Pela fórmula do termo geral,

$$\boxed{A = a_1 + (p-1)r} \qquad \textbf{(16)}$$

Considerando agora a progressão

$$\underbrace{B, \ldots, a_{n-1}, a_n}_{p \text{ termos}}$$

temos pela fórmula de termo geral,

$$\boxed{a_n = B + (p-1)r} \qquad \textbf{(17)}$$

Subtraindo **(17)** de **(16)** resulta:

$$A - a_n = a_1 - B$$

o que nos conduz a

$$\boxed{A + B = a_1 + a_n} \qquad \textbf{(18)} \qquad \text{C.Q.D}$$

I) Em uma P.A. limitada cujo número de termos é ímpar, o termo médio é a média aritmética dos extremos.

Neste caso temos:

$$\underbrace{(\underbrace{a_1, a_2, \ldots, A}_{p \text{ termos}}, M, \underbrace{B, \ldots, a_{n-1}, a_n}_{p \text{ termos}})}_{\text{P.A. com } n=2p+1 \text{ termos}}$$

Pelas propriedades I e II temos:

$$M = \frac{A+B}{2}$$

e

$$A + B = a_1 + a_n$$

Logo,

$$\boxed{M = \frac{a_1 + a_n}{2}} \qquad \textbf{(19)} \qquad \text{C.Q.D.}$$

1.7.5 Soma dos *n* primeiros termos de uma P.A.

Com relação a P.A.:

$$(\underbrace{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n}_{n \text{ termos}}, a_{n+1}, \ldots)$$

podemos escrever:

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n} \quad \textbf{(20)}$$

ou, invertendo-se a ordem das parcelas,

$$\boxed{S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1} \quad \textbf{(21)}$$

Somando **(20)** e **(21)** membro a membro obtemos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$, onde temos ***n*** parênteses.

No entanto, pela propriedade II todos os parênteses são iguais a $a_1 + a_n$.

Logo,

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

e

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}} \quad \textbf{(22)}$$

Observações:

1) Se a progressão for crescente, ilimitada, temos $S_n > N$, sendo N um número arbitrariamente grande.

   Poremos:

   $$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

   ou

   $S_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$

2) No caso de uma progressão decrescente, ilimitada, teremos as seguintes condições:

   $$\lim_{n \to +\infty} S_n = -\infty$$

   ou

   $S_n \to -\infty$ quando $n \to +\infty$

Exemplo 1.3

Calcule o 17: termo da P.A. $(3,\ 8,\ 13,\ \ldots)$

Solução:

Temos que:

$a_1 = 3$ e $r = 5$

Logo,

$a_{17} = a_1 + (17-1)r = a_1 + 16r = 3 + 16 \times 5 = 83$

Exemplo 1.4

Calcule a soma dos doze primeiros números ímpares.

Solução:

Temos então:

$(1,\ 3,\ 5,\ \ldots)$

Donde,

$a_1 = 1$ e $r = 2$, logo

$a_{12} = a_1 + (12-1)r = a_1 + 11r = 1 + 11 \times 2 = 23$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \times 12}{2} = \frac{(1+23) \times 12}{2} = 144$$

Exemplo 1.5

No depósito de uma firma de informática, costuma-se empilhar as caixas de um determinado equipamento em filas horizontais superpostas, conforme ilustrado na figura. Quantas dessas filas seriam necessárias para empilhar 171 dessas caixas?

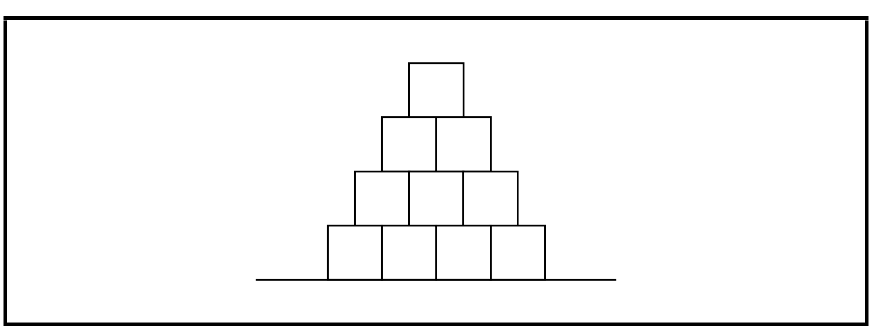

Fig. 1.2

Solução:

Temos uma P.A. representada por

$(1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$

onde, $a_1 = 1$ e $r = 1$

Desejamos saber o ***n*** para o qual temos $S_n = 171$.

Sabemos que:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)\times r]n}{2}$$

Substituindo valores,

$$171 = \frac{[2\times 1 + (n-1)\times 1]n}{2},$$
$$342 = [2 + n - 1]n,$$
$$342 = [1 + n]n,$$
$$342 = n^2 + n,$$
$$n^2 + n - 342 = 0$$

que é uma equação do 2º grau para a qual $a = 1$, $b = 1$ e $c = -342$.

Assim sendo,

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times 1\times(-342)}}{2\times 1} =$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1369}}{2} = \frac{-1 \pm 37}{2} =$$
$$n_1 = 18$$
$$n_2 = -19$$

Como não existe número de fileiras negativo, só a 1ª raiz tem significado físico.

1.8 Progressão Geométrica (P.G.)

1.8.1 Definição

É uma sucessão de termos

$$(\underbrace{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ ,\ a_{n-1},\ a_n}_{n\ \text{termos}},\ a_{n+1},\ \ldots\ ,)$$

finita ou infinita, sendo que , a partir do 2º termo inclusive, a razão entre um termo qualquer e o seu antecedente é igual a uma quantidade constante ***q***, denominada razão da progressão, ou seja:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ \ldots\ = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

As seqüências a seguir são exemplos de P.G.:

a) $(1\ ,\ 4\ ,\ 16\ ,\ 64\ ,\ \ldots) \Rightarrow a_1 = 1$ e $q = 4$

b) $(x\ ,\ xt^2\ ,\ xt^4\ ,\ xt^6\ ,\ \ldots) \Rightarrow a_1 = x$ e $q = t^2$

c) $\left(8\ ,\ 2\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{8}\ ,\ \ldots\right) \Rightarrow a_1 = 8$ e $q = \frac{1}{4}$

d) $(7\ ,\ 7\ ,\ 7\ ,\ 7\ ,\ \ldots) \Rightarrow a_1 = 7$ e $q = 1$

e) $(-4\ ,\ 8\ ,\ -16\ ,\ 32\ ,\ \ldots) \Rightarrow a_1 = 4$ e $q = -2$

1.8.2 Classificação

$$\left.\begin{array}{c} a_1 > 0 \text{ e } q > 1 \\ \text{ou} \\ a_1 < 0 \text{ e } 0 < q < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{P.G. crescente}$$

$$\left.\begin{array}{c} a_1 < 0 \text{ e } q > 1 \\ \text{ou} \\ a_1 > 0 \text{ e } 0 < q < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{P.G. decrescente}$$

$\forall a_1$ e $q < 0 \Rightarrow$ P.G. alternante

$\forall a_1$ e $q = 0 \Rightarrow$ P.G. constante ou estacionária

1.8.3 Termo geral

A partir da definição, podemos escrever os termos da P.G. da seguinte forma:

$$\frac{a_2}{a_1} = q \Rightarrow a_2 = a_1 q$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q \Rightarrow a_3 = a_2 q = (a_1 q)q = a_1 q^2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = q \Rightarrow a_4 = a_3 q = (a_1 q^2)q = a_1 q^3$$

. . . .

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \Rightarrow a_n = a_{n-1} q = \ldots = a_1 q^{n-1}$$

Observe que cada termo é obtido multiplicando-se o primeiro por uma potência cuja base é a razão. Note que o expoente da razão é igual à posição do termo menos uma unidade, ou seja:

$$a_2 = a_1 q \quad = a_1 q^{2-1}$$

$$a_3 = a_1 q^2 = a_1 q^{3-1}$$

$$a_4 = a_1 q^3 = a_1 q^{4-1}$$

. . . .

$$a_n = \quad \ldots \quad = a_1 q^{n-1}$$

O termo de ordem ***n*** da P.G. é dado, portanto, pela fórmula a seguir:

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}} \qquad \textbf{(23)}$$

que pode também ser obtida da seguinte maneira:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_2}{a_1} = q \\ \dfrac{a_3}{a_2} = q \\ \dfrac{a_4}{a_3} = q \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q \end{array}\right\}$$

Multiplicando membro a membro estas $n-1$ igualdades obtemos a expressão do termo de ordem ***n***

$$\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \ldots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} = q^{n-1}$$

Fazendo os cancelamentos, obtemos:

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$$

o que nos leva a

$$a_n = a_1 q^{n-1} \qquad \textbf{(23)}$$

conforme há havia sido deduzido anteriormente.

1.8.4 Propriedades

I) Numa P.G. cada termo, a partir do segundo, é a média geométrica entre o termo precedente e o termo seguinte.

Realmente, se

$$\ldots a_{n-1}\ ,\ a_n\ ,\ a_{n+1} \ldots$$

são termos consecutivos de uma P.G., então podemos escrever:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

ou seja,

$$a_n^2 = a_{n-1} \times a_{n+1}$$

e

$$\boxed{a_n = \pm\sqrt{a_{n-1} \times a_{n+1}}}. \quad \textbf{(24)}$$

C.Q.D. Onde os sinais (+) ou (–) são usados de acordo com as características da P.G.

II) Numa P.G. limitada, o produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Seja então a P.G. limitada, com ***n*** termos, razão ***q***, e ***A*** e ***B*** os termos eqüidistantes dos extremos, conforme mostrado logo a seguir:

$$(\underbrace{a_1, a_2, \ldots, A}_{p \text{ termos}}, \ldots, \underbrace{B, \ldots, a_{n-1}, a_n}_{p \text{ termos}})$$

Pela fórmula do termo geral,

$$\boxed{A = a_1 q^{p-1}}. \quad \textbf{(25)}$$

Considerando agora a progressão

$$\underbrace{B, \ldots, a_{n-1}, a_n}_{p \text{ termos}}$$

temos pela fórmula do termo geral,

$$\boxed{a_n = Bq^{p-1}}. \quad \textbf{(26)}$$

Dividindo as igualdades (25) e (26) membros a membro resulta:

$$\frac{A}{a_n} = \frac{a_1}{B}$$

o que nos leva a:

$$\boxed{AB = a_1 \times a_n}. \quad \textbf{(27)} \quad \text{C.Q.D.}$$

III) Em uma P.G. limitada cujo número de termos é ímpar, o termo médio é a média geométrica dos extremos.

Neste caso temos:

$$(\underbrace{\underbrace{a_1, a_2, \ldots, A}_{p \text{ termos}}, M, \underbrace{B, \ldots, a_{n-1}, a_n}_{p \text{ termos}}}_{\text{P.G. com } n=2p+1 \text{ termos}})$$

Pelas propriedades I e II temos:

$$M = \sqrt{AB}$$

e

$$AB = a_1 \times a_n$$

logo,

$$\boxed{M = \pm\sqrt{a_1 \times a_n}}. \quad \textbf{(28)} \quad \text{C.Q.D.}$$

1.8.5 Soma dos *n* primeiros termos de uma P.G.

Com relação a P.G.

$$(\underbrace{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ ,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n}_{n \text{ termos}},\ a_{n+1},\ \ldots\ ,)$$

podemos escrever:

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n}. \quad \textbf{(29)}$$

Multiplicando ambos os membros por ***q*** resulta:

$$qS_n = a_1q + a_2q + a_3q + \ldots + a_{n-2}q + a_{n-1}q + a_nq$$

o que é equivalente a

$$\boxed{qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}} \quad \textbf{(30)}$$

Subtraindo (30) de (29) temos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$$

ou já que $a_{n+1} = a_1q^n$,

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1q^n$$

e

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},\ (q \neq 1)} \quad \textbf{(31)}$$

Observações:

1.ª) Se a progressão for crescente, ilimitada, temos $S_n > N$, sendo N um número arbitrariamente grande. Poremos,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

ou

$$S_n \to +\infty \text{ quando } n \to +\infty$$

2.ª) Na hipótese da progressão decrescente $q < 1$,

$$S_n = \frac{a_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^n}{1 - q}$$

se admitirmos que $n \to +\infty$ (cresça cada vez mais), a primeira parcela, $\frac{a_1}{1 - q}$, não sofre qualquer modificação, enquanto que a segunda pode ser tomada tão próxima de zero quanto quisermos.

Poremos:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}} \qquad \textbf{(32)}$$

Exemplo 1.6

Determine o 10º termo da P.G. (1 , 2 , 4 , …)

Solução:

$a_1 = 1$ e $q = 2$

Logo,

$$a_{10} = a_1 q^{10-1} = a_1 q^9 = (1)(2)^9 = 512$$

Exemplo 1.7

Determine a soma dos vinte primeiros termos da P.G. (2^{-2} , 2^{-1}, 2^0 , …)

Solução:

Temos:

$$a_1 = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad q = \frac{2^{-1}}{2^{-2}} = 2^{-1-(-2)} = 2^{-1+2} = 2$$

Logo,

$$S_{20} = \frac{a_1\left(1 - q^{20}\right)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{4}\left(1 - 2^{20}\right)}{1 - 2} =$$

$= 262\ 143{,}75$

Exemplo 1.8

Um barco patrulha está distante 65 milhas de um navio carregado de contrabando de armas pesadas. Sabendo-se que ambas as embarcações estão seguindo o mesmo rumo (movimentos na mesma direção e mesmo sentido) e que a velocidade do barco patrulha é o dobro da velocidade do navio, pede-se calcular a distância que o barco deve percorrer para alcançar o navio.

Solução:

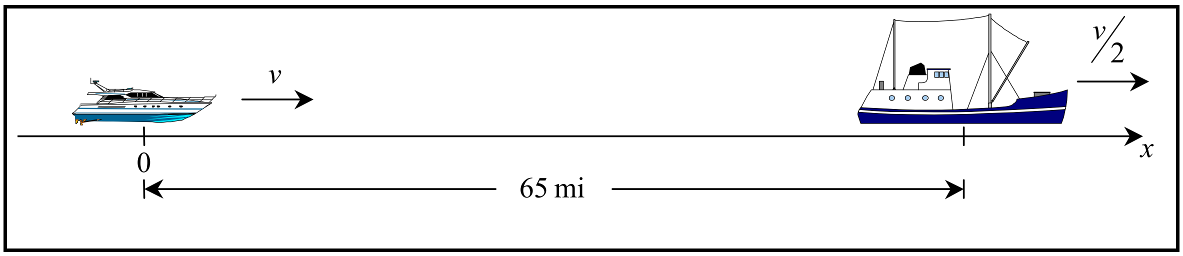

Fig. 1.3

Quando o barco patrulha tiver percorrido as 65 milhas iniciais, o navio terá percorrido $\frac{65}{2}$ milhas, uma vez que sua velocidade é a metade da do barco. Assim o barco terá que percorrer também $\frac{65}{2}$ milhas. Quando o barco tiver percorrido estas últimas $\frac{65}{2}$ milhas, o navio terá percorrido $\frac{65}{4}$ milhas, e assim por diante, de modo que a distância total a ser percorrida pelo barco é:

$$x_b = 65\text{ mi} + \frac{65}{2}\text{ mi} + \frac{65}{4}\text{ mi} + \ldots.$$

Temos pois uma P.G. decrescente ilimitada, para qual a $a_1 = 65\text{ mi}$ e $q = \frac{1}{2}$. Logo,

$$x_b = \frac{a_1}{1-q} = \frac{65\text{ mi}}{1-\frac{1}{2}} = 130\text{ mi}.$$

Claro, o estudante deve estar se perguntando: o problema não poderia ter sido pelos métodos da Cinemática aprendidos na Física do 2º grau?

Sim, é claro! Senão vejamos:

As equações horárias dos movimentos são:

Barco $\rightarrow$ $x_b = vt$

Navio $\rightarrow$ $x_n = 65 + \frac{v}{2}t$

No encontro $x_b = x_n$

e

$$vt = 65 + \frac{v}{2}t\,,$$

$$vt - \frac{vt}{2} = 65\,,$$

$$\frac{vt}{2} = 65$$

e o tempo de encontro é:

$$t = \frac{130}{v}\,.$$

Voltando à equação do barco, temos então:

$$x_b = vt = v \times \frac{130}{v} = 130\,\text{mi}$$

e concluímos, mais uma vez, que o barco deve percorrer 130 mi para alcançar o navio.

Aí cabe uma outra pergunta: Por quê não termos utilizados diretamente o segundo método?

A resposta é simples: esta foi apenas uma ilustração de soma de parcelas, que são termos de uma P.G., as quais vão se tornando cada vez menores.

1.9 Coordenadas Cartesianas no Plano

Este nome é em homenagem ao grande matemático francês René Descartes (Renatus Cartesius em Latim).

Aqui em nosso curso vamos utilizar apenas as coordenadas cartesianas planas (duas dimensões) e ortogonais, e isto nos leva a um sistema de eixos x e y, perpendiculares, que têm a mesma origem comum, conforme ilustrado a seguir:

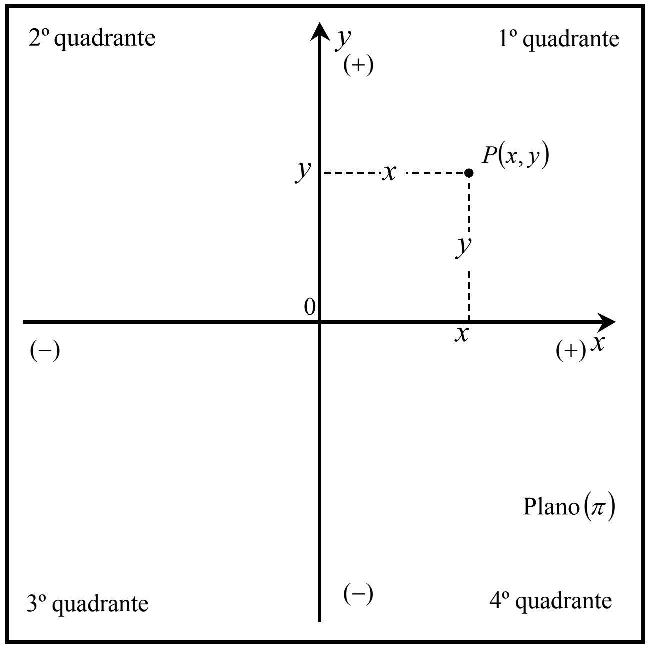

Fig. 1.4

A localização de um ponto P qualquer de uma plano (π) genérico, fica então perfeitamente determinada através de suas coordenadas ***x*** (abscissa) e ***y*** (ordenada), e a representação genérica é $P(x, y)$. No caso presente o ponto genérico foi representado no 1º quadrante, onde $x > 0$ e $y > 0$ mas, de um modo geral temos:

$$\begin{cases} x > 0 \text{ e } y > 0 \Rightarrow 1^{\circ} \text{ quadrante} \\ x < 0 \text{ e } y > 0 \Rightarrow 2^{\circ} \text{ quadrante} \\ x < 0 \text{ e } y < 0 \Rightarrow 3^{\circ} \text{ quadrante} \\ x > 0 \text{ e } y < 0 \Rightarrow 4^{\circ} \text{ quadrante} \end{cases}$$

Temos também que se

i) $x = 0 \Rightarrow$ ponto situado no eixo y

ii) $y = 0 \Rightarrow$ ponto situado no eixo x

iii) $x = y = 0 \Rightarrow$ ponto situado origem

Exemplo 1.9

Marcar em um diagrama cartesiano as localizações dos pontos a seguir:

$P_1(4,3)$; $P_2(-2,5)$; $P_3(-3,-4)$; $P_4(2,-6)$; $P_5(5,0)$; $P_6(0,4)$

Solução:

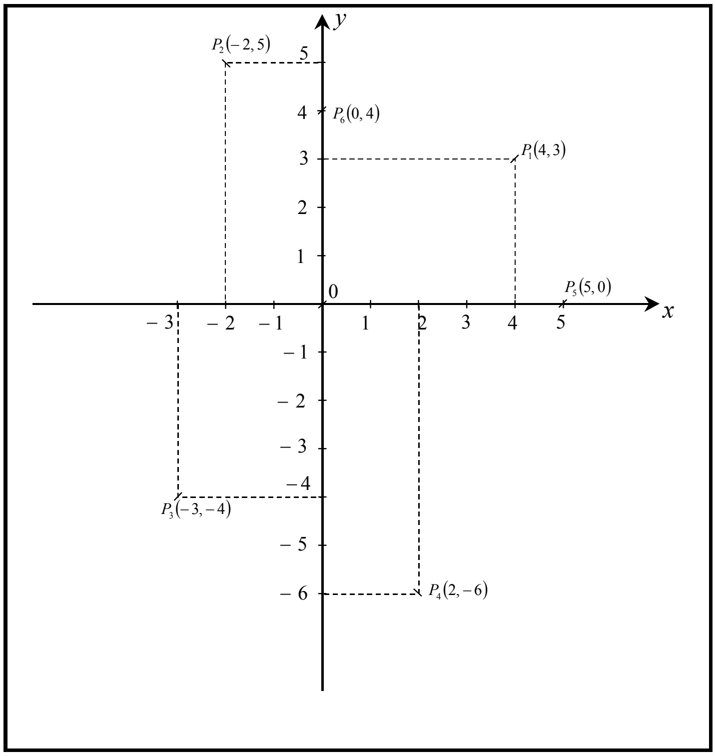

Fig. 1.5

1.10 Equação Reduzida da Reta

Em Geometria Analítica demonstra-se que toda equação do primeiro grau em *x* e *y* representa, no plano, uma reta, ou seja:

$$\boxed{y = mx + p} \quad \textbf{(33)}$$

onde $m = tg\alpha$ é coeficiente angular da reta, isto é, a tangente do ângulo que a mesma forma com a direção horizontal (paralela ao eixo *x*), e ***p*** é o coeficiente linear, sendo igual à ordenada do ponto onde a reta corta o eixo *y*. Por esta convenção teremos sempre $0 \leq \alpha < 180^{o}$.

Analisemos então algumas situações mostradas na figura 1.6. São evidentes as seguintes propriedades:

1ª) Se α **é agudo**, então ***m*** **é positivo**, pois a tangente de um ângulo é sempre positiva no 1º quadrante.

2ª) Se α **é obtuso**, então ***m*** **é negativo**, pois a tangente de uma ângulo do 2º quadrante é negativa.

3ª) Se α **é nulo**, então ***m*** **é nulo**, pois a *tg* de 0 é nula e, neste caso, a equação da reta se reduz a $y = \text{constante}$, uma vez que ela é paralela ao eixo *x*.

4ª) Se α **é reto**, então ***m* não é definido**, pois $tg90^{\circ} = \nexists$, e neste caso a equação da reta tem a forma $x = \text{constante}$, uma vez que ela é paralela ao eixo *y*.

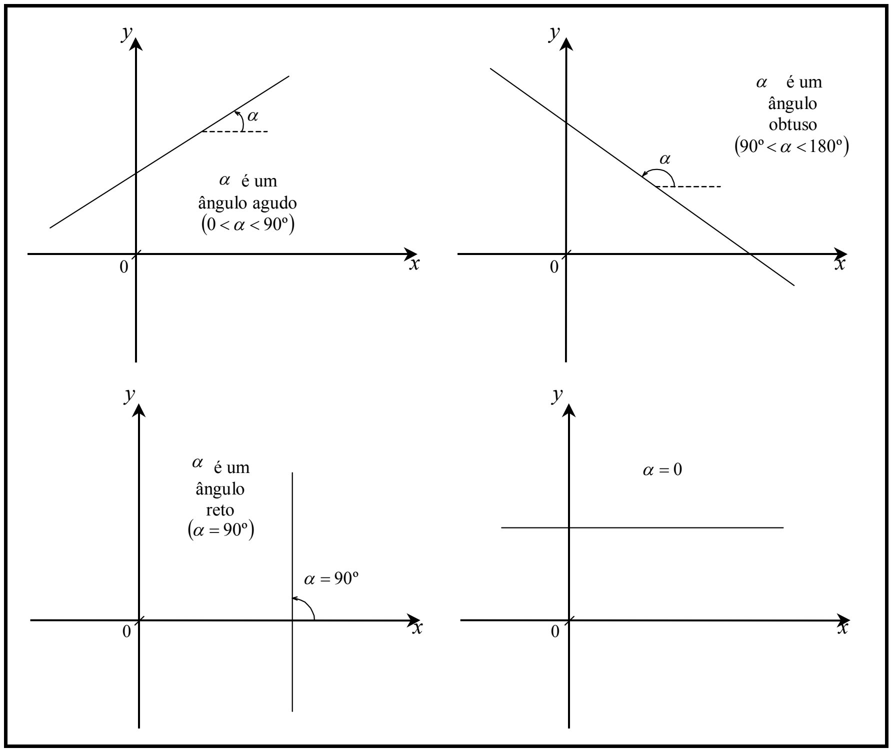

Fig. 1.6

É também oportuno, baseados no que se viu até então, listarmos algumas situações na figura 1.7, lembrando que, se ***p*** = 0, a reta passa pela origem, e sua equação é da forma *y* = *mx*.

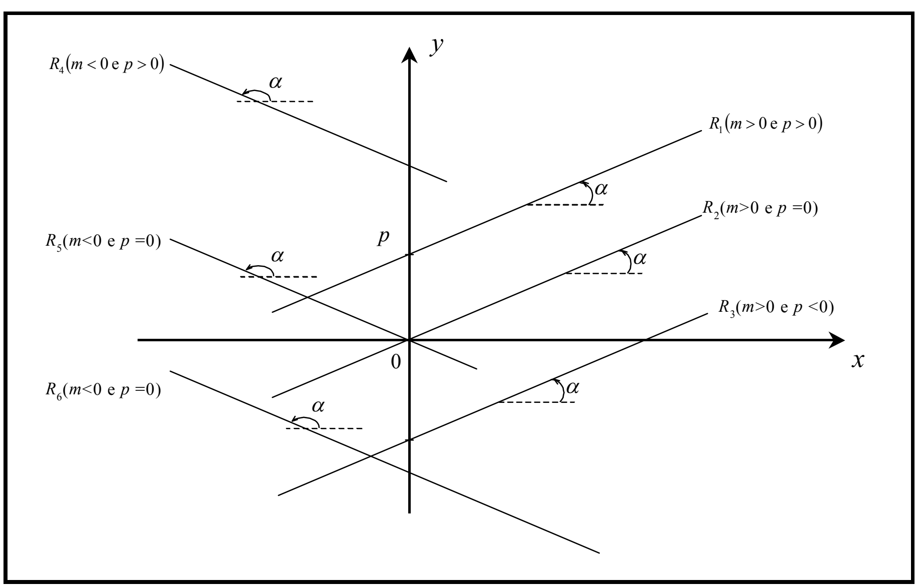

Fig. 1.7

Exemplo 1.10

Representar graficamente as seguintes retas:

a) $R_1: \ y = 2x + 1$

b) $R_2: \ y = -\dfrac{x}{2} + 1$

c) $R_3: \ y = 2x$

d) $R_4: \ y = 4$

e) $R_5: \ x = 5$

Solução:

As representações das retas R_4 e R_5 são imediatas. Entretanto, para as retas R_1, R_2 e R_3 vamos construir as tabelas a seguir onde os valores assumidos para *x*, ao serem substituídos nas equações conduzem aos valores de *y* correspondentes. Bastaria um par de pontos para determinar cada reta, uma vez que, por dois pontos do plano passa tão somente uma reta ou, em outras palavras: dois pontos determinam uma reta. No entanto, a fim de que o estudante possa verificar, na prática, que uma equação do 1.º grau em ***x*** e ***y*** representa uma reta, optamos por eleger três pontos para cada uma delas, e concluir que, em cada caso, os três pontos estão alinhados ao longo de uma mesma direção, ou seja, pertencem a uma mesma reta.

R_1

X	y
0	1
1	3
2	5

R_2

x	y
0	1
1	$1/2$
2	0

R_3

x	y
0	0
1	2
2	4

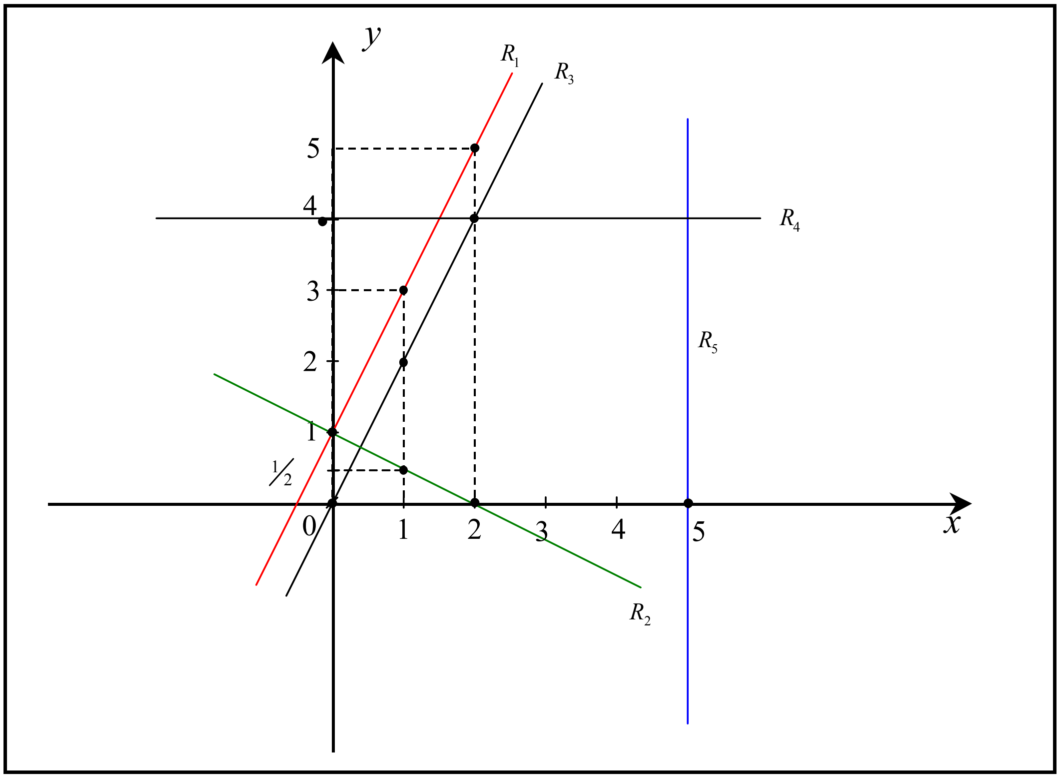

Fig. 1.8

Exemplo 1.11

Uma firma de projeto A cobra R$ 1000,00 fixos mais R$ 600,00 por dia de trabalho e uma firma B cobra R$ 400,00 fixos mais R$ 800,00 por dia.

a) Representar em um mesmo diagrama cartesiano os custos dos serviços de ambas as empresas.

b) Estabelecer um critério para a escolha da melhor firma pelo usuário, sob o ponto de vista financeiro, admitindo que, hipoteticamente, ambas tenham a mesma competência.

Solução:

a) Do enunciado vem que:

Custo de A: $C_A = (\text{R\$ } 600{,}00/\text{dia})d + (\text{R\$ } 1000{,}00)$

Custo de B: $C_B = (\text{R\$ } 800{,}00/\text{dia})d + (\text{R\$ } 400{,}00)$

em que C_A e C_B representam, respectivamente, os custos dos serviços das empresas e ***d*** os dias trabalhados.

Temos então as seguintes correspondências:

$x \leftrightarrow d$

$y \leftrightarrow C$

Tratam-se, portanto, das equações de duas retas e a reta A começa em um ponto de ordenada mais baixa ($p_A = 400$) e a reta B em um ponto de ordenada mais alta ($p_B = 1000$). No entanto, o coeficiente angular de B ($m_B = 800$) é maior do que o coeficiente angular de A ($m_A = 600$). Isto significa que $\text{tg}\alpha_B > \text{tg}\alpha_A$, ou seja $\alpha_B > \alpha_A$, e as retas vão se interceptar. Determinemos pois as coordenadas do ponto de intersecção:

$$C_A = C_B \Rightarrow (\text{R\$ } 600{,}00/\text{dia})d + (\text{R\$}1000{,}00) = (\text{R\$ } 800{,}00/\text{dia})d + (\text{R\$ } 400{,}00) \therefore$$

$$\text{R\$ } 1000{,}00 - \text{R\$ } 400{,}00 = (\text{R\$ } 800{,}00/\text{dia})d - (\text{R\$ } 600{,}00/\text{dia})d \therefore$$

$$\text{R\$ } 600{,}00 = (\text{R\$ } 200{,}00/\text{dia})d \therefore$$

$$d = 3 \text{ dias} \Rightarrow C_A = C_B = \text{R\$ } 2800{,}00$$

Lembrando também que para $d = 0$ temos

$$C_A = \text{R\$ } 1000{,}00$$

e

$$C_B = \text{R\$ } 400{,}00$$

podemos traçar as retas de custos. Assim sendo:

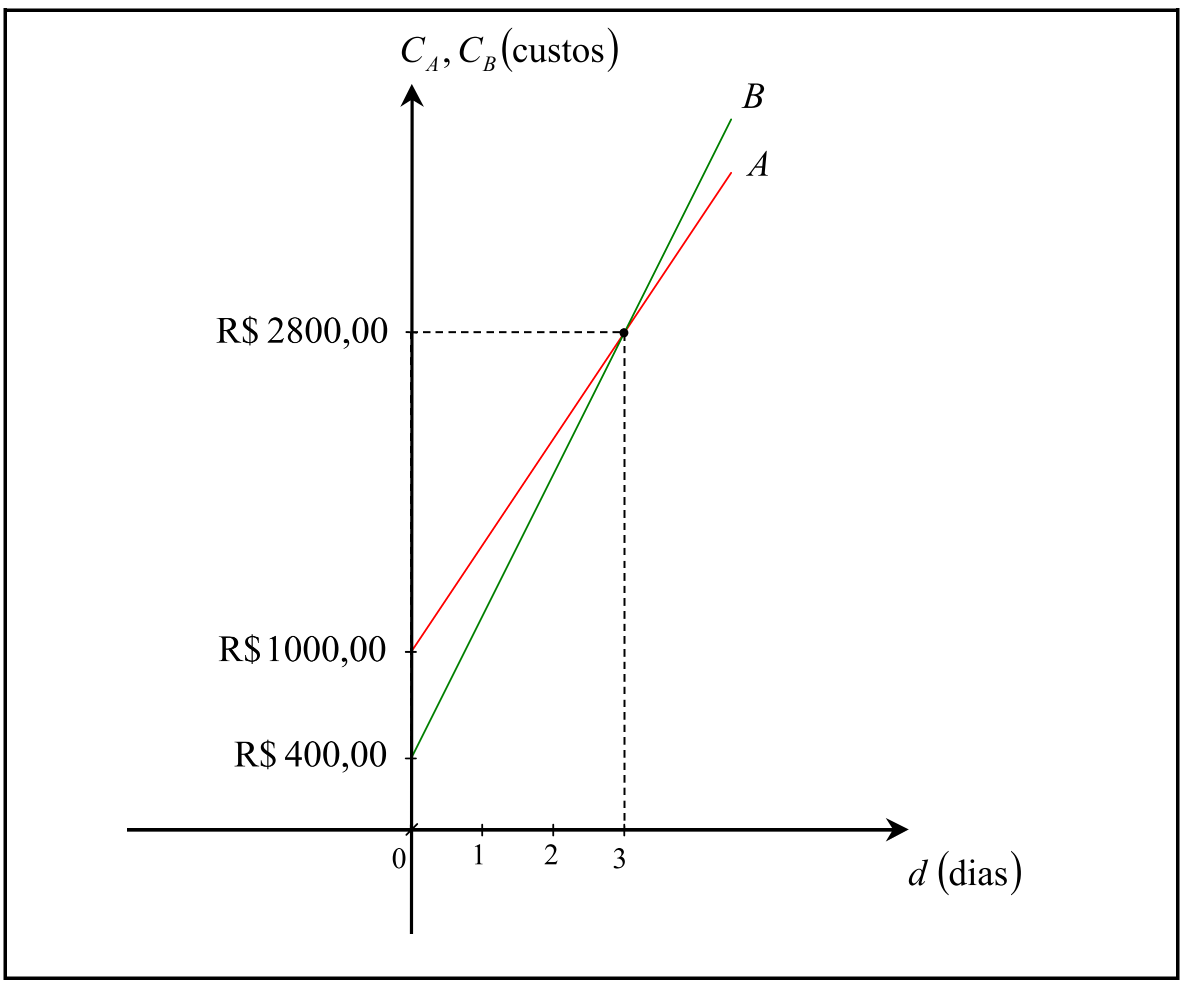

Fig. 1.9

b) Uma rápida análise dos gráficos nos conduzem às seguintes conclusões:

1.ª) $d < 3$ dias $\Rightarrow B$ é mais econômica.

2.ª) $d = 3$ dias $\Rightarrow$ o custo é o mesmo.

3.ª) $d > 3$ dias $\Rightarrow A$ é mais econômica.

1.11 Noção de Aplicação

Dados dois conjuntos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, denominamos **aplicação** de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$ a toda correspondência em que a cada elemento $x \in \boldsymbol{A}$ temos associado um único $y \in \boldsymbol{B}$.

Por exemplo: dados os conjuntos $\boldsymbol{A} = \{5, 6, 7, 8\}$ e $\boldsymbol{B} = \{g, h, i, j, l\}$ vamos apresentar a seguir algumas aplicações de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$:

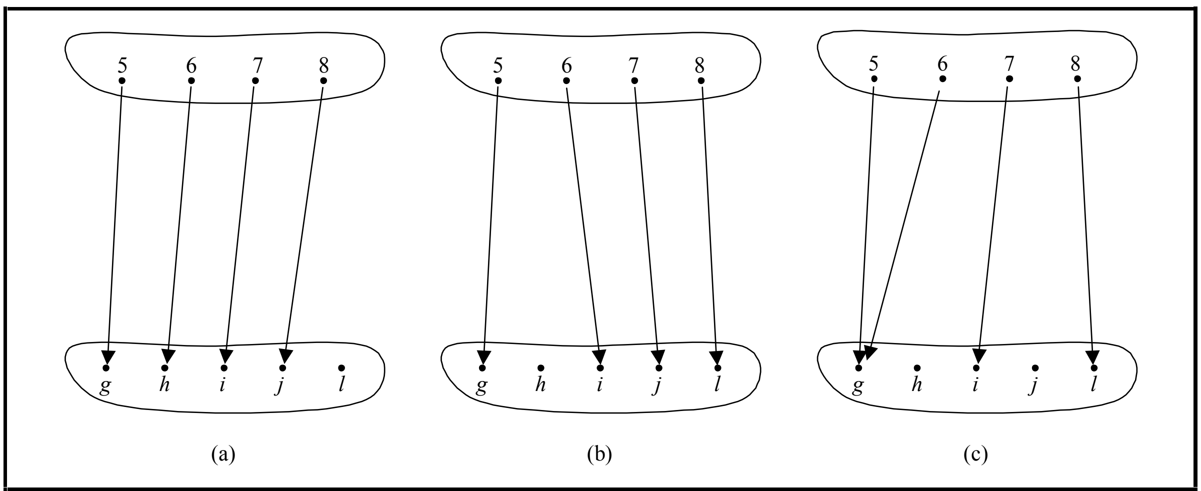

Fig. 1.10

A flecha indica a correspondência entre os elementos de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. Na parte (a), a aplicação é o conjunto de pares ordenados.

$\{(5, g), (6, h), (7, i), (8, j)\}$

na parte (b)

$\{(5, g), (6, i), (7, j), (8, l)\}$

e na parte (c)

$\{(5, g), (6, g), (7, i), (8, l)\}$.

Devemos ressaltar que cada elemento de $\boldsymbol{A}$ é unido pela flecha a um só elemento de $\boldsymbol{B}$. Assim sendo, do mesmo elemento $x \in \boldsymbol{A}$ **não podem** partir duas ou mais flechas.

Deste modo a correspondência

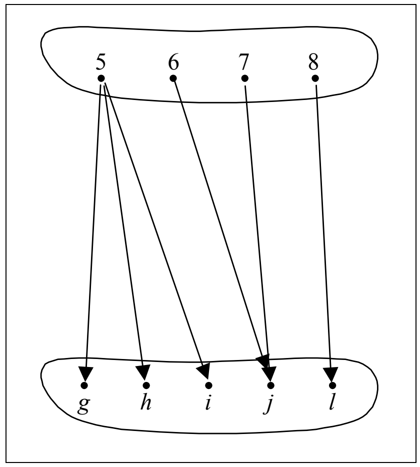

Fig. 1.11

não é uma aplicação.

O conjunto $\boldsymbol{A}$ é denominado **domínio da aplicação** e o elemento $\boldsymbol{y}$, correspondente de $\boldsymbol{x}$, é denominado imagem de $\boldsymbol{x}$. No exemplo (a) da figura 1.9 temos.

Elemento de A	**Imagem**
$5 \longrightarrow g$	
$6 \longrightarrow h$	
$7 \longrightarrow i$	
$8 \longrightarrow j$	

O conjunto das imagens de uma aplicação $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$ denomina-se **imagem da aplicação** e será representado por $\boldsymbol{f}(A)$. Devemos notar que $\boldsymbol{f}(A)$ é uma sucessão, ou seja, um conjunto ordenado. Para o exemplo (a) da figura 1.9 temos:

$$\boldsymbol{f}(A)=(g\,,h,i,\,j) \text{ e não } \underbrace{(h\,,g,\,j,i)}_{\text{ordem incorreta}}$$

1.12 Exercícios Propostos

1) Calcular as seguintes expressões:

a) $(+5)+(-12)$

b) $(+3{,}7)+(-0{,}7)$

c) $(+1{,}72)+(-0{,}28)$

d) $(+2)+(-7)+(+4)+(+2)+(-5)+(+3)$

e) $(+9)+(-6)+(-2)+(-1)+(-5)+(+7)$

2) Calcular as seguintes expressões:

a) $(+4)-(+2)$

b) $(+10)-(+4)$

c) $(-9)-(+3)$

d) $(-7)-(-5)$

e) $(+6)-(-2)$

3) Calcular as seguintes expressões:

a) $(+4)\times(+5)$

b) $(-4)\times(-5)$

c) $(-2)\times(+1)$

d) $(-4)\times(-1)\times(+3)\times(-2)\times(-5)$

e) $(+2)\times(-3)\times(-1)\times(-4)\times(+5)$

4) Calcular as seguintes expressões:

a) $(+12)\div(+3)$

b) $(-15)\div(-3)$

c) $(+36)\div(-4)$

d) $(-42)\div(+6)$

e) $(-81)\div(-9)$

5) Calcular as seguintes potências:

a) $(+2)^5$

b) $(-3)^3$

c) $(-2)^3$

d) $(-7)^3$

e) $(+10)^4$

6) Calcular os **valores algébricos** das seguintes raízes:

a) $\sqrt[4]{625}$

b) $\sqrt[3]{8}$

c) $\sqrt[4]{81}$

d) $\sqrt[3]{-27}$

e) $\sqrt[5]{32}$

7) Efetuar os seguintes produtos notáveis:

a) $\left(2m^3y^4 - 5b^3m\right)^2$

b) $\left(\frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{4}x^5\right)^2$

c) $\left(5 - a\sqrt{2}\right)\left(5 + a\sqrt{2}\right)$

8) Resolver as seguintes equações do 1.º grau:

a) $\frac{x}{2} = 5$

b) $5(z-3) - 4(z+2) = 3(1-2z) + 2$

c) $6 - \frac{2y-5}{5} = y$

9) Resolver as seguintes equações do 2.º grau:

a) $z^2 - 8z + 15 = 0$

b) $6z^{-2} - 5z^{-1} + 1 = 0$

c) $\frac{z(z-1)}{7} = 6$

d) $z^2 - 4z + 4 = 0$

e) $z^2 + z + \frac{1}{3} = 0$

10) Calcular a_{13} na progressão aritmética

$(1 , 5 , 9 , \ldots)$

11) Calcular a_1 em uma progressão aritmética, sabendo-se que $r = 4$ e $a_8 = 31$.

12) Somar os 15 primeiros termos da progressão aritmética $(3 , \frac{7}{2} , 4 , \ldots)$

13) Quantas vezes bate um relógio em 24 horas, admitindo-se que apenas bata as horas?

14) Calcular o 5.º e 8.º termos da progressão geométrica (2 , 4, …)

15) Em uma progressão geométrica, sabemos que $a_4 = 128$ e $q = 4$. Achar a_1.

16) Sendo x e y positivos, calcular os limites das expressões a seguir quando o número de radicais cresce indefinidamente.

a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} \ldots$

b) $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y}}}}\ \ldots$

c) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\ \ldots$

1.13 Respostas dos Exercícios Propostos

1) a) -7; b) $+3{,}0$; c) $+1{,}44$; d) -1 e) $+2$

2) a) $+2$; b) $+6$; c) -12; d) -2 e) $+8$

3) a) $+20$; b) $+20$; c) -2; d) $+120$ e) -120

4) a) $+4$; b) $+5$; c) -9; d) -7; e) $+9$

5) a) $+32$; b) -27; c) -8; d) -343; e) $+10.000$

6) a) ± 5; b) $+2$; c) ± 3; d) -3; e) $+2$

7) a) $4m^6y^8 - 20b^3m^4y^4 + 25b^6m^2$

b) $\dfrac{4}{9}a^4 + a^2x^5 + \dfrac{9}{16}x^{10}$

c) $25 - 2a^2$

8) a) $x = 10$; b) $z = 4$; c) $y = 5$

9) a) $z_1 = 3$; $z_2 = 5$

b) $z_1 = 3$; $z_2 = 2$

c) $z_1 = 7$; $z_2 = -6$

d) $z = 2$

e) Não admite raízes no conjunto dos números reais. Voltaremos a esse assunto após estudar a seção 1.14 (suas raízes são: $z_1 = -\dfrac{1}{2} + \boldsymbol{j}\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; $z_2 = -\dfrac{1}{2} - \boldsymbol{j}\dfrac{\sqrt{3}}{6}$).

10) $a_{13} = 49$

11) $a_1 = 3$

12) $S_{15} = \dfrac{195}{2}$

13) 156

14) $a_5 = 32$; $a_8 = 256$

15) $a_1 = 2$

16) a) x; b) $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2y}$ c) $\dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$