SISTEMAS LINEARES
GABARITO COMENTADO

1)

a. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+y=1 \end{cases} \xrightarrow{\textit{Multiplicando a Eq 1 por 2}} \begin{cases} 2x+4y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases} \overset{(-)}{\Longrightarrow} 3y=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x = 1-2y = 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. Logo, $\boxed{(x,y)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}$

b. Esse sistema é muito recorrente e a solução dele é importante que você decore. Se cada equação é a soma de todas as variáveis, com exceção de uma, a ideia é somar tudo! Assim:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ y+z=3 \\ x+z=3 \end{cases} \Rightarrow 2x+2y+2z=10 \Leftrightarrow x+y+z=5$$

Assim, se $x+y=4$ e $x+y+z=5$, então $z=1$; portanto, $x+z=3$ nos dá $x=2$ e $y=2$. Logo, $\boxed{(x,y,z)=(2,2,1)}$

c. Perceba que a variável mais fácil de "matar" é z. Subtraia as equações 1 e 2, obtendo: $3x+y=2$. Subtraia as equações 2 e 3, obtendo: $5x+y=2$. Agora, subtraia estas últimas duas equações encontradas:

$$\begin{cases} 3x+y=2 \\ 5x+y=2 \end{cases} \overset{(-)}{\Longrightarrow} 2x=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow z=1$$

Logo, $\boxed{(x,y,z)=(0,2,1)}$

2) (**Letra C**) Sejam e o preço da esfirra e g o preço do guaraná. Pelos dados do problema, temos:
$\begin{cases} g+2e=5 \\ 2g+e=4 \end{cases} \xrightarrow{\textit{Multiplicando a Eq 1 por 2}} \begin{cases} 2g+4e=10 \\ 2g+e=4 \end{cases} \overset{(-)}{\Longrightarrow} 3e=6 \Leftrightarrow e=2 \Rightarrow g=1$

Sendo assim, Julia gastou $2e+2g=k=6$ reais.

3) (**Letra A**) Sejam x, y, z os preços da tigela de açaí, da cuia de tacacá e do prato de maniçoba, respectivamente. Pelos dados do problema, temos:

$$\begin{cases} 9x+7y+6z=52{,}5 \;\; (*) \\ 5x+4y+3z=25 \;\; (**) \end{cases}$$

Como queremos o valor de $2x + y + 3z$, e dado que o sistema é subdimensionado, isto é, temos menos equações do que variáveis, não vamos encontrar o valor de cada variável separadamente. A ideia aqui é tentar combinar as equações para obtermos diretamente $2x + y + 3z$. Se multiplicarmos a primeira equação por a e a segunda por b, gostaríamos que:

$$\begin{cases} 9a - 5b = 2 \\ 7a - 4b = 1 \\ 6a - 3b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a - 5b = 2 \\ 7a - 4b = 1 \\ 2a - b = 1 \end{cases}$$

Usemos as duas primeiras equações:

$$\begin{cases} 9a - 5b = 2 \\ 7a - 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b) = (3{,}5)$$

Veja que esta solução é também solução da equação $2a - b = 1$; portanto, multipliquemos (*) por 3 e (**) por 5:

$$\begin{cases} 27x + 21y + 18z = 157{,}5 \\ 25x + 20y + 15z = 125 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \boxed{2x + y + 3z = 32{,}5}$$

4) (**Letra C**) Primeiramente, veja que

$$B = A + A^T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 3 & k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ k & k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & k+3 \\ k+3 & 2k^2 \end{pmatrix}$$

Assim, o sistema que temos é:

$$\begin{pmatrix} 2 & k+3 \\ k+3 & 2k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2021 \\ 2022 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (k+3)y = 2021 \\ (k+3)x + 2k^2 y = 2022 \end{cases}$$

Vamos ver os casos em que o sistema não é possível e determinado, ou seja, quando $\begin{vmatrix} 2 & k+3 \\ k+3 & 2k^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4k^2 - (k+3)^2 = 0 \Leftrightarrow k = -1$ ou $k = 3$. Se $k = -1$, o sistema se reduz a:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 2021 \\ 2x + 2y &= 2022 \end{aligned}$$

Repare que os coeficientes de x e y são iguais em ambas as equações, mas os termos independentes não são. Logo, o sistema é IMPOSSÍVEL.

5) (**Letra A**) Vamos escalonar o sistema, usando a matriz aumentada:

$$\left|\begin{matrix}1 & 1 & 4\\1 & 2 & 7\\3 & 1 & a\end{matrix}\right|\begin{matrix}2\\3\\b\end{matrix} \xrightarrow[L_1\cdot 3-L_3]{L_1\cdot 1-L_2} \left|\begin{matrix}1 & 1 & 4\\0 & -1 & -3\\0 & 2 & 12-a\end{matrix}\right|\begin{matrix}2\\-1\\6-b\end{matrix} \xrightarrow{L_2\cdot(-2)-L_3} \left|\begin{matrix}1 & 1 & 4\\0 & -1 & -3\\0 & 0 & -6+a\end{matrix}\right|\begin{matrix}2\\-1\\-4+b\end{matrix}$$

A última equação é equivalente a $(-6+a)z = -4+b$. Se o sistema é impossível, esta equação deve ser impossível; logo:

$$-6+a = 0\ e -4+b \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 6\ e\ b \neq 4}$$

6) (**Letra A**) O sistema possui solução única quando o determinante principal é não nulo. Logo:

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a-1 \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{a \neq 1}$$

7) (**Letra A**) Vamos calcular os valores de k para os quais o determinante se anula, ou seja, para os quais o sistema não é possível e determinado:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\2 & k & 6\\-1 & 3 & k-3\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k^2+4k = 0 \Leftrightarrow k = 0\ ou\ k = -4$$

Se $k = 0$, o sistema linear se reduz a:

$$\begin{cases}x-2y+3z = 1\\2x+6z = 6\\-x+3y-3z = 0\end{cases}$$

Somando a primeira e a última equação, encontramos $y = 1$. Assim, as equações se reduzem a $x+3z = 3$, indicando que o sistema terá infinitas soluções.

Se $k = -4$, o sistema linear se reduz a:

$$\begin{cases}x-2y+3z = 1\\2x-4y+6z = 6\\-x+3y-7z = 0\end{cases}$$

que é claramente impossível, pois a primeira e a segunda equações são incompatíveis.

Portanto, T = -4 e S = 0; logo: $T-S = \boxed{-4}$

8) (**Letra B**) O sistema é possível e determinado quando:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 3a+3 \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{a \neq -1}$$

9) (**Letras B/C**) Vamos escalonar o sistema, usando a matriz aumentada:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -m & -3 \\ 1 & 3 & m \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ m \end{matrix} \xrightarrow[L_1\cdot 1-L_3]{L_1\cdot 1-L_2} \left|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2+m & 2 \\ 0 & -1 & -1-m \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -m \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\cdot(2+m)+L_2} \big((-1-m)(2+m)+2\big)z = -m(2+m)$$

$$\Leftrightarrow (-m^2-3m)z = -m^2-2m$$

Portanto, temos:

- $-m^2-3m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3\ e\ m \neq 0$, o sistema é SPD;
- $-m^2-3m = 0$ e $-m^2-2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$, neste caso o sistema é SPI;
- $-m^2-3m = 0$ e $-m^2-2m \neq 0 \Leftrightarrow m = -3$, neste caso o sistema é SI.
- Se $m = 0$, o sistema será homogêneo; assim, da segunda equação, $x = 3z$ e da terceira equação, $y = -\frac{x}{3}$. Portanto, $x+y+z = 3z - \frac{3z}{3} + z = 3z$, que só será múltiplo de 3 caso z seja um inteiro.

10)(**Letra C**) Façamos a transformação de variáveis $\frac{1}{x} = a$, $\frac{27}{y^2} = b$ e $\frac{8}{z^3} = c$; assim, teremos:

$$\begin{cases} a+b+c = 3 \\ 4a+3b+5c = 10 \\ 2a+2b+3c = 7 \end{cases}$$

cuja solução é $(a,b,c) = (-1,3,1)$. Assim:

$$\frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\frac{27}{y^2} = 3 \Leftrightarrow |y| = 3$$

$$\frac{8}{z^3} = -1 \Leftrightarrow |z| = 2$$

Logo, $|x|+|y|+|z| = 1+3+2 = \boxed{6}$.

11)(**Letra E**) Analisando as afirmativas:

I. (**Verdadeira**) Veja o produto MN, sendo $M = (a_{ij})$ e $N = (x_{ij})$:

$$MN = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Se MN é nula, então devemos ter:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \cdots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ a_{21}x_{1j} + a_{22}x_{2j} + \cdots + a_{2n}x_{nj} = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \cdots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases}, \text{ para todo } j = 1,2,3, \dots, n$$

Isto significa que o sistema acima, que é homogêneo, deve ter soluções diferentes da solução trivial $(0,0,0, \dots, 0)$; de fato isso acontece pois o enunciado nos diz que a matriz $M = (a_{ij})$ é não inversível e, por ter determinante nulo, o sistema linear homogêneo a ela associado será indeterminado. Portanto, existe N não nula tal que $MN = \mathcal{O}$.

II. (**Verdadeira**) Dado que M é inversível, veja que

$$\det(M^2 - M) = 0 \Leftrightarrow \det\big(M(M - I)\big) = 0 \Leftrightarrow \det M \cdot \det(M - I) = 0$$

Logo, necessariamente $\det(M - I) = 0$. Agora, veja que o sistema dado é $MX = X \Leftrightarrow (M - I)X = \mathcal{O}$, que é um sistema linear homogêneo. Como visto antes, $\det(M - I) = 0$ e, portanto, o determinante da matriz principal é nulo. Sendo assim, existem soluções além da trivial para o sistema $MX = X$, ou seja, existe X não nulo tal que $MX = X$.

III. (**Verdadeira**) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \frac{\tan\theta}{\sec\theta} & 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \end{vmatrix} = \cos\theta \cdot \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\theta = 1$, para todo $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Logo, a matriz é inversível.

12)(**Letra C**) Sistemas equivalentes são sistemas que possuem as mesmas soluções. Precisamos buscar valores de m que façam S_1 e S_2 serem satisfeitos para o(s) mesmo(s) par(es) ordenado(s) (x, y, z).

No sistema S_1, temos:

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 12x - 3y + z = 8 \end{cases} \Rightarrow 3(4x - y) + z = 8 \Leftrightarrow z = 2$$

Com este valor de z em S_2, temos:

$$-5y + 5z = 15 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}$$

Retornando a S_1:

$$4x - y = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{10}$$

$$-16x + m^2 y = -12 \Leftrightarrow -\frac{4m^2}{5} = -\frac{36}{5} \Leftrightarrow m = \pm 3$$

Voltando com $x = \frac{3}{10}$ a S_2, teremos:

$$10x + z = m^2 + m - 1 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ ou } m = -3$$

$$5my + (14 - 5m)z = 14m^2 - 56 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ ou } m = -3$$

Logo, para que ambos os sistemas tenham as mesmas soluções, precisamos de um valor único de m que valide a solução nos dois sistemas, e este valor é $m = \quad 3$.