Teorema Fundamental da Aritmética

Poliedro Curso

Teorema fundamental da aritmética: todo número inteiro, maior que 1, é primo ou um produto de números primos.

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n}$$

a. $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

b. $144 = 2^4 \cdot 3^2$

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

1. (Uerj 2021) De acordo com o teorema fundamental da aritmética, todo número natural maior do que 1 é primo ou é um produto de números primos. Observe os exemplos:

$1964 = 2^2 \times 491$

$1994 = 2 \times 997$

O maior número primo obtido na fatoração de 1716 é:

a) 17
b) 13
c) 11
d) 7

$$\begin{array}{r|l} 1716 & 2 \\ 858 & 2 \\ 429 & 3 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

letra B

$1713 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$

Divisores: Se a é divisor de b, então $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$

Denominamos:
a divide b
a divisor de b
a é fator de b

divisores de $6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

divisores de $15 = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$

2. (Fuvest 2017) Sejam a e b dois números inteiros positivos. Diz-se que a e b são equivalentes se a soma dos divisores positivos de a coincide com a soma dos divisores positivos de b.

Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

a) 8 e 9. b) 9 e 11. c) 10 e 12.
d) 15 e 20. ~~e)~~ 16 e 25.

letra E

A. $8 \rightarrow \text{Soma} = 1+2+4+8 = 15$

$9 \rightarrow \text{Soma} = 1+3+9 = 13$

B. $9 \rightarrow \text{Soma} = 13$

$11 \rightarrow \text{Soma} = 1+11 = 12$

C. $10 \rightarrow \text{Soma} = 1+2+5+10 = 18$

$12 \rightarrow \text{Soma} = 1+2+3+4+6+12 = 28$

D. $15 \rightarrow \text{Soma} = 1+3+5+15 = 24$

$20 \rightarrow \text{Soma} = 1+2+4+5+10+20 = 42$

E.

$16 \rightarrow \text{Soma} = 1+2+4+8+16 = 31$

$25 \rightarrow \text{Soma} = 1+5+25 = 31$

Número de divisores naturais: $(\alpha_1+1).(\alpha_2+1).(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_n+1)$

a. $12 = 2^2 . 3^1 \rightarrow (2+1).(1+1) = 3 . 2 = 6$ divisores naturais

b. $54 = 2^1 . 3^3 \rightarrow (1+1).(3+1) = 2 . 4 = 8$ divisores naturais

Número de divisores : $2.(\alpha_1+1).(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$
(divisores inteiros)

a. $12 = 2^2 . 3^1 \rightarrow 2.(2+1).(1+1) = 12$ divisores

b. $54 = 2^1 . 3^3 \rightarrow 2.(1+1).(3+1) = 16$ divisores

11. (Uece 2020) Assinale a opção que corresponde à quantidade de números inteiros positivos que são fatores do número 30.030.

a) 32 b) 34 ~~c)~~ 64 d) 66

30030	2
15015	3
5005	5
1001	7
143	11
13	13
1	

logo, $30030 = 2^1 . 3^1 . 5^1 . 7^1 . 11^1 . 13^1$

$(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 2^6 = 64$

letra C

Máximo Divisor Comum (MDC) : o máximo divisor de um conjunto de números inteiros é um inteiro positivo que satisfaz as condições:

- é um divisor comum de um conjunto de números;
- é o maior dos divisores comuns.

a. $MDC(12,18) = 6$

$$\begin{array}{cc|c} 12, & 18 & 2 \\ 6, & 9 & 3 \\ 2, & 3 & \end{array}$$

b. $MDC(160,-80,140) = 20$

$$\begin{array}{ccc|c} 120, & -80, & 140 & 2 \\ 60, & -40, & 70 & 2 \\ 30, & -20, & 35 & 5 \\ 6, & -4, & 7 & \end{array}$$

4. (Fac. Albert Einstein - Medicin 2017) Um torneio de xadrez terá alunos de 3 escolas. Uma das escolas levará 120 alunos; outra, 180 alunos; e outra, 252 alunos. Esses alunos serão divididos em grupos, de modo que cada grupo tenha representantes das três escolas, e o número de alunos de cada escola seja o mesmo em cada grupo. Dessa maneira, o maior número de grupos que podem ser formados é

~~a)~~ 12 b) 23 c) 46 d) 69

$$\begin{array}{ccc|c} 120, & 180, & 252 & 2 \\ 60, & 90, & 126 & 2 \\ 30, & 45, & 63 & 3 \\ 10, & 15, & 21 & \end{array}$$

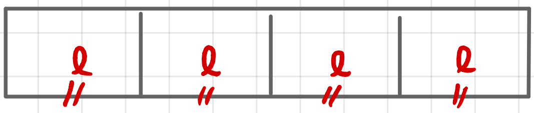
nº de grupos $= MDC(120, 180, 252)$

nº de grupos $= 2^2 \cdot 3 = 12$ letra A

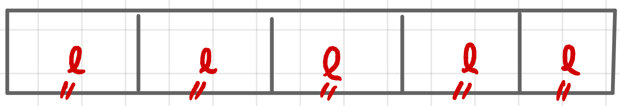
6. (ifmt 2020) João decide reformar sua casa, mas, como não dispõe de muito dinheiro, decide economizar na reforma contratando o carpinteiro José para reaproveitar as tábuas de madeira retiradas da casa. José tem à sua disposição 40 tábuas de 5,4 metros, 30 tábuas de 8,10 metros e 10 tábuas de 10,80 metros, todas de mesma espessura e largura. Para atender às especificidades da reforma da casa de João, José decide cortar as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças fiquem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 metros. Qual a quantidade de tábuas que José conseguiu produzir?

a) 395 tábuas b) 399 tábuas c) 412 tábuas
~~d)~~ 420 tábuas e) 429 tábuas

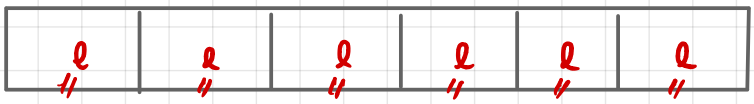
$5,4\ m = 540\ cm$



$8,1\ m = 810\ cm$



$10,8\ m = 1080\ cm$



$l = MDC(540, 810, 1080) = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270\,cm = 2,7\,m$

540, 810, 1080	2
270, 405, 540	3
90, 135, 180	3
30, 45, 60	3
10, 15, 20	5
2, 3, 4	

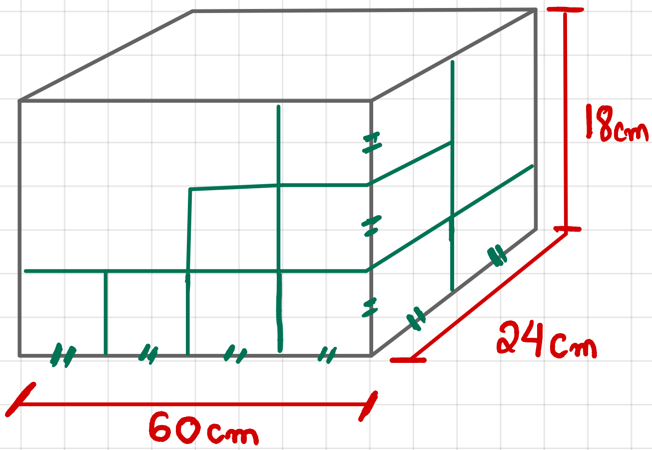
Como as peças devem ser menores de 2m, utilizamos o próximo divisor $\frac{270}{2} = 135\,cm$

Portanto, a quantidade de tábuas é

$40 \cdot \frac{540}{135} + 30 \cdot \frac{810}{135} + 10 \cdot \frac{1080}{135} = 420$

letra D

5. (Fuvest 2021) Alice quer construir um paralelepípedo reto retângulo de medidas $60\text{ cm} \times 24\text{ cm} \times 18\text{ cm}$, com a menor quantidade possível de cubos idênticos cujas medidas das arestas são números naturais. Quantos cubos serão necessários para construir esse paralelepípedo?
a) 60
b) 72
c) 80
d) 96
e) 120



aresta $= MDC(60, 24, 18) = 6\,cm$

60, 24, 18	2
30, 12, 9	3
10, 4, 3	

Logo,

$$\frac{\text{Volume Paralelepípedo}}{\text{Volume Cubo}} = \frac{60 \cdot 24 \cdot 18}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 10 \cdot 4 \cdot 3 = 120$$

letra E

Múltiplos: se b é múltiplo de a, então $b = a.K$, com $K \in \mathbb{Z}$

Múltiplos de 12 = $\{0, \pm 12, \pm 24, \pm 36, \pm 48, \dots\}$

Múltiplos de 20 = $\{0, \pm 20, \pm 40, \pm 60, \pm 80, \dots\}$

Mínimo Múltiplo Comum (MMC): O mínimo múltiplo comum de um conjunto de números inteiros é o valor inteiro positivo que satisfaz as condições:

- é um múltiplo comum do conjunto de números;
- é o menor múltiplo comum positivo diferente de zero.

a. $MMC(12, 18) = 48$

$$\begin{array}{cc|c} 12, & 18 & 2 \\ 6, & 9 & 2 \\ 3, & 9 & 3 \\ 1, & 3 & 3 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

b. $MMC(-70, 28, 200) = 1400$

$$\begin{array}{ccc|c} 70, & 28, & 200 & 2 \\ 35, & 14, & 100 & 2 \\ 35, & 7, & 50 & 2 \\ 35, & 7, & 25 & 5 \\ 7, & 7, & 5 & 5 \\ 7, & 7, & 1 & 7 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

7. (Famema 2020) Sílvia e Márcio moram em cidades diferentes no interior. Sílvia vai à capital uma vez a cada 10 dias, e Márcio vai à capital uma vez a cada 12 dias. A última vez em que eles se encontraram na capital foi um sábado. O próximo encontro dos dois na capital ocorrerá em

a) uma terça-feira.
b) uma quarta-feira.
c) um domingo.
d) um sábado.
e) uma segunda-feira.

$$\begin{array}{cc|c} 10, & 12 & 2 \\ 5, & 6 & 2 \\ 5, & 3 & 3 \\ 5, & 1 & 5 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

Sílvia: cada 10 dias

$(0, 10, 20, 30, \dots)$

Márcio: cada 12 dias

$(0, 12, 24, 36, \dots)$

Próximo encontro = MMC(10, 12)

Próximo encontro = 60 dias

$$\begin{array}{r|l} 60 & 7 \\ \hline -56 & 8 \\ 4 & \end{array}$$

8 semanas Completas

$\hookrightarrow$ 4 dias que sobram (Domingo, Segunda, Terça, Quarta)

Letra B

15. (cmrj 2019)

www.brasil.gov.br, julho/2018.

Maria e Paula são amigas de infância e, sempre que podem, saem para pedalar juntas em torno do Estádio do Maracanã. Um dia, empolgadas com a ideia de saberem mais sobre o desempenho da dupla, resolveram cronometrar o tempo que cada uma levava para dar uma volta completa em torno do estádio. Constataram que Maria dava uma volta completa em 6 minutos e 40 segundos, enquanto Paula demorava 8 minutos para fazer o mesmo percurso, ambas com velocidades constantes.

Paula, então, questionou o seguinte: “Se sairmos juntas de um mesmo local, no mesmo momento, mas em sentidos contrários, em quanto tempo voltaremos a nos encontrar, pela primeira vez, no mesmo ponto de partida?” A resposta correta para a pergunta de Paula está presente na alternativa

a) 48 minutos
b) 40 minutos
c) 32 minutos
d) 26 minutos e 40 segundos
e) 33 minutos e 20 segundos

Maria: 6min e 40seg = 400 seg

(0, 400, 800, 1200, ...)

Paula: 8 min = 480 seg

(0, 480, 960, 1440, ...)

400,	480	2
200,	240	2
100,	120	2
50,	60	2
25,	30	2
25,	15	3
25,	5	5
5,	1	5
1,	1	

$2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$ seg

= 2400 seg

O próximo encontro ocorre depois de 2400 seg = 40 min

9. (Fgv/2023) Em certa rua, há dois semáforos, um no início e outro no final da rua. O semáforo do início, a cada ciclo de 120 segundos, fica verde nos primeiros 110 segundos e vermelho nos 10 segundos seguintes. O semáforo do final, a cada ciclo de 180 segundos, fica verde nos primeiros 160 segundos e vermelho nos 20 segundos seguintes.

Ambos ficaram verdes ao mesmo tempo, exatamente ao meio-dia. Por quanto tempo, no período de 24 horas até o meio-dia do dia seguinte, os semáforos estarão simultaneamente vermelhos?

a) 30 minutos b) 40minutos c) 1 hora
d) 70 minutos e) 1 hora e meia

Semáforo 1: 120 segundos

Semáforo 2: 180 segundos

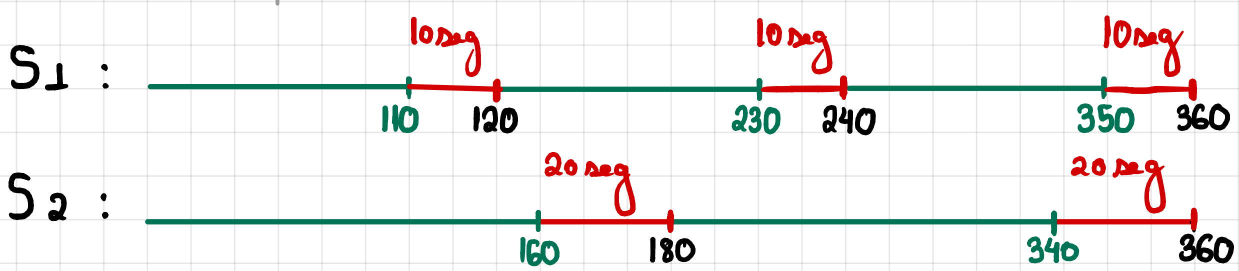
Os ciclos dos semáforos irão se iniciar simultaneamente a cada

$MMC(120, 180) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$ segundos.

120 , 180	2
60 , 90	2
30 , 45	2
15 , 45	3
5 , 15	3
5 , 5	5
1 , 1	

Com isso, em 24 horas haverá

$$\frac{24 \times 60 \times 60}{360} = 240 \text{ encontros}$$



A cada 360 segundos, os semáforos ficarão vermelhos simultaneamente por 10 segundos.

Portanto, em 24 horas, serão 10seg. 240 encontros = 2400seg = 40 minutos. simultaneamente vermelhos.

Aprofundamento:

$$\boxed{MDC(a,b) \cdot MMC(a,b) = |a \cdot b|}$$