DETERMINANTES 20

A toda matriz quadrada pode ser associado um número real, chamado determinante, obtido a partir de certas regras.

Estudaremos a utilidade dos determinantes no próximo capítulo.

Definição e regras

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Chama-se determinante da matriz A, e se indica por det A, o número obtido a partir de operações entre os elementos de A, de modo que:

- Se A é de ordem $n = 1$, então det A é o único elemento de A.

  Vejamos alguns exemplos:

  - $A = (5) \Rightarrow \det A = 5$
  - $B = (-3) \Rightarrow \det B = -3$
  - $C = \left(\frac{2}{7}\right) \Rightarrow \det C = \frac{2}{7}$

- Se A é de ordem $n = 2$, então det A é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal de A e o produto dos elementos de sua diagonal secundária.

  Vejamos alguns exemplos:

  - $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

    $\det A = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 6 = 1$
  - $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

    $\det B = 5 \cdot (-1) - (-2) \cdot 4 = -5 + 8 = 3$
  - $C = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

    $\det C = 6 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot (-4) = 0 + 2 = 2$

  Podemos também indicar o determinante de uma matriz colocando uma barra vertical em cada um de seus lados.

  Assim:

  $$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 5 = 25 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

- Se A é de ordem $n = 3$, utilizaremos o seguinte procedimento para obter o valor de det A:

  1º) Copiamos ao lado da matriz A as suas duas primeiras colunas.

  2º) Multiplicamos os elementos da diagonal principal de A. Seguindo a direção da diagonal principal, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais".

  3º) Multiplicamos os elementos da diagonal secundária de A, trocando o sinal do produto obtido. Seguindo a direção da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais", também trocando o sinal dos produtos.

  4º) Somamos todos os resultados obtidos no 2º e no 3º itens.

Esse procedimento é conhecido como Regra de Sarrus.

Observe a seguir dois exemplos de cálculo do determinante de matrizes de ordem 3.

exemplo 1

Vamos calcular o determinante da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right.$$

$$+80 \quad -6 \quad +6 \quad -4 \quad -72 \quad +10$$

$$\det A = +80 - 6 + 6 - 4 - 72 + 10 = 14$$

exemplo 2

Calculemos o valor do determinante:

$$D = \begin{bmatrix} a & b & c \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right.$$

$$6c \quad 0 \quad -2b \quad -4a \quad -9b \quad 0$$

$$D = 6c + 0 - 2b - 4a - 9b + 0 = 6c - 11b - 4a$$

exercícios

1. Calcule:

a) $\begin{vmatrix} -7 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

2. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\begin{vmatrix} x & -3 \\ x+2 & x-2 \end{vmatrix} = 8$.

3. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = x$.

4. (UF-PB) Se X é uma matriz 2×2 tal que $(A + X)^t = B$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, calcule det X.

5. (UF-CE) Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ tal que $a_{ij} = i - j$. Calcule $\det (A \cdot A^t)$.

6. Calcule o valor de cada um dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

7. Qual o valor de cada um dos determinantes abaixo?

a) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & -1 & -a \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}$

8. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i \geq j \\ 2, \text{ se } i < j \end{cases}$, e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ se } i \geq j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$. Calcule det A, det B e det (A + B).

9. Resolva, em $\mathbb{R}$, a desigualdade:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

10. (U. F. Ouro Preto-MG) Considere a matriz:

$$M = \begin{pmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ x-1 & -\dfrac{1}{3x} & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine o conjunto de todos os possíveis valores de x tais que $\det M \geq 0$.

11. (Unicamp-SP) Seja a um número real e seja:

$$p(x) = \det \begin{bmatrix} 3-x & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & a-x & -1 \\ 0 & 4 & 1-x \end{bmatrix}$$

a) Para a = 1, encontre todas as raízes da equação p(x) = 0.

b) Encontre os valores de a para os quais a equação p(x) = 0 tem uma única raiz real.

12. (Unicap-PE) Calcule o valor de x, a fim de que o determinante da matriz A seja nulo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & x & x-7 \end{pmatrix}$$

13. Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Construa a matriz $M - kI$, sendo $k \in \mathbb{R}$ e I a matriz identidade 2×2.

b) Quais os valores de k que tornam nulo o determinante da matriz $M - kI$?

14. (UF-PA) O determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & y & 0 \\ 1 & 2 & 2y \end{pmatrix}$ é igual a -2. Se B e C são as matrizes obtidas, respectivamente, pela substituição em A do menor e do maior valor de y encontrados, calcule a matriz transposta do produto de B por C.

15. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix},$$

determine todos os números reais x tais que o determinante da matriz $(C - AB)$ seja negativo.

Cofator

Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \geqslant 2$ e seja a_{ij} um elemento de A.

Chama-se cofator de a_{ij} o número A_{ij} tal que $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, em que D_{ij} é o determinante da matriz que se obtém de A, eliminando sua i-ésima linha e j-ésima coluna.

Observe os exemplos a seguir.

exemplo 3

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, qual é o cofator do elemento a_{13}?

Como $i = 1$ e $j = 3$, eliminamos a 1ª linha e a 3ª coluna de A, e assim obtemos:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (24 - 21) = 3$$

exemplo 4

Na matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, qual é o cofator do elemento b_{22}?

Eliminando a 2ª linha e a 2ª coluna de B, obtemos:

$$B_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 89$$

Teorema de Laplace

Para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem n, escolhemos arbitrariamente uma de suas filas (linha ou coluna) e somamos os produtos dos elementos dessa fila pelos respectivos cofatores.

Omitiremos, nesta obra, a demonstração desse teorema, bem como a demonstração de que o valor do determinante não depende da fila escolhida.

O Teorema de Laplace se aplica a toda matriz quadrada de ordem n; entretanto, para os casos $n = 2$ e $n = 3$ é mais simples, em geral, utilizar as regras práticas que foram vistas páginas atrás.

exemplo 5

Vamos calcular $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 11 & 2 \end{vmatrix}$.

Escolhemos a linha 3 de D. Pelo Teorema de Laplace, vem:

$$D = 7 \cdot A_{31} + 4 \cdot A_{32} + (-5) \cdot A_{33} + \underbrace{0 \cdot A_{34}}_{=0} \quad (*)$$

Temos:

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Observe que não é necessário calcular A_{34}.

Daí, em (*), temos:

$$D = 7 \cdot 9 + 4 \cdot 20 + (-5) \cdot 7 = 108$$

exemplo 6

Qual é o valor de $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 & -2 \\ -9 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$?

Embora a escolha seja arbitrária, devemos optar pela fila com maior número de zeros a fim de simplificar os cálculos. Escolhemos, dessa forma, desenvolver pelos elementos da 2ª coluna. Temos:

$$D = \underbrace{0 \cdot A_{12}}_{=0} + (-2) \cdot A_{22} + \underbrace{0 \cdot A_{32}}_{=0} + \underbrace{0 \cdot A_{42}}_{=0}$$

$$D = -2 \cdot A_{22}$$

Assim, basta calcular A_{22}:

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 5 & -3 & -2 \\ -9 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -183$$

Então $D = (-2) \cdot (-183) = 366$.

exercícios

16. Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

17. Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & b & -1 & 1 \\ 2 & c & 0 & -1 \\ 0 & d & 1 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

18. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 3 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2 - 13$$

19. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -31$$

20. Calcule $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Propriedades dos determinantes

Muitas vezes, o cálculo de determinantes pode ser simplificado com o auxílio de algumas propriedades. Vamos estudá-las, lembrando que, ao nos referirmos a uma fila da matriz, estaremos pensando, indiferentemente, em uma linha ou em uma coluna. Além disso, estaremos supondo que *A* é uma matriz quadrada de ordem *n*.

Fila nula

Se *A* possui uma fila na qual todos os elementos são iguais a zero, então det A = 0.

A justificativa para tal fato é que, desenvolvendo o determinante por essa fila, por meio do Teorema de Laplace, obtemos uma soma de zeros, pois o produto de um elemento dessa fila pelo respectivo cofator é sempre nulo.

Acompanhe essa idéia para o caso n = 4:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & 0 & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & 0 & i \\ j & k & 0 & l \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{desenvolvemos pela 3ª coluna}}$$

$$\Rightarrow \det M = 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43} = 0$$

Troca de filas paralelas

Se trocarmos a posição de duas filas paralelas de *A*, obtendo a matriz *A'*, então:

$$\boxed{\det A' = -\det A}$$

Justifiquemos tal fato para o caso n = 3:

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{trocamos a posição da 1ª e 3ª linhas}} A' = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

► Usando Laplace, vamos desenvolver det A pela 1ª linha:

$$\det A = a \cdot A_{11} + b \cdot A_{12} + c \cdot A_{13}$$

$$\det A = a \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\det A = a \cdot (ei - fh) - b \cdot (di - fg) + c \cdot (dh - ge) \quad (1)$$

► Usando Laplace, vamos desenvolver det A' pela 3ª linha:

$$\det A' = a \cdot A'_{31} + b \cdot A'_{32} + c \cdot A'_{33}$$

$$\det A' = a \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} h & i \\ e & f \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} g & i \\ d & f \end{vmatrix} + c \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} g & h \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$\det A' = a \cdot (fh - ei) - b \cdot (fg - di) + c \cdot (ge - dh) \quad (2)$$

De (1) e (2), segue que det A' = –det A.

Assim, por exemplo:

- Se $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11$, então $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -11$.
- Se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -4 & 5 & y \\ -3 & 7 & z \end{vmatrix} = 8$, então $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 5 & -4 \\ z & 7 & -3 \end{vmatrix} = -8$.

Multiplicação de uma fila por um número real

Quando os elementos de uma fila de *A* são multiplicados por um número real *k*, k ≠ 0, obtemos a nova matriz *A'* e vale a relação:

$$\boxed{\det A' = k \cdot \det A}$$

Saiba o porquê disso no caso n = 3:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{multiplicamos por } k \text{ os elementos da 2ª linha}} A' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

► Por Laplace, aplicado à 2ª linha de A, vem:

$$\det A = d \cdot A_{21} + e \cdot A_{22} + f \cdot A_{23} \quad (1)$$

► Desenvolvendo det A', pela 2ª linha, obtemos:

$$\det A' = kd \cdot A'_{21} + ke \cdot A'_{22} + kf \cdot A'_{23}$$
$$\det A' = k \cdot (d \cdot A'_{21} + e \cdot A'_{22} + f \cdot A'_{23}) \quad (2)$$

Como as demais linhas permaneceram inalteradas, é fácil notar que $A_{21} = A'_{21}$, $A_{22} = A'_{22}$ e $A_{23} = A'_{23}$. Assim, em (2) vem:

$$\det A' = k \cdot \underbrace{(d \cdot A_{21} + e \cdot A_{22} + f \cdot A_{23})}_{\text{por } (1)} = k \cdot \det A$$

exemplo 7

Se $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, então $\det A = 20 - 6 = 14$.

Multiplicando por 6 a 2ª linha de A, obtemos a matriz $A' = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 18 & 24 \end{pmatrix}$, cujo determinante é $\det A' = 120 - 36 = 84$.

Então, $\det A' = 6 \cdot \det A$.

exemplo 8

Considere a matriz $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Vamos multiplicar a 1ª linha de B por 5, obtendo a matriz $B' = \begin{pmatrix} 5a & 5b & 5c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Em seguida, vamos dividir a 2ª coluna de B' por 2, obtendo a matriz $B'' = \begin{pmatrix} 5a & \frac{5b}{2} & 5c \\ d & \frac{e}{2} & f \\ g & \frac{h}{2} & i \end{pmatrix}$. Note que dividir por 2 é o mesmo que multiplicar por $\frac{1}{2}$.

De acordo com a propriedade de multiplicação, temos:

$$\det B' = 5 \cdot \det B$$

e

$$\det B'' = \frac{1}{2} \cdot \det B'$$

Então:

$$\det B'' = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot \det B) = \frac{5}{2} \cdot \det B$$

exemplo 9

Se R é uma matriz quadrada de ordem 3 e $\det R = x$, quanto vale $\det (4R)$?

Se $R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, então

$$4 \cdot R = \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4d & 4e & 4f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}.$$

Observemos que, para obter a matriz 4R, multiplicamos por 4 a 1ª, 2ª e 3ª linhas de R. Aplicando sucessivamente a propriedade de multiplicação, concluímos:

$$\det (4R) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \det R = 4^3 \cdot \det R = 64x$$

exercícios

21. Sem desenvolver os determinantes, calcule:

a) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

22. Sabendo que $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = 7$, calcule, sem desenvolver, os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} z & w \\ x & y \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y \\ z & w \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & y \\ 5z & 5w \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 5x & 5y \\ 5z & 5w \end{vmatrix}$

23. Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 11$, qual é o valor de:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} b & a & 4c \\ e & d & 4f \\ h & g & 4i \end{vmatrix}$

24. Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 e det A = 7, qual é o valor de det (3A)?

25. P é uma matriz quadrada de ordem 3, det P = 8. Determine o valor de x, sabendo que det (2P) = = 2x + 6.

Filas paralelas iguais ou proporcionais

Quando A possui filas paralelas iguais (ou proporcionais), então det A = 0.

Vejamos no caso abaixo por que isso ocorre:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d \\ 7 & 11 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \text{troca}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d \\ 7 & 11 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

Pela propriedade de troca de filas paralelas, det A' = −det A. Ora, A = A' e assim det A' = det A. Daí, vem:

$$\det A = -\det A \Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

No caso de as filas serem proporcionais, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d \\ 7 & 11 & 1 & 0 \\ 5a & 5b & 5c & 5d \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \text{troca}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 5a & 5b & 5c & 5d \\ 7 & 11 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

Pela propriedade de troca de filas paralelas, det A' = −det A. (1)

Porém, A' pode ser vista como a matriz que se obtém de A, multiplicando-se a 2ª linha por 5 e a 4ª linha por $\frac{1}{5}$.

Pela propriedade de multiplicação, temos $\det A' = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \det A$, isto é, det A' = det A e, em (1), concluímos que det A = 0.

exemplo 10

Observe estes exemplos de matrizes com filas iguais ou proporcionais. Calcule seus determinantes e comprove a propriedade de filas paralelas iguais ou proporcionais.

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 11 \\ 2 & \sqrt{2} & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \\ \uparrow \qquad\quad \uparrow \qquad\qquad\quad \end{array}$$

Matriz transposta

Considere uma matriz A e sua matriz transposta A^t. Seus determinantes são iguais, isto é, $\det A^t = \det A$.

Verifiquemos esse fato quando n = 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A = ad - bc$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \det A^t = ad - bc$$

exemplo 11

Observe as seguintes matrizes e suas transpostas. Calcule e comprove a propriedade de matriz transposta.

- $\begin{vmatrix} x & y \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ y & 1 \end{vmatrix} = x - 3y$
- $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 11 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 2 & 4 \\ z & 11 & 7 \end{vmatrix} =$

$= -30x + 26y - 2z$

Teorema de Binet

Pode-se mostrar que, se *A* e *B* são matrizes quadradas de mesma ordem, vale a relação:

$$\boxed{\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)}$$

exemplo 12

Sejam $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Sabemos que $\det A = 26$ e $\det B = 2$.

Construímos agora a matriz produto $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$$

Temos:

$$\det(A \cdot B) = 0 - (-52) = 52 = \underbrace{\det A}_{26} \cdot \underbrace{\det B}_{2}$$

exemplo 13

Considere as matrizes *A* e *B*, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Se efetuarmos os cálculos, encontraremos $\det A = 3$ e $\det B = 15$.

Vamos construir a matriz produto $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 26 & 1 & 20 \\ 5 & -2 & 4 \\ 31 & 2 & 23 \end{bmatrix}$$

Calculando, obtemos $\det(A \cdot B) = 45$.

Então:

$$\underbrace{\det(A \cdot B)}_{45} = \underbrace{\det A}_{3} \cdot \underbrace{\det B}_{15}$$

Conseqüência

Uma importante conseqüência do Teorema de Binet é a condição necessária para que uma matriz seja inversível.

Vamos supor que a matriz quadrada *A* seja inversível. Então, existe a matriz A^{-1}, da mesma ordem que *A*, e daí:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det I \overset{\text{Teorema de Binet}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (\det A) \cdot (\det A^{-1}) = 1$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \det A \neq 0 \text{ e } \det A^{-1} \neq 0$$

$$\boxed{A \text{ é inversível} \Rightarrow \det A \neq 0}$$

exemplo 14

Seja $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2 & x-1 \end{pmatrix}$. Para que valores de *x* a matriz *A* é inversível?

A inversível $\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} =$

$= x^2 - x - 2 \neq 0$

Então, $x \neq -1$ e $x \neq 2$.

exercícios

26. Se $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, calcule o valor de:

a) $\begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2x & z \\ 2y & w \end{vmatrix}$

27. Sem desenvolver os determinantes, calcule o valor de:

$$y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 14 & 18 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$$

28. Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, qual é o valor de

$\begin{vmatrix} 6a & 6d & 6g \\ 6b & 6e & 6h \\ 6c & 6f & 6i \end{vmatrix}$?

29. Sabendo-se que A e B são matrizes quadradas de ordem 2, $\det A = 12$, $\det B^t = -6$, qual é o valor de $\det (A \cdot B)$?

30. A é uma matriz quadrada de ordem 6 e $\det A = x$. Qual é o valor do determinante da matriz obtida a partir de A quando suas duas primeiras linhas são multiplicadas por 2, as duas linhas seguintes são multiplicadas por 3 e as duas últimas são divididas por 6?

31. Considere uma matriz quadrada A de ordem 4 e multiplique cada uma de suas colunas por m ($m > 0$), obtendo a matriz $m \cdot A$. Se $\det (mA) = 243$ e $\det A = 3$:

a) encontre o valor de m.

b) multiplicando as duas primeiras colunas de A por $2m$ e as duas últimas por $\frac{1}{m}$, qual é o valor do determinante da matriz assim construída?

32. (UF-AL) A matriz A^{-1} é a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2x & 4 \\ x & 1 \end{bmatrix}$. Se o determinante de A^{-1} é igual a $-\frac{1}{2}$, calcule o determinante da matriz $A + A^{-1}$.

testes de vestibulares

1. (UF-PI) Sejam $A = \begin{bmatrix} x & -1 \\ y & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Se $\det A = 4$ e $\det B = 2$, então, $x + y$ é igual a:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

2. (Mackenzie-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3a & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, o produto das raízes da equação $\det (A + B) = 0$ é:

a) 1
b) 2
c) $-\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{2}$
e) -1

3. (Cefet-MG) Seja $A = (a_{ij})$ a matriz quadrada de ordem 3, onde $a_{ij} = \begin{cases} 2i - 3, \text{ se } i < j \\ i - j, \text{ se } i = j \\ i + j, \text{ se } i > j \end{cases}$. O valor do determinante de A é igual a:

a) -57
b) -19
c) 0
d) 19
e) 57

4. (U. F. Viçosa-MG) Na matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem 2, os elementos a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22}, nessa ordem, apresentam a seguinte propriedade: "Os três primeiros estão em progressão aritmética e os três últimos em progressão geométrica, ambas de mesma razão". Se $a_{12} = 2$, o determinante de A vale:

a) 0
b) -8
c) 4
d) 8
e) -4

5. (Fatec-SP) O traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos de sua diagonal principal. Se os números inteiros x e y são tais que a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & x & 4 \\ 1 & 1 & y \end{pmatrix}$ tem traço igual a 4 e determinante igual a -19, então o produto xy é igual a:

a) -4
b) -3
c) -1
d) 1
e) 3

6. (U. F. Viçosa-MG) Sejam dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $x \in \mathbb{R}$, a soma das raízes da equação $\det (A - xI) = 0$ é:

a) 1
b) 3
c) 0
d) 5
e) 6

7. (Mackenzie-SP) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, considere a seqüência formada por todas as potências inteiras e positivas de A, isto é, $A, A^2, A^3, ..., A^n, ...$. Somando todas as matrizes dessa seqüência, obtemos uma matriz cujo determinante é:

a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$

8. (Mackenzie-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & x \end{pmatrix}$, a soma das raízes da equação $\det (A \cdot B) = -28$ é:

a) $\frac{5}{11}$ c) $-\frac{4}{5}$ e) $\frac{11}{5}$
b) $\frac{3}{11}$ d) $-\frac{11}{3}$

9. (Cefet-MG) O(s) valor(es) de x para que

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ x & 0 & -1 \\ x & -2 & -3 \end{vmatrix} = -8$ é(são):

a) -1 d) -1 e 1
b) 1 e) -1 e 3
c) 3

10. (Mackenzie-SP) Se as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -4 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são tais que $AB = I$, então o determinante da matriz A^2 é:

a) 1 c) 9 e) 25
b) 4 d) 16

11. (UF-PI) Sejam A e B matrizes 2×2 tais que $\det A = 3$ e $\det B = 5$. Se x e y são números inteiros positivos, considere as matrizes $M = xA$ e $N = yB$. Se $\det (MN) = 15$, podemos afirmar corretamente que:

a) $x - y = 1$ d) $x > y$
b) $xy = 15$ e) $x = y = 1$
c) $x + y = 3$

12. (U. F. São Carlos-SP) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 3 tal que, $a_{ij} = \begin{cases} p, \text{ se } i = j \\ 2p, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, com p inteiro positivo. Em tais condições, é correto afirmar que, necessariamente, det A é múltiplo de:

a) 2 d) 7
b) 3 e) 11
c) 5

13. (U. F. Uberlândia-MG) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x-1 & 8 & -5 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$. Para que o determinante da matriz $A \cdot B^t$, em que B^t denota a matriz transposta da matriz B, seja igual a 138, o valor de x será igual a:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

14. (U. F. Viçosa-MG) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, então o valor de $\det [(-2)A^{-1}B^2]$ é:

a) um quadrado perfeito.
b) um número ímpar.
c) um número primo.
d) um número divisível por 15.
e) um múltiplo de 8.

15. (Vunesp-SP) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 3. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e B é tal que $B^{-1} = 2A$, o determinante de B será:

a) 24 d) $\frac{1}{6}$
b) 6 e) $\frac{1}{24}$
c) 3

16. (FGV-SP) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 5 \\ x^2 & 4 & 25 \end{bmatrix}$ admite inversa, se e somente se:

a) $x \neq 5$
b) $x \neq 2$
c) $x \neq 2$ e $x \neq 5$
d) $x \neq 4$ e $x \neq 25$
e) $x \neq 4$

17. (UCDB-MS) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{bmatrix}$, onde x, y e z são números reais.

Então é *correto* afirmar:

a) O determinante da matriz A é igual ao determinante da matriz B.
b) O determinante da matriz A é igual ao oposto do determinante da matriz B.
c) O determinante da matriz A é igual ao triplo do determinante da matriz B.
d) O determinante da matriz A é sempre nulo.
e) O determinante da matriz A é 1 se $x = y = z = 1$.

18. (PUC-MG) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. É *correto* afirmar que o valor do determinante da matriz AB é:

a) 47 b) 56 c) 64 d) 75

19. (UF-AM) Sendo a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e uma matriz *B* também quadrada de ordem 3, sabendo-se que det $(A \cdot B) = 32$, pode-se afirmar que det B é:

a) −32
b) 32
c) impossível calcular.
d) 16
e) −16

20. (Cefet-PR) O valor do determinante de 4ª ordem, em que $a_{23} = a_{32} = 2$, $a_{22} = a_{33} = 3$, $a_{41} = a_{43} = 4$ e todos os demais elementos são iguais à unidade, é:

a) −5
b) −9
c) −7
d) −15
e) 15

21. (Unifor-CE) O determinante de uma matriz *M* é 2 e a sua matriz inversa é $M^{-1} = \begin{bmatrix} p & \frac{1}{2} \\ -2 & q \end{bmatrix}$. O valor de $p \cdot q$ é:

a) 2
b) 1
c) $\frac{1}{2}$
d) $-\frac{1}{2}$
e) −1

22. (UF-RS) O determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ b+1 & b+2 & b+3 \end{bmatrix}$$ é nulo:

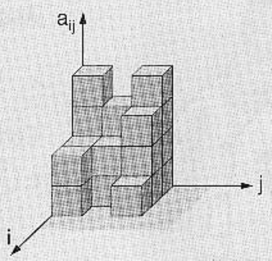
a) para quaisquer valores de *a* e *b*.
b) apenas se a = 0.
c) apenas se b = 0.
d) somente se a = b.
e) somente quando $1 + 2a + (b + 3) = 0$.

desafios

1. (Puccamp-SP) Indica-se por det A o determinante de uma matriz quadrada *A*. Se uma matriz *A* é de ordem 3 e det A = 3, quantos números inteiros satisfazem a sentença $\det(2A) > \frac{x^2 - 13x}{2}$?

a) dezessete
b) dezoito
c) dezenove
d) vinte
e) mais do que vinte

2. (ESPM-SP, adaptado) A figura abaixo é uma representação geométrica espacial de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, onde cada cubinho significa a unidade.



Quanto vale o determinante da matriz *A*?

3. (UF-PI) Sejam *M* e *N* matrizes quadradas tais que $M \cdot N = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -12 & -1 \end{bmatrix}$ e M = −N. Se det M < 0, o valor de det N é igual a:

a) −2
b) −1
c) 0
d) 1
e) 2