ovo → larva (lagarta) → pupa (crisálida) → adulto (imago).

07|

- a) (1) aves e mamíferos; (2) anfíbios; (3) peixes e (4) répteis não crocodilianos.
- b) No coração das aves e mamíferos, o sangue venoso passa do átrio direito para o ventrículo direito, de onde segue aos pulmões. O sangue arterial passa do átrio esquerdo para o ventrículo esquerdo, de onde segue para os tecidos corpóreos. Não há mistura de sangue arterial e venoso. No coração dos anfíbios há mistura de sangue arterial e venoso no único ventrículo. O átrio direito envia sangue venoso para o ventrículo, enquanto o átrio esquerdo envia sangue arterial para o ventrículo. No coração dos peixes o sangue venoso passa do átrio para o ventrículo e é lançado nas brânquias. No coração dos répteis não crocodilianos há mistura de sangue arterial e venoso. O sangue venoso passa no átrio direito para o ventrículo direito e o sangue arterial passa do átrio esquerdo para o ventrículo esquerdo e daí para os tecidos corpóreos.

08|

C

A furosemida, por reduzir a reabsorção de sódio e cloro a partir da alça do néfron, causa aumento da produção de urina e, conseqüentemente, aumenta a diluição de medicamentos nas amostras e dificulta a sua detecção nos testes "antidoping".

09|

E

Assim como em um circuito elétrico, a maior resistência ao fluxo sanguíneo ocorre em estruturas ligadas em série. No circuito proposto, esse fato se verificará no glomérulo que filtra o sangue arterial na cápsula do néfron e no mecanismo osmótico de reabsorção de água ao longo dos túbulos renais.

10|

D

Os hormônios H1 e H2 são, respectivamente, a progesterona e o estrógeno. Suas concentrações no sangue caem abruptamente ao final do período da gestação devido à eliminação da placenta.

Biologia 2 - Reino vegetal, Fungos, Proctotistas, Monera

01|

A

[III] Incorreta: A torneira fechada, no aparelho de Münch, corresponde à interrupção do transporte da seiva bruta pelos vasos lenhosos do xilema.

02|

- a) Reprodução assexuada pela produção de esporos móveis, denominados zoósporos. A rã-touro faz o papel de reservatório natural do fungo.
- b) Umidade. O espessamento da camada de queratina na pele compromete a respiração cutânea dos anfíbios.

03| **C**

O subtipo de madeira II.a apresenta, aparentemente, maior teor de celulose e menor de lignina. Dessa forma, para remover a lignina indesejável será utilizada menor quantidade de reagente poluente H_2S , causando menor impacto ecológico quando for lançado no ambiente.

04| **D**

Certas espécies de fungos se associam com raízes de plantas formando as micorrizas. São associações harmônicas, interespecíficas com benefício mútuo entre os indivíduos envolvidos, pela troca de nutrientes.

05| **C**

A afirmação de Ricardo é verdadeira, porque foram observados dois organismos, um autótrofo como uma alga verde, por exemplo, e outro heterótrofo, o fungo conhecido por orelha-de-pau.

06|

- a) O hadroma do musgo *D. superba* corresponde aos vasos lenhosos das plantas vasculares, os quais transportam a seiva bruta. O leptoma corresponde aos vasos liberianos que transportam a seiva elaborada nas plantas traqueófitas.
- b) A vantagem de apresentar hadroma e leptoma é tornar o transporte das seivas mais eficiente. A legnina é um polissacarídeo com função de sustentação e reforço nas paredes dos vasos lenhosos, evitando o seu colapso.

07|

- a) Floresta A. Nos períodos de maior precipitação (setembro a abril) a transpiração é mais intensa e, conseqüentemente, maior é o lançamento de água do solo para o ar. A floresta A apresenta maior biomassa, porque capta maior quantidade de CO_2 da atmosfera.
- b) A concentração de vapor de água da atmosfera é menor por conta do fechamento dos estômatos e da redução da transpiração foliar. A concentração de CO_2 atmosférico aumenta devido à menor captação pela vegetação no período mais seco.

08| **E**

Na condição 2, planta irrigada, os estômatos das folhas permanecem abertos. A abertura dos ostíolos depende do bombeamento de K^+ , das células acessórias para o interior das células guarda, tornando-as hipertônicas e, conseqüentemente, túrgidas.

09| **A**

A ocorrência de sementes no interior dos frutos indica que as bananas pertencem a populações nas quais ocorreu reprodução sexuada.

10|

- a) As araucárias vivem em ambientes terrestres ensolarados e apresentam um sistema radicular muito eficiente para absorver e conduzir a água do solo até suas folhas.

Os musgos vivem em habitats úmidos e sombreados. Não possuem raízes verdadeiras e sim rizoides que absorvem água por osmose. São plantas avasculares e transportam a água de célula a célula também por osmose.

b) Teremos:

Grupo de Plantas	Planta Representante	Novidade Evolutiva
Briófita	musgos	—
Pteridófita	samambaias	tecido condutor (xilema e floema)
Gimnospermas	pinheiros	pólen, tubo polínico, óvulo e semente
Angiospermas	mangueira	flor e fruto

Biologia 3 – Ecologia

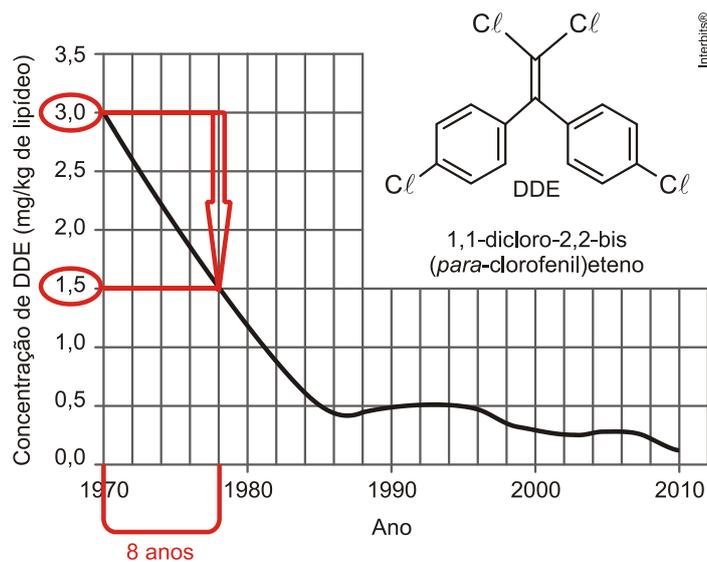
01|

a) A partir da análise do gráfico, teremos:

3,0 mg / kg — 100 %

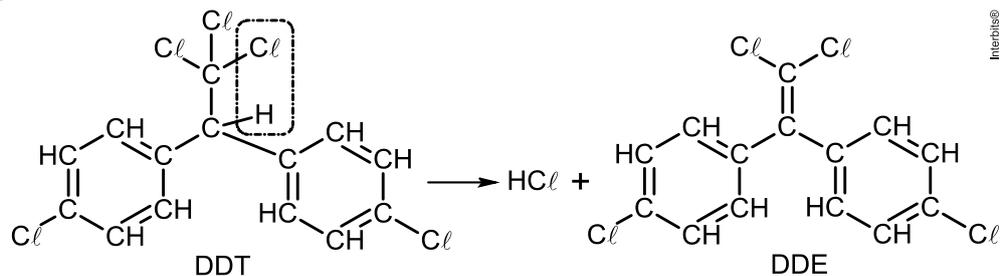
m — 50 %

$m = 1,5 \text{ mg / kg}$



Conclusão: levou oito anos para que houvesse uma redução de 50% na concentração de DDE.

b) A equação química que representa a formação do DDE, pela eliminação de HCl , a partir do DDT é a seguinte:



- c) O DDT é uma substância não biodegradável e não pode ser excretado pelos seres vivos. Dessa forma, o inseticida se acumula ao longo das cadeias alimentares a partir dos produtores, aparecendo em maiores concentrações nos predadores finais.

02| **D**

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Biologia]

I. Falso. Os dados da tabela não mostram uma forte correlação entre as concentrações de nitrato e de oxigênio dissolvido na água.

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Química]

Análise das afirmações:

I. Incorreta. Nessas amostras, não se verifica correlação entre a concentração de nitrato e a de oxigênio, o pH diminui e as concentrações oscilam:

	pH	Concentração de nitrato (mg/L)	Concentração de oxigênio (mg/L)
Ponto A (novembro)	9,8	0,14	6,5
Ponto B (novembro)	9,1	0,15	5,8
Ponto A (maio)	7,3	7,71	5,6
Ponto B (maio)	7,4	3,95	5,7

II. Correta. As amostras de água coletadas em novembro devem ter menos CO₂ dissolvido do que aquelas coletadas em maio, pois o pH em maio é menor, ou seja, a concentração de íons H⁺ devido a presença do gás carbônico é maior.

	pH	Concentração de nitrato (mg/L)
Ponto B (novembro)	9,1	0,15
Ponto A (maio)	7,3	7,71

III. Correta. Se as coletas tivessem sido feitas à noite, o pH das quatro amostras de água seria mais baixo do que o observado, pois a concentração de gás carbônico é maior neste período.

03|

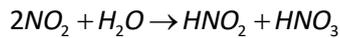
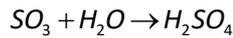
[Resposta do ponto de vista da disciplina de Biologia]

- b) Melhoramento das emissões dos gases geradores da chuva ácida emitidos pelas chaminés das indústrias e usinas termoeletricas.

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Química]

- a) Em A se destacam: CO₂, SO₃ e NO₂.

Os óxidos que geram ácidos (chuva ácida):



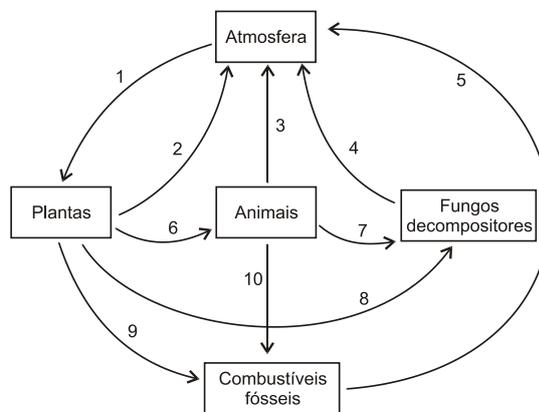
Preenchendo o quadro fornecido no enunciado, teremos:

A	B
SO_3 e NO_2	H_2SO_4 e HNO_3

b) O rodízio municipal de veículos, que visa diminuir a emissão de poluentes emitidos pelos motores, e a inspeção veicular anual, que colabora no controle de regulagem dos motores a combustão interna.

Resposta da questão 4:

a) Teremos as seguintes setas e sentidos:



b) Os números serão: 6, 7, 8, 9 e 10.

Plantas → Animais 6

Animais → Fungos decompositores 7

Plantas → Fungos decompositores 8

Plantas → Combustíveis fósseis 9

Animais → Combustíveis fósseis 10

05|

Teremos:

Esquema	Bioma terrestre
I	Floresta tropical
II	Floresta temperada
III	Deserto
IV	Tundra

06| **B**

A redução do primeiro nível trófico da cadeia alimentar, representado pelo capim, tem como consequência a diminuição populacional de todos os outros componentes da cadeia trófica.

07| **A**

[I] motivo: A energia solar incide na atmosfera em comprimentos de onda menores e é refletida em comprimentos de onda maiores.

[II] uma das causas: queima de combustíveis fósseis.

- 08| **B**
Os experimentos com as bolhas de ar aprisionadas no gelo indicam que a elevação das emissões de CO_2 está correlacionada com a utilização crescente do carvão mineral durante a Revolução Industrial, fato que permitiu o uso da energia a vapor e o desenvolvimento de máquinas, levando à produção em grande escala.
- 09| **C**
Os microrganismos que fermentam a matéria orgânica na água favorecem a entrada do mercúrio nas cadeias e teias alimentares na bacia do Rio Negro. Esse fato é resultante da ligação do mercúrio com o radical metil, subproduto da fermentação.
- 10| **D**
A ausência de atividade humana no ambiente contaminado por radioatividade favorece o aumento populacional de animais e plantas, apesar do impacto negativo da radiação sobre os organismos que proliferam nesses ambientes.

Biologia 4 – Citologia e Parasitologia

- 01| **A**
- [Resposta do ponto de vista da disciplina de Biologia]**
A dissolução do cloreto de sódio à água pura eleva o seu ponto de ebulição. O aquecimento do meio de cultura provocava a desnaturação das proteínas das bactérias presentes.
- [Resposta do ponto de vista da disciplina de Química]**
Com a adição de cloreto de sódio, a temperatura de ebulição da água do banho, com relação à da água pura, era maior devido ao aumento do número de partículas de soluto (efeito ebulioscópico). O aquecimento do meio de cultura provocava a desnaturação da proteína, ou seja, a proteína perdia a sua estrutura tridimensional.
- 02| **C**
- No período G2 da interfase os 24 cromossomos acham-se duplicados. Cada um é formado por duas cromátides irmãs, unidas pelo centrômero. Cada cromátide é constituída por uma molécula de DNA de cadeia dupla. Dessa forma, em G2, observam-se 48 moléculas de DNA, cada uma formada por uma dupla hélice.
- 03|
- Bactérias são microrganismos que podem produzir naturalmente antibióticos. A biotecnologia do DNA recombinante pode ainda modificar bactérias para que passem a fabricar substâncias com efeito terapêutico.
 - O botulismo é uma infecção adquirida por meio da ingestão de alimentos contaminados com a bactéria *Clostridium botulinum*. O tétano é adquirido quando ferimentos são infectados por esporos da bactéria *Clostridium tetani*.

- 04| **D**

A cisticercose é causada pela ingestão dos ovos da *Taenia solium*. A teníase ocorre quando o homem ingere carne suína ou bovina crua infestada com cisticercos, isto é, contaminada com larvas de tênias. Evitamos essas doenças lavando bem os alimentos crus, bebendo água tratada e não comendo carne crua ou mal passada.

05|

- a) Masculino: faixa de 10 a 19 anos; feminino: faixa de 5 a 9 anos.
Os carboidratos são predominantemente energéticos e utilizados na síntese do ATP utilizado no metabolismo. Quando ingerido em excesso é convertido em gorduras, podendo causar o sobrepeso e a obesidade.
- b) O câncer é causado por mutações gênicas que alteram os mecanismos de divisão celular mitótica. A ingestão das crucíferas inibe a multiplicação celular por conter substâncias antimitóticas.

06|

- a) A informação correta feita pelo Grupo 1 refere-se ao fato de que, na zona urbana, a transmissão da febre amarela é feita pelo mesmo transmissor de outras doenças. Trata-se de fêmeas contaminadas do mosquito *Aedes aegypti*.
- b) A informação errada do Grupo 2 refere-se ao fato de que a forma silvestre da febre amarela encontra-se associada a ambientes abertos e secos. Os mosquitos transmissores, dos gêneros *Haemagogus* e *Sabethes* vivem em matas tropicais úmidas e fechadas, tais como a mata atlântica.

07|

- a) *Aedes aegypti*: A fêmea do mosquito é transmissora do vírus da dengue e também é parasitada. *Triatoma infestans*: O barbeiro não inocula o protozoário *Trypanosoma cruzi*; ele o elimina nas fezes próximo ao local da picada.
- b) *Pulex irritans*: Certas espécies de pulgas transmitem micro-organismo através da picada. Ao sugar o sangue humano, a pulga se comporta como ectoparasita.

08|

- a) O tratamento com o sulfato de vincristina bloqueia o processo de divisão celular mitótico. Os microtúbulos, formados pela proteína tubulina, prendem-se aos cromossomos duplicados pelos seus centrômeros e fracionam os cromossomos-filhos para os polos opostos da célula. Eles são os responsáveis pela correta separação das cromátides-irmãs durante a anáfase da mitose.
- b) A estrutura celular que apresenta a composição química semelhante ao lipossomo é a membrana plasmática. A fusão das vesículas com a membrana celular permite a introdução do quimioterápico no meio intracelular.

09|

B

O tratamento com Truvada® evita que as células infectadas pelo HIV realizem a transcrição reversa, isto é, a síntese do DNA viral a partir de um molde de RNA.

10|

E

A esquistossomose é causada por um platelminto denominado *Schistosoma mansoni* e transmitido por um caramujo dulçaquícola pertencente ao filo moluscos, os quais liberam as larvas cercárias que penetram pela pele humana.

Biologia 5 – Genética e Evolução Biológica

01| **C**

Segundo o texto, o fenótipo dos descendentes, concha dextrógira ou levógira é determinado exclusivamente por herança materna, independentemente do genótipo paterno. Dessa forma, se a fêmea com concha dextrógira (Aa) se acasalar com um macho aa com concha levógira, os filhotes têm 50% de probabilidade genotípica Aa e 50% aa , porém todos com concha dextrógira. Não há possibilidade de descendentes com concha levógira.

02|

- a) O loco gênico envolvido na doença localiza-se no cromossomo X. Se estivesse na região não homóloga do cromossomo Y, a condição só afetaria homens. O alelo A_1 domina o alelo A_2 . A análise do heredograma mostra que todas as filhas de homens afetados herdaram o cromossomo X^{A_1} de seu pai.

Outra evidência que trata-se de herança dominante e ligada ao sexo é que os filhos homens de pais afetados, não exibem a doença paterna;

- b) As células-tronco podem se diferenciar e dar origem a neurônios. Fibroblastos e neurônios expressam genes distintos. Logo, os efeitos do alelo A_1 aparecem nos neurônios, porque nessas células o gene está ativo e, nos fibroblastos, inativo.

03|

- a) A puromicina tem ação antibiótica, porque bloqueia a produção das proteínas necessárias à sobrevivência das bactérias patogênicas. A massa molecular de dada proteína será menor na presença do antibiótico, porque o medicamento impede a adição de novos aminoácidos nas proteínas.
- b) A taxa de sobrevivência das células que receberam esses genes será maior, porque o produto gênico destrói a puromicina que abrevia a vida das bactérias que não são transgênicas.

04|

- a) São obrigatoriamente heterozigotos os indivíduos I-2, II-1, II-5 e III-2. Sendo o gene raro, as pessoas que entraram na família são aa (I-1, II-2 e II-3). O indivíduo II-1 é heterozigoto, porque tem uma filha afetada (III-2), porém não manifesta o caráter porque a penetrância do gene dominante é incompleta. Não é possível determinar o genótipo do indivíduo II-4.

- b) pais (II-5) $Aa \times aa$ (II-6)

$$P(\text{criança } Aa) = 0,5$$

$$P(\text{criança } Aa \text{ e } 0,8 \text{ de chance de manifestar o caráter}) = 0,5 \times 0,8 = 0,40$$

$$P(\text{criança } Aa \text{ e afetada}) = 40\%$$

05|

- a) Os órgãos que apresentam a mesma origem embrionária são denominados homólogos. A divergência estrutural verificada entre o ancestral e a espécie atual é o resultado da seleção natural diferencial que ocorreu durante a história evolutiva das espécies.
- b) O fechamento do braço de mar provocou o isolamento geográfico de populações de peixe-boi de água salgada. A formação da bacia amazônica determinou a seleção natural das variedades de peixe-boi capazes de sobreviver e se reproduzir na água doce.

06|

- a) Os plasmídeos são obtidos de bactérias. As enzimas (ou endonucleases) de restrição são proteínas que cortam a molécula de DNA.
- b) Os plasmídeos devem entrar no núcleo para que o DNA possa se expressar, isto é, transcrever e servir de molde para a síntese do RNAm que será traduzido como o antígeno.

07|

- a) Não. O heredograma sugere a ocorrência de herança recessiva e autossômica. Dessa forma, a probabilidade de filhos e filhas afetados, com pais heterozigotos é a mesma e igual a $1/2$ ou 50%.

- b) Alelos: a (anomalia) e A (normalidade)

Pais: $Aa \times Aa$. P (normal e AA) = $1/3$

$$P (\text{♀ e } aa) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

08|

- a) O heredograma sugere ao padrão típico de condição dominante e ligada ao cromossomo X. São evidências: as filhas de homens afetados são todas afetadas. Os homens filhos de homens afetados não manifestam a doença.
- b) A alteração ocorrida no DNA foi a substituição da primeira base dos quatro primeiros códons. Houve uma transversão porque a base citosina (C) foi trocada por guanina (G) no DNA. Também pode ter ocorrido uma transição do tipo troca de C por T (timina) entre os dois últimos códons de glicina e os dois últimos da arginina.

09| **C**

O organismo mostrado na figura pode pertencer à linhagem evolutiva das serpentes. O ancestral comum às serpentes. O ancestral comum às serpentes e aos lagartos tinha membros anteriores e posteriores, os quais foram perdidos durante a evolução das linhagens ápodes atuais.

10| **D**

$$\text{Número de alelos } A = 2 N_{AA} + 1 N_{Aa}$$

$$\text{Número total de alelos} = 2 N_{AA} + 2 N_{Aa} + 2 N_{aa}$$

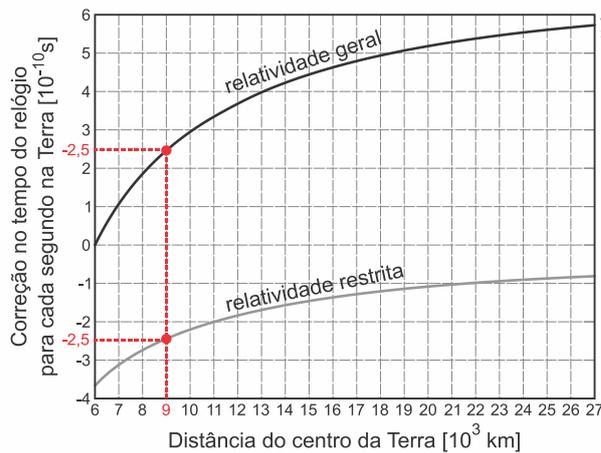
$$\text{Frequência do alelo } A = \frac{2 N_{AA} + N_{Aa}}{2(N_{AA} + N_{Aa} + N_{aa})}$$

Física 1 - Mecânica

01|

a)
$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2 \pi R_{GPS}}{T_{GPS}} = \frac{2 \times 3 \times 27.000}{12} \Rightarrow v_m = 13.500 \text{ km/h} = 3.750 \text{ m/s.}$$

b) Analisando o gráfico, nota-se que a compensação entre o adiantamento e o atraso ocorre para $R = 9 \times 10^3 \text{ km}$, onde esses tempos são $+2,5 \times 10^{-10} \text{ s}$ e $-2,5 \times 10^{-10} \text{ s}$ conforme mostra o gráfico.



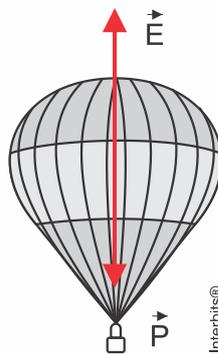
O tempo T para a órbita pode ser calculado aplicando a 3ª lei de Kepler, comparando as duas situações, órbita regular e órbita com compensação de tempos.

$$\left(\frac{T}{T_{GPS}}\right)^2 = \left(\frac{R}{R_{GPS}}\right)^3 \Rightarrow \frac{T^2}{12^2} = \left(\frac{9 \times 10^3}{27 \times 10^3}\right)^3 \Rightarrow T^2 = \frac{144}{27} = \frac{16}{3} \Rightarrow T = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{4\sqrt{3}}{3} h.}$$

02|

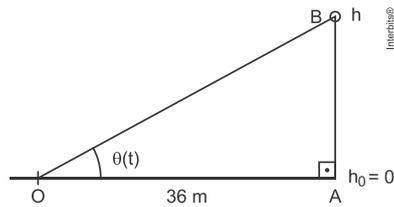
a) A figura mostra as forças mencionadas no enunciado.



Como o balão sobe em movimento acelerado, $E > P$. Aplicando o Princípio Fundamental da Dinâmica:

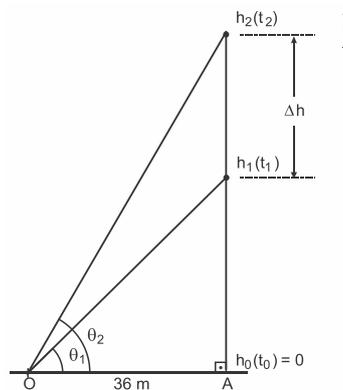
$$E - P = m a \Rightarrow d_{ar} V g - m g = m a \Rightarrow V = \frac{m(a + g)}{d_{ar} g} = \frac{90(2 + 10)}{1,2 \times 10} \Rightarrow \boxed{V = 90 \text{ m}^3.}$$

- b) Adotando origem de altura no solo e considerando velocidade inicial nula, a relação entre a altura h do balão e o ângulo θ , num instante t é:



$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \frac{h-h_0}{36} \Rightarrow h = 36 \operatorname{tg}\theta. & (I) \\ h = h_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \Rightarrow h = \frac{2}{2} t^2 \Rightarrow h = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{h}. & (II) \end{cases}$$

A figura mostra as posições do balão nos instantes t_1 e t_2 .



Em (I):

$$h = 36 \operatorname{tg}\theta \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow h_1 = 36 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow h_1 = 36 \text{ m.} \\ \theta_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow h_2 = 36 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \Rightarrow h_2 = 36\sqrt{3} \text{ m.} \end{cases}$$

Em (II):

$$t = \sqrt{h} \begin{cases} t_1 = \sqrt{36} \Rightarrow t_1 = 6 \text{ s.} \\ t_2 = \sqrt{36\sqrt{3}} \Rightarrow t_2 = 6\sqrt[4]{3} \text{ s.} \end{cases}$$

A velocidade média é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{36\sqrt{3} - 36}{6\sqrt[4]{3} - 6} = \frac{36(\sqrt{3} - 1)}{6(\sqrt[4]{3} - 1)} \Rightarrow v_m = \frac{6(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt[4]{3} - 1)}.$$

Racionalizando a expressão acima:

$$v_m = \frac{6(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt[4]{3} - 1)} \times \frac{(\sqrt[4]{3} + 1)}{(\sqrt[4]{3} + 1)} = \frac{6(\sqrt{3} - 1) \times (\sqrt[4]{3} + 1)}{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow v_m = 6(\sqrt[4]{3} + 1) \text{ m/s.}$$

Aproximando os valores:

$$v_m = 6(1,32 + 1) \Rightarrow v_m = 13,9 \text{ m/s.}$$

03|

- a) Desprezando a resistência do ar e considerando que a velocidade é nula no início da descida ($v_0 = 0$) e no final da subida ($v_3 = 0$), pela equação de Torricelli, têm-se:

$$\begin{cases} \text{Queda: } v_1^2 = v_0^2 + 2gh_i \Rightarrow v_1^2 = 0 + 2gh_i \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh_i} \\ \text{Subida: } v_3^2 = v_2^2 - 2gh_f \Rightarrow 0 = v_2^2 - 2gh_f \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh_f} \end{cases}$$

O coeficiente de restituição (e) é:

$$e = \left| \frac{v_2}{v_1} \right| = \frac{\sqrt{2gh_f}}{\sqrt{2gh_i}} = \sqrt{\frac{h_f}{h_i}} = \sqrt{\frac{2}{50}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{e = 0,2.}$$

- b) Estimando a massa da gota:

Considerando uma gota de diâmetro $D = 3\text{ mm} = 3 \times 10^{-1}\text{ cm}$ e a densidade da água $d_a = 1\text{ g/cm}^3$ e $\pi = 3$, a massa da gota é:

$$m_g = d_a V_g = d_a \times \frac{\pi D^3}{6} = 1 \times \frac{3(3 \times 10^{-1})^3}{6} \Rightarrow m_g = 13,5 \times 10^{-3}\text{ g.}$$

Para simplificar, esse valor pode ser arredondado para $m_g = 15 \times 10^{-3}\text{ g.}$

Calculando a massa de lodo capturada (m): $m = \sigma A = 2,5 \times 10^{-3} \times 2 \Rightarrow m = 5 \times 10^{-3}\text{ g.}$

A situação pode ser assimilada a um choque inelástico entre a gota e o lodo. Então, pela conservação da Quantidade de Movimento:

$$Q_{sist}^i = Q_{sist}^f \Rightarrow m_g v_i = (m_g + m) v_f \Rightarrow (15 \times 10^{-3})(3) = (15 + 5) \times 10^{-3} v_f \Rightarrow \boxed{v_f = 2,25\text{ mm/s.}}$$

04|

- a) A densidade é a razão entre a massa e o volume: $d = \frac{M}{V}$.

Se as densidades fossem iguais:

$$d_p = d_T \Rightarrow \frac{M_p}{V_p} = \frac{M_T}{V_T} \Rightarrow \frac{\alpha M_T}{\frac{4}{3}\pi(\beta R_T)^3} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta^3} = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta^3.}$$

- b) A gravidade na superfície de um planeta esférico é: $g = \frac{GM}{R^2}$.

$$\left. \begin{cases} g_p = \frac{GM_p}{R_p^2} \Rightarrow g_p = \frac{G \alpha M_T}{(\beta R_T)^2} \Rightarrow g_p = \frac{\beta^3 GM_T}{\beta^2 R_T^2} \Rightarrow g_p = \frac{\beta GM_T}{R_T^2} \\ g_T = \frac{GM_T}{R_T^2} \end{cases} \right\} \Rightarrow \boxed{r_p = \frac{g_p}{g_T} = \beta.}$$

c) O período do pêndulo simples é: $T = 2\pi \left(\frac{L}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$.

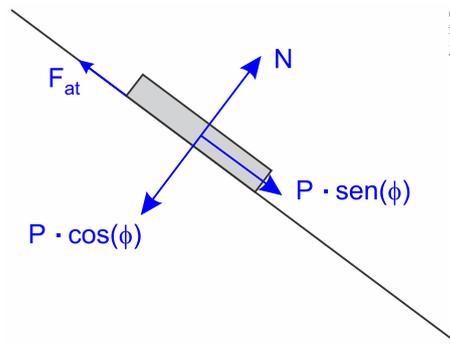
$$r_t = \frac{t_p}{t_T} \Rightarrow r_t = \frac{2\pi \left(\frac{L}{g_p} \times \frac{g_T}{L} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{g_T}{g_p} \right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow r_t = \left(\frac{1}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow r_t = \frac{1}{\beta^{1/2}}$$

d) A velocidade é: $v = \frac{L}{t}$.

$$r_v = \frac{v_p}{v_T} = \frac{L}{t_p} \times \frac{t_T}{L} = \frac{t_T}{t_p} \Rightarrow r_v = \beta^{1/2}$$

05|

a) No ponto B, temos o seguinte diagrama de forças atuando sobre o sistema menino/caixa:



Assim, podemos equacionar de forma que:

$$F_{at} = \mu \cdot N = \mu \cdot P \cdot \cos \theta = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta$$

$$F_{at} = 0,25 \cdot 40 \cdot 10 \cdot 0,8$$

$$F_{at} = 80 \text{ N}$$

b) Pelo teorema da Energia Cinética, temos que:

$$\Delta E_c = \tau_{total} = \tau_{potencial} - \tau_{atrito}$$

Do enunciado, podemos encontrar a altura do ponto A em relação ao ponto C:

$$\text{sen} \theta = \frac{h}{AC}$$

$$h = 0,6 \cdot 10$$

$$h = 6 \text{ m}$$

A força de atrito entre os pontos C e D é diferente da calculada no item anterior, pois a força normal não é a mesma. Assim

$$F_{at}' = \mu \cdot N = \mu \cdot P = 0,25 \cdot 40 \cdot 10$$

$$F_{at}' = 100 \text{ N}$$

Com os valores das grandezas calculados, podemos continuar a desenvolver a equação do teorema da energia cinética.

$$\begin{aligned}\Delta E_c &= \tau_{total} = \tau_{potencial} - \tau_{atrito} \\ E_{c_f} - E_{c_i} &= \tau_{potencial} - (\tau_{atrito_{AC}} + \tau_{atrito_{CD}}) \\ 0 - \frac{m \cdot v_A^2}{2} &= m \cdot g \cdot h - (F_{at} \cdot AC + F_{at}' \cdot CD) \\ -\frac{40 \cdot 1^2}{2} &= 40 \cdot 10 \cdot 6 - (80 \cdot 10 + 100 \cdot CD) \\ -20 &= 2400 - 800 - 100 \cdot CD \\ CD &= 16,2 \text{ m}\end{aligned}$$

Assim, a distância total percorrida (d) é de:

$$\begin{aligned}d &= AC + CD = 10 + 16,2 \\ d &= 26,2 \text{ m}\end{aligned}$$

06 | **D**

Em toda colisão $\vec{Q}_{total} = \text{constante}$

$$m_A(\vec{V}_0)_A + m_B(\vec{V}_0)_B = m_A\vec{V}_A + m_B\vec{V}_B$$

Como as massas são iguais, vem:

$$(\vec{V}_0)_A + (\vec{V}_0)_B = \vec{V}_A + \vec{V}_B$$

Adotando orientação positiva para a esquerda, vem:

$$2V_0 - V_0 = V_A + 0 \rightarrow V_A = V_0$$

$$E_2 = \frac{1}{2}MV_0^2$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{2}MV_0^2}{\frac{5}{2}MV_0^2} = \frac{1}{5} = 0,2 \rightarrow E_2 = 0,2E_1$$

07 | **B**

Como a mancha branca parece estar parada, a frequência de rotação da polia deve ser um número múltiplo das frequências de 9 Hz e 12 Hz. E o menor valor para o qual isto é possível deve ser o mínimo múltiplo comum entre eles:

$$mmc(9,12) = mmc(3^2, 3 \cdot 2^2) = 3^2 \cdot 2^2 = 36$$

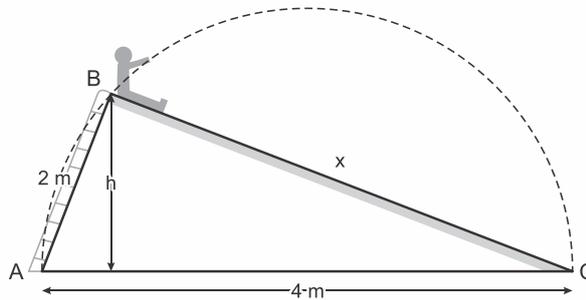
Sendo assim, a sua frequência é de:

$$\begin{aligned}f &= 36 \text{ Hz} = 36 \cdot 60 \text{ rpm} \\ \therefore f &= 2160 \text{ rpm}\end{aligned}$$

Obs: rpm é unidade de frequência e não de velocidade angular.

08| **C**

Da trigonometria sabemos que todo o triângulo inscrito em uma semicircunferência é um triângulo retângulo. Assim com o teorema de Pitágoras e uma relação métrica no triângulo retângulo descobrimos a altura do ponto B.



Usando o Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 2^2 = 4^2$$

$$x^2 = 16 - 4$$

$$x = \sqrt{12} \therefore x = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

Com a relação métrica do triângulo retângulo tiramos a altura, pois o produto da altura pela hipotenusa é igual ao produto dos catetos, então ficamos com:

$$h \cdot 4 = 2 \cdot 2\sqrt{3} \therefore h = \sqrt{3} \text{ m}$$

Da energia potencial gravitacional, temos:

$$E_{pg} = m \cdot g \cdot h$$

$$m = \frac{E_{pg}}{g \cdot h}$$

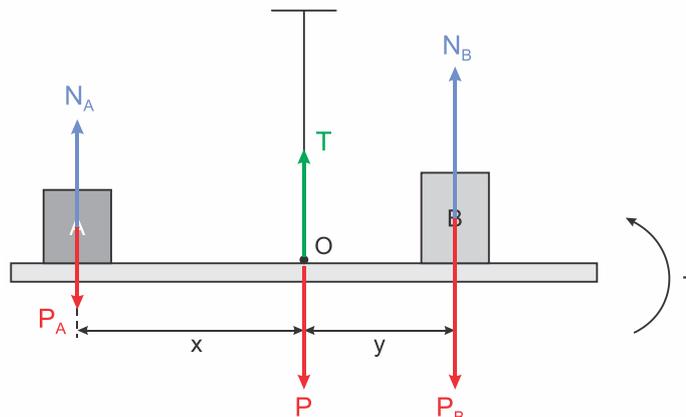
Substituindo os valores fornecidos e a altura encontrada, teremos condições de achar a massa da criança.

$$m = \frac{342 \text{ J}}{5,7\sqrt{3} \text{ m/s}^2 \cdot \sqrt{3} \text{ m}}$$

$$\therefore m = 20 \text{ kg}$$

09| **A**

As equações de equilíbrio estático são obtidas do diagrama de forças:



O equilíbrio rotacional é dado pela soma dos momentos igual a zero.

$$\sum M = 0$$

$$P_A \cdot x - N_A \cdot x + N_B \cdot y - P_B \cdot y = 0$$

$$P_A \cdot x - P_B \cdot y = N_A \cdot x - N_B \cdot y$$

Como os pesos são iguais em módulo às reações normais:

$$P_A = N_A \quad \text{e} \quad P_B = N_B$$

então

$$N_A \cdot x - N_B \cdot y = 0$$

Esse resultado é justamente o determinante da matriz M ou da matriz M^t que são iguais:

$$\det(M) = \det(M^t) = N_A \cdot x - N_B \cdot y = 0$$

Portanto, a alternativa correta é da letra [A].

10| **B**

Entre dois solstícios consecutivos, verão e inverno são 6 meses, aproximadamente, 180 dias, intervalo de tempo em que a nascente do Sol desloca-se 300 m.

Assim:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} \cong \frac{300}{180} \Rightarrow v_m \cong 1,6 \text{ m/dia.}$$

Física 2 - Eletricidade – Regis

01|

Intensidade média da corrente elétrica.

Dados: $|Q| = 30 \text{ C}$; $\Delta t = 200 \text{ ms} = 0,2 \text{ s}$.

Da definição de corrente elétrica:

$$i_m = \frac{|Q|}{\Delta t} = \frac{30}{0,2} \Rightarrow i_m = 150 \text{ A.}$$

- Quantidade de baterias que podem ser carregadas.

Nota 1: O enunciado especifica: "Suponha que, quando a diferença de potencial entre a nuvem e o solo atingiu o valor de $1,8 \times 10^8 \text{ V}$, ocorreu...". Isso sugere que durante o processo de carga do sistema solo-nuvem a tensão aumenta. Conclui-se, então, que durante a descarga do raio a tensão entre a nuvem e o solo não é mantida constante, caindo de $1,8 \times 10^8 \text{ V}$ a 0 V . Essas informações sobre tensões constantes ou variáveis deveriam estar no enunciado para melhor direcionar a resolução da questão.

Trabalhando com valores médios, como sugeriu o examinador no cálculo da corrente elétrica, a energia potencial elétrica armazenada no sistema solo-nuvem é semelhante à de um capacitor de placas paralelas.

$$E_{pot} = \frac{|Q| \times U}{2} = \frac{30 \times 1,8 \times 10^8}{2} \Rightarrow E_{pot} = 2,7 \times 10^9 \text{ J.}$$

A carga acumulada em cada bateria é:

$$|q| = 50 A \cdot h = 50 A \times 3.600 s \Rightarrow |q| = 1,8 \times 10^5 C.$$

A energia potencial elétrica armazenada por cada bateria é:

$$E_1 = |q| \times U_1 = 1,8 \times 10^5 \times 10 \Rightarrow E_1 = 1,8 \times 10^6 J.$$

Quantidade (n) de baterias que podem ser carregadas com a energia do raio:

$$nE_1 = E_{pot} \Rightarrow n = \frac{E_{pot}}{E_1} = \frac{2,7 \times 10^9}{1,8 \times 10^6} \Rightarrow n = 1.500.$$

Nota 2: caso seja considerada constante a tensão durante a descarga do raio, o número de baterias passa a ser o dobro ou seja: $n = 3.000.$

02| **C**

A corrente em cada ramo vale: $i = \frac{1}{150} A$

$$V_{AB} = N(\varepsilon - Ri) \rightarrow 750 = 5000x \left(\varepsilon - 7,5x \frac{1}{150} \right)$$

$$0,15 = \varepsilon - 0,05 \rightarrow \varepsilon = 0,20V .$$

03|

a) Sabemos que $potência = \frac{energia}{tempo}$, que a potência dissipada em um resistor pode ser calculada pela

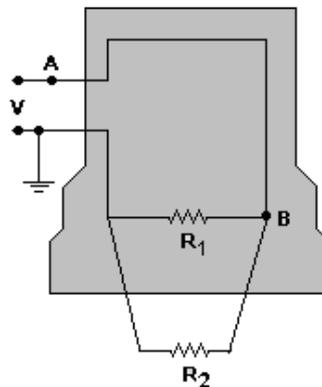
expressão $P = \frac{V^2}{R}$ e que a massa específica de uma substância vale $\mu = \frac{m}{V} \rightarrow m = \mu V$, então:

Note que 3,0L de água tem 3,0kg de massa.

$$\frac{V^2}{R_1} = \frac{mc\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow \frac{200^2}{10} = \frac{3 \times 4 \times 10^3 \times \Delta\theta}{60} \rightarrow \Delta\theta = \frac{200^2 \times 60}{12 \times 10^4} = 20^\circ C$$

$$\text{Mas } \Delta\theta = \theta - \theta_0 \rightarrow 20 = \theta - 20 \rightarrow \theta = 40^\circ C$$

b) O circuito equivalente será:



Note que a resistência equivalente do circuito é R_1 em paralelo com R_2 . Isto é:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \times 1000}{10 + 1000} = \frac{1000}{101} \Omega$$

$$\text{Como } V = R \cdot i \rightarrow 200 = \frac{1000}{101} i \rightarrow i = \frac{20200}{1000} = 20,2A$$

04|

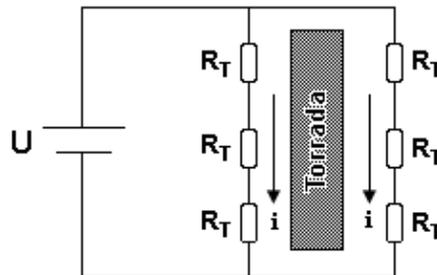
a)
$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{1}{4} \times \frac{N}{\Delta t} \cdot q_\alpha \rightarrow I = \frac{1}{4} \times 5 \times 10^{14} \times 2 \times 1,6 \times 10^{-19} = 4,0 \times 10^{-5} A$$

b)
$$V = R \cdot I = 3,0 \times 10^9 \times 4,0 \times 10^{-5} = 1,2 \times 10^5 V$$

c)
$$P = V \cdot I = 1,2 \times 10^5 \times 4,0 \times 10^{-5} = 4,8W$$

05|

a) Observe o circuito abaixo.



$$U = 3R_T \cdot i \rightarrow 120 = 3 \cdot 20 \cdot i \rightarrow i = 2,0A$$

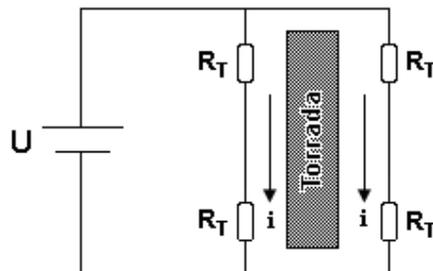
b) A potência da torradeira pode ser calculada por:

$$P = U \cdot i = U \cdot 2i = 120 \times 2 \times 2 = 480W$$

$$P = \frac{\text{energia}}{\Delta t} \rightarrow 480 = \frac{\text{energia}}{50} \rightarrow \text{energia} = 24.000J$$

c) O novo circuito seria:

$$U = 2R_T \cdot i \rightarrow 120 = 2 \cdot 20 \cdot i \rightarrow i = 3,0A$$



$$P = U \times 2i = 120 \times 6 = 720W$$

$$P = \frac{\text{energia}}{\Delta t} \rightarrow 720 = \frac{24.000}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{24.000}{720} \cong 33s$$

06|

- a) Se não considerarmos a tração no fio a força efetiva será:

$$F = mg + qE = 0,1 \times 10 + 3 \times 10^{-5} \times 10^5 = 4,0N$$

$$\frac{T(Q)}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L}{a}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{a}} = \sqrt{\frac{g}{F(e)/m}} = \sqrt{\frac{10}{4/0,1}} = 0,5$$

b)

- c) Como $T(Q) = 0,5T_0 \rightarrow f(Q) = 2f_0$. Com isso o relógio será duas vezes mais rápido e para cada hora passada ele adiantará uma hora.

Horário real \rightarrow 12 às 15h $\rightarrow \Delta t = 3,0h$

Horário marcado pelo relógio $\rightarrow \Delta t = 6,0h$

O relógio marcará $12 + 6 = 18$ horas

07|

E

Quanto maior o obstáculo, menor a radiação registrada.

08|

C

$$E = P\Delta t$$

$$mc\Delta\theta = \frac{V^2}{R} \Delta t$$

$$\frac{m}{\Delta t} \frac{c}{V^2} = \frac{1}{R\Delta\theta}$$

Como o fluxo de água ($m/\Delta t$) se mantém constante, assim como o calor específico c e a tensão V , concluímos que o termo $R\Delta\theta$ é constante. Logo:

$$R_i\Delta\theta_i = R_v\Delta\theta_v$$

$$11\Delta\theta_i = 22 \cdot 5$$

$$\therefore \Delta\theta_i = 10^\circ C$$

09|

- a) Usando a primeira lei de Ohm para o trecho AB , temos:

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{i_{AB}} \Rightarrow R_{AB} = \frac{12}{6} \therefore R_{AB} = 2 \Omega$$

Como o comprimento do trecho ACB é 5 vezes maior que o trecho AB e dado que a espira tem espessura constante e homogênea, ou seja, é feita do mesmo material, podemos aplicar a segunda Lei de Ohm e determinar a resistência do trecho ACB .

$$R_{ACB} = \frac{\rho \cdot 5L}{A} \quad (1)$$

$$R_{AB} = \frac{\rho \cdot L}{A} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$R_{ACB} = \frac{\rho \cdot 5L}{A} = 5 \cdot R_{AB} \therefore R_{ACB} = 10 \Omega$$

b) A potência dissipada por cada trecho é dada pela relação: $P = \frac{U^2}{R}$

$$P_{AB} = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}} = \frac{12^2}{2} \therefore P_{AB} = 72 W$$

$$P_{ACB} = \frac{U_{ACB}^2}{R_{ACB}} = \frac{12^2}{10} \therefore P_{ACB} = 14,4 W$$

Logo, a potência dissipada por toda a espira é:

$$P = 72 + 14,4 \therefore P = 86,4 W$$

10| **E**

Dados: $E = 9V$; $U = 5,7V$; $i = 0,15A$.

A força eletromotriz da bateria (E) é igual à ddp na lâmpada (U) somada com a ddp no resistor (U_R). Assim:

$$E = U + U_R \Rightarrow E = U + Ri \Rightarrow 9 = 5,7 + R(0,15) \Rightarrow R = \frac{9 - 5,7}{0,15} = \frac{3,3}{0,15} \Rightarrow R = 22 \Omega.$$

Física 3 - Termologia

01|

a) Vamos calcular a densidade de cada lata.

$$\text{Refrigerante comum: } d = \frac{m}{V} = \frac{m_{lata} + m_{refrigerante} + m_{açúcar}}{V} = \frac{15 + 302 + 40}{350} = 1,02 g / cm^3$$

Como a densidade é maior que a da água a lata afunda.

Refrigerante dietético:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{m_{lata} + m_{refrigerante}}{V} = \frac{15 + 328}{350} = 0,98 g / cm^3$$

Como a densidade é menor que a da água a lata boia.

b) A equação de Clapeyron diz: $PV = nRT \rightarrow PV = \frac{m}{Mol} RT$

$$d = \frac{m}{V} = \frac{P \times Mol}{RT} = \frac{3,0 \times 10^5 \times 44 \times 10^{-3}}{8,3 \times 300} \cong 5,3 kg / m^3$$

02|

a) $\Delta V = V_0 \gamma \Delta \theta \rightarrow \Delta V = V_0 \cdot 3\alpha \cdot \Delta \theta$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 3 \times 11 \times 10^{-6} \times 200 = 0,066 \rightarrow \frac{\Delta V}{V_0} = 6,6\%$$

b) $(mc|\Delta\theta|)_{esfera} = (mL)_{gelo}$
 $0,2 \times 450 \times 200 = m \cdot 3,3 \times 10^5 \rightarrow m \cong 0,0055 kg$

03| **A**

Calor necessário para que todo o gelo atinja $0^\circ C$ e derreta:

$$Q_1 = m_g c_g \Delta\theta_g + m_g L$$

$$Q_1 = 50 \cdot 0,5 \cdot (0 - (-10)) + 50 \cdot 80$$

$$Q_1 = 4250 \text{ cal}$$

Calor necessário para que a água atinja $0^\circ C$:

$$Q_2 = m_a c_a \Delta\theta_a$$

$$Q_2 = 200 \cdot 1 \cdot (0 - 30)$$

$$Q_2 = -6000 \text{ cal}$$

Portanto, não é possível que a água esfrie até $0^\circ C$. Sendo θ_e a temperatura de equilíbrio, temos que:

Calor necessário para que o gelo derretido (agora água) atinja o equilíbrio:

$$Q_3 = 50 \cdot 1 \cdot (\theta_e - 0)$$

$$Q_3 = 50\theta_e$$

Calor necessário para que a água a $30^\circ C$ atinja o equilíbrio:

$$Q_4 = 200 \cdot 1 \cdot (\theta_e - 30)$$

$$Q_4 = 200\theta_e - 6000$$

Portanto, é necessário que:

$$Q_1 + Q_3 + Q_4 = 0$$

$$4250 + 50\theta_e + 200\theta_e - 6000 = 0$$

$$250\theta_e = 1750$$

$$\therefore \theta_e = 7^\circ C$$

04|

a) Pela equação de Clayperon, temos:

$$P_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A$$

$$4 \cdot V_A = 1 \cdot 0,08 \cdot 300$$

$$\therefore V_A = 6 L$$

b) Entre os estados A e B (com $V_B = V_A/3$ e $T_A = T_B$), temos:

$$\frac{P_A \cdot V_A}{T_A} = \frac{P_B \cdot V_B}{T_B}$$

$$4 \cdot 6 = P_B \cdot 6/3$$

$$\therefore P_D = P_B = 12 \text{ atm}$$

c) Entre os estados A e D (com $V_A = V_D$), temos:

$$\frac{P_A \cdot V_A}{T_A} = \frac{P_D \cdot V_D}{T_D}$$

$$\frac{4}{300} = \frac{12}{T_D}$$

$$\therefore T_D = 900 \text{ K}$$

d) Utilizando a 1ª Lei da Termodinâmica e sabendo que $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$, obtemos para as transformações:

De A para B :

$$Q_1 = -\tau_{AB} + \Delta U_{AB} \quad (\tau_{AB} < 0 \text{ e } \Delta U_{AB} = 0)$$

$$Q_1 = -\tau_{AB}$$

$$Q_1 = -2640 \text{ J} \quad (\text{calor cedido})$$

De B para C :

$$Q_{BC} = \tau_{BC} + \Delta U_{BC} \quad (\tau_{BC} = 0 \text{ e } \Delta U_{BC} > 0)$$

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = \frac{3}{2}nR(T_C - T_B)$$

$$Q_{BC} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot (900 - 300)$$

$$Q_{BC} = 7200 \text{ J} \quad (\text{calor recebido})$$

De C para D :

$$Q_2 = \tau_{CD} + \Delta U_{CD} \quad (\tau_{CD} > 0 \text{ e } \Delta U_{CD} = 0)$$

$$Q_2 = \tau_{CD}$$

$$Q_2 = 7910 \text{ J} \quad (\text{calor recebido})$$

De D para A :

$$Q_{DA} = \tau_{DA} + \Delta U_{DA} \quad (\tau_{DA} = 0 \text{ e } \Delta U_{DA} < 0)$$

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = \frac{3}{2} nR(T_A - T_D)$$

$$Q_{DA} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot (300 - 900)$$

$$Q_{DA} = -7200 \text{ J} \quad (\text{calor cedido})$$

Como o problema pede apenas a quantidade de calor recebido, chegamos a:

$$Q_{\text{recebido}} = Q_{BC} + Q_2 = 7200 + 7910$$

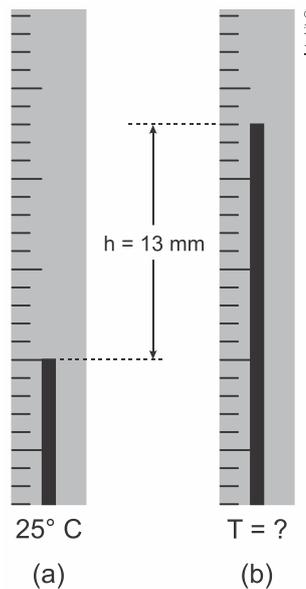
$$\therefore Q_{\text{recebido}} = 15110 \text{ J}$$

05|

a) Dados:

$$V_0 = 20 \text{ mm}^3; T_0 = 25^\circ \text{C}; A = 5,0 \times 10^{-2} \text{ mm}^2; \gamma = 1,25 \times 10^{-3} \text{ }^\circ \text{C}^{-1}; \frac{\Delta V}{V_0} = \gamma \Delta T.$$

A figura mostra a variação sofrida pela altura da coluna de mercúrio: $h = 13 \text{ mm}$.



Substituindo os valores na expressão dada:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \gamma \Delta T \Rightarrow \frac{Ah}{\gamma V_0} = T - T_0 \Rightarrow T = T_0 + \frac{Ah}{\gamma V_0} = 25 + \frac{5 \times 10^{-2} \times 13}{1,25 \times 10^{-3} \times 20} = 25 + 26 \Rightarrow$$

$$T = 51^\circ \text{C}.$$

b) Dados: $\Phi = 4\sigma T_0^3 \Delta T$; $\sigma \cong 6 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$; $\Phi = 64,8 \text{ W/m}^2$, $T_0 = 300 \text{ K} = 3 \times 10^2 \text{ K}$.

Substituindo valores na expressão dada calcula-se a temperatura em kelvins:

$$\Phi = 4\sigma T_0^3 \Delta T \Rightarrow T - T_0 = \frac{\Phi}{4\sigma T_0^3} \Rightarrow T = \frac{\Phi}{4\sigma T_0^3} + T_0 = \frac{64,8}{4 \times 6 \times 10^{-8} \times (3 \times 10^2)^3} + 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 10 + 300 \Rightarrow \underline{T = 310 \text{ K.}}$$

Passando para a escala Celsius:

$$T = 310 - 273 \Rightarrow \boxed{T = 37^\circ \text{C.}}$$

06|

a) Cálculo da quantidade de calor fornecido pelo fogão:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta \Rightarrow Q = 1000 \text{ g} \cdot 1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C}) \cdot (85 - 25)^\circ\text{C} \therefore Q = 60000 \text{ cal}$$

A potência, em watts, será:

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{60000 \text{ cal}}{5 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}} \Rightarrow P = 200 \frac{\text{cal}}{\text{s}} \cdot \frac{4 \text{ W}}{1 \text{ cal/s}} \therefore P = 800 \text{ W}$$

b) Usando a conservação do calor para o sistema café, leite e caneca em equilíbrio térmico, temos:

$$\sum Q = 0 \Rightarrow Q_{\text{café}} + Q_{\text{leite}} + Q_{\text{caneca}} = 0$$

$$Q_{\text{café}} = 100 \text{ g} \cdot 1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C}) \cdot (\theta - 80)^\circ\text{C} \therefore Q_{\text{café}} = 100\theta - 8000 \text{ cal}$$

$$Q_{\text{leite}} = 200 \text{ g} \cdot 1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C}) \cdot (\theta - 20)^\circ\text{C} \therefore Q_{\text{leite}} = 200\theta - 4000 \text{ cal}$$

$$Q_{\text{caneca}} = 100 \text{ cal}/^\circ\text{C} \cdot (\theta - 20)^\circ\text{C} \therefore Q_{\text{caneca}} = 100\theta - 2000 \text{ cal}$$

Então, somando todos os calores e isolando a temperatura final θ , temos:

$$\theta = \frac{14000}{400} \therefore \theta = 35^\circ\text{C}$$

07| **B**

Dados:

$$R = 660 \text{ km} = 66 \times 10^4 \text{ m}; h = 1,5 \text{ cm} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ m}; \rho = 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3; L = 2 \times 10^6 \text{ J}/\text{kg}; \pi = 3;$$

$$\Delta t = 8,6 \times 10^4 \text{ s.}$$

Calculando o volume de chuva:

$$V = \pi R^2 h = 3(66 \times 10^4)^2 1,5 \times 10^{-2} \Rightarrow \underline{V = 2 \times 10^{10} \text{ m}^3.}$$

A massa correspondente é:

$$m = \rho V = 10^3 \times 2 \times 10^{10} \Rightarrow \underline{m = 2 \times 10^{13} \text{ kg.}}$$

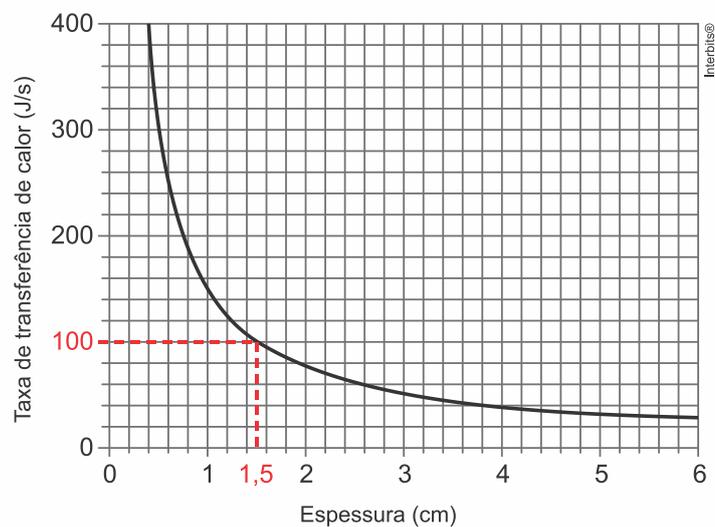
Calculando a quantidade de energia (calor) por unidade de tempo:

$$\frac{Q}{\Delta t} = \frac{mL}{\Delta t} = \frac{2 \times 10^{13} \times 2 \times 10^6}{8,6 \times 10^4} \left[\frac{J}{s} \right] \Rightarrow \boxed{\frac{Q}{\Delta t} \cong 4,6 \times 10^{14} W.}$$

08| **B**

Fazendo as transformações:

$$90 \left[\frac{kcal}{h} \right] = \frac{90.000 \times 4}{3.600} \left[\frac{J}{s} \right] = 100 \left[\frac{J}{s} \right].$$



O gráfico destaca a solução mostrando que para o fluxo de $100 J/s$, a espessura correspondente é $1,5 cm$.

09| **D**

[A] **Errada.** Em temperaturas entre $36^\circ C$ e $40^\circ C$, em valores aproximados, o corpo recebe de 0 a $50 kcal/m^2$ e perde de 90 a $130 kcal/m^2$.

[B] **Errada.** À temperatura de $20^\circ C$, a perda de calor por evaporação é cerca de $10 kcal/m^2$ e a perda de calor por radiação e convecção é cerca de $110 kcal/m^2$.

[C] **Errada.** No intervalo mostrado pelo gráfico, a maior perda de calor ocorre próximo a $16^\circ C$, sendo cerca de $130 kcal/m^2$ por radiação e convecção e $10 kcal/m^2$ por evaporação.

[D] Certa.

[E] **Errada.** À temperatura de $36^\circ C$, a perda de calor por radiação e convecção aproxima-se de zero, mas o corpo está perdendo cerca de $90 kcal/m^2$ por evaporação.

10|

a) Dados: $P_0 = 2 \times 10^7 \text{ Pa}$; $P_1 = 1,6 \times 10^7 \text{ Pa}$; $T_0 = 300 \text{ K}$.

Aplicando a lei geral dos gases para uma transformação isovolumétrica:

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{P_1}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{P_1 T_0}{P_0} = \frac{1,6 \times 10^7 \times 300}{2 \times 10^7} \Rightarrow T_1 = 240 \text{ K.}$$

b) Dados: $A = 2 \text{ m}^2$; $z = 25 \text{ L/min}$; $\Delta t = 12 \text{ h} = 720 \text{ min}$; $d = 1 \text{ kg/m}^3$.

$$z = \frac{V}{\Delta t} \Rightarrow V = z \Delta t = 25 \times 720 = 18000 \text{ L} = 18 \text{ m}^3.$$

Mas,

$$V = Ah \Rightarrow h = \frac{V}{A} = \frac{18}{2} \Rightarrow h = 9 \text{ m.}$$

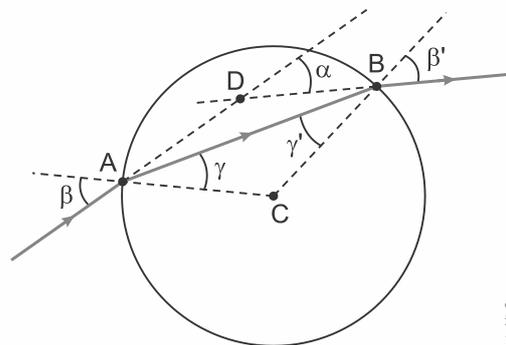
Aplicando o teorema de Stevin:

$$P = dgh = 1 \times 10 \times 9 \Rightarrow P = 90 \text{ Pa.}$$

Física 4 - Óptica e Ondas

01|

Considere a figura 2 do enunciado. Observe que foi acrescido à figura o segmento pontilhado \overline{BC} , sendo C o centro da seção circular.



Aplicando-se a Lei de Snell à refração pelo ponto A , tem-se que:

$$n_{ar} \text{sen} \beta = n_{cil} \text{sen} \gamma \quad (1)$$

Como o triângulo ABC é isósceles, pois $\overline{AC} = \overline{CB} = R$, sendo R o raio da seção transversal, conclui-se que:

$$\gamma = \gamma' \quad (2)$$

Aplicando-se a Lei de Snell para a refração através do ponto B , tem-se que:

$$n_{cil} \text{sen} \gamma' = n_{cil} \text{sen} \gamma = n_{ar} \text{sen} \beta' \quad (3)$$

Da equação (1) e da segunda igualdade da equação (3), conclui-se que:

$$n_{ar} \text{sen} \beta = n_{ar} \text{sen} \beta'$$

$$\boxed{\beta = \beta'} \quad (4)$$

Da figura 2, tem-se que:

$$\beta = \hat{D}AC \text{ e } \beta' = \hat{D}BC \quad (5)$$

Do triângulo ABD , conclui-se que:

$$\alpha = 180^\circ - \hat{B}DA = 180^\circ - (180^\circ - \hat{D}AB - \hat{D}BA)$$

$$\alpha = \hat{D}AB + \hat{D}BA$$

$$\alpha = (\hat{D}AC - \gamma) + (\hat{D}BC - \gamma)$$

$$\alpha = (\beta - \gamma) + (\beta - \gamma)$$

$$\boxed{\alpha = 2(\beta - \gamma)} \quad (6)$$

Por definição: $n = \frac{c}{v}$, sendo n o índice de refração absoluto num determinado meio, c a velocidade de propagação da luz no vácuo, e v a velocidade de propagação da luz no meio.

Conclui-se que

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^8}{1,6} \cong 1,9 \times 10^8 \text{ m/s}$$

a)

Da figura 2 conclui-se que $\beta = 53^\circ$.

Aplicando-se a Lei de Snell no feixe luminoso que passa pelo ponto A , tem-se que:

$$n_{ar} \text{sen} \beta = n_{cil} \text{sen} \gamma$$

$$1 \text{ sen} 53^\circ = 1,6 \text{ sen} \gamma$$

$$\text{sen} \gamma = \frac{\text{sen} 53^\circ}{1,6} = \frac{0,8}{1,6} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\gamma = 30^\circ}$$

Substituindo os valores de $\beta = 53^\circ$ e $\gamma = 30^\circ$ na equação (6), tem-se que:

$$\alpha = 2 \times (53 - 30) = 2 \times 23 = \boxed{46^\circ}$$

02|

a) $R = 10 \text{ cm}; V = 0,0045 \text{ cm}^3 = 45 \times 10^{-4} \text{ cm}^3; \pi = 3.$

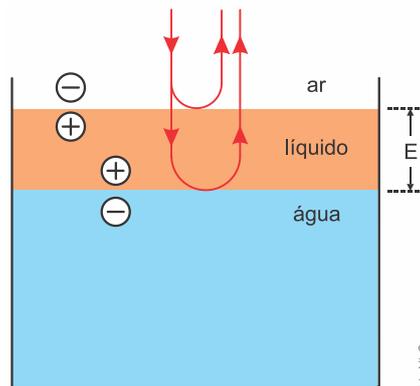
Usando a expressão do volume do cilindro:

$$V = \pi R^2 E \Rightarrow E = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{45 \times 10^{-4}}{3 \cdot 10^2} \Rightarrow \boxed{E = 1,5 \times 10^{-5} \text{ cm.}}$$

b) Usando a expressão dada no enunciado e o resultado item anterior, vem:

$$E = \frac{\lambda}{2n} \Rightarrow \lambda = 2nE = 2 \cdot 2,5 \cdot 1,5 \times 10^{-5} \Rightarrow \boxed{\lambda = 7,5 \times 10^{-5} \text{ cm.}}$$

Nota: analisando a figura, pode-se demonstrar que para $E = \frac{\lambda}{2n}$ ocorre interferência destrutiva, conforme cita o enunciado.



A reflexão na interface ar-líquido ocorre com inversão de fase, pois o sentido de propagação da luz é do meio menos para o mais refringente.

Na refração não ocorre inversão de fase. A reflexão na interface líquido-água ocorre sem inversão de fase, pois o sentido de propagação da luz é do mais para o menos refringente. Consequentemente, na interferência, os dois raios estão em oposição de fases. Então, para que essa interferência seja destrutiva, a diferença de percurso, ida e volta no líquido, ($\Delta x = 2E$) deve ser igual a um número par (p) de semiondas ($\lambda/2$).

Tomando o valor mínimo: ($p = 2$).

$$\Delta x = p \frac{\lambda_{liq}}{2} \Rightarrow 2E = 2 \frac{\lambda_{liq}}{2} \Rightarrow E = \frac{\lambda_{liq}}{2} \quad (I)$$

Da definição de índice de refração, a velocidade da luz no líquido é:

$$v_{liq} = \frac{c}{n} \quad (II)$$

Da equação fundamental da ondulatória:

$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

No ar, a velocidade da luz é c e o comprimento de onda é λ . A frequência da radiação não se altera ao mudar do ar para o líquido. Então, igualando as frequências e usando a expressão (II), vem:

$$f_{ar} = f_{liq} \Rightarrow \frac{c}{\lambda} = \frac{v_{liq}}{\lambda_{liq}} \Rightarrow \frac{c}{\lambda} = \frac{c/n}{\lambda_{liq}} \Rightarrow \lambda_{liq} = \frac{\lambda}{n} \quad (III)$$

Substituindo (III) em (I):

$$E = \frac{\lambda_{liq}}{2} \Rightarrow E = \frac{\lambda/n}{2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2n}} \quad (c.q.d.)$$

c) Usando novamente a expressão dada:

$$E = \frac{\lambda}{2n} \Rightarrow E' = \frac{\lambda_{verde}}{2n} = \frac{c/f_{verde}}{2n} = \frac{c}{2n f_{verde}} = \frac{3 \times 10^8}{2 \cdot 2,5 \cdot 0,6 \times 10^{15}} \Rightarrow E' = 1 \times 10^{-7} m \Rightarrow E' = 10^{-5} cm.$$

O volume seria:

$$V' = \pi R^2 E' = 3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \boxed{V' = 3 \times 10^{-3} cm^3}$$

03| **D**

Primeiramente, vejamos as condições de formação de imagem real para objeto real em lente delgada convergente, quando a distância (D) entre o objeto e o anteparo (tela ou CCD) é fixa.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = \frac{pf}{p-f} \\ p+p'=D \Rightarrow p'=D-p \end{array} \right\} \Rightarrow D-p = \frac{pf}{p-f} \Rightarrow Dp - Df - p^2 + pf = pf \Rightarrow$$

$$Dp - Df - p^2 + pf = pf \Rightarrow p^2 - Dp + Df = 0 \Rightarrow$$

$$p = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4Df}}{2}$$

Possibilidades:

1a) $D^2 - 4Df < 0 \Rightarrow D < 4f \Rightarrow$ não há formação de imagem real para qualquer posição da lente;

2ª) $D^2 - 4Df = 0 \Rightarrow D = 4f \Rightarrow$ há uma única posição da lente, devendo ela ser colocada de forma que o objeto esteja sobre seu ponto antiprincipal objeto (A_o), projetando a imagem (anteparo) sobre seu ponto antiprincipal imagem (A_i);

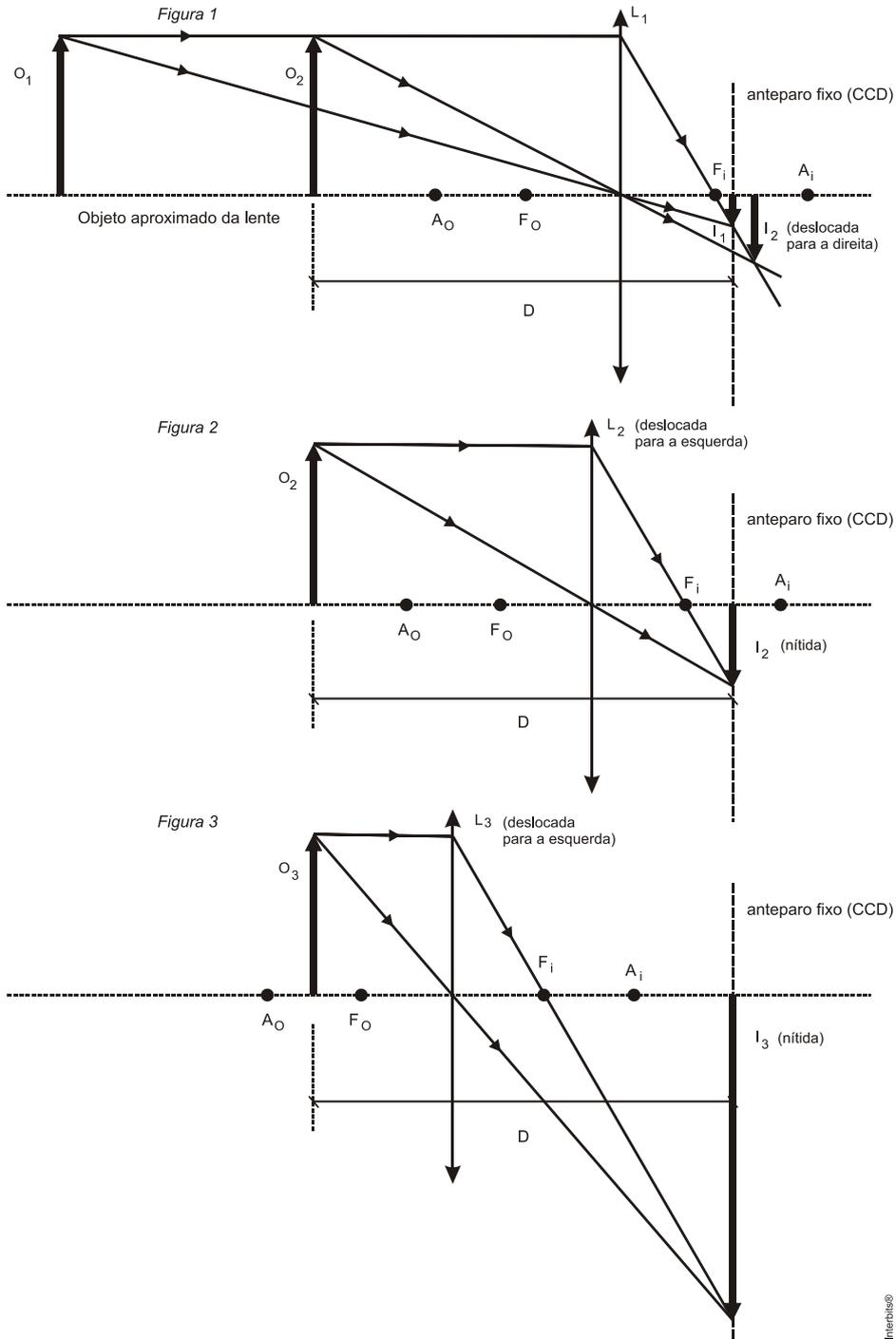
3ª) $D^2 - 4Df > 0 \Rightarrow D > 4f \Rightarrow$ há duas posições da lente, devendo ela ser colocada de forma que o objeto esteja antes de A_o (*Figura 2*) ou entre A_o e F_o (*Figura 3*).

Na *Figura 1* vê-se que, ao deslocar o objeto aproximando-o da lente, a imagem desloca-se para a **direita** (I_2) e fica desfocada. Para torná-la nítida, a lente deve ser deslocada para a **esquerda**, aproximando-se do objeto, tanto na *Figura 2* como na *Figura 3*.

No caso da câmera fotográfica, a imagem deve ser menor que o objeto, caracterizando a situação mostrada na *Figura 2*.

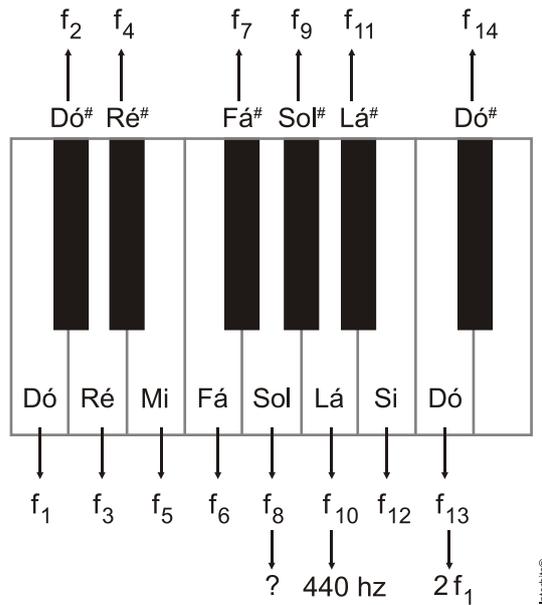
Devido ao Princípio da Reversibilidade dos raios luminosos, nas figuras 2 e 3 podemos notar que:

$$p_3 = p_2' \text{ e } p_3' = p_2.$$



04| **B**

A figura mostra as frequências das sucessivas notas com os respectivos índices de 1 a 14.



Usando a expressão do termo geral de uma progressão geométrica de razão q , temos:

$$f_n = f_1 q^{n-1} \begin{cases} f_{13} = f_1 q^{12} \Rightarrow 2f_1 = f_1 q^{12} \Rightarrow q^{12} = 2 \Rightarrow q = 2^{\frac{1}{12}} \Rightarrow q = 1,059. \\ f_{10} = f_1 q^9 \\ f_8 = f_1 q^7 \end{cases} \Rightarrow \frac{f_{10}}{f_8} = \frac{f_1 q^9}{f_1 q^7} \Rightarrow \frac{f_{10}}{f_8} = \frac{q^9}{q^7} \Rightarrow f_{10} = f_8 q^2 \Rightarrow 440 = f_8 (1,059)^2 \Rightarrow$$

$$440 = f_8 (1,12) \Rightarrow f_8 = \frac{440}{1,12} \cong 393 \text{ Hz.}$$

$$v = \lambda_8 f_8 \Rightarrow \lambda_8 = \frac{v}{f_8} = \frac{340}{393} \Rightarrow$$

$\lambda_8 \cong 0,86 \text{ m.}$

Comentário: as duas notas Dó consecutivas a que se refere o enunciado não podem ser um Dó normal e um Dó sustenido (1ª e 2ª notas). Caso uma má interpretação levasse a esse equacionamento, a razão da P.G. seria 2 e teríamos:

$$f_{10} = f_1 2^9 \Rightarrow f_1 = \frac{440}{512} = 0,86 \text{ Hz}$$

Absurdo! Um som com essa frequência não é audível para o ser humano!

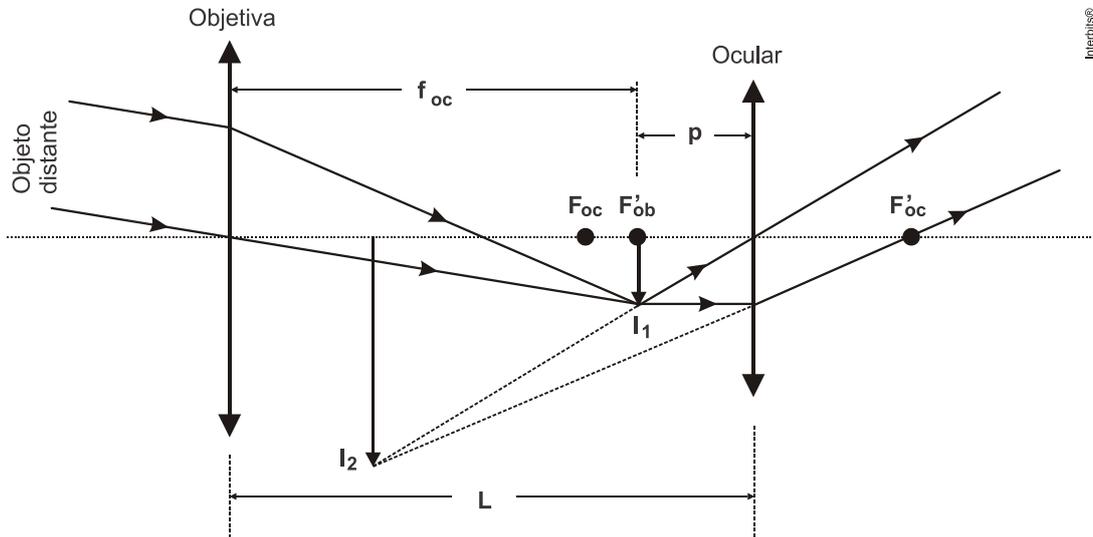
05|

a) Dados: $D = 102 \text{ cm}$; razão focal, $r = 19$; comprimento do telescópio, $L = 19,2 \text{ m}$.

Do enunciado:

$$r = \frac{f_{ob}}{D} \Rightarrow 19 = \frac{f_{ob}}{102} \Rightarrow f_{ob} = 1938 \text{ cm.}$$

O esquema a seguir representa a imagem conjugada por um telescópio refrator.



Notemos que a imagem real de um objeto impróprio fornecida objetiva (I_1) forma-se no foco imagem dessa lente (F'_{ob}). Essa imagem deve estar à distância p da ocular, entre ela e seu foco objeto (F_{oc}). A distância (L) entre as duas lentes, que é o comprimento do tubo, deve ser:

$$L = f_{ob} + p$$

O caso limite, mínimo comprimento do tubo, ocorre quando os dois focos coincidem, ou seja, $p = f_{oc}$.

Nesse caso:

$$L = f_{ob} + f_{oc}$$

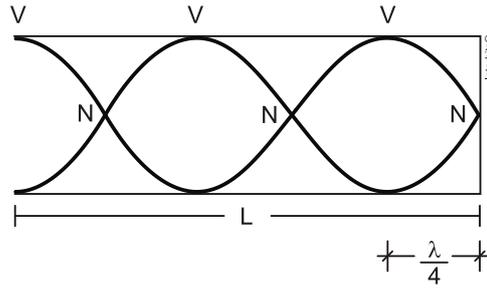
Porém, de acordo com o enunciado, o comprimento do tubo (19,2 m) é menor que a distância focal da objetiva (19,38 m), mostrando que os dados estão inconsistentes, tornando impossível a resolução final desse item.

b) O aumento visual (ampliação angular) (G) é dado pela razão entre as distâncias focais da objetiva e da ocular, mas esse item também torna-se impossível de ser resolvido, uma vez que foi impossível determinar a distância focal da ocular. Caso fosse possível, a expressão é:

$$G = \frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$

06| E

A figura mostra o quinto harmônico.



Observe que $L = 5 \cdot \frac{\lambda}{4} \rightarrow \lambda = \frac{4L}{5} = \frac{4 \times 0,17}{5} = 0,136 m$

Como $V = \lambda f \rightarrow f = \frac{V}{\lambda} \rightarrow f_5 = \frac{340}{0,136} = 2500 Hz$

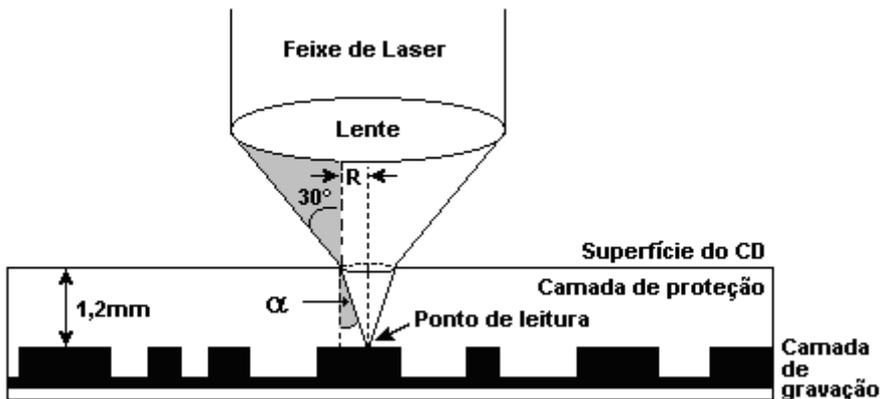
$f_1 = \frac{f_5}{5} = \frac{2500}{5} = 500 Hz$

$f_3 = 3f_1 = 3 \times 500 = 1500 Hz$

$f_5 = 2500 Hz$

071

a) Observe a figura abaixo



Na passagem do laser do ar para a camada de proteção podemos aplicar Snell:

$$n_{ar} \cdot \text{sen}30^\circ = n \cdot \text{sen}\alpha \rightarrow 1 \times \frac{1}{2} = 1,5 \cdot \text{sen}\alpha \rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1 \rightarrow \frac{1}{9} + \text{cos}^2\alpha = 1 \rightarrow \text{cos}^2\alpha = \frac{8}{9} \rightarrow \text{cos}\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} = \frac{R}{1,2} = \frac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow R = \frac{1,2\sqrt{2}}{4} = 0,3\sqrt{2}mm$$

b)

$$V_1 = V_2 \rightarrow \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2 \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{10}{2} = 5$$

08|

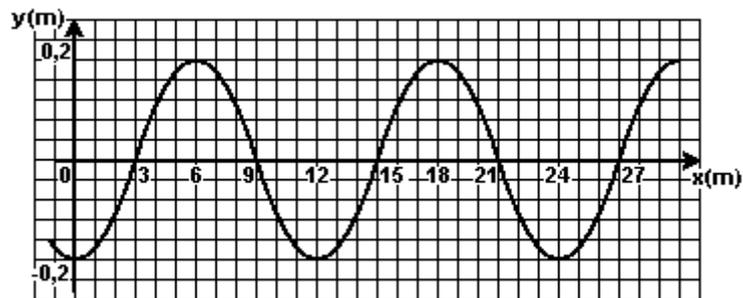
a) Entre 0 e 6s a boia gira $\frac{3}{4}$ de volta. Portanto, para completar uma volta são necessários 8,0s

b) $V = \lambda f = \frac{\lambda}{T} \leftarrow \lambda = V \cdot T = 1,5 \times 8 = 12m$

c) Número de voltas:

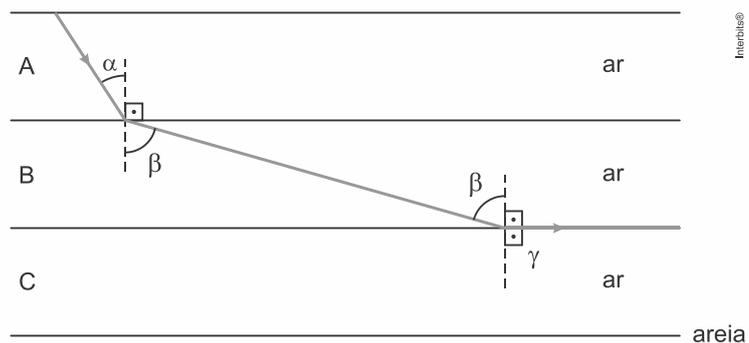
$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \text{ voltas}$$

Portanto, a boia estará como em $t = 6,0s$, isto é, $y = -0,2m$



09| **E**

Os ângulos de refração estão dispostos no diagrama a seguir a partir da figura 2:



Usando a relação de Snell para as duas interfaces de ar:

Para a interface A/B:

$$n_A \cdot \text{sen } \alpha = n_B \cdot \text{sen } \beta$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{n_B}{n_A} \cdot \text{sen } \beta \quad (1)$$

Para a interface B/C:

$$n_B \cdot \text{sen } \beta = n_C \cdot \text{sen } \gamma$$

$$\text{sen } \beta = \frac{n_C}{n_B} \cdot \text{sen } \gamma$$

Mas, $\text{sen } \gamma = \text{sen } 90^\circ = 1$

$$\text{sen } \beta = \frac{n_C}{n_B} \quad (2)$$

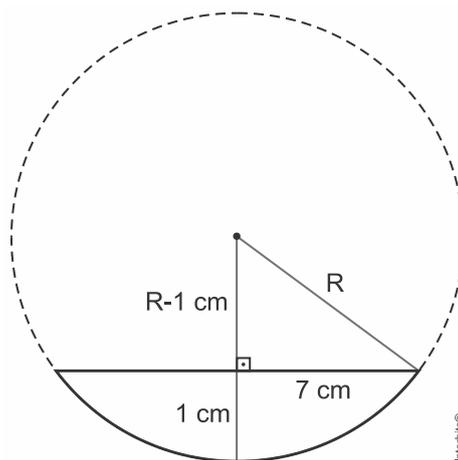
Substituindo a equação (2) na equação (1), temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\cancel{n_B}}{n_A} \cdot \frac{n_C}{\cancel{n_B}} \therefore$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{n_C}{n_A}$$

10 | **A**

Representação da situação descrita no enunciado:



Formou-se uma lente plano-convexa, cujo raio de curvatura R pode ser obtido aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da figura:

$$\begin{aligned} R^2 &= (R-1)^2 + 7^2 \Rightarrow R^2 = R^2 - 2R + 1 + 49 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2R = 50 \Rightarrow R = 25 \text{ cm} \end{aligned}$$

Aplicando a equação fornecida:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{f} = (1,33-1) \frac{1}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{0,33}{25} \Rightarrow f \cong \frac{25}{1/3} \Rightarrow f \cong 75 \text{ cm}$$

A distância entre o centro da lente e a fonte de calor deve ser igual a distância focal. Logo, a distância entre o centro do filme e a palha seca deve ser de aproximadamente 75 cm.

Física 5 - Magnetismo e Física Moderna

01] [Resposta do ponto de vista da disciplina de Química]

a) De acordo com o enunciado ocorreu a formação de 180 g de glicose e este valor corresponde a um mol de glicose ($C_6H_{12}O_6 = 6 \times 12 + 12 \times 1 + 6 \times 16 = 180$).

b) Como a energia do fóton é dada por $E = h f$, onde $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$.

Na reação de síntese, induzida por luz vermelha de frequência f igual a $4,3 \times 10^{14} \text{ Hz}$, então:

$$E = h \times f$$

$$E = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \times 4,3 \times 10^{14} \text{ s}^{-1} = 28,38 \times 10^{-20} = 2,84 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$E = 2,8 \times 10^{-19} \text{ J (um fóton)}$$

c)

Nessa reação são necessários 2800 kJ ($2800 \text{ kJ} = 2,8 \times 10^6 \text{ J}$) de energia para a formação de um mol de glicose, então:

$$2,8 \times 10^{-19} \text{ J} \text{ ————— } 1 \text{ fóton}$$

$$2,8 \times 10^6 \text{ J} \text{ ————— } n$$

$$n = 10^{25} \text{ fótons}$$

d) $6H_2O + 6CO_2 + \text{energia} \rightarrow C_6H_{12}O_6 + 6O_2$; CNTP.

$$1 \text{ mol } (O_2) \text{ ————— } 22,4 \text{ L}$$

$$6 \text{ mol } (O_2) \text{ ————— } V$$

$$V = 134,4 \text{ L}$$

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Física]

a) Química.

b) Dado: $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$; $f = 4,3 \times 10^{14} \text{ Hz}$.

Aplicando esses valores na equação dada:

$$E = hf = 6,6 \times 10^{-34} \cdot 4,3 \times 10^{14} \Rightarrow E = 2,8 \times 10^{-19} \text{ J.}$$

c) Dado: Glicose $\rightarrow \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$; H (1g/mol), C (12g/mol), O (16g/mol); $E = 2.800 \text{ kJ/mol} = 2,8 \times 10^6 \text{ J/mol}$.

A massa molar da glicose é:

$$M = (6 \cdot 12) + (12 \cdot 1) + (6 \cdot 16) = 180 \text{ g.}$$

Calculando o número n de fótons para produzir 1 mol de glicose ou 180 g.

$$nE = 2.800 \times 10^3 \Rightarrow n = \frac{2.800 \times 10^3}{2,8 \times 10^{-19}} \Rightarrow n = 10^{25} \text{ fótons.}$$

d) Dado: nas CNTP, o volume ocupado por um mol de gás é 22,4 L.

A reação dada mostra que são produzidos 1 mol de glicose e 6 mols de O_2 . Assim, o volume produzido de O_2 na reação é:

$$V = 6 \cdot 22,4 \Rightarrow V = 134,4 \text{ L.}$$

02| **A**

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Física]

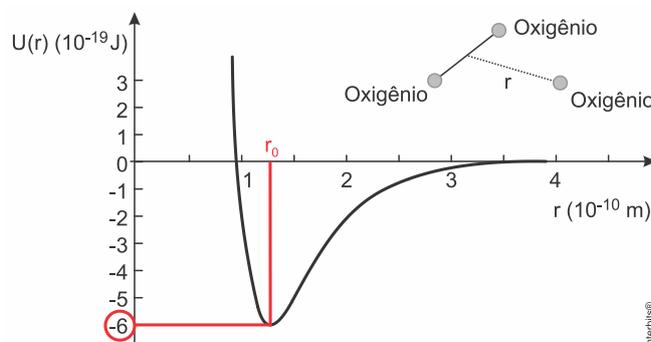
O gráfico mostra que a energia potencial de ligação tem valor mínimo, $E_{\text{mín}} = -6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Para quebrar a ligação, a energia potencial deve se tornar nula.

$$E_{\text{mín}} + hf = 0 \Rightarrow f = \frac{-E_{\text{mín}}}{h} = \frac{-(-6 \times 10^{-19})}{6 \times 10^{-34}} \Rightarrow \boxed{f = 1 \times 10^{15} \text{ Hz.}}$$

[Resposta do ponto de vista da disciplina de Química]

A energia de ligação ou dissociação da molécula é igual ao módulo da energia potencial na separação de equilíbrio r_0 :



$$E = |U|$$

$$h \times f = |U|$$

$$6 \times 10^{-34} \times f = 6 \times 10^{-19}$$

$$f = \frac{6 \times 10^{-19}}{6 \times 10^{-34}} = 1 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

03| **C**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Inicialmente: } \left[\frac{M_{(0)235}}{M_{(0)238}} = \frac{3}{100} \Rightarrow \frac{M_{(0)235}}{M_{(0)238}} = 3 \times 10^{-2}. \right. \\ \text{Atualmente: } \left[\frac{M_{(0)235}}{M_{(0)238}} = \frac{0,7}{100} \Rightarrow \frac{M_{(0)235}}{M_{(0)238}} = 0,7 \times 10^{-2}. \right. \end{array} \right.$$

Aplicando a equação dada e os respectivos dados para cada um dos isótopos:

$$M(t) = M(0) 10^{-\lambda t} \left\{ \begin{array}{l} M_{(t)235} = M_{(0)235} 10^{-4 \times 10^{-10} t} \\ M_{(t)238} = M_{(0)238} 10^{-0,8 \times 10^{-10} t} \end{array} \right\} \div \Rightarrow \frac{M_{(t)235}}{M_{(t)238}} = \frac{M_{(0)235}}{M_{(0)238}} \frac{10^{-4 \times 10^{-10} t}}{10^{-0,8 \times 10^{-10} t}} \Rightarrow$$

$$0,7 \times 10^{-2} = 3 \times 10^{-2} \times 10^{-(4-0,8)10^{-10} t} \Rightarrow \frac{0,7}{3} = 10^{-3,2 \times 10^{-10} t} \Rightarrow 0,23 = 10^{-3,2 \times 10^{-10} t} \Rightarrow$$

$$\log 0,23 = -3,2 \times 10^{-10} t \times \log 10 \Rightarrow -0,64 = -3,2 \times 10^{-10} t \Rightarrow t = \frac{0,64}{3,2 \times 10^{-10}} = 0,2 \times 10^{10} \Rightarrow$$

$$t = 2 \times 10^9 \text{ anos.}$$

04| **B**

OBS: O enunciado afirma que: “Se um **curto-circuito** ocorrer no aparelho e uma das **correntes for interrompida**, haverá uma corrente induzida...”

Quando há um curto-circuito, a corrente I aumenta e quando há interrupção, essa corrente diminui. As duas variações provocam correntes induzidas em sentidos opostos. Levaremos em conta que primeiramente ocorre o curto-circuito (aumento da corrente I), e que, depois, ocorre a interrupção já provocada pelo aparelho.

As linhas de indução magnética provocada por uma corrente que percorre um fio retilíneo são circunferências concêntricas com a corrente no sentido dado pela regra da mão direita nº 1, ou regra do saca-rolhas, como indicado na *Fig.1*. Esse fluxo magnético (Φ) está entrando na bobina pelo lado esquerdo, como também indica a figura.

Quando ocorre o curto circuito, a corrente I aumenta, aumentando o fluxo magnético (Φ) através da bobina. Esse aumento provoca na bobina uma corrente induzida, num sentido tal, que cria um fluxo induzido (Φ') na tendência de compensar esse aumento, dado pela mesma regra anterior, como indicado na *Fig. 2*.

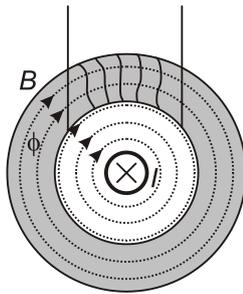


Fig. 1

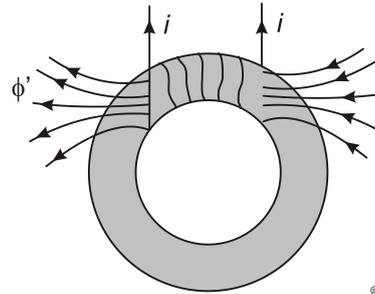


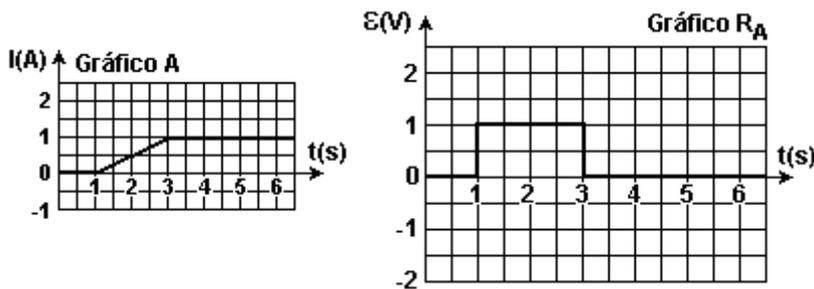
Fig. 2

Interbis®

05|

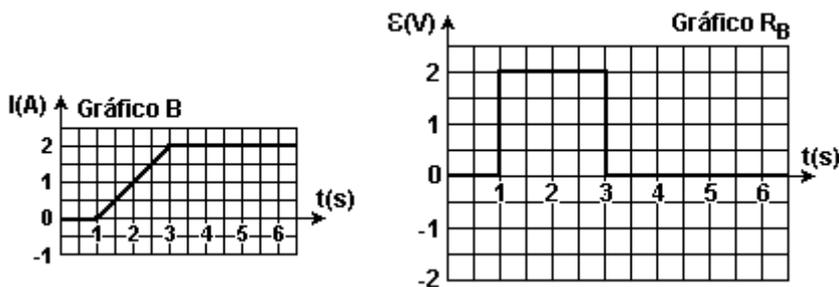
a) Observe que entre 0 e 1s e entre 3s e 6s não há variação de corrente nas bobinas, portanto não há variação de fluxo e não há fem induzida.

Entre 1s e 3s a variação de corrente é constante e portanto a fem induzida é constante e igual a 1,0V.



Observe que entre 0 e 1s e entre 3s e 6s não há variação de corrente nas bobinas, portanto não há variação de fluxo e não há fem induzida.

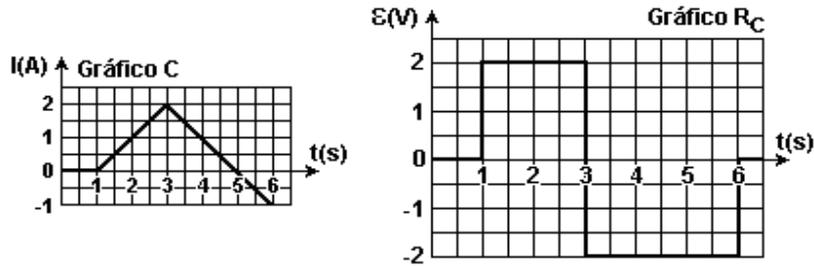
Entre 1s e 3s a variação de corrente é constante e vale o dobro do item “a” portanto a fem induzida é constante e igual a $\epsilon_B = 2,0V$



c) Observe que entre 0 e 1s não há variação de corrente nas bobinas, portanto não há variação de fluxo e não há fem induzida.

Entre 1s e 3s a variação de corrente é constante e vale o dobro do item “a” portanto a fem induzida é constante e igual a 2,0V.

Entre 3s e 6s a variação de corrente é constante e vale o dobro do item “a”, porém é negativa, portanto a fem induzida é constante e igual a $\epsilon_c = -2,0V$.



06|

a)

$$t = 0 \rightarrow N_B = N$$

$$t = 20 \text{ min} \rightarrow N_B = \frac{N}{2}$$

$$t = 40 \text{ min} \rightarrow N_B = \frac{N}{4}$$

$$t = 60 \text{ min} \rightarrow N_B = \frac{N}{8} = \frac{160.000}{8} = 20.000 \text{ cpm}$$

b)

$$t = 60 \text{ min} \rightarrow N_C = \frac{N}{8} \rightarrow 40 = \frac{N}{8} \rightarrow N = 320 \text{ cpm} \quad \text{para } 10 \text{ cm}^3$$

$$\left. \begin{array}{l} 10 \text{ cm}^3 \rightarrow 320 \text{ cpm} \\ V \text{ cm}^3 \rightarrow 160.000 \text{ cpm} \end{array} \right\} \rightarrow V = \frac{160.000 \times 10}{320} = 5.000 \text{ cm}^3 = 5,0 \text{ L}$$

07|

a) Para o campo elétrico uniforme, temos:

$$V = E \cdot d$$

$$40 = E \cdot 0,2$$

$$\therefore E = 200 \text{ N/C}$$

b) Aplicando o teorema da energia cinética para determinar a velocidade da partícula, vem:

$$\tau_{pQ} = E c_Q - E c_p$$

$$qV = \frac{m v_Q^2}{2} - \frac{m v_p^2}{2}$$

$$8 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = \frac{4 \cdot 10^{-15} \cdot v_Q^2}{2} - 0$$

$$v_Q = 4 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Na região do campo magnético, temos que:

$$F_{mg} = F_{cp}$$

$$B|q|v_Q = \frac{mv_Q^2}{R}$$

$$R = \frac{mv_Q}{B|q|} = \frac{4 \cdot 10^{-15} \cdot 4 \cdot 10^5}{10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-6}}$$

$$\therefore R = 0,2 \text{ m}$$

08|

- a) Na situação de equilíbrio, a força eletrostática tem mesma intensidade do peso da partícula.

$$F_e = P = mg = 1,2 \times 10^{-14} \cdot 1,6 \Rightarrow F_e = 1,92 \times 10^{-14} \text{ N.}$$

b)

$$F_e = |q|E \Rightarrow E = \frac{F_e}{|q|} = \frac{1,92 \times 10^{-14}}{1,9 \times 10^{-15}} \Rightarrow E \cong 10 \text{ N/C.}$$

- c) Substituindo os dados na expressão fornecida no enunciado:

$$\varepsilon = hf \Rightarrow f = \frac{\varepsilon}{h} = \frac{8 \times 10^{-19}}{6 \times 10^{-34}} \Rightarrow f = 1,33 \times 10^{15} \text{ Hz.}$$

- d) Se cada fóton arranca 1 elétron em 2 s são arrancados n elétrons. Assim:

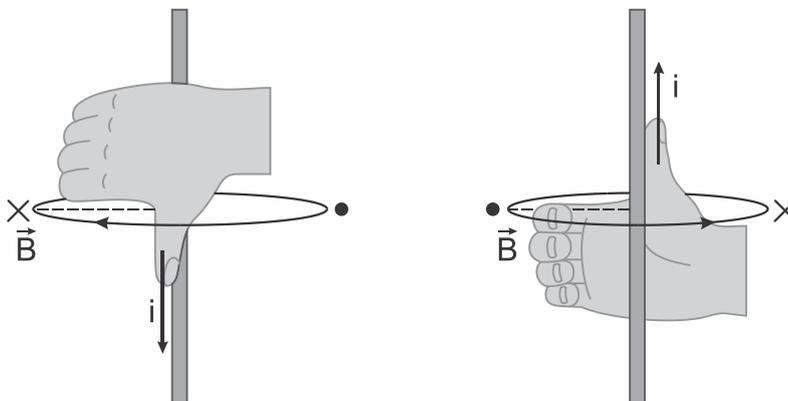
$$n = 5 \times 10^5 \cdot 2 \Rightarrow n = 10^6 \text{ elétrons.}$$

$$q = nq_{elét} = 10^6 \cdot (-1,6 \times 10^{-19}) \Rightarrow q = -1,6 \times 10^{-13} \text{ C.}$$

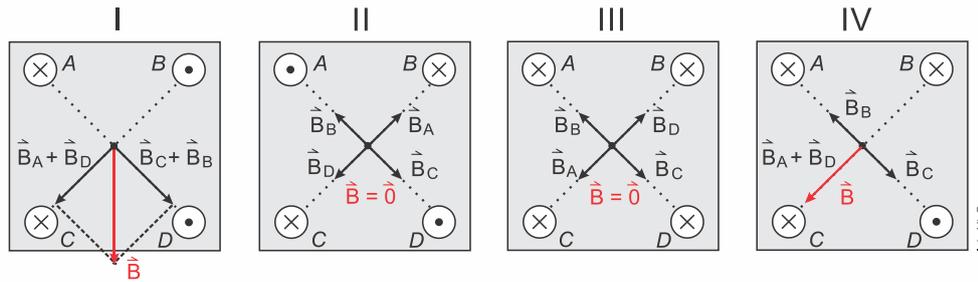
09| **D**

Como as correntes têm mesma intensidade, a intensidade do vetor indução magnética (\vec{B}) de cada uma no centro do quadrado também é a mesma para todas delas.

A figura ilustra a regra da mão direita nº 1, usada na determinação do sentido do vetor indução magnética de corrente elétrica.



Usando essa regra, constrói-se a figura abaixo, onde está representado o vetor indução magnética resultante no centro do quadrado, para cada uma das situações propostas.



10| **E**

Testando cada uma das opções, conclui-se que se A for um polo **negativo**, B um polo **positivo** e X um polo **norte**, dado um impulso inicial na espira, ela mantém-se girando no sentido **horário**.

De fato, nas condições acima:

- se A é polo negativo e B é polo positivo, a corrente tem o sentido mostrado, indo de B para A ;
- se X é polo norte, o vetor indução magnética é vertical e para cima;
- aplicando a regra da mão esquerda, ou da mão direita (ilustradas na Figura 1), a força magnética tem sentido para a direita no ramo de cima e para a esquerda no ramo de baixo, causando na espira um binário de forças que a faz girar no sentido horário, como indicado na Figura 2.

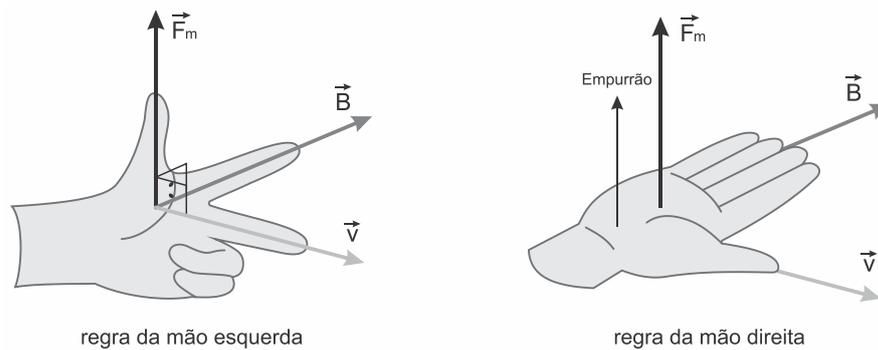


Figura 1

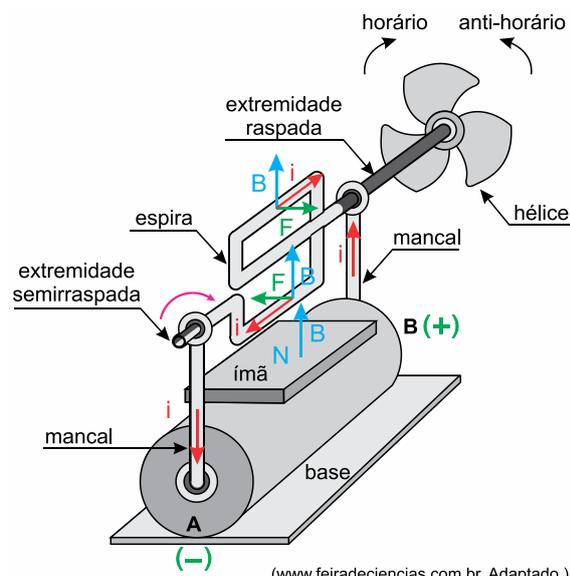
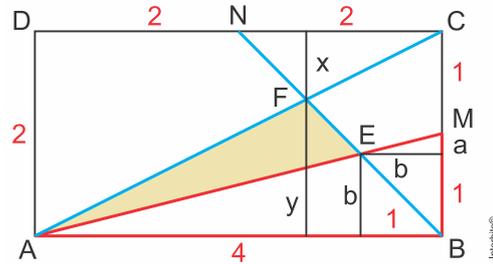


Figura 2

Matemática 1 – Geometria Plana

01 | D

De acordo com o enunciado:



$$\triangle NFC \sim \triangle AFB$$

$$\frac{2}{4} = \frac{x}{y} \rightarrow y = 2x$$

$$x + y = 2 \rightarrow x + 2x = 2 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\triangle MEN \sim \triangle MAN$$

$$\frac{1}{4} = \frac{a}{b} \rightarrow b = 4a$$

$$a + b = 1 \rightarrow a + 4a = 1 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = \frac{4}{5} \end{cases}$$

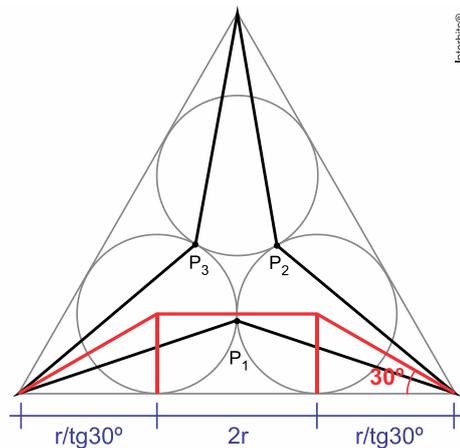
Assim, a área do triângulo AEF será:

$$S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ABF} - S_{\triangle ABE}$$

$$S_{\triangle AEF} = \frac{4y}{2} - \frac{4b}{2} = \frac{4 \cdot \frac{4}{3}}{2} - \frac{4 \cdot \frac{4}{5}}{2} = \frac{8}{3} - \frac{8}{5} \rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{16}{15}$$

03 |

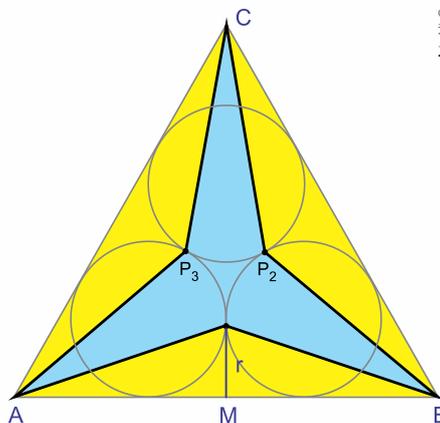
- a) O triângulo equilátero descrito é o “externo” que contém as três esferas. Assim, seu lado será igual a:



Ou seja:

$$\text{lado}_{\Delta} = \frac{2r}{\text{tg } 30^{\circ}} + 2r = 2r \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} + 2r \Rightarrow \text{lado}_{\Delta} = 2r \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

b) Considerando como A, B e C os vértices do triângulo equilátero “externo” pode-se desenhar:



Assim, percebe-se que a área destacada em azul se dá por:

$$S_{\text{azul}} = S_{\Delta} - S_{\text{amarelo}}$$

$$S_{\text{azul}} = \frac{(\text{lado}_{\Delta})^2 \sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{r \cdot \text{lado}_{\Delta}}{2} = \frac{[2r \cdot (\sqrt{3} + 1)]^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{r \cdot 2r \cdot (\sqrt{3} + 1)}{2} =$$

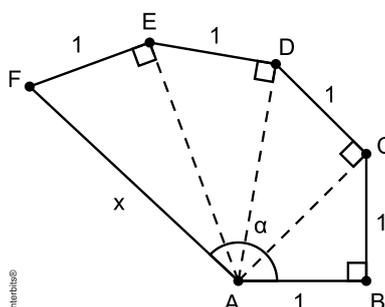
$$\sqrt{3}r^2 \cdot (\sqrt{3} + 1)^2 - 3r^2 \cdot (\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3}r^2 \cdot (3 + 2\sqrt{3} + 1) - 3r^2 \cdot (\sqrt{3} + 1) =$$

$$3\sqrt{3}r^2 + 6r^2 + \sqrt{3}r^2 - 3\sqrt{3}r^2 - 3r^2 = \sqrt{3}r^2 + 3r^2$$

$$S_{\text{azul}} = r^2 \cdot (\sqrt{3} + 3)$$

03|

a) Considere a figura.



Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos ABC , ACD , ADE e AEF , vem

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 1^2 + 1^2 = 2, \quad \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = 2 + 1^2 = 3, \quad \overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = 3 + 1^2 = 4$$

e

$$\overline{AF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 + 1^2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{5} \text{ cm.}$$

b) É imediato que $BAC = 45^\circ$.

Do triângulo ACD , temos

$$\operatorname{tg} CAD = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow CAD = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} < 45^\circ.$$

Do triângulo ADE , vem

$$\operatorname{tg} DAE = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow DAE = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ.$$

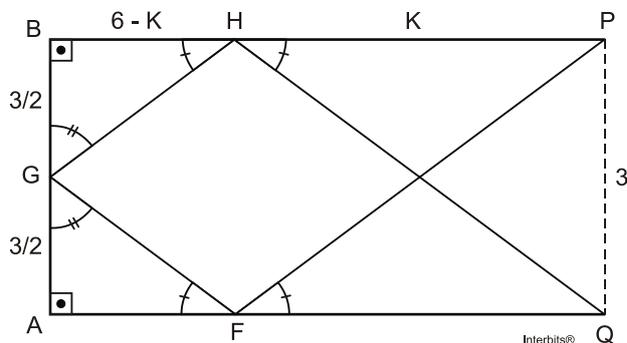
Do triângulo AEF , segue

$$\operatorname{tg} EAF = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow EAF = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{4}} < 30^\circ.$$

Portanto, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha &= BAC + CAD + DAE + EAF \\ &< 45^\circ + 45^\circ + 30^\circ + 30^\circ \\ &= 150^\circ. \end{aligned}$$

04 | B



$$\triangle H PQ \cong \triangle F Q P (L.A.A_0) \Rightarrow HP = FQ = K \text{ e } PF \cong HQ$$

$$\triangle B H G \cong \triangle A F G (L.A.A_0) \Rightarrow AG = BG = \frac{3}{2} \text{ e } HG = GF$$

$$\triangle A G F \sim \triangle Q P F \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{6-K}{K} \Rightarrow K = 4$$

$$\text{No } \triangle G B H: GH^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow GH = \frac{5}{2}$$

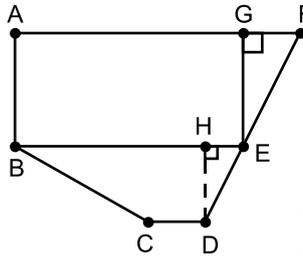
$$\text{No } \triangle H P Q: HQ^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow HQ = 5$$

Logo, a distância total percorrida pelo feixe luminoso no trajeto PFGHQ é

$$PF + FG + GH + HQ = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 5 = 15 \text{ cm.}$$

05| E

Considere a figura, em que H é o pé da perpendicular baixada de D sobre BE.



Sabendo que $\overline{AF} = 15\text{cm}$, $\overline{AG} = 12\text{cm}$ e $\overline{AB} = \overline{EG} = 6\text{cm}$, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\begin{aligned} \overline{EF}^2 &= \overline{GF}^2 + \overline{EG}^2 \Leftrightarrow \overline{EF}^2 = 3^2 + 6^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{EF}^2 = 3^2 \cdot 5 \\ &\Rightarrow \overline{EF} = 3\sqrt{5}\text{cm}. \end{aligned}$$

Logo, dado que $\overline{DF} = 5\sqrt{5}\text{cm}$, obtemos $\overline{ED} = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}\text{cm}$.

Assim, como os triângulos FGE e EHD são semelhantes, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{DH}}{\overline{EG}} &= \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \frac{\overline{DH}}{6} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} \\ &\Leftrightarrow \overline{DH} = 4\text{cm}. \end{aligned}$$

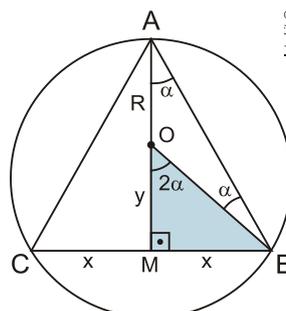
Desse modo, a área pedida, em cm^2 , é dada por

$$\begin{aligned} (\overline{ABEF}) + (\overline{BCDE}) &= \frac{(15+12)}{2} \cdot 6 + \frac{(12+3)}{2} \cdot 4 \\ &= 81 + 30 \\ &= 111. \end{aligned}$$

Por conseguinte, se x é a área real da APP, então

$$\begin{aligned} \frac{111 \cdot 10^{-10}}{x} &= \left(\frac{1}{200000} \right)^2 \Leftrightarrow x = 111 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 10^{10} \\ &\Leftrightarrow x = 444\text{km}^2. \end{aligned}$$

06| E



Considerando o ponto O como centro e R o raio da circunferência, temos no triângulo assinalado:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R \cdot \operatorname{sen}(2\alpha)$$

$$\operatorname{cos}(2\alpha) = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R \cdot \operatorname{cos}(2\alpha)$$

Calculando a área do triângulo ABC, temos:

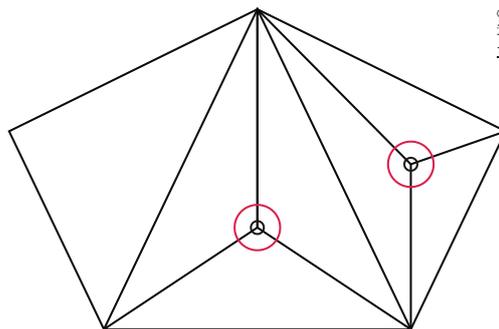
$$A = \frac{2x(y+R)}{2} = \frac{2R \cdot \operatorname{sen}(2\alpha) \cdot (R + R \cdot \operatorname{cos}(2\alpha))}{2} = R^2 \cdot \operatorname{sen}(2\alpha)(1 + \operatorname{cos}(2\alpha)) = R^2 \cdot \operatorname{sen}(2\alpha)(1 + \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 2R^2 \cdot \operatorname{sen}(2\alpha) \cdot \operatorname{cos}^2 \alpha$$

A razão entre a área do triângulo ABC e a área do círculo será dada por:

$$\frac{2R^2 \cdot \operatorname{sen}(2\alpha) \cdot \operatorname{cos}^2 \alpha}{\pi \cdot R^2} = \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \operatorname{sen}(2\alpha) \cdot \operatorname{cos}^2 \alpha$$

07|

Soma dos ângulos internos de um pentágono: $180^\circ(5-2) = 540^\circ$



Ao redor de cada bolha temos 360°

Seja T o número de triângulos e n o número de bolhas, temos a seguinte relação:

$$T \cdot 180^\circ - n \cdot 360^\circ = 540^\circ (:180^\circ)$$

$$T - 2n = 3$$

$$T = 2n + 3$$

08|

- a) Para saber quantos quilogramas de calcário dolomítico serão necessários para correção do solo primeiramente é necessário saber a área do jardim. Da figura, pode-se escrever:

$$A_{\text{jardim}} = \frac{(4+2) \cdot 2}{2} + 4 \cdot 1 \Rightarrow A_{\text{jardim}} = 10 \text{ m}^2$$

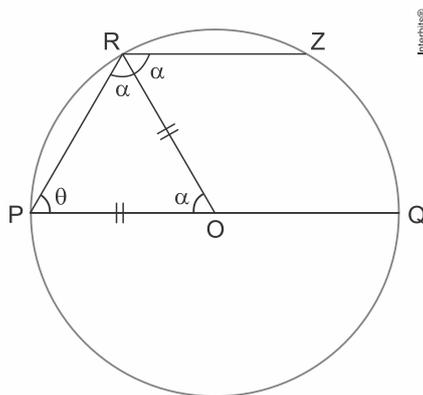
Assim, se para 1 m^2 são necessários 300 g de calcário dolomítico para corrigir o pH, para 10 m^2 serão necessários 3000 g , ou 3 kg .

- b) A partir das informações do enunciado sobre o calcário dolomítico Limeira (obtido pelo jardineiro), vem:

$$\begin{aligned}
 \text{CaO} & \dots\dots\dots 28 \% \\
 \text{MgO} & \dots\dots\dots 20 \% \\
 m_{\text{calcário}} & = 3 \text{ kg} = 3.000 \text{ g} \\
 m_{\text{MgO}} & = \frac{20}{100} \times 3.000 \text{ g} = 600 \text{ g} \\
 \text{MgO} & = 40 \text{ g / mol} \\
 \text{MgCO}_3 & = 84 \text{ g / mol} \\
 \text{MgO} + \text{CO}_2 & \longrightarrow \text{MgCO}_3 \\
 40 \text{ g} & \text{-----} 84 \text{ g} \\
 600 \text{ g} & \text{-----} m_{\text{MgCO}_3} \\
 m_{\text{MgCO}_3} & = 1.260 \text{ g} \\
 p_{\text{MgCO}_3} & = \frac{1.260 \text{ g}}{3.000 \text{ g}} = 0,42 = 42 \% \\
 p_{\text{MgCO}_3} & = 42 \%
 \end{aligned}$$

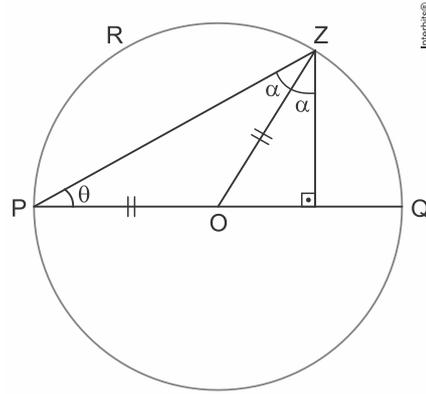
09|

- a) Como a bola atinge a borda no ponto R e é refletida elasticamente, sem deslizar, pode-se concluir que o ângulo $PRO \cong ORZ = \alpha$. Pelos fundamentos da geometria plana, sabe-se que o ângulo POR também é igual a α . Como os segmentos OP e OR são iguais (raio da circunferência), pode-se concluir que o ângulo θ também será igual a α . Assim, todos os ângulos do triângulo PRO são iguais, fazendo deste um triângulo equilátero. Logo, $\alpha = \theta = 60^\circ$. Caso $\theta = 0^\circ$, após a primeira reflexão a trajetória também será paralela ao diâmetro PQ .



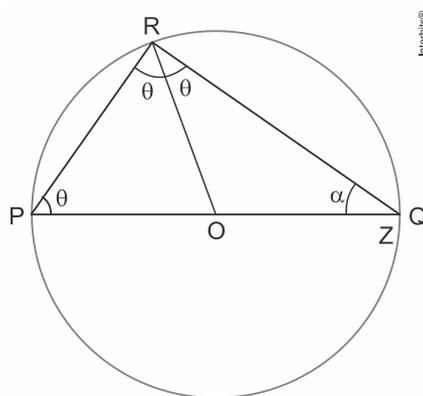
- b) Analisando a figura a seguir, como PO e OZ são segmentos iguais (ambos são iguais ao raio da circunferência), pode-se concluir que o ângulo θ será igual a α . Assim, pode-se escrever sobre o triângulo retângulo:

$$3\alpha + 90 = 180 \Rightarrow 3\alpha = 90 \Rightarrow \alpha = \theta = 30^\circ$$



c) Analisando a figura a seguir, pode-se escrever:

$$\alpha + 3\theta = 180 \Rightarrow \alpha = 180 - 3\theta, \text{ para } 30^\circ < \theta < 60^\circ$$



10|

a) O ângulo θ é máximo quando \overline{OP} é tangente à circunferência c . Logo, temos $\theta = 90^\circ$ e, portanto, do triângulo retângulo OPQ , vem

$$\text{sen } \theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \text{sen } \theta = \frac{1}{5}.$$

b) Tomando o triângulo OPQ , pela Lei dos Cossenos, encontramos

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 - 2 \cdot \overline{OQ} \cdot \overline{PQ} \cdot \cos \beta \Leftrightarrow$$

$$\overline{OP}^2 = 5^2 + 1^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\overline{OP}^2 = 21 \Rightarrow$$

$$\overline{OP} = \sqrt{21}.$$

Em consequência, pela Lei dos Senos, obtemos

$$\frac{\overline{PQ}}{\text{sen } \theta} = \frac{\overline{OP}}{\text{sen } \beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\text{sen } \theta} = \frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } \theta = \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

c) Do triângulo OPQ , pela Lei dos Senos, vem

$$\frac{\overline{PQ}}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{\overline{OQ}}{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)} \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{5}{\operatorname{sen} 135^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Ademais, pela Lei dos Cossenos, temos

$$\overline{OQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{PQ}^2 - 2 \cdot \overline{PO} \cdot \overline{PQ} \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$5^2 = \overline{PO}^2 + 1^2 - 2 \cdot \overline{PO} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\overline{PO}^2 + \sqrt{2} \cdot \overline{PO} - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\overline{PO} = 3\sqrt{2}.$$

Portanto, sendo $\gamma = 90^\circ - \angle POR = \theta$, do triângulo OPR , segue que

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{\overline{PO}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{\overline{OR}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OR} = 30.$$

Matemática 2 - Geometria Espacial

01|

a) Dos triângulos retângulos ACO , BCO e ABO obtemos, pelo Teorema de Pitágoras, respectivamente, $\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$, $\overline{BC}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2$ e $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$.

Além disso, temos

$$\overline{AC} = \frac{\overline{CO}}{\cos \alpha} \text{ e } \overline{BC} = \frac{\overline{CO}}{\cos \beta}.$$

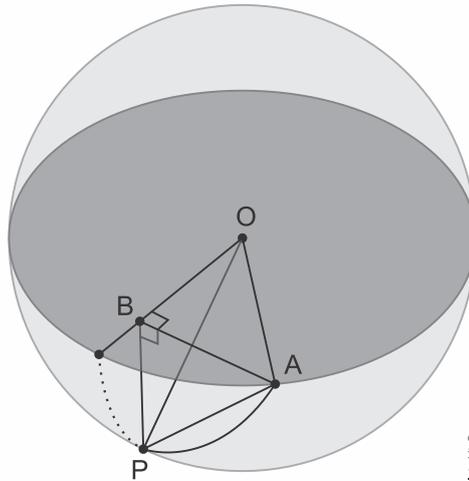
Em consequência, do triângulo ABC , pela Lei dos Cossenos, vem

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \angle ACB \Leftrightarrow$$

$$\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 - 2 \cdot \frac{\overline{CO}}{\cos \alpha} \cdot \frac{\overline{CO}}{\cos \beta} \cdot \cos \angle ACB \Leftrightarrow$$

$$\cos \angle ACB = \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

- b) Considere a figura, em que O é o centro da Terra, A é o ponto de latitude 0° e longitude 0° , B é a projeção ortogonal de A sobre a reta que passa por O e pelo ponto de latitude 0° e longitude 45° oeste e P é o ponto de latitude 45° sul e longitude 45° oeste.



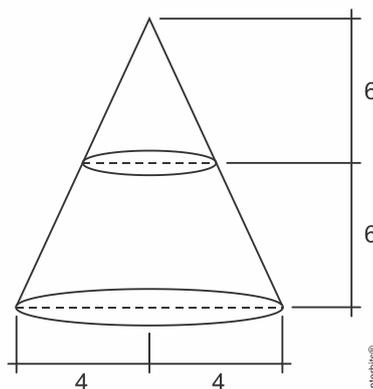
Como B também é projeção ortogonal de P sobre a reta que passa por O e pelo ponto de latitude 0° e longitude 45° oeste, segue que o tetraedro $OBPA$ corresponde ao tetraedro do item (a). Logo, sendo $BOP = 45^\circ$ e $BOA = 45^\circ$, temos

$$\cos AOP = \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{2}$$

Portanto, vem $AOP = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad e, assim, o resultado é dado por $\frac{\pi}{3} \cdot 6000 = 2000\pi$ km.

02 | **C**

De acordo com o enunciado:



Considerando:

$V =$ volume total do cone

$v' =$ volume cheio (tronco)

$v'' =$ volume vazio (topo)

$H = 12 =$ altura total

$h = 6 =$ altura topo / altura tronco

Pode-se calcular:

$$\frac{V}{v''} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \rightarrow \left(\frac{12}{6}\right)^3 = \frac{V}{v''} \rightarrow V = 8v''$$

$$v' + v'' = V \rightarrow v' + \frac{V}{8} = V \rightarrow v' = \frac{7}{8}V$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 12 \rightarrow V = 200,96$$

$$v' = \frac{7}{8}V = \frac{7}{8} \cdot 200,96 \rightarrow v' = 175,85 \text{ m}^3$$

Tempo: $500 \text{ L/min} = 0,5 \text{ m}^3 / \text{min}$

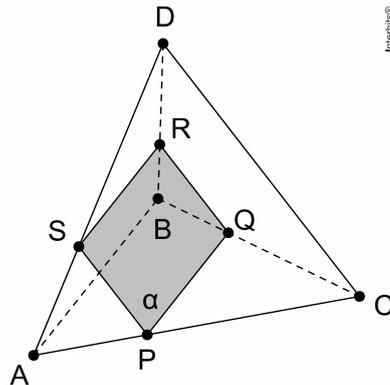
1 min — $0,5 \text{ m}^3$

t — $175,85 \text{ m}^3$

$t = 351,7 \text{ min} \approx 5 \text{ h e } 50 \text{ min}$

03| **A**

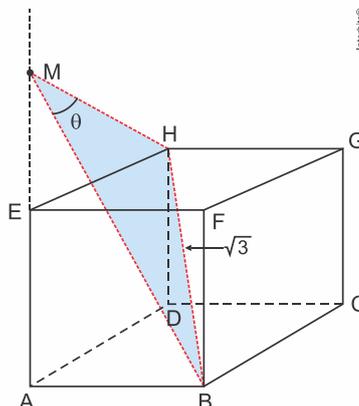
Considere a figura.



Sejam Q, R e S , respectivamente, as interseções de α com as arestas BC, BD e AD . Desde que α é paralelo à aresta AB , temos SR e PQ paralelos a AB . Analogamente, concluímos que PS e QR são paralelos a CD . Ademais, sabendo que arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais, tem-se que o quadrilátero $PQRS$ é um retângulo.

Sendo $ABCD$ regular, os triângulos APS e CQP são equiláteros, e, portanto, a área pedida é igual a $3 \cdot 7 = 21 \text{ m}^2$.

04|



a) $EM = |x - 1|$

No ΔMAB : $BM = \sqrt{x^2 + 1}$

No ΔEMH : $HM = \sqrt{|x-1|^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$HB = \sqrt{3}$ (diagonal do cubo)

Aplicando agora, o teorema dos cossenos no ΔMHO , temos:

$$\sqrt{3}^2 = \sqrt{x^2 - 2x + 2}^2 + \sqrt{x^2 + 1}^2 - 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 2} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot \cos \theta$$

$$3 = x^2 - 2x + 2 + x^2 + 1 - 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 2} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} \cdot \sqrt{x^2 + 1}}$$

b) Como $\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ e $\sqrt{x^2 + 1}$ são positivos para todo x real, concluímos que θ será obtuso se, e somente se: $x^2 - x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$.

Portanto, $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 1\}$.

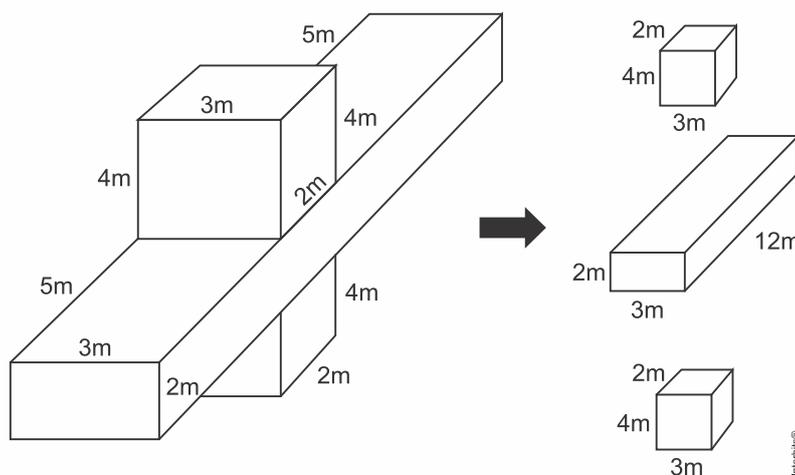
c) $x = 4 \Rightarrow \cos \theta = \frac{12}{\sqrt{170}} \cdot \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{170}}$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{85}}{\sqrt{85}} = \frac{\sqrt{85}}{\sqrt{170}}$$

Como $\cos \theta > \cos 45^\circ \Rightarrow \theta < 45^\circ$.

05|

Sólido que será retirado.



O volume V do sólido restante será dado pelo volume do sólido inicial $V_{(i)}$ e o sólido retirado $V_{(r)}$.

$$\begin{aligned}
 V &= V_{(i)} - V_{(r)} \\
 V &= 8 \cdot 10 \cdot 12 - 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 12 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \\
 V &= 960 - 24 - 72 - 24 \\
 V &= 960 - 120 \\
 V &= 840 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

Para calcular a área total, iremos considerar algumas etapas:

Área das faces externas paralelas à face A: $A_1 = 2 \cdot (8 \cdot 10 - 2 \cdot 3) = 148 \text{ m}^2$

Área das faces internas paralelas à face A: $A_2 = 4 \cdot (4 \cdot 3) = 48 \text{ m}^2$

Área das faces externas paralelas à face B: $A_3 = 2 \cdot (12 \cdot 8 - 2 \cdot 3) = 180 \text{ m}^2$

Área das faces internas paralelas à face B: $A_4 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ m}^2$

Área das faces externas paralelas à face C: $A_5 = 2 \cdot 12 \cdot 10 = 240 \text{ m}^2$

Área das faces internas paralelas à face C: $A_6 = 2 \cdot (2 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \cdot 5) = 80 \text{ m}^2$

Portanto, a área total será dada por:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 148 + 48 + 180 + 60 + 240 + 80 = 756 \text{ m}^2$$

06| **C**

Volumes iguais.

$$\pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot H \Rightarrow \frac{R^2}{r^2} = \frac{h}{H} \text{ (I)}$$

$$2\pi \cdot R \cdot H \leq 1,25 \cdot 2\pi r \cdot h \Rightarrow \frac{R}{r} \leq \frac{5}{4} \cdot \frac{h}{H} \text{ (II)}$$

substituindo (I) em (II), temos:

$$\frac{R}{r} \leq \frac{5}{4} \cdot \frac{R^2}{r^2} \Rightarrow 1 \leq \frac{5}{4} \cdot \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{R}{r} \geq \frac{4}{5} \text{ e } \frac{H}{h} \leq \frac{25}{16}$$

Como:

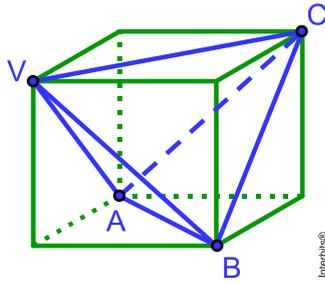
$$\frac{H}{h} \leq \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{H}{h} \leq \frac{16}{9}$$

$$\frac{R}{r} \geq \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{R}{r} \geq \frac{3}{4}$$

As alternativas [A] e [C] estão corretas.

07| **A**

Considere a figura.



Como qualquer uma das faces do tetraedro VABC é um triângulo equilátero de lado $2\sqrt{2}$, segue que a área pedida é dada por

$$\frac{(2\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} \text{ u.a.}$$

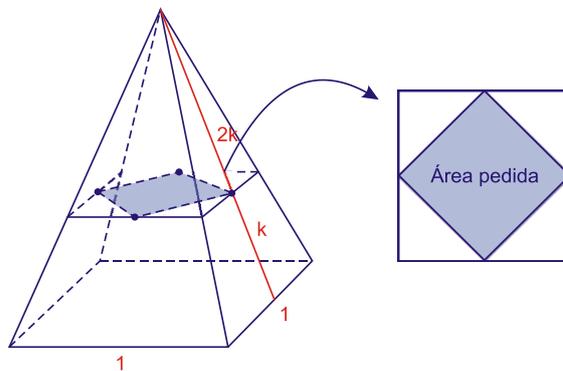
08 | D

O baricentro divide a mediana na razão 2 para 1

Secção transversal = quadrado (maior) destacado

$$\frac{A_{\text{sec}}}{A_{\text{base}}} = \left(\frac{2k}{3k}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{A_{\text{sec}}}{1} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow A_{\text{sec}} = \frac{4}{9}$$

$$\text{Área pedida} = \frac{1}{2} A_{\text{sec}} = \frac{2}{9}$$



09 |

Utilizando a fórmula dada temos:

$$\text{Capacidade da Taça: } V_T = \frac{4\pi \cdot R^3 + \pi \cdot R^2 \cdot r + \pi \cdot R \cdot r^2}{3}$$

$$\text{Capacidade do copo: } V_C = \pi \cdot R^3 + 2\pi \cdot R^2 r + 4 \cdot \pi R \cdot r^2$$

Fazendo $V_T = 2/3(V_C)$, temos:

$$7R \cdot r^2 + 3 \cdot R^2 \cdot R - 2 \cdot R^3 = 0$$

Resolvendo a equação na incógnita r , temos:

$$r = \frac{-3 \cdot R^2 + \sqrt{65 \cdot R^4}}{14 \cdot R} = \frac{5 \cdot R}{14}$$

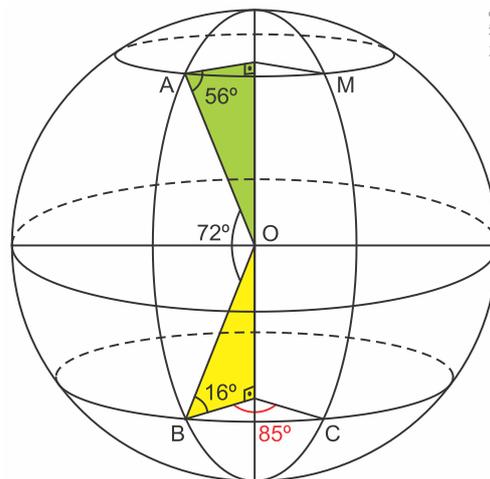
ou

$$r = \frac{-3 \cdot R^2 - \sqrt{65 \cdot R^4}}{14 \cdot R} = \frac{11 \cdot R}{14} \text{ (não convém)}$$

Portanto, o raio do copo será: $\frac{2 \cdot 5 \cdot R}{14} = \frac{5 \cdot R}{7}$.

10|

- a) Com os dados do enunciado, pode-se desenhar a figura a seguir, sendo o ponto O o centro da Terra, o ponto B a localização de Brasília e o ponto M a localização de Moscou:



Considerando a Terra como uma esfera, sabe-se que os arcos BA e CM são iguais e delimitados pelo raio R da terra e um ângulo de 72° ($56^\circ + 16^\circ$). Assim, pode-se calcular a distância vertical percorrida por ambos os aviões:

$$BA = CM = \frac{72\pi R}{180} = \frac{2\pi R}{5}$$

Para calcular a distância horizontal BC basta considerar um arco de circunferência delimitado pela distância de B até o eixo da terra e por um ângulo de 85° ($48^\circ + 37^\circ$). Assim, pode-se escrever:

$$\cos 16^\circ = \frac{\text{dist}_{B-\text{Eixo}}}{R} \Rightarrow 0,96 = \frac{\text{dist}_{B-\text{Eixo}}}{R} \Rightarrow \text{dist}_{B-\text{Eixo}} = 0,96R$$

$$BC = \frac{85\pi \cdot 0,96R}{180} \Rightarrow BC = \frac{16,32\pi R}{36}$$

Para calcular a distância horizontal AM basta considerar um arco de circunferência delimitado pela distância de A até o eixo da terra e por um ângulo de 85° ($48^\circ + 37^\circ$). Assim, pode-se escrever:

$$\cos 56^\circ = \frac{\text{dist}_{A-Eixo}}{R} \Rightarrow 0,56 = \frac{\text{dist}_{A-Eixo}}{R} \Rightarrow \text{dist}_{A-Eixo} = 0,56R$$

$$AM = \frac{85\pi \cdot 0,56R}{180} \Rightarrow AM = \frac{9,52\pi R}{36}$$

Por fim, pode-se calcular a distância percorrida por cada um dos aviões:

$$\text{Avião 1} \Rightarrow BA + AM = \frac{2\pi R}{5} + \frac{9,52\pi R}{36} = \frac{119,6\pi R}{180}$$

$$\text{Avião 2} \Rightarrow BC + CM = \frac{16,32\pi R}{36} + \frac{2\pi R}{5} = \frac{153,6\pi R}{180}$$

Logo, conclui-se que o segundo avião percorreu a maior distância.

b) A diferença das distâncias percorridas será igual a:

$$\text{Avião 2} - \text{Avião 1} \Rightarrow \frac{153,6\pi R}{180} - \frac{119,6\pi R}{180} = \frac{34\pi R}{180} = \frac{34\pi \cdot 6400}{180} = 1208,9\pi \text{ km}$$

Matemática 3 – Geometria Analítica

01 | **B**

Considerando intervalos de tempos iguais para os dois índices, é fácil ver que quando x_i cresce, y_i decresce. Ademais, quando x_i decresce, y_i cresce. Em consequência, o gráfico formado pelos pares (x_i, y_i) é majoritariamente decrescente, e pode ser aproximado pela reta $x + y = 2$.

A única alternativa que possui essas características é a [B].

02 |

a) Desde que a abscissa do ponto A corresponde a um dos zeros de f , temos

$$x + \frac{3}{2-x} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3.$$

Logo, como o ponto A se encontra no semieixo negativo das abscissas, vem $A = (-1, 0)$.

b) Observando que C e D possuem a mesma ordenada, encontramos

$$4 = x + \frac{3}{2-x} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 5.$$

Assim, temos $x_C = 5$ e, portanto, se G é o centro do retângulo $ABCD$, então

$$G = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right)$$

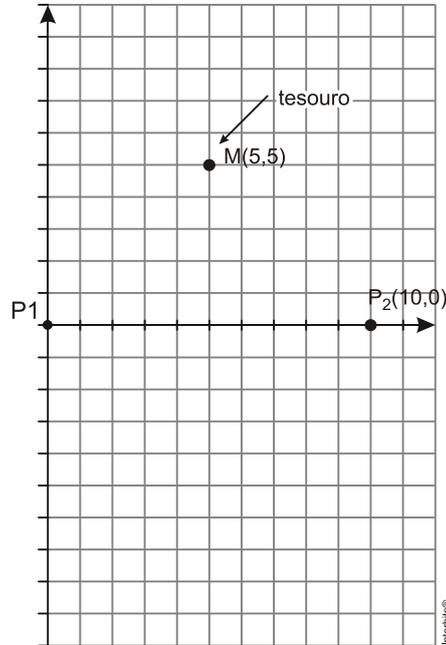
$$= \left(\frac{-1 + 5}{2}, \frac{0 + 4}{2} \right)$$

$$= (2, 2).$$

Calculando as coordenadas do ponto M médio do segmento M_1 e M_2 , temos:

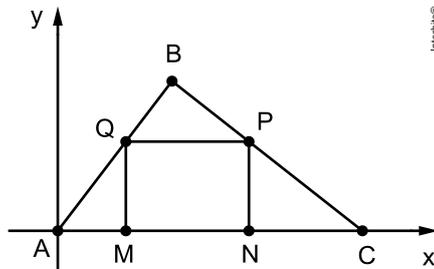
$$x_M = \frac{a+10-a}{2} = 5 \text{ e } y_M = \frac{b+10-b}{2} = 5$$

Logo, o ponto médio do segmento de extremos M_1 e M_2 é $M(5,5)$.



05 | **D**

Considere a figura.



A equação da reta \overleftrightarrow{AB} é dada por

$$y = \frac{y_B}{x_B} x \Leftrightarrow y = \frac{4}{3} x.$$

Logo, tem-se $Q = \left(\frac{3y}{4}, y\right)$ e $M = \left(\frac{3y}{4}, 0\right)$, com $0 < y < 4$.

Além disso, a equação da reta \overleftrightarrow{BC} é

$$y - y_c = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} (x - x_C) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{4 - 0}{3 - 8} (x - 8)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{32}{5}$$

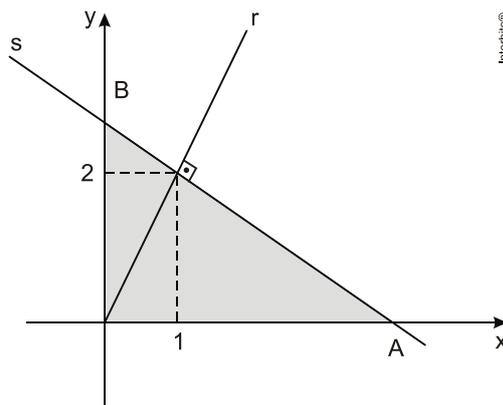
Daí, $P = \left(\frac{32 - 5y}{4}, y\right)$ e $N = \left(\frac{32 - 5y}{4}, 0\right)$, com $0 < y < 4$.

A área do retângulo $MNPQ$ é dada por

$$\begin{aligned} (MNPQ) &= \overline{MN} \cdot \overline{PN} \\ &= \left(\frac{32 - 5y}{4} - \frac{3y}{4}\right) \cdot (y - 0) \\ &= -2y^2 + 8y \\ &= -2 \cdot [(y - 2)^2 - 4] \\ &= 8 - 2 \cdot (y - 2)^2. \end{aligned}$$

Portanto, o retângulo $MNPQ$ tem área máxima quando $y = 2$, ou seja, quando $P = \left(\frac{11}{2}, 2\right)$.

06 | **C**



$$m_r = \frac{2}{1} = 2, \text{ logo } m_s = -\frac{1}{2} \text{ (r e s são perpendiculares)}$$

$$\text{Equação da reta s: } y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow 2y - 4 = -x + 1 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$$

Intersecção com o eixo x: $x + 2 \cdot 0 = 5 \Leftrightarrow x = 5$. Logo, $A(5, 0)$.

Intersecção com o eixo y: $0 + 2 \cdot 5 = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$. Logo, $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

Calculando a área do triângulo, temos:

$$A = \frac{5 \cdot \frac{5}{2}}{2}$$

$$A = \frac{25}{4}$$

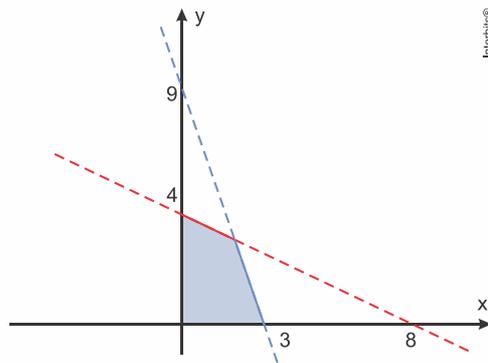
07| **E**

Processo $P_1 \rightarrow 3x + y \leq 9$

Processo $P_2 \rightarrow 3x + 6y \leq 24$

A solução será representada graficamente.

O Gráfico E é o que mais se aproxima da solução:



08| **A**

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 3x + 6y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ e } y = 3$$

Logo, o lucro será:

$$L = 0,50 \cdot 1.000 \cdot 2 + 0,80 \cdot 1.000 \cdot 3 = R\$ 3.400,00.$$

09|

a) Equação da circunferência: $x^2 + y^2 = 3^2$.

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = \frac{\sqrt{8}}{|x|} \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{8}{x^2} = 9 \Leftrightarrow x^4 - 9x^2 + 8 = 0$$

Resolvendo, temos:

$$\begin{aligned} x &= 2\sqrt{2} \Leftrightarrow y = 1 \\ x &= -2\sqrt{2} \Leftrightarrow y = 1 \\ x &= 1 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{2} \\ x &= -1 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Logo,

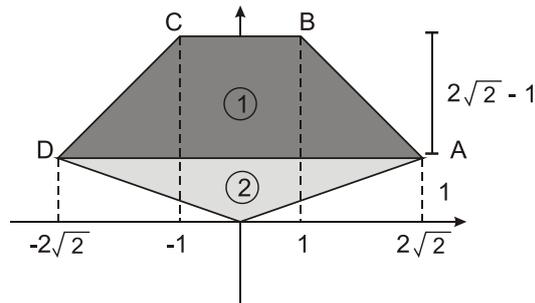
$$A(2\sqrt{2}; 1), B(1; 2\sqrt{2}), C(-1; 2\sqrt{2}) \text{ e } D(-2\sqrt{2}; 1).$$

b) Teremos:

$$A_1 = \frac{(2+4\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{2}-1)}{2} = 7 \text{ (área do trapézio)}$$

$$A_2 = \frac{4\sqrt{2} \cdot 1}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$A = A_1 + A_2 \Leftrightarrow A = 7 + 2\sqrt{2}$$

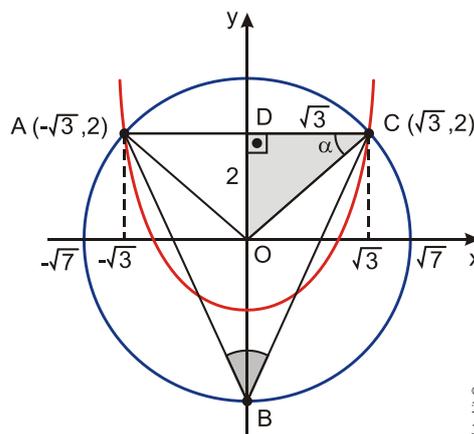


10|

Determinando os pontos A e C através da resolução de um sistema com as equações da parábola e da circunferência.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

$A(\sqrt{3}, 2)$ e $C(-\sqrt{3}, 2)$ (figura abaixo)



Considerando, agora, o triângulo CDO:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 49^\circ \Rightarrow \hat{C}OD = 41^\circ \Rightarrow \hat{A}OC = 82^\circ$$

$$\hat{A}BC = \frac{\hat{A}OC}{2} = \frac{82^\circ}{2} = 41^\circ \text{ (ângulo inscrito)}$$

Matemática 4 – Análise Combinatória

01|

a) Cada time fará $5-1=4$ jogos e, portanto, se um time possui quatro vitórias não pode haver outro time com o mesmo número de vitórias, já que todos os outros possuem no mínimo uma derrota.

b) Se a probabilidade de vencer um jogo é $\frac{1}{2}$, então a probabilidade de perder é $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Logo, a probabilidade de que um time qualquer vença quatro jogos é dada por

$$\binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}.$$

Ademais, como dois times não podem terminar a competição com quatro vitórias, segue que a resposta é $5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.

c) Sejam A, B, C, D e E os times. Desde que o número total de jogos é $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$, necessariamente haverá 10 vitórias. Logo, cada time deve vencer dois jogos e perder dois jogos.

A probabilidade do time A ter exatamente duas vitórias é dada por

$$\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

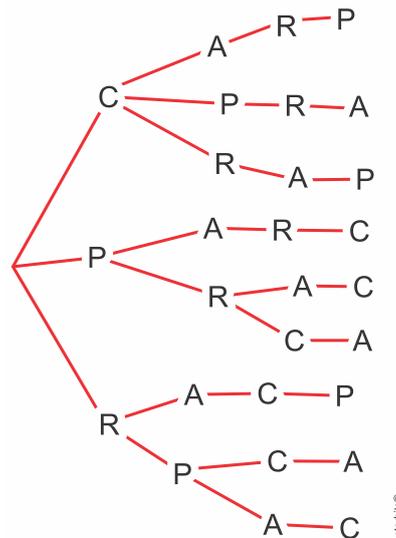
Suponhamos, sem perda de generalidade, que A venceu B e C e perdeu de D e E . Ademais, podemos ainda supor que B venceu C e D venceu E . Desse modo, temos:

1. C perdeu de A e B , assim deve vencer D e E , o que ocorre com probabilidade $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
2. D venceu A e E e perdeu de C . Portanto, deve perder de B , o que ocorre com probabilidade $\frac{1}{2}$.
3. B venceu C e D e perdeu de A . Logo, deve perder de E , o que ocorre com probabilidade $\frac{1}{2}$.
4. E venceu A e B e perdeu de C e D . Tais possibilidades já foram analisadas.

A resposta é $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{128}$.

02| **D**

Supondo que a sequência $ACPR$ represente a opção na qual todos os amigos retiram o próprio nome e sabendo que o total de permutações para os quatro amigos é 24 ($P_4 = 4! = 24$), pode-se contar o número de permutações caóticas da sequência com a ajuda de um diagrama de árvore:



Logo, de um total de 24 permutações, em 9 delas nenhum participante retire seu próprio nome. A probabilidade será de: $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

03|

a) Observando-se os gráficos, percebe-se que em São Paulo foram entrevistadas 24 pessoas e em Santos 20 pessoas. Assim, foram entrevistadas um total de 44 pessoas. A marca F foi escolhida por 5 pessoas em São Paulo e por 5 pessoas em Santos. A marca D foi escolhida apenas por 1 pessoa em São Paulo (nenhuma em Santos). Assim um total de 11 pessoas escolheu as marcas D ou F. Logo, a probabilidade de que essa pessoa tenha escolhido ou a marca D ou a marca F é de:

$$p = \frac{11}{44} \Rightarrow p = \frac{1}{4} = 25\%$$

b) Sabendo-se que o total de pessoas entrevistadas em Campinas foi de 17, que a marca F recebeu 6 escolhas e que a marca C não obteve nenhuma escolha, pode-se concluir que as marcas A, B, D e E somam 11 votos. Sabendo que o mínimo de votos que uma destas marcas recebeu foi 2 (pois nenhuma recebeu um voto apenas), conclui-se que o máximo de votos que as marcas A, B, D e E receberam foram 5 votos. Assim, as opções de distribuição são permutações das seguintes possibilidades:

Possibilidade 1) 5-2-2-2

Possibilidade 2) 4-3-2-2

Possibilidade 3) 3-3-3-2

Como em todos os casos há repetição de elementos, o total de maneiras de distribuir os 11 votos das marcas A, B, D e E será:

$$Total\ maneiras = \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} = 4 + 12 + 4$$

$$Total\ maneiras = 20$$

04| E

Temos 12 possíveis valores para a e 9 possíveis valores para b.

Número de frações possíveis = $12 \cdot 9 = 108$.

O denominador deverá ser par, então o numerador deverá ser ímpar para que a fração seja irredutível.

Temos, então, as seguintes possibilidades.

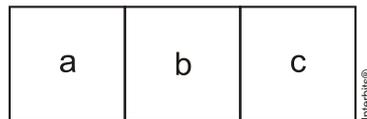
Valores para a = 11, 13, 15, 17, 19 e 21 e valores para b = 44, 46, 48, 50, num total de $6 \cdot 4 = 24$ frações.

Das quais deverão ser retiradas as seguintes frações redutíveis: $\frac{11}{44}$, $\frac{15}{48}$, $\frac{21}{48}$ e $\frac{15}{50}$, ficamos com 20 possibilidades num total de 108 frações.

Calculando a probabilidade, temos:

$$P = \frac{20}{108} = \frac{5}{27}$$

05| **C**



Números de 3 algarismos com:

a e b consecutivos $5 \cdot 1 \cdot 6 = 30$

b e c consecutivos = $6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$

a e b consecutivos e b e c consecutivos = $4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

$$P = \frac{30 + 30 - 4}{6 \cdot 6 \cdot 6}$$

$$P = \frac{56}{216} = \frac{7}{27}$$

06|

a) Os três elementos não nulos deverão ocupar filas diferentes.

Na primeira linha: 3 possibilidades.

Na segunda linha: 2 possibilidades.

Na terceira linha: 1 possibilidade.

Logo teremos $3!3!$ matrizes não nulas.

Número de matrizes com seis elementos nulos $A_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7$.

$$\text{Logo } P = \frac{6 \cdot 6}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{14}$$

b) De acordo com a lei de formação a matriz é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

considerando sua inversa $\begin{pmatrix} x & a & d \\ y & b & e \\ z & c & f \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & a & d \\ y & b & e \\ z & c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & a & d \\ 2x+y & 2a+b & 2d+e \\ 3x+2y+z & 3a+2b+c & 3d+2e+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz inversa será $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

07|

a) Colocando o sinal * entre duas bolas faremos a distribuição.



Temos, então, uma permutação de $n + 1$ elementos com repetição de n .

$$P_{n+1}^n = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

b) n bolas e dois sinais.



$$P_{n+2}^{n,2} = \frac{(n+2)!}{n!.2!} = \frac{(n+2).(n+1)}{2}$$

c) vamos admitir que Pedro já tem k bolas e repartir $n-k$ bolas para os três. Assim Pedro terá no mínimo k bolas.

$$P_{n-k+2}^{n-k,2} = \frac{(n-k+2)!}{(n-k)!.2!} = \frac{(n-k+2)(n-k+1)}{2}$$

Logo a probabilidade será:

$$P = \frac{\frac{(n-k+2).(n-k+1)}{2}}{\frac{(n+2).(n+1)}{2}} = \frac{(n-k+2)(n-k+1)}{(n+2).(n+1)}$$

Respostas:

a) $n + 1$

b) $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

c) $\frac{(n-k+2)(n-k+1)}{(n+2)(n+1)}$

08|

- a) 14! versões diferentes da prova
 b) As questões serão assim dispostas:

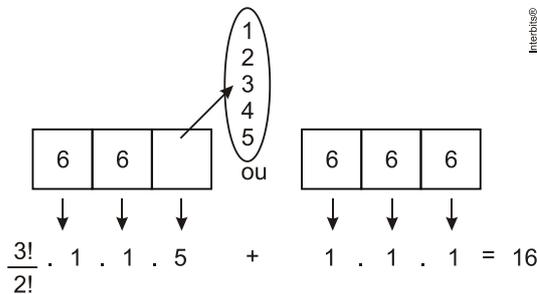
PPPPPPP MGMGGGM
 PPPPPPP MGGMGGM
 PPPPPPP MGGGMGM
 PPPPPPP GMGMGGM
 PPPPPPP GGMGMGM
 PPPPPPP GMGGMGM

$7! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 6 = 4.354.560$

c) $P = \frac{7! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 6}{7! \cdot 7!} = \frac{6}{35}$

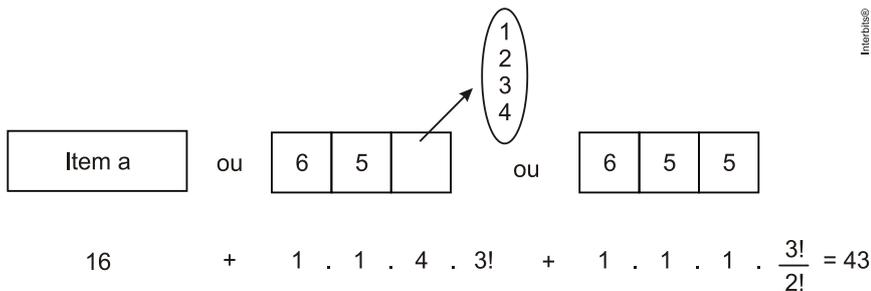
09|

- a) Sócrates deve obter pelo menos 2 seis.



Portanto, a probabilidade será $P = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$.

- b) Sócrates deve obter pelo menos dois seis (item a) ou um único 6 e pelo menos um 5.



Logo, a probabilidade será $P = \frac{43}{216}$.

10|

- a) A região Norte possui 7 unidades, a Nordeste 9, a Centro-Oeste 4, a Sudeste 4, e a Sul 3.
- b) Sabendo que as regiões Nordeste e Sudeste são as mais populosas, há $\binom{9}{2} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = 36$

modos de escolher duas unidades da região Nordeste e $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ modos de escolher duas

unidades da região Sudeste. Além disso, existem 7 maneiras de escolher uma unidade da região Norte, 4 modos de escolher uma unidade da região Centro-Oeste e 3 maneiras de escolher uma unidade da região Sul. Portanto, como cada unidade da Federação é representada por três senadores, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos

$$N = 36 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3^7 = 2^5 \cdot 3^{11} \cdot 7.$$

- c) Como existem $27 \cdot 3 = 81$ senadores, podemos escolher 7 senadores quaisquer de

$$\begin{aligned} \binom{81}{7} &= \frac{81!}{74! \cdot 7!} \\ &= \frac{81 \cdot 80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot 76 \cdot 75}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= 50 \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 79 \end{aligned}$$

maneiras. Logo,

$$\begin{aligned} P &= \frac{2^5 \cdot 3^{11} \cdot 7}{50 \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 79} \\ &= \frac{1}{50} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{63}{79} \cdot \frac{108}{143} \\ &< \frac{1}{50}, \end{aligned}$$

pois $\frac{18}{19}$, $\frac{63}{79}$ e $\frac{108}{143}$ são menores do que 1.

Matemática 5 – Funções e Progressões

01|

- a) De $f(x) = 2x^2 - 3x + c$,

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + c$$

$$f(-1) = 5 + c$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + c$$

$$f(1) = c - 1$$

Daí,

$$(5 + c) \cdot (c - 1) = 5 + c + c - 1$$

$$5c - 5 + c^2 - c = 4 + 2c$$

$$c^2 + 2c - 9 = 0$$

$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1}$$

$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$$c = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$c = -1 \pm \sqrt{10}$$

b) De $f(x) = 2x^2 - 3x + c$,

$$f(p) = 2p^2 - 3p + c$$

$$f(q) = 2q^2 - 3q + c$$

Como $f(p) = f(q)$,

$$2p^2 - 3p = 2q^2 - 3q$$

$$2q^2 - 2p^2 - 3q + 3p = 0$$

$$2 \cdot (q^2 - p^2) - 3 \cdot (q - p) = 0$$

$$2 \cdot (q + p) \cdot (q - p) - 3 \cdot (q - p) = 0$$

$$(q - p) \cdot (2 \cdot (q + p) - 3) = 0$$

Como $p \neq q$, $q - p \neq 0$, logo,

$$2 \cdot (q + p) - 3 = 0$$

$$2 \cdot (q + p) = 3$$

Se p e q forem ambos números inteiros, o número $2 \cdot (q + p)$ é par.

Como $2 \cdot (q + p) = 3$ e 3 é ímpar, p e q não podem ser ambos números inteiros.

Resposta:

- a) $c = -1 + \sqrt{10}$ ou $c = -1 - \sqrt{10}$;
 b) Demonstração.

02|

- a) A sequência a_n é igual a $(6, 4, 1, 2, 6, 4, 1, 2, \dots)$. Logo, é fácil ver que a_n é periódica. Ademais, teremos $S_n^k = 20$ sempre que tomarmos a subsequência de termos consecutivos $(4, 1, 2, 6, 4, 1, 2)$. Portanto, o menor valor de n para o qual ocorre $S_n^k = 20$ é 2, com $k=6$ (pois a subsequência possui sete termos).

- b) Se $j=1$, então

$$S_n^k = 1 \Leftrightarrow a_{3+4\alpha} = 1,$$

com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n=3+4\alpha$ e $k=0$.

Se $j=2$, então

$$S_n^k = 2 \Leftrightarrow a_{4+4\alpha} = 2,$$

com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n=4+4\alpha$ e $k=0$.

Se $j=3$, então

$$S_n^k = 3 \Leftrightarrow a_{3+4\alpha} + a_{4+4\alpha} = 3,$$

com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n=3+4\alpha$ e $k=1$.

Se $j=4$, então

$$S_n^k = 4 \Leftrightarrow a_{2+4\alpha} = 4,$$

com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n=2+4\alpha$ e $k=0$.

Se $j=5$, então

$$S_n^k = 5 \Leftrightarrow a_{2+4\alpha} + a_{3+4\alpha} = 5,$$

com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n=2+4\alpha$ e $k=1$.

Se $j=6$, então

$$S_n^k = 6 \Leftrightarrow a_{1+4\alpha} = 6,$$

com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n=1+4\alpha$ e $k=0$.

Se $j=7$, então

$$S_n^k = 7 \Leftrightarrow a_{2+4\alpha} + a_{3+4\alpha} + a_{4+4\alpha} = 7,$$

com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n=2+4\alpha$ e $k=2$.

Se $j=8$, então

$$S_n^k = 8 \Leftrightarrow a_{4+4\alpha} + a_{5+4\alpha} = 8,$$

com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n=4+4\alpha$ e $k=1$.

Se $j=9$, então

$$S_n^k = 9 \Leftrightarrow a_{3+4\alpha} + a_{4+4\alpha} + a_{5+4\alpha} = 9,$$

com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n=3+4\alpha$ e $k=2$.

Se $j=10$, então

$$S_n^k = 10 \Leftrightarrow a_{1+4\alpha} + a_{2+4\alpha} = 10,$$

com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n=1+4\alpha$ e $k=1$.

Se $j=11$, então

$$S_n^k = 11 \Leftrightarrow a_{1+4\alpha} + a_{2+4\alpha} + a_{3+4\alpha} = 11,$$

com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n=1+4\alpha$ e $k=2$.

Se $j=12$, então

$$S_n^k = 12 \Leftrightarrow a_{4+4\alpha} + a_{5+4\alpha} + a_{6+4\alpha} = 12,$$

com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n=4+4\alpha$ e $k=2$.

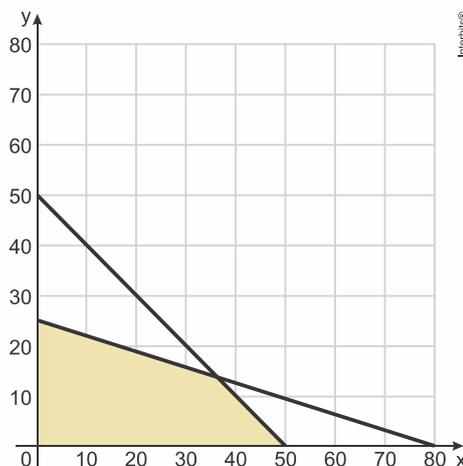
- c) Sabendo que a sequência é periódica, com $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 13$, para todo n inteiro positivo, podemos escrever $S_n^k = 13 \cdot q + r$, com $n \geq 1$, $k \geq 0$, $r \in \mathbb{N}$ e $r \leq 12$. Portanto, pelo item (b) e sabendo que todo inteiro positivo j pode ser escrito sob a forma $13 \cdot q + r$, segue o resultado.

03|

a) Do enunciado, pode-se escrever:

$$\begin{cases} x + y \leq 50 \\ 125x + 400y \leq 10000 \end{cases}$$

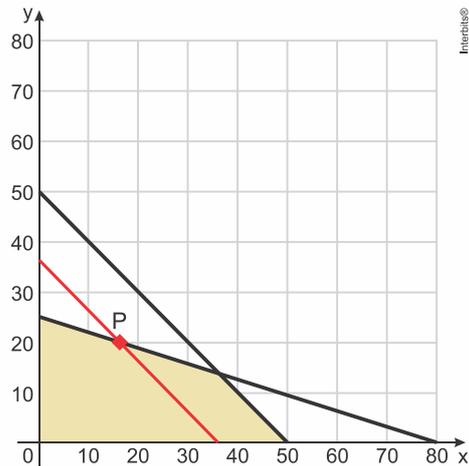
Esboçando o gráfico:



b) Sendo $y = 10$ o lucro será:

$$\begin{aligned} L_{\text{máx}} &\rightarrow x_{\text{máx}} \\ L &= 120x + 10 \cdot 240 \\ x + y &\leq 50 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

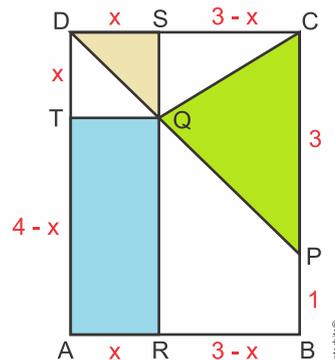
c) Sendo $x + y = 36$, pode-se esboçar:



$$\begin{cases} x + y = 36 \\ 125x + 400y = 10000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 180 \\ 5x + 16y = 400 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 20 \end{cases} \rightarrow P(16, 20)$$

04| **A**

Diante do exposto, pode-se desenhar:



A soma das áreas hachuradas será:

$$S(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3 \cdot (3-x)}{2} + x \cdot (4-x) = \frac{x^2 + 9 - 3x + 8x - 2x^2}{2}$$

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot (-x^2 + 5x + 9)$$

$$S_{\text{máx}} = y_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-(5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 9)}{4 \cdot (-1)} \rightarrow S_{\text{máx}} = \frac{61}{8}$$

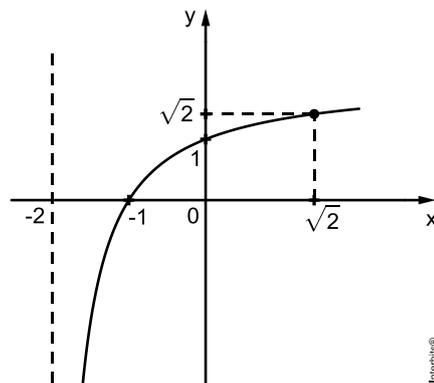
05|

a) Se $m = n = 2$, então

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= 2 - \frac{2}{\sqrt{2} + 2} \\ &= 2 - \frac{2}{\sqrt{2} + 2} \cdot \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} - 2} \\ &= 2 - \frac{2 \cdot (\sqrt{2} - 2)}{-2} \\ &= 2 + \sqrt{2} - 2 \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

b) Se $m = n = 2$, então $f(x) = 2 - \frac{2}{x+2}$, com $x \neq -2$. Tomando $x = 0$, vem $f(0) = 2 - \frac{2}{0+2} = 1$. Logo, o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das ordenadas é $(0, 1)$. Por outro lado, pondo $f(x) = 0$, obtemos $0 = 2 - \frac{2}{x+2} \Leftrightarrow x = -1$. Portanto, o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das abscissas é $(-1, 0)$.

c) O gráfico de f , para $x > -2$, pode ser obtido a partir do gráfico da função $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{2}{x}$, da seguinte forma: (i) um deslocamento horizontal de duas unidades para a esquerda; (ii) uma reflexão em torno do eixo das abscissas; e (iii) um deslocamento vertical de duas unidades para cima.

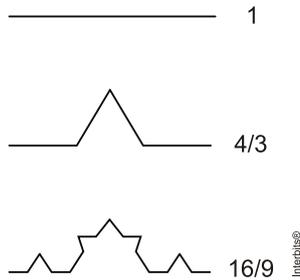


d) Se $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, então

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 2 - \frac{m}{\sqrt{2} + n} \Leftrightarrow \frac{m}{\sqrt{2} + n} = 2 - \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow m = 2\sqrt{2} - 2 + 2n - \sqrt{2}n \\ &\Leftrightarrow m - 2n + 2 = \sqrt{2} \cdot (2 - n). \end{aligned}$$

Seendo $m, n \in \mathbb{Z}$, tem-se que $m-2n+2 \in \mathbb{Z}$ e $2-n \in \mathbb{Z}$. Logo, a igualdade é verificada se, e somente se, $m-2n+2=0$ e $2-n=0$, o que ocorre apenas para $m=n=2$.

06| **C**



Os comprimentos das figuras formam uma P.G. de razão $4/3$. Logo, o comprimento da sexta figura será dado por: $a_6 = 1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \left(\frac{4}{3}\right)^5$.

07| **E**

Sejam r_1, r_2, \dots, r_n as raízes de P . Desde que tais raízes estão sobre a circunferência unitária, temos

$$|r_1| = |r_2| = \dots = |r_n| = 1 \Rightarrow |r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n| = 1.$$

Por outro lado, pelas Relações de Girard, vem

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{1} = (-1)^n \cdot a_0,$$

com $a_0 \in \mathbb{R}^*$.

Logo, segue que $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n = \pm 1$. Mas $a_0 < 0$ e, portanto, só pode ser $a_0 = -1$.

A resposta é $(-1)^{n+1}$.

08| **D**

Pela equação de Clapeyron (da Química):

$$PV = nRT$$

$P = \text{pressão}$

$V = \text{volume}$

$n = \text{quantidade de matéria (nº mols)}$

$R = \text{constante universal dos gases}$

$T = \text{temperatura}$

Assim, percebe-se que pressão e volume são inversamente proporcionais: a pressão do gás é máxima quando o volume é mínimo. Como a função logarítmica dada é sempre crescente, o volume será mínimo quando o logaritmando for mínimo. Ou seja:

$$\text{logaritmando} \rightarrow (5 + 2 \text{sen}(\pi t))$$

$$f_{\min}(t) = 5 + 2 \text{sen}(\pi t) \rightarrow \text{sen}(\pi t) \text{ deve ser mínimo}$$

$$\pi t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow t = \frac{3}{2} + 2k \rightarrow t = \frac{3}{2} = 1,5$$

09| **B**

V_m = velocidade média de pico pela manhã

$$V_m = 22,1 \cdot (0,95)^{t/4}$$

$$2,1/2 = 22,1 \cdot (0,95)^{t/4}$$

$$\frac{1}{2} = (0,95)^{\frac{t}{4}}$$

$$\ln \frac{1}{2} = \ln(0,95)^{\frac{t}{4}}$$

$$\ln 1 - \ln 2 = \frac{t}{4} \cdot \ln \frac{19}{20}$$

$$0 - \ln 2 = \frac{t}{4} \cdot (\ln 19 - 2 \ln 2 - \ln 5)$$

$$-0,69 = \frac{t}{4} \cdot (2,94 - 2 \cdot 0,69 - 1,61)$$

$$-0,69 = \frac{t}{4} \cdot (-0,05)$$

$$t = 55,2$$

$2012 + 55,2 = 2067,2$ aproximadamente 2068.

V_r = velocidade média de pico pela tarde

$$V_r = 18,5 \cdot (0,9)^{t/4}$$

$$18,5/2 = 18,5 \cdot (0,9)^{t/4}$$

$$\frac{1}{2} = (0,9)^{\frac{t}{4}}$$

$$\ln \frac{1}{2} = \ln(0,9)^{\frac{t}{4}}$$

$$\ln 1 - \ln 2 = \frac{t}{4} \cdot \ln \frac{9}{10}$$

$$0 - \ln 2 = \frac{t}{4} \cdot (\ln 9 - \ln 2 - \ln 5)$$

$$-0,69 = \frac{t}{4} \cdot (2,1,1 - 0,69 - 1,61)$$

$$-0,69 = \frac{t}{4} \cdot (-0,1)$$

$$t = 27,6$$

$2012 + 27,6 = 2039,6$ aproximadamente 2040.

10|

a) Como $OB_0 \perp A_1B_1$, $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2B_1}$ e OA_2 é comum aos triângulos OA_1A_2 e OB_1A_2 , segue-se que os triângulos OA_1A_2 e OB_1A_2 são congruentes por LAL. Além disso, $OA_1B_0 \equiv OA_1A_2 = 90^\circ$ e $A_1B_0A_2 = 60^\circ$ implicam em $OA_1B_1 = 60^\circ$. Portanto, o triângulo OA_1B_1 é equilátero. Desse modo, o resultado pedido corresponde à altura do triângulo A_0OB_0 , ou seja, $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ cm.

b) Raciocinando de forma inteiramente análoga ao item (a), concluímos que

$$\overline{OA_n} = \frac{\overline{OA_{n-1}} \cdot \sqrt{3}}{2},$$

com $n \geq 1$.

Daí, como $a_n = \overline{A_{n-1}A_n} = \frac{\overline{OA_{n-1}}}{2}$, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\overline{OA_n}}{2}}{\frac{\overline{OA_{n-1}}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

para todo $n \geq 1$ e, portanto, a_1, a_2, a_3, \dots é uma progressão geométrica de primeiro termo

$a_1 = \frac{7}{2}$ cm e razão $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) O comprimento da poligonal $A_0A_1A_2 \dots A_n$, com $n \geq 1$, corresponde à soma dos n primeiros termos da progressão geométrica a_1, a_2, a_3, \dots , ou seja,

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 7(2 + \sqrt{3}) \left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \right] \text{ cm.}$$

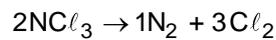
Química 1 - Físico-Química

01|

- a) Representação da molécula do NCl_3 utilizando fórmula de Lewis (N com 5 elétrons de valência e Cl com 7 elétrons de valência); estabilização com 8 elétrons de valência:



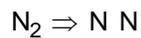
- b) Equação balanceada para a decomposição do NCl_3 em N_2 e Cl_2 : $2\text{NCl}_3 \rightarrow 1\text{N}_2 + 3\text{Cl}_2$.



$$x - 1 - 1 - 1 = 0$$

$$x = +3$$

Nox(N) no reagente = +3

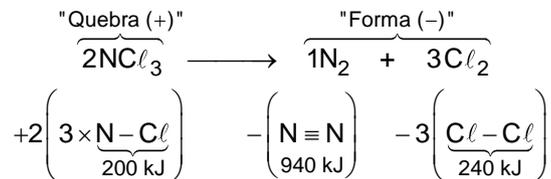


$$y + y = 0$$

$$y = 0$$

Nox(N) no produto = 0

- c) Cálculo da entalpia da reação de decomposição do NCl_3 :



$$\Delta H = +6 \times 200 \text{ kJ} - 940 \text{ kJ} - 3 \times 240 \text{ kJ}$$

$$\Delta H = -460 \text{ kJ (para 2 mols de } \text{NCl}_3)$$

$$\Delta H = -230 \text{ kJ (entalpia de reação de decomposição molar)}$$

A reação é exotérmica, pois $\Delta H < 0$.

02|

- a) Conforme observado na tabela, à pressão constante, a medida que a temperatura da água aumenta, o teor de OD diminui.

Para 680 mmHg:

$$\underbrace{9,8 \text{ mg/L} > 9,4 \text{ mg/L} > 8,9 \text{ mg/L} > 8,6 \text{ mg/L} > 8,2 \text{ mg/L} > 7,9 \text{ mg/L}}_{\text{Aumento de temperatura} \rightarrow}$$

Para 700 mmHg:

$$\underbrace{10,0 \text{ mg/L} > 9,6 \text{ mg/L} > 9,2 \text{ mg/L} > 8,8 \text{ mg/L} > 8,5 \text{ mg/L} > 8,1 \text{ mg/L}}_{\text{Aumento de temperatura} \rightarrow}$$

Para 720 mmHg:

$$\underbrace{10,5 \text{ mg/L} > 9,9 \text{ mg/L} > 9,5 \text{ mg/L} > 9,1 \text{ mg/L} > 8,7 \text{ mg/L} > 8,4 \text{ mg/L}}_{\text{Aumento de temperatura} \rightarrow}$$

Para 740 mmHg:

$$\underbrace{10,5 \text{ mg/L} > 10,0 \text{ mg/L} > 9,7 \text{ mg/L} > 9,3 \text{ mg/L} > 8,9 \text{ mg/L} > 8,8 \text{ mg/L}}_{\text{Aumento de temperatura} \rightarrow}$$

Para 760 mmHg:

$$\underbrace{11,0 \text{ mg/L} > 10,5 \text{ mg/L} > 10,0 \text{ mg/L} > 9,6 \text{ mg/L} > 9,2 \text{ mg/L} > 8,8 \text{ mg/L}}_{\text{Aumento de temperatura} \rightarrow}$$

Observando-se a tabela, percebe-se que conforme a altitude aumenta, a pressão atmosférica diminui e, conseqüentemente, o teor de O_2 na água, também diminui. Observe o que ocorre para 10°C :

$$\underbrace{\underbrace{11,0 \text{ mg/L}}_{760 \text{ mmHg}} > \underbrace{10,5 \text{ mg/L}}_{740 \text{ mmHg}} = \underbrace{10,5 \text{ mg/L}}_{720 \text{ mmHg}} > \underbrace{10,0 \text{ mg/L}}_{700 \text{ mmHg}} > \underbrace{9,8 \text{ mg/L}}_{680 \text{ mmHg}}}_{\text{Diminuição de solubilidade} \rightarrow}$$

b) A participação em volume de oxigênio no ar atmosférico, que equivale à participação em pressão, é de 21%. De acordo com a tabela, a 16°C e 1 atm (760 mmHg), a solubilidade do gás oxigênio na água é de 9,6 mg/L. Então:

$$p_{\text{O}_2} = (21\%) \times 1 \text{ atm} = 0,21 \text{ atm}$$

$$M_{\text{O}_2} = (2 \times 16) \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{Solubilidade do } \text{O}_2 = 9,6 \text{ mg/L}$$

$$[\text{O}_2(\text{aq})] = \frac{\left(\frac{9,6 \times 10^{-3} \text{ g}}{32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} \right)}{\text{L}}$$

$$[\text{O}_2(\text{aq})] = 0,3 \times 10^{-3} \text{ mol/L}$$

$$K_H = \frac{[\text{O}_2(\text{aq})]}{p_{\text{O}_2}}$$

$$K_H = \frac{0,3 \times 10^{-3} \text{ mol/L}}{0,21 \text{ atm}}$$

$$K_H = 1,43 \times 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{L} \cdot \text{atm}}$$

03| B

Dose recebida = $100 \times 0,3 \text{ g} = 30 \text{ g}$ (de 25 a 200; tóxica)

$$R = \frac{30 \text{ g (dose recebida)}}{75 \text{ kg (massa corporal)}} = \frac{30 \times 10^{-3} \text{ g}}{75 \times 10^{-3} \text{ kg}} = \frac{30 \text{ mg}}{75 \times 10^{-3} \text{ kg}} = 400 \frac{\text{mg}}{\text{kg}}$$

$$\frac{R}{DL_{50}} = \frac{400 \frac{\text{mg}}{\text{kg}}}{192 \frac{\text{mg}}{\text{kg}}} = 2,08 \approx 2$$

04| D

Solução	Tempo medido até a completa dissolução da pastilha (em segundos)	Velocidade $v = \frac{m_{\text{dissolvida}}}{\Delta t}$
1. Água mineral sem gás à temperatura ambiente (25 °C)	36	$v_1 = \frac{m_{\text{dissolvida}}}{36}$
2. Água mineral com gás à temperatura ambiente (25 °C)	35	$v_2 = \frac{m_{\text{dissolvida}}}{35}$
3. Água mineral sem gás deixada em geladeira (4 °C)	53	$v_3 = \frac{m_{\text{dissolvida}}}{53}$
4. Água mineral com gás deixada em geladeira (4 °C)	55	$v_4 = \frac{m_{\text{dissolvida}}}{55}$

$$\frac{m_{\text{dissolvida}}}{35} > \frac{m_{\text{dissolvida}}}{36} > \frac{m_{\text{dissolvida}}}{53} > \frac{m_{\text{dissolvida}}}{55}$$

Então,

$$\underbrace{v_2 > v_1}_{25^\circ\text{C}} > \underbrace{v_3 > v_4}_{4^\circ\text{C}}$$

Como o sistema é aberto, ocorre escape do gás carbônico formado, ou seja, não é possível estabelecer um equilíbrio.

O aumento da temperatura da água, de 4 °C para 25 °C, levou a um aumento na velocidade da reação, uma vez que aumentou a frequência e a energia de colisão (número de choques) entre as moléculas envolvidas na reação.

05| B

$$m_{\text{água deslocada}} = (m_{\text{recipiente+água}} + m_{\text{amostra}}) - m_{\text{recipiente+água+amostra}}$$

$$m_{\text{água deslocada}} = (350,0 \text{ g} + 44,0 \text{ g}) - 389,0 \text{ g}$$

$$m_{\text{água deslocada}} = 5 \text{ g}$$

$$d_{\text{água}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

5 g de água deslocada \equiv 5 cm³ de água deslocada (igual ao volume da amostra)

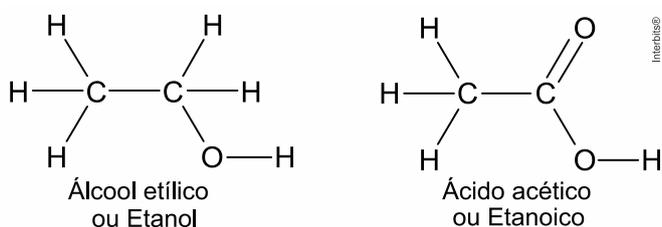
$$V_{\text{amostra}} = 5 \text{ cm}^3$$

$$d_{\text{mostra}} = \frac{m_{\text{amostra}}}{V_{\text{amostra}}} = \frac{44,0 \text{ g}}{5 \text{ cm}^3}$$

$$d_{\text{mostra}} = 8,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \Rightarrow \text{Bronze}$$

06|

a) Fórmulas estruturais planas:



b) Esse vinagre deve ter, no máximo, 1,0% (v/v) de álcool etílico, a 20 °C. Então:

$$1,0\% \text{ (v/v)} = \frac{1,0 \text{ mL}}{100 \text{ mL}}$$

$$\frac{1,0 \text{ mL} \times 10}{100 \text{ mL} \times 10} = \frac{10,0 \text{ mL}}{1.000 \text{ mL}}$$

Ou seja, 10,0 mL em 1L (1.000 mL).

Esse vinagre deve ter, no mínimo, 4,00 g de ácido acético por 100 mL. Então:

$$\frac{4,00 \text{ g}}{100 \text{ mL}} = \frac{4,00 \text{ g} \times 10}{100 \text{ mL} \times 10} = \frac{40,0 \text{ g}}{1.000 \text{ mL}}$$

Ou seja, 40,0 g em 1L (1.000 mL).

$$\text{H}_3\text{CCOOH} = 4 \times 1 + 2 \times 12 + 2 \times 16 = 60 \text{ (ácido acético)}$$

$$M_{\text{H}_3\text{CCOOH}} = 60,0 \text{ g/mol}$$

$$n_{\text{H}_3\text{CCOOH}} = \frac{m_{\text{H}_3\text{CCOOH}}}{M_{\text{H}_3\text{CCOOH}}} = \frac{40,0 \text{ g}}{60,0 \text{ g/mol}} = \frac{2}{3} \text{ mol}$$

$$n_{\text{H}_3\text{CCOOH}} = 0,667 \text{ mol}$$

07|

a) A partir da análise da tabela verifica-se que para uma concentração de 70% ocorre ação germicida, ou seja, ausência de crescimento bacteriano.

80	+	+	+	+	+
70	+	+	+	+	+
60	+	+	+	+	+

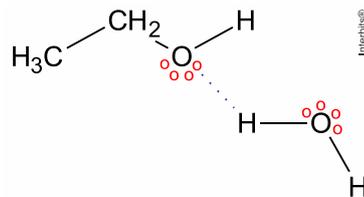
Com o tempo o etanol evapora e sua concentração diminui na mistura álcool/água. Caso a concentração do etanol caia a 40% ocorrerá a ausência de ação germicida e, conseqüentemente, crescimento bacteriano.

50	-	-	+	+	+
40	-	-	-	-	-

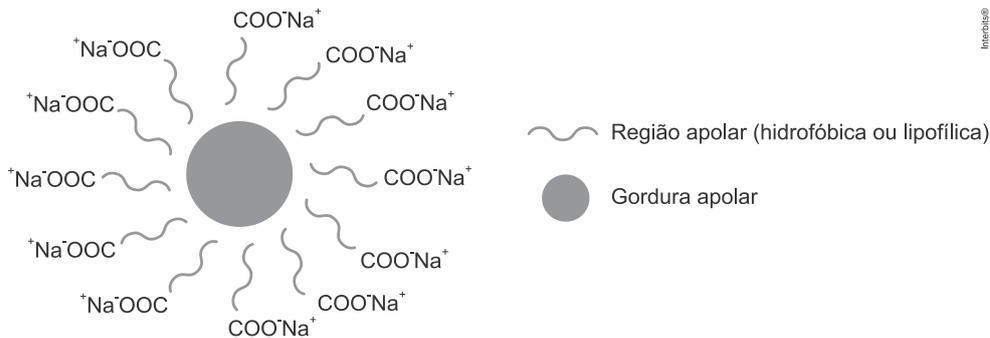
- ausência de ação germicida (crescimento bacteriano).

Portanto, a garrafa deve permanecer fechada o maior tempo possível.

b) Procedimento de higienização utilizando álcool 70%: ocorrerá desidratação da pele devido às interações do tipo ligações de hidrogênio entre o etanol e a água do tecido humano.



Procedimento de higienização utilizando água e sabão: ocorrerá a dissolução de parte da camada de gordura da pele, pois o sabão é anfifílico (possui uma região polar e outra apolar), e conseqüentemente, a região apolar poderá atrair a gordura da pele removendo-a.

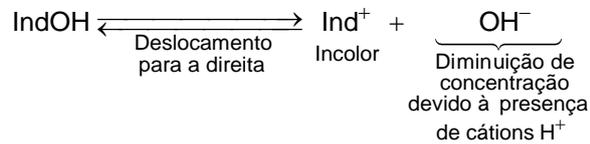
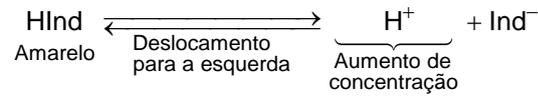
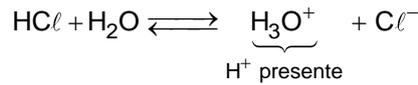


08 |

a) Ácido fraco: HInd (indicador 1), pois libera cátions H^+ em solução aquosa.

Base fraca: IndOH (indicador 2), pois libera ânions OH^- em solução aquosa.

b) Amarela, pois o equilíbrio do indicador 1 será deslocado para a esquerda no sentido de HInd, devido ao aumento da concentração de cátions H^+ . Já o equilíbrio 2 será deslocado para a direita no sentido do cátion Ind^+ , que não colore o sistema.



09| D

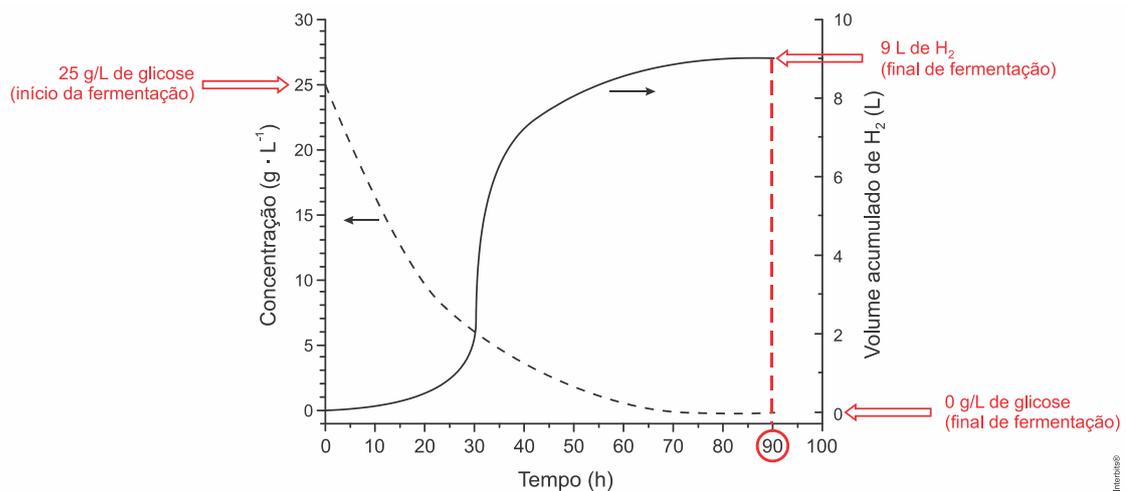
Trata-se de uma reação aluminotérmica na qual o alumínio é oxidado por outro metal.

Esta reação é exotérmica ($\Delta H < 0$) e libera muito calor.



10|

a) Analisando a figura, vem:



$$\Delta \text{Concentração} = |0 - 25| = 25 \text{ g/L}$$

$$n_{\text{Glicose}} = \frac{m}{M} = \frac{25 \text{ g}}{180 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0,138 \text{ mol}$$

$$V_{\text{molar}} = 25 \text{ L}$$

$$1 \text{ mol} \text{ ————— } 25 \text{ L}$$

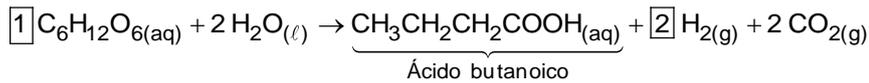
$$n \text{ ————— } 9 \text{ L}$$

$$n = \frac{9 \text{ L} \times 1 \text{ mol}}{25 \text{ L}} = 0,36 \text{ mol}$$

Proporção de glicose para hidrogênio $\Rightarrow 0,138 : 0,36$.

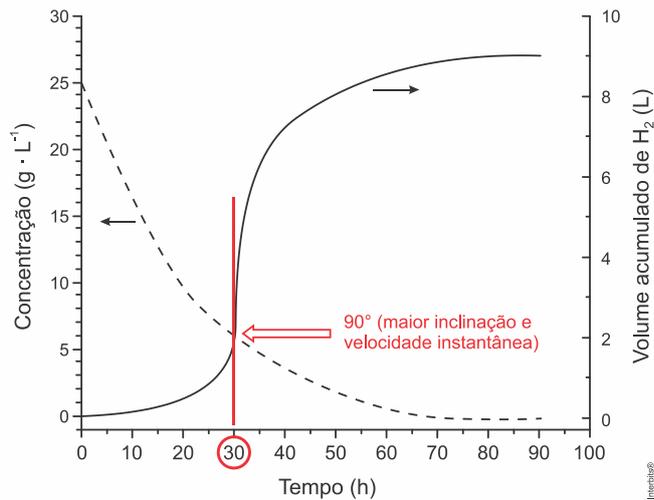
$$0,138 : 0,36 (\div 0,138) \Rightarrow 1 : 2,6$$

A proporção de 1 mol de $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$ para 2,6 mol de H_2 é mais próxima da proporção presente na equação 2:



Conclusão: o ácido que estava presente em maior concentração era o butanoico.

b) A velocidade instantânea da reação de formação de H_2 está relacionada com a inclinação da reta tangente à curva contínua no gráfico. Quanto maior a inclinação, maior a velocidade instantânea. De acordo com o gráfico 30 h após o início da fermentação a velocidade atingiu seu valor máximo.



Química 2 - Atomística

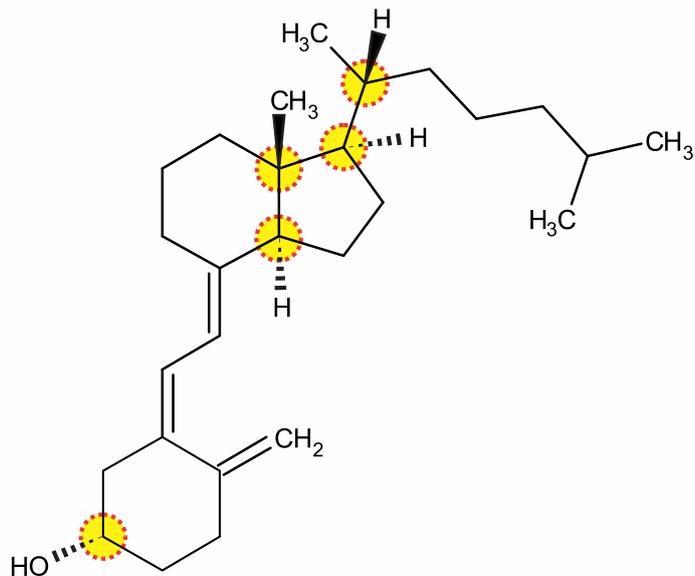
01

a) Cálculo de quanto vale cada U.I. de vitamina D_3 , em mg de colecalciferol:
 1.000 UI (Unidades Internacionais) — 1 mg de colecalciferol
 1 UI (Unidades Internacionais) — m_{mg}

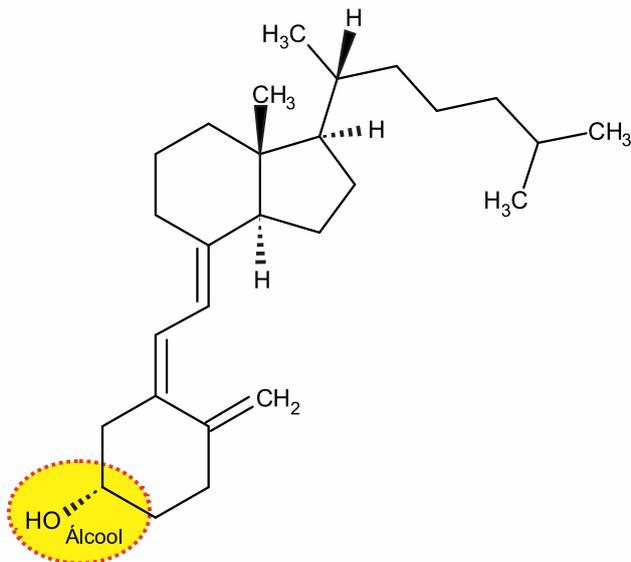
$$m_{\text{mg}} = \frac{1 \text{ UI} \times 1 \text{ mg}}{1.000 \text{ UI}}$$

$$m_{\text{mg}} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ mg}$$

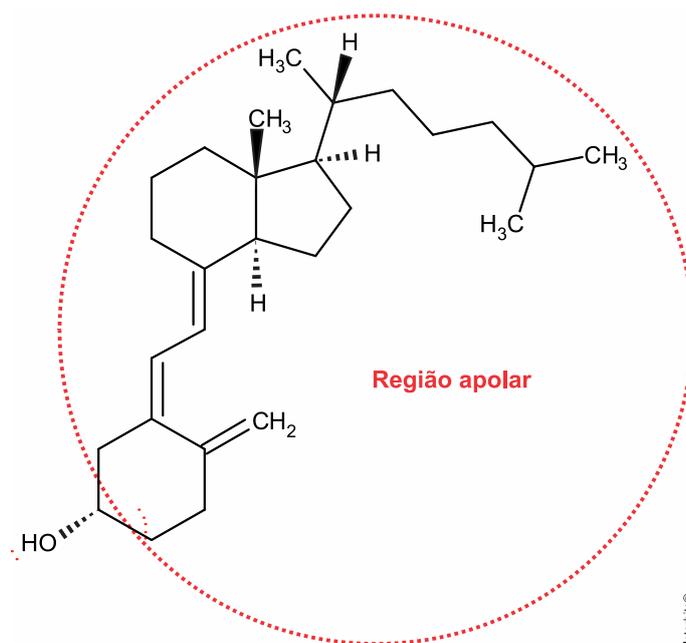
Indicação de um átomo de carbono quiral responsável pela atividade óptica observada na molécula (pode-se escolher um entre os cinco marcados com um círculo na figura a seguir):



- b) Álcool é a função orgânica oxigenada presente na estrutura da vitamina ^D₃ (coleciferol).



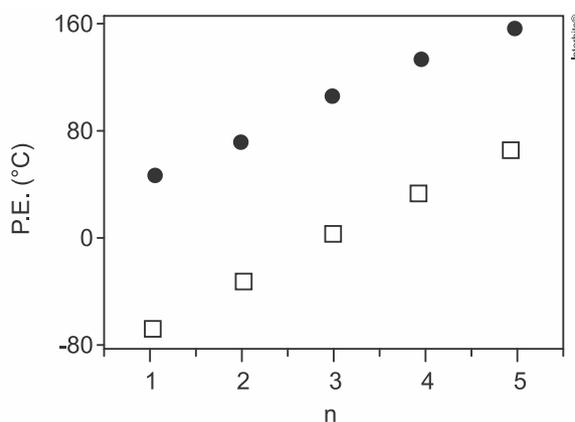
A vitamina ^D₃ é lipossolúvel, pois sua estrutura é predominantemente apolar:



02| E

Como o raio do iodo (5 camadas de valência; quinto período) é maior do que o raio do flúor (2 camadas de valência; segundo período), a molécula $C_nH_{2n+1}I$ (●) apresentará maior superfície de contato do que a molécula $C_nH_{2n+1}F$ (□) para um mesmo número de átomos de carbono. Quanto maior a superfície de contato, maior a atração intermolecular e maior a temperatura de ebulição.

Conclusão: (●) deverá estar acima de (□) no gráfico seguindo uma sequência crescente.



03|

a) A fórmula molecular do íon molecular de maior massa será composta pelo isótopo de bromo de maior massa (81) e pelo isótopo de cloro de maior massa (37): $^{12}C^{81}Br^{37}Cl^{19}F_2^+$.

b) Fórmulas moleculares, especificando os isótopos de Br e Cl presentes, para todos os íons de massa molecular 166 formados:

$$\begin{aligned}
 &^{12}\text{C}^x\text{Br}^y\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+ \\
 \text{M.M.} &= 12 + x + y + 2 \times 19 = 50 + x + y \\
 50 + x + y &= 166 \\
 x + y &= 116 \\
 79 + 37 &= 116 \Rightarrow ^{12}\text{C}^{79}\text{Br}^{37}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+ \\
 81 + 35 &= 116 \Rightarrow ^{12}\text{C}^{81}\text{Br}^{35}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+
 \end{aligned}$$

c) As possíveis fórmulas moleculares dos íons moleculares formados com os isótopos 79 e 81 do bromo e 35 e 37 do cloro podem ser representadas por:

$$\begin{aligned}
 &^{12}\text{C}^x\text{Br}^y\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+ \\
 ^{12}\text{C}^{79}\text{Br}^{35}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+ &= 12 + 79 + 35 + 2 \times 19 = 164 \\
 ^{12}\text{C}^{79}\text{Br}^{37}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+ &= 12 + 79 + 37 + 2 \times 19 = 166 \\
 ^{12}\text{C}^{81}\text{Br}^{35}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+ &= 12 + 81 + 35 + 2 \times 19 = 166 \\
 ^{12}\text{C}^{81}\text{Br}^{37}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+ &= 12 + 81 + 37 + 2 \times 19 = 168
 \end{aligned}$$

Analogamente às informações do enunciado da questão, vem:

^{79}Br e ^{81}Br : cada um com a probabilidade relativa de ocorrência de 50%.

^{35}Cl : probabilidade relativa de ocorrência de 75%.

^{37}Cl : probabilidade relativa de ocorrência de 25%.

Cátions – radicais	Massa molecular	Porcentagem do isótopo de cloro
$^{12}\text{C}^{79}\text{Br}^{35}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+$	164	75%
$^{12}\text{C}^{79}\text{Br}^{37}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+$	166	25%
$^{12}\text{C}^{81}\text{Br}^{35}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+$	166	75%
$^{12}\text{C}^{81}\text{Br}^{37}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+$	168	25%

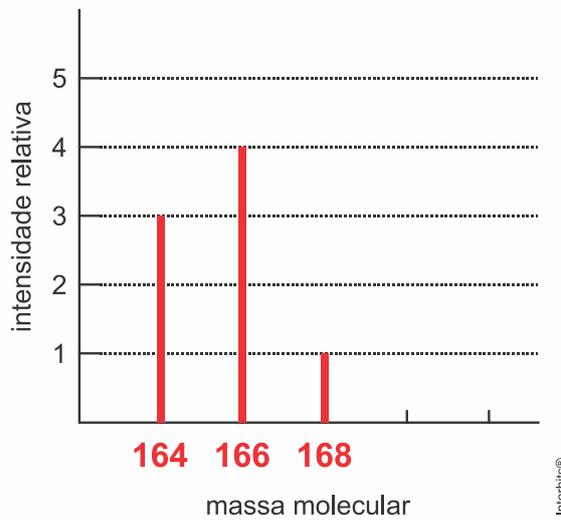
Cátions – radicais	Massa molecular	(Porcentagem do isótopo de cloro) ÷ 25%
$^{12}\text{C}^{79}\text{Br}^{35}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+$	164	$\left(\frac{75\%}{25\%}\right) = 3$
$^{12}\text{C}^{79}\text{Br}^{37}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+$	166	$\left(\frac{25\%}{25\%}\right) = 1$
$^{12}\text{C}^{81}\text{Br}^{35}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+$	166	$\left(\frac{75\%}{25\%}\right) = 3$
$^{12}\text{C}^{81}\text{Br}^{37}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+$	168	$\left(\frac{25\%}{25\%}\right) = 1$

} 1 + 3 = 4

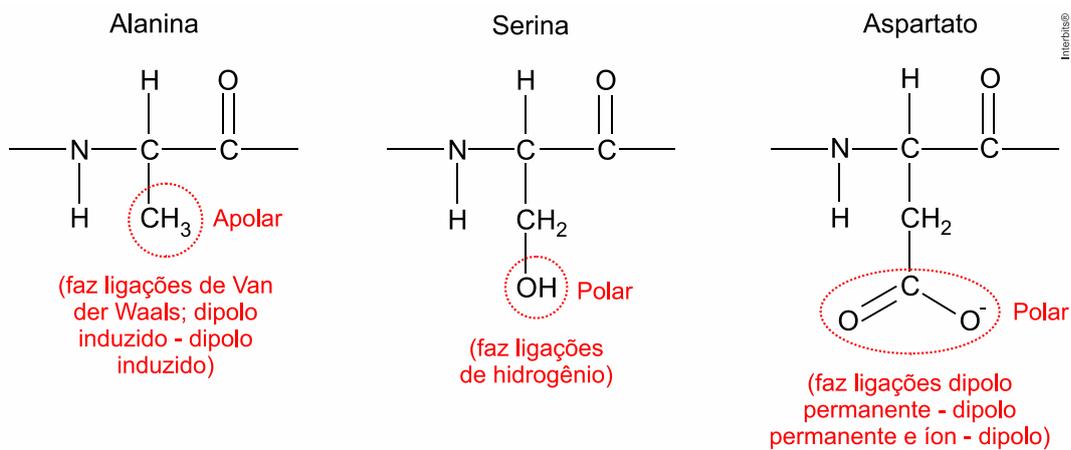
Conclusão:

Cátions – radicais	Massa molecular	Intensidade relativa
$^{12}\text{C}^{79}\text{Br}^{35}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+$	164	3
$^{12}\text{C}^{79}\text{Br}^{37}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+$	166	4
$^{12}\text{C}^{81}\text{Br}^{35}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+$	166	
$^{12}\text{C}^{81}\text{Br}^{37}\text{Cl}^{19}\text{F}_2^+$	168	1

De acordo com as massas obtidas (164, 166 e 168), o espectro obtido para a análise do halon-1211 poderia ser representado por:



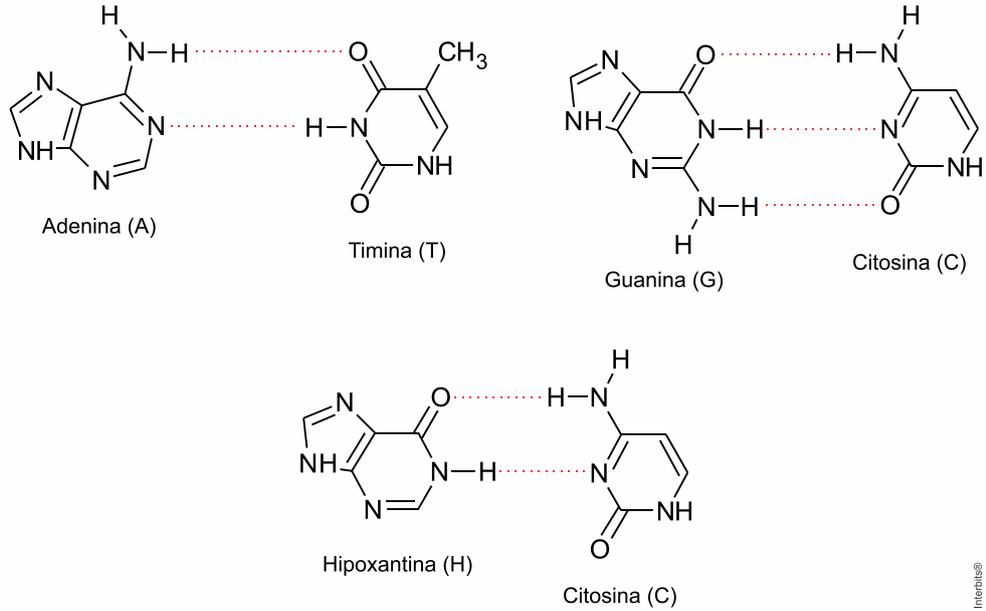
04| B



Conclusão: os radicais R1 e R2 (polares) constituem, respectivamente, os aminoácidos serina e aspartato.

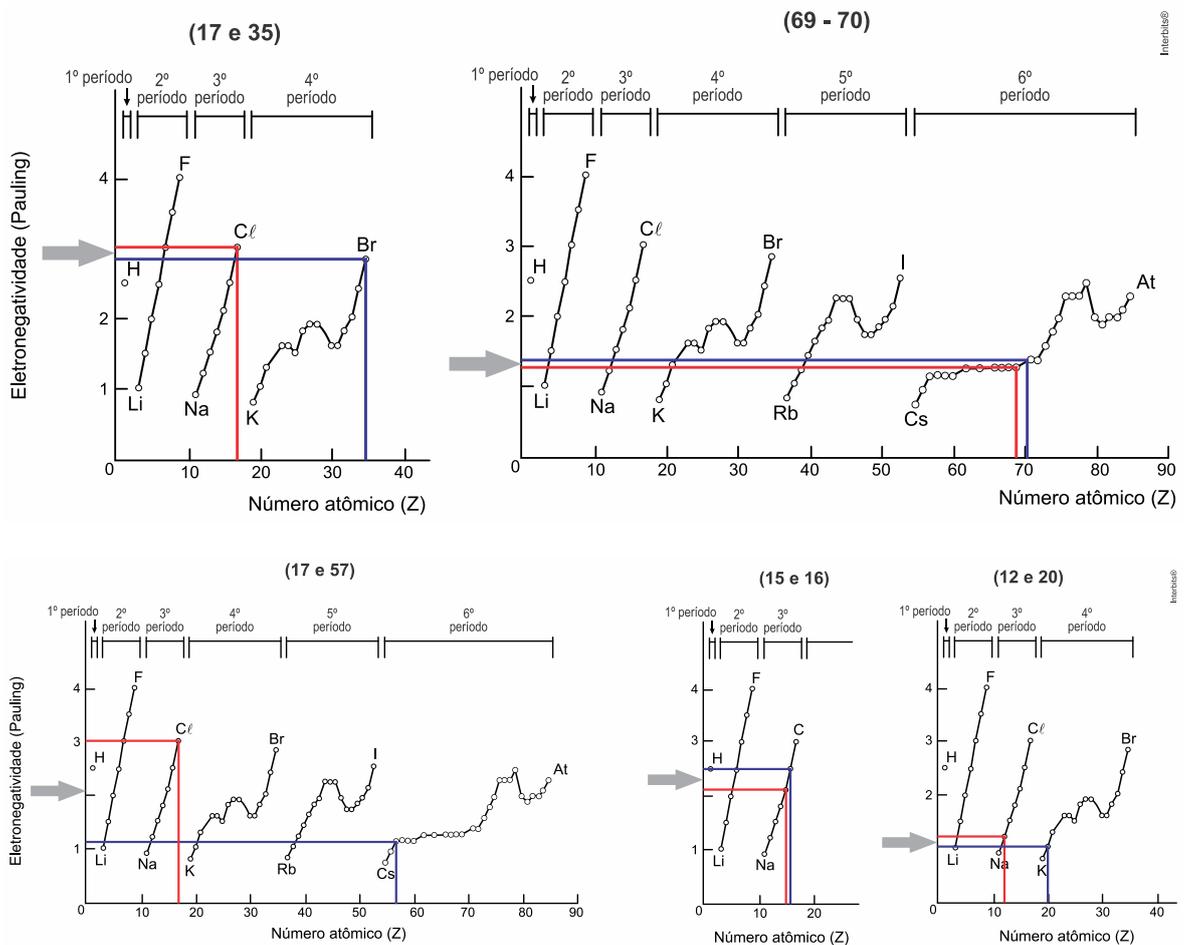
05| D

A hipoxantina (H) apresenta estrutura molecular semelhante à da guanina, ocorre um erro de pareamento entre bases, que passa a ser H-C em vez de A-T.



06 | C

Devem unir-se por ligação iônica, preferencialmente, elementos que apresentem a maior diferença de eletronegatividade. Neste caso os elementos com $Z = 17$ e $Z = 57$.



07|

a) A partir dos dados fornecidos na tabela:

Temperatura (K)	Constante de equilíbrio
300	$5,6 \times 10^9$
500	$7,4 \times 10^3$

$$K_{\text{equilíbrio}} = \frac{[P]}{[R]} \text{ (reação direta)}$$

$[P] > [R] \Rightarrow$ direita (maior valor da constante de equilíbrio)

$[P] < [R] \Rightarrow$ esquerda (menor valor da constante de equilíbrio)

Verifica-se que a constante de equilíbrio diminui ($5,6 \times 10^9 \rightarrow 7,4 \times 10^3$) com a elevação da temperatura (300 K \rightarrow 500 K).

Conclusão: o rendimento da reação direta diminui com a elevação da temperatura, conseqüentemente, trata-se de um processo exotérmico.

b) A forte interação entre o átomo de hidrogênio do álcool e o átomo de enxofre do ânion se deve ao fato de ocorrer uma interação do tipo dipolo-ânion, ou seja, o átomo de

hidrogênio ligado ao oxigênio “se comporta” com um próton (está polarizado; $\overset{\delta^-}{\text{O}}-\overset{\delta^+}{\text{H}}$) e atrai o par de elétrons presente no átomo de enxofre presente no ânion.

08| C

No procedimento adotado, o sólido deve ser dissolvido em um solvente aquecido, e a solução assim obtida deve ser resfriada, pois as impurezas mais solúveis à temperatura ambiente.

Os testes foram efetuados a quente, e a estudante descartou o uso do heptano (apolar). Conclui-se que, a quente, o heptano não dissolveu o ácido benzoico (molécula mista), nem as impurezas, ou seja, ocorreu a formação de um sistema heterogêneo.

Os testes foram efetuados à temperatura ambiente, e a estudante descartou o uso de etanol (polar). Conclui-se que, à temperatura ambiente, o etanol dissolveu tanto o ácido benzoico como as impurezas. Podemos inferir que, nestas condições, a água (mais polar) dissolveria as impurezas e formaria um sistema heterogêneo com o ácido benzoico que se dissolve bem em água quente.

09| C

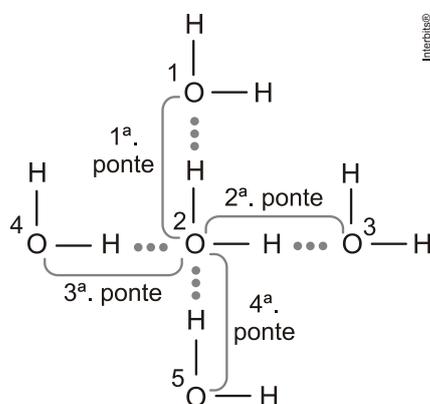
Os surfactantes diminuem a tensão superficial da água, pois são compostos formados por duas regiões distintas. Uma lipofílica que atrai moléculas apolares e uma hidrofílica que atrai moléculas polares.

10| D

A partir de 1L de água lançada em determinada nuvem é possível produzir o volume equivalente a 50 caminhões-pipa ($50 \times 10\text{m}^3 = 500.000\text{L}$) de água precipitada na forma de chuva, então:

1 L de água lançada — 500.000 L (chuva)
 300 L de água lançada — V_{chuva}
 $V_{\text{chuva}} = 150.000.000 \text{ L}$ (150 milhões de litros)

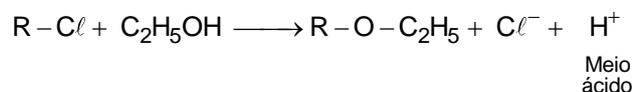
A força intermolecular envolvida na formação das gotas de chuva é a ligação de hidrogênio.



Química 3 – Química Geral

01|

a) Quando ocorre a reação do cloreto de alquila com o etanol, o meio fica ácido, como se pode perceber na reação fornecida no texto:

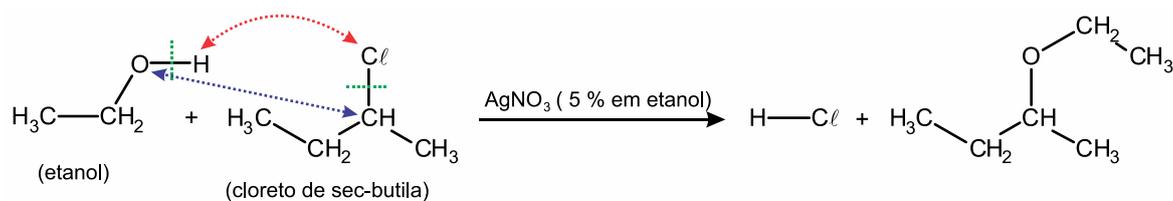


Consequentemente a cor do indicador ácido-base sofrerá alteração.

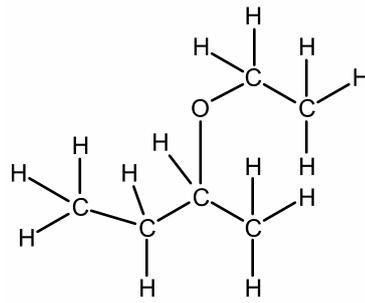
b) Tubo 3:

I - Etanol e indicador + cloreto de sec-butila
II - Vermelha
III - Precipitado branco e sobrenadante vermelho

Esquematizando a reação (I), vem:



Fórmula estrutural do produto orgânico (uma das possíveis):

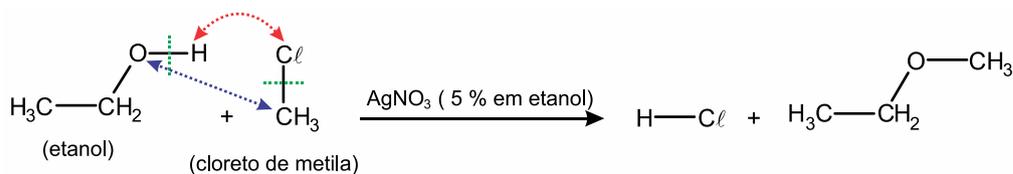


O HCl formado reagirá com o AgNO_3 : $\text{HCl} + \text{AgNO}_3 \longrightarrow \text{HNO}_3 + \text{AgCl} \downarrow$.

Fórmula do precipitado branco formado: AgCl (cloreto de prata).

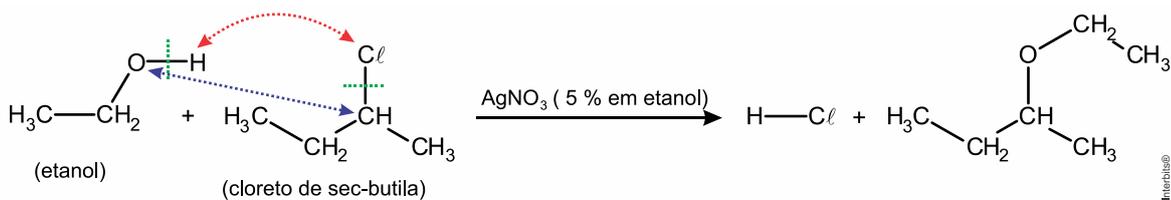
c) Tubo 1: III – Inalterado (etanol e indicador); coloração amarela ($\text{pH} > 5$).

Tubo 2: III – Ligeira turbidez (etanol e indicador + cloreto de metila); coloração levemente avermelhada (diminuição do pH).



A coloração levemente avermelhada indica que ocorreu uma formação de ácido menor do que nos meios de $\text{pH} < 4$ (coloração vermelha).

Tubo 3: III – Formação de precipitado branco e sobrenadante vermelho (etanol e indicador + cloreto de sec-butila); coloração vermelha ($\text{pH} < 4$).



Como o sobrenadante é vermelho, conclui-se que o pH é menor do que 4 ($\text{pH} < 4$), ou seja, ocorre a formação de uma quantidade maior de HCl . O cloreto de sec-butila é mais reativo do que o cloreto de metila.

Tubo 4: III – Inalterado (etanol e indicador + cloreto de terc-butila); coloração amarela.

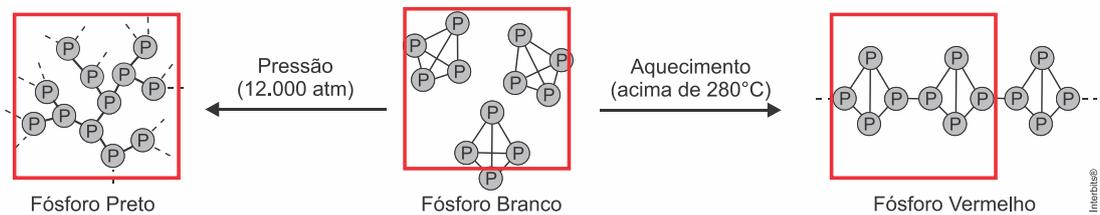
Conclusão: a cor amarela indica que, praticamente, não ocorreu alteração no valor do pH, ou seja, o cloreto de terc-butila é o composto menos reativo.

Ordem de reatividade dos três cloretos de alquila investigados no experimento:

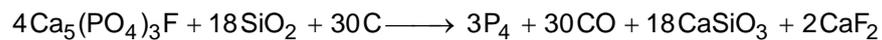
cloreto de sec-butila > cloreto de cloreto de metila > cloreto de terc-butila.

02|

- a) O fósforo preto terá maior densidade, pois para um mesmo volume, o número de átomos de fósforo será maior nesta variedade alotrópica submetida à maior pressão.



- b) Cálculo da massa total de fluorapatita usada como matéria prima nesse processo:



$$4 \times 504 \text{ g} \quad \text{-----} \quad 3 \times 124 \text{ g}$$

$$m_{\text{fluoroapatita}} \quad \text{-----} \quad 744.000 \text{ t}$$

$$m_{\text{fluoroapatita}} = \frac{4 \times 504 \text{ g} \times 744.000 \text{ t}}{3 \times 124 \text{ g}}$$

$$m_{\text{fluoroapatita}} = 4.032.000 \text{ t}$$

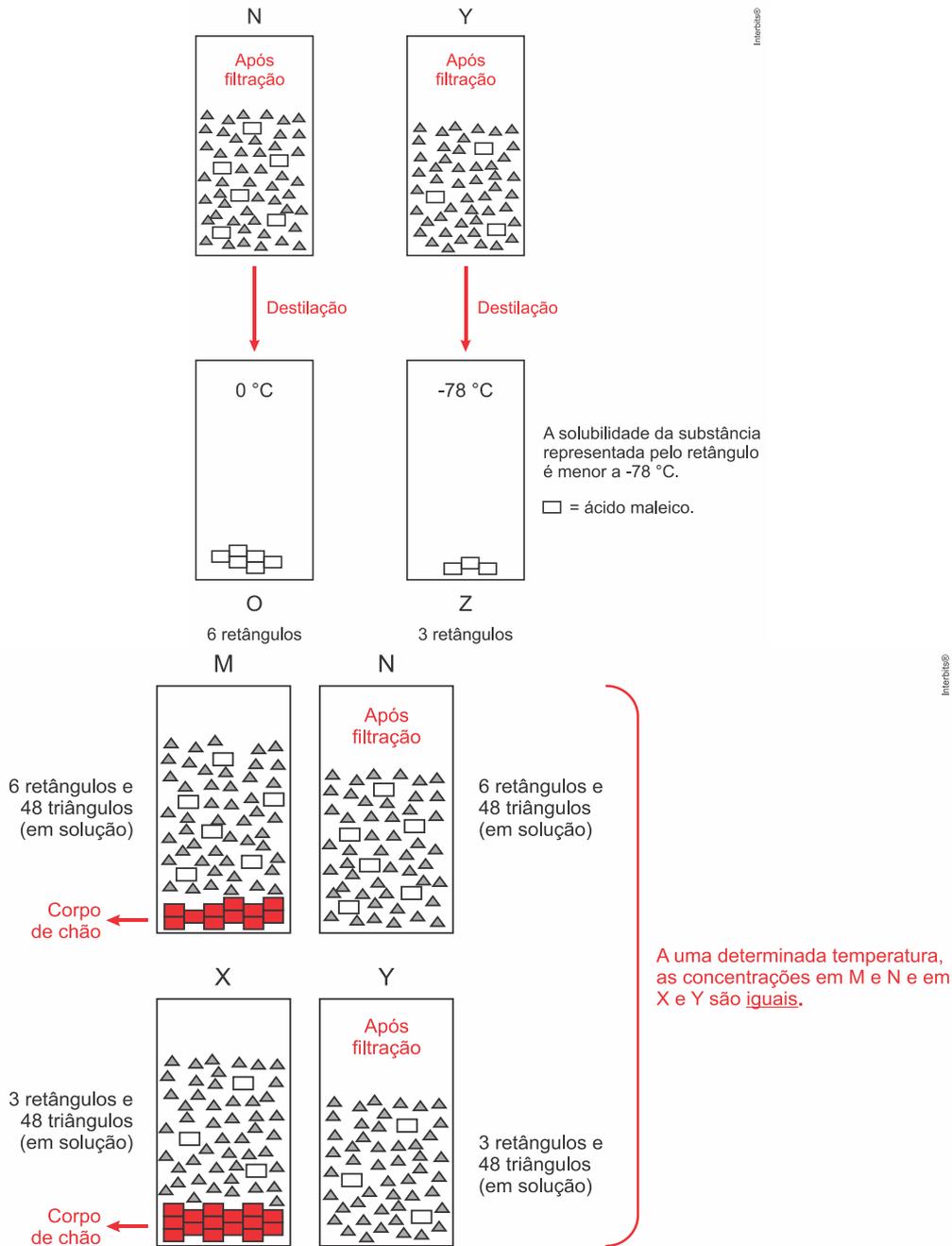
$$m_{\text{fluoroapatita}} \approx 4,0 \times 10^6 \text{ t}$$

- c) No fósforo preto e no fósforo vermelho as ligações são covalentes, ou seja, feita entre os átomos de fósforo (P) por compartilhamento de pares de elétrons.

No fósforo branco as ligações são intermoleculares, ou seja, feitas entre as moléculas. Como as moléculas de fósforo branco são apolares, as ligações intermoleculares são do tipo dipolo-induzido – dipolo induzido, mais fracas do que as ligações covalentes existentes entre os átomos de fósforo na variedade alotrópica preto e vermelho.

03| C

Como o ponto de ebulição da acetona (56 °C) é menor do que o do ácido maleico (202 °C), conclui-se que após a destilação, a acetona (substância mais volátil) é recolhida no condensador e que o resíduo sólido é do ácido maleico, ou seja, ele é a substância representada pelo retângulo.



Conclusão:

Tanto no recipiente M como no recipiente X, estão representadas soluções saturadas de ácido maleico cuja solubilidade diminui com a diminuição da temperatura. A uma determinada temperatura, as concentrações em M e N e em X e Y são iguais. Em diferentes instantes, as moléculas representadas por um retângulo pertencem a um composto que pode estar dissolvido (em solução) ou no estado sólido (corpo de chão).

$$\% \text{ de s\u00f3dio no glutamato monoss\u00f3dico} = \frac{23 \text{ g}}{169 \text{ g}} = 0,136$$

$$\% \text{ de s\u00f3dio no glutamato monoss\u00f3dico} = 13,6\%$$

$$\text{NaCl} = (\text{cloreto de s\u00f3dio}) = 23 + 35,5 = 58,5$$

$$\% \text{ de s\u00f3dio no cloreto de s\u00f3dio} = \frac{23 \text{ g}}{58,5 \text{ g}} = 0,393$$

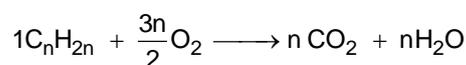
$$\% \text{ de s\u00f3dio no cloreto de s\u00f3dio} = 39,3\%$$

$$\frac{13,6\%}{39,3\%} \approx \frac{1}{3}$$

“A porcentagem em massa de s\u00f3dio no real\u00e7ador (glutamato) \u00e9 de 13,6%.”; “Por outro lado, o real\u00e7ador s\u00f3 conta com cerca de um ter\u00e7o do nutriente que \u00e9 encontrado no sal de cozinha.”.

05| A

$$\text{CO}_2 = 12 + 2 \times 16 = 44$$



$$(12n + 2n) \text{ g} \text{ ————— } 44 \text{ n g}$$

$$m_{\text{C}_n\text{H}_{2n}} \text{ ————— } 11 \times 10^6 \text{ t}$$

$$m_{\text{C}_n\text{H}_{2n}} = \frac{14 \text{ n g} \times 11 \times 10^6 \text{ t}}{44 \text{ n g}}$$

$$m_{\text{C}_n\text{H}_{2n}} = 3,5 \times 10^6 \text{ t}$$

06| C

$$m_{\text{O}_2 \text{ acrescentada}} = 1,20 \text{ g}$$



$$132 \text{ g} \text{ ————— } \frac{1}{2} \times 32 \text{ g}$$

$$p \times 19,80 \text{ g} \text{ ————— } 1,20 \text{ g}$$

$$p = \frac{132 \text{ g} \times 1,20 \text{ g}}{\left(\frac{1}{2} \times 32 \text{ g}\right) \times 19,80 \text{ g}}$$

$$p = 0,50 = 50\%$$

07| A

$$m_{\text{H}_2\text{O(v)}} = \frac{9}{100} \times 4,5 \text{ mg} = 0,405 \times 10^{-3} \text{ g}$$

$$M_{\text{H}_2\text{O}} = (2 \times 1 + 16) \text{ g/mol} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$V = 0,1 \text{ mL} = 0,1 \times 10^{-3} \text{ L}$$

$$R = 0,082 \text{ L} \cdot \text{atm} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$T = 177 + 273 = 450 \text{ K}$$

$$P \times V = n \times R \times T$$

$$P \times V = \frac{m}{M} \times R \times T$$

$$P_{\text{final}} \times 0,1 \times 10^{-3} \text{ L} = \frac{0,405 \times 10^{-3} \text{ g}}{18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} \times 0,082 \text{ L} \cdot \text{atm} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 450 \text{ K}$$

$$P_{\text{final}} = 8,30025 \text{ atm} \approx 8,3 \text{ atm}$$

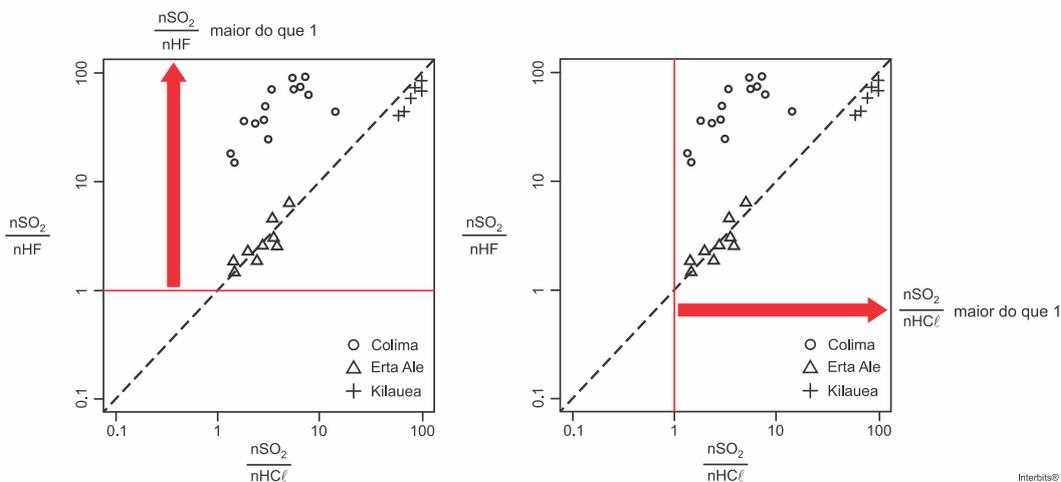
A associação correta entre região do milho e P_{final} é dada por:

A = endosperma e $P_{\text{final}} = 8,3 \text{ atm}$.

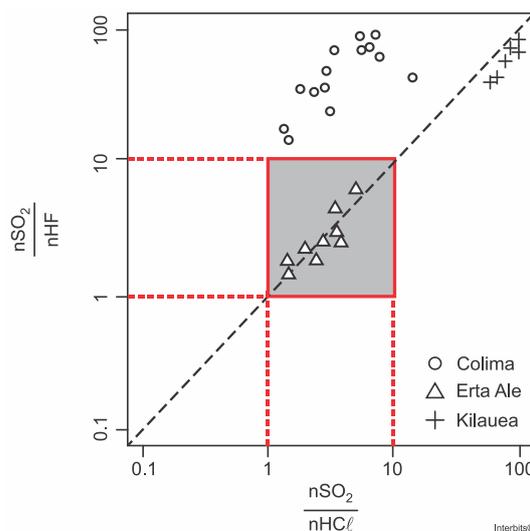
08 | C

De acordo com a figura, em relação às quantidades de gases dissolvidos no magma, é correto afirmar que as concentrações de SO_2 são maiores que as de HF e de HCl nos três vulcões, pois as relações molares estão indicadas acima de 1 no gráfico.

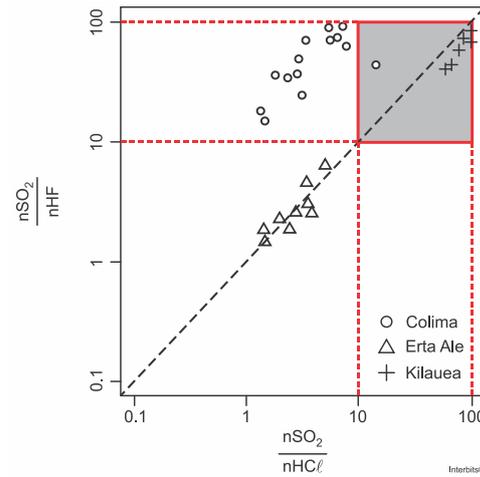
$$\frac{n \text{SO}_2}{n \text{HF}} > 1 \quad \text{e} \quad \frac{n \text{SO}_2}{n \text{HCl}} > 1$$



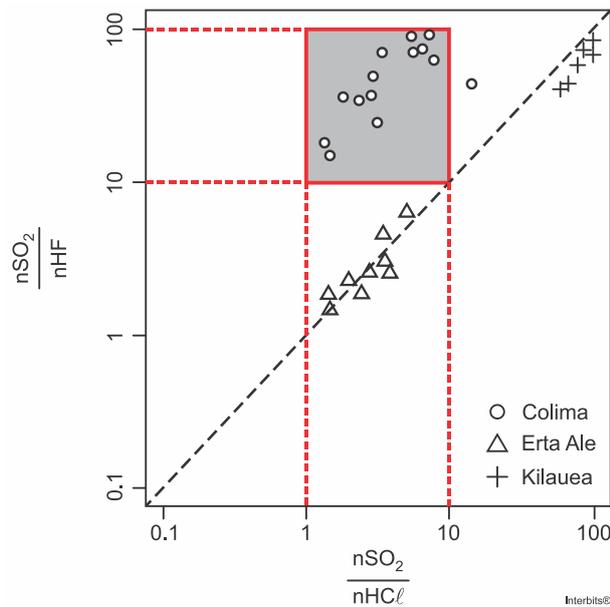
Para o vulcão Erta Ale $\frac{n \text{SO}_2}{n \text{HF}}$ e $\frac{n \text{SO}_2}{n \text{HCl}}$ estão entre 1 e 10. Logo, as concentrações de HF e HCl são aproximadamente iguais.



Para o vulcão Kilauea $\frac{n \text{SO}_2}{n \text{HF}}$ e $\frac{n \text{SO}_2}{n \text{HCl}}$ estão entre 10 e 100. Logo, as concentrações de HF e HCl são aproximadamente iguais.

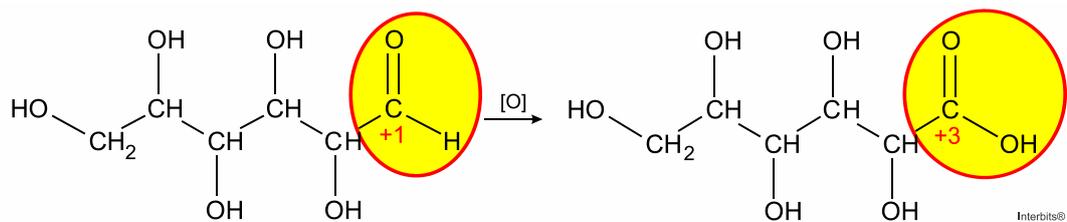


Para o vulcão Colima $\frac{nSO_2}{nHF}$ está entre 10 e 100, sendo que $\frac{nSO_2}{nHCl}$ está entre 1 e 10, ou seja, não coincidem. Logo as concentrações de HF e HCl não são aproximadamente iguais.

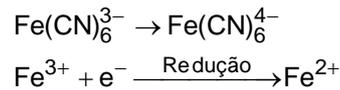
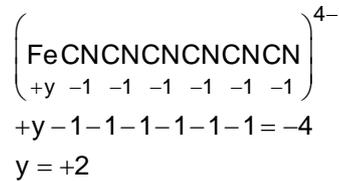
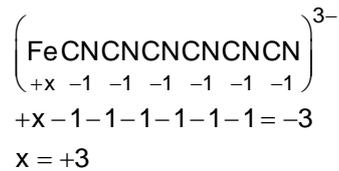


09| B

A glicose sofre oxidação (a carbonila é transformada em carboxila):



No hexacianoferrato (III) ocorre uma reação de redução:



10| B

Assim, 163mL de gasolina liberam 5100kJ. Calculamos a energia liberada por 1L (1000mL) de gasolina:

$$\begin{array}{l} 163\text{mL} \text{-----} 5100\text{kJ} \\ 1000\text{mL} \text{-----} X \\ X = 5100 \cdot 1000 / 163 = 31288\text{kJ/L} \approx 30000\text{kJ/L} \end{array}$$

A combustão do etanol se dá por:
 $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH(l)} + 3\text{O}_2\text{(g)} \rightarrow 2\text{CO}_2\text{(g)} + 3\text{H}_2\text{O(g)} + 5100\text{kJ}$

Então a queima de cada mol de etanol libera 1200kJ
 A massa de 1mol de etanol é de 46g (massa molar)
 Então 46g de etanol liberam 1200kJ
 A densidade do etanol é de 0,8g/mL
 $d = m/V \rightarrow V = m/d$
 $V = 46/0,8 = 57,5\text{mL}$

Assim, 57,5mL de etanol liberam 1200kJ. Calculamos a energia liberada por 1L (1000mL) de etanol:

$$\begin{array}{l} 57,5\text{mL} \text{-----} 1200\text{kJ} \\ 1000\text{mL} \text{-----} X \\ X = 1200 \cdot 1000 / 57,5 = 20870\text{kJ/L} \approx 20000\text{kJ/L} \end{array}$$

Agora vamos considerar que na viagem tenha sido gasto 30000kJ de energia. Para isso, precisamos de 1L de gasolina, ou 1,5L de etanol.

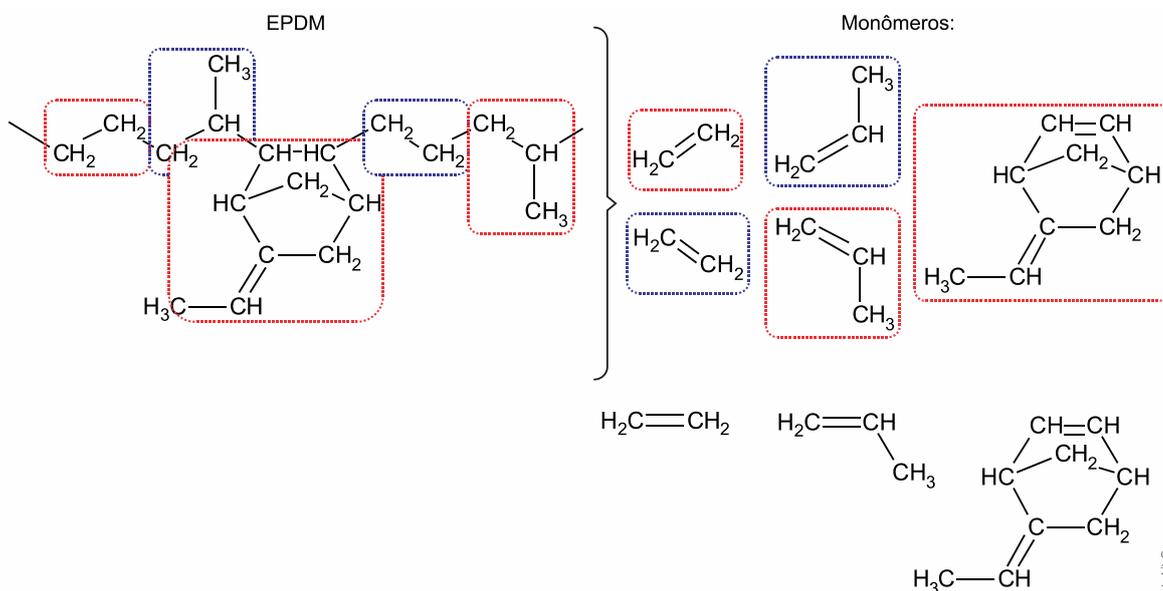
Então para ser indiferente em termos econômicos, o preço de 1L de gasolina deverá ser igual ao preço de 1,5L de etanol.
 Vamos supor que G seja o preço por litro de gasolina e E seja o preço por litro de etanol. Então temos que:
 $1 \cdot G = 1,5 \cdot E \rightarrow G = (3/2) \cdot E$

O que se pede é o quociente entre preço do litro de álcool (E) e do litro de gasolina (G), ou seja, pede E/G
 Então:
 $G = (3/2) \cdot E$
 $E/G = 2/3$

Química 4 – Química Orgânica

01| D

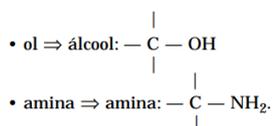
O polímero EPDM é obtido por adição, então:



02|

a) Pela análise do nome do descongestionante:
fenilpropanolamina,

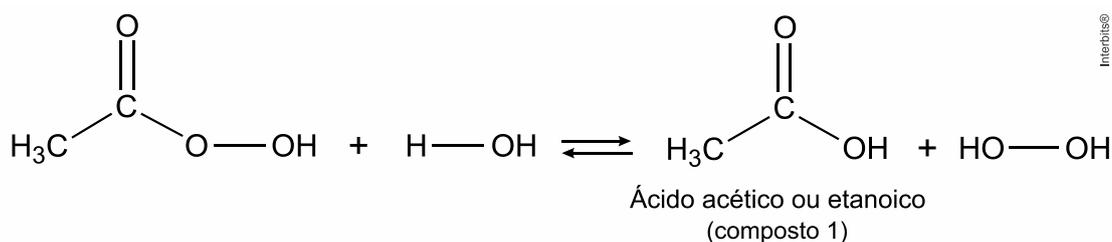
observamos a presença de duas funções orgânicas:



b) O nome químico da substância iônica dissolvida no soro fisiológico é **cloreto de sódio**, e sua fórmula pode ser representada por **NaCl**.

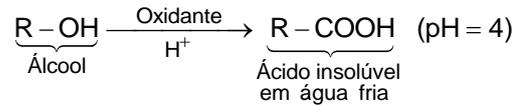
03| E

O composto 1 formado a reação descrita no enunciado é o ácido acético ou etanoico presente no vinagre.



04 | B

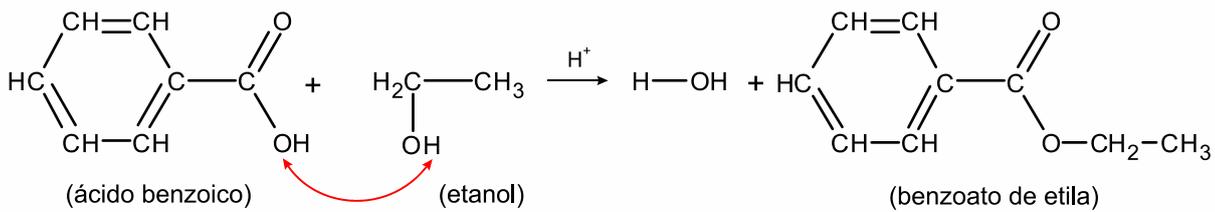
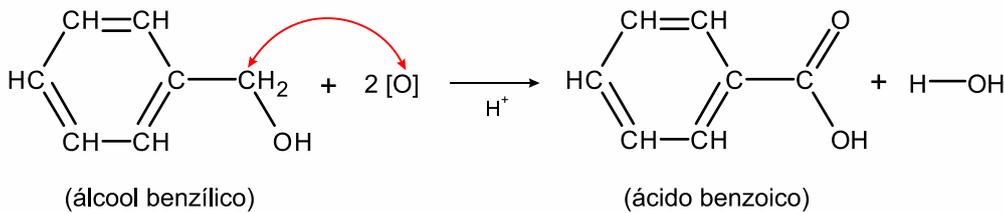
[I] Trata-se de uma oxidação em meio ácido.



[II] Tem-se uma esterificação.

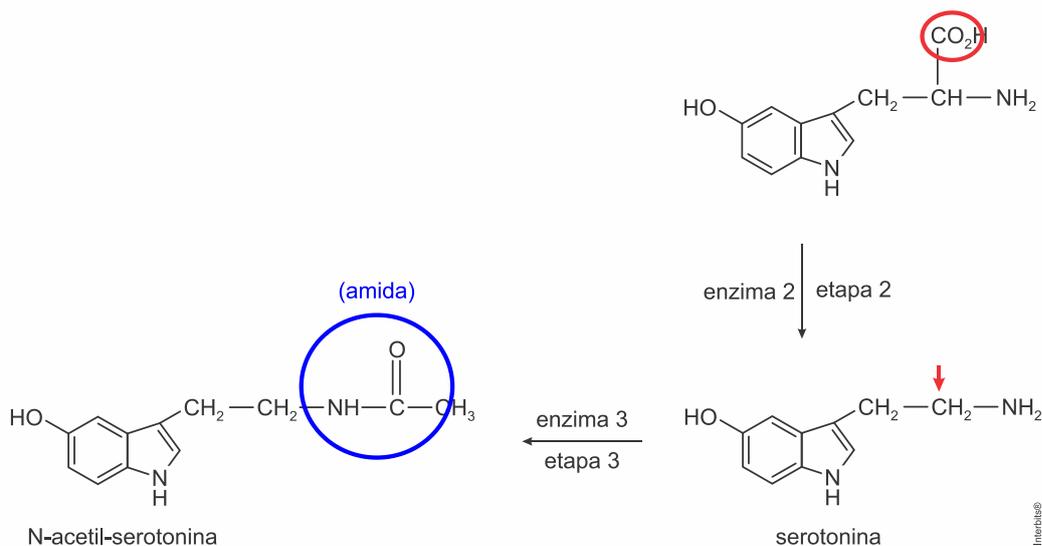


Então:



05 | A

[I] Correta. Na etapa 2, há perda de dióxido de carbono e, na etapa 3, a serotonina é transformada em uma amida.



[II] Correta. A manipulação de objetos que emitem luz, como celulares e tablets, pode interromper ou tornar muito lento o processo de transformação da serotonina em N-acetil-serotonina já que sendo que a enzima 3 é degradada em presença de luz.

[III] Incorreta. De acordo com o texto, o hormônio melatonina é sintetizado a partir do aminoácido triptofano e é responsável pela sensação de sonolência. Logo, o aumento da concentração de triptofano na corrente sanguínea pode fazer com que a pessoa adormeça mais rapidamente ao anoitecer.

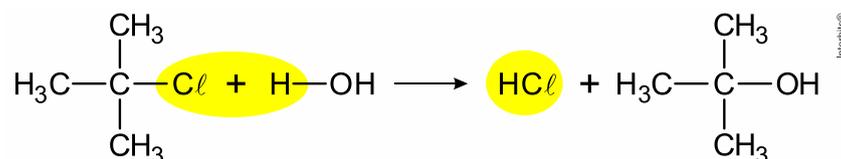
06| D

$$C_5H_8 = 5 \times 12 \text{ Da} + 8 \times 1 \text{ Da} = 68 \text{ Da}$$

$$\frac{\text{Massa total do polímero}}{\text{Massa de um monômero}} = \frac{1.310 \times 10^3 \text{ Da}}{68 \text{ Da}} = 19,26 \times 10^3 \approx 19.000 \text{ monômeros}$$

07|

a) Equação química que representa a reação de hidrólise do cloreto de terc-butila:

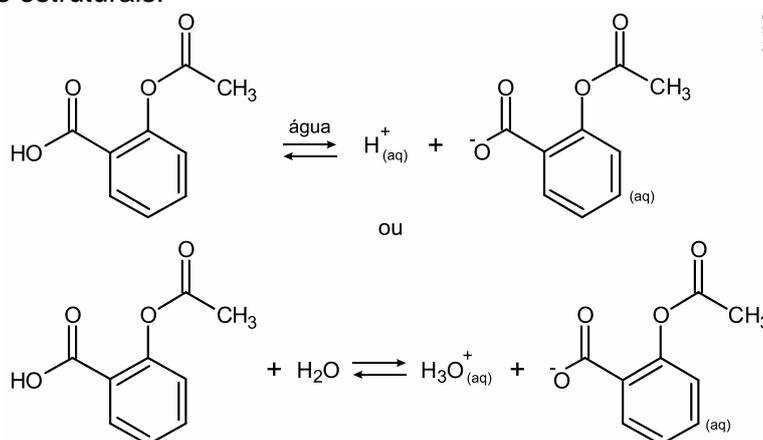


b) Na reação ocorre a formação de HCl , que na presença de água, ao sofrer ionização produz cátions H^+ aumentando a acidez do meio, conseqüentemente o pH diminui provocando a mudança de cor no indicador (esverdeado \rightarrow amarelo \rightarrow laranja).

c) Primeiramente, adicionou-se 1 mL do cloreto de terc-butila a uma solução contendo 60% de acetona e 40% de água. Depois, o cloreto de terc-butila foi solubilizado em uma mistura contendo 70% de acetona e 30% de água, em volume. Neste segundo caso o volume de água diminuiu, conseqüentemente a velocidade de reação de hidrólise, também, pois a interação entre os reagentes diminuiu, conseqüentemente o tempo de reação aumentou.

08|

a) Equação química que representa a ionização do ácido acetilsalicílico em meio aquoso, utilizando fórmulas estruturais:



b) Expressão da constante de equilíbrio para a ionização do ácido acetilsalicílico. Utilizando o símbolo AA para a forma não ionizada e o símbolo AA⁻ para a forma ionizada.

$$K_{\text{equilíbrio}} = \frac{[\text{H}^+][\text{AA}^-]}{[\text{AA}]} \quad \text{ou} \quad K_{\text{equilíbrio}} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{AA}^-]}{[\text{AA}]}$$

c) Considerando um comprimido de aspirina contendo 540 mg (540×10^{-3} g) de ácido acetilsalicílico, totalmente dissolvido em água, sendo o volume da solução 1,5 L, vem:

$$M_{\text{C}_9\text{H}_8\text{O}_4} = 180 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

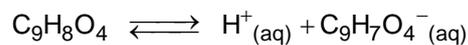
$$n_{\text{C}_9\text{H}_8\text{O}_4} = \frac{m_{\text{C}_9\text{H}_8\text{O}_4}}{M_{\text{C}_9\text{H}_8\text{O}_4}} = \frac{540 \times 10^{-3} \text{ g}}{180 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

$$n_{\text{C}_9\text{H}_8\text{O}_4} = 3 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

$$[\text{C}_9\text{H}_8\text{O}_4] = \frac{n_{\text{C}_9\text{H}_8\text{O}_4}}{V} = \frac{3 \times 10^{-3} \text{ mol}}{1,5 \text{ L}}$$

$$[\text{C}_9\text{H}_8\text{O}_4] = 2 \times 10^{-3} \text{ mol/L}$$

$$K_{\text{equilíbrio}} = 3,2 \times 10^{-4}$$



$2 \times 10^{-3} \text{ mol/L}$	0	0	(início)
$-x$	$+x$	$+x$	(durante)
$(2 \times 10^{-3} - x)$	$+x$	$+x$	(equilíbrio)
	$[\text{H}^+]$		

$$K_{\text{equilíbrio}} = \frac{x \times x}{(2 \times 10^{-3} - x)} \approx 2 \times 10^{-3} \text{ mol/L}$$

$$3,2 \times 10^{-4} = \frac{x^2}{2 \times 10^{-3}} \Rightarrow x = \sqrt{3,2 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{-3}}$$

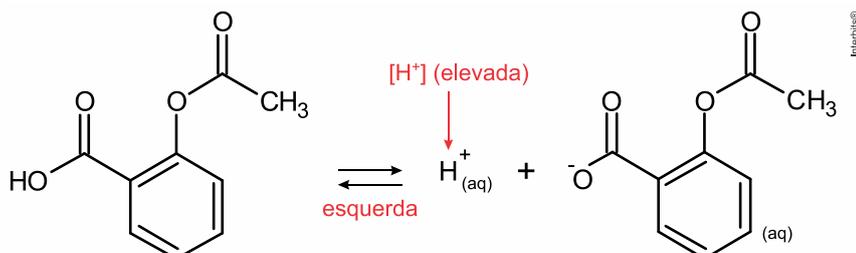
$$x = \sqrt{64 \times 10^{-8}} = 8 \times 10^{-4} \text{ mol/L}$$

$$[\text{H}^+] = 8 \times 10^{-4} \text{ mol/L}$$

a) A absorção do fármaco será eficiente.

O pH do suco gástrico é ácido, varia entre 1,2 e 3,0.

O fármaco (AA) é absorvido de modo mais eficiente se o equilíbrio, descrito a seguir, estiver deslocado para a esquerda, ou seja, se a forma não ionizada predominar.



03 | C

Seis combinações possíveis para os três aminoácidos (sem coincidência):

Lisina – Glicina – Fenilalanina

Lisina – Fenilalanina – Glicina

Glicina – Lisina – Fenilalanina

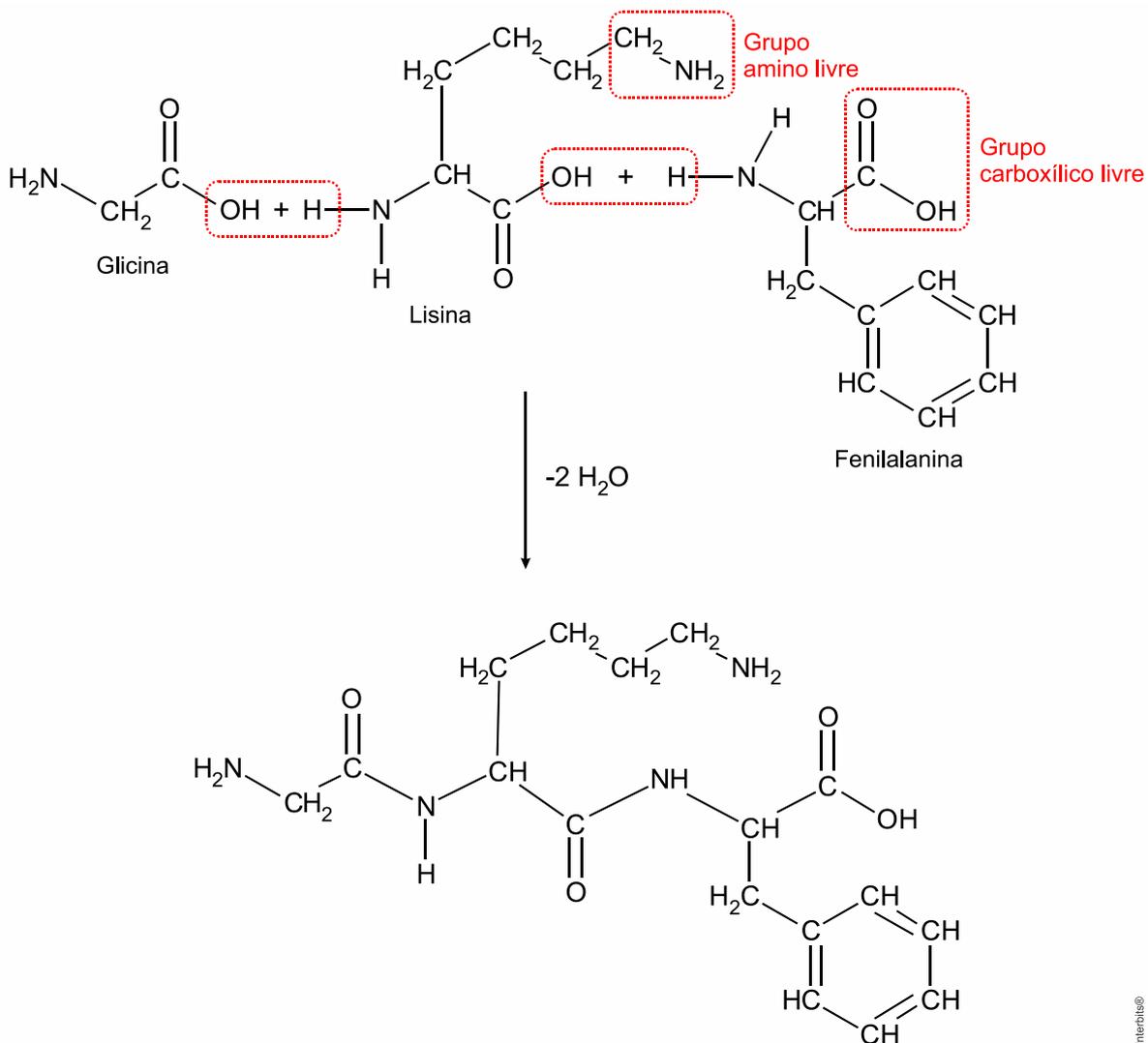
Glicina – Fenilalanina – Lisina

Fenilalanina – Lisina – Glicina

Fenilalanina – Glicina – Lisina

De acordo com o enunciado, a carboxipeptidase, quebra mais rapidamente a ligação peptídica entre o aminoácido que tem um grupo carboxílico livre e o seguinte e o tratamento com outra enzima, uma aminopeptidase, quebra, mais rapidamente, a ligação peptídica entre o aminoácido que tem um grupo amino livre e o anterior.

A figura que apresenta a descrição do texto pode ser obtida por:



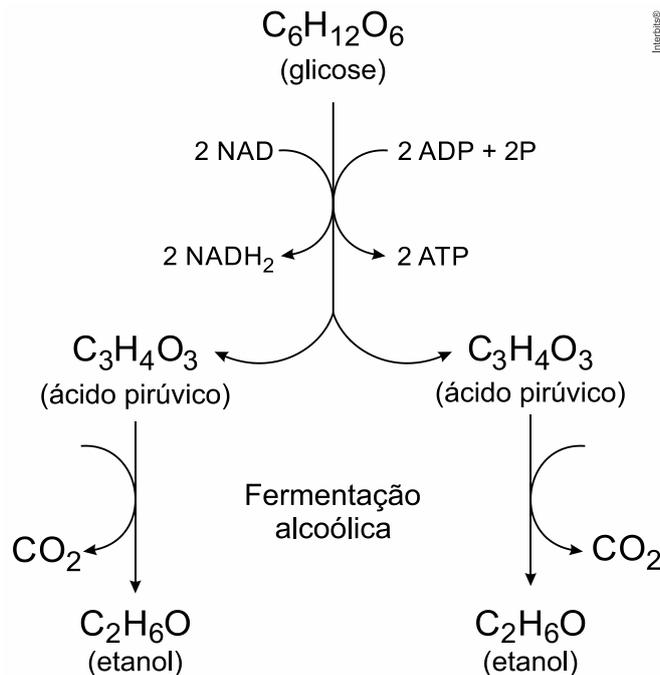
Interbits®

04| B

[I] Incorreta: O hidrogenocarbonato de sódio, presente no fermento químico se decompõe formando carbonato de sódio (Na_2CO_3), água e dióxido de carbono. Já o fermento biológico reage com os carboidratos presentes nas massas e o gás carbônico é liberado no processo de fermentação.

[II] Correta: O hidrogenocarbonato de sódio, presente no fermento químico, pode se decompor com o aquecimento: $2 \text{NaHCO}_3 \xrightarrow{\Delta} \text{Na}_2\text{CO}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2$.

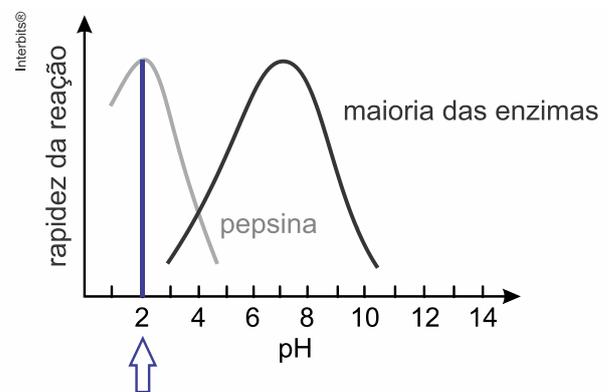
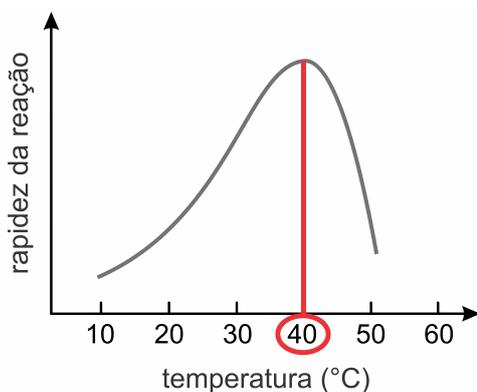
[III] Correta:



[IV] Incorreta: A massa com fermento biológico (leveduras) deverá “crescer” fora do forno, ou seja, não há a necessidade de temperaturas elevadas.

05| C

A partir da análise dos gráficos, vem:



$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log[\text{H}^+] \\ 2 &= -\log[\text{H}^+] \\ [\text{H}^+] &= 10^{-2} \text{ mol/L} \\ [\text{HCl}] &= 10^{-2} \text{ mol/L} \end{aligned}$$

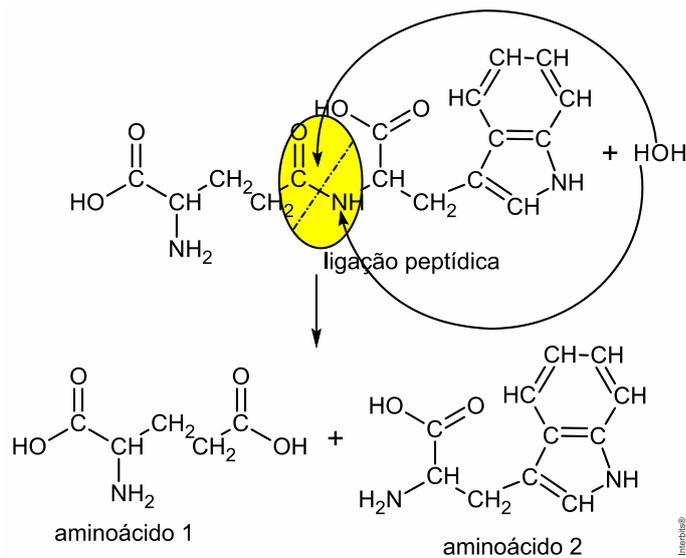
Conclusão: a albumina é transformada mais rapidamente a 40°C e solução de HCl 10^{-2} mol/L .

06|

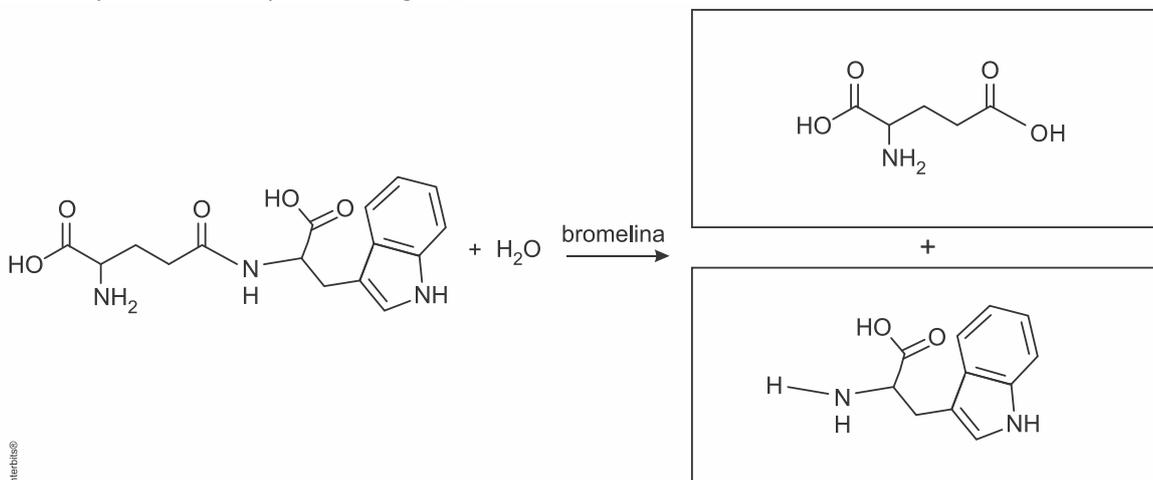
a) De acordo com o texto fornecido no enunciado, a hidrólise dos polipeptídeos pode ser catalisada por enzimas, como a bromelina, presente no abacaxi. No experimento 3 o reagente utilizado foi o extrato de abacaxi previamente fervido e neste caso ocorreu a gelatinização. Isto significa que a hidrólise não foi possível, ou seja, a fervura degradou a bromelina que não atuou no processo.

b) De acordo com o enunciado, na hidrólise de peptídeos, ocorre a ruptura das ligações peptídicas. No caso de um dipeptídeo, sua hidrólise resulta em dois aminoácidos.

Então,



Completando o esquema da figura, vem:

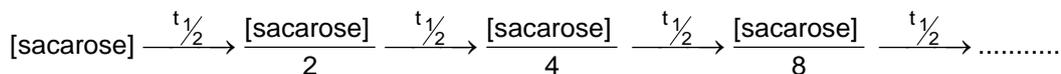


07|

Teremos:

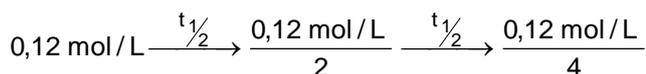
[sacarose]: concentração molar da sacarose

$t_{1/2}$: tempo de meia-vida (tempo que demora para metade do reagente reagir)



tempo de reação = 20 h

$[\text{sacarose}]_{\text{inicial}} = 0,12 \text{ mol/L}$



$$2 \times t_{1/2} = 20 \text{ h}$$

$$t_{1/2} = 10 \text{ h}$$



Cálculo da velocidade média de consumo da sacarose, em $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$, no intervalo entre 600 min ($10 \times 60 \text{ min} = 10 \text{ h}$) e 1200 min ($20 \times 60 \text{ min} = 20 \text{ h}$):

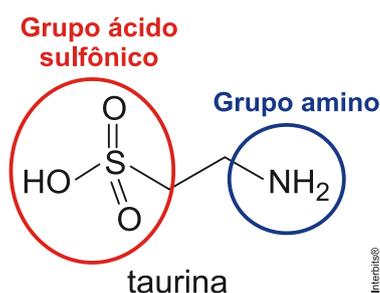
$$v_{\text{média}} = \frac{|\Delta[\text{sacarose}]|}{\Delta t}$$

$$v_{\text{média}} = \frac{|0,03 \text{ mol/L} - 0,06 \text{ mol/L}|}{1200 \text{ min} - 600 \text{ min}} = \left| -5 \times 10^{-5} \right| \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$v_{\text{média}} = 5 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

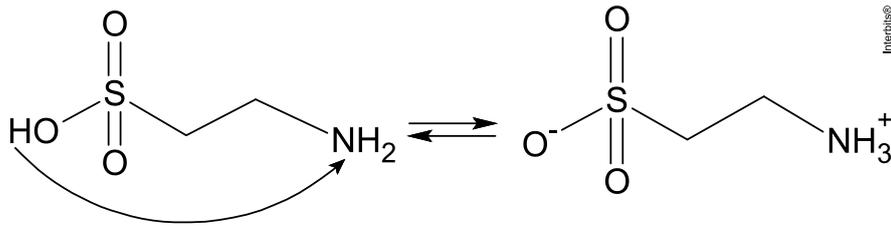
08|

Um aminoácido possui o grupo amino e o grupo carboxila. Percebe-se pela análise da fórmula da taurina que esta molécula possui o grupo amino e o grupo (ácido) sulfônico.



Por isso, rigorosamente não pode ser classificada como um aminoácido.

Equação que representa essa dissociação em água com pH igual a 7:



09|

a) Cloreto de cálcio di-hidratado: $\text{CaCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} = 147 \text{ g/mol}$.

A maturação e o amaciamento da carne bovina podem ser conseguidos pela adição de uma solução de cloreto de cálcio di-hidratado na concentração de 0,18 mol por litro, então:

$$\begin{aligned} 50 \text{ mL} &= 0,05 \text{ L} \\ 0,18 \text{ mol} &\text{ ————— } 1 \text{ L} \\ n &\text{ ————— } 0,05 \text{ L} \\ n &= 0,009 \text{ mol} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 147 \text{ g} &\text{ ————— } 1 \text{ mol} \\ m_{\text{CaCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}} &\text{ ————— } 0,009 \text{ mol} \\ m_{\text{CaCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}} &= 1,323 \text{ g} \end{aligned}$$

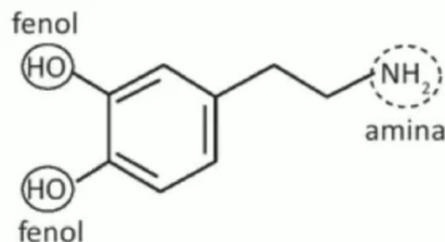
b) Teremos:

Cloreto de cálcio di-hidratado : $\text{CaCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$.
 Cloreto de cálcio anidro : CaCl_2 .

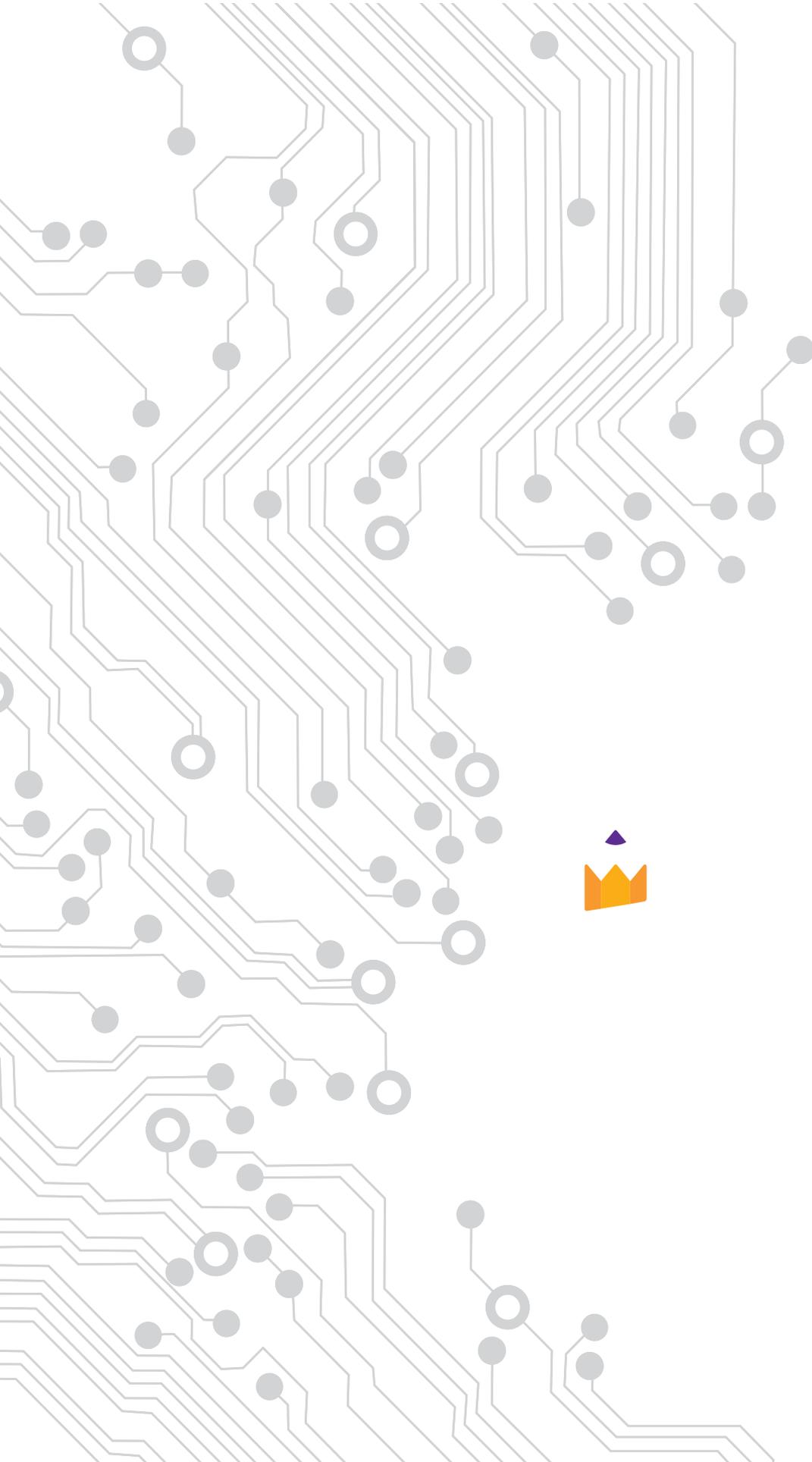
Como as concentrações das soluções são as mesmas, a proporção molar também, ou seja, as soluções apresentam a mesma concentração de íons cálcio (Ca^{2+}), portanto o resultado obtido no processo de maturação seria o mesmo.

10|

A substância X representada apresenta em sua fórmula estrutural as funções amina e fenol.



A miopia ocorre quando o comprimento físico do olho é maior do que o comprimento óptico, ou seja, a imagem é formada antes da retina como mostra a figura III. Logo, as lacunas serão preenchidas respectivamente por "a amina e III."



grupopreparaenem



Preparaenem_Cope



PreparaEnem

Rua 36, nº 149, Setor Marista | 62 3877 3223

www.grupopreparaenem.com.br

