POLÍGONOS

Agora que já concretizamos nossa base de geometria plana e estudamos a respeito dos triângulos, vamos aprender sobre **polígonos**. Você já deve ter estudado ou ouvido falar das seguintes figuras geométricas: triângulos, quadriláteros, pentágonos... pois bem, todos eles são polígonos! Mas, afinal, como juntamos todos estes exemplos em uma definição? Leia atentamente:

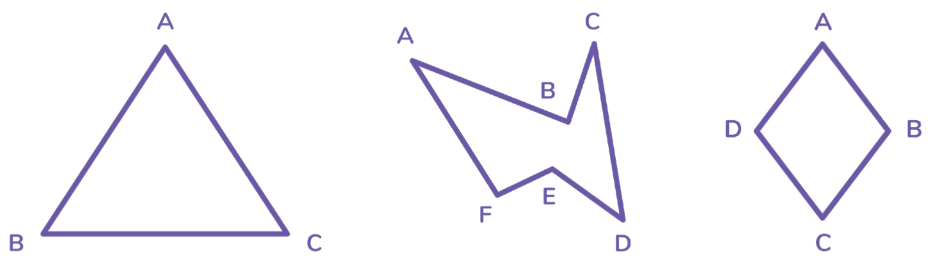
Um polígono é um conjunto de segmentos de reta unidos por pontos.

Na definição acima, os segmentos de reta são os **lados** do polígono e os pontos são os **vértices** do polígono.

Neste ponto, vale ressaltar o seguinte:

- Quando não sabemos a quantidade de lados do polígono, dizemos que o polígono possui n lados;
- O número de lados de um polígono é igual ao seu número de vértices;
- Todos os n vértices são distintos;
- Utilizamos letras maiúsculas do alfabeto para nos referirmos aos vértices do polígono.

De forma mais didática, um polígono será um "objeto fechado" cujos lados não se cruzam internamente. Observe alguns exemplos de polígonos na figura abaixo.



agora alguns exemplos de figuras que **não são** polígonos:

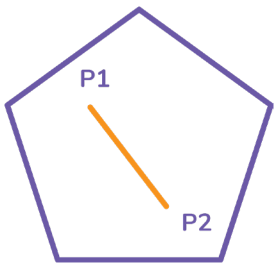
CLASSIFICAÇÃO E NOMENCLATURA DE POLÍGONOS

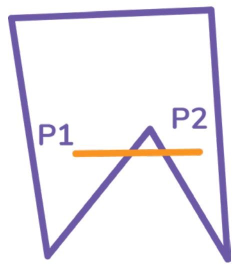
Podemos classificar os polígonos em **convexos** e **côncavos**.

Os polígonos são ditos convexos se, ao traçarmos qualquer reta passando por esse polígono, a reta corta o polígono em no máximo dois de seus lados. Já os polígonos são ditos côncavos se, ao traçarmos qualquer reta passando por esse polígono, a reta corta o polígono em mais do que dois de seus lados.

Existe uma outra forma de saber se o polígono é convexo ou côncavo, que é a seguinte:

Os polígonos são ditos convexos se, ao traçarmos qualquer segmento de reta entre dois de seus lados, o segmento permanecer em seu interior (ou seja, nenhum pedaço do segmento "ficar de fora"). Já os polígonos são ditos côncavos se existe pelo menos um segmento de reta entre dois de seus lados em que o segmento não fique completamente em seu interior. Observe abaixo.





O primeiro polígono é convexo pois não conseguimos traçar um segmento de reta entre dois de seus lados que fique "fora" dele. Já, para o da direita, conseguimos, então ele é um polígono côncavo.

Aqui, vale a pena observar o seguinte:

- Em um polígono convexo, todos os seus vértices apontam para fora;
- Um polígono côncavo, pelo menos um vértice aponta para dentro.

Os polígonos podem receber nomes especiais de acordo com o número de lados que possuem. Esta nomenclatura é mostrada na tabela abaixo:

Lados	Nome
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
12	Dodecágono
20	Icoságono

ÂNGULOS DE UM POLÍGONO

Dado um polígono qualquer, os ângulos compreendidos entre dois de seus lados são os **ângulos internos** do polígono.

Em um polígono convexo, todos os seus ângulos internos são convexos. No caso de um polígono côncavo, pelo menos um de seus ângulos internos é um ângulo côncavo.

Você se lembra que, para um triângulo qualquer, a soma dos seus ângulos internos era igual a 180°? Esta consideração pode ser expandida para qualquer polígono, dizendo que a soma dos ângulos internos (S_i) de um polígono de n lados é dada por:

$$S_i = 180° \,.\, (n - 2)$$

Vemos, então, que a soma dos ângulos internos do triângulo é de $S_i = 180° \,.\, (3 - 2) = 180°$.

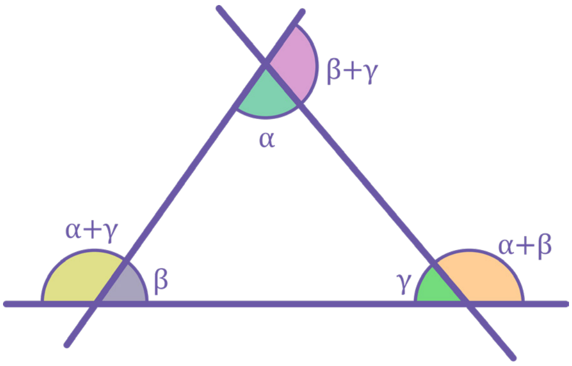
Já falamos sobre ângulo interno, então vamos falar agora de ângulo externo de um polígono.

Dado um polígono qualquer e um ângulo interno desse polígono, o suplemento desse ângulo interno é chamado de ângulo externo.

Assim como é possível encontrar a soma dos ângulos internos do polígono, também é possível encontrar a soma dos seus ângulos externos, que é **sempre igual** a 360°.

$$S_e = 360°$$

Observe a figura abaixo para o caso do triângulo.



$$S_e = (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma) + (\alpha + \beta)$$

$$S_e = 2\,.\,(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$S_e = 2.\overbrace{180°}^{S_i}$$

$$S_e = 360°$$

DIAGONAIS DE UM POLÍGONO

Além da soma dos ângulos internos e externos, podemos calcular o **número de diagonais** de um polígono através do seguinte:

$$d = \frac{n.(n-3)}{2}$$

Em que d é o número de diagonais e n é o número de lados do polígono.

Fique atento: a expressão acima nos informa o **número total** de diagonais do polígono, mas **de cada vértice** de um polígono partem $(n-3)$ diagonais.

Vamos a um exemplo.

Exemplo: Qual o número de diagonais um icoságono?

Solução: Pela nomenclatura dos polígonos, sabemos que um icoságono possui 20 lados. Assim, vamos aplicar a relação vista anteriormente para descobrirmos o número de diagonais:

$$d = \frac{n.(n-3)}{2}$$

$$d = \frac{20.(20-3)}{2}$$

$$d = \frac{20.(17)}{2}$$

$$d = 10.17 = 170$$

Assim, temos como solução que um icoságono possui 170 diagonais.

Dentre os polígonos, os **polígonos regulares** merecem seu destaque, por isso, vamos a eles.

POLÍGONOS REGULARES

Dizemos que um polígono é um **polígono regular** quando todos os lados são congruentes e todos os seus ângulos (internos e externos) são congruentes.

Podemos tirar algumas conclusões dos polígonos regulares através dessa definição. Primeiro, pensemos a respeito da soma dos ângulos internos de um polígono regular.

Sabemos que para um polígono qualquer é válida a relação:

$$S_i = 180° . (n-2)$$

Esta relação, claro, também vale para os polígonos regulares. Entretanto, como em um polígono de n lados temos também n ângulos internos e todos os ângulos do polígono regular são congruentes, podemos calcular o valor de cada um de seus ângulos internos (a_i) da seguinte forma:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{180°.(n-2)}{n}$$

Similarmente, podemos deduzir o valor de cada ângulo externo (a_e) de um polígono regular através de:

$$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{n}$$

É possível também, através destas relações, mostrar que a soma do ângulo externo e interno de um polígono regular vale 180°:

$$a_i + a_e = \frac{180°.(n-2)}{n} + \frac{360°}{n}$$

$$= \frac{180°.n - 180°.2 + 360°}{n}$$

$$= \frac{180°.n}{n}$$

$$= 180°$$

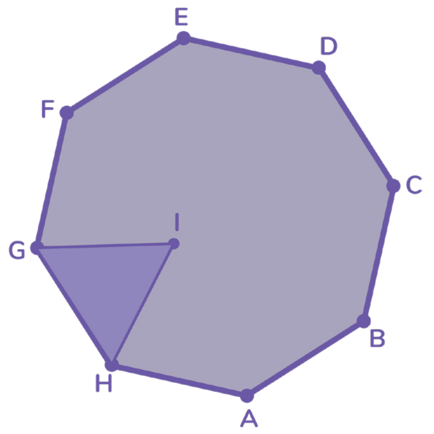
Logo, $a_i + a_e = 180°$.

Observação: As fórmulas para a soma dos ângulos (internos e externos) e número de diagonais são válidas para quaisquer polígonos. As fórmulas dos ângulos internos e externos são válidas **apenas** para os polígonos regulares.

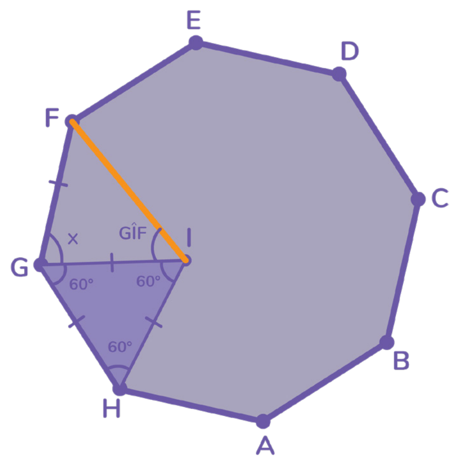
Vamos resolver um exercício.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Exercício: (ENEM PPL Adaptada) As Artes Marciais Mistas (tradução do inglês MMA) são realizadas num octógono regular. De acordo com a figura, em certo momento os dois lutadores estão respectivamente nas posições G e F, e o juiz está na posição I. O triângulo ΔIGH é equilátero e GÎF é o ângulo formado pelas semirretas com origem na posição do juiz, respectivamente passando pelas posições de cada um dos lutadores. Qual é a medida do ângulo GÎF?



Solução: Notamos que o triângulo ΔIGH é equilátero, logo, todos os seus lados têm medidas iguais e cada ângulo interno vale 60°. Também, os lados $\overline{GH}$ e $\overline{FG}$ têm as mesmas medidas (já que o polígono é regular). Vamos redesenhar a figura conforme as informações, anotando as variáveis de interesse para resolver o problema.



Vamos descobrir quanto vale cada ângulo interno desse octógono:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{180°.(n-2)}{n}$$

$$= \frac{180°.(8-2)}{8}$$

$$= \frac{180°.6}{8}$$

$$= 45°.3 = 135°$$

Como cada ângulo interno vale 135°, temos então que o ângulo interno do vértice G vale 135° e assim é possível descobrir o valor de x:

$$x = 135° - 60° = 75°$$

Note que o triângulo ΔIGF é isósceles (dois de seus lados têm medidas iguais). Assim, como os lados $\overline{FG}$ e $\overline{IG}$ são congruentes, os ângulos $G\hat{I}F$ e $G\hat{F}I$ também são congruentes. Já descobrimos a medida do ângulo x e como a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°, resolvemos conforme a seguir:

$$G\hat{I}F + G\hat{F}I + x = 180°$$

$$G\hat{I}F + G\hat{F}I + 75° = 180°$$

$$G\hat{I}F + G\hat{I}F = 105°$$

$$2G\hat{I}F = 105°$$

$$G\hat{I}F = 52{,}5°$$

Assim, o ângulo $G\hat{I}F$ vale 52,5°.

Terminamos então o nosso estudo a respeito de polígonos.

ANOTAÇÕES