Livro Eletrônico

Aula 01

Matemática III p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - 2019

Italo Marinho Sá Barreto

Aula 01: Teorema de Tales e das bissetrizes. Relações métricas no triângulo retângulo. Polígonos.

Sumário

Olá estimado aluno. É um prazer tê-lo conosco neste novo trajeto para o aprendizado da matemática! Sou o professor **Italo Marinho**, formado em matemática pela UERJ; atuo no ensino de matemática e física no estado do Rio de Janeiro há 12 anos com enfoque em concursos militares. Me especializei na produção de materiais didáticos dentro do mesmo enfoque.

A matemática é uma ciência constante. Galera, ela não muda. É sempre a mesma. Sabem o que, de fato, muda? Nossa perspectiva. Nosso objetivo aqui é fazer **você** mudar a forma de ver a matemática. Pode ter a certeza de que a abordagem a ser tomada aqui é diferente de qualquer experiência negativa que você, estudante, possa ter vindo a ter no decorrer de sua vida de estudos. A aeronáutica cobra elementos padronizados em suas provas. Pretendo fazer você visualizar esse padrão e, a partir de muita prática, alcançar seus objetivos. Sem mais delongas, vamos ao que interessa!

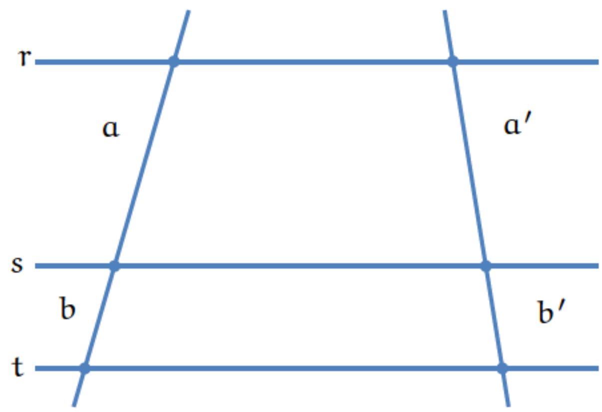
Fizemos uma divisão bastante precisa de edital para você, aluno. Separamos a matemática em três grandes partes. A matemática I, a matemática II e a matemática III (a toda linda e bela geometria). Esse livro eletrônico tratará, claro, de geometria. Mas de geometria para concursos militares, que tem um enfoque bastante específico. Antes de você começar a ler esse material, gostaria de fazer algumas ressalvas. Esse material já contemplará mais questões da ESA, mas lembre-se do que sempre te digo: não fique se focando nas questões do seu concurso. Não há muitas, e devemos sim desenvolver nossas técnicas geométricas em termos de outras bancas. Então, cabe a você, estudante, confiar nas reuniões feitas aqui e acreditar na experiência que tenho em sala de aula para identificar os pontos mais baixos de um aluno que almeja a carreira militar. Faça todos os exercícios independente de ser ou não da ESA. Geometria se aprende assim. Coloquei inicialmente algumas questões de concursos mais complicados, devido à complexidade que se pode tomar do assunto. Mas, deixemos de conversa. Então, vamos lá!

DISPONÍVEL	CONTEÚDO
Aula 00	*Fundamentos da Geometria Plana: elementos primitivos, axiomas e postulados. Ângulos: definição, elementos, notações, unidades de medida, classificação, ângulos consecutivos, ângulos adjacentes, bissetriz de um ângulo, ângulos opostos pelo vértice, retas paralelas cortadas por transversais. Triângulos: definição, elementos, relações angulares, condição de existência, classificação, cevianas, pontos notáveis, base média, congruência.*
Aula 01	*Teorema de Tales, semelhança de triângulos e teorema das bissetrizes. Relações métricas no triângulo retângulo. Polígonos: definição, elementos, nomenclatura, polígonos côncavos, polígonos convexos, classificação, relações angulares e número de diagonais.*
Aula 02	*Quadriláteros notáveis: definição, elementos, relações angulares, classificação, base média e mediana de Euler.*
Aula 03	*Polígonos regulares: Polígonos regulares inscritos e polígonos regulares circunscritos. Circunferência: definição de circunferência e de círculo, elementos, posições relativas, ângulos na circunferência, quadriláteros inscritíveis, teorema de Pitot,e potência de ponto.*
Aula 04	*Trigonometria: razões trigonométricas no triângulo retângulo, trigonometria num triângulo qualquer (Lei dos senos e dos cossenos)*
Aula 05	*Circunferência trigonométrica, operações com arcos (adição, subtração e arco duplo) e funções trigonométricas.*
Aula 06	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 07	*Áreas de figuras planas.*
Aula 08	*Introdução à Geometria Espacial. Prismas: definição, elementos, classificação, planificação, áreas, volume e casos especiais: cubos e paralelepípedos. Cilindros: definição, elementos, classificação, planificação, áreas e volume.*
Aula 09	*Pirâmides: definição, elementos, classificação, relações métricas na pirâmide, áreas e volume. Cones: definição, elementos, classificação, relação métricas no cone, áreas e volume.*
Aula 10	*Esferas: definição, elementos, secção esférica, área da superfície esférica e volume. Troncos.*
Aula 11	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

1.0– Teoremas auxiliares

1.1– Teorema de Tales

Aqui apresentarei uma ferramenta extremamente útil da geometria plana comum. Não é bem um conceito intrínseco dos triângulos apenas, mas uma das grandes utilidades são pertinentes a eles, sim. Vamos então dar uma olhada nesse teorema.



Na figura acima, vemos três retas paralelas (r, s e t) cortadas por duas transversais. Perceba, então, que quatro segmentos foram formados, de comprimentos a, a', b e b'. Vale então que:

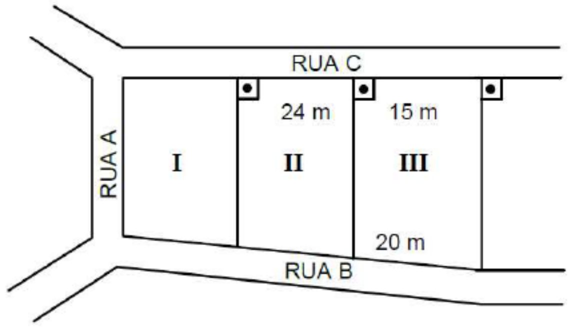
$$\frac{a}{a'} \qquad \frac{b}{b'} \text{ ou } \frac{a}{b} \qquad \frac{a'}{b'}.$$

Então, podemos dizer que essas transversais determinam sobre as paralelas *segmentos proporcionais*[1]. Vejamos um exemplo de aplicação.

[1] Esse fato será demonstrado posteriormente, quando falarmos de trigonometria.

(AFA-2002) QUESTÃO 1

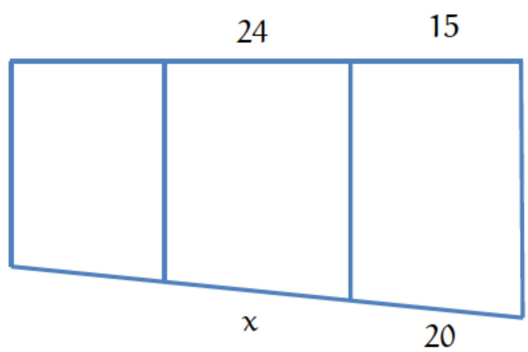
No desenho abaixo, estão representados os terrenos I, II e III.



Quantos metros de comprimento deverá ter o muro que o proprietário do terreno II construirá para fechar o lado que faz frente com a rua B?

(a) 28
(b) 29
(c) 32
(d) 35

R: Observe como a figura está contextualizada com o tema de ruas, muros, terrenos, mas na verdade são apenas retas paralelas cortadas por transversais. Dessa forma, podemos redesenhar a figura de acordo com nossas necessidades:



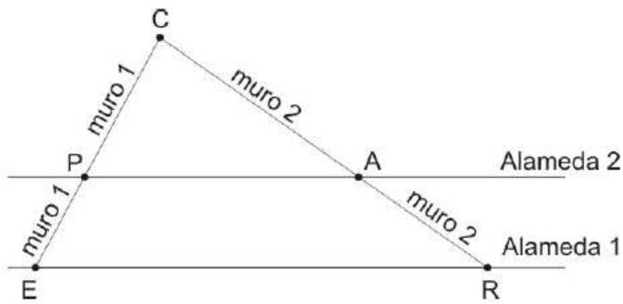
Daí, pelo Teorema de Tales:

$$\frac{x}{20} \quad \frac{24}{15}$$
$$x \quad \frac{20 \cdot 24}{15}$$
$$x \quad 32.$$

Gabarito: C

(EPCAR-2014) QUESTÃO 2

Um parque está sendo construído na cidade de Barbacena. Através das alamedas 1 e 2 do parque, que são paralelas, serão construídos dois muros retilíneos, a partir dos pontos E e R, passando pelos pontos P e A, e esses muros se encontrarão no ponto C, conforme figura.



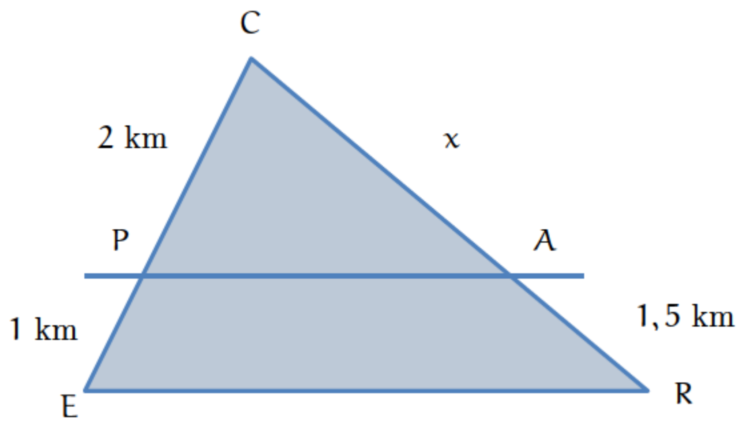
Sabe-se que

- $\overline{EP} \quad 1\,\text{km}$
- $\overline{RA} \quad 1,5\,\text{km}$
- São construídos $12\,\text{m}$ de cada muro, por dia.
- O muro 1 será totalmente construído em 250 dias.
- As obras das construções dos muros 1 e 2 terminarão no mesmo dia.

Se a obra do muro 1 iniciou dia 1º de agosto de 2013, e sabendo ainda que as obras dos dois muros foram realizadas em dias consecutivos (ou seja, não houve dia de folga em nenhuma das obras), então a obra do muro 2 teve início dia

(a) 31 de março de 2013.
(b) 30 de março de 2013.
(c) 29 de março de 2013.
(d) 28 de março de 2013.

R: Observemos a figura:



Perceba que eu já coloquei ali que $PC \quad 2\,\text{km}$. Mas como eu chego a essa conclusão? Vejamos.

O problema afirma, como você já deve tê-lo lido, que a cada dia $12\,\text{m}$ de muro são construídos. O muro 1 foi construído em 250 dias, o que significa que a sua extensão será de

$250 \cdot 12 \quad 3000\,\text{m} \quad 3\,\text{km}$. Como $PE \quad 1\,\text{km}$, temos $PC \quad 3 - 1 \quad 2\,\text{km}$.

Daí, podemos utilizar o Teorema de Tales para achar o valor de x:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1} &\quad \frac{x}{1,5} \\ 2 \cdot 1,5 &\quad 1 \cdot x \\ x &\quad 3\,\text{km}. \end{aligned}$$

Agora vamos para a parte não geométrica da resolução. Visto que o muro 3 tem extensão de $3 + 1,5 \quad 4,5\,\text{km}$. Como a cada dia são construídos $12\,\text{m}$ de muro, podemos fazer uma regra de três:

m	dias
12	1
4500	x

Então:

$$\begin{aligned} \frac{12}{4500} &\quad \frac{1}{x} \\ 12x &\quad 4500 \\ x &\quad \frac{4500}{12} \quad 375 \text{ dias.} \end{aligned}$$

Visto que ambos os muros devem **terminar as obras no mesmo dia** e o muro 2 demora mais, ele deverá começar sua obra antes da do muro 1. E visto que o muro 1 levou 250 dias para ser completo, e o muro 2 leva 375 dias, o muro 2 deverá iniciar a sua obra $375 - 250 \quad 125$ dias antes do muro 1. Assim, quando passarem 125 dias restarão ainda 250 dias de obra para o muro 2 e 250 dias de obra para o muro 1, que iniciará sua obra então.

Como a obra do muro 1 começou em 1º de agosto, o muro 2 deverá iniciar sua construção 125 dias antes dessa data. Façamos então essas contas:

Mês	Quantidade de dias
Julho	31
Junho	30
Maio	31
Abril	30

Só nessa contagem até abril, há $31 + 30 + 31 + 30 \quad 122$ dias. Queremos 125 dias, então devemos regredir ainda mais três dias. Sabendo que março tem 31 dias, temos, retornando mais três dias:

31 de março

30 de março

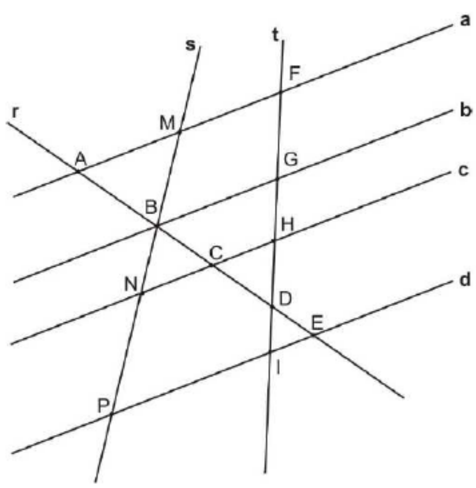
29 de março.

A obra do muro 2, então, teve início no dia 29 de março.

Gabarito: C

(EPCAR-2019) QUESTÃO 3

Observe a figura a seguir:



Nela, as retas a, b, c e d são paralelas e são interceptadas pelas retas transversais r, s e t.

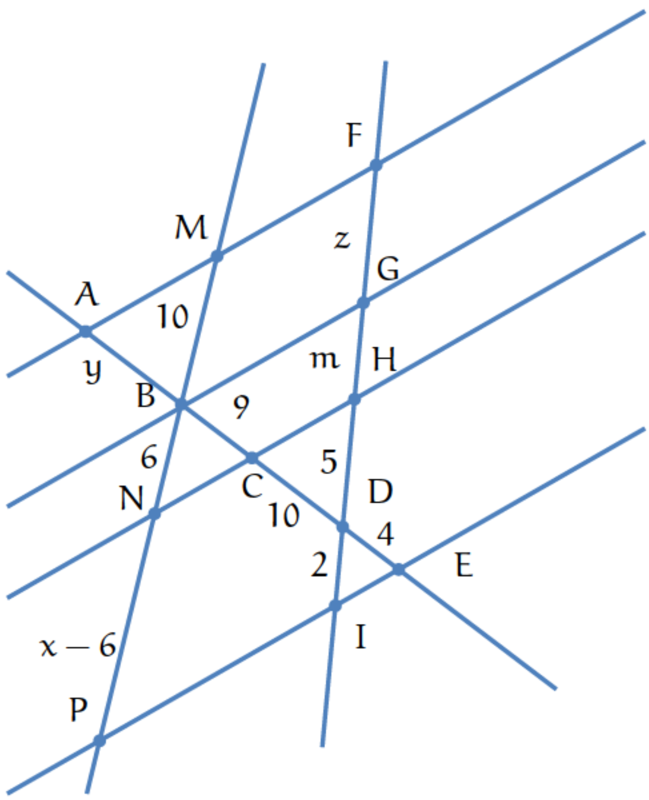
Assim, as medidas dos segmentos, em cm, são:

$\overline{AB}$	y	$\overline{BC}$	9	$\overline{CD}$	10
$\overline{DE}$	4	$\overline{FG}$	z	$\overline{GH}$	m
$\overline{HD}$	5	$\overline{DI}$	2	$\overline{MN}$	16
$\overline{BN}$	6	$\overline{BP}$	x		

A soma $\overline{AB} + \overline{FH}$, em cm, é dada por um número divisível por

(a) 3
(b) 4
(c) 7
(d) 11

R: Apesar de não ter o estilo e a dificuldade da prova da ESA, coloquei essa questão aqui como desafio para você estudante. Aqui, se você não tiver uma boa organização, você vai se embolar bastante. Observe a figura:



Vejamos as conclusões que podemos tirar. Primeiro, em relação às medidas: visto que $BN \quad 6$ e $MN \quad 16$, temos $BM \quad 16 - 6 \quad 10$. Ainda, visto que $BP \quad x$ e $BN \quad 6$, temos $PN \quad x - 6$. Agora, vamos às semelhnaças e aos Teoremas de Tales múltiplos que faremos. Primeiro, à semelhança entre os triângulos: $\triangle BGD$ e $\triangle EDI$. Podemos fazer:

$$\begin{aligned}\frac{BD}{GD} &\quad \frac{DE}{DI}\\ \frac{10+9}{m+5} &\quad \frac{4}{2} \quad 2\\ 2(m+5) &\quad 19\\ 2m+10 &\quad 19\\ 2m &\quad 9\\ m &\quad \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

A próxima relação será um Teorema de Tales. Observe as retas a, b e c, cortadas por s e t. Temos:

$$\begin{aligned}\frac{BN}{GH} &\quad \frac{MB}{FG}\\ \frac{6}{m} &\quad \frac{10}{z}\\ 6z &\quad 10m\\ 6z &\quad 10\cdot\frac{9}{2}\\ 6z &\quad 45\\ z &\quad \frac{45}{6} \quad \frac{15}{2}.\end{aligned}$$

A última relação será uma semelhança dos triângulos AMB e BMC. Veja:

$$\begin{aligned}\frac{BC}{AB} &\quad \frac{BN}{MB}\\ \frac{9}{y} &\quad \frac{6}{10}\\ 6y &\quad 90\\ y &\quad 15.\end{aligned}$$

Ele pede $AB+FH$. Veja que $AB \quad y \quad 15$, e $FH \quad m+z \quad \frac{9}{2}+\frac{15}{2} \quad 12$. Então: $AB+FH \quad 15+12 \quad 27$, número que é divisível por 3.

Gabarito: A

2.0– Relações métricas em triângulos retângulos

Opa, triângulos retângulos? É isso mesmo? Teorema de Pitágoras, finalmente? Mas como sempre fazemos, começaremos com bastante calma e tranquilidade, para que o conteúdo assente direitinho na sua cabeça. Vamos lá, então?

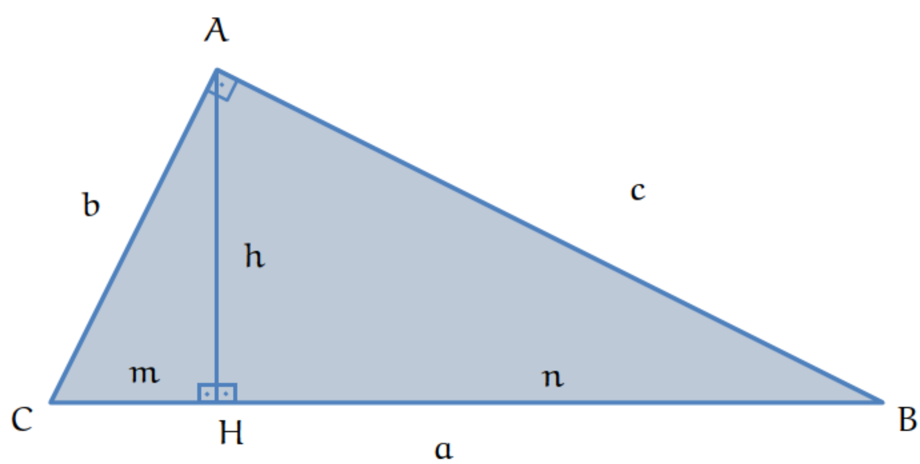
Essa parte do conteúdo é bastante direta. Você precisa conhecer seis propriedades sobre os triângulos retângulos a fim de resolver os seus principais exercícios. Porém, para evitarmos cair em pegadinhas desavisadas, guiarei você, estudante, sob todo o processo de demonstração dessas expressões às quais chegaremos.

Primeiro, vamos a algumas nomenclaturas.

2.1– Nomenclaturas

Como sabemos, um triângulo será chamado de triângulo retângulo quando possuir um dos seus ângulos internos retos (medindo $90°$).

Observe então o triângulo geral abaixo:



Usaremos essa figura no decorrer de todo esse capítulo. Então, fique atento! Aqui vão alguns nomes importantes.

- *Lados de medidas* b *e* c: são chamados de *catetos*. São os dois menores lados de um triângulo retângulo.

- *Lado de medida* a: é a famosa *hipotenusa*. Trata-se do maior lado de um triângulo retângulo. Atente-se aqui ao fato de que à hipotenusa sempre opor-se-á o ângulo reto. Então, quer achar a hipotenusa? Ache o ângulo reto; a hipotenusa será o lado oposto ao ângulo reto.

- *Segmentos de medidas* m *e* n: são as chamadas *projeções dos catetos*. Já dou uma pincelada no que vem a significar uma projeção. Por enquanto, atente-se somente aos nomes.

- *Segmento de medida* h: trata-se da ceviana *altura*, já vista na nossa aula 00!

Entendamos rapidamente o que vem a ser uma projeção. Imagine uma escada. Agora imagine a sombra que essa escada faz no chão, como ilustra a figura abaixo:

Isso, coruja! Nem terminei a minha frase, mas você já entendeu! Pois é, a sombra é a própria projeção. Então, sempre que você quiser, em geometria, projetar uma figura em outra, basta tentar imaginar como é que a sombra de uma será na outra. Então, coruja, no nosso exemplo aqui, a projeção da escada no chão será justamente essa sombra em que você está! Mas aí, uma pergunta que pode surgir: o que "raios" isso tem a ver com aqueles segmentos que você chamou de projeções lá na figura do triângulo retângulo? Tem como explicar melhor?

Pois bem, considere a sombra que os catetos fazem na hipotenusa; por exemplo, considere o cateto AC. Agora imagine a sombra que esse cateto faz na hipotenusa BC. Concorda comigo que CH será justamente essa projeção? Será a sombra que o cateto AC faria em BC.

Muito bem. Entendido o que vem a ser uma projeção? De boas? Então vamos lá falar sobre as relações métricas propriamente ditas.

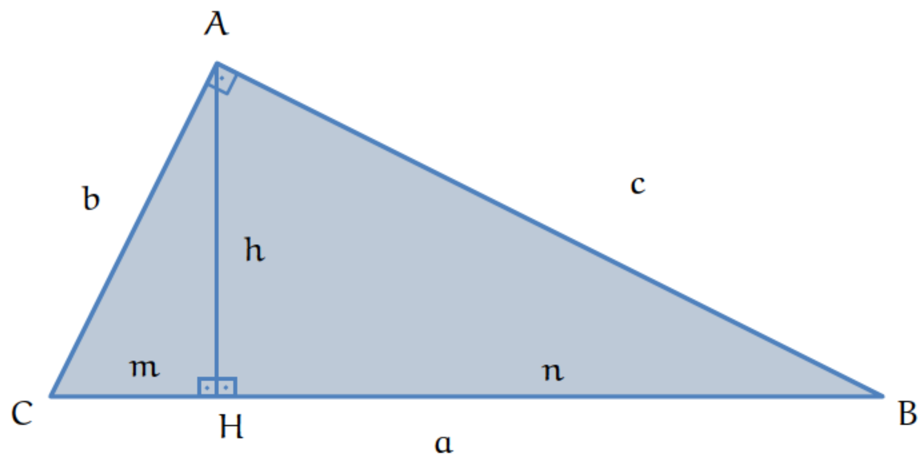
Sim, sim. Daqui a pouquinho já estaremos aprendendo sobre ele. E mais que isso, demonstraremos esse teorema tão famoso, assim nenhuma pegadinha será capaz de te causar problemas. Isso, claro, aliando-me ao fato que você está seguindo as nossas instruções à risca, que são: re-

solver os nossos exercícios, refazer as questões em que você encontrar dificuldade, etc.

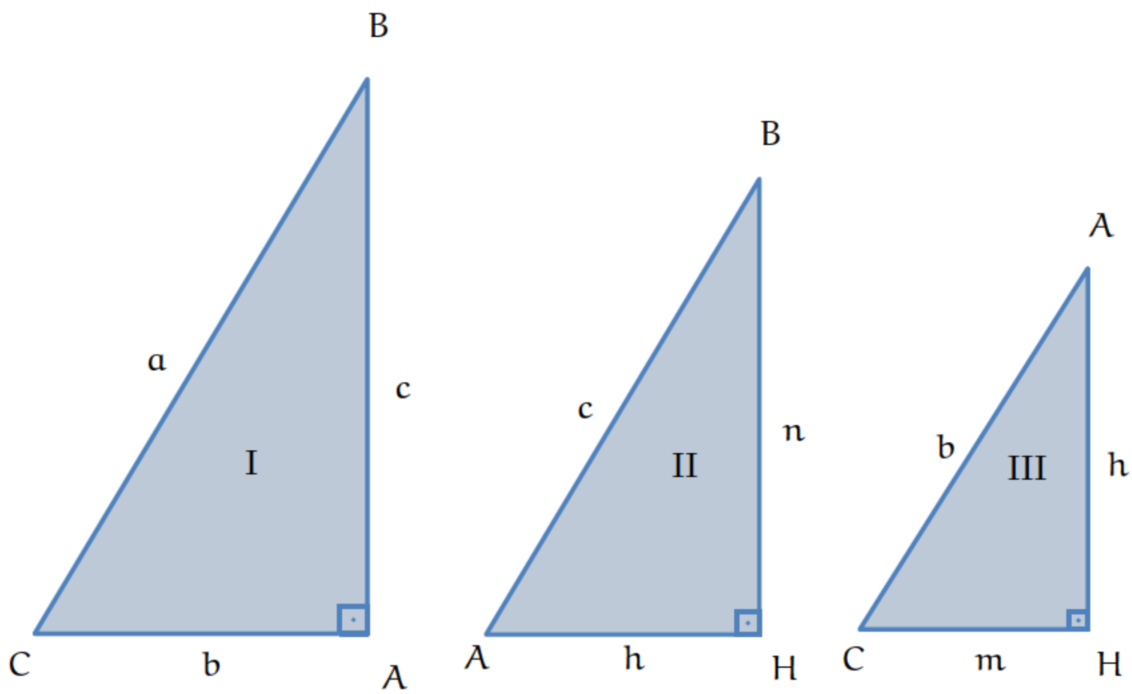
2.2– Relações Métricas

Projeções e catetos

Bom, então, sem mais delongas, vamos ao que interessa. Vamos demonstrar propriedade por propriedade com vocês. Venha comigo. Primeiro, vamos dar uma olhada novamente na nossa figura inicial.



Nessa figura, há três triângulos. Consegue ver isso? São os triângulos ABC, AHB e AHC. Esses triângulos são todos semelhantes (verifique essa semelhança). Vou, a seguir, desenhá-los um ao lado do outro, para que possamos fazer as semelhanças de modo mais organizado. Vejamos:

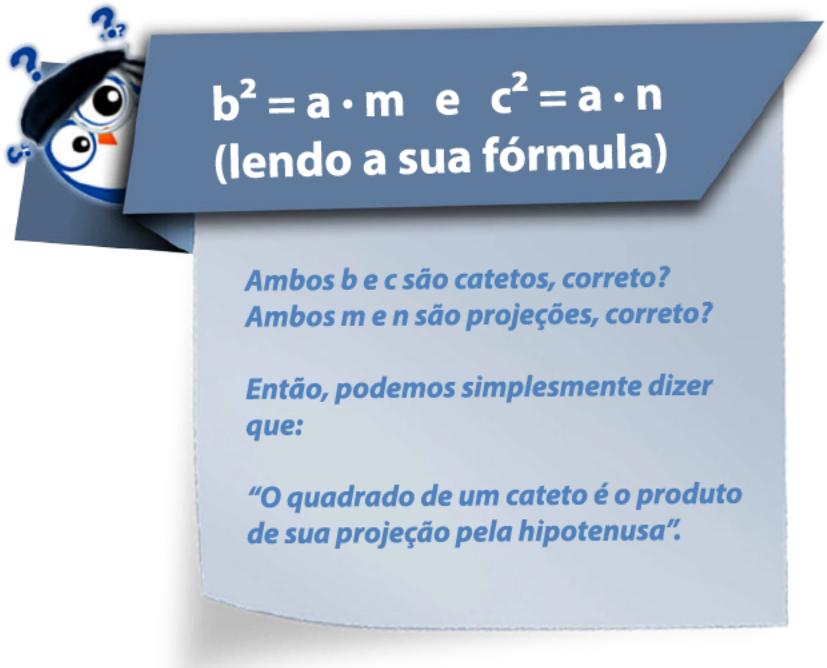


Começaremos fazendo uma semelhança entre os triângulos I e III. Acompanhe comigo: $\frac{a}{b}$ $\frac{b}{m}$

e, portanto, $b^2 \quad a \cdot m$. Essa é a nossa primeira relação métrica. A nossa segunda relação métrica é incrivelmente parecida com a primeira. Trata-se da semelhança entre os triângulos I e II: $\frac{a}{c} \quad \frac{c}{n}$ e, portanto, $c^2 \quad a \cdot n$.

Se você não memorizar essa relação métrica, precisará ficar fazendo as semelhanças sempre que quiser resolver um problema. Então, sim! Para podermos tornar eficientes as nossas resoluções, essas propriedades precisam ser memorizadas. Aqui vai uma dica sobre essas duas propriedades: elas podem ser resumidas em uma frase sabia? Observe a nota abaixo, ela resume ambas em uma frase única.

Todas as relações métricas têm a sua forma de se ler por extenso. Vou sempre lê-la com você em nossas notas, como fizemos na nota ao lado. É de suma importância que você não pule essas leituras achando que não é importante. Não tire essas conclusões por conta própria. Se eu coloquei aqui para você é porque julgo importância! Então, nada de ficar tentando achar atalhos. Se fosse para ser fácil, nem curso existiria para você poder ingressas nas forças armadas, então, relaxa e estuda. Vamos juntos!



Altura e projeções

A próxima propriedade relaciona a altura do triângulo (em relação à hipotenusa[1]). Bom, novamente, dê uma olhada na separação em três triângulos que fizemos há pouco. Faremos agora a semelhança entre os triângulos II e III: $\frac{h}{m} \quad \frac{n}{h}$ e, portanto, $h^2 \quad m \cdot n$.

Essa propriedade é utilíssima. Muitas vezes o problema apenas nos informa as medidas das projeções e pede a altura relativa à hipotenusa. Usamos essa fórmula então.

[1] Deixo isso claro porque, como vimos, um triângulo tem três alturas; no caso de um triângulo retângulo, duas delas são os próprios catetos e a outra seria o segmento AH, que já lhe apresentamos. Essa é a altura que nos interessará por enquanto.

$h^2 = m \cdot n$
(lendo a sua fórmula)

Visto que h é a altura em relação à hipotenusa, e que m, n são projeções, temos:

"O quadrado da altura é o produto das projeções".

Existe ainda uma outra forma de lermos essa fórmula. Se passarmos o quadrado para o outro membro na forma de raiz quadrada, obtemos:

$$h \quad \sqrt{m \cdot n}.$$

Pois bem, quando extraímos a raiz quadrada do produto de dois números, chamamos isso de *a média geométrica* dos dos números. Então podemos dizer aqui que tal altura é a média geométrica das projeções. Beleza? Tudo tranquilo? Para a próxima propriedade, então!

Lados e altura

Às vezes, as projeções ficam de fora. Quero dizer que muitas vezes, nem precisamos saber sobre elas. Nos interessam apenas os lados (catetos e hipotenusa) e a altura. Vejamos então o que podemos fazer.

Novamente nos nossos triângulos separados e semelhantes, dê uma olhada nos triângulos I e II. Faça a seguinte semelhança: $\frac{a}{c} \quad \frac{b}{h}$ e, daí, $ah \quad bc$.

$a \cdot h = b \cdot c$
(lendo a sua fórmula)

Temos:

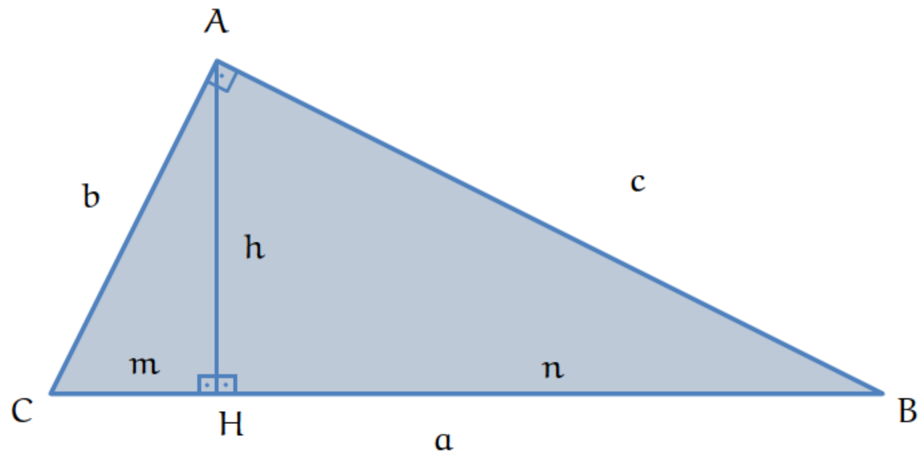
"O produto da hipotenusa pela sua altura é o produto dos catetos".

Veremos na aula de *áreas* que essa fórmula tem tudo a ver com a área de um triângulo. Para os curiosos, divida ambos os lados dessa expressão por dois, e perceba que ambos os lados se tornam formas diferentes de lermos "base vezes altura sobre dois".

Mas por enquanto, tenha sempre em mente isso. Muitas vezes ele só te informará os lados do triângulo e vai te pedir a altura. Essa é a fórmula a se utilizar.

Teorema de Pitágoras

Olhemos novamente, pela última vez, para o nosso triângulo original:

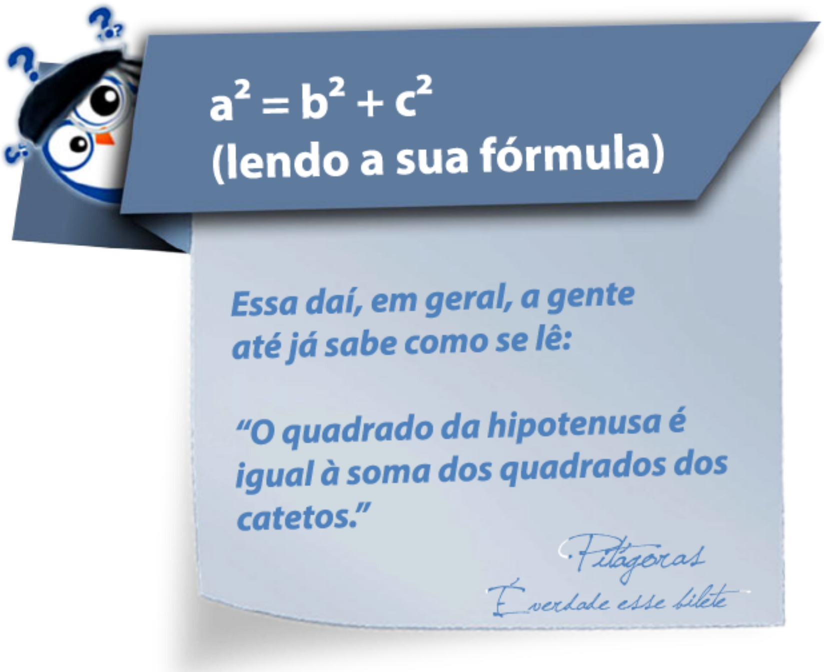


As duas propriedades que relacionam catetos e projeções foram: $b^2 \quad a \cdot m$ e $c^2 \quad a \cdot n$. Isso significa que, caso somemos $a \cdot m + a \cdot n$, obteremos o mesmo que se o fizéssemos com $b^2 + c^2$, correto? Então podemos escrever que $a \cdot m + a \cdot n \quad b^2 + c^2$. Colocando a em evidência, ficamos com $a \cdot (m + n) \quad b^2 + c^2$. Agora, olhe para a figura e tente responder, sem olhar para a próxima linha (na qual escreverei a resposta): quanto vale $m + n$?

...e aí? Conseguiu? Ora, é claro, não? $m + n \quad a$, correto? Dubstituindo na expressão que encontramos:

$$
\begin{aligned}
a \cdot (m+n) &\quad b^2 + c^2 \\
a \cdot \underbrace{(m+n)}_{a} &\quad b^2 + c^2 \\
a \cdot a &\quad b^2 + c^2 \\
a^2 &\quad b^2 + c^2.
\end{aligned}
$$

Olha, coruja. Chegam a faltar palavras no português para expressar o quanto que essa expressão é importante. Teorema de Pitágoras resolver muitos, mas muitos, mas MUITOS problemas. É importantíssimo. Você verá, na resolução de questões, que será o teorema que mais utilizarei, dentre todas as propriedades. Então sim, muito importante.



Perceba então a diferença de termos visto a origem do Teorema de Pitágoras. Não surgiu do nada, nem foi mágica. Veio de semelhança de triângulos e as suas consequências em um triângulo retângulo. Fará toda a diferença para vocÊ, estudante, ter mais firmeza quando for resolver os seus exercícios.

Gostaria entretanto de fazer uma ressolva aqui. O Teorema de Pitágoras não diz apenas isso, não. O que acabamos de ver é que se um triângulo é retângulo, então vale $a^2 \quad b^2+c^2$, correto? Mas tem mais. o Teorema de Pitágoras também diz que se $a^2 \quad b^2+c^2$, então podemos concluir que o triângulo é retângulo. É sutil, mas vê a diferença? Isso é bastante importante, ok?

Vamos então à nossa última propriedade, talvez a mais desconhecida das seis. Alguns materiais a chamam de *Teorema inverso de Pitágoras*.

Altura e catetos

Indo direto ao ponto, faça a seguinte soma de frações: $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$:

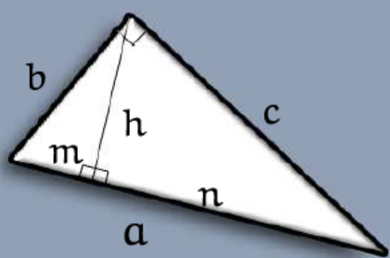
$$\begin{aligned} \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \quad & \frac{b^2+c^2}{b^2c^2} \\ & \frac{b^2+c^2}{(bc)^2}. \end{aligned}$$

Mas pelas propriedades, temos que $ah \quad bc$ e que $a^2 \quad b^2+c^2$, logo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \quad & \frac{a^2}{(ah)^2} \\ & \frac{a^2}{a^2h^2} \\ & \frac{1}{h^2}. \end{aligned}$$

Então podemos afirmar que: $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \quad \frac{1}{h^2}$. Por extenso, podemos dizer que: "a soma dos inversos dos quadrados dos catetos é igual ao inverso do quadrado da altura".

ESQUEMATIZANDO



$$b^2 = a \cdot m;$$
$$c^2 = a \cdot n;$$
$$h^2 = m \cdot n;$$
$$a \cdot h = b \cdot c;$$
$$a^2 = b^2 + c^2;$$
$$1/h^2 = 1/b^2 + 1/c^2.$$

E aí, vamos fazer exercícios? Partiu!

(ESSA-2014) QUESTÃO 4

Em um triângulo retângulo de lados $9\,\text{m}$, $12\,\text{m}$ e $15\,\text{m}$, a altura relativa ao maior lado será:

(a) $7,2\,\text{m}$
(b) $7,8\,\text{m}$
(c) $8,6\,\text{m}$
(d) $9,2\,\text{m}$
(e) $9,6\,\text{m}$

R: Sem muitos mistérios ele nos informa que $a \quad 15$, $b \quad 9$ e $c \quad 12$ e pede h. Então:

$$\begin{aligned} ah &\quad bc \\ 15 \cdot h &\quad 9 \cdot 12 \\ h &\quad \frac{9 \cdot 12}{15} \quad 7,2\,\text{m}. \end{aligned}$$

Gabarito: A

(ESSA-2015) QUESTÃO 5

Num triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{8}$ e $\sqrt{9}$, a hipotenusa mede

(a) $\sqrt{10}$
(b) $\sqrt{11}$
(c) $\sqrt{13}$

(d) $\sqrt{17}$

(e) $\sqrt{19}$

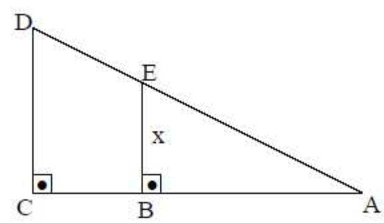
R: Basta aplicarmos o Teorema de Pitágoras:

$$
\begin{aligned}
a^2 &\quad (\sqrt{8})^2+(\sqrt{9})^2\\
a^2 &\quad 8+9\\
a^2 &\quad 17\\
a &\quad \sqrt{17}.
\end{aligned}
$$

Gabarito: D

(EEAR-2002) QUESTÃO 6

Dada a figura abaixo, se $\overline{AB}$ $\quad 8\,\text{cm}$, $\overline{CD}$ $\quad 4\,\text{cm}$ e $\overline{AD}$ $\quad 20\,\text{cm}$, a medida, em cm, de x é



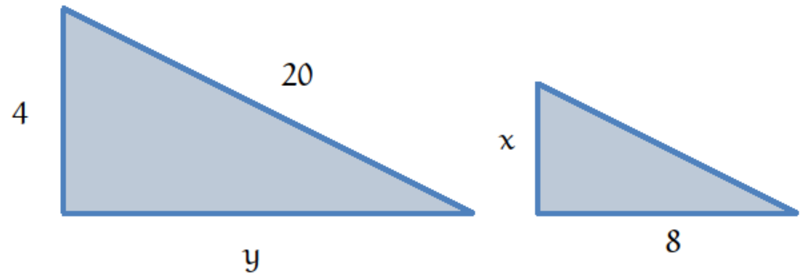
(a) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

(b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(c) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

(d) $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

R: Separemos os triângulos semelhantes:



Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo maior:

$$\begin{aligned} 20^2 &\quad 4^2 + y^2 \\ y^2 + 16 &\quad 400 \\ y^2 &\quad 384 \\ y^2 &\quad 6 \cdot 64 \\ y &\quad \sqrt{6 \cdot 64} \\ y &\quad 8\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Aplicando a condição de semelhança aos dois triângulos:

$$\begin{aligned} \frac{4}{8\sqrt{6}} &\quad \frac{x}{8} \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} &\quad \frac{x}{8} \\ 2x\sqrt{6} &\quad 8 \\ x &\quad \frac{8}{2\sqrt{6}} \quad \frac{4}{\sqrt{6}} \quad \frac{4\sqrt{6}}{6} \quad \frac{2\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Gabarito: C

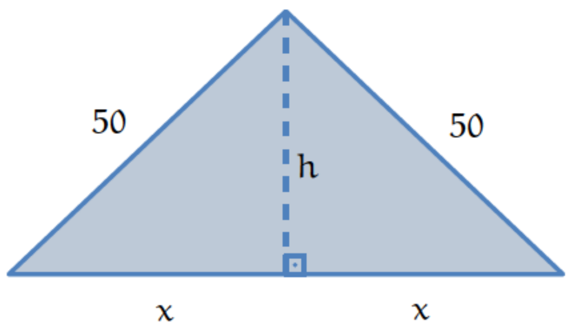
(EEAR-2002) QUESTÃO 7

Os lados congruentes de um triângulo isósceles medem 50 cm cada. Se a medida da altura equivale a $\frac{12}{7}$ da medida da base, então a medida da base, em cm, é

(a) 14

(b) 25
(c) 28
(d) 50

R: Desenhemos a figura:



A base desse triângulo mede, segundo o desenho que fiz, $2x$. Sabemos que $h \quad \frac{12}{7} \cdot 2x \quad \frac{24x}{7}$.
Pelo teorema de Pitágoras, temos então:

$$\begin{aligned}
x^2 + h^2 &\quad 50^2 \\
x^2 + \left(\frac{24x}{7}\right)^2 &\quad 50^2 \\
x^2 + \frac{576x^2}{49} &\quad 50^2 \\
\frac{625x^2}{49} &\quad 50^2 \\
\sqrt{\frac{625x^2}{49}} &\quad \sqrt{50^2} \\
\frac{25x}{7} &\quad 50 \\
25x &\quad 50 \cdot 7 \\
x &\quad 2 \cdot 7 \\
x &\quad 14.
\end{aligned}$$

Como a base do triângulo mede $2x$, temos $2x \quad 2 \cdot 14 \quad 28\,\text{cm}$.

Gabarito: C

(EEAR-2002) QUESTÃO 8

Duas réguas de madeira, AB e CD, com $8\,\text{cm}$ cada uma estão ligadas em suas extremidades por dois fios, formando o retângulo $ABCD$ (fig. 1). Mantendo-se fixa a régua AB e girando-se $180°$ a régua CD em torno do seu ponto médio, sem alterar os comprimentos dos fios, obtêm-se dois triângulos congruentes AIB e CID (fig.2).

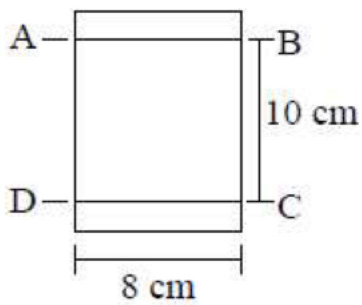


fig.1

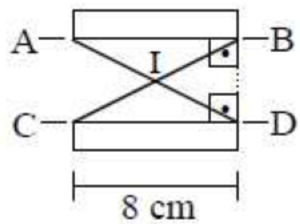
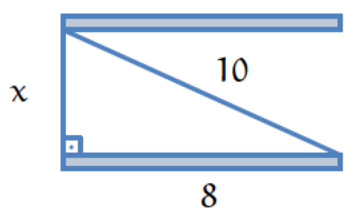


fig.2

A distância, em cm, entre as duas réguas, nessa nova posição (fig.2) é

(a) $5\sqrt{3}$.
(b) $5\sqrt{2}$.
(c) 5.
(d) 6.

R: Mesmo ao girar as réguas, aquelas medidas de $10\,\text{cm}$ referentes aos fios não mudam de tamanho. Então, permanecem medindo $10\,\text{cm}$. Dessa forma, desenhando apenas um dos fios para análise geométrica, conseguimos formar um triângulo retângulo:



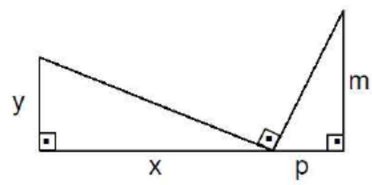
Trata-se de um triângulo pitagórico conhecido, de lados $6, 8$ e 10. Mas caso prefira fazer os cálculos:

$$\begin{aligned} 10^2 &\quad x^2 + 8^2 \\ x^2 + 64 &\quad 100 \\ x^2 &\quad 100 - 64 \\ x^2 &\quad 36 \\ x &\quad 6. \end{aligned}$$

Gabarito: D

(EEAR-2004) QUESTÃO 9

Na figura, os ângulos assinalados são retos.



Assim, necessariamente, teremos

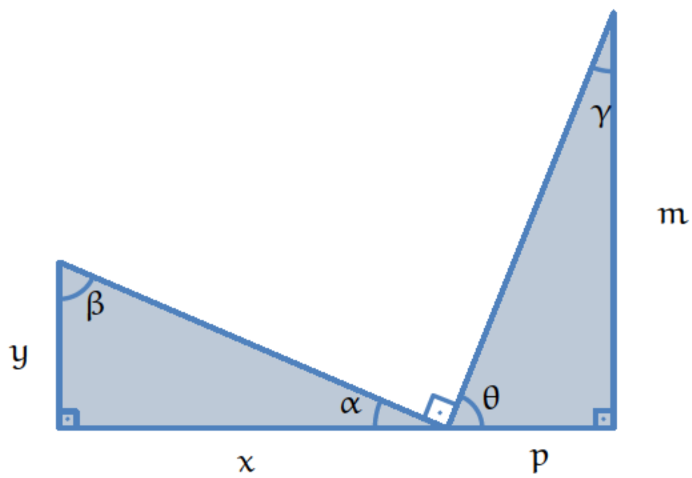
(a) $\frac{x}{y} \quad \frac{p}{m}$

(b) $\frac{x}{y} \quad \frac{m}{p}$

(c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \quad \frac{1}{m}+\frac{1}{p}$

(d) $x^2+y^2 \quad p^2+m^2$.

R: Observe a figura redesenhada:



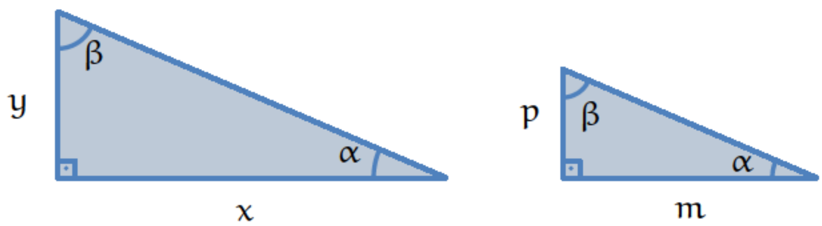
Pela soma dos ângulos internos do triângulo da esquerda:

$$\alpha+\beta+90^\circ \quad 180^\circ$$
$$\alpha+\beta \quad 90^\circ$$
$$\beta \quad 90^\circ-\alpha.$$

Mas α, 90° e θ formam um ângulo raso, portanto:

$$\begin{aligned} \alpha + 90^\circ + \theta &\quad 180^\circ \\ \alpha + \theta &\quad 90^\circ \\ \theta &\quad 90^\circ - \alpha. \end{aligned}$$

Logo, $\beta \quad \theta$ e, consequentemente, $\alpha \quad \gamma$. Portanto os triângulos são semelhantes. Separando-os e aplicando a condição de semelhança:

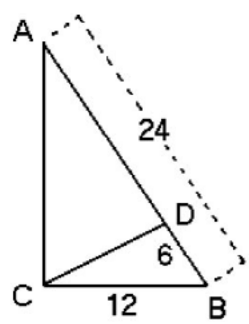


$$\frac{x}{y} \quad \frac{m}{p}.$$

Gabarito: B

■■■(EEAR-2004) QUESTÃO 10

Se os dados no triângulo ABC, retângulo em C, estão em cm, então o triângulo BCD é



(a) obtusângulo.
(b) retângulo.
(c) isósceles.

(d) eqüilátero.

R: O problema nos informa $a \quad 24$, $b \quad 12$ e $m \quad 6$ e não nos é informado se esse triângulo é retângulo ou não. Mas se ele for retângulo, as propriedades deverão ser verdadeiras, e vice-versa. Lembrando de que $b^2 \quad am$, temos:

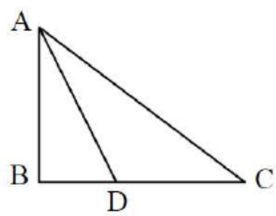
$$\begin{aligned} b^2 &\quad a \cdot m \\ 12^2 &\quad 6 \cdot 24 \\ 144 &\quad 144. \end{aligned}$$

Encontramos uma propriedade verdadeira, portanto, o triângulo é, de fato, retângulo.

Gabarito: B

■■■(EEAR-2005) QUESTÃO 11

Seja o triângulo ABC retângulo em B.



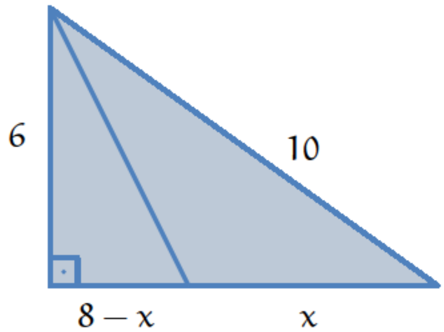
Se $\overline{AD}$ é bissetriz de $\hat{A}$, $AB \quad 6\,\text{cm}$, e $\overline{AC} \quad 10\,\text{cm}$, então a medida de $\overline{DC}$, em cm, é

(a) 6.
(b) 5.
(c) 4.
(d) 3.

R: Visto que o triângulo é retângulo, pelo Teorema de Pitágoras (caso prefira, pode concluir diretamente que $BC \quad 8\,\text{cm}$, dado o fato de que o triângulo é pitagórico):

$$\begin{aligned} AC^2 &\quad AB^2 + BC^2 \\ 10^2 &\quad 6^2 + x^2 \\ x &\quad 8\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Vejamos então a figura, quando colocamos o segmento pedido como variável:



Veja então que, se $DC \quad x$, visto que $BC \quad 8$, teremos $BD \quad 8 - x$. Daí, pelo Teorema da Bissetriz Interna:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BD} &\quad \frac{AC}{CD} \\ \frac{6}{8-x} &\quad \frac{10}{x} \\ 6x &\quad 10 \cdot (8-x) \\ 6x &\quad 80 - 10x \\ 16x &\quad 80 \\ x &\quad 5. \end{aligned}$$

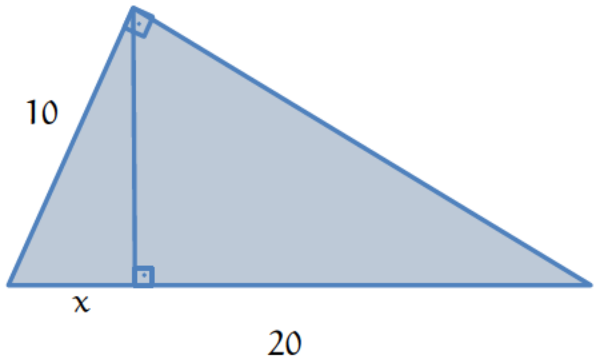
Gabarito: B

(EEAR-2005) QUESTÃO 12

Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede $20\,m$, e um dos catetos, $10\,m$. A medida da projeção deste cateto sobre a hipotenusa, em metros, é igual a

(a) 5.
(b) 6.
(c) 7.
(d) 8.

R: Farei a figura, mesmo que não seja, aqui, completamente necessário vista a aplicação direta das propriedades. Vejamos:



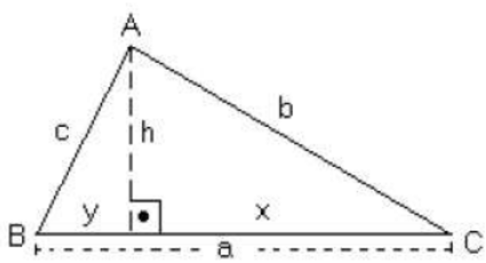
E aí, jovem? Super tranquilo, correto? Ele nos informa: $b \quad 10$, $m \quad x$ e $a \quad 20$; logo:

$$b^2 \quad a \cdot m$$
$$10^2 \quad 20 \cdot x$$
$$20x \quad 100$$
$$x \quad 5.$$

Gabarito: A

(EEAR-2006) QUESTÃO 13

Sejam as relações métricas no triângulo ABC:



I- $b^2 \quad ax$

II- $a^2 \quad b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$

III- $h \quad xy$

IV- $\dfrac{1}{h^2} \quad \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

Se o triângulo ABC é retângulo em A, então o número de relações verdadeiras acima é

(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.

R: Comentemos afirmativa por afirmativa:

I. Trata-se justamente de uma das propriedades de triângulos retângulos, correto!

II. Ainda não aprendemos sobre a chamada lei dos cossenos, mas o que ele apresenta aqui é justamente essa lei. Caso você concorde que cos $90^\circ \quad 0$, essa lei dos cossenos transforma-se no Teorema de Pitágoras. Mas caso não, prefira ignorar essa afirmativa até a nossa aula sobre trigonometria. Mas não se esqueça de retornar aqui após.

III. Isso não é verdade. O correto seria dizer que $h^2 \quad xy$, uma das propriedades métricas de triângulos retângulos.

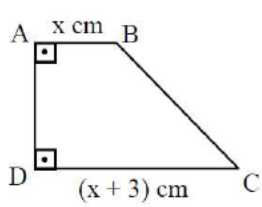
IV. Novamente, outra das seis propriedades que vimos!

Temos então três propriedades verdadeiras.

Gabarito: C

(EEAR-2010) QUESTÃO 14

Quando dadas em cm, as medidas dos lados do trapézio $ABCD$ são expressas por números consecutivos.

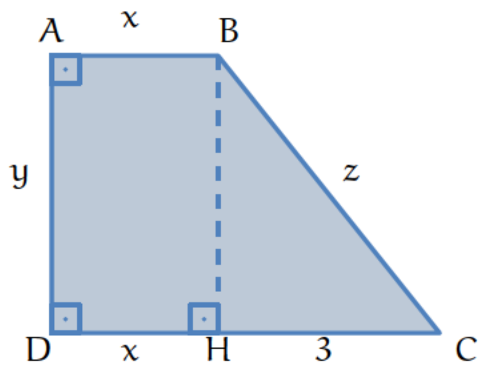


Assim, o valor de x é

(a) 1.

(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.

R: Apesar de ainda não termos visto quadriláteros, não há muita necessidade aqui de se saber o que é um trapézio. A figura por si só já basta. Vejamos. Baixe uma perpendicular a partir de B sobre o lado CD:



Veja que como $CD \quad x+3$ e $DH \quad x$, então $CH \quad x+3-x \quad 3$. Também sabemos que $BH \quad y$. Agora que já fizemos uma análise geométrica na figura, vamos à informação fatídica da questão: os lados desse trapézio são expressoes por números consecutivos. Significa que seus lados serão $x, x+1, x+2$ e $x+3$. Visto que x é o menor lado e $x+3$ é o maior lado, y e z competem pela segunda e terceira posições. Mas na verdade não há competição alguma: z ganha de y com certeza. De fato, a hipotenusa do triângulo BHC é z, sendo y um dos seus catetos. O cateto sempre mede menos que a hipotenusa; portanto, z > y e, portanto, $y \quad x+1$ e $z \quad x+2$. Pelo Teorema de Pitágoras em $\triangle BHC$:

$$
\begin{aligned}
z^2 &\quad y^2+3^2 \\
(x+2)^2 &\quad (x+1)^2+3^2 \\
x^2+4x+4 &\quad x^2+2x+1+9 \\
4x-2x &\quad 9+1-4 \\
2x &\quad 6 \\
x &\quad 3.
\end{aligned}
$$

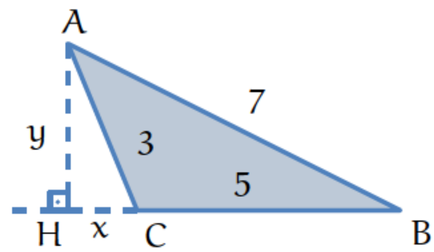
Gabarito: C

(EEAR-2010) QUESTÃO 15

Os lados de um triângulo obtusângulo medem $3\,\text{m}$, $5\,\text{m}$ e $7\,\text{m}$. A medida da projeção do menor dos lados sobre a reta que contém o lado de $5\,\text{m}$ é, em m,

(a) $2,5$.
(b) $1,5$.
(c) 2.
(d) 1.

R: Observe a figura:



Observe que CH é a projeção do menor lado (AC, que mede $3\,\text{m}$) sobre a reta BC, que contém o lado de $5\,\text{m}$. Formamos então dois triângulos retângulos: $\triangle AHC$ e $\triangle AHB$. Agora basta aplicarmos Pitágoras duas vezes montarmos um sistema e pronto. Vamos lá então. Aplicando Pitágoras em $\triangle AHC$:

$$\begin{aligned} 3^2 &\quad x^2+y^2 \\ x^2+y^2 &\quad 9. \end{aligned}$$

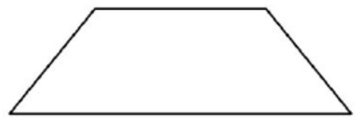
Agora, aplicando Pitágoras em $\triangle AHB$:

$$\begin{aligned} 7^2 &\quad (x+5)^2+y^2 \\ x^2+10x+25+y^2 &\quad 49 \\ \underbrace{x^2+y^2}_{9}+10x+25 &\quad 49 \\ 9+10x+25 &\quad 49 \\ 10x &\quad 49-34 \\ 10x &\quad 15 \\ x &\quad 1,5. \end{aligned}$$

Gabarito: B

(EEAR-2015) QUESTÃO 16

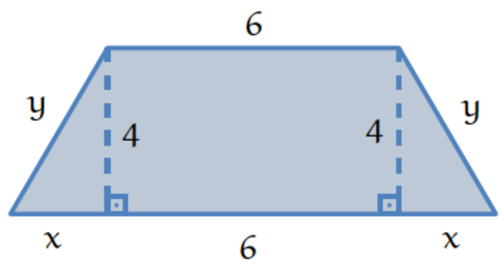
Um trapézio isósceles tem base maior e base menor medindo, respectivamente, $12\,\text{cm}$ e $6\,\text{cm}$.



Se esse trapézio tem altura medindo $4\,\text{cm}$, então seu perímetro é ____ cm.

(a) 22
(b) 26
(c) 28
(d) 30

R: Observe o trapézio redesenhado:



A base maior mede $12\,\text{cm}$, portanto:

$$\begin{aligned} x + 6 + x &\quad 12 \\ 2x &\quad 6 \\ x &\quad 3. \end{aligned}$$

Daí, aplicando Pitágoras nos triângulos retângulos (que é pitagórico e portanto nem necessita aplicar o teorema):

$$\begin{aligned} y^2 &\quad 3^2 + 4^2 \\ y^2 &\quad 25 \\ y &\quad 5. \end{aligned}$$

O perímetro desse trapézio será de, então: $6+5+12+5 \quad 28.$

Gabarito: C

■■■(EEAR-2016) QUESTÃO 17

Sabe-se que a hipotenusa de um triângulo retângulo tem $5\sqrt{5}$cm de comprimento e a soma dos catetos é igual a 15cm. As medidas, em cm, dos catetos são

(a) 6 e 9
(b) 2 e 13
(c) 3 e 12
(d) 5 e 10

R: A hipotenusa mede $5\sqrt{5}$cm, isto é, $a \quad 5\sqrt{5}$. Os catetos, medindo b e c, são tais que $b+c \quad 15$, ou seja, $b \quad 15-c$. Aplicando o teorema de Pitágoras:

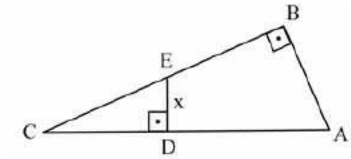
$$\begin{aligned}
a^2 &\quad b^2+c^2\\
(5\sqrt{5})^2 &\quad (15-c)^2+c^2\\
25\cdot 5 &\quad 225-30c+c^2+c^2\\
125 &\quad 225-30c+c^2+c^2\\
2c^2-30c+225-125 &\quad 0\\
2c^2-30c+100 &\quad 0\\
c^2-15c+50 &\quad 0.
\end{aligned}$$

Daí, pelas relações de Girard (soma e produto), temos que há duas soluções para c: 5 e 10. Logo, ou $c \quad 5$ e $b \quad 10$, ou $c \quad 10$ e $b \quad 5$, ambos casos em que um dos catetos mede 5cm e o outro 10cm.

Gabarito: D

(EEAR-2017) QUESTÃO 18

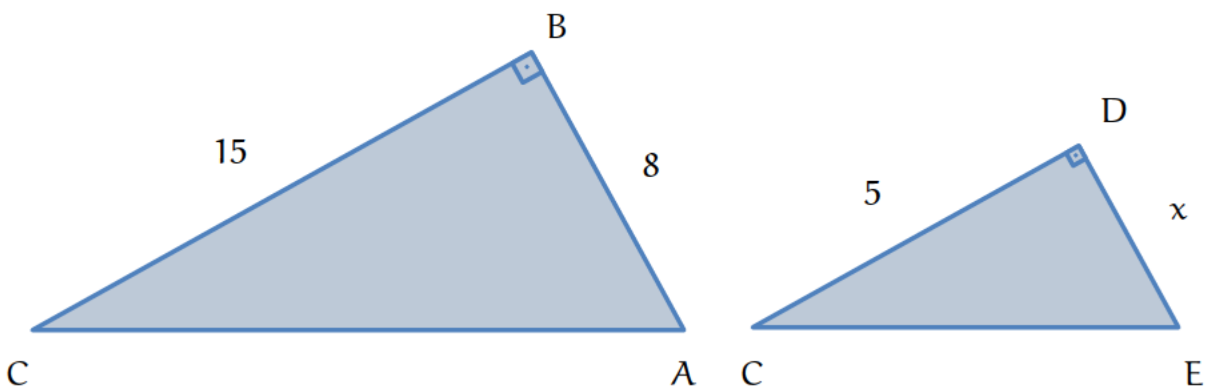
Conforme a figura, os triângulos ABC e CDE são retângulos.



Se $AB \quad 8\text{cm}$, $BC \quad 15\text{cm}$ e $CD \quad 5\text{cm}$, então a medida de $\overline{DE}$, em cm, é

(a) $\frac{2}{5}$
(b) $\frac{3}{2}$
(c) $\frac{8}{3}$
(d) $\frac{1}{4}$

R: À primeira vista, um estudante desavisado poderia achar: "Triângulo retângulo? Pitágoras resolver, certeza!"; e daí, chega uma questão como essa, que se reolve com simples semelhança de triÂngulos, e a teoria dele cai por água abaixo. Separarei os dois triângulos semelhantes (verifique a semelhança):



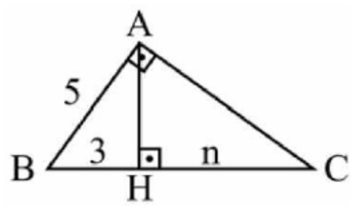
Aplicando a condição de semelhança:

$$\frac{15}{8} \quad \frac{5}{x}$$
$$15x \quad 8 \cdot 5$$
$$x \quad \frac{8 \cdot 5}{15}$$
$$x \quad \frac{8}{3}.$$

Gabarito: C

(EEAR-2019) QUESTÃO 19

Se ABC é um triângulo retângulo em A, o valor de n é



(a) $\dfrac{22}{3}$
(b) $\dfrac{16}{3}$
(c) 22
(d) 16

R: Ele nos informa que: $b \quad 5$, $a \quad 3+n$ e $m \quad 3$. Portanto:

$$
\begin{aligned}
b^2 &\quad a \cdot m \\
5^2 &\quad (3+n) \cdot 3 \\
25 &\quad 9+3n \\
3n &\quad 25-9 \\
3n &\quad 16 \\
n &\quad \frac{16}{3}.
\end{aligned}
$$

Gabarito: B

3.0– Polígonos

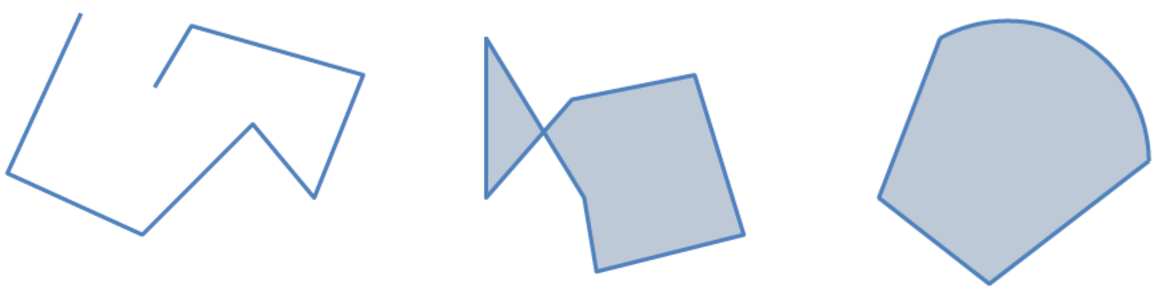
Começaremos a falar então sobre polígonos. Trata-se de outro assunto que também está cercado de fórmulas e resultados importantes. Vamos começar então pela definição de polígonos e vamos falar um pouco sobre os seus elementos.

3.1– Elementos e definição

Definição

Um polígono é uma figura plana formada estritamente por segmentos de reta que não se cruzem e que se fechem em uma forma. Outra forma de definirmos polígono é: um polígono é uma forma geométrica plana em que o número de lados sempre coincide com o número de ângulos.

Caso não chegue a fechar em uma figura, isto é, caso fique aberto, chamamos a figura de uma *poligonal*. Veja alguns exemplos:



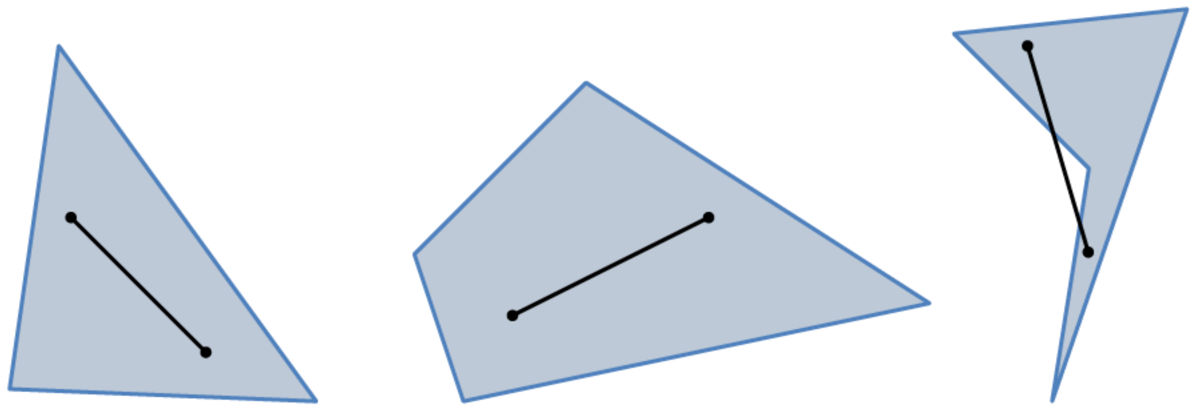
A primeira figura é o que chamamos de uma *poligonal*, como disse. Veja que é formada estritamente por segmentos de reta, porém, não chegam a se fechar.

Já a segunda figura, apesar de fechada, não constitui um polígono, vista a sua auto-interseção (ele se auto-cruza, quebrando a definição). E a terceira figura, apesar de ser fechada e não haver auto-interseções, não é formada estritamente por segmentos de reta. Uma de suas construções foi curva, e isso quebra a definição de polígono. Vejamos alguns exemplos de polígonos de fato.

Polígonos convexos e côncavos

Um polígono será dito convexo quando quaisquer dois pontos em seu interior forem extremidades de um segmento de reta inteiramente contido no polígono. Caso contrário, o polígono será dito côncavo.

Vejamos alguns polígonos, por quês de exemplo:



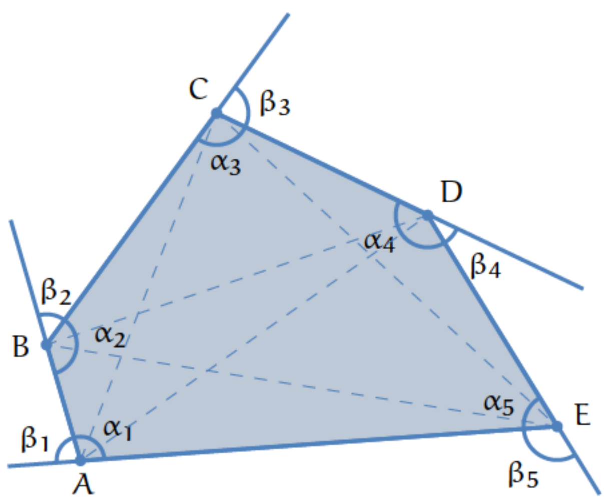
Os dois primeiros polígonos são exemplos de polígonos convexos, porque de fato qualquer segmento com extremidades dentro do polígono estará também dentro dele. Porém, observe o último polígono. Os dois pontos estão no interior do polígono mas, ao conectá-los por um segmento de reta, não temos a totalidade do segmento em seu interior. Trata-se então de um polígono côncavo.

Elementos básicos de um polígono convexo

Nossos estudos serão voltados aos polígonos convexos. Caso se faça necessário falar de algum polígono côncavo, o farei em tom de exceção. Então, vamos lá.

A cada um dos segmentos de reta que constituem o polígono nós chamamos de *lados*.

Observe abaixo um polígono de cinco lados. Utilizarei esse polígono para podermos falar sobre os elementos básicos de um qualquer. Vejamos:



Não se assuste com a figura, jovem. Apenas realcei todos os elemrntos importantes, para que você consiga enxergá-los melhor. Vamos lá então.

- *Vértices:* São os pontos que pertencem às extremidades dos lados. Sempre que dois lados se intersectam, dizemos que aquela interseção é um vértice do polígono. No nosso exemplo, os vértices são os pontos A, B, C, D e E.
- *Lados:* Faz parte da definição de polígono. São segmentos de reta cujas extremidades são vértices *consecutivos*. São lados, no nosso exemplo: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ e $\overline{AE}$.
- *Diagonais:* Uma diagonal é um segmento de reta, assim como o lado; a diferença é que as extremidades desse segmento de reta *não* são vértices consecutivos. São diagonais, no nosso exemplo, todos os segmentos pontilhados: $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BE}$ e $\overline{CE}$.
- *Ângulos internos:* São os ângulos formados estritamente pelos lados. São eles, na nossa figura: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ e α_5.
- *Ângulos externos:* São os adjacentes suplementares aos ângulos internos. Na nossa figura: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ e β_5.

Ah coruja, infelizmente eu tenho de responder que sim. Sabe o que acontece, é que essas terminologias são altamente utilizadas em diversas questões. De que adianta ter entendido todo o conteúdo sem saber de quê a questão está falando, ou a quê ela se refere? Vamos lá, anote esses nomes em papéis de memorização, releia o nosso material, faça os nossos exercícios como eu sempre falo; te garanto que isso vai acabar ficando trivial para você. Vamos lá as propriedades dos polígonos.

3.2– Propriedades e contagens

Gênero

Chama-se de gênero a quantidade de lados de um polígono. Mas, não para por aí; gênero também é a quantidade de vértices, a quantidade de ângulos internos e a quantidade de ângulos externos. Todas essas quantidades são iguais a n, que é o gênero de um polígono.

Um triângulo, pro exemplo, é um polígono de gênero 3, enquanto que um quadrilátero é um polígono de gênero 4.

Nomenclaturas

Polígonos são nomeados de acordo com o seu gênero. Vejamos a lista dos principais polígonos e seus nomes:

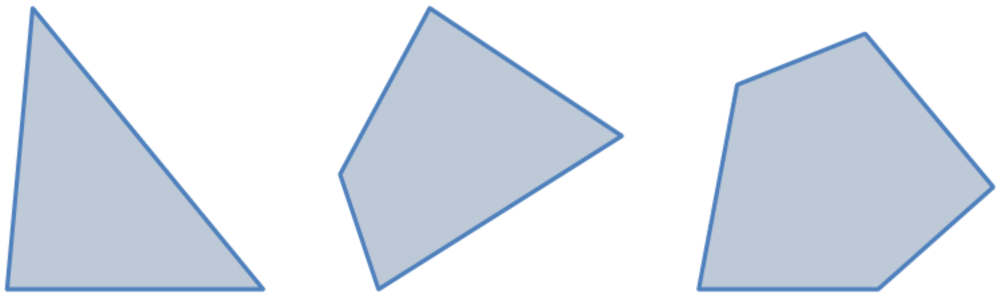
Gênero	Nomenclatura
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Percebeu que houve um "pulo" do gênero 12 para o 15 e do 15 para o 20? Não há convergência de bibliografias quanto aos nomes desses polígonos. Alguns livros os trazem, outros não. Então, quando formos nos referir a esses gêneros anônimos, escrevemos simplesmente "polígono de 14 lados", ou qualquer outro. Tudo bem? Beleza?

Haha, pois é coruja. Quadrilátero é uma palavra que abraça TODOS os polígonos de gênero 4. Quadrado, porém, é um tipo *especial* de quadrilátero. Veremos sobre isso, porém, em nossa próxima aula. Mas que fique claro que o nome geral de um polígono de 4 lados é quadrilátero, ok? Sigamos agora com algumas fórmulas importantes. E não se esqueça de às vezes dar uma pausa na sua leitura, jovem. Aproveite para fazer alguns resumos, como eu sempre falo, ou resolver exercícios. Isso é muito importante.

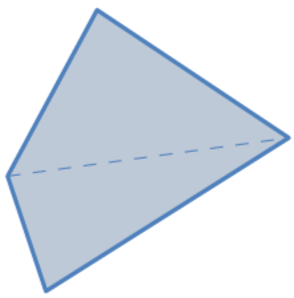
Divisões interiores e soma dos ângulos internos

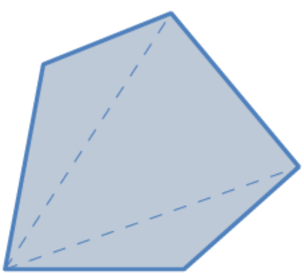
Aqui começaremos a falar de alguns aspectos quantitativos dos polígonos, em relação a ângulos e quantidades (de diagonais, por exemplo). Antes disso, observe os polígonos convexos abaixo:



Se eu te pedisse para calcular a soma de seus ângulos internos, qual seria a sua atitude? Bom, um desses polígonos você já sabe calcular tal soma: o triângulo, certo? Na aula passada, aprendemos a fazer isso! Vimos que a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre dá 180°, certo?

Mas e se pudéssemos transformar as outras figuras em triângulos também?





Observe as duas figuras que precisamos calcular a soma dos ângulos internos. Percebeu que elas foram divididas em triângulos? O quadrilátero, foi dividido em dois triângulos, enquanto que o pentágono foi dividido em três.

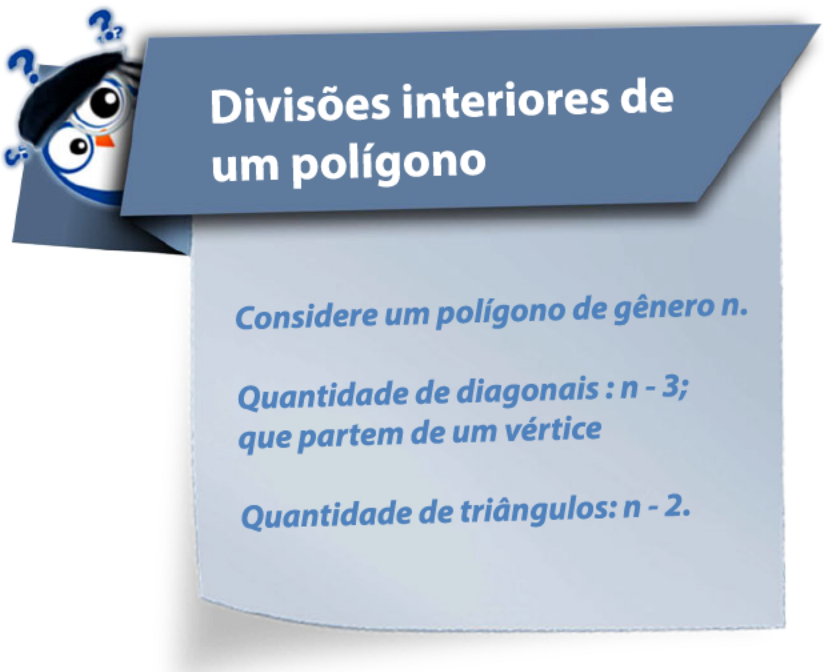
então, a soma dos ângulos internos do quadrilátero será duas vezes a soma dos ângulos internos de um triângulo, isto é, $2 \cdot 180^\circ \quad 360^\circ$. Já no caso do pentágono, a soma de seus ângulos internos será três vezes a soma dos ângulos internos de um triângulo, visto que ele foi dividido em três; logo, tal soma será igual a $3 \cdot 180^\circ \quad 540^\circ$. isso segue um certo padrão, você consegue ver esse padrão? O quadrilátero (gênero 4) foi dividido em 2 triângulos; o pentágono (gênero 5) foi dividido em 3 triângulos. Observe mais alguns polígonos e a quantidade de triângulos em que ele pode ser dividido. Tente entender a conclusão que fiz na última linha, baseando-se nas linhas anteriores da tabela. Não se preocupe, após a tabela irei explicar a minha linha de raciocínio. Bastante tranquilo, nada de difícil.

Polígono	**Gênero**	**Quantidade de triângulos formados**
Quadrilátero	4	2
Pentágono	5	3
Hexágono	6	4
Heptágono	7	5
Octógono $\vdots$	8 $\vdots$	6 $\vdots$
n-ágono	n	$n-2$

Perceba que ao tentarmos dividir um desses polígonos em triângulos a partir de um vértice, conseguimos dividí-lo sempre duas unidades e menos que seu próprio gênero! O octógono, que tem gênero 8, pode ser dividido, a partir de um vértice, em $8-2 \quad 6$ triângulos!

Uma justificativa rápida do porquê dessa perda de duas unidades, é que o polígono será dividido em uma quantidade de triângulos que depende da quantidade de diagonais que partem de um vértice único. Acontece que, ao escolhermos um vértice qualquer, há sempre dois vértices adjacentes; porém, pela definição de diagonal, os vértices a serem conectados não podem ser adjacentes! Então teremos de excluir três vértices (os dois adjacentes e o próprio vértice escolhido). Daí, como ao traçar uma diagonal já formamos dois triângulos, temos que a quantidade de triângulos será uma unidade acima da quantidade de diagonais. Como são $n-3$ diagonais, temos $n-3+1 \quad n-2$ triângulos.

Com isso, concluímos duas coisas:



Esses aspectos quantitativos são perguntados com alguma frequência. Então, tome sempre muito cuidado. Se eu te pergunto por exemplo, quantas diagonais distintas partem de um vértice qualquer de um eneágono, qual seria a sua resposta? Ora, se é um eneágono, tem gênero 9, correto? Logo, partem $9-3 \quad 6$ diagonais distintas. E formam quantos triângulos? Formam-se $9-2 \quad 7$ triângulos.

E quanto à soma dos ângulos internos? Então, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$ e um polígono convexo de gênero n pode ser dividido em $n-2$ triângulos, a soma será...

Tá estudando, hein corujinha? Exatamente. Porque como são $n-2$ triângulos e cada um tem soma de $180°$ em relação aos ângulos internos, então para somar os ângulos internos do polígono basta multiplicar a quantidade de triângulos por $180°$. Muito bom mesmo! Vamos lá, então? Continuar? Agora falaremos sobre a soma dos ângulos externos.

Soma dos ângulos externos

Considere um polígono convexo de gênero n. Sabemos que esse polígono tem n ângulos externos, correto? E sabemos também que o ângulo externo e o ângulo interno são suplementares.

Bom, consideremos que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ sejam os seus ângulos internos, e $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ sejam os seus externos. Façamos então a sua soma:

$$\begin{aligned}
S_e \quad & \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n \\
& \underbrace{\beta_1}_{180^\circ - \alpha_1} + \underbrace{\beta_2}_{180^\circ - \alpha_2} + \underbrace{\beta_3}_{180^\circ - \alpha_3} + \ldots + \underbrace{\beta_n}_{180^\circ - \alpha_n} \\
& 180^\circ - \alpha_1 + 180^\circ - \alpha_2 + 180^\circ - \alpha_3 + \ldots + 180^\circ - \alpha_n \\
& \underbrace{180^\circ + \ldots + 180^\circ}_{n \text{ parcelas}} - \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)}_{180^\circ \cdot (n-2)} \\
& 180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot (n-2) \\
& 180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot n + 360^\circ \\
& 360^\circ.
\end{aligned}$$

Então, sim, incrivelmente, a soma dos ângulos externos de um polígono convexo qualquer sempre resultará em 360°.

Quantidade de diagonais

Aqui infelizmente eu não poderei demonstrar a fórmula para vocês. Precisaríamos saber um pouco sobre o princípio fundamental da contagem da famosa análise combinatória, tema de MAT II.

Mas de qualquer forma, segue a expressão para a resolução de seus exercícios.

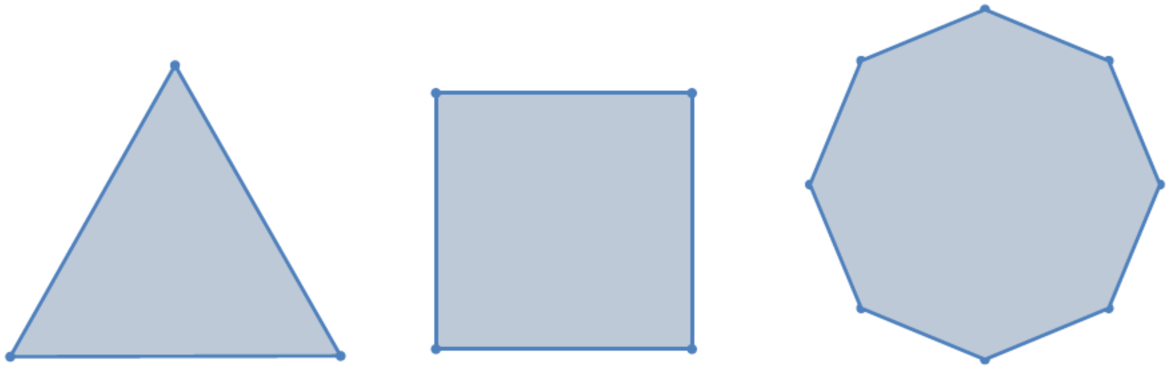
Dado um polígono qualquer de gênero n, podemos calcular a quantidade de diagonais em seu interior pela seguinte fórmula: $d \quad \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Mais um detalhe. Veremos a seguir a definição de polígonos regulares; quando um polígono é regular, existem mais duas perguntas que podem ser feitas em relação à quantidade de diagonais: quantas dessas diagonais passam pelo seu centro, e quantas não passam? então, isso é bem fácil. Funciona da seguinte forma: se o polígono tiver gênero n par, a quantidade de diagonais que passam pelo seu centro é $\dfrac{n}{2}$; porém, caso o polígono tenha gênero ímpar, *nenhuma* diagonal passará pelo seu centro. Isso será melhor entendido na resolução dos exercícios.

3.3– Polígonos regulares

Definição

Para finalizarmos, conteúdo rápido aqui para você. Um polígono será dito regular quando seus lados forem todos iguais (congruentes), e seus ângulos também o forem! Veja alguns exemplos de polígonos regulares:

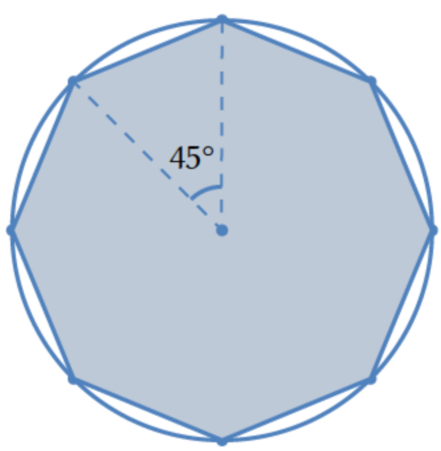


Ambas as condições têm de ser satisfeitas: o polígono deve ter os lados iguais e os ângulos iguais. Caso não satisfaçam uma delas, não será regular. O triângulo é o único polígono que, caso satisfaça uma, necessariamente satisfará a outra por consequência.

Ângulo central

Todo polígono regular tem o que chamamos de ângulo central. isso vem do fato de que todos polígono regular é *inscritível*. Isso significa dizer que é sempre possível desenharmos um círculo passando por todos os seus vértices. Pois bem, o ângulo central será o ângulo com vértice no centro do círculo e cujas semirretas intersectem vértices consecutivos do polígono regular.

Veja o octógono abaixo, por exemplo:



O ângulo destacado é um ângulo central, concorda? E como descobrimos o seu valor? Bom, visto que o octógono tem 8 lados, basta dividir 360° por 8: $\frac{360^\circ}{8} \quad 45^\circ$.

Então, para descobrirmos o valor do ângulo central de um polígono de gênero n, basta fazer: $\frac{360^\circ}{n}$.

Ângulo interno e ângulo externo

Visto que todos os ângulos internos são iguais, podemos calcular o valor de cada um calculando a soma dos ângulos e dividindo pela quantidade de ângulos internos (gênero do polígono regular). O mesmo pode ser feito para ângulos externos. portanto, para polígonos regulares, o ângulo interno α e o ângulo externo β podem ser calculados por: $\alpha \quad \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}$ e $\beta \quad \frac{360^\circ}{n}$. Perceba com isso que o ângulo externo terá a mesma medida que o ângulo central.

Vamos lá então fazer exercícios? espero que seu trajeto até aqui esteja sendo produtivo, espero que cada vez mais você avance rumo à sua aprovação. Estou contigo! Partiu papirar!

QUESTÕES
COMENTADAS

(ESSA-2007) QUESTÃO 20

Se um polígono regular é tal que a medida de um ângulo interno é o triplo da medida do ângulo externo, o número de lados desse polígono é:

(a) 12
(b) 9
(c) 6
(d) 4
(e) 8

R: Em um polígono convexo (e aqui estou supondo que o polígono em questão o seja), a soma da medida de um ângulo interno qualquer com o seu ângulo externo é 180°. Mas o problema também afirma que $\alpha_i \quad 3\alpha_e$. Então, temos:

$$\begin{aligned} \alpha_i + \alpha_e &\quad 180^\circ \\ 3\alpha_e + \alpha_e &\quad 180^\circ \\ 4\alpha_e &\quad 180^\circ \\ \alpha_e &\quad 45^\circ. \end{aligned}$$

Como o polígono é regular com n lados, sabemos que os ângulos externos são todos iguais; logo:

$$\begin{aligned} \alpha_e &\quad \frac{360^\circ}{n} \\ 45^\circ &\quad \frac{360^\circ}{n} \\ n &\quad \frac{360^\circ}{45^\circ} \\ n &\quad 8. \end{aligned}$$

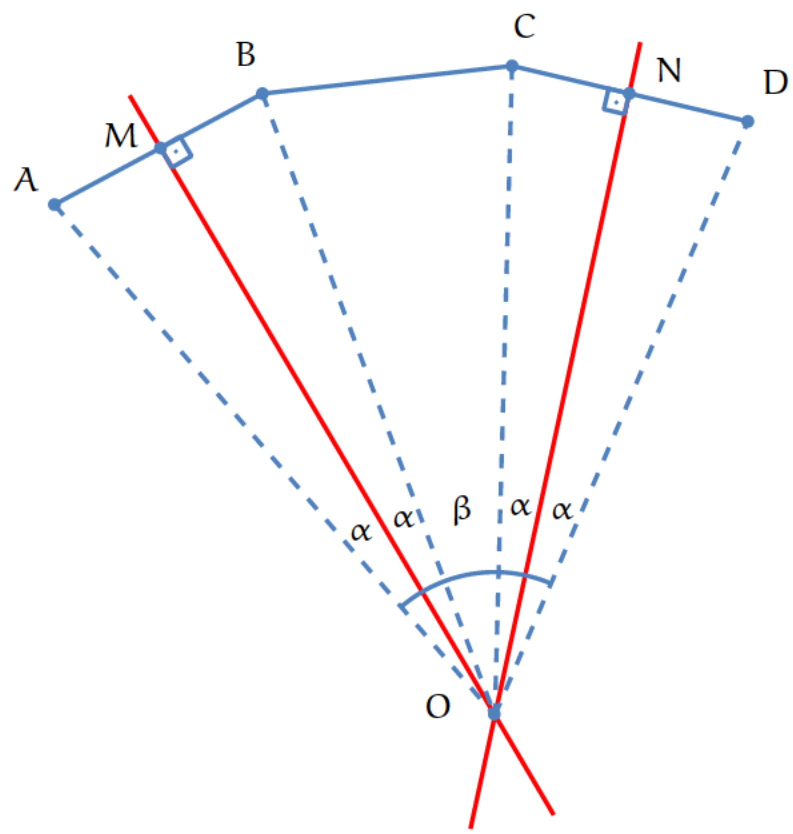
Gabarito: E

(ESSA-2007) QUESTÃO 21

Considere um polígono regular ABCDEF$\cdots$. Sabe-se que as mediatrizes dos lados AB e CD formam um ângulo de $20°$ e sua região correspondente contém os vértices B e C do polígono. Assim sendo, quantas diagonais deste polígono passam pelo centro, dado que o seu número de vértices é maior que seis?

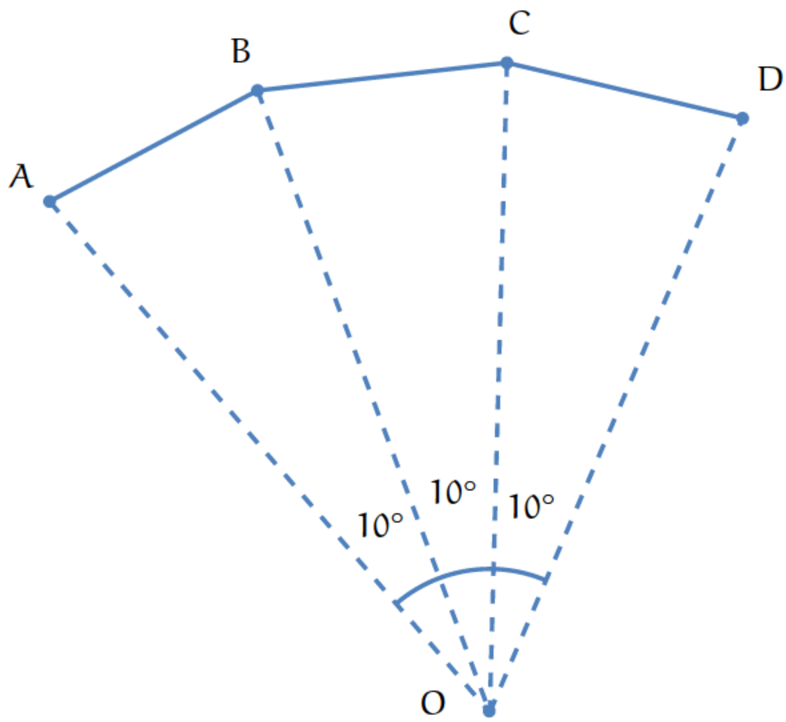
(a) 17
(b) 15
(c) 16
(d) 18
(e) 14

R: Questão cheia de maldade. Vamos lá. Inicialmente, vou desenhar uma parte do polígono em questão, somente a parte que nos importa:



O problema nos afirma que as mediatrizes, aqui representadas pela cor vermelha, formam um ângulo de 20°. Então: $\angle MON \quad 20^\circ$. Mas perceba que, de acordo com as medidas que utilizei, temos: $\alpha + \beta + \alpha \quad 20^\circ$, ou seja, $2\alpha + \beta \quad 20^\circ$. Então, visto que $\angle AOC \quad 2\alpha + \beta$, temos que $\angle AOC \quad 20^\circ$.

Mas veja também que $\angle AOB \quad \angle BOC$, e como ambos somados resultam em 20°, temos que cada um desses ângulos mede 10°.



O ângulo central de um polígono regular pode ser calculado pela expressão: $\frac{360^\circ}{n}$, onde n é o seu gênero. Então:

$$10^\circ \quad \frac{360^\circ}{n}$$
$$n \quad \frac{360^\circ}{10^\circ}$$
$$n \quad 36.$$

Trata-se então de um polígono de 36 lados. Sabemos que em um polígono de gênero par, o número de diagonais que passam pelo seu centro será a metade de seu gênero. Portanto, o número de diagonais que passam pelo centro desse polígono será de $\frac{36}{2} \quad 18$.

Gabarito: D

(ESSA-2017) QUESTÃO 22

Os ângulos internos de um quadrilátero são inversamente proporcionais aos números 2, 3, 4 e 5. O maior ângulo interno desse quadrilátero mede, aproximadamente

(a) $210°$
(b) $90°$
(c) $230°$
(d) $100°$
(e) $140°$

R: A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é de $360°$. Como são quatro ângulos, temos: $\alpha+\beta+\gamma+\theta \quad 360°$. Tais ângulos são inversamente proporcionais a $2, 3, 4$ e 5; portanto: $\alpha \quad \frac{k}{2}$, $\beta \quad \frac{k}{3}$, $\gamma \quad \frac{k}{4}$ e $\theta \quad \frac{k}{5}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{4}+\frac{k}{5} &\quad 360° \\
\frac{3\cdot4\cdot5\cdot k+2\cdot4\cdot5\cdot k+2\cdot3\cdot5\cdot k+2\cdot3\cdot4\cdot k}{2\cdot3\cdot4\cdot5} &\quad 360° \\
\frac{60k+40k+30k+24k}{120} &\quad 360° \\
\frac{154k}{120} &\quad 360° \\
k &\quad \frac{360°\cdot120}{154} \approx 280,5.
\end{aligned}$$

O maior ângulo é, então, $\theta \quad \frac{k}{2} \approx \frac{280,5}{2} \approx 140°$.

Gabarito: E

(EEAR-2001) QUESTÃO 23

A soma das medidas dos ângulos internos e externos de um polígono convexo é $3600°$. O número de diagonais desse polígono é um número:

(a) par divisível por 15.
(b) par maior que 150.

(c) ímpar múltiplo de 19.

(d) ímpar primo.

R: Veja que para cada ângulo interno, haverá um externo correspondente. E a soma de um ângulo interno com um externo resulta em $180°$. Visto que $\frac{3600°}{180°} \quad 20$, existem 20 pares de ângulos internos e externos nesse polígono. Portanto, trata-se de um polígono de 20 lados (um icoságono). O número de diagonais de um polígono pode ser calculado por:

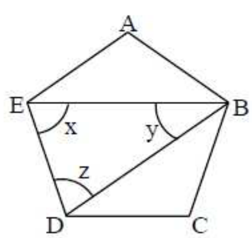
$$d \quad \frac{n(n-3)}{2}$$
$$d \quad \frac{20(20-3)}{2}$$
$$d \quad 10 \cdot 17$$
$$d \quad 170.$$

A alternativa correta é B, pois 170 é par e maior que 150.

Gabarito: B

■■■(EEAR-2002) QUESTÃO 24

Na figura abaixo, $ABCDE$ é um pentágono regular.



As medidas dos ângulos x, y e z, em graus, são, respectivamente

(a) $36; 36; 72$

(b) $72; 36; 72$

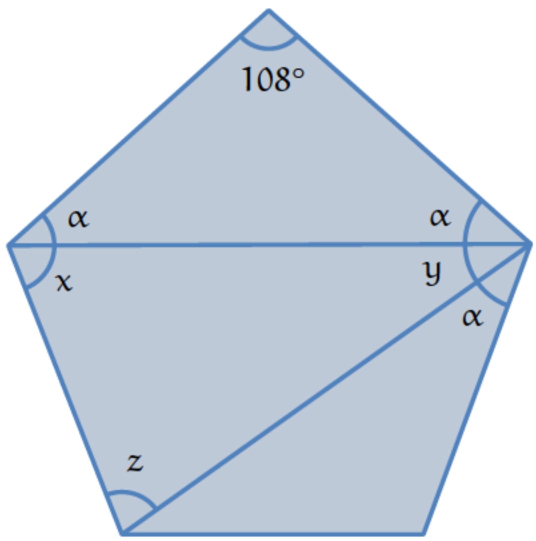
(c) $72; 36; 36$

(d) $36; 72; 36$

R: Para calcularmos o ângulo interno de um polígono regular, podemos nos utilizar da expressão: $\frac{180° \cdot (n-2)}{n}$. Assim, temos, para $n \quad 5$:

$$\frac{180° \cdot (n-2)}{n} \quad \frac{180° \cdot (5-2)}{5}$$
$$\frac{180° \cdot 3}{5}$$
$$\frac{540°}{5}$$
$$108°.$$

Observe então a figura:



Veja então que:

$$108° + \alpha + \alpha \quad 180°$$
$$2\alpha \quad 72°$$
$$\alpha \quad 36°.$$

Mas $x + \alpha \quad 108°$ e portanto: $x \quad 108° - 36° \quad 72°$. Logo $z \quad 72°$ e y é tal que:

$$36° + 36° + y \quad 180°$$
$$72° + y \quad 180°$$
$$y \quad 36°.$$

Assim, resumidamente: $x \quad 72°, y \quad 36°, z \quad 72°$.

Gabarito: B

(EEAR-2002) QUESTÃO 25

A soma dos ângulos internos e dos ângulos externos de um polígono regular vale 1800°. O número de diagonais desse polígono é

(a) 25.
(b) 35.
(c) 45.
(d) 55.

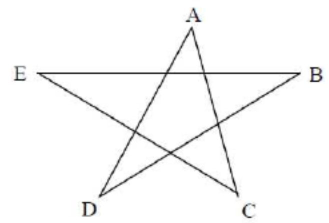
R: Veja que para cada ângulo interno, haverá um externo correspondente. E a soma de um ângulo interno com um externo resulta em 180°. Visto que $\frac{1800^\circ}{180^\circ} \quad 10$, existem 10 pares de ângulos internos e externos nesse polígono. Portanto, trata-se de um polígono de 10 lados (um decágono). O número de diagonais de um polígono pode ser calculado por:

$$d \quad \frac{n(n-3)}{2}$$
$$d \quad \frac{10(10-3)}{2}$$
$$d \quad 5 \cdot 7$$
$$d \quad 35.$$

Gabarito: B

(EEAR-2002) QUESTÃO 26

A soma das medidas dos ângulos internos A, B, C, D e E da figura é



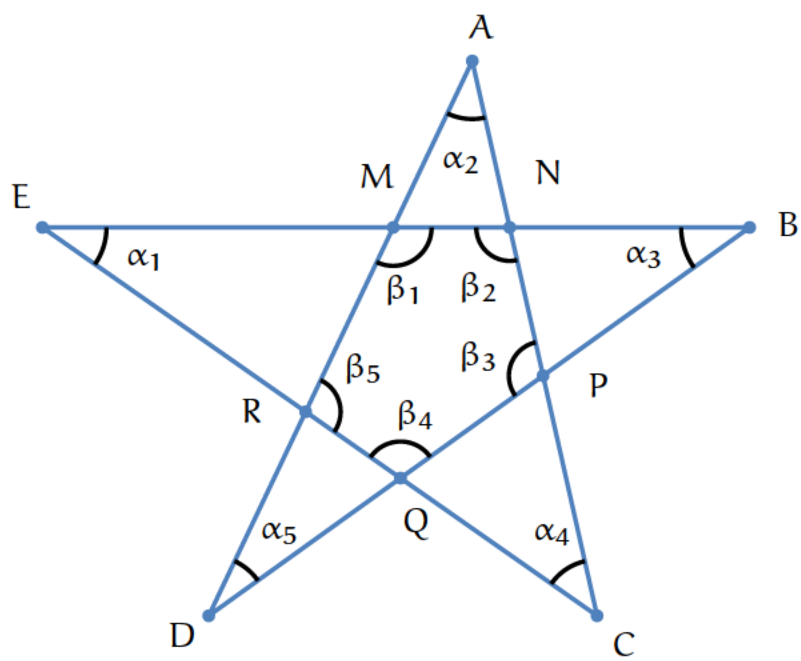
(a) 120°

(b) 180°

(c) 360°

(d) 540°

R: Vejamos a figura:



Precisaremos mais a frente da soma $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5$. Trata-se da soma dos ângulo sinternos de um pentágono. A expressão utilizada para calcularmos a soma dos ângulos internos de um polígono é $S_i \quad 180^\circ \cdot (n - 2)$. Temos, então:

$$S_i \quad 180^\circ \cdot (5 - 2)$$

$$S_i \quad 180^\circ \cdot 3$$

$$S_i \quad 540^\circ.$$

Agora, farei soma de ângulos internos de 5 triângulos. Façamos então:

$$\begin{aligned}
\triangle ECN: \alpha_1 + \beta_2 + \alpha_4 &\quad 180^\circ \\
\triangle ADP: \alpha_2 + \beta_3 + \alpha_5 &\quad 180^\circ \\
\triangle BEQ: \alpha_3 + \beta_4 + \alpha_1 &\quad 180^\circ \\
\triangle CAR: \alpha_4 + \beta_5 + \alpha_2 &\quad 180^\circ \\
\triangle DBM: \alpha_5 + \beta_1 + \alpha_3 &\quad 180^\circ.
\end{aligned}$$

Somando todas as expressões, obtemos:

$$\begin{aligned}
2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 &\quad 180^\circ \cdot 5 \\
2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + \underbrace{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5}_{540^\circ} &\quad 900^\circ \\
2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + 540^\circ &\quad 900^\circ \\
2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) &\quad 900^\circ - 540^\circ \\
2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) &\quad 360^\circ \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 &\quad 180^\circ.
\end{aligned}$$

Gabarito: B

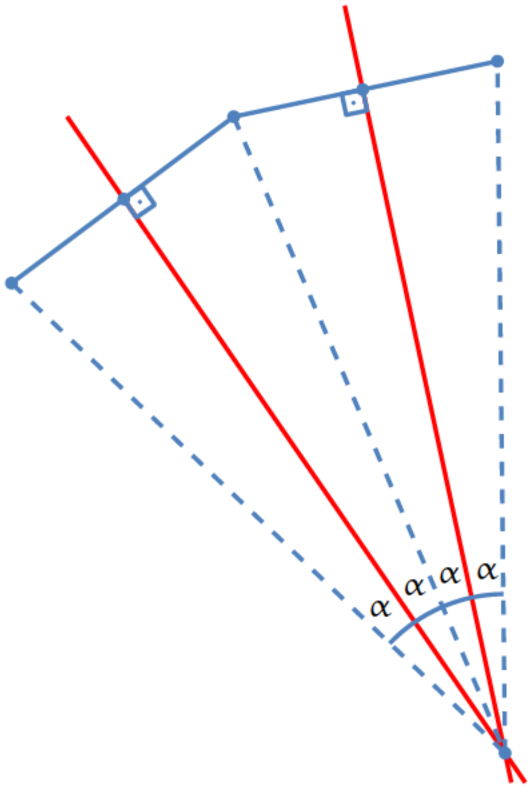
(há uma forma de resolvermos essa questão utilizando a soma dos ângulos externos do pentágono central; consegue ver?)

(EEAR-2003) QUESTÃO 27

As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo de 24°. O número de diagonais desse polígono é

(a) 70
(b) 80
(c) 90
(d) 100

R: Questão parecida com uma que já fizemos, correto? Há pouco? Bom, vamos à figura:



Como o ângulo entre as mediatrizes é de $24°$, temos $2\alpha \quad 24°$. Esse é o ângulo de abertura, o ângulo central desse polígono. Sabemos que a expressão $\frac{360°}{n}$ calcula esse ângulo, logo:

$$24° \quad \frac{360°}{n}$$
$$n \quad \frac{360°}{24°}$$
$$n \quad 15.$$

Trata-se então de um pentadecágono. O número de diagonais desse polígono será:

$$d \quad \frac{n(n-3)}{2}$$
$$d \quad \frac{15(15-3)}{2}$$
$$d \quad \frac{15 \cdot 12}{2}$$
$$d \quad 6 \cdot 15$$
$$d \quad 90.$$

Gabarito: C

(EEAR-2003) QUESTÃO 28

Observe:

I. É sempre possível construir um polígono regular de n lados, para $n \geq 3$.

II. Triângulo é, em todos os possíveis casos, inscritível em uma circunferência.

III. Um ângulo central $\hat{a}_c$ de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência mede $\frac{(n-2)180°}{n}$

IV. Sempre é possível construir uma circunferência que passa pelos n vértices de um polígono qualquer.

Quantas das assertivas acima são falsas?

(a) 1
(b) 4
(c) 3
(d) 2

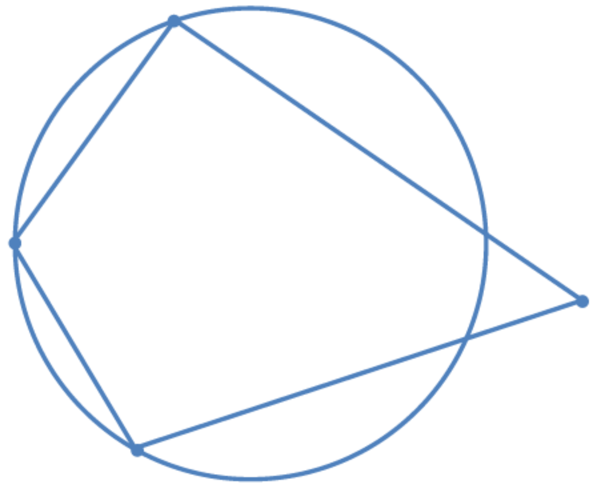
R: Comentemos assertiva por assertiva:

I. Sim. Qualquer $n \geq 3$ constitui uma possibilidade de gênero para polígonos.

II. Verdade. Todo triângulo é circunscritível. Para verificarmos isso, basta nos recordarmos que, traçadas as três mediatrizes dos lados de um triângulo, encontraremos como ponto de interseção um ponto conhecido como o circuncentro desse triângulo, que é justamente o centro do círculo que o circunscreve.

III. É falso. Isso que ele mostrou é o ângulo interno, não o central. O central vale $\frac{360°}{n}$.

IV. É falso. Observe a figura abaixo:



Trata-se de um quadrilátero o qual não pudemos circunscrever.

Há portanto duas assertivas falsas.

Gabarito: D

(EEAR-2006) QUESTÃO 29

Sejam A, B e C três polígonos convexos. Se C tem 3 lados a mais que B, e este tem 3 lados a mais que A, e a soma das medidas dos ângulos internos dos três polígonos é $3240°$, então o número de diagonais de C é

(a) 46.
(b) 44.
(c) 42.
(d) 40.

R: Façamos uma tabela com as informações dos três polígonos:

Polígono	Gênero	Soma dos ângulos internos
A	n	$180° \cdot (n-2)$
B	$n+3$	$180° \cdot (n+3-2)$
C	$n+6$	$180° \cdot (n+6-2)$

A soma dos ângulos internos dos três polígonos é $3240°$; portanto:

$$
\begin{aligned}
180° \cdot (n-2) + 180° \cdot (n+1) + 180° \cdot (n+4) &\quad 3240° \\
180° \cdot (n-2+n+1+n+4) &\quad 3240° \\
180° \cdot (3n+3) &\quad 3240° \\
3n+3 &\quad \frac{3240°}{180°} \\
3n+3 &\quad 18 \\
3n &\quad 18-3 \\
3n &\quad 15 \\
n &\quad 5.
\end{aligned}
$$

Queremos saber a quantidade de diagonais do polígono C, que tem $n+6 \quad 5+6 \quad 11$ lados. Logo:

$$
\begin{aligned}
d &\quad \frac{n(n-3)}{2} \\
d &\quad \frac{11(11-3)}{2} \\
d &\quad \frac{11 \cdot 8}{2} \\
d &\quad 44.
\end{aligned}
$$

Gabarito: B

(EEAR-2007) QUESTÃO 30

Dois polígonos convexos têm o número de lados expresso por n e por $n+3$. Sabendo que um polígono tem 18 diagonais a mais que o outro, o valor de n é

(a) 10.
(b) 8.
(c) 6.
(d) 4.

R: Vamos fazer uma tabela auxiliar novamente? Chamarei um dos polígonos de A e o outro de B. Vejamos:

Polígono	Gênero	Número de diagonais
A	n	d
B	$n+3$	$d+18$

Veja que o polígono que tem mais lados obviamente será aquele com uma maior quantidade de diagonais.

Agora, aplicando a fórmula para cálculo da quantidade de diagonais para o polígono A, obtemos: $d \quad \dfrac{n(n-3)}{2}$. Já para o polígono B, a quantidade de diagonais aumenta em 18, então: $d+18 \quad \dfrac{N(N+3)}{2}$, onde N é a quantidade de lados do polígono B. Mas segundo a nossa tabela, $N \quad n+3$, logo: $d+18 \quad \dfrac{(n+3)n}{2}$. Visto que $d \quad \dfrac{n(n-3)}{2}$, podemos substituir na expressão encontrada e resolver para n:

$$\begin{aligned}
d+18 &\quad \frac{(n+3)n}{2}\\
\frac{n(n-3)}{2}+18 &\quad \frac{(n+3)n}{2}\\
n(n-3)+36 &\quad (n+3)n\\
n^2-3n+36 &\quad n^2+3n\\
-3n+36 &\quad 3n\\
6n &\quad 36\\
n &\quad 6.
\end{aligned}$$

Gabarito: C

■■■(EEAR-2008) QUESTÃO 31

Em um polígono regular, a medida de um ângulo interno é o triplo da medida de um ângulo externo. Esse polígono é o

(a) hexágono.
(b) octógono.

(c) eneágono.
(d) decágono.

R: Questão idêntica àquele resolvida da ESA de 2007; vê como os certames são parecidos? Bom, vamos lá, à resolução:

$$\begin{aligned} \alpha_i + \alpha_e &\quad 180^\circ \\ 3\alpha_e + \alpha_e &\quad 180^\circ \\ 4\alpha_e &\quad 180^\circ \\ \alpha_e &\quad 45^\circ. \end{aligned}$$

Como o polígono é regular com n lados, sabemos que os ângulos externos são todos iguais; logo:

$$\begin{aligned} \alpha_e &\quad \frac{360^\circ}{n} \\ 45^\circ &\quad \frac{360^\circ}{n} \\ n &\quad \frac{360^\circ}{45^\circ} \\ n \quad 8. \end{aligned}$$

Trata-se portanto de um octógono. Cópia direta!

Gabarito: B

■■■(EEAR-2008) QUESTÃO 32

O lado de um eneágono regular mede $2,5$ cm. O perímetro desse polígono, em cm, é

(a) 15.
(b) 20.
(c) $22,5$.
(d) $27,5$.

R: Para polígonos, o perímetro é simplesmente a soma dos lados do polígono. Como são nove lados iguais a $2,5$ cm, seu perímetro será de $9 \cdot 2,5 \quad 22,5$ cm.

Gabarito: C

(EEAR-2013) QUESTÃO 33

Se A é o número de diagonais de um icoságono e B o número de diagonais de um decágono, então $A - B$ é igual a

(a) 85
(b) 135
(c) 165
(d) 175

R: O número de diagonais de um icoságono $n \quad 20$, será:

$$\begin{aligned} A \quad & \frac{n(n-3)}{2} \\ & \frac{20(20-3)}{2} \\ & 10 \cdot 17 \\ & 170. \end{aligned}$$

Para o decágono:

$$\begin{aligned} B \quad & \frac{n(n-3)}{2} \\ & \frac{10(10-3)}{2} \\ & 5 \cdot 7 \\ & 35. \end{aligned}$$

Daí: $A - B \quad 170 - 35 \quad 135.$

Gabarito: B

(EEAR-2015) QUESTÃO 34

Se um dos ângulos internos de um pentágono mede 100°, então a soma dos outros ângulos internos desse polígono é

(a) 110°.
(b) 220°.
(c) 380°.
(d) 440°.

R: A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é, como já sabemos, dada por $S_i \quad 180^\circ \cdot (n-2)$. Para um pentágono, será:

$$
\begin{aligned}
S_i &\quad 180^\circ \cdot (n-2) \\
S_i &\quad 180^\circ \cdot (5-2) \\
S_i &\quad 180^\circ \cdot 3 \\
S_i &\quad 540^\circ.
\end{aligned}
$$

Como um dos ângulos já mede 100°, os outros devem somar $540^\circ - 100^\circ \quad 440^\circ$.

Gabarito: D

(EEAR-2017) QUESTÃO 35

O polígono regular cujo ângulo externo mede 24° tem ____ lados.

(a) 20
(b) 15
(c) 10
(d) 5

R: Como o polígono é regular com n lados, sabemos que os ângulos externos são todos iguais; logo:

$$\alpha_e \quad \frac{360^\circ}{n}$$
$$24^\circ \quad \frac{360^\circ}{n}$$
$$n \quad \frac{360^\circ}{24^\circ}$$
$$n \quad 15.$$

(EEAR-2017) QUESTÃO 36

Ao somar o número de diagonais e o número de lados de um dodecágono obtém-se

(a) 66
(b) 56
(c) 44
(d) 42

R: O número de diagonais de um dodecágono é dada por:

$$d \quad \frac{n(n-3)}{2}$$
$$d \quad \frac{12(12-3)}{2}$$
$$d \quad 6 \cdot 9$$
$$d \quad 54.$$

Como o dodecágono tem 12 lados, a soma do seu número de diagonais com a quantidade de lados será $54 + 12 \quad 66$.

Gabarito: A

(EEAR-2018) QUESTÃO 37

A metade da medida do ângulo interno de um octógono regular, em graus, é

(a) $67,5$

(b) 78, 6
(c) 120
(d) 85

R: O ângulo interno de um polígono regular é dado por:

$$\alpha_i \quad \frac{180° \cdot (n-2)}{n}$$
$$\alpha_i \quad \frac{180° \cdot (8-2)}{8}$$
$$\alpha_i \quad \frac{180° \cdot 6}{8}$$
$$\alpha_i \quad \frac{1080°}{8}$$
$$\alpha_i \quad 135°.$$

A metade desse valor é: $\frac{135°}{2} \quad 67,5°$.

Gabarito: A

3.3– Índice Remissivo