

VESTIBULARES  
2021



## Sumário

|   |   |
|---|---|
| Apresentação .....                                | 3 |
| Instruções Gerais .....                           | 3 |
| Análise da aula .....                             | 4 |
| <i>Essa Disciplina no Vestibular</i> .....        | 4 |
| <i>Roteiro da Aula</i> .....                      | 5 |
| <i>Questões da Aula Separadas por Nível</i> ..... | 6 |
| Bizus .....                                       | 6 |



## Apresentação



Olá, caros alunos!

Sejam bem-vindos à Trilha Estratégica, nosso Bizuário, para as provas do ITA!

Antes de darmos início, vou me apresentar:

Meu nome é Bruno Henrique Almeida da Cunha, sou aluno do ITA, aprovado na AFA, no IME e no ITA por dois anos consecutivos (2018 e 2019).

**SOBRE O BIZUÁRIO:** Trata-se de uma instrução sobre como otimizar o seu estudo nas disciplinas. Sabemos que, durante a preparação para o ITA, é comum o aluno se deparar com inúmeras listas com muitos exercícios e materiais enormes também. Nesse sentido, esse material foi feito no intuito de instruir o aluno a seguir um caminho mais otimizado para conseguir o conhecimento que ele precisa e acertar as questões da prova. Aqui usarei da minha experiência nos vestibulares ITA/IME, obtida com mais de 4 anos de preparação, para fazer um roteiro de aula em que você poderá acessar as suas dificuldades na matéria de forma rápida e objetiva.

## Instruções Gerais

Sistemas Lineares vêm compondo cerca de 3% da prova de matemática nos últimos anos. Apesar de cair pouco, esse assunto é bem importante, então é bom estudarmos todos os detalhes. Anote todos os tópicos importantes dessa aula, pois isso ajuda a fixar a matéria. Além disso, esse bizuário será rápido e bem objetivo. Você pode até fazer esse material estudando, paralelamente, o bizuário de outra aula 😊. Sem mais delongas, vamos para a aula.



Quanto à questão de como estudar o Buzuário e as aulas, lembre-se:

- para passar no ITA é preciso bastante disciplina, foco e paciência. O esperado é que o aluno estude entre 10 e 12 horas por dia, em média, principalmente no começo. Pode parecer muita coisa, até fora da realidade. Porém, considerando que o aluno tem afinidade pelas disciplinas de exatas e que ele encontre um ambiente propício para o estudo, é natural que, com o tempo, ele atinja níveis de estudo muito altos sem demandar grandes esforços para isso.
- “Sangue no olho” e “faca nos dentes” são expressões que indicam muito bem o comportamento de um vestibulando de ITA. Sabendo disso, vamos nessa!

**Observação:** Quando você for indicado a fazer uma questão e encontrar dificuldades, pule-a e continue a resolver outras questões. É interessante que você não olhe a resolução desse exercício logo de primeira, use as outras questões mais fáceis como subsídio para resolver as questões mais complexas. Se mesmo assim você continuar com esse problema, verifique a resolução. Seguir dessa forma irá ajudá-lo a absorver a matéria.

## Análise da aula

### Essa Disciplina no Vestibular

Sistemas lineares é uma disciplina curta e com questões bem sistematizadas. Discussão de sistemas lineares é o principal tipo de questão que cai no vestibular. Você verá que tem muitas questões disso. A estratégia é aprender a técnica e aplicar nas questões até massificar o conceito na memória. Após esse tipo de questão, outro tipo de questão que cai na prova é a solução de um determinado sistema ou a substituição de um sistema por uma equação com eliminação de variável. Geralmente as questões dessa matéria mantêm esse padrão no vestibular.



## Roteiro da Aula

- ❖ Até o capítulo **3** temos algumas definições sobre equações lineares e sistemas lineares. Caso você já tenha estudado esse assunto antes, pode pular essas definições e ir direto para o capítulo **3**. Se não for esse o caso, estude esses capítulos que foram mencionados.
- ❖ Entender bem os três tipos de sistemas lineares (capítulo **3**) é interessante para evitar maiores complicações lá na frente.
- ❖ No capítulo **4** temos algumas formas de resolver um sistema linear. No vestibular do ITA, a forma mais usada para resolver sistemas lineares é a partir eliminação gaussiana, depois regra de Cramer e logo após substituição. Podemos dizer que soma de equações no próprio sistema é um caso particular da eliminação gaussiana. Apenas preste atenção que, para usar a regra de Cramer, o determinante  $D$  da matriz incompleta do sistema deve ser diferente de zero.
- ❖ Chegamos na parte mais importante da aula. A maior parte das questões do vestibular são sobre esse assunto e elas não costumam variar muito entre si no estilo das questões.
- ❖ Para fazer a discussão de um sistema linear temos o seguinte bizu:
  - 1) Calcular o determinante da matriz incompleta
  - 2) Se o determinante for zero, o sistema é possível e determinado (SPD).
  - 3) Se o determinante for diferente de zero, o sistema é SPI ou SI.
  - 4) Para decidir se o sistema é SI ou SPI, vamos verificar se, no sistema de equações, existe alguma equação múltipla da outra. Para isso, se for um sistema de equações  $3 \times 3$  (a maioria dos casos) você pode isolar uma variável em uma equação e jogar essa variável nas outras duas equações. Se você achar uma equação múltipla da outra, analisar os coeficientes independentes das equações que sobraram e ver se possuem a mesma razão de proporção. Caso negativo, o sistema é SI.
- ❖ Em **5.3** temos sistemas homogêneos. Esses sistemas são mais fáceis, pois não existe o caso em que ele é impossível, então a discussão se resume em concluir se o determinante é zero ou diferente de zero.
- ❖ O que você precisa saber de posto de matriz (**capítulo 6**) é que, no vestibular, vai cair para calcular o posto da matriz. Não é necessário decorar o teorema de Rouché-Capelli nem o teorema de Kronecker.
- ❖ O apêndice dessa aula (**capítulo 7**) já caiu no ITA, principalmente o teorema de Cayley-Hamilton. O que você precisa saber são as definições apresentadas no capítulo e as consequências do teorema. O método apresentado de calcular matrizes inversas também é bem interessante.
- ❖ Chegamos ao fim da aula, está na hora de praticar com exercícios. Caso essa seja sua primeira vez estudando essa matéria, siga as questões na ordem de dificuldade. Caso não seja essa a situação, faça as questões, inclusive as fáceis, porém numa velocidade maior que a usual. Se



você já tem experiência no vestibular do ITA, tente fazer as questões de forma ligeira. Vá fazendo dessa forma aos poucos e veja sua margem de erro. Assim você simula a correria do vestibular. Lembre-se de fazer tudo o mais organizadamente possível. Você que já é mais experiente pode seguir as questões na ordem em que aparecerem.

## Questões da Aula Separadas por Nível

Aqui separei as questões da aula por nível de dificuldade. Não se preocupe se você não conseguiu ou não entendeu uma questão difícil logo de primeira, a maior parte das questões de Sistemas Lineares que caem no ITA são fáceis e médias. Porém, no longo prazo, é importante que você domine todas as questões da aula e as ideias que foram descritas ali, para que aprofunde seus conhecimentos na matéria e minimize, assim, as chances de cair alguma questão desse assunto que você não saiba resolver na hora da prova.

Não se preocupe caso você tenha encontrado dificuldade em alguma questão considerada fácil, pois você pode estar destreinado na matéria. Verá que, com um pouco mais de prática, você, provavelmente, vai concordar comigo!

| Fáceis   | Médias  | Difíceis   |
|--|---|------------|
| 4, 6, 8, 9, 10 até 23,<br>26, 27, 28, 29, 30, 31,<br>32, 33, 34, 36, 37, 38,<br>42, 45, 50, 51, 52, 53,<br>57, 59, 60, 62, 70, 71,<br>73 | 1, 2, 3, 5, 7, 24, 25, 35,<br>39, 40, 41, 43, 44, 46,<br>47, 48, 49, 54, 55, 56,<br>58, 61, 65, 66, 68, 69,<br>72 | 63, 64, 67 |

## Bizus

❖ **Questão:** Seja  $a$  uma constante real. Eliminando  $\theta$  das equações abaixo:

$$\begin{cases} x \operatorname{sen} \theta + y \operatorname{cos} \theta = 2a \operatorname{sen} 2\theta \\ x \operatorname{cos} \theta - y \operatorname{sen} \theta = a \operatorname{cos} 2\theta \end{cases}$$

Obtemos:

$$(a) \quad (x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$$



$$(b) (x + y)^{\frac{2}{3}} + (y - x)^{\frac{2}{3}} = 3a^{\frac{2}{3}}$$

$$(c) (x + y)^{\frac{2}{3}} + (y - x)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$(d) (x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}$$

(e) *n. d. a*

### Solução:

Para resolver essa questão de forma rápida, precisamos nos nortear pelas alternativas. Observe que os valores  $x + y$  e  $x - y$  parecem interessantes de se calcular, então vamos achá-los.

Dividindo a primeira equação por  $\cos\theta$ , temos:

$$x \operatorname{tg}\theta + y = 4a \operatorname{sen}\theta$$

Dividindo a segunda por  $\operatorname{sen}\theta$ , temos:

$$x \operatorname{cotg}\theta - y = \frac{a \cos 2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Somando, obtemos que:

$$x = 2a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2\theta + a \cos\theta \cos 2\theta$$

Analogamente,

$$y = -a \operatorname{sen}\theta \cos 2\theta + 2a \cos\theta \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\begin{aligned} x + y &= 2a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2\theta + a \cos\theta \cos 2\theta - a \operatorname{sen}\theta \cos 2\theta + 2a \cos\theta \operatorname{sen} 2\theta \\ &= a(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y &= 2a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2\theta + a \cos\theta \cos 2\theta + a \operatorname{sen}\theta \cos 2\theta - 2a \cos\theta \operatorname{sen} 2\theta \\ &= a(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^3 \end{aligned}$$

Isolando os valores de  $\cos\theta$  e  $\operatorname{sen}\theta$ , temos:

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{\frac{x+y}{a}} + \sqrt[3]{\frac{x-y}{a}} \right)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{\frac{x+y}{a}} - \sqrt[3]{\frac{x-y}{a}} \right)$$

Usando a relação  $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ , obtemos que a resposta da questão é o item (a).



Essa é uma questão que pode assustar um pouco, pois aparece uma raiz cúbica nas alternativas. Sistemas lineares em que você isola uma variável e encontra uma relação entre as outras variáveis que sobraram são questões boas e podem cair na sua prova! É importante notar que norteamos nossa primeira ideia com base nas alternativas do enunciado. Pode parecer uma prática deselegante, mas no vestibular isso acontece e você deve ficar esperto para identificar as oportunidades para aplicar esse raciocínio.

- ❖ Questão 01 é o tipo de questão mais comum que tem nessa matéria de sistemas lineares. Cai demais tanto no ITA quanto no IME.
- ❖ O método de resolução da questão 37 é muito usado no ITA.
- ❖ A questão 39 retrata bem o método bizurado de discussão de sistemas lineares explicitado no roteiro da aula.
- ❖ Na questão 50 você poderia se confundir devido ao nome “incompatível”. Não são nomes tão comuns nas questões. O bizu para não errar nesse tipo de questão é pensar simples. Nessa questão, a incompatibilidade do sistema só poderia implicar no sistema ser impossível.
- ❖ Na questão 56 temos a matriz de Vandermonde, que é bem recorrente na prova do ITA. Sempre lembrar que, para não errar o determinante de Vandermonde, basta pegar, para todas as multiplicações, um elemento da direita menos o da esquerda, como você pode ver na resolução da questão.
- ❖ Na questão 58 o professor apresentou mais de uma solução para a questão. A primeira solução é a que você tem certeza que vai dar certo, pois a questão deu um sistema com três equações e três incógnitas e pede a soma das três incógnitas. Porém, na questão ele deu a relação  $a^2 = b^2 + c^2$ , que lembra bastante o triângulo retângulo e poderia fazer você pensar em outra solução nessa linha, como a segunda solução da questão proposta pelo professor. Nesse tipo de exercício, em que você já tem uma solução que dá certo mas envolve muita conta, você pode tentar gastar de 30 a 50 segundos procurando uma solução mais elegante para ganhar tempo. Caso não encontre, em situação de prova, resolva do primeiro jeito.



- ❖ A questão 68 é o tipo de questão que se você pensar um pouquinho sai bem rápido. Acontece muito isso na primeira fase do IME e às vezes no ITA. Essa questão é boa pra treinar a primeira fase do ITA.
- ❖ De tanto que já praticamos essa matéria, questão como a 73 pode ser considerada fácil. Concorda? 😊

