Capítulo 6
Matrizes

Para pensar

1. Resposta pessoal.

2. a) 4 linhas e 4 colunas
b) F5
c) B9

Exercícios propostos

1. a) $A = \begin{pmatrix} 11.664.509 & 4.199.945 \\ 38.821.246 & 14.260.704 \\ 74.696.178 & 5.668.232 \\ 23.260.896 & 4.125.995 \\ 12.482.963 & 1.575.131 \end{pmatrix}$

b) A matriz possui 5 linhas e 2 colunas; logo, seu tipo é 5×2.
c) Representa a população brasileira que vive na área urbana.
d) Representa a população brasileira que vive na área rural.
e) Representa a população total do Brasil.

2. a) O faturamento da loja 3 no dia 2 corresponde ao elemento a_{32} da matriz. Logo, o faturamento foi 2.800 reais ($a_{32} = 2.800$).
b) O faturamento da rede no dia 3 é dado por: $a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43} + a_{53} =$
$= 1.800 + 1.740 + 2.700 + 2.300 + 2.040 = 10.580$
Logo, o faturamento foi 10.580 reais.
c) O faturamento da loja 1 nos quatro dias é dado por: $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} =$
$= 1.950 + 2.030 + 1.800 + 1.950 = 7.730$
Logo, o faturamento da loja 1 nos quatro dias foi 7.730 reais.

3. a) $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ $a_{ij} = i + 2j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2 \cdot 1 & 1 + 2 \cdot 2 \\ 2 + 2 \cdot 1 & 2 + 2 \cdot 2 \\ 3 + 2 \cdot 1 & 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

b) $B = (b_{ij})_{2 \times 3}$ $b_{ij} = i^2 + 3j$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1^2 + 3 \cdot 1 & 1^2 + 3 \cdot 2 & 1^2 + 3 \cdot 3 \\ 2^2 + 3 \cdot 1 & 2^2 + 3 \cdot 2 & 2^2 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

c) $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$ $c_{ij} = 2i$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

d) $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ i + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 + 2 & 1 + 3 \\ 2 + 1 & 1 & 2 + 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

e) $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & (-1)^3 \\ (-1)^3 & (-1)^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. a) A soma S dos elementos da diagonal principal é:
$S = a_{11} + a_{22} + a_{33} + ... + a_{30\,30} =$
$= (1 + 1) + (2 + 2) + (3 + 3) + ... + (30 + 30) =$
$= 2 + 4 + 6 + ... + 60$
Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, temos:
$$S = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} \Rightarrow S = \frac{(2 + 60) \cdot 30}{2} = 930$$

b) A soma s dos elementos da diagonal secundária é:
$s = a_{301} + a_{292} + a_{283} + ... + a_{130} =$
$= (30 + 1) + (29 + 2) + (28 + 3) + ... + (1 + 30) =$
$= 31 + 31 + 31 + ... + 31 = 30 \cdot 31 = 930$

5. $\begin{pmatrix} x^2 - 8 & x + 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 8 = 1 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x = \pm 3 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow x = -3$

6. $\begin{pmatrix} 3x + y - 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5x - y - 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ 5x - y - 1 = 0 \end{cases}$

$\therefore x = 1$ e $y = 4$

7. a) $A^t = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $(A^t)^t = A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

8. Sendo $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, temos:

$A = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} b = d \\ c = g \\ f = h \end{cases}$

Logo, a matriz A possui três pares de elementos iguais.
Alternativa **c**.

9. a) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

b) $2A - B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 16 \\ 2 & -8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 25 \\ -4 & -10 & -7 \end{pmatrix}$

c) $3A - \frac{1}{2} \cdot C^t = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 24 \\ 3 & -12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 26 \\ 3 & -15 & 5 \end{pmatrix}$

10. Temos:

$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Logo: $A - B^t = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

11. a) $\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \\ X - Y = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \end{cases}$

Adicionando, membro a membro, as duas equações, temos:

$2X = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

Substituindo a matriz X em qualquer uma das equações do sistema, por exemplo, na primeira, temos:

$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} 2A + B = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 6 \\ 10 & 16 & -1 \end{bmatrix} \\ A + B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 8 & 12 & -2 \end{bmatrix} \end{cases}$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo a matriz A em qualquer uma das equações do sistema, por exemplo, na segunda, temos:

$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 8 & 12 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

12. a) A produção de arroz, em tonelada, da região A no ano 3 é representada pelo elemento $a_{13} = 4$. Logo, essa produção foi de 4 milhões de toneladas.

b) A produção de arroz, em tonelada, da região B no ano 3 é representada pelo elemento $b_{13} = 11$. Logo, essa produção foi de 11 milhões de toneladas.

c) A produção de arroz, em tonelada, das duas regiões juntas, no ano 3, é a soma:

$a_{13} + b_{13} = 4 + 11 = 15$

Logo, essa produção foi de 15 milhões de toneladas.

d) A produção de soja, em tonelada, das duas regiões juntas, no ano 3, é a soma:

$a_{23} + b_{23} = 6 + 18 = 24$

Logo, essa produção foi de 24 milhões de toneladas.

e) $C = A + B = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 15 \\ 19 & 25 & 24 \end{pmatrix}$

f) $D = A - B = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -7 \\ -11 & -15 & -12 \end{pmatrix}$

13. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$ não existe o produto

c) $B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

d) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

e) $B^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ não existe o produto

14. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 26 & 26 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & 32 & 16 \\ 2 & 16 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. a) F; observe os itens **a** e **b** do exercício 14.

b) V; pela propriedade do elemento neutro de multiplicação de matrizes.

c) F; observe o item **e** do exercício 14.

16. Multiplicando as matrizes, temos:

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Como $A \cdot B = B \cdot A$, as matrizes comutam na multiplicação.

17. $A_{2 \times 2} \cdot X_{p \times q} = B_{2 \times 1}$

$p = 2$ $\quad q = 1$

Sendo $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, temos:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a + 2b \\ -3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} a + 2b = 6 \\ -3b = -15 \end{cases} \Rightarrow a = -4$ e $b = 5$

Logo: $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

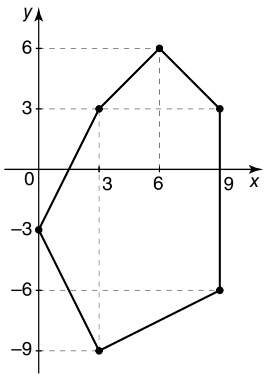
18. Como todas as provas têm o mesmo peso, a média anual em cada disciplina é a média aritmética entre as quatro notas bimestrais a, b, c e d da disciplina, isto é, $\dfrac{a + b + c + d}{4}$. Assim, para obter a média anual em todas as disciplinas, o aluno multiplicou a matriz obtida na tabela por $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Alternativa **e**.

19. $T_{2\times 2}\cdot F_{2\times 6} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_{2\times 2}\cdot F_{2\times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 & 9 & 6 & 3 \\ -3 & -9 & -6 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

Assim, o polígono obtido ao se aplicar a transformação $T_{2\times 2}$ ao polígono representado pela matriz $F_{2\times 6}$ é:



20. Indicando por a, b e c o número de gols marcados pelos atacantes A, B e C, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 26 \\ b = 2c \\ a = b - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 26 \\ 0a + b - 2c = 0 \\ a - b + 0c = -4 \end{cases}$$

Assim, pela definição de multiplicação de matrizes, podemos equacionar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

21. **a)** Supondo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa de A, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 6c & 3b + 6d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} 3a + 6c = 1 \\ c = 0 \\ 3b + 6d = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3},\ b = -2,\ c = 0 \text{ e } d = 1$$

Logo, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a inversa de A.

b) Supondo que $B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa de B, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 5c & 3b + 5d \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} 3a + 5c = 1 \\ a + 2c = 0 \\ 3b + 5d = 0 \\ b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = -5,\ c = -1,\ d = 3$$

Logo, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de B.

c) Supondo que $C^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa de C, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a + c = 1 \\ a + c = 0 \\ b + d = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

equações incompatíveis

equações incompatíveis

Logo, não existe matriz inversa de C.

d) Supondo que $D^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ seja a inversa de D, temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} 2d = 1 \\ 2e = 0 \\ 2f = 0 \\ g = 0 \\ h = 1 \\ i = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

22. Multiplicando a matriz A^{-1} à esquerda de cada membro da equação $A \cdot X = B$, temos:

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$\therefore X = A^{-1} \cdot B$

Alternativa **a**.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. **a)** $A = (a_{ij})_{3\times 3},\ a_{ij} = \begin{cases} 3, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $B = (b_{ij})_{2\times 4},\ b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i \geqslant j \\ 0, \text{ se } i < j \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $C = (c_{ij})_{1\times 5},\ c_{ij} = 3j \Rightarrow$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & 3\cdot 4 & 3\cdot 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

d) $D = (d_{ij})_{4 \times 1}, d_{ij} = i + \text{sen}\,\dfrac{\pi j}{2} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \\ d_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} \\ 2 + \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} \\ 3 + \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} \\ 4 + \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

e) $E = (e_{ij})_{2 \times 4}, e_{ij} = 2j + \log_2 i \Rightarrow E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + \log_2 1 & 2 \cdot 2 + \log_2 1 & 2 \cdot 3 + \log_2 1 & 2 \cdot 4 + \log_2 1 \\ 2 \cdot 1 + \log_2 2 & 2 \cdot 2 + \log_2 2 & 2 \cdot 3 + \log_2 2 & 2 \cdot 4 + \log_2 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

2. a) Um elemento a_{ij} da matriz A pertence à diagonal principal se, e somente se, $i = j$. Assim, substituindo i e j por uma nova variável x, isto é, $i = j = x$, temos:

$$a_{xx} > 0 \Rightarrow x^2 + x - 30 > 0$$
$$\therefore x < -6 \text{ ou } x > 5$$

Como só nos interessam os números naturais maiores que 5 como valores de x, concluímos que os elementos da diagonal principal que representam números positivos são $a_{66}, a_{77}, a_{88}, \dots, a_{40\,40}$. Logo, há exatamente 35 números positivos na diagonal principal.

b) Um elemento a_{ij} da matriz A pertence à diagonal secundária se, e somente se, $i + j = 40 + 1$. Assim, substituindo i por uma nova variável x, e, consequentemente, j por $41 - x$, temos:

$$a_{x\,41-x} < 0 \Rightarrow x^2 + 41 - x - 30 < 0$$
$$\therefore x^2 - x + 11 < 0$$

Como essa inequação não tem solução real, pois $\Delta < 0$, concluímos que a diagonal secundária da matriz A não possui nenhum número negativo.

3. A matriz A é simétrica se, e somente se:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2\log(x-1) & 2 \\ \log(5x+1) & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \log(5x+1) & 2 \\ 2\log(x-1) & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\log(x-1) = \log(5x+1)$$

A condição de existência para os logaritmos é $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 5x + 1 > 0 \end{cases}$, ou seja, $x > 1$. Assim, temos:

$2\log(x-1) = \log(5x+1) \Rightarrow \log(x-1)^2 = \log(5x+1)$
$\therefore (x-1)^2 = 5x + 1 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 7$

Apenas o número 7 satisfaz a condição de existência; logo, a matriz A é simétrica se, e somente se, $x = 7$.

4. $\begin{cases} |x| - 8 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = 8 & \text{(I)} \\ x + 2y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

De (I), obtemos $x = 8$ ou $x = -8$.

- Substituindo x por 8 em (II), temos: $y = -4$
- Substituindo x por -8 em (II), temos: $y = 4$

Assim, concluímos que há duas respostas possíveis: ($x = 8$ e $y = -4$) ou ($x = -8$ e $y = 4$).

5. $\begin{bmatrix} x^2 - 7x + 13 & 0 \\ x^2 - 3x - 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 13 = 1 & \text{(I)} \\ x^2 - 3x - 4 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

- De (I), temos: $x = 4$ ou $x = 3$
- De (II), temos: $x = 4$ ou $x = -1$

Assim, o valor de x que satisfaz (I) e (II) simultaneamente é 4.
Logo, para $x = 4$, A é a matriz identidade.

6. Um elemento a_{ij} da matriz A pertence à diagonal principal se, e somente se, $i = j$. Assim, a soma S dos elementos da diagonal principal é dada por:

$S = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{50\,50} = \log 2^{1+1} + \log 2^{2+2} + \log 2^{3+3} + \dots + \log 2^{50+50} =$
$= \log 2^2 + \log 2^4 + \log 2^6 + \dots + \log 2^{100}$
$\therefore S = \log(2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot \dots \cdot 2^{100}) = \log 2^{2+4+6+\dots+100}$

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, temos:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 100 = \frac{(2 + 100) \cdot 50}{2} = 2.550$$

Logo: $S = \log 2^{2.550} = 2.550 \log 2$

Com o auxílio de uma calculadora eletrônica, concluímos que: $S = \log 2^{2.550} = 2.550 \log 2 \approx 767{,}626$

Um elemento a_{ij} da matriz A pertence à diagonal secundária se, e somente se, $i + j = 50 + 1$. Assim, a soma S dos elementos da diagonal principal é dada por:

$S = a_{501} + a_{492} + a_{483} + \ldots + a_{150} =$

$= \log 6^{2 \cdot 50 - 1} + \log 6^{2 \cdot 49 - 2} +$

$+ \log 6^{2 \cdot 48 - 3} + \ldots + \log 6^{2 \cdot 1 - 50} =$

$= \log 6^{99} + \log 6^{96} + \log 6^{93} + \ldots + \log 2^{-48}$

$\therefore\ S = \log (6^{99} \cdot 6^{96} \cdot 6^{93} \cdot \ldots \cdot 6^{-48}) = \log 6^{99 + 96 + 93 + \ldots + (-48)}$

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, temos:

$$99 + 96 + 93 + \ldots + (-48) = \frac{[99 + (-48)] \cdot 50}{2} = 1.275$$

Logo: $S = \log 6^{1.275} = 1.275 \log 6$

Com o auxílio de uma calculadora eletrônica, concluímos que: $S = \log 6^{1.275} = 1.275 \log 6 \approx 992{,}143$

Alternativa **b**.

7. a) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -5 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -9 \\ 9 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A + B - C^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

d) $2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

e) $3A + 2C^t = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 12 & 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 10 & 12 & 10 \end{pmatrix}$

f) $A - 2B + 4C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 8 & 12 \\ -10 & 0 & -4 \end{pmatrix} +$

$+ \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -4 & 12 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 1 & -11 \\ 10 & 14 & 24 \end{pmatrix}$

g) $A + (-A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

h) $2 \cdot 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 12 & 18 \\ -15 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 24 & 36 \\ -30 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

8. $\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 12 & -4 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

Multiplicando por 2 ambos os membros da primeira equação e por -3 ambos os membros da segunda, obtemos:

$\begin{cases} 4X + 6Y = \begin{pmatrix} 4 & 26 \\ 24 & -8 \end{pmatrix} \\ -9X - 6Y = \begin{pmatrix} -9 & -36 \\ -9 & -12 \end{pmatrix} \end{cases}$

Adicionando, membro a membro, essas duas últimas equações, temos:

$-5X = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 15 & -20 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Substituindo a matriz X em qualquer equação do sistema, por exemplo, na primeira, obtemos a matriz Y:

$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 12 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

9. $X + 2X + 3X + 4X + \ldots + 100X = \begin{pmatrix} 5.050 & 0 \\ 0 & 5.050 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100) = \begin{pmatrix} 5.050 & 0 \\ 0 & 5.050 \end{pmatrix}$

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, temos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100 = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5.050$$

Logo, a equação original é equivalente a:

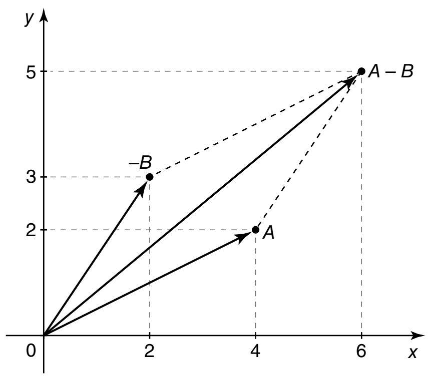
$5.050X = \begin{pmatrix} 5.050 & 0 \\ 0 & 5.050 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. a) O segmento $\overline{OC}$ pode ser descrito por uma composição de dois movimentos do segmento $\overline{OA}$: um deslocamento horizontal de 2 unidades para a esquerda e um deslocamento vertical de 3 unidades para baixo.

Assim, a abscissa e a ordenada do ponto C são, respectivamente, $4 - 2$ e $2 - 3$; logo, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $A + B = C$

c)



11. Temos: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, logo:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Esse produto não existe, pois o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

12. Temos:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 26 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$$

Logo: $C_{21} = 7$

13. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 16 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 21 & 3 \end{pmatrix}$

Logo: $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 21 & 3 \end{pmatrix}$

14. Temos que:

$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e

$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Assim, concluímos que:

$2A^2 + 4B^2 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Alternativa **b**.

15. Como as matrizes comutam na multiplicação, temos:

$\begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ -x^2 + 4x & 4 \end{pmatrix}$

$\therefore\ -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$

Logo, $x = 0$ ou $x = 4$.

16. a) $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

d) $A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) $A^{50} = (A^2)^{25} = (I_2)^{25} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A^{73} = A^{72} \cdot A = (A^2)^{36} \cdot A = (I_2)^{36} \cdot A = I_2 \cdot A =$

$= A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

17. a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{50} = (A^2)^{25} = (I_2)^{25} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^{79} = A^{78} \cdot A = (A^2)^{39} \cdot A = (I_2)^{39} \cdot A = I_2 \cdot A =$

$= A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

18. Sendo $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, temos:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 2a + 3b \\ c & 2c + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} a = 2 \\ 2a + 3b = 14 \\ c = 3 \\ 2c + 3d = 9 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2,\ b = \dfrac{10}{3},\ c = 3$ e $d = 1$

Logo: $X = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{10}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

19. Como A é uma matriz do tipo 2×2 e B é do tipo 1×2, concluímos que X é do tipo 1×2. Assim, sendo $X = [a \quad b]$, temos:

$[a \quad b] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = [8 \quad 5] \Rightarrow$

$\Rightarrow [2a + 5b \quad a + 3b] = [8 \quad 5]$

$\therefore \begin{cases} 2a + 5b = 8 \\ a + 3b = 5 \end{cases} \Rightarrow a = -1$ e $b = 2$

Logo, $X = [-1 \quad 2]$. Assim, o produto dos elementos da matriz X é -2.

Alternativa **b**.

20. Temos:

$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ e

$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$; logo, A é uma matriz ortogonal.

$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$; logo, B não é uma matriz ortogonal.

$C \cdot C^t = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} & 0 & -\dfrac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{4}{5} & 0 & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} & 0 & \dfrac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{4}{5} & 0 & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ e

$C^t \cdot C = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} & 0 & \dfrac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{4}{5} & 0 & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} & 0 & -\dfrac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{4}{5} & 0 & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= I_3$; logo, C é uma matriz ortogonal.

Portanto, as matrizes A e C são ortogonais.

21. Temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{6}{x} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 6 - y \end{bmatrix}$$

$\therefore\ x' = x$ e $y' = 6 - y$

Assim, transformando cada ponto (x, y) da figura no ponto $(x, 6 - y)$, obtém-se a figura da alternativa **c**.

Alternativa **c**.

22. $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{tg}\ \alpha \\ \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3\ \text{tg}\ \alpha + 6 \cos \beta \\ 6\ \text{tg}\ \alpha + 8 \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases} 3\ \text{tg}\ \alpha + 6 \cos \beta = 0 \\ 6\ \text{tg}\ \alpha + 8 \cos \beta = -2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\ \alpha = -\sqrt{3} \\ \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Resolvendo essas equações nos respectivos universos, obtemos: $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ e $\beta = \frac{\pi}{6}$. Logo, $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{6}$

Alternativa **b**.

23. Substituindo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ na segunda equação por $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, temos:

$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 26 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Alternativa **d**.

24. $(A \cdot B)^t \cdot (C \cdot D)^t = B^t \cdot A^t \cdot D^t \cdot C^t = B^t \cdot (D \cdot A)^t \cdot C^t =$
$= B^t \cdot (I_2)^t \cdot C^t = B^t \cdot I_2 \cdot C^t = B^t \cdot C^t = (C \cdot B)^t =$
$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

Alternativa **b**.

25. **a)** Supondo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa de A, devemos ter:

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4a & 4b \\ 8a + c & 8b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} 4a = 1 \\ 8a + c = 0 \\ 4b = 0 \\ 8b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = 0, c = -2, d = 1$

Logo, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de A.

b) Supondo que $B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa de B, devemos ter:

$\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6a + 12c & 6b + 12d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} 6a + 12c = 1 \\ 6b + 12d = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{6}, b = -2, c = 0, d = 1$

Logo, $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de B.

c) Supondo que $C^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja a inversa de C, devemos ter:

$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a + 6c & 2b + 6d \\ a + 3c & b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} 2a + 6c = 1 \\ a + 3c = 0 \\ 2b + 6d = 0 \\ b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3c = \frac{1}{2} \\ a + 3c = 0 \\ b + 3d = 0 \\ b + 3d = 1 \end{cases}$

equações incompatíveis

equações incompatíveis

Logo, não existe a matriz inversa de C.

d) Supondo que $D^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ seja a inversa de D, devemos ter:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Logo, $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de D.

e) Supondo que $E^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ seja a inversa de E, devemos ter:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore\ g = 1, h = 0, i = 0, d = 0, e = 1, f = 0, a = 0, b = 0, c = 1$

Logo, $E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de E.

f) Supondo que $F^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ seja a inversa de F, devemos ter:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} g & h & i \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore\ g = 1, h = 0, i = 0, 2a = 0, 2b = 1, 2c = 0, d = 0, e = 0, f = 1$

Logo, $F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de F.

26. a) $B \cdot B^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

logo, $B^{-1} = B^t$. Portanto, B é uma matriz ortogonal.

b) $C \cdot C^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; logo, $C^{-1} = C^t$. Portanto, C é uma matriz ortogonal.

27. Como M e A são matrizes inversas uma da outra, temos:

$A \cdot M = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} x-2 & 2y-1 \\ 2x-6 & 6y-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ 2y-1=0 \\ 2x-6=0 \\ 6y-2=1 \end{cases}$

$\therefore x = 3$ e $y = \dfrac{1}{2}$

Logo: $xy = \dfrac{3}{2}$

Alternativa **a**.

28. A matriz M estará determinada e será a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se existir essa inversa.

Supondo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ seja a inversa de A, devemos ter:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore d = 1, e = 0, f = 0, g = 0, h = 1, i = 0, a = 0, b = 0, c = 1$

Logo, $M = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercícios contextualizados

29. a) $A = \begin{pmatrix} 1.100 & a_{12} & a_{13} \\ 2.400 & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} a_{12} = 1.100 + 110 = 1.210 \\ a_{13} = 1.210 + 121 = 1.331 \\ a_{22} = 2.400 + 480 = 2.880 \\ a_{23} = 2.880 + 576 = 3.456 \end{cases}$

Logo, $A = \begin{pmatrix} 1.100 & 1.210 & 1.331 \\ 2.400 & 2.880 & 3.456 \end{pmatrix}$.

b) Para i = 1, temos a sequência

$\underbrace{1{,}1}_{(1,\,1)^1} \cdot 1.000$; $\underbrace{1{,}21}_{(1,\,1)^2} \cdot 1.000$; $\underbrace{1{,}331}_{(1,\,1)^3} \cdot 1.000$

Portanto, $x = (1{,}1)^j \cdot 1.000$.

Para i = 2, temos a sequência:

$1{,}2 \cdot 2.000$; $1{,}44 \cdot 2.000$; $1.728 \cdot 2.000$

Portanto, $y = (1{,}2)^j \cdot 2.000$.

Logo: $a_{ij} = \begin{cases} (1,\,1)^j \cdot 1.000, \text{ se } i = 1 \\ (1,\,2)^j \cdot 2.000, \text{ se } i = 2 \end{cases}$

30. a) O total exportado no período 1, na unidade 1, é 88,9; assim, $a_{11} = 88{,}9$.

O total exportado no período 1, na unidade 2, é 22; assim, $a_{12} = 22$.

O total exportado no período 2, na unidade 1, é 265,5; assim, $a_{21} = 265{,}5$.

O total exportado no período 2, na unidade 2, é 69,8; assim, $a_{22} = 69{,}8$.

O total exportado no período 3, na unidade 1, é 297,1; assim, $a_{31} = 297{,}1$.

O total exportado no período 3, na unidade 2, é 87,9; assim, $a_{32} = 87{,}9$.

Então, concluímos que:

$$A = \begin{pmatrix} 88{,}9 & 22 \\ 265{,}5 & 69{,}8 \\ 297{,}1 & 87{,}9 \end{pmatrix}$$

b) O total exportado na unidade 1, no período 1, é 88,9; assim, $b_{11} = 88{,}9$.

O total exportado na unidade 1, no período 2, é 265,5; assim, $b_{12} = 265{,}5$.

O total exportado na unidade 1, no período 3, é 297,1; assim, $b_{13} = 297{,}1$.

O total exportado na unidade 2, no período 1, é 22; assim, $b_{21} = 22$.

O total exportado na unidade 2, no período 2, é 69,8; assim, $b_{22} = 69{,}8$.

O total exportado na unidade 2, no período 3, é 87,9; assim, $b_{23} = 87{,}9$.

Então, concluímos que:

$$B = \begin{pmatrix} 88{,}9 & 265{,}5 & 297{,}1 \\ 22 & 69{,}8 & 87{,}9 \end{pmatrix}$$

31. As possibilidades de despesa com a manutenção dos aviões são:

$23 + 62 + 8 = 93$

$23 + 12 + 57 = 92$

$66 + 19 + 8 = 93$

$66 + 28 + 12 = 106$

$17 + 62 + 28 = 107$

$17 + 57 + 19 = 93$

Assim, para que sua despesa seja a menor possível, a companhia deve escolher a empresa 1 para a manutenção do avião 1, a empresa 2 para a manutenção do avião 3 e a empresa 3 para a manutenção do avião 2.

Alternativa **a**.

32. a) O elemento a_{23} da matriz A é 73, que representa o número de unidades do modelo 2 fabricadas pela filial A no dia 3 de março.

b) O elemento b_{12} da matriz B é 80, que representa o número de unidades do modelo 1 fabricadas pela filial B no dia 2 de março.

c) Cada elemento da s_{ij} da matriz soma, $S = A + B =$

$= \begin{pmatrix} 125 & 140 & 115 \\ 183 & 108 & 123 \end{pmatrix}$, representa o número de unidades do modelo i fabricadas pelas duas filiais A e B no dia j de março.

d) Cada elemento da d_{ij} da matriz diferença, $D = A - B = \begin{pmatrix} -27 & -20 & 25 \\ -3 & -12 & 23 \end{pmatrix}$, representa o número de unidades do modelo i que a filial A fabricou a mais ou a menos do que a filial B no dia j de março.

e) Cada elemento p_{ij} da matriz $P = 2(A + B) =$

$= \begin{pmatrix} 250 & 280 & 230 \\ 366 & 216 & 246 \end{pmatrix}$ representa o dobro do número de unidades do modelo i fabricadas pelas duas filiais juntas no dia j de março do ano considerado nas matrizes A e B.

33. a) Cada elemento a_{ij} da matriz $A = (25 \ \ 30 \ \ 100 \ \ 20)$ representa a quantidade de fruta j que deve ser comprada.

b) Cada elemento b_{ij} da matriz $B = \begin{pmatrix} 2{,}00 & 2{,}40 \\ 3{,}50 & 3{,}00 \\ 0{,}80 & 0{,}85 \\ 1{,}70 & 1{,}80 \end{pmatrix}$

representa o preço por quilograma da fruta i no fornecedor j.

c) Cada elemento c_{ij} da matriz $C = (269{,}00 \ \ 271{,}00)$ representa o orçamento com o fornecedor j.

d) $A \cdot B = C$

34. A classificação em V ou F das afirmações pode ser feita com base na matriz produto:

$$P = \begin{pmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2.800 & 4.000 & 5.200 \\ 4.000 & 6.000 & 8.000 \end{pmatrix}$$

Assim, temos:

a) F, pois na matriz P o elemento $p_{11} = 2.800$ representa a quantidade, em grama, de proteínas consumidas diariamente por adultos e crianças do sexo masculino.

b) F, pois na matriz P o elemento $p_{12} = 4.000$ representa a quantidade de gorduras consumidas por adultos e crianças do sexo masculino, e $p_{22} = 6.000$ representa a quantidade de gorduras consumidas por adultos e crianças do sexo feminino; logo, p_{12} é 33,333...% menor que p_{22}.

c) V, pois a soma dos elementos $p_{13} = 5.200$ e $p_{23} = 8.000$ é 13.200 e representa a quantidade, em grama, de carboidratos consumida pelas pessoas envolvidas no projeto.

35. a) Seja $A = (a_{ij})$, em que cada elemento a_{ij} represente a quantidade, em quilograma, do macarrão i vendida no mês j. Teremos:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36 & 45 \\ 28 & 62 \\ 43 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 314 & 506 \\ 207 & 329 \end{pmatrix}$$

b) Quantidade, em quilograma, de macarrão espaguete número 1 vendida nessas cestas básicas em janeiro:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 43 \end{pmatrix} = (314)$$

Portanto, foram vendidos 314 quilogramas de macarrão espaguete número 1 em janeiro.

c) Quantidade, em quilograma, de macarrão espaguete número 2 vendida nessas cestas básicas em janeiro e fevereiro:

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36 & 45 \\ 28 & 62 \\ 43 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 207 \\ 329 \end{pmatrix}$, logo teremos:

$207 + 329 = 536$

Portanto, foram vendidos 536 quilogramas de macarrão espaguete número 2 em janeiro e fevereiro.

d) Quantidade, em quilograma, de macarrão espaguete vendida nessas cestas básicas em fevereiro:

$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ 62 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 506 \\ 329 \end{pmatrix}$, logo teremos:

$506 + 329 = 835$

Portanto, foram vendidos 835 quilogramas de macarrão espaguete em fevereiro.

e) Quantidade, em quilograma, de macarrão espaguete vendida nessas cestas básicas em janeiro e fevereiro:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36 & 45 \\ 28 & 62 \\ 43 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 314 & 506 \\ 207 & 329 \end{pmatrix}$$

Logo, teremos: $314 + 207 + 506 + 329 = 1.356$

Portanto, foram vendidos 1.356 quilogramas de macarrão espaguete em janeiro e fevereiro.

36. Sendo $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$, temos:

$M \cdot C = P \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, obtemos:

$$\begin{cases} m_{11} = 2 \\ m_{11} - m_{12} + 2m_{13} = -10 \\ m_{13} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m_{11} = 2$, $m_{12} = 14$ e $m_{13} = 1$

$$\begin{cases} m_{21} = 18 \\ m_{21} - m_{22} + 2m_{23} = 38 \\ m_{23} = 17 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m_{21} = 18$, $m_{22} = 14$ e $m_{23} = 17$

$$\begin{cases} m_{31} = 19 \\ m_{31} - m_{32} + 2m_{33} = 14 \\ m_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow m_{31} = 19, m_{32} = 5 \text{ e } m_{33} = 0$$

Logo, a mensagem é dada pela sequência de números (2)(14)(1)(18)(14)(17)(19)(5)(0), cujo significado é: boa sorte!

Alternativa **a**.

37. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.600 \\ 3.600 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1.600 \\ 3.200 + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.600 \\ 3.600 \end{pmatrix}$

$\therefore\ x = 200$

Logo, foram montados 200 veículos do modelo C na semana.

Alternativa **b**.

38. $\begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0{,}1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10y(t) \\ 0{,}1x(t) \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases} x(t+1) = 10y(t) \\ y(t+1) = 0{,}1x(t) \end{cases}$

Atribuindo a t os valores 0, 1, 2, ..., 10, obtemos:

$\begin{cases} x(1) = 10y(0) \\ y(1) = 0{,}1x(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1) = 10 \cdot 200 = 2.000 \\ y(1) = 0{,}1 \cdot 2.000 = 200 \end{cases}$

$\begin{cases} x(2) = 10y(1) \\ y(2) = 0{,}1x(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(2) = 10 \cdot 200 = 2.000 \\ y(2) = 0{,}1 \cdot 2.000 = 200 \end{cases}$

$\begin{cases} x(3) = 10y(2) \\ y(3) = 0{,}1x(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(3) = 10 \cdot 200 = 2.000 \\ y(3) = 0{,}1 \cdot 2.000 = 200 \end{cases}$

$\vdots$

$\begin{cases} x(10) = 10y(9) \\ y(10) = 0{,}1x(9) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(10) = 10 \cdot 200 = 2.000 \\ y(10) = 0{,}1 \cdot 2.000 = 200 \end{cases}$

Alternativa **b**.

39. $\begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}299 & 0{,}587 & 0{,}114 \\ 0{,}596 & -0{,}274 & -0{,}322 \\ 0{,}211 & -0{,}523 & 0{,}312 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}299R + 0{,}587G + 0{,}114B \\ 0{,}596R - 0{,}274G - 0{,}322B \\ 0{,}211R - 0{,}523G + 0{,}312B \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases} Y = 0{,}299R + 0{,}587G + 0{,}114B \\ I = 0{,}596R - 0{,}274G - 0{,}322B \\ Q = 0{,}211R - 0{,}523G + 0{,}312B \end{cases}$

Para $0 \leqslant R \leqslant 1$, $0 \leqslant G \leqslant 1$ e $0 \leqslant B \leqslant 1$, temos:

- $0 \leqslant 0{,}299R \leqslant 0{,}299$, $0 \leqslant 0{,}587G \leqslant 0{,}587$ e $0 \leqslant 0{,}114B \leqslant 0{,}114$, de onde concluímos que: $0 \leqslant 0{,}299R + 0{,}587G + 0{,}114B \leqslant 0{,}299 + 0{,}587 + 0{,}114$, ou seja, $0 \leqslant Y \leqslant 1$
- $0 \leqslant 0{,}596R \leqslant 0{,}596$, $-0{,}274 \leqslant -0{,}274G \leqslant 0$ e $-0{,}322 \leqslant -0{,}322B \leqslant 0$, de onde concluímos que: $-0{,}596 \leqslant 0{,}596R - 0{,}274G - 0{,}322B \leqslant 0{,}596$, ou seja, $-0{,}596 \leqslant I \leqslant 0{,}596$
- $0 \leqslant 0{,}211R \leqslant 0{,}211$, $-0{,}523 \leqslant G \leqslant 0$ e $0 \leqslant 0{,}312B \leqslant 0{,}312$, de onde concluímos que: $-0{,}523 \leqslant 0{,}211R - 0{,}523G + 0{,}312B \leqslant 0{,}523$, ou seja, $-0{,}523 \leqslant Q \leqslant 0{,}523$

Alternativa **b**.

Pré-requisitos para o capítulo 7

1. a) Não pertence ao gráfico, pois, para $x = 1$ temos: $y = 6 \cdot 1 + 4 = 10$

b) Não pertence ao gráfico, pois, para $x = -3$ temos: $y = 6 \cdot (-3) + 4 = -14$

c) Não pertence ao gráfico, pois, para $x = -1$ temos: $y = 6 \cdot (-1) + 4 = -2$

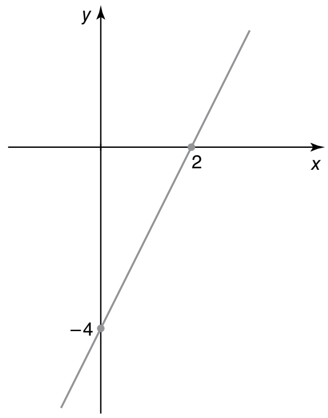
d) Pertence ao gráfico, pois, para $x = -2$ temos: $y = 6 \cdot (-2) + 4 = -8$

e) Não pertence ao gráfico, pois, para $x = -3$ temos: $y = 6 \cdot (-3) + 4 = -14$

Alternativa **d**.

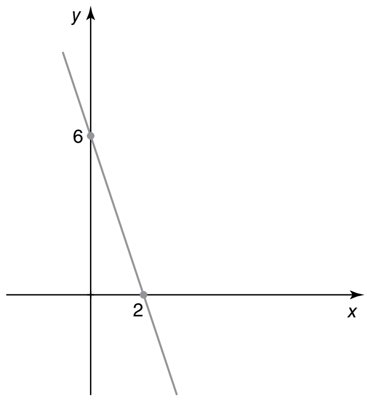
2. a)

x	y
0	−4
2	0



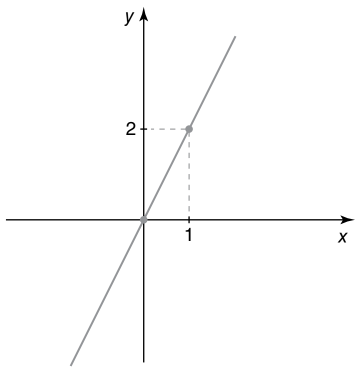
b)

x	y
0	6
2	0



c)

x	y
0	0
1	2



3. Sendo $y = ax + b$ a função afim cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos (0, 2) e (4, 0), temos:

$\begin{cases} 2 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot 4 + b \end{cases} \Rightarrow b = 2 \text{ e } a = -\frac{1}{2}$

Logo a função pedida é $y = -\frac{x}{2} + 2$

4. Duas funções afins $y = ax + b$ e $y = cx + d$ representam:

- retas paralelas se, e somente se, as funções tiverem a mesma taxa de variação, isto é, $a = c$. Essas retas serão paralelas coincidentes se, além de $a = c$, ocorrer também $b = d$; e serão paralelas distintas se, além de $a = c$, ocorrer também $b \neq d$.
- retas concorrentes se, e somente se, as funções tiverem taxas de variação diferentes, isto é, $a \neq c$.

Assim:

a) r e s são retas paralelas distintas;

b) t e u são retas paralelas concorrentes;

c) Sendo w a reta de equação $y = ax + b$, que passa pelos pontos (2, 0) e (3, 5), temos:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 2 + b \\ 5 = a \cdot 3 + b \end{cases} \Rightarrow b = -10 \text{ e } a = 5$$

Logo, as retas w e v possuem equação $y = 5x - 10$, ou seja, as retas são coincidentes.

5. Resolvendo o sistema formado pelas equações das retas r e s, temos:

$$\begin{cases} y = 5x + 3 \\ y = 2x + 11 \end{cases} \Rightarrow 5x + 3 = 2x + 11$$

$$\therefore 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

Substituindo x por $\frac{8}{3}$ em qualquer uma das equações do sistema, por exemplo, na primeira, obtemos o valor de y:

$$y = 5 \cdot \frac{8}{3} + 3 \Rightarrow y = \frac{49}{3}$$

Assim, concluímos que: $r \cap s = \left\{\left(\frac{8}{3}, \frac{49}{3}\right)\right\}$

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. a) $M' = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $N' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 6 \end{bmatrix}$

c) $P' = \begin{bmatrix} \cos 45° & -\text{sen } 45° \\ \text{sen } 45° & \cos 45° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow P' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\therefore P' = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Análise da resolução

COMENTÁRIO: Há um erro nessa resolução, pois para $X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, temos:

$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ e, portanto, $X^2 \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A resolução estava correta até o sistema de equações, porém, o aluno cometeu um erro ao assumir que b e c podem ser simultaneamente nulos.

Resolução correta:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab \\ ac & bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 0 & \text{(I)} \\ ab = 0 & \text{(II)} \\ ac = 0 & \text{(III)} \\ bc = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

De (IV), obtemos: $b = 0$ ou $c = 0$

- Para $b = 0$, deduzimos de (I) que $a = 0$.
  Para $b = 0$ e $a = 0$, as equações (III) e (IV) são satisfeitas para qualquer valor real de c.
  Assim, para $b = 0$, a matriz X tem a forma:
  $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, com $c \in \mathbb{R}$
- Para $c = 0$, deduzimos de (I) que $a = 0$.
  Para $c = 0$ e $a = 0$, as equações (II) e (IV) são satisfeitas para qualquer valor real de b.
  Assim, para $c = 0$, a matriz X tem a forma:
  $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, com $b \in \mathbb{R}$

  Concluímos, então, que todas as matrizes X são da forma:
  $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, com $\{b, c\} \subset \mathbb{R}$