

INDICE – MATEMÁTICA 1

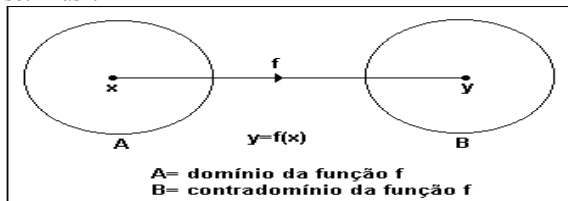
AULA 01- ESTUDO DAS FUNÇÕES	PAG. 01
AULA 02- FUNÇÃO DO 1º GRAU	PAG. 02
AULA 03- FUNÇÃO DO 2º GRAU	PAG. 02
AULA 04- FUNÇÃO MODULAR	PAG. 03
AULA 05- FUNÇÃO EXPONENCIAL	PAG. 03
AULA 06- LOGARITMO	PAG. 04
AULA 07- TRIGO TRIÂNGULO RETANGULO	PAG. 04
AULA 08- INTODUÇÃO TRIGONOMETRIA	PAG. 05
AULA 09 - RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	PAG. 05
AULA 10- SOMA DE ARCOS	PAG. 05
AULA 11- FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA	PAG. 06
AULA 12- NÚMEROS COMPLEXOS I	PAG. 06
AULA 13- NÚMEROS COMPLEXOS II	PAG. 07
AULA 14- POLINÔMIOS	PAG. 07
AULA 15- EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	PAG. 09

AULA 01 - ESTUDO DAS FUNÇÕES

Sejam **A** e **B** dois conjuntos não vazios e uma relação **R** de **A** em **B**, essa relação será chamada de função quando todo e qualquer elemento de **A** estiver associado a um único elemento em **B**.

Numa função podemos definir alguns elementos.

- Conjunto de Partida: **A** (Domínio)
- Contra Domínio: **B**
- Conjunto Imagem: Elementos do conjunto **B** que recebem as "setinhas".



Observações:

- A imagem está sempre contida no Contra Domínio ($Im \subset CD$)
- Podemos reconhecer através do gráfico de uma relação, se essa relação é ou não função. Para isso, deve-se traçar paralelas ao eixo **y**. Se cada paralela interceptar o gráfico em apenas um ponto, teremos uma função.
- O domínio de uma função é o intervalo representado pela projeção do gráfico no eixo das abscissas. A imagem é o intervalo representado pela projeção do gráfico no eixo **y**.

VALOR DE UMA FUNÇÃO

Denomina-se valor numérico de uma função **f(x)** o valor que a variável **y** assume quando a variável **x** é substituída por um valor que lhe é atribuído.

Por exemplo: considere a relação $y = x^2$, onde cada valor de **x** corresponde um único valor de **y**.

Assim se $x = 3$, então $y = 9$.

Podemos descrever essa situação como: $f(3) = 9$

Ex 1: Dada a função $f(x) = x + 2$. Calcule o valor de $f(3)$.

Resolução: $f(x) = x + 2$, devemos fazer $x = 3$

$$f(3) = 3 + 2 \rightarrow f(3) = 5$$

Ex 2: Dada a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Qual valor de $f(-1)$?

Resolução: $f(x) = x^2 - 5x + 6$, devemos fazer $x = -1$

$$f(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 6 \rightarrow f(-1) = 1 + 5 + 6 \rightarrow f(-1) = 12$$

Ex 3: Dada a função $f(x-1) = x^2$. Determine $f(5)$.

Resolução: $f(x-1) = x^2$, devemos fazer $x = 6$

$$f(6-1) = 6^2 \rightarrow f(5) = 36$$

Observe que se fizéssemos $x = 5$, teríamos $f(4)$ e não $f(5)$.

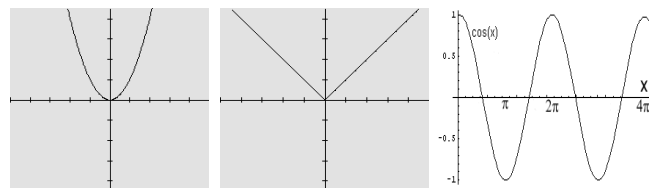
PARIDADE DE FUNÇÕES

FUNÇÃO PAR

Uma função é par quando para valores simétricos de **x** temos imagens iguais, ou seja:

$$F(x) = F(-x)$$

Uma consequência da definição é: Uma função **f** é par se e somente se, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo **y**. A seguir temos os gráficos das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$ e $h(x) = \cos x$

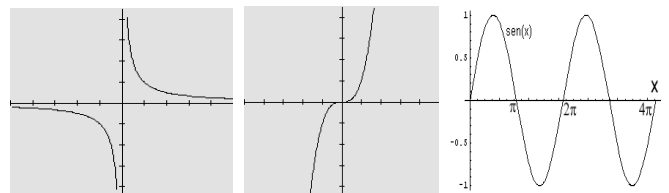


FUNÇÃO ÍMPAR

Uma função é ímpar quando para valores simétricos de **x** as imagens forem simétricas, ou seja:

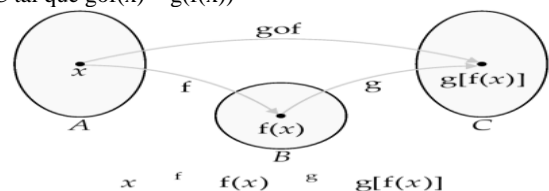
$$F(x) = -F(-x)$$

Como consequência da definição os gráficos das funções ímpares são simétricos em relação à origem do sistema cartesiano. A seguir temos os gráficos das funções $f(x) = 1/x$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = \sin x$.



FUNÇÃO COMPOSTA

Dadas as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, denomina-se função composta de **g** com **f** a função **gof**: definida de $A \rightarrow C$ tal que $gof(x) = g(f(x))$



$$f: A \rightarrow B; g: B \rightarrow C; gof: A \rightarrow C$$

Exercício resolvido:

Dadas as funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = x + 1$, achar **x** de modo que $f(g(x)) = 0$

Sol. Primeiramente vamos determinar $f(g(x))$ e, em seguida, igualaremos a zero.

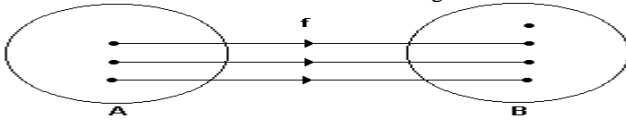
$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$f(g(x)) = (x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6. \text{ Daí vem que } f(g(x)) = x^2 - 3x + 2.$$

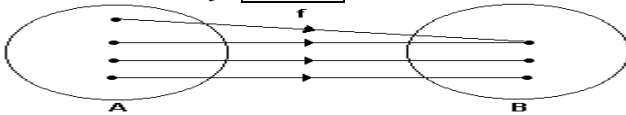
Igualando a zero temos: $x^2 - 3x + 2 = 0$, onde $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$

FUNÇÃO INJETORA, SOBREJETORA E BIJETORA

FUNÇÃO INJETORA: Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora se e somente se elementos distintos de A têm imagens distintas em B.



FUNÇÃO SOBREJETORA: Uma função f de A em B é sobrejetora, se **todos** os elementos de B forem imagem dos elementos de A, ou seja: $\{CD = \text{Im}\}$



FUNÇÃO BIJETORA: Uma função é bijetora se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora. $n(D) = n(CD)$

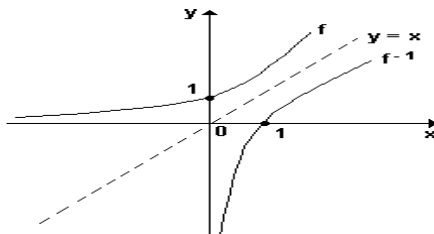


FUNÇÃO INVERSA

Seja f uma função f de A em B. A função f^{-1} de B em A é a inversa de f , se e somente se f for bijetora.

Para encontrar a inversa de uma função, o processo prático é trocar x por y e, em seguida, isolar y .

Os gráficos de duas funções inversas $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. ($f(x) = x$)



Exercício Resolvido:

Dada a função $f(x) = 2x + 4$ de \mathbb{R} em \mathbb{R} . determine a sua inversa.

Resolução: Como a função $f(x)$ é bijetora, então ela admite inversa. Basta trocarmos x por y e teremos:

$$f(x) = 2x + 4 \rightarrow x = 2y + 4 \rightarrow x - 4 = 2y \rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$$

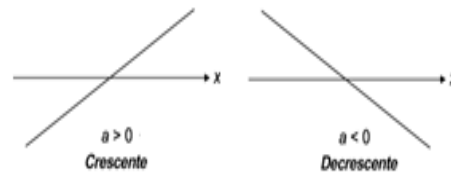
AULA 02 - FUNÇÃO DO 1º GRAU

Uma função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} é do 1º grau se a cada $x \in \mathbb{R}$, associa o elemento $ax + b$.

Forma: $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$. Onde a é o coeficiente angular e b o coeficiente linear.

GRÁFICO

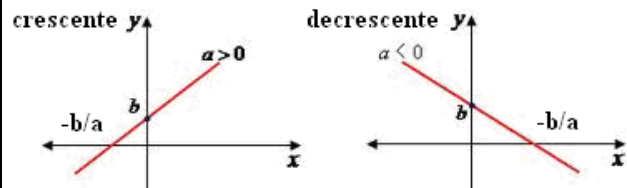
O gráfico será uma reta crescente se a for positivo e decrescente se a for negativo.



Como o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta é necessário definir apenas dois pontos para obter o gráfico.

Ponto que o gráfico corta o eixo y : deve-se fazer $x = 0$. Logo, o ponto que o gráfico corta o eixo y tem coordenadas $(0, b)$. Ponto que o Gráfico corta o eixo x : deve-se fazer $y = 0$. Logo, o ponto que o gráfico corta o eixo x tem coordenadas $(-b/a; 0)$.

O ponto que o gráfico corta o eixo x é chamado raiz ou zero da função.



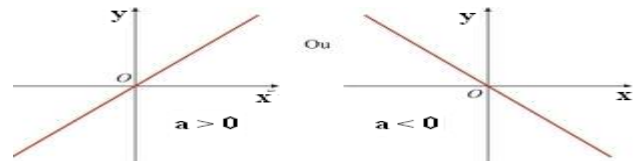
OBS:

Sendo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ é função afim.

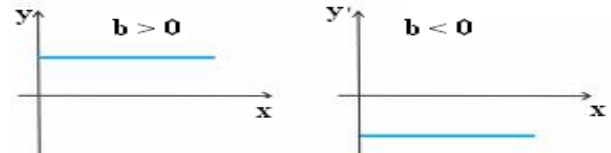
Sendo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $b = 0$ é função linear.

Sendo $f(x) = ax + b$, com $a = 0$ e $b \neq 0$ é função constante.

função linear



função constante



AULA 03 - FUNÇÃO DO 2º GRAU

Uma função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} é polinomial do 2º grau se a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$

GRÁFICO

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma parábola. A concavidade da parábola é determinada pelo sinal do coeficiente a (coeficiente de x^2). Assim, quando:

- $a > 0$ tem-se a parábola com concavidade para cima
- $a < 0$ tem-se parábola com concavidade para baixo

O ponto que o gráfico corta o eixo y possui coordenadas $(0, c)$. Para achar o(s) ponto(s) que o gráfico corta o eixo x , deve-se fazer $y = 0$. Tem-se então uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, onde:

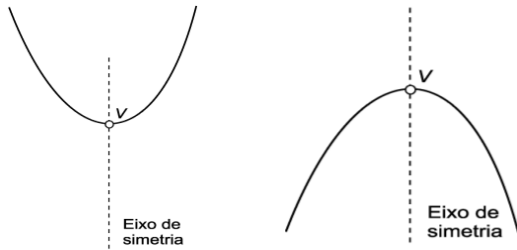
- Se $\Delta > 0$ Duas Raízes Reais
- Se $\Delta = 0$ Uma Raiz Real
- Se $\Delta < 0$ Não possui Raízes Reais

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac.$$

O verdadeiro nome de Δ é discriminante, o termo de referência ao alfabeto grego.

ESTUDO DO VÉRTICE

A Parábola que representa a função do 2º Grau é dividida em duas partes simétricas. Essa divisão é feita por um eixo chamado eixo de simetria. A intersecção desse eixo com a parábola recebe o nome de **vértice da parábola**.



- O vértice é o ponto de máximo da função se $a < 0$.
- O vértice é o ponto de mínimo da função se $a > 0$.

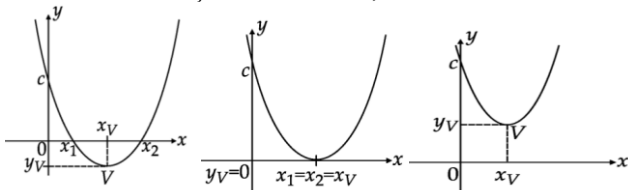
COORDENADAS DO VÉRTICE

O vértice é um ponto de coordenadas $V(x_v, y_v)$ onde

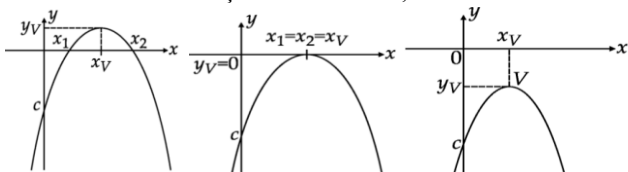
$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

RESUMO GRÁFICO

Se $a > 0$ as combinações de com $\Delta > 0, \Delta = 0$ e $\Delta < 0$



Se $a < 0$ as combinações de com $\Delta > 0, \Delta = 0$ e $\Delta < 0$



AULA 04 - FUNÇÃO MODULAR

Módulo ou valor absoluto de um número real x é a distância da origem ao ponto que representa o número x . Indicamos o módulo de x por $|x|$.

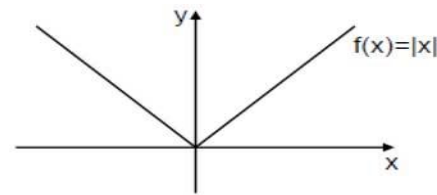
DEFINIÇÃO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Veja: $|3| = 3; |-5| = 5, e |0| = 0$
 Já em $|x| = 3$, temos $x = 3$ ou -3 .
 Em $|x| = 0$, temos $x = 0$, somente.
 Em $|x| = -1$, não temos solução.

Se $|x - 7| = 2$, daí temos duas possibilidades.
 Ou $x - 7 = 2 \rightarrow x = 9$ ou ainda $x - 7 = -2 \rightarrow x = 5$

GRÁFICO



$D(f) = \mathbb{R} \quad e \quad Im(f) = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$

INEQUAÇÃO MODULAR

$|x| < k$, com $k > 0$, então: $k < x < k$

Exemplos: $|x| < 3 \rightarrow -3 < x < 3$
 $|x| < 10 \rightarrow -10 < x < 10$

$|x| > k$, com $k > 0$, então: $x < -k$ ou $x > k$

Exemplos: $|x| > 3$, então $x < -3$ ou $x > 3$
 $|x| > 10$, então $x < -10$ ou $x > 10$

Resumindo as inequações

- $|ALGO| \leq a$ e $a > 0$, então $-a \leq ALGO \leq a$
- $|ALGO| \geq a$ e $a > 0$, então $x \leq -ALGO$ ou $ALGO \geq a$
- $|ALGO| = |COISA|$, então $ALGO = COISA$ ou $ALGO = -COISA$.

AULA 05 - EXPONENCIAL

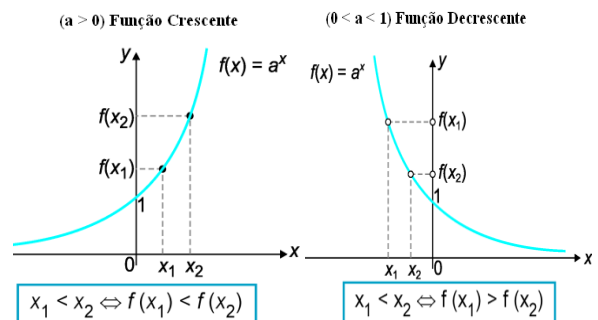
EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Chama-se equação exponencial toda equação que pode ser reduzida a forma $a^x = b$, com $0 < a \neq 1$.

Para resolver tais equações é necessário transformar a equação dada em:

- Igualdade de potência de mesma base.
 $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
- Potências de expoentes iguais. $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow a = b$ sendo a e $b \neq 1$ e a e $b \in \mathbb{R}^*_{+}$.

GRÁFICO



INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

Para resolvermos uma inequação exponencial devemos respeitar as seguintes propriedades:

Quando as bases são maiores que 1 ($a > 1$), a relação de desigualdade se mantém.

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

Quando as bases estão compreendidas entre 0 e 1 ($0 < a < 1$) a relação de desigualdade se inverte.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

OBS:

Para resolver exponencial a dica é analisar as bases das potências e fatorar para deixar em uma mesma base. Muito comum também em alguns casos fazer a mudança de variável, isto é chamar certa potencia 3^x por exemplo de y e resolver a equação.

Exemplo-1

Calcula valor de x em $2^x = 128$.

Sol. Fatorando $128 \rightarrow 2^7$

Então $2^x = 2^7 \rightarrow x = 7$

Exemplo-2

Qual valor de x na equação $25 \cdot 3^x = 15^{2x}$?

Sol. Passe 3^x para outro lado...

$$25 = \left(\frac{15}{3}\right)^x \rightarrow 25 = 5^x$$

Então $x = 2$

Exemplo-3

Determine as raízes de $2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = 0$.

Sol. Faça $2^x = y$ e veja $y^2 - 2y + 1 = 0$

Então $y = 1$, portanto $2^x = 1 \rightarrow x = 0$

AULA 06 - LOGARITMOS

DEFINIÇÃO

Dado um número a , positivo e diferente de um, e um número b positivo, chama-se logaritmo de b na base a ao real x tal que $a^x = b$.

Condição de Existência : $a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$

$$\log_a b = x$$

Em $\log_a b = x$ temos que:

a = base do logaritmo

b = logaritmando ou antilogaritmo

x = logaritmo

$$\Leftrightarrow$$

$$a^x = b$$

Observe que a base muda de membro e carrega x como expoente.

Exemplos:

1) $\log_6 36 = x \rightarrow 36 = 6^x \rightarrow 6^2 = 6^x \rightarrow x = 2$

2) $\log_5 625 = x \rightarrow 625 = 5^x \rightarrow 5^4 = 5^x \rightarrow x = 4$

Existe uma infinidade de sistemas de logaritmos. Porém, dois deles se destacam:

• **Sistemas de Logaritmos Decimais:**

É o sistema de base 10, também chamado sistema de logaritmos comuns ou vulgares, ou de Briggs (Henry Briggs, matemático inglês (1561-1630)). Quando a base é 10 costuma-se omitir a base na sua representação.

• **Sistemas de Logaritmos Neperianos:**

É o sistema de base e ($e = 2, 718...$), também chamado de sistema de logaritmos naturais. O nome neperiano deve-se a J. Neper (1550-1617).

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS

- $\log_b a + \log_b c = \log_b (ac)$
- $\log_b a - \log_b c = \log_b (a/c)$

$$\log_b a^c = \frac{c}{d} \log_b a$$

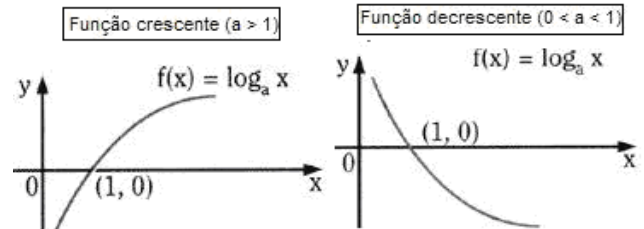
$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \dots \log_x y \cdot \log_y z = \log_a z$$

$$\log_a a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\log_a a = 1$$

$$\alpha^{\log_a \beta} = \beta$$

GRÁFICO



Exercício Resolvido:

Sabendo-se que $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,47$. Calcule o valor de $\log 18$.

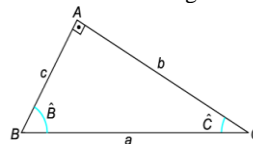
Sol. $\log 18 = \log(2 \cdot 3^2) \rightarrow \log 18 = \log 2 + \log 3^2 \rightarrow$

$\log 18 = \log 2 + 2\log 3 \rightarrow \log 18 = 0,30 + 2 \cdot 0,47$

$\log 18 = 1,24$

AULA 07 - TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

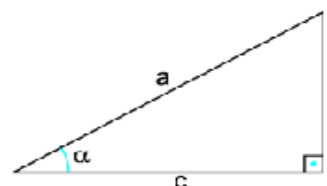
Considere o triângulo retângulo ABC



Nesse triângulo podemos destacar os seguintes elementos:

- AB e AC são os catetos
- BC é a hipotenusa
- C e B são os ângulos agudos

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS



$$\text{sen } \alpha = b/a$$

$$\text{cos } \alpha = c/a$$

$$\text{tg } \alpha = b/c$$

OBS: Sempre que tivermos θ e α complementares, serão válidas as relações: $\text{sen } \theta = \text{cos } \alpha$ e $\text{sen } \alpha = \text{cos } \theta$.

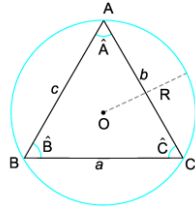
x	Sen x	Cos x	Tg x
30°	1/2	√3/2	√3/3
45°	√2/2	√2/2	1
60°	√3/2	1/2	√3

RELAÇÕES METRICAS NO TRIÂNGULO QUALQUER

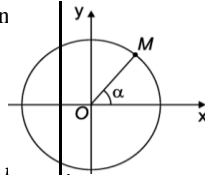
As seguintes relações que iremos ver abaixo são validas para qualquer triângulo. Elas recebem o nome de LEI DOS SENOS e LEI DOS COSENOS.

LEI DOS SENOS

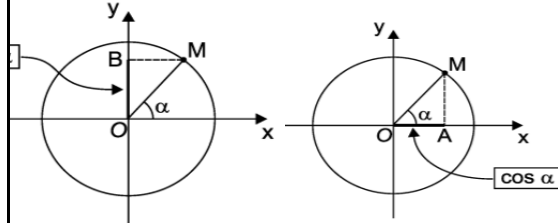
Num triângulo qualquer, os lados são proporcionais aos ângulos opostos. A razão de proporção é o círculo circunscrito ao triângulo



$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} = \text{diâmetro}$$



- Denomina-se $\operatorname{sen} \alpha$ a projeção do raio OM, pela extremidade M do arco sobre o eixo y.
- Denomina-se $\operatorname{cos} \alpha$ a projeção do raio OM, pela extremidade M do arco sobre o eixo x.

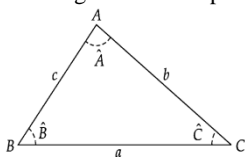


Note que: $-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$ e $-1 \leq \operatorname{cos} \alpha \leq 1$

OBS: Com o auxílio da simetria de arcos é possível determinar os valores de seno e co-seno de arcos do 2º, 3º e 4º quadrantes. Como raio do círculo trigonométrico é unitário, podemos afirmar que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$ em qualquer ângulo α .

LEI DOS COSENOS

Num triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas destes lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{cos} A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \operatorname{cos} B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{cos} C \end{aligned}$$

AULA 08 - INTRODUÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Arco de uma circunferência é cada uma das partes que ficam divididas uma circunferência por dois quaisquer de seus pontos.

A cada arco corresponde um ângulo central (ângulo que possui vértice no centro da circunferência).

Para medir arcos e ângulos usaremos o grau e o radiano.

- Graus: Um arco de um grau (1°) é aquele cujo comprimento é igual a do comprimento da circunferência. 1 360 Logo, a circunferência tem 360° . Os Submúltiplos do Grau são os minutos e segundos: $1^\circ = 60'$ $1' = 60''$
- Radiano: Um radiano é um arco cuja medida é igual ao raio da circunferência onde está contido.

Uma circunferência de raio unitário possui 2 radianos de comprimento. Pode-se, então, estabelecer uma relação entre graus e radianos.

OBS:

- Quando numa circunferência de raio unitário se estabelece um sentido de deslocamento, diz-se que se define o **ciclo trigonométrico**.
- Os eixos x e y dividem o ciclo em quatro partes denominadas quadrantes
- O sentido positivo é o anti-horário.

ARCOS CÔNGRUOS

Dois ou mais arcos são côngruos quando a diferença entre seus valores é um múltiplo de 360° .

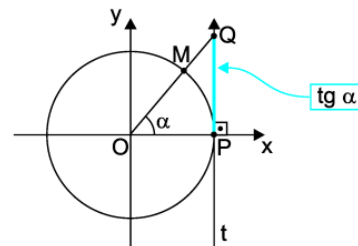
Exemplo: 1) $30^\circ, 390^\circ, 750^\circ, 1110^\circ, \dots$

Veja que esses arcos possuem a mesma extremidade e diferem apenas no número de voltas.

SENO e COSSENO DE UM ARCO

TANGENTE DE UM ARCO

Associa-se a circunferência trigonométrica mais um eixo, a reta t , que tangencia a circunferência no ponto P de coordenadas (1,0). Define-se como tangente do arco PM ao segmento PQ determinado sobre o eixo das tangentes.



AULA 09 - RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Vamos definir algumas razões que envolva os principais elementos: seno e cosseno.

$$\text{Tangente} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$$\text{Cotangente} \rightarrow \operatorname{cot} \alpha = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\text{Secante} \rightarrow \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$$\text{Cossecante} \rightarrow \operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

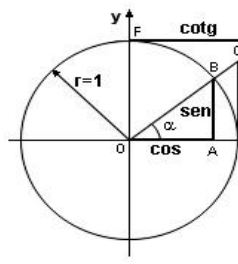
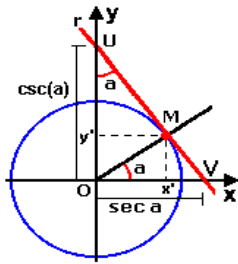
De $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$, podemos obter mais duas relações:

$$1 + \operatorname{cot}^2 \alpha = \operatorname{cossec}^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha$$

SINAIS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

	1ºQ	2ºQ	3ºQ	4ºQ
seno e cossecante	+	+	-	-
cosseno e secante	+	-	-	+
tangente e cotangente	+	-	+	-



unitário. Na análise matemática, estas funções recebem nomes ainda mais gerais, na forma de séries infinitas ou como soluções para certas equações diferenciais. Neste último caso, as funções trigonométricas estão definidas não só para ângulos reais, mas também para ângulos complexos.

AULA 10 - SOMA DE ARCOS

São válidas as seguintes fórmulas, que devem ser memorizadas! Repito aqui, que uma das dificuldades da Trigonometria é essa necessidade imperiosa de memorização de fórmulas. Entretanto, a não memorização levaria a perda de tempo para deduzi-las durante as provas, o que tornaria a situação impraticável.

Talvez, a melhor solução seria aquela em que os examinadores que elaboram os exames vestibulares inserissem como anexo de toda prova, um resumo das fórmulas necessárias à sua resolução, exigindo do candidato, apenas o conhecimento e o raciocínio necessários para manipulá-las algebricamente e, aí sim teria sido feito justiça! Fica a sugestão as bancas de concurso!

SENO E COSSENO DE ADIÇÕES

$$\begin{aligned} \cos(a - b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\ \cos(a + b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \sin(a - b) &= \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \end{aligned}$$

ARCO DUPLO

Ao fazer a condição de $a = b = \theta$ obtemos:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin(2\theta) &= 2\sin\theta \cos\theta \\ \bullet \quad \cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \bullet \quad \operatorname{tg}(2\theta) &= \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta} \end{aligned}$$

ARCO METADE

Trabalhando as equações acima chegamos ainda

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} \\ \bullet \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} \\ \bullet \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned}$$

AULA 11 - FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Em matemática, as **funções trigonométricas** são funções angulares, importantes no estudo dos triângulos e na modelação de fenômenos periódicos. Podem ser definidas como razões entre dois lados de um triângulo retângulo em função de um ângulo, ou, de forma mais geral, como razões de coordenadas de pontos no

FUNÇÃO SENO

Associa a cada número real x o número $y = \operatorname{sen} x$

- Domínio: pode assumir qualquer valor real: $D = \mathbf{R}$.

Conjunto Imagem: $\operatorname{Im} = \{-1; 1\}$

Gráfico: Ele sempre se repete no intervalo de 0 a 2π .

Esse intervalo é denominado **senóide**.

Período: 2π .

FUNÇÃO COSSENO

Associa a cada número real x o número $y = \operatorname{cos} x$

- Domínio: pode assumir qualquer valor real: $D = \mathbf{R}$

- Conjunto Imagem: $\operatorname{Im} = \{-1; 1\}$

- Gráfico: Ele sempre se repete no intervalo de 0 a 2π .

Esse intervalo é denominado **cossenóide**.

- Período: 2π .

FUNÇÃO TANGENTE

Associa a cada número real x o número $y = \operatorname{tg} x$.

- Domínio: A função da tangente apresenta uma peculiaridade. Ela não existe quando o valor de $\operatorname{cos} x = 0$ (não existe divisão por zero), portanto o domínio são todos os números reais, exceto os que zeram o cosseno.

- Conjunto Imagem: $\operatorname{Im} =]-\infty, \infty[$

- Gráfico: Tangentóide.

- Período: π

OBS:

Podemos considerar uma função seno ou cosseno dita como completa quando expressa por:

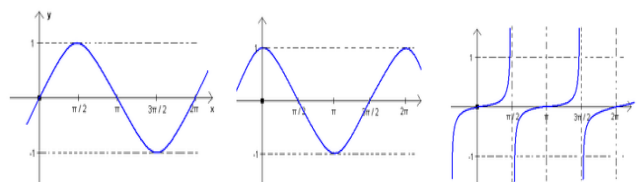
$$F(x) = A + B \cdot \operatorname{sen}(Cx + D), \text{ onde:}$$

- $\operatorname{Im} = \{A+B; A-B\}$

- Período = $\frac{2\pi}{C}$.

- Fase inicial (x_0) = D

GRÁFICOS



AULA 12 - NÚMEROS COMPLEXOS I

O conjunto dos números complexos é o conjunto que possui a maior cardinalidade, afinal ele contém todos os outros conjuntos. É necessário, pois, compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo elementos desse conjunto, assim como a representação geométrica dos números complexos.

ORIGEM E POTÊNCIAS DE i

No estudo dos números complexos deparamos com a seguinte igualdade: $i^2 = -1$.

A justificativa para essa igualdade está geralmente na resolução de equações do 2º grau com raízes quadradas reais, o que é um erro. A origem da expressão $i^2 = -1$ aparece na definição de números complexos, outro assunto que também gera muita dúvida. Quanto as potências...

Veja o cálculo das primeiras potências de i com expoente natural:

$$i^0 = 1, \text{ por definição} \quad i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^1 = i, \text{ por definição} \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^2 = -1, \text{ constatado no item 4} \quad i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \quad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

Multiplicação: Dado dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, ao multiplicarmos teremos:
 $(a + bi) \cdot (c + di) \rightarrow ac + adi + bci + bdi^2$
 $ac + adi + bci + bd(-1) \rightarrow ac + adi + bci - bd$
 $ac - bd + adi + bci \rightarrow (ac - bd) + (ad + bc)i$
 Portanto, $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Divisão: Ao dividirmos dois números complexos devemos inserir na forma de fração e multiplicarmos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, veja como:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \rightarrow \frac{a + bi}{c + di} \left(\frac{c - di}{c - di} \right)$$

AULA 13 – NÚMEROS COMPLEXOS II

Vimos na aula passada a forma algébrica de um número complexo ($z = a + bi$). Hoje vamos ver a representação em um plano cartesiano de coordenadas complexas.

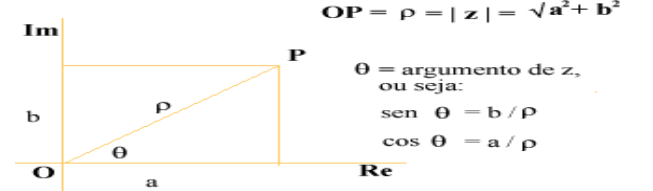
O par ordenado (x; y) tem sua abscissa x no eixo dos reais e a ordenada y no eixo dos imaginários. Desta forma vamos a estudos detalhados até chegar a forma trigonométrica.

PLANO CARTESIANO

Na ilustração temos a representação de um numero complexo no plano cartesiano. Dois elementos são importantes no estudo nesse momento:

- **Módulo:** é a distancia do ponto P a origem (0; 0). Para $z = a + bi$ teremos $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- **Argumento:** é o ângulo formado entre o segmento OP e o eixo x no sentido anti-horario. Para $z = a + bi$ teremos $tg \theta = \frac{b}{a}$.

GRAFICAMENTE



FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR

O item anterior mostra que $\text{sen } \theta = \frac{b}{\rho}$ e $\text{cos } \theta = \frac{a}{\rho}$. Bem, como $z = a + bi$, podemos escrever

$$z = \rho(\text{cos } \theta + i \text{sen } \theta)$$

Quando temos uma potência de z na forma trigonométrica, escrevemos:

$$z^n = \rho^n (\text{cos}(n\theta) + i \text{sen}(n\theta))$$

AULA 14 – POLINÔMIOS

Chamamos **monômio** na variável x toda expressão do tipo $a \cdot x^n$. Nesta expressão, a constante a e a variável x são definidas no **universo complexo** e o expoente n é um **número natural**.

O número a é o coeficiente numérico e x^n é a parte literal do monômio. Caso o coeficiente a seja um número diferente de zero,

Teorema

$$\begin{array}{l} n \\ r \end{array} \left| \begin{array}{l} 4 \\ q \end{array} \right. \Rightarrow n = 4q + r \Rightarrow i^n = i^{4q+r} \Leftrightarrow i^n = (i^4)^{2q} \cdot i^r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i^n = (-1)^{2q} \cdot i^r \Leftrightarrow i^n = 1 \cdot i^r \Leftrightarrow i^n = i^r$$

PARTICULARIDADES DOS COMPLEXOS

Oposto: O oposto de qualquer número real é o seu simétrico, o oposto de 10 é -10, o oposto de -5 é +5. O oposto de um número complexo respeita essa mesma condição, pois o oposto do número complexo z será -z.

Conjugado: Para determinarmos o conjugado de um número complexo, basta representar o número complexo através do oposto da parte imaginária. O conjugado de $z = a + bi$ será: $\bar{z} = a - bi$.

Igualdade: Dois números complexos serão iguais se, e somente se, respeitarem a seguinte condição (para $z = a + bi$):

- Partes imaginárias iguais (b)
 - Partes reais iguais (a)
- Dado os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, z_1 e z_2 , serão iguais se, somente se, $a = c$ e $bi = di$.

OPERAÇÃO COM NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos são escritos na sua forma algébrica da seguinte forma: $a + bi$, sabemos que a e b são números reais e que o valor de a é a parte real do número complexo e que o valor de bi é a parte imaginária do número complexo.

Adição: Dado dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, ao adicionarmos teremos:

$$z_1 + z_2 \rightarrow (a + bi) + (c + di) \rightarrow a + bi + c + di$$

$$a + c + bi + di \rightarrow a + c + (b + d)i \rightarrow (a + c) + (b + d)i$$

Portanto, $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

Subtração: Dado dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, ao subtraímos teremos:

$$z_1 - z_2 \rightarrow (a + bi) - (c + di) \rightarrow a + bi - c - di \rightarrow a - c + bi - di$$

$$(a - c) + (b - d)i$$

Portanto, $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$.

o expoente n é o grau do monômio. Caso contrário, $p(x) = (7x^3 + 5x^2 - 4x^2) - 3x + (1-7) = 7x^3 + x^2 - 3x - 6$.

a é nulo, dizemos que o grau do monômio não é definido.

Ex. O monômio $-5x^6$ tem grau 6.

Note que a expressão $2x^{\frac{1}{2}} - 3x + 5$ não é um monômio, pois o expoente $1/2$ não é um número natural.

Podemos generalizar a representação de um polinômio na variável x da seguinte forma:

$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$. Evidentemente, cada $a_n \neq 0$ então o grau do polinômio é igual a n .

ELEMENTOS DE UM POLINÔMIO

Dado um polinômio na variável x $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$. Cada

constitui esse polinômio é um **termo** de $p(x)$ e, em particular, o monômio a_0 , é o **termo independente**. Os números

a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 e a_0 são os coeficientes de $p(x)$.

OBS

Note que na soma e na subtração de dois polinômios, caso o resultado não seja o polinômio nulo, o grau do resultado é no **máximo** o maior dos graus dos polinômios.

Multiplicação: Para multiplicar dois polinômios, devemos multiplicar cada monômio de um deles por todos os monômios do outro e somar os resultados de mesmo grau.

Ex. Dados $p(x) = 2x+3$ e $g(x) = 5x^2 + 4x + 1$, temos:

$$p(x) \cdot g(x) = (2x + 3)(5x^2 + 4x + 1)$$

$$p(x) \cdot g(x) = (10x^3 + 8x^2 + 2x) + (15x^2 + 12x + 3)$$

$$p(x) \cdot g(x) = 10x^3 + 23x^2 + 14x + 3$$

OBS Note que na multiplicação de polinômios não-nulos o grau do resultado é a soma dos graus dos dois polinômios.

Divisão: Dados os polinômios $P(x)$ e $D(x)$, com $D(x)$ não identicamente nulos, dividir $P(x)$ por $D(x)$ equivale obter os polinômios $Q(x)$ (quociente) e $R(x)$ (resto), tais que:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = \frac{Q(x)}{D(x)} + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Onde:
 $P(x)$ é o dividendo
 $D(x)$ é o divisor
 $Q(x)$ é o quociente
 $R(x)$ é o resto

- $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$
- $gr(R) < gr(D)$ ou $R(x) = 0$

POLINÔMIO IDENTICAMENTE NULO

Um polinômio p , definido na variável x , é identicamente nulo se, e somente se, **todos os coeficientes de p forem nulos**.

VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO

Valor Numérico de um polinômio $P(x)$, é o valor que se obtém substituindo a variável x por um número e efetuando as operações indicadas. Observação: Quando $P(\alpha) = 0$ dizemos que α é a raiz do polinômio.

Observe que os números 2 e 3 são raízes do polinômio $P(x) = x^2 - 5x + 6$, pois $P(2) = 0$ e $P(3) = 0$.

OBS

- Se $p(\alpha) = 0$ então α é **raiz** do polinômio.
- Note que o valor numérico do polinômio $p(x)$ para $x = 1$ é igual à soma dos coeficientes do polinômio, i.e., $p(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$
- Note que o valor numérico do polinômio $p(x)$ para $x = 0$ é igual ao termo independente, i.e., $p(0) = a_0$.

POLINÔMIOS IDÊNTICOS

Dois polinômios, p e q , definidos na variável x , são idênticos se, e somente se, os seus termos correspondentes tiverem coeficientes respectivamente iguais. Indicaremos a identidade entre os polinômios por $p \equiv q$.

Ex. Se $p(x) = 8x^2 - 7x + 11$ é idêntico a $q(x) = ax^2 + bx + c$, então $a = 8$, $b = -7$ e $c = 11$.

OPERAÇÃO COM POLINÔMIOS

Adição: Para somar dois polinômios definidos em uma mesma variável, basta somar os monômios de mesmo grau.

Ex. Dados $p(x) = 7x^3 + 5x^2 + 1$ e $q(x) = 4x^2 + 3x + 7$, temos:
 $p(x) + q(x) = 7x^3 + (5x^2 + 4x^2) + 3x + (1+7) \Rightarrow 7x^3 + 9x^2 + 3x + 8$.

Subtração: Para subtrair dois polinômios definidos em uma mesma variável, devemos subtrair seus respectivos monômios de mesmo grau.

Ex. Dados $p(x) = 7x^3 + 5x^2 + 1$ e $q(x) = 4x^2 + 3x + 7$, temos:

OBS:

O grau de $Q(x)$ é a diferença entre os graus de $P(x)$ e de $D(x)$, ou seja, $gr(Q) = gr(P) - gr(D)$

Se $R(x)$ for um polinômio nulo, apontamos que $P(x)$ é divisível por $D(x)$, dizemos então, que a divisão é exata.

TEOREMA DO RESTO

O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ pelo binômio $x - a$ é igual a $p(a)$. Note que o número a é a **raiz** do divisor $d(x) = x - a$.

Ex. Determine o resto da divisão do polinômio $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $d(x) = x - 2$.

Solução:

Note que $x = 2$ é a raiz do divisor. Pelo teorema do resto, o resto da divisão de $p(x)$ por $d(x)$ é igual a $p(2) = 3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 4$.

Consequência: um polinômio $p(x)$ é **divisível** pelo binômio $x - a$ se, e somente se, $p(a) = 0$, ou seja, se o número a for raiz de $p(x)$. (**Teorema de D'Alembert**).

DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI

O dispositivo de Briot-Ruffini, também conhecido como algoritmo de Briot-Ruffini, é um modo prático para dividir um polinômio $P(x)$ por um binômio da forma $ax + b$.

Ex: Determine o quociente e o resto da divisão da divisão de $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$ por $(x - 3)$

1º Passo Dispõem-se todos os coeficientes de $P(x)$ de forma ordenada e segundo os expoentes decrescentes de x na chave.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & 4 & -1 \\ \hline & & & & \end{array}$$

2º Passo Coloca-se à esquerda a raiz do divisor.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ \hline & & & & \end{array}$$

3º Passo Abaixa-se o primeiro coeficiente de $P(x)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ & & 2 & & \end{array}$$

4º Passo Multiplica-se o coeficiente baixado pela raíza resultado com o próximo coeficiente de P(x) e o resultado desse último.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ x \uparrow & & 2 & 5 & \end{array}$$

5º Passo Multiplica-se o esse último resultado pela raiz e soma o resultado com o próximo coeficiente de P(x) de forma análoga ao passo, e assim sucessivamente.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ x \uparrow & & 2 & 5 & 19 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & 4 \\ x \uparrow & & 2 & 5 & 19 \end{array}$$

Terminando assim o processo, temos:

raiz	coeficientes de P(x)			
	2	5	19	56

abrte: dizer que P e Q são primos entre si equivale a dizer que é uma fração irredutível.

Pesquise as raízes racionais da equação $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$.

Solução Na equação dada, temos $a_0 = 2$ e $a_n = 3$. Segundo o teorema das raízes racionais, temos:

$$p \text{ é divisor de } 2 \Rightarrow p \in \{-2, -1, 1, 2\}$$

$$q \text{ é divisor de } 3 \Rightarrow q \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$\text{Logo, } \frac{p}{q} \in \left\{ -1, 1, -2, 2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

Usando o último algoritmo de Briot-Ruffini, vemos que as raízes racionais são $-2, 1/3$ e 1 .

que nem todo número P/Q é raiz da equação. Uma equação polinomial de coeficientes inteiros admite como raiz o número irracional $a + \sqrt{b}$, então $a - \sqrt{b}$ também é raiz.

6. Relações de Girard

As relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação algébrica são denominadas relações de Girard.

Vimos que toda equação polinomial pode ser decomposta em fatores de primeiro grau. Tomemos, sem perda de generalidade, uma equação de segundo grau:

$ax^2 + bx + c = 0$ ou $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$ com $a \neq 0$. Segundo Girard, é possível relacionar os coeficientes a, b e c com as raízes r_1 e r_2 da equação. Veja.

Como $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$ e dividindo ambos os membros por a , temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2$$

Igualando os coeficientes correspondentes, obtemos as duas relações de Girard:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

De maneira análoga, para uma equação de grau 3, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, seguem as três relações de Girard:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = \frac{c}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Sendo assim, por indução, podemos provar por este mesmo raciocínio que toda equação algébrica de grau n ($n > 1$) possui n relações de Girard.

É importante observar que dada a equação $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, a primeira relação sempre representa a soma e a última o produto das raízes. Isto posto, segue que:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \text{ e}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_n = \frac{a_0}{a_n}, \text{ para } n \text{ par.}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_n = -\frac{a_0}{a_n}, \text{ para } n \text{ ímpar.}$$

AULA 15 – EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Chamamos equação polinomial de grau n toda equação do tipo $p(x) = 0$, onde $p(x)$ é um polinômio de grau n definido na variável x .

Ex. $3x^3 - 4x^2 - 5 = 0$ é uma equação polinomial de grau 3.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ALGEBRA

Toda equação polinomial de grau maior que zero admite pelo menos uma raiz complexa.

Consequentemente podemos afirmar que todo polinômio de grau $n > 1$ pode ser decomposto em um produto de fatores de 1º grau, ou seja,

$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$, em que r_i são as raízes de $p(x)$ e a_n é o coeficiente de x^n .

Note que dessa decomposição podemos concluir que um polinômio de grau n admite n raízes complexas.

MULTIPLICIDADE DE UMA RAIZ

Se na decomposição do polinômio $p(x)$ em fatores de 1º grau, o fator $(x - r)$ aparecer k , e somente k , vezes, dizemos que o número r é raiz com multiplicidade k de $p(x)$.

Ex. Dado $p(x) = 7(x - 2)^3(x - 5)^2(x + 8)$, temos:

o número 2 é raiz com multiplicidade 3 ou é raiz tripla.

o número 5 é raiz com multiplicidade 2 ou é raiz dupla.

o número -8 é raiz com multiplicidade 1 ou é raiz simples.

RAÍZES COMPLEXAS

Se o número r é raiz da equação polinomial cujos coeficientes são todos números reais, então o número \bar{r} , conjugado de r , também é raiz dessa equação com a mesma multiplicidade de r .

RAÍZES RACIONAIS

Se o número racional P/Q, com P e Q primos entre si, é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, então P é divisor de a_0 e Q é divisor de a_n .

|