# ESFERA

A esfera é possivelmente o sólido mais conhecido de todos na geometria espacial. Está intensamente presente no nosso cotidiano, desde a bola utilizada nos jogos de futebol mundo afora até o próprio formato do nosso planeta!

Vamos começar definindo esse sólido:

**Definição 1.** Seja um ponto $O$ qualquer no espaço e uma distância R considerada. Uma esfera é o conjunto de todos os pontos cuja distância até o ponto $O$ seja no máximo $R$.

**Obs.:** O ponto $O$ é chamado de centro da esfera e a distância $R$ é o seu raio.

Vamos continuar com outras duas definições importantes:

**Definição 2.** Seja um ponto $P$ qualquer no espaço e considere um ponto $O$ como o centro de uma esfera de raio $R$. Se a distância entre $P$ e $O$ for menor que $R$, $P$ é **interior** à esfera.

**Definição 3.** Seja $P$ um ponto qualquer no espaço e considere um ponto $O$ como o centro de uma esfera de raio $R$. Se a distância entre $P$ e $O$ for maior que $R$, $P$ é **exterior** à esfera.

Você deve estar se perguntando: perfeito, mas e o caso do ponto $P$ citado estiver exatamente na mesma distância $R$ do centro da esfera?

Neste caso, ele pertence à **superfície** da esfera. Ela (também chamada de **superfície esférica**) nada mais é do que o conjunto de todos os pontos no espaço que estão à distância $R$ do centro da esfera.

E é justamente na superfície esférica que estamos interessados no momento: sua área vai determinar a área da esfera como um todo. Para calcular a área da esfera de raio $R$, fazemos uso da seguinte equação:

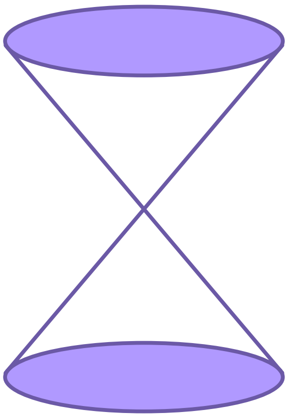
$$A_{esf} = 4\pi R^2$$

Uma vez determinada a área, para calcular o volume ocupado pela esfera, utilizamos a equação abaixo:

$$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

## CLEPSIDRA

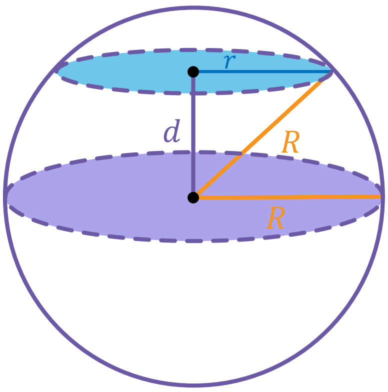
**Curiosidade:** você já viu aqueles relógios antigos, no mesmo estilo das ampulhetas, porém que utiliza água para marcar a passagem do tempo em vez de areia? Estes relógios são chamados de **clepsidras.** A figura abaixo mostra uma clepsidra.



O volume de uma clepsidra se relaciona com o de uma esfera e um cilindro através da seguinte equação:

$$V_{cilindro} = V_{esfera} + V_{clepsidra}$$

Voltamos agora para a esfera em si: imagine que temos uma esfera de raio $R$ e desejamos fazer um "corte" nela utilizando um plano. É possível notar que esse corte, dentro da esfera, terá um formato circular, conforme a figura abaixo denota.

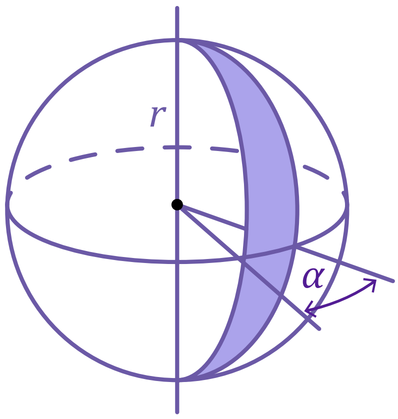



Neste novo círculo está determinado um raio $r$ que vai do seu centro até a superfície da esfera. A distância entre o centro da esfera e o centro desse círculo é chamada de $d$. De forma natural, vemos também que a distância do centro da esfera até a borda deste círculo ocasionado pelo corte também possui o valor $R$ (do raio da esfera).

**Obs.:** Note que $d$, $r$ e $R$ formam um triângulo retângulo.

O sólido "retirado" da esfera ao realizarmos esse corte (ou seja, a "tampa" da esfera) é denominado **calota esférica**.

Vamos continuar agora "desmembrando" a esfera. Você sabe que o planeta Terra realiza uma rotação em torno de si mesmo, correto? Esta rotação é uma das causas de existência dos chamados fusos horários, juntamente com o fato de a Terra possuir um formato esférico. Estabelecemos a mesma ideia para o caso que estamos estudando: se rotacionarmos uma semicircunferência contida na esfera em torno do seu próprio diâmetro por α graus, a superfície esférica "movida" é chamada de **fuso esférico**.



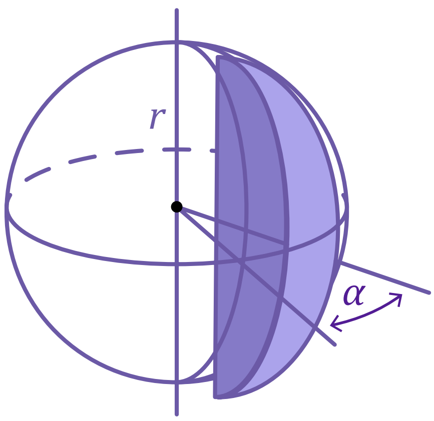

Para calcularmos a área deste fuso esférico, fazemos uso de uma regra de três juntamente com a área da esfera total:

$$\begin{array}{ccc} 360° & - & 4\pi R^2 \\ \alpha & - & A_{fuso} \end{array}$$

Ou seja:

$$\boxed{A_{fuso} = 4\pi R^2 . \left(\frac{\alpha}{360°}\right)}$$

Além disso, se desta vez rotacionarmos um semicírculo contido na esfera em torno do seu próprio diâmetro por α graus, o volume esférico que foi "movido" é chamado de **cunha esférica**.



Para calcularmos o volume desta cunha esférica, podemos também fazer uso de uma regra de três juntamente com o volume da esfera total:

$$\begin{array}{ccc} 360° & - & \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha & - & V_{cunha} \end{array}$$

E assim:

$$V_{cunha} = \frac{4}{3}\pi R^3.\left(\frac{\alpha}{360°}\right)$$

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

Uma esfera de raio $R$ possui uma área esférica $A$ e um volume $V$. Se dobrarmos o valor do seu raio, quanto que a área e o volume serão aumentados?

**Resolução:**

Note que essa esfera de raio $R$ possui as seguintes equações associadas:

$$A = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Se dobrarmos o seu raio (denotando o novo raio como $R' = 2R$), teremos:

$$A' = 4\pi R'^2 = 4\pi(2R)^2 = 4.4\pi R^2 = 4.A$$

$$V' = \frac{4}{3}\pi R'^3 = \frac{4}{3}\pi(2R)^3 = 8.\frac{4}{3}\pi R^3 = 8.V$$

Logo, temos como solução que se dobrarmos o raio da esfera, a nova área será quatro vezes maior que a anterior e o novo volume será oito vezes maior que o anterior.

**ANOTAÇÕES**