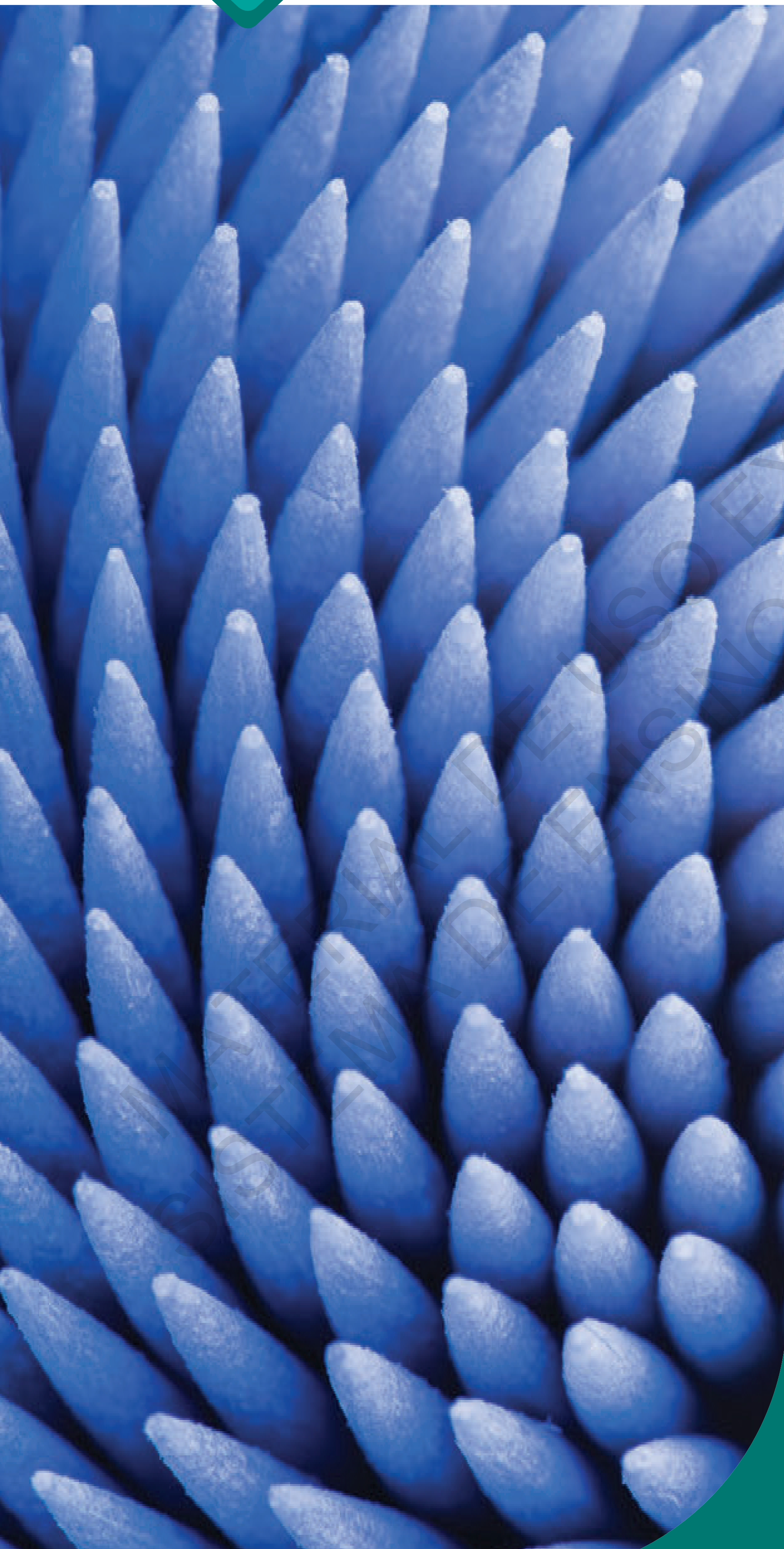
PRÉ-VESTIBULAR
SEMIEXTENSIVO

DOM BOSCO
by Pearson



MATERIAL DO PROFESSOR

• Matemática

VOLUME 2

DOM BOSCO
by Pearson

MATERIAL DO PROFESSOR

Matemática

PRÉ-VESTIBULAR
SEMIEXTENSIVO

VOLUME
2

DOM BOSCO - SISTEMA DE ENSINO
PRÉ-VESTIBULAR SEMIEXTENSIVO 2
Matemática e suas tecnologias.

Vice-presidência de Educação Juliano Melo Costa
Gerência editorial nacional Alexandre Mattioli
Gerência de produto Silvana Afonso
Autoria Rafael Schaffer e Edilson Sousa Santos
Coordenação editorial Luiz Molina Luz
Edição de conteúdo Paulo Roberto de Jesus Silva e Curso São Carlos Ltda.
Assistência de edição Ana Carolina de Almeida Paulino, Felipe Gabriel
Leitura crítica Fernando Manenti, Alessandro Coelho, Curso São Carlos Ltda.
Preparação e revisão Igor Debiasi e Sérgio Nascimento
Gerência de Design Cleber Figueira Carvalho
Coordenação de Design Diogo Mecabo
Edição de arte Alexandre Silva
Coordenação de pesquisa e licenciamento Maiti Salla
Pesquisa e licenciamento Andrea Bolanho, Cristiane Gameiro, Heraldo Colon, Maricy Queiroz, Sandra Sebastião, Shirlei Sebastião
Ilustrações Alex Cói, Carla Viana, Madine Oliveira, Claudia Silveira, Renato Calderaro
Projeto Gráfico Apis design integrado
Diagramação Editorial 5
Capa Apis design integrado
Imagem de capa mvp64/istock
Produtor multimídia Cristian Neil Zaramella
PCP George Baldim, Paulo Campos

Av. Santa Marina, 1193 - Água Branca
São Paulo, SP – CEP 05036-001
Tel. (11) 3521-3500

www.pearson.com.br

APRESENTAÇÃO

Um bom material didático voltado ao vestibular deve ser maior que um grupo de conteúdos a ser memorizado pelos alunos. A sociedade atual exige que nossos jovens, além de dominar conteúdos aprendidos ao longo da Educação Básica, conheçam a diversidade de contextos sociais, tecnológicos, ambientais e políticos. Desenvolver as habilidades a fim de obterem autonomia e entenderem criticamente a realidade e os acontecimentos que os cercam são critérios básicos para se ter sucesso no Ensino Superior.

O Enem e os principais vestibulares do país esperam que o aluno, ao final do Ensino Médio, seja capaz de dominar linguagens e seus códigos; construir argumentações consistentes; selecionar, organizar e interpretar dados para enfrentar situações-problema em diferentes áreas do conhecimento; e compreender fenômenos naturais, processos histórico-geográficos e de produção tecnológica.

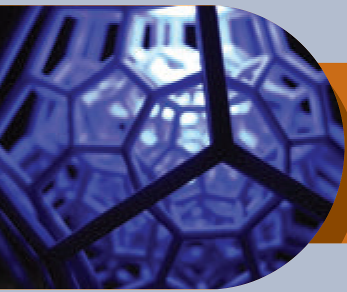
O Pré-Vestibular do Sistema de Ensino Dom Bosco sempre se destacou no mercado editorial brasileiro como um material didático completo dentro de seu segmento educacional. A nova edição traz novidades, a fim de atender às sugestões apresentadas pelas escolas parceiras que participaram do Construindo Juntos – que é o programa realizado pela área de Educação da Pearson Brasil, para promover a troca de experiências, o compartilhamento de conhecimento e a participação dos parceiros no desenvolvimento dos materiais didáticos de suas marcas.

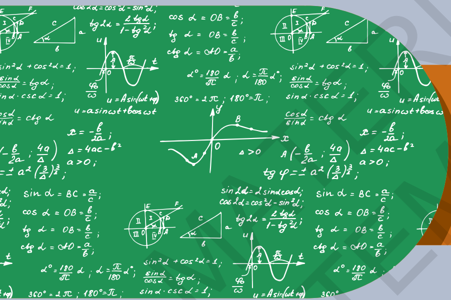
Assim, o Pré-Vestibular Semiextensivo Dom Bosco by Pearson foi elaborado por uma equipe de excelência, respaldada na qualidade acadêmica dos conhecimentos e na prática de sala de aula, abrangendo as quatro áreas de conhecimento com projeto editorial exclusivo e adequado às recentes mudanças educacionais do país.

O novo material envolve temáticas diversas, por meio do diálogo entre os conteúdos dos diferentes componentes curriculares de uma ou mais áreas do conhecimento, com propostas curriculares que contemplem as dimensões do trabalho, da ciência, da tecnologia e da cultura como eixos integradores entre os conhecimentos de distintas naturezas; o trabalho como princípio educativo; a pesquisa como princípio pedagógico; os direitos humanos como princípio norteador; e a sustentabilidade socioambiental como meta universal.

A coleção contempla todos os conteúdos exigidos no Enem e nos vestibulares de todo o país, organizados e estruturados em módulos, com desenvolvimento teórico associado a exemplos e exercícios resolvidos que facilitam a aprendizagem. Soma-se a isso, uma seleção refinada de questões selecionadas, quadro de respostas e roteiro de aula integrado a cada módulo.

SUMÁRIO





MATEMÁTICA 1

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

17 SEQUÊNCIAS, PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

- Noções de sequência
- Sequências numéricas
- Progressão aritmética
- Fórmula geral do termo de uma PA
- Classificação de PA
- Progressão Geométrica
- Fórmula geral de um termo de uma PG
- Classificação de PG

HABILIDADES

- Reconhecer uma sequência.
- Identificar se os termos de uma sequência numérica representam uma progressão aritmética ou geométrica.
- Calcular a razão de uma PA e de uma PG.
- Classificar progressões aritméticas e progressões geométricas.
- Identificar termos que não pertencem a uma PA ou a uma PG.

NOÇÕES DE SEQUÊNCIA

O conjunto de elementos que segue uma ordenação é chamado **sequência**. Em nosso cotidiano, conseguimos observar diversos exemplos:

- Dias da semana: domingo, segunda-feira, terça-feira, ..., sábado.
- Anos bissextos a partir de 2000: 2000, 2004, 2008, 2012, 2016, 2020, ...

Cada elemento de uma sequência é um **termo**, e cada termo pode ser representado com base em sua posição.

> Uma sequência com **n** termos pode ser representada por:
> $$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$$

É possível ainda observarmos que uma sequência pode ser finita ou infinita.

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Uma sequência é chamada **sequência numérica** quando pode ser representada por uma lei de formação.

Exemplo:

$$a_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}^*$$

Observe que **n** representa a posição de determinado termo a_n da sequência.

- 1º termo: $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
- 2º termo: $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
- 3º termo: $a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

No exemplo, essa lei de formação determina a sequência (1, 3, 5, 7, 9, ...), que nada mais é do que a sequência dos números ímpares.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Uma progressão aritmética (PA) é um tipo especial de sequência numérica que atende à seguinte condição:

> Qualquer termo de uma PA é igual à soma do termo imediatamente anterior com um valor real r, chamado **razão**.

Observe a sequência dos números ímpares obtida no exemplo anterior. Repare que cada termo é igual ao anterior acrescido de 2 unidades. Por essa razão, dizemos que tal sequência numérica é uma PA de razão r = 2:

- 1º termo: $a_1 = 1$
- 2º termo: $a_2 = a_1 + 2 = 3$
- 3º termo: $a_3 = a_2 + 2 = 5$
- e assim sucessivamente.

FÓRMULA GERAL DO TERMO DE UMA PA

Podemos escrever os termos de uma PA a partir do primeiro termo da sequência e de sua razão **r**.

Tomando a sequência do exemplo anterior, é possível escrevê-la da seguinte forma:

- 1º termo: $a_1 = 1$ e r = 2

- $2^{\underline{o}}$ termo: $a_2 = a_1 + r = 1 + 2 = 3$
- $3^{\underline{o}}$ termo: $a_3 = a_2 + r = a_1 + 2 \cdot r = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
- e assim sucessivamente.

Dessa forma, podemos definir a fórmula geral de uma PA da seguinte maneira:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r,$$
sendo $n \in \mathbb{N}^*$ e $r \in \mathbb{R}$
Em que **n** é a posição do termo a_n e r é a razão da PA.

CLASSIFICAÇÃO DE PA

Observe as seguintes progressões aritméticas:

- Sequência 1: (0, 4, 8, 12, 16, ...)
- Sequência 2: (200, 170, 140, 110, ...)
- Sequência 3: (2, 2, 2, 2, ...)

Quando observamos a razão de cada uma dessas sequências, notamos que:

- Sequência 1: $r = a_2 - a_1 = 4 - 0 = 4$
- Sequência 2: $r = a_2 - a_1 = 170 - 200 = -30$
- Sequência 3: $r = a_2 - a_1 = 2 - 2 = 0$

Dessa forma, podemos classificar uma PA com base em sua razão **r**:

- **PA crescente**: quando a razão é $r > 0$;
- **PA decrescente**: quando a razão é $r < 0$;
- **PA constante**: quando a razão é $r = 0$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1. Enem C4-H15

Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir:

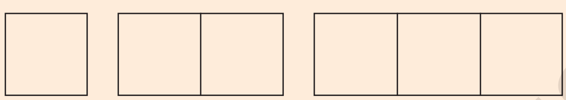


Figura I Figura II Figura III

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

a) C = 4Q
b) C = 3Q + 1
c) C = 4Q – 1
d) C = Q + 3
e) C = 4Q – 2

Resolução

Observando a imagem, podemos notar que há uma relação entre a quantidade de quadrados (Q) e a quantidade de canudos (C) utilizados para representá-los.

É possível representarmos cada termo dessa sequência da seguinte forma:

$1^{\underline{o}}$ termo: 4 canudos

$2^{\underline{o}}$ termo: 7 canudos

$3^{\underline{o}}$ termo: 10 canudos (e assim sucessivamente).

Repare que cada termo é igual ao anterior acrescido de 3 unidades. Assim, podemos concluir que essa sequência é uma progressão aritmética de razão r = 3. Seus termos podem ser representados por:

a_1: 4

a_2: $a_1 + r = 4 + 3 = 7$

a_3: $a_2 + r = 7 + 3 = 10$

...

$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$

Observe ainda que n (posição do termo da PA) representa a quantidade de quadrados em cada figura e que o valor de cada termo representa a quantidade de canudos. Dessa forma, podemos realizar a seguinte associação:

$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$

$C = 4 + (Q - 1) \cdot 3$

Por fim, podemos escrever a expressão da seguinte forma:

$C = 4 + (Q - 1) \cdot 3$

$C = 4 + 3Q - 3$

$C = 3Q + 1$

Competência: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Identificar a relação de dependência entre grandezas.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Uma progressão geométrica (PG) é um tipo de sequência numérica que atende à seguinte condição:

Qualquer termo não nulo de uma PG é igual à multiplicação entre o termo imediatamente anterior e um valor real **q**, chamado **razão**.

Considere uma cultura de bactérias que, em condições ideais para reprodução, dobra de tamanho a cada hora. Observe a evolução dessa cultura de bactérias levando em conta que inicialmente contava com 512 bactérias:

- Início: 512
- 1ª hora: 1 024
- 2ª hora: 2 048
- e assim sucessivamente

Note que cada termo dessa sequência é obtido multiplicando-se o termo anterior por 2

Ou seja, chamamos **progressão geométrica** toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado **razão q da progressão**.

FÓRMULA GERAL DO TERMO DE UMA PG

Os termos de uma PG podem ser escritos a partir do primeiro termo da sequência e de sua razão q.

Tomando a sequência do exemplo anterior, ela ainda pode ser escrita da seguinte forma:

- 1º termo: $a_1 = 512$ e $q = 2$
- 2º termo: $a_2 = a_1 \cdot q = 512 \cdot 2 = 1\,024$
- 3º termo: $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 = 512 \cdot 2^2 = 2\,048$
- 4º termo: $a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 = 512 \cdot 2^3 = 4\,096$
- e assim sucessivamente

Dessa forma, podemos definir a fórmula geral de uma PG como:

$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$

sendo $a_1 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $q \in \mathbb{R}^*$

em que **n** é a posição do termo a_n e **q** é a razão da PG

CLASSIFICAÇÃO DE PG

Observe as progressões geométricas a seguir:

- Sequência 1: (2, 6, 18, 54, ...)
- Sequência 2: (200, 100, 50, 25, ...)
- Sequência 3: (10, 10, 10, 10, ...)
- Sequência 4: (4, –8, 16, –32, ...)

Quando observamos a razão de cada uma dessas sequências, notamos que:

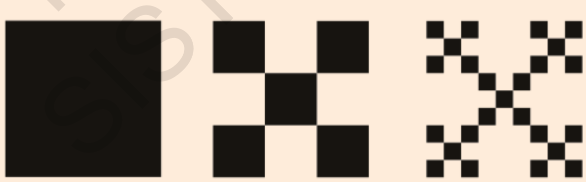
- Sequência 1: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$
- Sequência 2: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{100}{2} = \frac{1}{2}$
- Sequência 3: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{10} = 1$
- Sequência 4: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{(-8)} = -\frac{1}{2}$

Dessa forma, podemos classificar uma PG com base no primeiro termo a_1 e na razão q:

- **PG crescente**: quando a razão é $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$;
- **PG decrescente**: quando a razão é $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$;
- **PG constante**: quando a razão é $q = 1$;
- **PG alternante**: quando a razão é $q < 0$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

2. UFRGS-RS – Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

Na etapa 1, há um único quadrado com lado 1. Na etapa 2, esse quadrado foi dividido em nove quadrados congruentes, sendo quatro deles retirados, como indica a figura. Na etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior. Nessas condições, a área restante, na etapa 5, é:

a) $\frac{125}{729}$.

b) $\frac{125}{2187}$.

c) $\frac{625}{729}$.

d) $\frac{625}{2187}$.

e) $\frac{625}{6561}$.

Resolução

O quadrado da etapa 1 apresenta lado 1. Dessa forma, sua área é A = 1.

Como o quadrado da etapa 2 equivale ao quadrado da etapa 1 dividido em nove quadrados, sendo quatro deles retirados, podemos concluir que sua área é $\frac{5}{9}$.

Ao realizarmos o mesmo processo para o quadrado da etapa 3, concluímos que sua área equivale a $\frac{25}{81}$.

Ou seja, obtemos a seguinte sequência:

$1, \frac{5}{9}, \frac{25}{81}, \ldots$

Note que se trata de uma PG, em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{5}{9}$.

Desejamos obter o 5º termo dessa sequência. Assim, podemos utilizar a fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

$$a_5 = 1 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{(5-1)}$$

$$a_5 = \left(\frac{5}{9}\right)^4$$

$$a_5 = \frac{625}{6\,561}$$

ROTEIRO DE AULA

SEQUÊNCIAS E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

- **Sequências**
  - Dias da semana: domingo, segunda-feira, ..., sábado
  - Cores do arco-íris: vermelho, laranja, ..., violeta
- **Sequências numéricas**
  - Números ímpares: 1, 3, 5, 7, 9, ...
  - Números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
  - Múltiplos de 10: 0, 10, 20, 30, 40, ...
- **Progressão aritmética**
  - Regra geral
    - $a_n = a_{n-1} + r$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$ e $r \in \mathbb{R}$
  - Termo geral
    - $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$ e $r \in \mathbb{R}$
  - Classificação
    - Crescente: $r > 0$
    - Decrescente: $r < 0$
    - Constante: $r = 0$

Progressão geométrica

Regra geral

$a_n = a_{n-1} \cdot q$, sendo $a_{n-1} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $q \in \mathbb{R}^*$

Termo geral

$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, sendo $a_1 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $q \in \mathbb{R}^*$

Classificação

Crescente: $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$

Decrescente: $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$

Constante: $q = 1$

Alternante: $q < 0$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unimontes-MG – Considere a progressão aritmética em que o número de termos é 12, constituída quando se insere 10 termos entre o primeiro termo $a_1 = 3$ e o último termo $a_{12} = 25$. Nessas condições, é CORRETO afirmar que a razão dessa progressão vale:

a) $r = 1$
b) $r = 2$
c) $r = 3$
d) $r = 4$

Do enunciado temos: $n = 12$, $a_1 = 3$ e $a_{12} = 25$. Para calcularmos a razão **r** dessa PA, utilizaremos $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$. Assim,

$25 = 3 + (12 - 1) \cdot r \rightarrow 22 = 11r$

$r = \frac{22}{11} = 2$

2. Fatec-SP (adaptado)

Os Estados Unidos se preparam para uma invasão de insetos após 17 anos

Elas vivem a pelo menos 20 centímetros sob o solo há 17 anos. E neste segundo trimestre, bilhões de cigarras (*Magicicadas eptendecim*) emergirão para invadir partes da Costa Leste, enchendo os céus e as árvores, e fazendo muito barulho. Há mais de 170 espécies de cigarras na América do Norte, e mais de 2 mil espécies ao redor do mundo. A maioria aparece todos os anos, mas alguns tipos surgem a cada 13 ou 17 anos. Os visitantes deste ano, conhecidos como Brood II (Ninhada II, em tradução livre), foram vistos pela última vez em 1996. Os moradores da Carolina do Norte e de Connecticut talvez tenham de usar rastelos e pás para retirá-las do caminho, já que as estimativas do número de insetos são de 30 bilhões a 1 trilhão. Um estudo brasileiro descobriu que intervalos baseados em números primos ofereciam a melhor estratégia de sobrevivência para as cigarras.

Disponível em: <http:/tinyurl.com/zh8daj6>
Acesso em: 30 ago. 2016. (Adaptado)

Com relação à Ninhada II, e adotando o ano de 1996 como o 1º termo (a_1) de uma Progressão Aritmética, a expressão algébrica que melhor representa o termo geral (a_n) da sequência de anos em que essas cigarras sairão à superfície, com n*, é dada por

a) $a_n = 17n + 1979$
b) $a_n = 17n + 1998$
c) $a_n = 17n + 2013$
d) $a_n = 1996n + 17$
e) $a_n = 1979n + 17$

A razão da progressão aritmética pode ser identificada pelo seguinte trecho do texto: "Elas vivem a pelo menos 20 cm sob o solo há 17 anos". Assim, consideramos r = 17.

No enunciado da questão foi informado o primeiro termo: $a_1 = 1996$.

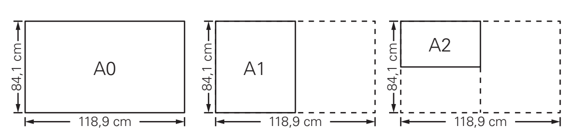
Assim:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 1996 + (n - 1) \cdot 17 = 1996 + 17n - 17$

$a_n = 1979 + 17n$

3. Enem C2-H8

O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção dos Estados Unidos e Canadá. O formato-base é uma folha retangular de papel, chamada de A0, cujas dimensões são 84,1 cm × 118,9 cm. A partir de então, dobra-se a formatos, conforme o número de dobraduras. Observe a figura: A1 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente.



Disponível em: <http://pt.wikipedia.org>.
Acesso em: 4 abr. 2012 (Adaptado).

Quantas folhas de tamanho A8 são obtidas a partir de uma folha A0?

a) 8
b) 16
c) 64
d) 128
e) 256

Do enunciado, notamos que existe uma razão de 2 para cada novo formato de folha, que é obtido com base no tamanho anterior.

Sendo o primeiro termo da progressão correspondente à folha A0, a folha A8 corresponderá ao 9º termo.

Assim, chamando de a_9 a quantidade de folhas de tamanho A8:

$a_9 = a_1 \cdot q^{n-1} = 129 - 1 = 256$

Portanto, são obtidas 256 folhas A8 com base em uma folha A0.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

4. UNESP – A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $3n^2 - 2n$, onde n é um número natural. Para essa progressão, o primeiro termo e a razão são, respectivamente,

a) 7 e 1.
b) 1 e 6.
c) 6 e 1.
d) 1 e 7.
e) 6 e 7.

Podemos calcular a soma do primeiro e do segundo termo da progressão.

Para o primeiro termo (a_1):

$S_1 = a_1 = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$

Então, o primeiro termo é $a_1 = 1$.

Para o segundo termo (a_2):

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + a_2 = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2$

$1 + a_2 = 12 - 4 = 8$

$a_2 = 8 - 1 = 7$

A razão (r) é a diferença entre dois termos consecutivos.

Portanto, $r = a_2 - a_1 = 7 - 1 = 6$.

Então, o primeiro termo é 1, e a razão é 6.

5. Unicamp-SP (adaptado) – Seja (a,b,c) uma progressão geométrica de números reais com $a \neq 0$. Definindo $s = a + b + c$, qual é o menor valor possível para $\frac{s}{a}$?

Da PG, temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} \rightarrow b = a \cdot q$

$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} \rightarrow c = a \cdot q^2$

Assim, $s = a + b + c \rightarrow s = a + a \cdot q + a \cdot q^2$.

$$\frac{s}{a} = \frac{a + a \cdot q + a \cdot q^2}{a} = 1 + q + q^2 = \left(q + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Portanto, o valor mínimo de $\frac{s}{a}$ é $\frac{3}{4}$, ocorrendo para $q = -\frac{1}{2}$.

6. Fatec-SP (adaptado) – Uma pessoa financiou a compra de uma casa pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), em que as prestações são decrescentes. A primeira prestação é de R$ 600,00; a segunda é de R$ 597,00; a terceira é de R$ 594,00; a quarta é de R$ 591,00; e as demais obedecerão ao mesmo critério de cálculo. Nessas condições, calcule o valor da 100ª parcela.

Com base nos termos mencionados, obtemos a razão de uma progressão aritmética decrescente:

$r = 597 - 600 = 594 - 597 = 591 - 594 = -3$

Então, o termo 100 será:

$a_{100} = 600 + (100 - 1) \cdot (-3) = 600 - 297 = 303$

Portanto, o valor da 100ª prestação será de R$ 303,00.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

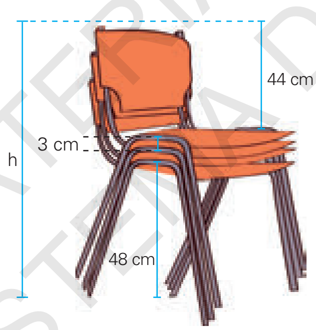
7. UERJ – Considere a sequência $(a_n) = (2, 3, 1, -2, ...)$, $n \in \mathbb{N}^*$, com 70 termos, cuja fórmula de recorrência é:

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$$

O último termo dessa sequência é:

a) 1
b) 2
c) –1
d) –2

8. UNESP (adaptado) – A figura indica o empilhamento de três cadeiras idênticas e perfeitamente encaixadas umas nas outras, sendo h a altura da pilha em relação ao chão.



(www.habto.com. Adaptado.)

A altura, em relação ao chão, de uma pilha de n cadeiras perfeitamente encaixadas umas nas outras, será igual a 1,4 m, se n for igual a:

a) 14.
b) 17.
c) 13.
d) 15.
e) 18.

9. Unicamp-SP – Dois anos atrás certo carro valia R$ 50.000,00 e atualmente vale R$ 32.000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a:

a) R$ 25.600,00
b) R$ 24.400,00
c) R$ 23.000,00
d) R$ 18.000,00

10. Unicamp-SP – Seja x um número real, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tal que a sequência (tg x, sec x, 2) é uma progressão aritmética (PA). Então a razão dessa PA é igual a:

a) 1.

b) $\frac{5}{4}$.

c) $\frac{4}{3}$.

d) $\frac{1}{3}$.

11. PUC-SP – A sequência $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é uma progressão aritmética de razão 3, e a sequência $(b_1, b_2, b_3, ...)$ é uma progressão geométrica crescente. Sabendo que $a_2 = b_3$, $a_{10} = b_5$ e $a_{42} = b_7$, o valor de $b_4 - a_4$ é:

a) 2.

b) 0.

c) 1.

d) –1.

12. FGV-SP (adaptado) – Se o sétimo termo de uma progressão geométrica de termos positivos é 20, e o décimo terceiro termo é 11, então qual será o décimo termo dessa progressão?

13. Fuvest-SP – Dadas as sequências $a_n = n^2 + 4n + 4$, $b_n = 2^{n^2}$, $c_n = a_{n+1} - a_n$ e $d_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, definidas para valores inteiros positivos de n, considere as seguintes afirmações:

I. a_n é uma progressão geométrica;

II. b_n é uma progressão geométrica;

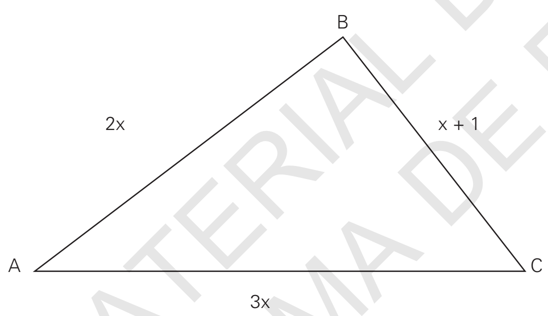
III. c_n é uma progressão aritmética;

IV. d_n é uma progressão geométrica.

São verdadeiras apenas

a) I, II e III.
b) I, II e IV.
c) I e III.
d) II e IV.
e) III e IV.

14. UPE (adaptado) – As medidas dos lados AB, BC e CA de um triângulo ABC formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.



Qual é a medida do perímetro desse triângulo?

15. UECE – As medidas, em metro, dos comprimentos dos lados de um triângulo formam uma progressão aritmética cuja razão é igual a 1. Se a medida de um dos ângulos internos deste triângulo é 120°, então, seu perímetro é:

a) 5,5
b) 6,5
c) 7,5
d) 8,5

16. UTFPR – A quantidade de números inteiros entre 50 e 100 que sejam múltiplos dos números 3 e 4 ao mesmo tempo é:

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 13.
e) 17.

17. Unicamp-SP – Considere a sequência de números reais (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) tal que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica e (a_3, a_4, a_5) é uma progressão aritmética, ambas com a mesma razão w.

a) Determine a sequência no caso em que $a_3 = 3$ e $w = 2$.

b) Determine todas as sequências tais que $a_1 = 1$ e $a_5 = 8$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C1-H2

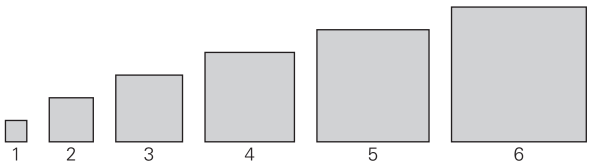
O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número

a) 32
b) 34
c) 33
d) 35
e) 31

19. Enem C1-H2

Em um trabalho escolar, João foi convidado a calcular as áreas de vários quadrados diferentes, dispostos em sequência, da esquerda para a direita, como mostra a figura.



O primeiro quadrado da sequência tem lado medindo 1 cm, o segundo quadrado tem lado medindo 2 cm, o terceiro quadrado tem lado medindo 3 cm, e assim por diante. O objetivo do trabalho é identificar em quanto a área de cada quadrado da sequência excede a área do quadrado anterior. A área do quadrado que ocupa a posição n, na sequência, foi representada por An.

Para $n \geq 2$, o valor da diferença $A_n - A_{n-1}$, em centímetro quadrado, é igual a

a) $2n - 1$
b) $2n + 1$
c) $2n + 1$
d) $(n - 1)^2$
e) $n^2 - 1$

20. Enem C5-H21

O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%.

Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%.

Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t \geqslant 1$?

a) $P(t) = 0{,}5 \cdot t^{-1} + 8\,000$
b) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8\,000$
c) $P(t) = 4\,000 \cdot t^{-1} + 8\,000$
d) $P(t) = 8\,000 \cdot (0{,}5)^{t-1}$
e) $P(t) = 8\,000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$

OPERAÇÕES ENTRE TERMOS DE PROGRESSÕES, NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA TRIGONOMÉTRICA

18

FÓRMULA DA SOMA DOS TERMOS DE UMA PA FINITA

Considerando a PA finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, de razão r, a soma dos seus n termos pode ser escrita por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$a_1 + a_n$$

$$a_1 + a_n$$

$$a_1 + a_n$$

Como cada parcela $a_1 + a_n$ se repete $\frac{n}{2}$ vezes, obtemos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

SOMA DOS TERMOS DE UMA PG FINITA

Assim como em progressões aritméticas, podemos obter uma fórmula geral para a soma dos termos de uma PG finita.

Com base na PG finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, desejamos obter a soma S_n de seus termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Pode ser calculada pela fórmula:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{1 - q}$$

PRODUTO DOS TERMOS DE UMA PG FINITA

Considerando a PG $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, o produto P_n de seus **n** primeiros termos pode ser obtido por:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$

Assim:

$$P_n = \pm \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Também podemos encontrar o produto dos termos de uma PG finita de outra forma:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

- Soma dos termos de uma PA
- Soma dos termos de uma PG
- Produtos dos termos de uma PG
- Forma algébrica dos números complexos
- Conjunto dos números complexos
- Operações com números complexos

HABILIDADES

- Calcular a soma dos termos de uma PA.
- Calcular a soma dos termos de uma PG.
- Calcular o produto dos termos de uma PG.
- Identificar aplicações relacionadas a operações entre os termos de progressões.
- Reconhecer números complexos
- Compreender os números complexos do ponto de vista histórico
- Identificar quando números complexos são iguais
- Operar com a forma algébrica dos números complexos
- Aplicar os números complexos em diferentes áreas do conhecimento

SOMA DOS TERMOS DE UMA PG INFINITA

É possível calcularmos a soma dos termos de uma série infinita que se comporte como uma progressão geométrica. Se o valor da razão **q** estiver compreendido na forma $0 < |q| < 1$, então o valor da soma de uma PG infinita será dado por:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Uma empresa produziu 10 000 unidades de certo produto em 2007. E, em cada ano seguinte, fabricou 20% a mais desse produto em relação ao ano anterior. Quantas unidades desse produto a empresa produziu no período de 2007 a 2018?

Resolução

Observe que, a cada ano, a produção aumenta 20%. Ou seja, as unidades produzidas ano a ano compõem uma PG de razão $q = 1{,}20$ e $a_1 = 10\,000$. Como desejamos saber o total produzido entre 2007 e 2018, concluímos que essa PG tem 11 termos. Dessa forma:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \rightarrow S_{11} = 10\ 000 \cdot \frac{1-1{,}20^{11}}{1-1{,}20} \rightarrow$$

$$\rightarrow S_{11} = 10\ 000 \cdot \frac{1-7{,}43}{-0{,}20} \rightarrow$$

$$S_{11} = 10\,000 \cdot 32{,}15 = 321\,500$$

No período de 2007 a 2018, a empresa produziu 321 500 unidades.

2. Sistema Dom Bosco – Encontre o produto dos 20 primeiros termos da PG (3, 6, 12, ...).

Resolução

Observe que a PG apresenta $a_1 = 3$ e $q = 2$.

Como desejamos obter o produto dos 20 primeiros termos, precisamos obter a_{20}. Dessa forma:

$$a_{20} = a_1 \cdot q^{20-1} \rightarrow a_{20} = 3 \cdot 2^{19}$$

Portanto:

$$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \rightarrow P_{20} = \pm\sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^{19})^{20}} \rightarrow$$

$$\rightarrow P_{20} = \pm(3^2 \cdot 2^{19})^{10} \rightarrow P_{20} = \pm 3^{20} \cdot 2^{190}$$

Como os termos da PG são exclusivamente positivos, concluímos que:

$P_{20} = 3^{20} \cdot 2^{190}$.

UNIDADE IMAGINÁRIA

A letra **i** foi utilizada para representar $\sqrt{-1}$, passando a ser chamada de **unidade imaginária**, logo podemos concluir que $i^2 = -1$.

Observe este exemplo:

$$x^2 + 16 = 0 \rightarrow x^2 = -16$$

Considerando o número **i**, não real, de tal forma que $i^2 = -1$, teremos:

$$x^2 + 16 = 0 \rightarrow x^2 = -16 \rightarrow x^2 = 16i^2 \rightarrow x^2 =$$
$$= \pm\sqrt{16i^2} \rightarrow x = \pm 4i$$

Dessa forma, obtemos o conjunto-solução $S = \{4i, -4i\}$.

FORMA ALGÉBRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Todo número complexo pode ser escrito na forma $z = a + bi$, sendo **a** e **b** números reais e **i** a unidade imaginária. Essa é a **forma algébrica** do número complexo **z**.

O coeficiente **a** representa a **parte real** do número complexo **z** e é denotado por Re(z). Já o coeficiente **b** representa a **parte imaginária** de z e é denotado por Im(z).

Quando um número complexo apresenta sua parte real nula, dizemos que é um número **imaginário puro**. Assim, quando a parte imaginária for nula, consideramos que se trata de um **número real**.

CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Todos os números que podem ser expressos da forma $z = a + bi$, sendo **a** e **b** reais e **i** a unidade imaginária, compõem o **conjunto dos números complexos**, representado por $\mathbb{C}$. Dessa forma:

$$\mathbb{C} = \{z | z = a + bi,\ \text{com } a, b \in \mathbb{R}\ \text{ e } i^2 = -1\}$$

Todo número real pode ser escrito como um número complexo, podemos dizer que todo número real é complexo. Assim, é possível afirmarmos que:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

IGUALDADE

Dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, serão iguais quando Re(z) = Re(w) e Im(z) = Im(w). Ou seja:

$$z = w \leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Para adicionarmos ou subtrairmos dois números complexos, precisamos realizar essas operações entre suas partes reais e imaginárias. Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, temos:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di =$$

$$= (a + c) + (b + d)i$$
$$z - w = (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di \} =$$
$$= (a - c) + (b - d)i$$

MULTIPLICAÇÃO

Para multiplicarmos dois números complexos, devemos aplicar a propriedade distributiva. Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, temos:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) =$$
$$= a \cdot c + a \cdot di + c \cdot bi + b \cdot di^2$$

Como $i^2 = -1$, obtemos:

$$z \cdot w = ac + adi + cbi - bd = ac - bd + (ad + bc)i$$

CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Dizemos que o conjugado do número complexo $z = a + bi$ (cuja notação é $\overline{z}$) é o número complexo $z = a - bi$. Ou seja, para obtermos o conjugado de **z**, basta inverter o sinal de sua parte imaginária.

Propriedades:

- $z = \overline{z}$, desde que **z** seja real (parte imaginária nula)

$$\overline{z}_1 \pm \overline{z}_2 = \overline{z_1 \pm z_2}$$
$$\overline{z}_1 . \overline{z}_2 = \overline{z_1 \, . \, z_2}$$

DIVISÃO

Obtemos a divisão entre dois números complexos de modo similar ao processo de racionalização de denominadores. Para isso, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Ou seja:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \, . \, \overline{w}}{w \, . \, \overline{w}}$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3. Sistema Dom Bosco – Resolva, usando os métodos de adição, subtração, multiplicação e divisão, os seguintes números complexos: $z = 2 + i$ e $w = 3 - 4i$.

Resolução

$z + w = 2 + i + 3 - 4i = 2 + 3 + i - 4i = 5 - 3i$

$z - w = 2 + i - (3 - 4i) = 2 + i - 3 + 4i = 2 - 3 + + i + 4i = -1 + 5i$

$z \cdot w = (2 + i) \cdot (3 - 4i) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-4i) + + 3 \cdot i + i \cdot (-4i) = 6 - 8i + 3i - 4i^2 = = 6 - 8i + 3i - 4(-1) = 10 - 5i$

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{(2+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} =$$
$$= \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 4i + 3i + i \cdot 4i}{3 \cdot 3 + 3 \cdot 4i - 4i \cdot 3 - 4i \cdot 4i} =$$
$$= \frac{2 + 11i}{9 + 16} = \frac{2}{25} + \frac{11i}{25}$$

ROTEIRO DE AULA

OPERAÇÕES ENTRE TERMOS DE PROGRESSÕES

Soma dos termos de uma PA finita

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Soma dos termos de uma PG finita

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - 1^n}{1 - q}$$

Produto dos termos de uma PG finita

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

ou

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Soma dos termos de uma PG infinita

$$S = \frac{a^1}{1 - q}$$, se

$$0 < |q| < 1$$

ROTEIRO DE AULA

NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA ALGÉBRICA

Unidade imaginária

$i^2 = -1$

Forma algébrica

$z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$

Operações com números complexos

Sendo z = a = bi e w = c + di, com a, b, c e d reais

Soma

$z + w = (a + c) + (b + d)\,i$

Subtração

$z - w = (a - c) + (b - d)\,i$

Multiplicação

$z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)\,i$

Conjugado

$z = \bar{z} = a - bi$

Divisão

$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}}$

EXERCÍCIOS **DE APLICAÇÃO**

1. FGV-SP – Três números formam uma progressão geométrica. A média aritmética dos dois primeiros é 6, e a do segundo com o terceiro é 18. Sendo assim, a soma dos termos dessa progressão é igual a

a) 18.
b) 36.
c) 39.
d) 42.
e) 48.

Sabemos que, numa progressão geométrica, os termos crescem em uma razão q. Logo, os três primeiros termos da PG são x, xq e xq².

A média aritmética dos dois primeiros termos será $\frac{x+xq}{2} = 6 \rightarrow$
$\rightarrow x(1+q) + 12 \rightarrow \frac{12}{1+q}$.

Para o segundo e o terceiro termos, temos $\frac{xq+xq^2}{2} = 18 \rightarrow xq(1+q) = 36$.

Substituindo a primeira equação na segunda, temos:

$$\frac{12}{1+q} \cdot q(1+q) = 36 \rightarrow 12q = 36 \rightarrow q = 3$$

Para descobrirmos x, substituímos o valor de q na primeira equação:

$$x(1+3) = 12 \rightarrow x = \frac{12}{4} = 3$$

Assim, a soma dos termos dessa progressão será $3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 = 39$.

2. IFAL – Dentro do conjunto dos números complexos, o conjunto solução da equação $x^2 + 625 = 0$ é

a) S = {−5,5}.
b) S = {−25,25}.
c) S = {−5i,5i}.
d) S = {−25i,25i}.

Resolvendo a equação, obtemos:

$$x^2 + 625 = 0 \rightarrow x = \sqrt{-625} \rightarrow x = \sqrt{(25)^2 \cdot i^2} \rightarrow x = \pm 25i \rightarrow \begin{cases} x = -25i \\ x = 25i \end{cases}$$

3. Enem C6-H24

As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

a) 497,25.
b) 500,85.
c) 502,87.
d) 558,75.
e) 563,25.

A projeção é descrita por uma PA de razão r = 1,25, pois, da relação $a_n - a_{n-1} = r$, temos:
54 − 52,75 = 1,25
52,75 − 51,50 = 1,25 etc.

Como a projeção é de 2012 a 2021, temos que o valor de 2012 é a_1, 2013 é a_2 e assim sucessivamente. Para encontrarmos o total entre 2012 e 2021, precisamos encontrar a_n, em que n representa o valor para 2021, sendo n = 10.

Logo: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \rightarrow a_{10} = 50,25 + (10-1) \cdot 1,25 \rightarrow$
$\rightarrow a_{10} = 50,25 + 11,25 = 61,50$.

Assim, para o valor total no período:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} \rightarrow S = (50,25 + 61,50) \cdot \frac{10}{2} = 111,75 \cdot 5 \rightarrow S = 558,75$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

4. UECE – No conjunto dos números complexos, considere a progressão geométrica cujo primeiro termo é igual a $1 + i$ e a razão é igual a i, onde i é o número complexo, tal que $i^2 = -1$. Observa-se que, dentre os termos dessa progressão, existem apenas n números complexos distintos. Então, n é igual a

a) 4. **b)** 8. **c)** 10. **d)** 6.

Do enunciado, o termo $1 + i$ está em PG de razão i.
Assim, das progressões geométricas, temos:
$a_1 = 1 + i$
$a_2 = a_1 \cdot i = (1 + i) \cdot i = i + i^2 = i - 1$
$a_3 = a_2 \cdot i = (i - 1) \cdot i = i^2 - i = -1 - i$
$a_4 = a_3 \cdot i = (-1 - i) \cdot i = -i - i^2 = -i + 1$
$a_5 = a_4 \cdot i = (-i + 1) \cdot i = -i^2 + i = 1 + i$
Então, $a_5 = a_1$. Logo, $n = 4$.

5. FGV-SP – Um anfiteatro tem 12 fileiras de cadeiras. Na 1ª fileira há 10 lugares, na 2ª há 12, na 3ª há 14 e assim por diante (isto é, cada fileira, a partir da segunda, tem duas cadeiras a mais que a da frente).

O número total de cadeiras é:

a) 250
b) 252
c) 254
d) 256
e) 258

Do enunciado que a sequência (10, 12, 14,...) cresce em uma PA de razão 2.
Assim, $a_1 = 10$, $r = 2$, $n = 12$. Para determinar o total de cadeiras, utilizaremos a relação $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.
Para isso, necessitamos determinar a_n utilizando a relação $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$.
Assim, $a_{12} = 10 + (12 - 1) \cdot 2 = 10 + 22 = 32$.
Logo: $S_n = \frac{(10 + 32) \cdot 12}{2} = 42 \cdot 6 = 252$.

6. UECE (adaptado) – Se os números complexos z e w estão relacionados pela equação $z + wi = i$ e se $z = 1 - \frac{1}{i}$, calcule o valor de w, considerando que i é tal qual $i^2 = -1$.

Partimos da equação $z + wi = i$.
Substituindo o valor de z, $1 - \frac{1}{i} + wi = i$.
Multiplicando por i:
$i - 1 + wi^2 = i^2$
$i - 1 + w \cdot (-1) = (-1)$
$i - 1 - w = -1$
Portanto, $w = i$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UERJ – Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

- primeiro dia – corrida de 6 km;
- dias subsequentes – acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km.

O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a:

a) 414 **b)** 438 **c)** 456 **d)** 484

8. ESPM-SP – Um empréstimo de R$ 10.000,00 foi pago em 5 parcelas mensais, sendo a primeira, de R$ 2.000,00, efetuada 30 dias após e as demais com um acréscimo de 10% em relação à anterior. Pode-se concluir que a taxa mensal de juros simples ocorrida nessa transação foi de aproximadamente:

a) 2,78%
b) 5,24%
c) 3,28%
d) 6,65%
e) 4,42%

9. UEFS-BA – Em seu primeiro mês de funcionamento, um museu teve 4 200 visitantes, mas desde então esse número diminuiu um valor constante a cada mês. Se o total de visitantes no 2º ano foi 35 700, a não ser que essa tendência mude, espera-se que, no 3º ano, esse número caia para

a) 18 740
b) 21 880
c) 25 620
d) 28 130
e) 30 580

10. UFSM-RS (adaptado)

Nos últimos anos, milhares de pessoas chegaram à Europa depois de atravessarem o Mar Mediterrâneo. Os números foram 3 300 em janeiro e 45 375 em dezembro de 2014.

Disponível em: <www.gazetadopovo.com.br/mundo/so-nestea-no- mais-de-500-mil-imigrantes-cruzam-o-mediterraneo- 8ass-nmxyrzxtewt4zoaeu5o1o>. Acesso em: 28 nov. 2016. (Adaptado)

Considere que o número de chegadas mensais via o Mediterrâneo em 2014 foi dado por uma progressão aritmética $(a_n)_{n \in N}$ com n = 1 correspondendo a janeiro, n = 2 correspondendo a fevereiro, e assim por diante.

Calcule:

a) O número de chegadas em maio.
b) O total de chegadas em 2014.

11. UFG-GO (adaptado) – Candidatos inscritos ao vestibular da UFG/2014-1 leram o livro *O cortiço*, com 182 páginas, de uma determinada edição, iniciando-se na página 1. Considere que dois desses candidatos leram o livro do seguinte modo: o primeiro leu duas páginas no primeiro dia e, em cada um dos dias seguintes, leu mais duas páginas do que no dia anterior, enquanto o segundo leu uma página no primeiro dia e, em cada um dos dias seguintes, leu o dobro do número de páginas do dia anterior.

Admitindo-se que os dois candidatos começaram a ler o livro no mesmo dia e que o primeiro acabou a leitura no dia 26 de outubro, determine em qual dia o segundo candidato acabou de ler o livro.

Dado: $\log_2 183 = 7{,}6$

a) 19 de outubro.
b) 20 de outubro.
c) 21 de outubro.
d) 22 de outubro.
e) 23 de outubro.

12. UEA-AM – Considere os números complexos $z_1 = -3 + pi$ e $z_2 = p - i$, com p um número real. Sabendo que $z_1 \cdot z_2 = -4 + 7i$, o valor de $z_1 + z_2$ é:

a) $2 + 3i$.
b) $-1 - 3i$.
c) $-1 + i$.
d) $-1 - i$.
e) $1 + i$.

13. IFCE – Sendo i a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$, são dados os números complexos $z_1 = 9 + 3i$ e $z_2 = -2 + i$. Ao calcular corretamente o produto $z_1 \cdot z_2$, obtemos o número:

a) $21 - 6i$.
b) $x - 18 - 6i$.
c) $-18 + 3i$.
d) $18 - 3i$.
e) $-21 + 3i$.

14. Sistema Dom Bosco – Sabendo que z_1 e z_2 são números complexos conjugados do tipo a + bi, supondo a = 2 e b = −1, calcule:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$

15. UEFS-BA – O número complexo z que satisfaz $z^8 = 16$ e $1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^7 = -6 - 3i$ é

a) $z = i\sqrt{2}$.
b) $z = -1 - i$.
c) $z = -1 + i$.
d) $z = 1 - i$.
e) $z = 1 + i$.

16. Mackenzie-SP – Se $\dfrac{2+i}{\beta+2i}$ tem parte imaginária igual a zero, então o número real β é igual a

a) 4 **b)** 2 **c)** 1 **d)** −2 **e)** −4

17. Unicamp-SP – Sejam x e y números reais tais que $x + yi = \sqrt{3+4i}$, onde i é a unidade imaginária. O valor de xy é igual a

a) −2. **b)** −1. **c)** 1. **d)** 2.

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. UFSC (adaptado) C5-H21

Em circuitos elétricos como, por exemplo, o das instalações residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos. A relação $U = Z \cdot j$ fornece a tensão U em função da impedância Z e da corrente elétrica j. Nesses termos, essas variáveis são expressas através de números complexos a + bi. Considere agora $U = 110 \cdot (\cos 0° + i\text{sen}0°)$ e $Z = 5 + 5i$. O valor da expressão 2a + b, sendo j = a + + bi, é:

a) −22 **c)** 11 **e)** 33
b) −11 **d)** 22

19. Enem C1-H2

Para comemorar o aniversário de uma cidade, a prefeitura organiza quatro dias consecutivos de atrações culturais. A experiência de anos anteriores mostra que, de um dia para o outro, o número de visitantes no evento é triplicado. É esperada a presença de 345 visitantes para o primeiro dia do evento. Uma representação possível do número esperado de participantes para o último dia é

a) $3 \cdot 345$

b) $(3 + 3 + 3) \cdot 345$

c) $3^3 \cdot 345$

d) $3 \cdot 4 \cdot 345$

e) $3^4 \cdot 345$

20. Enem C5-H21

Um ciclista participará de uma competição e treinará alguns dias da seguinte maneira: no primeiro dia, pedalará 60 km; no segundo dia, a mesma distância do primeiro mais r km; no terceiro dia, a mesma distância do segundo mais r km; e, assim, sucessivamente, sempre pedalando a mesma distância do dia anterior mais r km. No último dia, ele deverá percorrer 180 km, completando o treinamento com um total de 1 560 km.

A distância r que o ciclista deverá pedalar a mais a cada dia, em km, é:

a) 3.

b) 7.

c) 10.

d) 13.

e) 20.

19 FORMA ALGÉBRICA E FORMA TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS I

- Representação geométrica dos números complexos
- Módulo de um número complexo
- Potências de i
- Argumento de um número complexo
- Forma trigonométrica ou polar

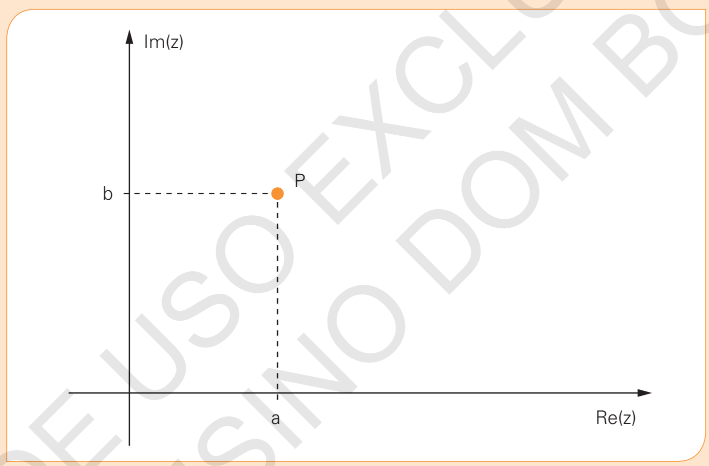
HABILIDADES

- Representar números complexos geometricamente.
- Identificar e operar módulos de números complexos.
- Compreender potências de i.
- Reconhecer números complexos na sua forma trigonométrica.
- Identificar o argumento de um número complexo.
- Representar um número complexo por meio de um vetor e expressá-lo de forma trigonométrica.

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Quando o plano cartesiano é utilizado para representar números complexos, passa a ser chamado **plano de Argand-Gauss**. Qualquer número complexo do tipo $z = a + bi$ está associado a um único ponto, de modo que $P = (a, b)$.

Observe a representação geométrica de um número complexo:

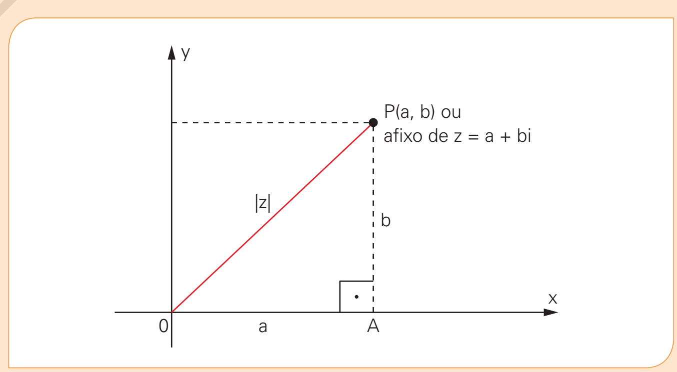


Dizemos que, se $P = (a, b)$ representa o número complexo $z = a + bi$, então P é **imagem de z**. Por sua vez, **z** é chamado **afixo** do ponto **P**.

Para obtermos o módulo de um número complexo, basta calcularmos a distância entre a origem e a imagem desse número no plano de Argand-Gauss.

Sabemos que a origem do plano de Argand-Gauss é a origem do plano cartesiano e a representaremos por $O = (0, 0)$.

Observe a representação do módulo do número complexo $z = a + bi$.



Note que podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo OAP. Assim:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \rightarrow |z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

PROPRIEDADES ENVOLVENDO MÓDULO

Para as propriedades a seguir, considere $z, w \in \mathbb{C}$.

$1^a \rightarrow z \cdot \overline{z} = |z|^2$

$2^a \rightarrow |z| = |\bar{z}|$

$3^a \rightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$4^a \rightarrow \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ (com $w \neq 0$)

POTÊNCIAS DE *i*

Dizemos que z_1, z_2, z_3... formam, nessa ordem, as **potências de i**.

As potências de i, no plano de Argand-Gauss, podem ocupar apenas 4 posições.

Dessa forma, conseguimos obter o valor de qualquer potência de i. Para isso, basta dividirmos o expoente da potência de i por 4. Assim, teremos como quociente a quantidade de voltas em torno do plano de Argand-Gauss e como resto da divisão a posição que essa potência ocupará no plano.

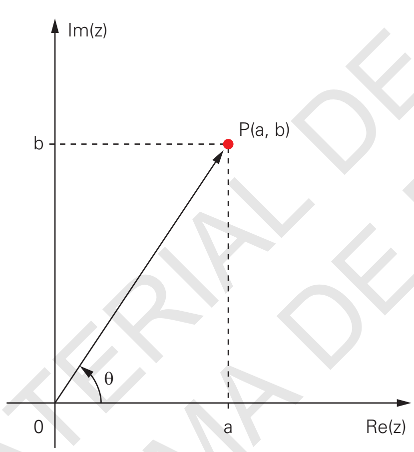
Observe como obtemos o valor de i^{107}:

$$\begin{array}{r|l} 107 & 4 \\ \hline 3 & 26 \end{array}$$

Expoente → 3 ; 26 ← Quantidade de voltas

Ou seja, ao representarmos i^{107} no plano de Argand-Gauss, realizamos 26 voltas sobre o plano e paramos na terceira posição. Então, $i^{107} = i^3 = -i$.

ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO



Um ponto P = (a,b), no plano de Argand-Gauss, representa o número complexo z = a + bi.

Repare que a direção do vetor $\overrightarrow{OP}$ é dada pelo ângulo θ, formado entre o eixo real e o vetor no sentido anti-horário.

Uma vez que o número complexo não seja nulo, dizemos que o ângulo formado é o **argumento do número complexo** e que seu valor estará compreendido entre 0 e 2π. Representamos o argumento como **arg(z)**. Ou seja:

$$\theta = \arg(z)$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR

O fato de podermos representar um número complexo por meio de um vetor de origem O = (0, 0), extremidade P = (a, b) e imagem z = a + bi propicia uma nova maneira de expressar um número complexo – é a chamada **forma trigonométrica ou polar**.

Para isso, além de conhecer o argumento θ desse número, precisamos saber o valor de seu módulo |z|, a partir de agora representado por ρ (pronuncia-se rô).

Usando algumas relações trigonométricas, podemos escrever:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \rightarrow b = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \rightarrow a = \rho \cdot \cos\theta$$

Com isso, substituindo os valores de **a** e **b** em z = a + bi, obtemos:

$$z = a + bi \rightarrow$$

$$z = \rho \cdot \cos\theta + (\rho \cdot \operatorname{sen}\theta)i \rightarrow$$

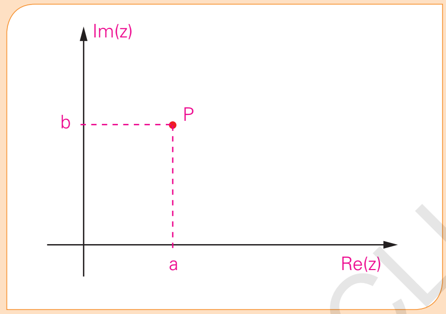
$$z = \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

Forma trigonométrica ou polar de **z**

ROTEIRO DE AULA

NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA ALGÉBRICA

Representação geométrica



Módulo de um número complexo

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriedades

$z \cdot \overline{z} = |z|^2$

$|z| = |z|$

$|z| = |z| \cdot |w|$

$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Potências de i

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

$i^7 = -i$

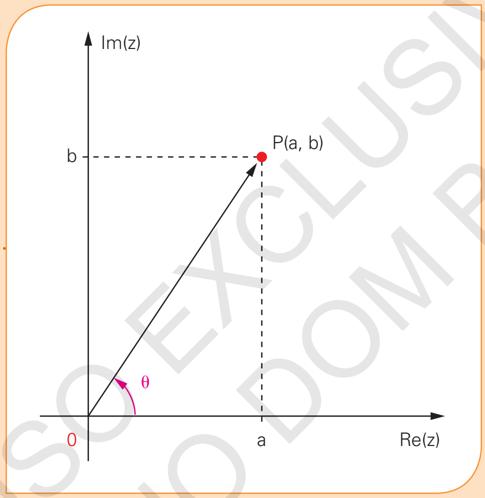
$i^8 = 1$

$i^9 = i$

$i^{10} = -1$

Números complexos e sua forma trigonométrica I

Argumento de um número complexo

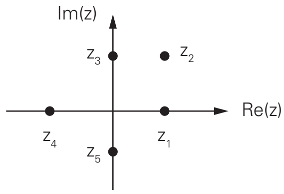


Forma trigonométrica ou polar

z = $\rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UPF-RS – Seja w um número complexo diferente de zero, cuja imagem geométrica, no plano complexo, está no primeiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. Seja $\bar{w}$ o conjugado de w. Na figura, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5. Qual deles pode ser igual a $\frac{w}{\bar{w}}$?



a) z_1
b) z_2
c) z_3
d) z_4
e) z_5

Dos números complexos, sabemos que eles têm o formato z = a + bi.
Temos que, em qualquer ponto em cima da bissetriz dos quadrantes ímpares, os valores de **a** e **b** serão iguais. Logo, a = b.
Sabendo disso, supondo que w seja 1 + i (ou seja, a = b = 1), o conjugado de **w** será $\bar{w}$ = 1 – i.

Assim, $\frac{w}{\bar{w}} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+i+i^2}{1+i-i-i^2} = \frac{2i}{2} = i$. Ou seja, um número imaginário puro, sendo seu afixo (0,1).

Da imagem, temos que z_3 é o único que é igual a $\frac{w}{\bar{w}}$.

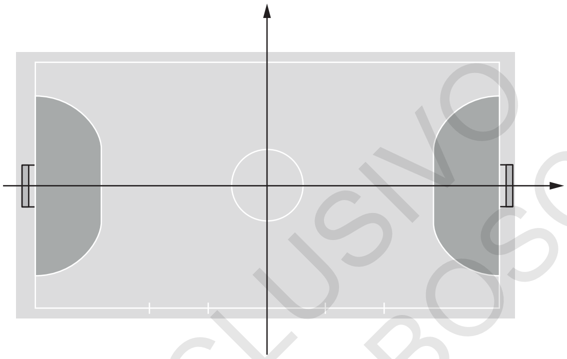
2. Unicamp-SP – O módulo do número complexo $z = i^{2014} - i^{1987}$ é igual a

a) $\sqrt{2}$.
b) 0.
c) $\sqrt{3}$.
d) 1.

Sabemos que a divisão de $\frac{2014}{4}$ tem resto 2. Já a divisão $\frac{1987}{4}$ tem resto 3.
Então:
$i^{2014} = i^2 = -1$
$i^{1987} = i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
Assim, $z = -1 + (-i) \rightarrow z = -1 - i$.
Calculando o módulo:
$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$
$|z| = \sqrt{1+1}$
$|z| = \sqrt{2}$.

3. PUC-RS C2-H8

Uma cancha de futsal está situada sobre um sistema de coordenadas do plano complexo (Argand-Gauss), com unidades marcadas em metros e com centro sobre o ponto (0, 0), como na figura abaixo.



Se a circunferência central possui uma área de 9 m², a expressão que melhor representa esta circunferência central, em $z \in \mathbb{C}$, é

a) $z^2 = 9$
b) $z = 3$
c) $z = 9$
d) $|z| = 3$
e) $|z| = 9$

Supondo que **r** é o raio da circunferência central, temos que $\pi r^2 = 9\pi \rightarrow r = 3$ m.
Sabendo que a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = r^2$, a equação dessa circunferência é $x^2 + y^2 = 9$. Assim, se $z = x + yi \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, vemos que a equação se aproxima ao módulo do número complexo. Dessa forma, é um número complexo de módulo 3.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

4. Unicamp-SP – Considere o número complexo $z = \dfrac{1+ai}{a-i}$, onde a é um número real e i é a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$. O valor de z^{2016} é igual a:

a) a^{2016}.
b) 1.
c) $1 + 2016i$.
d) i.

$$z = \frac{1+ai}{a-i} = \frac{1+ai}{a-i} \cdot \frac{a+i}{a+i} \rightarrow z = \frac{a+i+a^2i+ai^2}{a^2+ai-ai-i^2} \rightarrow$$

$$z = \frac{a+i+a^2i-a}{a^2+1} \rightarrow z = \frac{(a^2+1)i}{a^2+1} = i$$

Logo, $z^{2016} = i^{2016}$.

$\dfrac{2016}{4} \rightarrow$ quociente 24 e resto 0. Portanto, $i^{2016} = i^0 = 1$.

5. UECE (adaptado) – Um número complexo z, em sua forma trigonométrica, é do tipo $z = p(\cos q + i\,\text{sen}\,q)$, onde p é o módulo de z e q é a medida em radiano do argumento de z. Ao apresentarmos o número complexo $z = -1 + i\sqrt{3}$ em sua forma trigonométrica, quais os parâmetros p e q, respectivamente?

Para $z = -1 + i\sqrt{3}$, temos que $|z| = p = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} =$
$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

Assim:

$\cos q = \dfrac{-1}{2}$

$\text{sen}\,q = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow q = \dfrac{2\pi}{3}$

Assim, a forma trigonométrica de **z** é dada por:

$$z = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

Portanto, p = 2 e $q = \dfrac{2\pi}{3}$.

6. Unifenas-MG (adaptado) – Dado o número complexo Z = 2 + 3i, obtenha o módulo do complexo conjugado.

O número conjugado de $\bar{Z}$ será 2 – 3i. Assim, o módulo será:

$|\bar{z}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} \rightarrow |z| = \sqrt{4+9} \rightarrow z = \sqrt{13}$

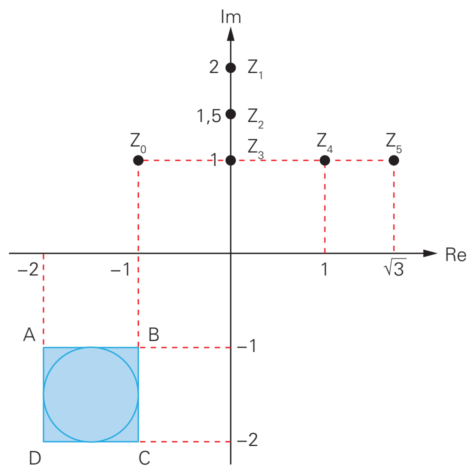
EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Unimontes-MG – Considere $x \in \mathbb{R}$ e i a unidade imaginária. Se o número complexo $z = (2x - i) \cdot (3x + 2xi)$ é imaginário puro, mas não é uma potência de i, então

a) $z = \dfrac{13}{9}i$
b) $z = -\dfrac{1}{3}i$
c) $z = \dfrac{9}{13}i$
d) $z = -3i$

8. Sistema Dom Bosco – No plano de Argand-Gauss, o vértice de um quadrado é o ponto w = 4 – 3i. O centro do quadrado é o número z = 3 – 2i. Determine o vértice do quadrado que não é consecutivo a w.

9. FGV-SP – No plano Argand-Gauss estão indicados um quadrado ABCD e os afixos dos números complexos Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 e Z_5. Se o afixo do produto de Z_0 por um dos outros cinco números complexos indicados é o centro da circunferência inscrita no quadrado ABCD, então esse número complexo é:



a) Z_1.
b) Z_2.
c) Z_3.
d) Z_4.
e) Z_5.

10. Sistema Dom Bosco – Se somarmos um número complexo da forma $z = a + bi$ com seu conjugado, obtemos 4. Subtraindo estes mesmos números, obtemos 4i. Sendo assim, a alternativa que representa a forma trigonométrica de z é

a) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

c) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

d) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

e) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

11. FGV-SP – Seja f uma função que, a cada número complexo z, associa $f(z) = iz$, onde i é a unidade imaginária. Determine os complexos z de módulo igual a 4 e tais que $f(z) = \overline{z}$, onde $\overline{z}$ é o conjugado de z.

12. Unicamp-SP – Sejam a e b números reais não nulos. Se o número complexo $z = a + bi$ é uma raiz da equação quadrática $x^2 + bx + a = 0$, então:

a) $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $|z| = \frac{1}{\sqrt{5}}$

c) $|z| = \sqrt{3}$

d) $|z| = \sqrt{5}$

13. Mackenzie-SP – Se $p = 4n$ para $n \in \mathbb{N}^*$, o valor da expressão $\frac{(1+i)^p}{(1-i)^{p-2}}$ é igual a

a) $-2i$

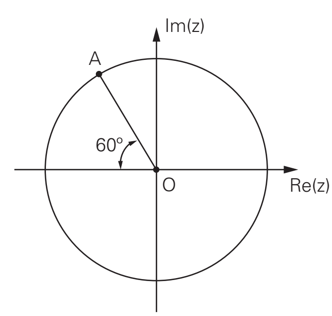
b) $2i$

c) i

d) $-i$

e) $1 - 2i$

14. PUC-SP – No plano complexo de origem O, representado na figura abaixo, o ponto A é a imagem de um número complexo u cujo módulo é igual a 4.



Se B é o ponto imagem do complexo $v = \frac{u}{i}$, então é correto afirmar que:

a) o módulo de u + v é igual a $4\sqrt{2}$.

b) o módulo de u – v é igual a $4\sqrt{2}$.

c) B pertence ao terceiro quadrante.

d) B pertence ao quarto quadrante.

e) o triângulo AOB é equilátero.

15. Unicamp-SP – Chamamos de unidade imaginária e denotamos por i o número complexo, tal que $i^2 = -1$. Então $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2013}$ vale

a) 0. **b)** 1. **c)** i. **d)** 1 + i.

16. PUC-SP – Em relação ao número complexo $z = i^{87} \cdot \left(i^{105} + \sqrt{3}\right)$ é correto afirmar que:

a) sua imagem pertence ao 3º quadrante do plano complexo.

b) é imaginário puro.

c) o módulo de z é igual a 4.

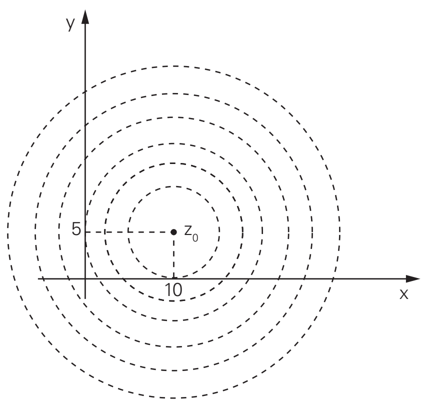
d) seu argumento é igual ao argumento do número complexo $v = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

17. Faceres-SP (adaptado) – Sendo i chamado de unidade imaginária, podemos concluir que o valor de $i^{200} \cdot i^{201} \cdot i^{202} \cdot i^{203} \dots i^{247} \cdot i^{248}$ é?

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. UFSM-RS C5-H21

No plano complexo, o ponto z_0 representa o local de instalação de uma antena de wireless na praça de alimentação de um shopping.

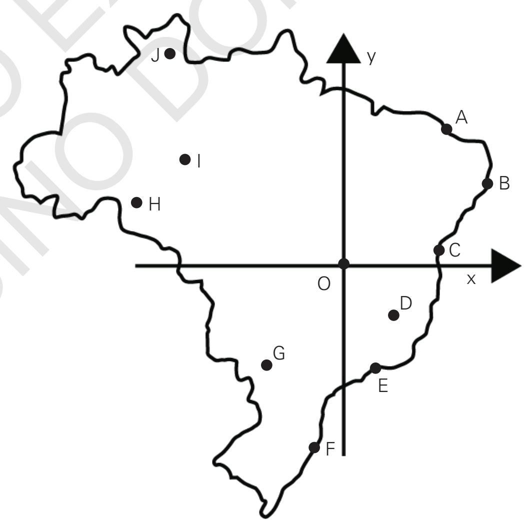


Os pontos x + yi = z que estão localizados no alcance máximo dessa antena satisfazem a equação, $|z - z_0| = 30$.

De acordo com os dados, esses pontos pertencem à circunferência dada por

a) $x^2 + y^2 - 20x - 10y - 775 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 900 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 10x + 20y - 775 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 10x + 20y - 900 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 20x - 10y - 900 = 0$

19. UnB-DF (adaptado) C5-H21



cidades	pontos	coordenadas
Fortaleza	A	(7,9)
Recife	B	(10, 6)
Salvador	C	(7, 2)
Belo Horizonte	D	(2, –4)
Rio de Janeiro	E	(3, –6)
Porto Alegre	F	(–3, –12)
Campo Grande	G	(–4, –5)
Porto Velho	H	(–12, 4)
Manaus	I	(r, s)
Boa Vista	J	(t, u)

No mapa acima, estão identificadas, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, as localizações de algumas cidades brasileiras, entre elas, aquelas que sediarão a Copa das Confederações. Brasília, indicada por O, corresponde à origem e, na tabela, estão as coordenadas das demais cidades, identificadas pelas letras de A a J. Cada ponto (x, y) do plano está identificado com um número complexo z = x + iy, em que i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$). Nesse sistema, as medidas das coordenadas estão estabelecidas em unidade de distância referencial denotada por u.d.

Considere que os números complexos z_1 e z_2 correspondem, respectivamente, às localizações de Belo Horizonte e Rio de Janeiro. Nesse caso, $\frac{z_1}{z_2}$ vale?

a) 1 **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{1}{3}$

20. UEL-PR (adaptado) C1-H3

Na virada do século XVIII para o século XIX, um agrimensor norueguês, Wessel (1798), e um desconhecido matemático suíço, Argand (1806), foram, aparentemente, os primeiros a compreender que os números complexos não têm nada de "irreal". São apenas os pontos (ou vetores) do plano que se somam através da composição de translações e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações (na nomenclatura atual). Mas essas iniciativas não tiveram repercussão enquanto não foram redescobertas e apadrinhadas, quase simultaneamente, por Gauss, grande autoridade daquele tempo que, já em vida, era reconhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

CARNEIRO, J. P. A Geometria e o Ensino dos Números Complexos. *Revista do Professor de Matemática*, 2004. v. 55. p. 18.) (Adaptado)

Calcule uma composição de rotação dos pontos P (–3, 4) e Q (2, –3) representados pelos números complexos z = –3 + 4i e w = 2 – 3i.

a) –18 + 17i
b) –6 – 12i
c) –1 + i
d) 5 + 7i
e) 6 + 17i

FORMA TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS II E POLINÔMIOS I

20

Propriedades operatórias da forma polar de um número complexo

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Considere os números complexos não nulos $z = \rho_z\left(\cos\theta_z + i\cdot \text{sen}\theta_z\right)$ e $w = \rho_w\left(\cos\theta_w + i\cdot \text{sen}\theta_w\right)$ na forma trigonométrica.

$$z \cdot w = \rho_z\rho_w \cdot [\cos(\theta_z + \theta_w) + i \cdot \text{sen}(\theta_z + \theta_w)]$$

Para calcularmos o quociente $\frac{z}{w}$, procedemos da seguinte forma:

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_z}{\rho_w}\cdot\left[\cos\left(\theta_z - \theta_w\right) + i\cdot \text{sen}\left(\theta_z - \theta_w\right)\right]$$

Dessa forma, com base em **z** e **w** (não nulos), cujos módulos são respectivamente ρ_z e ρ_w, sendo seus argumentos θ_z e θ_w, nessa ordem, temos:

$$z \cdot w = \rho_z\rho_w \cdot [\cos(\theta_z + \theta_w) + i \cdot \text{sen}(\theta_z + \theta_w)]$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_z}{\rho_w}\cdot\left[\cos\left(\theta_z - \theta_w\right) + i\cdot \text{sen}\left(\theta_z - \theta_w\right)\right]$$

POTENCIAÇÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA - PRIMEIRA FÓRMULA DE MOIVRE

Considere **z** um número complexo (não nulo) na sua forma trigonométrica.

$$Z^n = \underbrace{Z\cdot Z\cdot Z\cdot \ldots \cdot Z\cdot Z\cdot Z}_{\text{n fatores}}$$

Utilizando a multiplicação sucessiva de números complexos obtemos a fórmula conhecida como **primeira fórmula de Moivre**:

$$z^n = \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \cdot \text{sen } n\theta)$$

RADICIAÇÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA – SEGUNDA FÓRMULA DE MOIVRE

Com base nos números complexos **z** e **w** não nulos, dizemos que todo número **w**, tal que $w^n = z$, é a raiz enésima de z, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

Assim, dizemos que a fórmula $w_k = \sqrt[n]{\rho}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\cdot \text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$ resulta na k-ésima raiz de **z**, com $0 \leqslant k \leqslant (n - 1)$ e $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$. Essa fórmula também é conhecida como **segunda fórmula de Moivre**.

- Multiplicação e divisão na forma trigonométrica
- Potenciação na forma trigonométrica – Primeira fórmula de Moivre
- Radiciação na forma trigonométrica – Segunda fórmula de Moivre
- O que é um polinômio?
- Grau de um polinômio
- Valor numérico de um polinômio
- Igualdade de polinômios
- Adição e subtração de polinômios
- Multiplicação de polinômios

HABILIDADES

- Operar números complexos na sua forma trigonométrica.
- Reconhecer a utilização das fórmulas de Moivre.
- Reconhecer um polinômio.
- Identificar o grau de um polinômio.
- Atribuir um valor numérico a um polinômio.
- Compreender a identidade de polinômios.
- Ser capaz de realizar operações de adição, subtração e multiplicação entre polinômios.

Assim, de maneira geral, podemos dizer que as **n** raízes de um número complexo **z** na sua forma trigonométrica são afixos de **n** pontos que dividem a circunferência de centro na origem no plano de Argand-Gauss e raio $\sqrt[n]{\rho}$ em **n** arcos congruentes medindo $\frac{2\pi}{n}$ rad têm argumentos que formam uma progressão aritmética em que o primeiro termo é $\frac{\theta}{n}$ rad e cuja razão é $\frac{2\pi}{n}$ rad.

POLINÔMIO

O **polinômio** é uma expressão algébrica formada por um ou mais monômios, chamados **termos do polinômio**.

De modo geral, podemos expressar um polinômio por:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} + a_{n-2} x^{(n-2)} + \ldots$ $\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Nessa fórmula:

- x é a **variável**;
- a_n, a_{n-1} ...

Quando um polinômio **não** apresenta monômios semelhantes, dizemos que ele é **reduzido**.

Exemplo:

$P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ (polinômio reduzido)

GRAU DE UM POLINÔMIO

O **grau** de um polinômio é o valor do maior expoente entre suas variáveis, desde que seu coeficiente não seja nulo. O grau de um polinômio P(x) é representado por gr(P).

Dizemos que o termo independente de um polinômio reduzido é o monômio de grau 0.

Exemplo:

maior expoente

- $G(x) = 3x^4 + 4x - 2x^5 + 6 \rightarrow gr(G) = 5$ (o termo independente é 6).

VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO

Quando atribuímos um valor para a variável de um polinômio e obtemos seu valor, dizemos que esse é o **valor numérico** do polinômio.

Dado o polinômio $P(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 5$, o valor numérico para x = 3 é:

$x = 3 \rightarrow P(3) = 2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 - 5 = 34$

Ou seja, 34 é o valor numérico de P(x) para x = 3.

RAIZ DE UM POLINÔMIO

O valor complexo α é raiz do polinômio P(x), quando obtemos valor numérico nulo para $P(\alpha)$.

Observe o polinômio $H(x) = -x^2 + 4x - 4$. Ao atribuirmos o valor x = 2, temos o valor numérico nulo:

$$H(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 4 = 0$$

Dessa forma, x = 2 é raiz do polinômio H(x).

IGUALDADE DE POLINÔMIOS

Dois polinômios são **iguais** ou **idênticos** caso seus valores numéricos sejam iguais para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Ou seja:

$$P(x) = Q(x) \leftrightarrow P(\alpha) = Q(\alpha)\ (\forall\ \alpha \in \mathbb{C})$$

Por exemplo, considere os polinômios:

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$Q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3$

Para obtermos P(x) = Q(x), devemos ter a = 2, b = 5, c = −4 e d = 3.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE POLINÔMIOS

A **soma** de dois ou mais polinômios é obtida somando-se os termos semelhantes.

Por exemplo, considere os polinômios:

$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$Q(x) = 2x^2 - x - 3$

Vamos calcular a soma P(x) + Q(x).

$$\begin{array}{rrrrr} & x^3 + & x^2 + & x & + 1 \\ + & & 2x^2 - & x & - 3 \\ \hline & x^3 + & 3x^2 & & - 2 \end{array}$$

Assim, P(x) +Q(x) resulta em $x^3 + 3x^2 - 2$.

De maneira análoga, a **subtração** de polinômios pode ser obtida por $P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$.

Por exemplo, considere os polinômios:

$P(x) = x^2 - x + 2$

$Q(x) = x^3 + 2x^2 - 5$

Vamos calcular a diferença P(x) − Q(x).

Note que o oposto do subtraendo é dado por $-Q(x) = -x^3 - 2x^2 + 5$.

Dessa forma:

$$\begin{array}{rrrr} & & x^2 - x + 2 \\ - & x^3 + 2x^2 & - 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr} & & x^2 - & x & + 2 \\ + & -x^3 - & 2x^2 & & + 5 \\ \hline & -x^3 - & x^2 - & x & - 7 \end{array}$$

Portanto, a subtração P(x) − Q(x) resulta em $-x^3 - x^2 - x + 7$.

MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

A **multiplicação** de dois ou mais polinômios pode ser obtida aplicando-se a propriedade distributiva.

Por exemplo, considere os polinômios:

$P(x) = 3x - 4$

$Q(x) = -2x + 5$

Vamos calcular a multiplicação $P(x) \cdot Q(x)$.

$$P(x) \cdot Q(x) = (3x - 4) \cdot (-2x + 5)$$

$P(x) \cdot Q(x) = 3x \cdot (-2x) + 3x \cdot 5 + (-4) \cdot (-2x) + (-4) \cdot 5$

$P(x) \cdot Q(x) = -6x^2 + 15x + 8x - 20$

$P(x) \cdot Q(x) = -6x^2 + 23x - 20$

ROTEIRO DE AULA

NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA TRIGONOMÉTRICA II

Multiplicação

$z \cdot w = \rho_z \rho_w \cdot [\cos(\theta_z + \theta_w) + i \cdot \text{sen}(\theta_z + \theta_w)]$

Divisão

$\frac{z}{w} = \frac{\rho_z}{\rho_w} \cdot [\cos(\theta_z - \theta_w) + i \cdot \text{sen}(\theta_z - \theta_w)]$

Potenciação

$z^n = \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \cdot \text{sen}\, n\theta)$

Radiciação

$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$

ROTEIRO DE AULA

POLINÔMIOS I

Definição

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} = a_{n-2} x^{(n-2)} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x = a_0$

Considere os polinômios
$P(x) = 7x^6 - x + 9$ e
$G(x) = -x^4 - 3x + 1$

Grau

$gr(P) = 6$

Valor numérico

$G(-1) = 3$

Adição

$P(x) + G(x) = 7x^8 - x^4 + 2x + 8$

Subtração

$P(x) - G(x) = 7x^6 + x^4 + 2x + 8$

Multiplicação

$P(x) \cdot G(x) = 7x^{10} - 21x^7 - 7x^6 + x^5 - 9x^4 + 3x^2 - 28x + 9$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Espcex-SP/Aman-RJ – Se $(1+i)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)=$ $=x+iy$, em que i é a unidade imaginária e x e y são números reais, o valor de $\sqrt{3}\cdot x+y$ é

a) $\sqrt{6}$.
b) $\sqrt{3}$.
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
d) $3\sqrt{6}$.
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Escrevendo 1 + i na forma trigonométrica, temos:

$$(1+i)=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Logo, $(1+i)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)$

Portanto, $\sqrt{3}\cdot x+y=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$.

2. Sistema Dom Bosco – Dados os números complexos $z = 2(\cos 15° + i\operatorname{sen} 15°)$, $w = \sqrt{3}(\cos 30° + i\operatorname{sen} 30°)$ e $k = 4(\cos 45° + i\operatorname{sen} 45°)$:

a) Calcule $z \cdot w \cdot k$.

b) Calcule $\frac{w}{z}$ e $\frac{k}{z}$.

a) Da fórmula de Moivre, temos:

$$z\cdot w\cdot k=\left[2(\cos 15°+i\operatorname{sen}15°)\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\sqrt{3}(\cos 30°+i\operatorname{sen}30°)\right]\cdot\left[4(\cos 45°+i\operatorname{sen}45°)\right]\rightarrow$$
$$z\cdot w\cdot k=2\cdot\sqrt{3}\cdot 4[(\cos(15°+30°+45°)+i\operatorname{sen}(15°+30°+45°)]\rightarrow$$
$$z\cdot w\cdot k=8\sqrt{3}[(\cos 90°+i\operatorname{sen}90°]$$

b) Para $\frac{w}{z}$ temos $\frac{\sqrt{3}(\cos 30°+i\operatorname{sen}30°)}{2(\cos 15°+i\operatorname{sen}15°)}$. Da mesma fórmula de Moivre, obtemos:

$$\frac{w}{z}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot[\cos(30°-15°)+i\operatorname{sen}(30°-15°)]=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot[\cos 15°+i\operatorname{sen}15°]$$

Já $\frac{k}{z}=\frac{4(\cos 45°+i\operatorname{sen}45°)}{2(\cos 15°+i\operatorname{sen}15°)}\rightarrow$

$$\rightarrow\frac{k}{z}=\frac{4}{2}\cdot[\cos(45°-15°)+i\operatorname{sen}(45°-15°)]=2\cdot(\cos 30°+i\operatorname{sen}30°)$$

3. Sistema Dom Bosco **C5-H19**

Na engenharia elétrica utilizam-se os números complexos nos estudos de impedância e fasores, por exemplo. Esta utilização é de extrema importância, já que sem os números complexos o cálculo seria extremamente difícil. Assim sendo, a fim de iniciar os estudos com seus alunos, o professor da turma de engenharia elétrica decidiu relembrar alguns conceitos sobre números complexos. Para isso, forneceu as seguintes suposições:

I. O número complexo 1 + i pode ser representado como $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$.

II. Para $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$, o valor de $z^6=64\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$.

III. Se $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $w=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ então $z\cdot w=6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

Das suposições acima, acertaram os alunos que marcaram como corretos os itens:

a) I
b) II
c) III
d) I e II
e) I e III

Analisando cada item, temos:

I) $z = 1 + i \rightarrow |z| = \sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

O argumento é dado por:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{b}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta=\frac{a}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

Assim, $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ (portanto, correta).

II) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$. Da fórmula de Moivre, temos que:

$$z^6=2^6\left(\cos\frac{6\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{6\pi}{3}\right)=64(\cos 2\pi+i\operatorname{sen}2\pi)\ \text{(incorreta)}$$

III) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $w=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

$$z\cdot w=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$z \cdot w = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$, (portanto, correta)

Assim, acertou quem assinalou os itens I e III como corretas.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

4. PUC-RJ – Sabendo que 1 é raiz do polinômio $p(x) = 2x^3 - ax^2 - 2x$, podemos afirmar que p(x) é igual a:

a) $2x^2(x-2)$
b) $2x(x-1)(x+1)$
c) $2x(x^2-2)$
d) $x(x-1)(x+1)$
e) $x(2x^2-2x-1)$

Do enunciado, temos que 1 é raiz de p(x). Portanto, p(1) = 0:

$2 \cdot 1^3 - a \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 0$

$2 \cdot 1 - a \cdot 1 - 2 = 0$

$2 - a - 2 = 0 \rightarrow a = 0$

Assim:

$p(x) = 2x^3 - 0 \cdot x - 2x \rightarrow p(x) = 2x^3 - 2x \rightarrow p(x) = 2x(x^2 - 1) \rightarrow$
$\rightarrow p(x) = 2x(x - 1)(x + 1)$

5. Sistema Dom Bosco – Se o polinômio $P(x) = x^3 + 3x + 2$ for multiplicado por $g(x) = x^2 - 3$, obtemos:

a) um polinômio de grau 3 dado por $x^5 + 6x^3 + 11x + 6$
b) um polinômio de grau 5 dado por $x^5 + 2x^2 - 9x - 6$
c) um polinômio de grau 5 dado por $x^5 + 6x^3 + 2x^2 - 9x - 6$
d) um polinômio de grau 3 dado por $3x^3 - 9x + 6$
e) um polinômio de grau 5 dado por $x^5 + 2x^2 + 9x - 6$

Dados $P(x) = x^3 + 3x + 2$ e $g(x) = x^2 - 3$, temos que $P(x) \cdot g(x)$ será:
$(x^3 + 3x + 2) \cdot (x^2 - 3) = x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 3x^3 - 9x - 6 = x^5 + 2x^2 - 9x - 6$

6. EEAr-SP – Dado o polinômio: $ax^3 + (2a + b)x^2 + cx + d - 4 = 0$, os valores de a e b para que ele seja um polinômio de 2º grau são

a) a = 0 e b = 0
b) a = 1 e b ≠ 0
c) a = 0 e b ≠ 0
d) a = –1 e b = 0

Para que um polinômio seja de 2º grau, o maior expoente do polinômio deve ser igual a 2.

Assim, temos que o termo a^3 deve ser nulo. Logo, a = 0.

Já o termo $(2a + b)x^2$ deve ser diferente de zero. Logo, $2a + b \neq 0$.

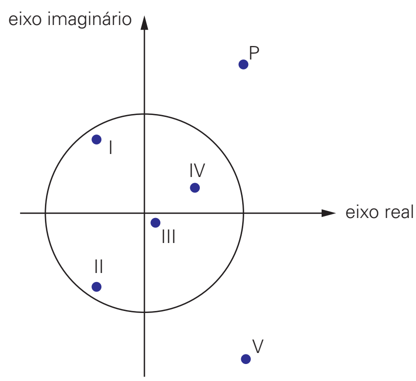
Como a = 0:

$2(0) + b \neq 0$

Então, $b \neq 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

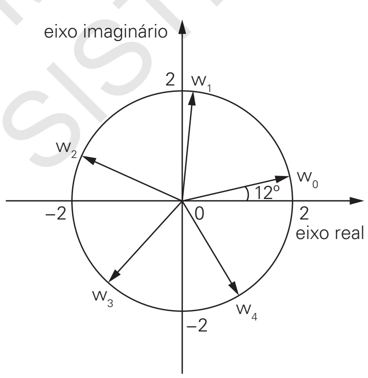
7. FGV-SP – Seja Z um número complexo cujo afixo P está localizado no 1º quadrante do plano complexo, e sejam I, II, III, IV e V os afixos de cinco outros números complexos, conforme indica a figura seguinte.



Se a circunferência traçada na figura possui raio 1 e está centrada na origem do plano complexo, então o afixo de $\frac{1}{z}$ pode ser

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

8. Cefet-MG – Considere as raízes complexas w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 da equação $w_5 = z$, onde $z \in \mathbb{C}$ representadas graficamente por



O número complexo z é

a) 16i.
b) 32i.
c) 16+16i.
d) $16+16\sqrt{3}i$.
e) $32+32\sqrt{3}i$.

9. EEAr-SP – Considere $P(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$, tal que $P(1) = -2$ e $P(2) = 6$. Assim, os valores de b e c são, respectivamente,

a) 1 e 2
b) 1 e –2
c) –1 e 3
d) –1 e –3

10. UNESP – Sendo x um número real maior que $\frac{2}{3}$, a área de um retângulo é dada pelo polinômio $3x^2 + 19x - 14$. Se a base desse retângulo é dada pelo polinômio $x + 7$, o quadrado da diagonal do retângulo é expresso pelo polinômio:

a) $10x^2 + 26x + 29$
b) $10x^2 + 53$
c) $10x^2 + 65$
d) $4x^2 + 2x + 53$
e) $10x^2 + 2x + 53$

11. Sistema Dom Bosco – Dado o número complexo $z = -1$, assinale a alternativa que representa o produto das raízes cúbicas deste número.

a) 1
b) $1+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$
d) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) -1

12. Unicamp-SP – Seja (a,b,c,d) uma progressão geométrica (PG) de números reais, com razão $q \neq 0$ e $a \neq 0$.

Mostre que $x = -\frac{1}{q}$ é uma raiz do polinômio cúbico $p(x) = a + + bx + cx^2 + dx^3$.

13. PUC-RJ – Considere o polinômio $p(x) = x^2 + bx + 3$ e assinale a alternativa correta.

a) O polinômio tem pelo menos uma raiz real para todo $b \in \mathbb{R}$.
b) O polinômio tem exatamente uma raiz real para $b = 12$.
c) O polinômio tem infinitas raízes reais para $b = 0$.
d) O polinômio não admite raiz real para $b = 1+\frac{1}{\sqrt{3}}$.
e) O polinômio tem exatamente três raízes reais para $b = \pi$.

14. Espcex-SP/Aman-RJ (adaptado) – Seja a igualdade

$$\frac{a}{3} - \frac{bi}{5} = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)^4$$, onde i é a unidade imaginária.

Se a e b são números reais, então qual é o quociente $\frac{a}{b}$?

15. UFU-MG – O polinômio p(x), na variável real x, é obtido por meio da multiplicação sucessiva de termos de tipo $(x - i)^i$ para i = 1, 2,..., k. Desse modo, $p(x) = (x - 1)(x - 2)^2 \ldots (x - k)^k$, sendo k um número natural constante.

Se o grau de p(x) é igual a 210, logo k é um número:

a) primo
b) divisível por 5
c) múltiplo de 7
d) ímpar

16. UEFS-BA – Os números complexos z e w têm módulos |z| = |w| = 1. Se z, w e seu produto zw formam, no plano de Argand-Gauss, os vértices de um triângulo equilátero, é correto afirmar que:

a) z é real.
b) w = ± 1 ou w = ± i
c) zw é um imaginário puro.
d) a parte real de w é positiva.
e) z e w são complexos conjugados.

17. ITA-SP – Considere o polinômio

$$p(x) = x^4 - \left(1 + 2\sqrt{3}\right)x^3 + \left(3 + 2\sqrt{3}\right)x^2 - \left(1 + 4\sqrt{3}\right)x + 2.$$

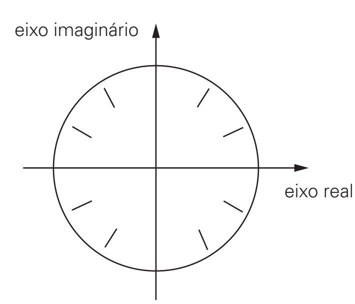
a) Determine os números reais a e b tais que $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$.
b) Determine as raízes de p(x).

ESTUDO PARA O ENEM

18. Sistema Dom Bosco C5-H22

Um grupo secreto se reúne mensalmente com todos os seus membros e, para isso, codificam o horário do encontro utilizando números complexos.

Eles utilizam os números $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$ e $w = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ e definem o horário com base em operações entre eles, de modo que seus afixos representem as extremidades dos ponteiros do relógio.



Neste mês, a hora é definida fazendo $\frac{z}{w}$ e o minuto fazendo $z \cdot w$. Assim, sabendo que a circunferência em que o relógio está inserido tem diâmetro igual a 4, o horário da reunião deste mês é:

a) 12h
b) 14h
c) 16h
d) 14h30
e) 12h10

19. UNESP (adaptado) C5-H21

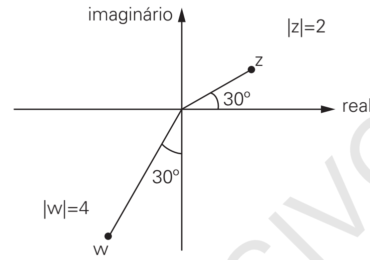
Um professor de matemática passou o seguinte desafio para os seus alunos, em uma aula sobre polinômios:

"Sendo x um número real maior que $\frac{2}{3}$, a área de um retângulo é dada pelo polinômio $3x^2 + 19x - 14$. Se a base desse retângulo é dada pelo polinômio $x + 7$, o quadrado da diagonal do retângulo é expresso por qual polinômio?". O polinômio encontrado é

a) $10x^2 + 26x + 29$
b) $10x^2 + 53$
c) $10x^2 + 65$
d) $4x^2 + 2x + 53$
e) $10x^2 + 2x + 53$

20. UFRJ (adaptado) C5-H22

No jogo Batalha Complexa são dados números complexos z e w, chamados mira e alvo respectivamente. O tiro certeiro de z em w é o número complexo t tal que $tz = w$.



Considere a mira z e o alvo w indicados na figura acima. O tiro certeiro de z em w é

a) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
b) $\sqrt{3} + i$
c) $\sqrt{3} - i$
d) $-\sqrt{3} - i$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

21 POLINÔMIOS II

- Divisão de polinômios: método da chave
- Dispositivo prático de Briot-Rufini
- Teorema do resto
- Teorema de D'Alembert
- Teorema do fator
- Raízes inteiras de um polinômio

HABILIDADES

- Aplicar as técnicas de divisão de polinômios.
- Reconhecer situações em que se utiliza divisão de polinômios.
- Identificar em quais situações pode ser aplicado o dispositivo prático de Briot-Rufini.
- Aplicar as propriedades de polinômios.
- Identificar em quais situações tais propriedades podem ser utilizadas.
- Pesquisar raízes inteiras em polinômios com coeficientes inteiros.

DIVISÃO DE POLINÔMIOS: MÉTODO DA CHAVE

Para dividir dois polinômios, necessariamente o grau do dividendo deve ser maior ou igual ao grau do divisor.

Dessa forma, toda divisão satisfaz a seguinte condição:

$$\underbrace{D(x)}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{Q(x)}_{\text{Quociente}} \cdot \underbrace{d(x)}_{\text{Divisor}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Resto}}$$

O grau do polinômio dividendo será sempre igual à soma dos graus dos polinômios quociente e divisor. Além disso, o grau do polinômio resto é sempre menor que o grau do divisor.

Para realizarmos a divisão entre dois polinômios, seguimos os passos utilizados no exemplo a seguir.

Com base nos polinômios P(x) 5 $2x^3$ 1 x^2 1 x 1 1 e Q(x) 5 $x^2 - 1$, vamos obter P(x) 4 Q(x)

- **1.** Encontramos o quociente entre o termo de maior grau do dividendo e o termo de maior grau do divisor.

$$2x^3 : x^2 \dashrightarrow \begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 + x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} & 2x \end{array}$$

- **2.** Multiplicamos o termo obtido pelo divisor e subtraímos o resultado do dividendo, obtendo assim um novo dividendo.

$$2x \cdot (x^2 - 1) = 2x^3 - 2x \xrightarrow{\text{oposto}} \begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 + x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 2x & 2x \\ \hline x^2 + 3x + 1 & \end{array} \dashleftarrow \text{Novo dividendo}$$

- **3.** Obtemos o novo termo do quociente e continuamos a divisão até encontrar um polinômio de grau menor que o divisor, que será o resto da divisão.

$$x^2 : x^2 = 1 \dashrightarrow \begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 + x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 2x & 2x + 1 \\ \hline x^2 + 3x + 1 & \\ -x^2 + 1 & \\ \hline 3x + 2 & \end{array} \dashleftarrow \text{Resto}$$

Note que o grau de $3x + 2$ é menor que o grau do divisor ($x^2 - 1$). Isso indica que a divisão foi concluída. Dessa forma:

$$Q(x) = 2x + 1 \qquad\qquad R(x) = 3x + 2$$

DISPOSITIVO PRÁTICO DE BRIOT-RUFFINI

O método para dividir polinômios quando o divisor é do tipo (x – a), sendo **a** um número inteiro. Esse método é chamado **dispositivo prático de Briot-Rufini**.

Observe na prática como aplicar o dispositivo prático de Briot-Rufini na divisão de $(x^2 + 1) : (x - 2)$.

- **1.** Escrevemos os coeficientes de todos os termos do dividendo ordenados de modo decrescente, desde o de maior grau até o termo independente.

	1	0	1

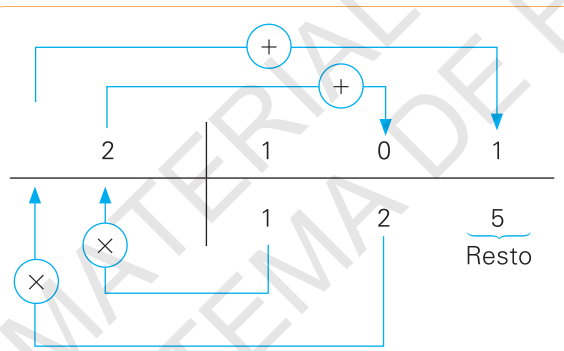
- **2.** Colocamos à esquerda o oposto do termo independente do divisor – ou seja, o número inteiro **a**, que nesse caso é 2.

2	1	0	1

- **3.** Copiamos o primeiro coeficiente na linha dos resultados.

2	1	0	1
	1		

- **4.** Multiplicamos esse coeficiente da linha dos resultados pelo número **a** e somamos ao coeficiente seguinte. Realizamos esse processo para todos os coeficientes do dividendo.



O último número na linha dos resultados é o resto. Os demais correspondem aos coeficientes do polinômio quociente, cujo grau é uma unidade menor que o grau do dividendo. Dessa forma:

$Q(x) = x + 2$ $\qquad$ $R(x) = 5$

TEOREMA DO RESTO

Considerando um polinômio P(x), com $gr(P) \geq 1$, o resto de sua divisão por $(x - a)$ é dado por P(a).

$$R = P(a)$$

Ou seja, o resto da divisão de P(x) por $(x - a)$ é P(a).

TEOREMA DE D'ALEMBERT

Se P(x) for divisível por $(x - a)$, dizemos que **a** é raiz de P(x). Ou seja, $P(a) = 0$.

Como P(x) é divisível por $(x - a)$, concluímos que o resto da divisão de P(x) por $(x - a)$ é nulo. Pelo teorema do resto, $R = P(a) = 0$. Logo, **a** é raiz de P(x).

TEOREMA DO FATOR

Se **a** é uma raiz do polinômio P(x) de grau n $(n > 0)$, então $(x - a)$ é um fator de P(x).

Ao dividirmos P(x) por $(x - a)$, obtemos o quociente Q(x) e o resto R, sendo $R = P(a)$.

RAÍZES INTEIRAS DE UM POLINÔMIO

As raízes inteiras de um polinômio com coeficientes inteiros são divisores do termo independente.

Tomemos como exemplo o polinômio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x + 2$, embora esse método seja válido para polinômios de qualquer grau.

Se a é uma raiz inteira de P(x), pelo teorema do resto, $P(a) = 0$. Ou seja:

$$P(a) = a^4 + 2 \cdot a^3 - 3 \cdot a^2 - 6 \cdot a + 2 = 0$$

Assim:

$$a \cdot (a^3 + 2a^2 - 3a - 6) + 2 = 0$$

$$a(a^3 + 2a^2 - 3a - 6) + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a \cdot k + 2 = 0 \rightarrow k = -\frac{2}{a}$$

$$-k = \frac{2}{a}$$

Ou seja, a raiz **a** é um divisor do termo independente (2).

Exemplo:

Quais são as raízes inteiras do polinômio $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$?

As possíveis raízes inteiras do polinômio P(x) serão os divisores do termo independente -2, ou seja, ± 1 ou ± 2.

- Para $x = 1$, temos: $2 - 1 - 5 - 2 = -6 \neq 0$.
- Para $x = -1$, temos: $-2 - 1 + 5 - 2 = 0$.
- Para $x = 2$, temos: $16 - 4 - 10 - 2 = 0$.
- Para $x = -2$, temos: $-16 - 4 + 10 - 2 = -12 \neq 0$.

Logo, as raízes inteiras de P(x) são -1 e 2.

ROTEIRO DE AULA

POLINÔMIOS II

Divisão

Considere os polinômios $P(x) = 3x^3 - 2x + 4$ e $D(x) = x^2 - 1$. $P(x) : D(x)$ resulta em:

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3 - 2x + 4^2 & x^2 - 1 \\ \hline
-3x^3 + 3x & 2x
\end{array}
$$

$Q(x) = 3x$ e $R(x) = x + 4$

Briot-Ruffini

Considere os polinômios $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ e $D(x) = x - 1$.
Utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, $P(x) : D(x)$, resulta em:

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ \hline
 & 2 & 5 & 6 & 1
\end{array}
$$

$Q(x) = 2x^2 + 5x + 6$ e $R(x) = 1$

ROTEIRO DE AULA

Teorema do resto

Se um polinômio $P(x)$, com $gr(P) \geqslant 1$, o resto de sua divisão por $(x - a)$ é dado por $P(a)$.

Teorema de D'Alembert

Se $P(x)$ for divisível por $(x - a)$, dizemos que a é raiz de $P(x)$, ou seja, $P(a) = 0$.

Teorema do fator

Se a é uma raiz do polinômio $P(x)$ de grau n $(n > 0)$, então $(x - a)$ é um fator de $P(x)$.

Raízes inteiras de um polinômio

As raízes inteiras de um polinômio com coeficientes inteiros são divisores do termo independente.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. ESPM-SP – O resto da divisão do polinômio $x^5 - 3x^2 + 1$ pelo polinômio $x^2 - 1$ é:

a) $x - 1$
b) $x + 2$
c) $2x - 1$
d) $x + 1$
e) $x - 2$

Pelo método das chaves, temos:

$$\begin{array}{l|l} x^5 - 3x^2 + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^5 + x^3} & x^3 + x - 3 \\ \quad x^3 - 3x^2 + 1 & \\ \quad \underline{-x^3 + x} & \\ \qquad -3x^2 + x + 1 & \\ \qquad \underline{-(-3x^2 + 3)} & \\ \qquad\qquad x - 2 & \end{array}$$

Então, $r = x - 2$ e $Q(x) = x^3 + x - 3$.

2. UEG-GO (adaptado) – Dividindo o polinômio $P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 12x + 5$ pelo polinômio $D(x) = x^2 + 2x - 5$, qual será o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$?

Fazendo a divisão:

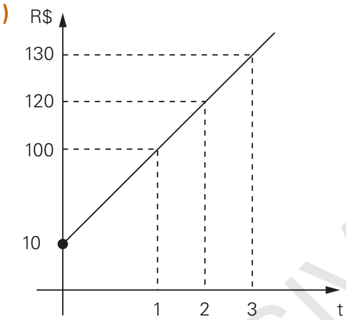
$$\begin{array}{l|l} 3x^2 + 5x^2 - 12x + 5 & x^2 + 2x - 5 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3 - 6x^2 + 15x} & 3x - 1 \\ \quad 0 - \quad x^2 + 3x + 5 & \\ \qquad \underline{\quad x^2 + 2x - 5} & \\ \qquad\quad 0 + \ 5x & \end{array}$$

Temos que $Q(x) = 3x - 1$ e $R(x) = 5x$

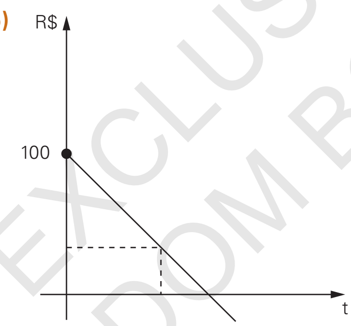
3. Sistema Dom Bosco C5-H21

Em uma corretora de investimentos, fez-se um estudo para prever o rendimento mensal de um cliente. Após diversos cálculos, verificaram que o gráfico do rendimento em função do tempo poderia ser obtido pelo quociente da divisão entre $10t^3 + 50t^2 - 480t + 200$ e $t^2 - 5t + 2$. Assim sendo, assinale a alternativa que contém o gráfico que melhor expressa o rendimento deste cliente:

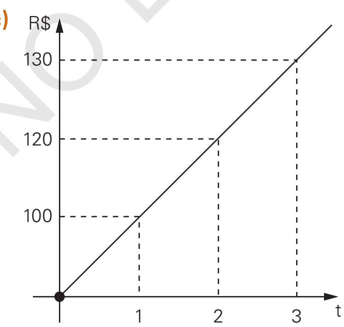
a)



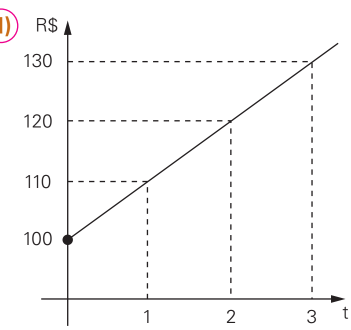
b)



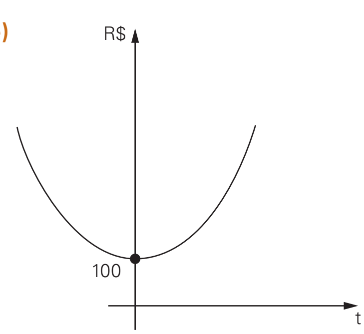
c)



d)



e)



Como o gráfico do rendimento é obtido pelo resto da divisão dos polinômios $10t^3 + 50t^2 - 480t + 200$ e $t^2 - 5t + 2$, utilizando o método das chaves, temos:

$$\begin{array}{rl|l} & 10t^3 + 50t^2 - 480t + 200 & t^2 - 5t + 2 \\ \cline{3-3} & -10t^3 + 50t^2 - 20t & 10t + 100 \\ \cline{2-2} & 100t^2 - 500t + 200 & \\ & -100t^2 + 500t - 200 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

Assim, o quociente é $10t + 100$. Logo, será uma reta crescente com início em 100.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. PUC-RS – O polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, em $\mathbb{R}$, é divisível por $(x - 1)$. Podemos afirmar que $p(p(1))$ é

a) -1
b) 0
c) 1
d) $a + b + c$
e) $-a + b - c$

Se $p(x)$ é divisível por $(x - 1)$, pelo teorema do resto, $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$.
Assim, $p(1) = 0$.
Logo, $p(p(1)) = p(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 = 0$.

5. Unicamp-SP – Considere o polinômio $x^n + x^m + 1$, em que $n > m = 1$. Se o resto da divisão de $p(x)$ por $x + 1$ é igual a 3, então

a) n é par e m é par
b) n é ímpar e m é ímpar
c) n é par e m é ímpar
d) n é ímpar e m é par

Do enunciado, o resto da divisão de $p(x)$ por $x + 1$ é 3. Portanto:
$p(-1) = 3 \rightarrow (-1)^n + (-1)^m + 1 = 3 \rightarrow (-1)^n + (-1)^m = 2$
Como um número negativo elevado a um número ímpar é negativo, **m** e **n** devem ser pares para que o resultado seja possível.

6. UNESP (adaptado) – O polinômio $P(x) = ax^3 + 2x + b$ é divisível por $x - 2$ e, quando divisível por $x + 3$, deixa resto –45. Nessas condições, encontre os valores de a e b.

Com base no enunciado e no teorema do resto, $P(2) = 0$ e $P(-3) = -45$.
Assim:
$a \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 + b = 0 \rightarrow 8a + 4 + b = 0$ (I)
$a(-3)^3 + 2(-3) + b = -45 \rightarrow -27a - 6 + b = -45$ (II)

Multiplicando a equação I por –1 e fazendo I + II:
$-35a - 10 = -45 \rightarrow -35a = -35$. Ou seja, $a = 1$.
Substituindo a na equação I:
$8 \cdot 1 + 4 + b = 0 \rightarrow b = -12$
Assim, $a = 1$ e $b = -12$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UFJF-MG – Dado o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com a, b, c e d números reais.

Qual deve ser a relação entre os números a, b, c e d para que o polinômio p(x) seja divisível pelo polinômio $x^2 + 1$?

a) $a = -d$; $c = d$
b) $a = c$; $b = d$
c) $a = -c$; $b = -d$
d) $a = d$; $c = -b$
e) $a = b = c = d$

8. Espcex-SP/Aman-RJ – O polinômio $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 1$, quando dividido por $x^3 - 3x + 2$, deixa resto r(x). Sabendo disso, o valor numérico de r(–1) é

a) –10.
b) –4.
c) 0.
d) 4.
e) 10.

9. Sistema Dom Bosco – Da divisão de P(x) por Q(x), obtém-se o resto 4. Considerando $P(x) = x^3 + ax + b$ e $Q(x) = x^2 + x + 2$, o valor de a + b é:

a) 2
b) –2
c) 3
d) –3
e) 4

10. Unicamp-SP – Considere o polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + ax - a$, onde a é um número real. Se $x = 1$ é a única raiz real de p(x), então podemos afirmar que

a) $a < 0$.

b) $a < 1$.

c) $a > 0$.

d) $a > 1$.

11. Fuvest-SP – O polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ possui uma raiz complexa ξ cuja parte imaginária é positiva. A parte real de ξ^3 é igual a

a) –11

b) –7

c) 9

d) 10

e) 12

12. UNESP – A equação polinomial $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ admite 1 como raiz. Suas duas outras raízes são:

a) $\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)$ e $\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)$.

b) $(1 + i)$ e $(1 - i)$.

c) $(2 + i)$ e $(2 - i)$.

d) $(-1 + i)$ e $(-1 - i)$

e) $\left(-1+\sqrt{3}\cdot i\right)$ e $\left(-1-\sqrt{3}\cdot i\right)$.

13. UEG-GO – A divisão do polinômio $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ por $(x + 1) \cdot (x - 2)$ é igual a:

a) $x - 3$

b) $x + 3$

c) $x - 6$

d) $x + 6$

14. FGV-SP (adaptado) – Sabendo-se que o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + 2^k + 2$ por $x - 3$ é igual a $4^k - 220$, qual é o valor de k?

15. UFRR (adaptado) – O polinômio do terceiro grau com coeficientes reais, $P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 8$, tem duas raízes complexas z_1 e z_2 e uma raiz real $x = 2$. Podemos afirmar que a soma das raízes complexas z_1 e z_2 é?

16. Unicamp-SP – Sejam p(x) e q(x) polinômios com coeficientes reais. Dividindo-se p(x) por q(x), obtêm-se quociente e resto iguais a $x^2 + 1$. Nessas condições, é correto afirmar que:

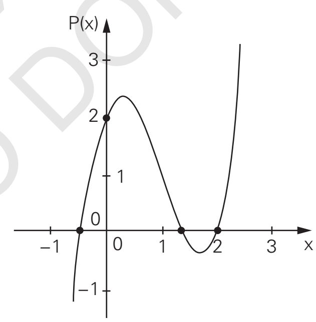
a) o grau de p(x) é menor que 5.

b) o grau de q(x) é menor que 3.

c) p(x) tem raízes complexas.

d) q(x) tem raízes reais.

17. UERJ – Observe o gráfico da função polinomial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$.



Determine o conjunto solução da inequação $P(x) > 0$.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Sistema Dom Bosco C5-H22

Um professor de Matemática tem dois filhos, um de 15 anos e outro de 17. Como os filhos eram bons alunos, o pai decidiu aumentar as mesadas fazendo uma brincadeira para que os filhos pudessem descobrir de quanto seria este aumento. Para isso, deu aos filhos os polinômios $A(x) = 6x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 7$ e $B(x) = 2x^2 + x + 1$ e disse que, para descobrirem quanto cada um ganharia a mais na mesada, deveriam substituir o valor de sua idade no polinômio encontrado no resto da divisão de A(x) por B(x). Assim, os valores aumentados na mesada do filho mais velho e do mais novo foram respectivamente:

a) 68 e 60
b) 60 e 68
c) 80 e 72
d) 72 e 80
e) 80 e 68

19. Sistema Dom Bosco C5-H21

Em um jogo de matemática desenvolvido para treinamento das técnicas aprendidas nas aulas de divisão e multiplicação de polinômios, foram fornecidos 3 dados, um com polinômios de grau 3, outro com polinômios de grau 2 e um com as operações de multiplicação e divisão. Os alunos em duplas deveriam jogar os dados e realizar a operação entre os polinômios obtidos. Assim, na primeira rodada do jogo, nos dados constava a seguinte combinação:

Dado 1: $x^3 + 2x^2 - 1$

Dado 2: Divisão

Dado 3: $x^2 + x + 2$

Após resolver a operação, o quociente e o resto obtidos foram respectivamente

a) $-3x - 3$ e $x + 1$
b) $x + 1$ e $3x + 3$
c) $x - 1$ e $-3x - 3$
d) $x + 1$ e $-3x - 3$
e) $x - 1$ e $3x - 3$

20. UFSM-RS C5-H21

Para avaliar as vendas em 2013, o setor de planejamento de uma empresa utilizou a função polinomial

$N(t) = t^3 - 21t^2 + 126t + 304$

em que N representa o número de tablets vendidos no mês t, com t = 1 correspondendo a janeiro, t = 2 correspondendo a fevereiro e assim por diante.

De acordo com os dados, o número de tablets vendidos foi igual a 480, nos meses de

a) fevereiro, julho e novembro.
b) fevereiro, agosto e novembro.
c) fevereiro, agosto e dezembro.
d) março, agosto e dezembro.
e) março, setembro e dezembro.

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

22

- O que são equações algébricas?
- Raiz ou zero de uma equação algébrica
- Relações de Girard
- Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros
- Raízes complexas não reais em uma equação algébrica de coeficientes reais

HABILIDADES

- Identificar uma equação algébrica.
- Usar técnicas já conhecidas para obter suas raízes.
- Reconhecer os coeficientes e o grau de uma equação algébrica.
- Reconhecer a aplicação de relações de Girard na resolução de equações algébricas.
- Aplicar a pesquisa de raízes racionais para solucionar equações algébricas de coeficientes inteiros.
- Identificar as raízes de equações algébricas quando estas são complexas e não reais.

RELAÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Equação polinomial ou **algébrica** é toda equação que pode ser escrita na forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \text{ (com } a_n \neq 0)$$

Nesse tipo de equação:

- $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a_{n-1}}$ e $\mathbf{a_n}$ são chamados **coeficientes** e pertencem ao conjunto dos números complexos;
- **n** representa o grau da equação e $n \in \mathbb{N}^*$.

Nas equações a seguir, observe a determinação do grau de cada uma e de seus coeficientes.

Exemplo 1:
$4x + 5 = 0$ é uma equação do 1º grau, e seus coeficientes são $a_1 = 4$ e $a_0 = 5$.

Exemplo 2:
$x^2 - 3x + 4 = 0$ é uma equação do 2º grau, e seus coeficientes são $a_2 = 1$, $a_1 = -3$ e $a_0 = 4$.

Exemplo 3:
$-2x^2 + x^3 - 5x + 5 = 0$ é uma equação do 3º grau, e seus coeficientes são $a_3 = 1$, $a_2 = -2$, $a_1 = -5$ e $a_0 = 5$.

RAIZ OU ZERO DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA

Raiz ou **zero** de uma equação algébrica é todo valor α ($\alpha \in \mathbb{C}$) para x de modo a satisfazer a igualdade. Ou seja, dada a equação algébrica:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \text{ (com } a_n \neq 0)$$

Ao substituirmos x por α, a igualdade é verdadeira.

Exemplo:
$x^2 - 7x + 10 = 0$ admite $x = 5$ como raiz:
$(5)^2 - 7(5) + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$

OBTENÇÃO DAS RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA

O conjunto das raízes de uma equação algébrica é também chamado **conjunto-solução**.

Sabemos que equações do 1º grau, de modo geral, são solucionadas da seguinte forma: $ax + b = 0$ (com $a \neq 0$) $\rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.

Já equações do 2º grau podem ser solucionadas utilizando a fórmula de Bhaskara:

$ax^2 + bx + c = 0$ (com $a \neq 0$) $\rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ em que $\Delta = b^2 - 4ac$

Porém, solucionar equações de grau maior que 2 por meio de fórmulas gerais é um processo mais complexo.

Decomposição em fatores de 1º grau

Teorema fundamental da álgebra:

> Toda equação algébrica do tipo p(x)= 0, em que p(x) é um polinômio de grau $n(n \geqslant 1)$, tem pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

> De modo geral, dado o polinômio de grau $n(n \geqslant 1)$:
>
> $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_2x^2 + {} + a_1x + a_0$
>
> Se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são raízes de p(x), podemos escrevê-lo desta forma:
>
> $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) \cdot q_n(x)$, com $q_n(x) = a_n$
>
> Então:
>
> $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n)$, da qual x_n são as raízes de p(x) e a_n é o coeficiente de x^n.

Multiplicidade da raiz

Por meio da decomposição de um polinômio p(x) de grau $n \geqslant 1$ em um produto de n fatores do 1º grau, podemos encontrar dois ou mais fatores idênticos.

Em uma equação algébrica de grau $n(n \geqslant 1)$, obtemos n raízes, das quais algumas podem ser iguais, ou seja, toda equação algébrica de grau $n \geqslant 1$ tem, no máximo, n raízes diferentes.

> A multiplicidade de uma raiz é o número de vezes em que ela se repete na solução de uma equação algébrica.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Escreva o conjunto-solução da equação $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 = 0$, sabendo que $3 + i$ é uma raiz da equação.

Resolução

Sabemos que, se o número complexo $3 + i$ é raiz do polinômio $p(x) = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20$, então seu conjugado também é raiz.

Dessa forma, podemos escrever a equação da seguinte forma:

$p(x) = [x - (3 + i)] \cdot [x - (3 - i)] \cdot q(x) \leftrightarrow$

$p(x) = [(x - 3) - i] \cdot [(x - 3) + i] \cdot q(x) \leftrightarrow$

$p(x) = [(x - 3)^2 - i^2] \cdot q(x) \leftrightarrow$

$p(x) = (x^2 - 6x + 10) \cdot q(x)$

Assim, podemos obter q(x) dividindo p(x) por $x^2 - 6x + 10$:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 & x^2 - 6x + 10 \\
\hline
-x^4 - 6x^3 + 10x^2 & x^2 - 3x + 2 \\
\hline
-3x^3 + 20x^2 - 42x + 20 & \\
+3x^3 - 18x^2 + 30x & \\
\hline
2x^2 - 12x + 20 & \\
-2x^2 + 12x - 20 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Assim, fazendo $x^2 - 3x + 2 = 0$ e utilizando a fórmula de Bhaskara, obtemos as raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$.

Dessa forma, $S = \{3 + i, 3 - i, 2, 1\}$.

RELAÇÕES DE GIRARD

Consideremos a equação algébrica do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), cujas raízes são x_1 e x_2.

Soma das raízes:

$$-(x_1 + x_2) = \frac{b}{a} \leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Produto das raízes:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Agora vamos considerar a equação algébrica do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3.

$$-(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{b}{a} \leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$-x_1x_2x_3 = \frac{d}{a} \leftrightarrow x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

De modo geral, se considerarmos a equação algébrica de grau n: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, cujas raízes são $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$, são válidas as seguintes relações:

1. A soma das raízes é:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

2. O produto das n raízes é:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

3. A soma dos produtos das raízes, quando tomadas:

a) duas a duas, é:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

b) três a três, é:

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

c) quatro a quatro, é:

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + \ldots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-4}}{a_n}$$

E assim sucessivamente.

Essas relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação algébrica são denominadas **relações de Girard**.

PESQUISA DE RAÍZES RACIONAIS DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA DE COEFICIENTES INTEIROS

Uma propriedade que auxilia a pesquisa das raízes racionais em uma equação algébrica de coeficientes inteiros é:

Se o número racional $\frac{p}{q}$, com **p** e **q** primos entre si, for raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, então **p** é divisor de a_0 e **q** é divisor de a_n.

RAÍZES COMPLEXAS NÃO REAIS EM UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA DE COEFICIENTES REAIS

Vamos considerar a equação algébrica $x^2 - 2x + 2 = 0$, em que todos os coeficientes são reais e que pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2i}{2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x_1 = 1 + i \text{ e } x_2 = 1 - i$$

Observe que a raiz $1 + i$ é um número complexo não real e que a outra raiz $(1 - i)$ é seu conjugado.

Se uma equação polinomial de coeficientes reais admitir como raiz o número complexo $a + bi$, com $b \neq 0$, seu conjugado $a - bi$ também será raiz da equação.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2. Sistema Dom Bosco – Uma equação algébrica do 3º grau tem raízes –1, 1 e 2. Sabendo que o coeficiente do termo de 3º grau é 2, determine os outros coeficientes e escreva a equação.

Resolução

Se a equação é de 3º grau e o coeficiente do termo de 3º grau é 2, sua forma é $2x^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Assim:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 1 + 2 = 2 \rightarrow -\frac{b}{2} = 2 \rightarrow b = -4$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = -1 - 2 + 2 = -1 \rightarrow \frac{c}{2} = -1 \rightarrow$$
$$\rightarrow c = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (-1) \cdot 1 \cdot 2 = -2 \rightarrow -\frac{d}{2} = -2 \rightarrow d = 4$$

Logo, os outros coeficientes são $b = 4$, $c = -2$ e $d = 4$.

E a equação pedida é $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4. = 0$.

3. Sistema Dom Bosco – Resolva a equação $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$.

Resolução

Pela equação dada, temos $a_0 = 6$ e $a_4 = 1$. Então:

p é divisor de $6 \rightarrow p \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$

q é divisor de $1 \rightarrow q \in \{-1, 1\}$

Pela propriedade, as possíveis raízes racionais são:

$\frac{p}{q}\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$

Ao pesquisar, concluímos que $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ são raízes da equação. Aplicando o teorema de D'Alembert, obtemos:

–1	1	1	–7	–1	6
1	1	0	–7	6	0
	1	1	–6	0	

$p(x) = (x + 1) \cdot (x - 1)\ q(x) = 0$ e $q(x) = x^2 + x - 6$

Ao resolver a equação $x^2 + x - 6 = 0$, obtemos $x_3 = 2$ e $x_4 = 3$.

Logo, $S = \{-1, -3, 1, 2\}$.

ROTEIRO DE AULA

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Forma geral

$a_n x^n + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 =$

$= 0$ (com $a_n \neq 0$)

Decomposição em fatores de 1º grau

$p(x) = a_n (x - x^1)(x - x^2)(x - x^3)\ldots(x - x^n)$

Multiplicidade da raiz

É o número de vezes em que ela se repete na solução de uma equação algébrica.

ROTEIRO DE AULA

Relações de Girard

Para equações do 2º e do 3º grau podemos utilizar as seguintes relações:
$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ (com $a_n \neq 0$)

2º

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

3º

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$

$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros

Se o número racional $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, for raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Raízes complexas não reais de uma equação algébrica de coeficientes reais

Se o número complexo não real z = a + bi é raiz da equação algébrica de coeficientes reais, então seu conjugado $\bar{z}$ = a – bi também será.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UECE – Se a expressão algébrica $x^2 + 9$ se escreve identicamente como $a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ onde a, b e c são números reais, então o valor de $a - b + c$ é

a) 9. **b)** 10. **c)** 12. **d)** 13.

Desenvolvendo $a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$, temos:

$a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c = ax^2 + 2ab + b)x + a + b + c$

Assim, para que $x^2 + 9$ seja idêntico a $a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$, devemos ter:

$x^2 + 9 = ax^2 + (2a + b)x + a + b + c$

Logo, $a = 1$. Então:

$2a + b = 0 \to 2 \cdot 1 + b = 0 \to b = -2$

$a + b + c = 9 \to 1 + (-2) + c = 9 \to c = 10$

Portanto, $a - b + c = 1 - (-2) + 10 = 13$.

2. FGV-SP (adaptado) – Se $x^2 - x - 1$ é um dos fatores da fatoração de $mx^2 + nx^2 + 1$, com m e n inteiros, determine o valor da soma n + m.

Com base no enunciado, é possível dividir a expressão $mx^3 + nx^2 + 1$ por $x^2 - x - 1$. Aplicando o algoritmo da chave, obtemos, para o primeiro termo (mx^3):

$$\begin{array}{l|l} mx^3 + nx^2 \quad +1 & x^2 - x - 1 \\ \hline -mx^3 + mx^2 + mx & mx \\ (m+n)x^2 + mx + 1 & \end{array}$$

Continuando a divisão para $(m + n)x^2 + mx + 1$:

$$\begin{array}{l|l} mx^3 + nx^2 \quad +1 & x^2 - x - 1 \\ \hline & mx \\ -mx^3 + mx^2 + mx & \\ (m+n)x^2 + mx + 1 & \\ -(m+n)x^2 + (m+n)x + m + n & \\ \quad (2m+n)x + m + n + 1 = 0 & \end{array}$$

Para a expressão $(2m + n)x + m + n + 1 = 0$ ser identicamente nula, ambos os termos devem se anular. Assim, devemos ter: $m + n + 1 = 0$

Portanto, $m + n = -1$.

3. Fuvest-SP (adaptado) C5-H21

Um empreiteiro contratou um serviço com um grupo de trabalhadores pelo valor de R$ 10.800,00 a serem igualmente divididos entre eles. Como três desistiram do trabalho, o valor contratado foi dividido igualmente entre os demais. Assim, o empreiteiro pagou, a cada um dos trabalhadores que realizaram o serviço, R$ 600,00 além do combinado no acordo original. Assim sendo, assinale a alternativa que contém respectivamente a quantidade de trabalhadores que realizaram o serviço e quanto cada um deles recebeu.

a) 6 e R$1.800,00
b) 10 e R$1.800,00
c) 10 e R$10.800,00
d) 6 e R$10.800,00
e) 9 e R$1.800,00

I) Para um número x de trabalhadores, cada um receberia $\frac{10800}{x}$ reais.

Com a desistência de 3 deles, cada trabalhador recebeu mais $\frac{10800}{x-3}$.

Do enunciado, temos, $\frac{10800}{x} + 600 = \frac{10800}{x-3}$.

Dividindo ambos os lados por 600, temos: $\frac{18}{x} + 1 = \frac{18}{x-3} \to$

$18(x - 3) + x(x - 3) - 18x$

$x^2 - 3x - 54 = 0 \to x = 9$

Ou $x = -6$.

Como -6 não convém, inicialmente havia 9 trabalhadores. Porém, como 3 desistiram, apenas 6 realizaram o serviço.

II) Sabendo que 6 trabalhadores realizaram o trabalho, temos $\frac{10800}{6} = 1800$.

Assim, o valor total que cada trabalhador recebeu foi de R$1.800,00.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. Mackenzie-SP – Seja $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$ um polinômio do 3º grau e $2x - 1$ um de seus fatores. A média aritmética das raízes de P(x) é

a) $\frac{7}{2}$
b) $\frac{8}{2}$
c) $\frac{9}{2}$
d) $\frac{10}{2}$
e) $\frac{11}{6}$

Das relações de Girard, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-11)}{2} = \frac{11}{2}$$

Assim, a média aritmética das raízes é $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{\left(\frac{11}{2}\right)}{3} = \frac{11}{6}$.

5. Sistema Dom Bosco – Um professor de Matemática que gostava de criar situações para levar seus alunos à resolução de problemas decidiu fechar uma caixa de bombons em um baú com um cadeado que só poderia ser aberto se fossem inseridos os 3 números do segredo corretamente.

Para que os alunos descobrissem o segredo, ele disse que deveriam encontrar as raízes do polinômio $x^3 - 11x^2 + 31x - 21$ e colocá-las em ordem crescente, em que a soma de duas delas é igual a 10. Assim, o segredo do cadeado é:

a) 113
b) 15
c) 137
d) 317
e) 731

Do enunciado, temos que $x_1 + x_2 = 10$. Das relações de Girard, concluímos que:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-11}{1} = 11$$

Assim, $x_1 + x_2 + x_3 = 10 + x_3 = 11 \rightarrow x_3 = 1$.
Dessa forma, dividindo P(x) por x – 1, obtemos:
$x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = (x - 1)(x^2 - 10x + 21)$
Analisando a fatoração, $Q(x) = x^2 - 10x + 21$. Assim, aplicando novamente Girard, temos:
$x_1 + x_2 = 10$
$x_1 \cdot x_2 = 21$
Logo, as raízes são 3 e 7.
Colocando as 3 raízes em ordem crescente, concluímos que o segredo é 137.

6. FGV-SP – Sejam m e n números reais, ambos diferentes de zero. Se m e n são soluções da equação polinomial $x^2 + mx + n = 0$, na incógnita x, então m − n é igual a

a) −3
b) −2
c) 1
d) 2
e) 3

Das relações de Girard, a equação do 2º grau pode ser escrita como $x^2 + Sx + P = 0$, em que S é a soma das raízes com o sinal trocado e P é o produto das raízes.
Como **m** e **n** são soluções da equação, elas são as raízes.
Então, para $x^2 + mx + n = 0$, temos:
$m \cdot n = n$ (I)
$m + n = -m$ (II)
De (I), temos:

$$m = \frac{n}{n} \rightarrow m = 1$$

De (II), temos:
$n = -2m$ (substituindo $m = 1$)
$n = -2 \cdot 1$
$n = -2$
Assim, m − n será:
$m - n = 1 - (-2)$
$m - n = 1 + 2$
$m - n = 3$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. **UFRGS-RS** – Uma caixa com a forma de um paralelepípedo retangular tem as dimensões dadas por x, x + 4 e x − 1. Se o volume desse paralelepípedo é 12, então as medidas das dimensões da caixa são:

a) 1, 1 e 12. **c)** 1, 3 e 4. **e)** 2, 3 e 4.
b) 1, 2 e 6. **d)** 2, 2 e 3

8. **FGV-SP** – A equação algébrica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ possui coeficientes reais a, b, c e d, todos não nulos. Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes dessa equação, então

$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^{-1}$ é igual a

a) $-\frac{d}{c}$ **c)** $-\frac{d}{a}$ **e)** $-\frac{b}{a}$
b) $-\frac{c}{d}$ **d)** $-\frac{a}{b}$

9. **UNESP** – Sabe-se que 1 é uma raiz de multiplicidade 3 da equação $x^5 – 3x^4 + 4x^3 – 4x^2 + 3x – 1 = 0$. As outras raízes dessa equação, no conjunto numérico dos complexos, são

a) (–1 – i) e (1+i) **d)** (–1) e (+1)
b) $(1 – i)^2$ **e)** (1 – i) e (1+i)
c) (–i) e (+i)

10. **FGV-SP (adaptado)** – O número 1 é raiz de multiplicidade 2 da equação polinomial $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$. Qual é o produto de $a \cdot b$?

11. Unicamp-SP – Considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + x^2 - ax - 3$, onde a é um número real. Sabendo que r e −r são raízes reais de p(x), podemos afirmar que p(1) é igual a:

a) 3 **b)** 1 **c)** −2 **d)** −4

12. UFRGS-RS – Considere os polinômios $p(x)=x^3$ e $q(x)=x^2+x$. O número de soluções da equação $p(x) = g(x)$, no conjunto dos números reais, é

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

13. Sistema Dom Bosco – Dada a equação $x^3 - 3x + 2 = 0$, a multiplicidade da raiz 1 é

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

14. FGV-SP (adaptado) – Com relação ao polinômio de coeficientes reais dado por $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabe-se que $P(2i) = P(2 + i) = 0$, com $i^2 = -1$. Nessas condições, calcule $a + b + c + d$.

15. PUC-RS – Os polinômios p(x), q(x), f(x), h(x) em $\mathbb{R}$, nessa ordem, estão com seus graus em progressão geométrica. Os graus de p(x) e h(x) são, respectivamente, 16 e 2. A soma do número de raízes de q(x) com o número de raízes de f(x) é:

a) 24
b) 16
c) 12
d) 8
e) 4

16. Fuvest-SP – Considere o polinômio $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, em que $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Sabe-se que as suas n raízes estão sobre a circunferência unitária e que $a_0 < 0$.

O produto das n raízes de P(x), para qualquer inteiro $n \geqslant 1$, é:

a) -1
b) In
c) i^{n+1}
d) $(-1)^n$
e) $(-1)^{n+1}$

17. ITA-SP – Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 - b^3$ é igual a

a) -64.
b) -36.
c) -28.
d) 18.
e) 27.

ESTUDO PARA O ENEM

18. UEM-PR (adaptado) C5-H22

Durante um período de 9 anos, a taxa de predação (T) de uma determinada população biológica pôde ser representada por T = P(t) indivíduos/ano, em que $t \in [1, 9]$ representa o ano e $P(t) = t^3 - 13t^2 + 52t - 60$. Assinale a alternativa correta: A partir da análise dessa função polinomial, é possível verificar que:

a) Em t = 2, a taxa de predação desta população foi nula, sendo este o único ano em que isso aconteceu.
b) A predação é o único fator limitante que impede o crescimento de uma população.
c) O resto da divisão de P(t) por D(t) = t − 2 é diferente de zero, pois 2 é uma raiz desse polinômio.
d) O gráfico de P(t) indica que a taxa de predação desta população foi sempre crescente, no período considerado, a partir de t = 2.

e) $t = 2$ é uma raiz de multiplicidade 1, ou raiz simples, da equação polinomial $P(t) = 0$.

19. Enem C5-H21

Uma fábrica utiliza sua frota particular de caminhões para distribuir as 90 toneladas de sua produção semanal. Todos os caminhões são do mesmo modelo e, para aumentar a vida útil da frota, adota-se a política de reduzir a capacidade máxima de carga de cada caminhão em meia tonelada. Com essa medida de redução, o número de caminhões necessários para transportar a produção semanal aumenta em 6 unidades em relação ao número de caminhões necessários para transportar a produção, usando a capacidade máxima de carga de cada caminhão. Qual é o número atual de caminhões que essa fábrica usa para transportar a produção semanal, respeitando-se a política de redução de carga?

a) 36 **b)** 30 **c)** 19 **d)** 16 **e)** 10

20. Sistema Dom Bosco C5-H22

Um fabricante de paralelepípedos desenvolveu a equação $3x^3 - 15x^2 + 36x - 30 = 0$, de modo que cada raiz correspondesse a uma das medidas de comprimento, largura e altura, todas em centímetros, de um paralelepípedo retângulo. Assim sendo, um funcionário para produzir um lote deste produto, precisou encontrar o volume e área total de cada peça sendo estes, respectivamente:

a) 10 cm^3 e 5 cm^2
b) 24 cm^3 e 10 cm^2
c) 10 cm^3 e 24 cm^2
d) 12 cm^3 e 10 cm^2
e) 10 cm^3 e 12 cm^2

23 INTRODUÇÃO A MATRIZES E OPERAÇÕES COM MATRIZES

- O que são matrizes?
- Representação de uma matriz
- Matrizes especiais
- Matriz transposta
- Igualdade entre matrizes
- Adição de matrizes
- Subtração de matrizes
- Multiplicação de um número real por uma matriz
- Multiplicação de matrizes

HABILIDADES

- Reconhecer uma matriz.
- Representar de diferentes formas uma matriz, bem como em sua forma geral.
- Identificar matrizes especiais.
- Obter a matriz transposta a partir de uma matriz fornecida.
- Reconhecer as condições para que duas matrizes sejam iguais.
- Efetuar a adição e a subtração de matrizes.
- Realizar a multiplicação de um número real por uma matriz.
- Efetuar a multiplicação entre matrizes.
- Identificar aplicações relacionadas a operações entre matrizes.

MATRIZES

Para iniciarmos nossos estudos sobre o tema, vamos considerar a situação a seguir.

Em uma editora, a venda de livros de Matemática, Física e Química no primeiro trimestre de um ano pode ser expressa pela tabela a seguir:

	Janeiro	Fevereiro	Março
Matemática	20 000	18 000	45 000
Física	15 000	18 000	25 000
Química	16 000	17 000	23 000

Observe que o uso da tabela organiza os dados e resulta em mais rapidez e praticidade na obtenção de informações.

Note que uma matriz **m** × **n** (m por n) é uma tabela composta de **m** linhas e **n** colunas, a qual tem **m** · **n** elementos.

REPRESENTAÇÃO DE MATRIZES

Matrizes são representadas por letras maiúsculas do alfabeto latino. Essas são acompanhadas por sua ordem, ou seja, pela quantidade de linhas e colunas que a matriz tem.

$A_{4\times 2}$ representa uma matriz A com quatro linhas e duas colunas. Já a matriz $B_{3\times 6}$ representa uma matriz B de três linhas e seis colunas. Cada elemento de uma matriz, por sua vez, é representado pela mesma letra utilizada na representação da matriz, porém em letra minúscula. Tal representação é acompanhada de seu índice, que indica a posição da linha e da coluna que o elemento ocupa na matriz. Assim, as matrizes A e B mencionadas podem ser assim representadas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \end{pmatrix}$$

De modo geral, representamos o elemento de uma matriz como a_{ij}, localizado na i-ésima linha e na j-ésima coluna.

Com base no exemplo inicial, podemos representar os dados de venda de livros de Matemática, Física e Química no primeiro trimestre de um ano da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 20\,000 & 32\,000 & 45\,000 \\ 15\,000 & 18\,000 & 25\,000 \\ 16\,000 & 16\,000 & 23\,000 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 20\,000 & 32\,000 & 45\,000 \\ 15\,000 & 18\,000 & 25\,000 \\ 16\,000 & 16\,000 & 23\,000 \end{pmatrix}$$

utilizando colchetes — utilizando parênteses

Geralmente uma matriz A é representada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, com i, j, m, $n \in \mathbb{N}$, ou ainda:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

MATRIZES ESPECIAIS

Algumas matrizes são chamadas **especiais**, pois apresentam propriedades particulares em sua representação.

Matriz nula

É toda matriz cujos elementos são iguais a zero.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nula de ordem 4×3. Pode ser indicada por $B_{4 \times 3}$.

Matriz linha

É toda matriz de apenas uma linha.

A matriz $C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$ é uma matriz linha de ordem 1×4.

Matriz coluna

É toda matriz com apenas uma coluna.

A matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna de ordem 3×1.

Matriz quadrada

É toda matriz com a mesma quantidade de linhas e colunas.

A matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2.

Pode ser chamada ainda de matriz de ordem 2. Assim, podemos representá-la simplesmente por A_2.

Em toda matriz quadrada, os elementos cujas posições da linha e da coluna são iguais, ou seja, $i = j$, formam a **diagonal principal**. A outra diagonal, na qual os elementos satisfazem à condição $i + j = n + 1$, é chamada **diagonal secundária**.

Na matriz a seguir, indicamos a diagonal principal (ou primária) e a secundária.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 18 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 21 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária Diagonal primária

Matriz identidade

É toda matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são unitários (ou seja, iguais a 1) e em que os demais elementos são nulos (ou seja, iguais a zero). Sua representação é sempre dada por I_n, sendo n a ordem da matriz.

A matriz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 4. Pode ser representada por I_4.

Matriz transposta

A partir de uma matriz A, podemos inverter ordenadamente as linhas pelas colunas, e assim obter a **matriz transposta** de A, representada por A^T.

Observe este exemplo: com base na matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & -9 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$, obtemos sua transposta

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & -9 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}.$$

Igualdade entre matrizes

Para que duas matrizes sejam iguais, é preciso que apresentem a mesma ordem e que seus elementos de mesma posição sejam iguais. Representamos a igualdade entre as matrizes A e B por $A = B$.

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ y & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 5 & x \end{bmatrix}$.

Para que sejam iguais, é preciso que:

- $a_{11} = b_{11} \rightarrow a = 1$
- $a_{21} = b_{21} \rightarrow y = 5$
- $a_{12} = b_{12} \rightarrow b = 2$
- $a_{22} = b_{22} \rightarrow x = 7$

ADIÇÃO DE MATRIZES

Para realizarmos a adição entre duas ou mais matrizes, efetuamos essa operação com matrizes de mesma ordem. O procedimento é feito elemento a elemento correspondente. Ou seja, é necessário realizarmos a adição entre elementos de mesmo índice.

Exemplo

Vamos considerar as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Para calcular a matriz C = A + B, basta somarmos seus elementos correspondentes:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 & 2+5 \\ 0+3 & -1+2 \\ 3+1 & 4+7 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, $C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 1 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$.

MATRIZ OPOSTA

Denominamos **matriz oposta de uma matriz A**, a matriz que, somada a ela, resulta em uma matriz nula. Representamos a matriz oposta de A por –A.

Exemplo

Se $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, então $-B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Isso ocorre porque:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

Obtemos a subtração entre duas matrizes A e B, ambas de mesma ordem, por meio da soma entre a matriz A e a matriz oposta de B. Ou seja, A – B = A + + (–B).

Exemplo

Vamos considerar as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Para obter a matriz C = A – B, realizamos os seguintes cálculos:

$$C = A - B \rightarrow C = A + (-B) \rightarrow$$

$$\rightarrow C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -2 \\ -1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow C = \begin{pmatrix} 5+2 & 2-5 \\ 0-3 & -1-2 \\ 3-1 & 4-7 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO DE MATRIZES

Considerando as matrizes A, B, C e 0 (matriz nula), ambas de mesma ordem, valem as seguintes propriedades:

- A + B = B + A (comutativa).
- (A + B) + C = A + (B + C) (associativa).
- A + 0 = 0 + A = A (existência do elemento neutro).
- A + (–A) = (–A) + A = 0 (existência do elemento oposto).
- A + C = B + C ↔ A = B (cancelamento).

MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO REAL POR UMA MATRIZ

Para multiplicarmos um número real **k** por uma matriz, efetuamos a multiplicação de cada elemento da matriz por **k**.

Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & 4 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, qual o resultado da multiplicação de A por 2?

Considerando que, neste exemplo, k = 2:

$$k \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & 4 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot\frac{1}{2} & 2\cdot 5 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 4 & 2\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 10 \\ 2 & 8 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Para multiplicarmos duas matrizes A e B, o produto AB entre elas só pode ser possível se a quantidade de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

Além disso, a matriz resultante tem como ordem o número de linhas de A e o número de colunas de B.

Assim, podemos efetuar a operação da seguinte forma:

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, o produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$, na qual cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos de cada elemento da linha i de A pelo correspondente elemento da coluna j de B.

Obtemos os elementos de C da seguinte forma:

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}$

$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21}$

$\vdots$

$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22}$

$c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23}$

Portanto, é possível definirmos a multiplicação de A por B como:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Considerando as matrizes A, B e C, temos as seguintes propriedades:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (associativa).
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (distributiva).

ROTEIRO DE AULA

MATRIZES

Matrizes especiais

- matriz nula
- matriz linha
- matriz coluna
- matriz quadrada
- matriz identidade

Matriz transposta

- Inverte-se ordenadamente as linhas pelas colunas.
- Representada por A^T.

Igualdade entre matrizes

- Apresentam a mesma ordem e seus elementos de mesma posição são iguais.

ROTEIRO DE AULA

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Adição

Matrizes de mesma ordem.

$A(a_{ij})_{mxn} + B(b_{ij})_{mxn} = C(c_{ij})_{mxn}$

onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Subtração.

Matrizes de mesma ordem.

Obtida a partir da soma entre a matriz A e a oposta de B.

Multiplicação

$A(a_{ij})_{mxn} \times k = B(b_{ij})_{mxn}$

onde $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

$A_{mxn} \cdot B_{nxp} = AB_{mxp}$.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RS – Num jogo, foram sorteados 6 números para compor uma matriz $M = (m_{ij})$ de ordem 2×3. Após o sorteio, notou-se que esses números obedeceram à regra $m_{ij} = 4i - j$. Assim, a matriz M é igual a

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Do enunciado, temos que $m_{ij} = 4i - j$. Assim:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot1-1 & 4\cdot1-2 & 4\cdot1-3 \\ 4\cdot2-1 & 4\cdot2-2 & 4\cdot2-3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

2. UEG-GO – Tatiana e Tiago comunicam-se entre si por meio de um código próprio dado pela resolução do produto entre as matrizes A e B, ambas de ordem 2×2, onde cada letra do alfabeto corresponde a um número, isto é, a = 1, b = 2, c = 3, ..., z = 26. Por exemplo, se a resolução de $A \cdot B$ for igual a $\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$, logo a mensagem recebida é **amor**. Dessa forma, se a mensagem recebida por Tatiana foi **flor** e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, então qual é a matriz A?

Do enunciado, sabemos que a mensagem recebida é **flor**. Logo, por analogia com a matriz obtida para **amor**, temos:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 6 = x\cdot1 + y\cdot2 \\ 12 = x\cdot(-1) + y\cdot1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6 = x + 2y \\ 12 = -x + y \end{cases} \rightarrow 18 = 3y \rightarrow x = -6 \text{ e } y = 6$$

$$\begin{cases} 15 = z\cdot1 + w\cdot2 \\ 18 = z\cdot(-1) + w\cdot1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15 = z + 2w \\ 18 = -z + w \end{cases} \rightarrow 33 = 3w \rightarrow z = -7 \text{ e } w = 11$$

Portanto, a matriz $A = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$.

3. IFPE C6-H24

Rodrigo, Otávio e Ronaldo gostam muito de comida japonesa e saíram para comer *temaki*, também conhecido como um *sushi* enrolado à mão cujo formato lembra o de um cone. Foram então visitando vários restaurantes tanto no sábado quanto no domingo. As matrizes a seguir resumem quantos *temakis* cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$S - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } D - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

S refere-se às quantidades de *temakis* de sábado e D, às de domingo. Cada elemento a_{ij} nos dá o número de cones que a pessoa i pagou para a pessoa j, sendo Rodrigo o número 1, Otávio o número 2 e Ronaldo o número 3 ((a_{ij}) representa o elemento da linha i e da coluna j de cada matriz).

Assim, por exemplo, no sábado, Rodrigo pagou 3 *temakis* que ele próprio consumiu (a_{11}), 2 *temakis* consumidos por Otávio (a_{12}) e nenhum por Ronaldo (a_{13}), que corresponde à primeira linha da matriz S. Quantos *temakis* Otávio ficou devendo para Rodrigo neste fim de semana?

a) nenhum
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Somando as matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 2+3 & 0+0 \\ 1+0 & 1+2 & 2+1 \\ 0+1 & 3+0 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Assim, Rodrigo pagou para Otávio 5 *temakis* (a_{12}), e Otávio pagou para Rodrigo apenas 1 (a_{21}). Portanto, Otávio deve 4 *temakis* a Rodrigo.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

4. IFAL – A matriz A_{ij} (2 × 3) tem elementos definidos pela expressão $a_{ij} = i^3 - j^2$. Portanto, a matriz A é:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 26 \\ -3 & 4 & 23 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 4 \\ 26 & 23 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 4 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Do enunciado, temos $a_{ij} = i^3 - j^2$. Assim:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1^3-1^2) & (1^3-2^2) & (1^3-3^2) \\ (2^3-1^2) & (2^3-2^2) & (2^3-3^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 7 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

5. UEG-GO – Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} e^{2x^2} & 0 \\ 0 & |y+x| \end{pmatrix}$ e seja B matriz identidade de ordem 2, os valores de x e y não negativos, tal que as matrizes A e B sejam iguais, são respectivamente

a) 0 e 1

b) 1 e 1

c) 0 e $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Do enunciado, temos que $A = \begin{pmatrix} e^{2x^2} & 0 \\ 0 & |y+x| \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como A e B são iguais:

$$A = \begin{pmatrix} e^{2x^2} & 0 \\ 0 & |y+x| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $2x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ e $|y+x| = 1 \rightarrow y = \pm 1$.

Como x e y devem ser inteiros e positivos, x = 0 e y = 1.

6. Sistema Dom Bosco – Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Obtenha a matriz dada por A + B + C.

b) Qual será a matriz obtida calculando A + B – C?

a) Sabendo as matrizes A, B e C, a operação A + B + C será:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Fazendo A + B – C, temos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

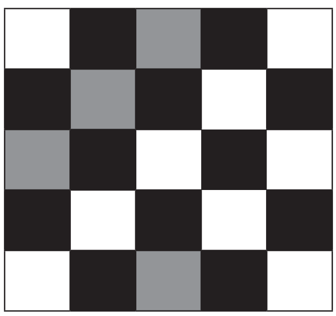
7. Fatec-SP – Leia o texto para responder à questão a seguir.

Uma tela de computador pode ser representada por uma matriz de cores, de forma que cada elemento da matriz corresponda a um *pixel*[1] na tela.

Numa tela em escala de cinza, por exemplo, podemos atribuir 256 cores diferentes para cada pixel, do preto absoluto (código da cor: 0), passando pelo cinza intermediário (código da cor: 127), ao branco absoluto (código da cor: 255)

[1]Menor elemento em uma tela ao qual é possível atribuir-se uma cor.

Suponha que na figura estejam representados 25 pixels de uma tela.



A matriz numérica correspondente às cores da figura apresentada é dada por:

$$\begin{bmatrix} 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \\ 0 & 127 & 0 & 255 & 0 \\ 127 & 0 & 255 & 0 & 127 \\ 0 & 255 & 0 & 127 & 0 \\ 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \end{bmatrix}$$

Uma matriz $M = (a_{ij})$, quadrada de ordem 5, em que i representa o número da linha e j representa o número da coluna, é definida da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 127, \text{ se } i > j \\ 255, \text{ se } i < j \end{cases}$$

A matriz M corresponde a uma matriz de cores em escala de cinza, descrita pelo texto, em uma tela.

Sobre essa matriz de cores, pode-se afirmar que ela:

a) terá o mesmo número de pixels brancos e cinza.
b) terá o mesmo número de pixels brancos e pretos.
c) terá o mesmo número de pixels pretos e cinza.
d) terá uma diagonal com cinco pixels brancos.
e) terá uma diagonal com cinco pixels cinza.

8. Cefet-MG – Cinco amigos, A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5, viajaram juntos num fim de semana e, durante a viagem, as despesas foram divididas igualmente entre eles. Entretanto, para facilitar o troco, algumas vezes um emprestava dinheiro para o outro. Considere que nas matrizes S e D, abaixo, estão registrados os valores, em reais, que cada um emprestou para o outro no sábado e no domingo, respectivamente, sendo que o elemento da linha i e da coluna j representa o que o amigo Ai emprestou ao amigo A_j nesse dia, com i e j variando de 1 a 5.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & 10 & 2 \\ 15 & 0 & 11 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 0 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 7 & 10 \\ 15 & 8 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 18 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ao final da viagem, o amigo A_4 ainda devia aos demais amigos, em reais, a quantia de

a) 10.
b) 15.
c) 31.
d) 41.
e) 72.

9. UFPR – Um criador de cães observou que as rações das marcas A, B, C e D contêm diferentes quantidades de três nutrientes, medidos em miligramas por quilograma, como indicado na primeira matriz abaixo. O criador decidiu misturar os quatro tipos de ração para proporcionar um alimento adequado para seus cães. A segunda matriz abaixo dá os percentuais de cada tipo de ração nessa mistura.

$$\begin{array}{l} \\ \text{Nutriente 1} \\ \text{Nutriente 2} \\ \text{Nutriente 3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 210 & 370 & 450 & 290 \\ 340 & 520 & 305 & 485 \\ 145 & 225 & 190 & 260 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Percentuais de mistura} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} \begin{bmatrix} 35\% \\ 25\% \\ 30\% \\ 10\% \end{bmatrix} \end{array}$$

Quantos miligramas do nutriente 2 estão presentes em um quilograma da mistura de rações?

a) 389 mg.
b) 330 mg.
c) 280 mg.
d) 210 mg.
e) 190 mg.

10. FGV-SP – Um determinado produto deve ser distribuído a partir de 3 fábricas para 4 lojas consumidoras. Seja $C = (c_{ij})_{3\times4}$ a matriz do custo unitário de transporte da fábrica i para a loja j, com $c_{ij} = (2i - 3j)^2$. Seja $B = (b_{ij})_{3\times4}$ a matriz que representa a quantidade de produtos transportados da fábrica i para a loja j, em milhares de unidades, com $b_{ij} = i + j$.

a) Determine as matrizes $C = (c_{ij})_{3\times4}$ e B^t, uma vez que B^t é a transposta da matriz $B = (b_{ij})_{3\times4}$.

b) Sendo $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times1}$ e $E = [1 \ \ 0 \ \ 0]_{1\times3}$, determine as matrizes $X = (x_{ij})_{3\times1}$ e $Y = (y_{ij})_{1\times3}$, tais que $X = B \cdot D$ e $Y = E \cdot (C \cdot B^t)$. Em seguida, determine o significado econômico de x_{ij} e de y_{ij}.

11. Mackenzie-SP – Se a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & x+y+z & 3y-z+2 \\ 4 & 5 & -5 \\ y-2z+3 & z & 0 \end{bmatrix}$$

é simétrica, o valor de x é

a) 0
b) 1
c) 6
d) 3
e) –5

12. Unicamp-SP – Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz à equação $A^2 = aA + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a

a) –2.
b) –1.
c) 1.
d) 2.

13. Unicamp-SP – Sendo a um número real, considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Então, A^{2017} é igual a

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & a^{2017} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

14. Fac. Albert Einstein-SP – Uma matriz B possui i linhas e j colunas e seus elementos são obtidos a partir da expressão $b_{ij} = i - 2j$. Seja uma matriz $A = (a_{ij})_{2\times3}$, cujos elementos da primeira coluna são nulos, e I_2 a matriz identidade de ordem 2, tal que $AB = I_2$. O valor numérico do maior elemento da matriz A é igual a:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

15. Unioeste-PR – Sendo A uma matriz quadrada e n um inteiro maior ou igual a 1, define-se A^n como a multiplicação de A por A, n vezes. No caso de A ser a matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, é correto afirmar que a soma $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{39} + A^{40}$ é igual à matriz

a) $\begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 20 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 40 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & -40 \\ -40 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 40 & -40 \\ -40 & 40 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

16. UEM-PR (adaptado) – Sobre matrizes, verifique os itens a seguir:

I. A matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, com $a_{ij} = 0$, se $i < j$, é uma matriz triangular inferior.

II. Uma matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ é chamada matriz diagonal se $a_{ij} = 0$, sempre que $i = j$.

III. Considere uma matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 5}$ Ela será a matriz identidade se $\begin{cases} a_{ij} = 1, i = j \\ a_{ij} = 1, i \neq j \end{cases}$.

IV. Ao somarmos uma matriz 3×2 com uma 2×3, teremos uma matriz 3×3.

V. Se A é uma matriz $m \times n$, então a multiplicação da matriz A por sua transposta A^t será uma matriz $n \times m$.

Os itens corretos são:

a) Apenas os itens I e II.

b) Apenas os itens II e III.

c) Apenas os itens I e V.

d) Apenas os itens II e IV.

e) Apenas os itens I, III e V.

17. Unicamp-SP (adaptado) – Em uma matriz, chamam-se elementos internos aqueles que não pertencem à primeira nem à última linha ou coluna. Sendo assim, qual é o número de elementos internos em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas?

ESTUDO PARA O ENEM

18. UEL-PR C6-H25

Atualmente, com a comunicação eletrônica, muitas atividades dependem do sigilo na troca de mensagens, principalmente as que envolvem transações financeiras. Os sistemas de envio e recepção de mensagens codificadas chamam-se Criptografia. Uma forma de codificar mensagens é trocar letras por números, como indicado na tabela-código a seguir.

	1	2	3	4	5
1	Z	Y	X	V	U
2	T	S	R	Q	P
3	O	N	M	L	K
4	J	I	H	G	F
5	E	D	C	B	A

Nessa tabela-código, uma letra é identificada pelo número formado pela linha e pela coluna, nessa ordem. Assim, o número 32 corresponde à letra N. A mensagem final M é dada por A + B = M, onde B é uma matriz fixada, que deve ser mantida em segredo, e A é uma matriz enviada ao receptor legal. Cada linha da matriz M corresponde a uma palavra da mensagem, sendo o 0 (zero) a ausência de letras ou o espaço entre palavras. José tuitava durante o horário de trabalho quando recebeu uma mensagem do seu chefe, que continha uma matriz A. De posse da matriz B e da tabela-código, ele decodificou a mensagem. O que a chefia informou a José?

Dados:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 20 & 13 & 8 & 50 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 34 & 32 & 3 & 4 & 0 \\ 45 & 26 & 13 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 45 & 16 & 20 & 11 & 17 & 0 \\ 1 & 50 & 21 & 3 & 35 & 42 & 11 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 10 & 15 & -8 & 30 & -1 \\ 14 & 31 & 19 & 19 & -3 & -4 & 0 \\ 6 & -4 & 8 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & 16 & 32 & 20 & -17 & 0 \\ 44 & -8 & 13 & 30 & 20 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

a) Sorria, você está sendo advertido.
b) Sorria, você está sendo filmado.
c) Sorria, você está sendo gravado.
d) Sorria, você está sendo improdutivo.
e) Sorria, você está sendo observado.

19. FGV-SP C1-H2

Os marcos A, B, C e D de uma cidade estão conectados por pistas de rodagem, conforme mostra a malha viária indicada no diagrama da figura 1. A figura 2 indica uma matriz que representa as quantidades de caminhos possíveis de deslocamento entre os marcos (dois a dois). Considera-se um caminho entre dois marcos qualquer percurso que não viole o sentido da pista, que não passe novamente pelo marco de onde partiu e que termine quando se atinge o marco de destino final pela primeira vez. As flechas da figura 1 indicam o sentido das pistas de rodagem.

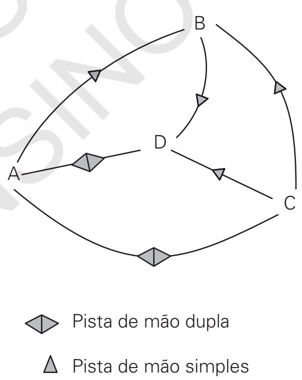


Figura 1

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 2

Durante período de obras na malha viária descrita, a pista de rodagem entre os marcos A e D passou a ser de mão simples (sentido de A para D), e a pista do marco C para o marco D, ainda que tenha permanecido com mão simples, teve seu sentido invertido, passando a ser de D para C. Comparando os 16 elementos da matriz da figura 2 com seus correspondentes na matriz da nova configuração de malha viária, a quantidade de elementos que mudarão de valor é igual a

a) 5. **b)** 6. **c)** 7. **d)** 8. **e)** 9.

20. Enem C6-H25

Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4 × 4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

24 MATRIZ INVERSA, EQUAÇÃO MATRICIAL E DETERMINANTES

- Matriz inversa
- Equação matricial
- O que são determinantes?
- Determinante de matriz de ordem 1
- Determinante de matriz de ordem 2

HABILIDADES

- Calcular a matriz inversa com base em uma matriz dada.
- Resolver equações matriciais.
- Identificar aplicações relacionadas a operações entre matrizes.
- Identificar e reconhecer determinantes.
- Calcular determinantes de matrizes de ordem 1 e 2

MATRIZ INVERSA

Uma matriz quadrada **B** de ordem n é a inversa da matriz quadrada **A**, também de ordem n, se satisfizer à seguinte condição:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Representamos a matriz inversa de A como A^{-1}.

Vamos considerar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Podemos obter a inversa de A calculando:

$$A \cdot (A^{-1}) = I_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade entre matrizes, chegamos aos seguintes sistemas:

$$\begin{cases} a+3c=1 \\ 2a+c=0 \end{cases} \rightarrow a = -\frac{1}{5} \text{ e } c = \frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} b+3d=0 \\ 2b+d=1 \end{cases} \rightarrow b = \frac{3}{5} \text{ e } d = -\frac{1}{5}$$

Ou seja, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

PROPRIEDADES

Vamos considerar as matrizes quadradas A e B, de ordem n e invertíveis. Então, são válidas as seguintes propriedades:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^{t} = (A^{t})^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Dada uma matriz A, se A^{-1} existir, então A^{-1} é única.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1. Sistema Dom Bosco – Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule sua inversa.

Resolução

$$A \cdot (A^{-1}) = I \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade entre matrizes, obtemos:

$$\begin{cases} 2a+3c=1 \\ a+2c=0 \end{cases} \rightarrow a = 2 \text{ e } c = -1$$

$$\begin{cases} 2b+3d=0 \\ b+2d=1 \end{cases} \rightarrow b = -3 \text{ e } d = 2$$

Ou seja, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

EQUAÇÕES MATRICIAIS

Uma vez definidas as operações entre matrizes, conseguimos resolver equações em que as incógnitas são matrizes. Essas equações são chamadas **matriciais**.

Para solucionar uma equação matricial, aplicamos nossos conhecimentos envolvendo as equações.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

2. Sistema Dom Bosco – Se $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$, resolva a equação matricial 2X + A = 3B.

Resolução

Manipulando a equação, obtemos:

$$2X + A = 3B \rightarrow 2X = 3B - A \rightarrow X = \frac{1}{2}(3B - A)$$

Obtendo a matriz 3B – A, temos:

$$3B - A = 3\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 12 \\ -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Por fim, determinamos X:

$$X = \frac{1}{2}(3B - A) \rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 18 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Logo, a solução para a equação matricial é $X = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

DETERMINANTES

É possível associar a qualquer matriz quadrada um número chamado **determinante da matriz**, obtido por meio de operações que envolvem todos os seus elementos.

Determinante de matriz de ordem 1

Uma matriz quadrada de ordem 1 apresenta apenas um elemento. Dessa forma, o valor de seu determinante é o próprio valor desse elemento.

Determinante de matriz de ordem 2

Para obtermos o valor do determinante de uma matriz quadrada de ordem 2, precisamos calcular a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e dos da diagonal secundária.

De modo geral, a partir da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, obtemos seu determinante realizando o seguinte cálculo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, obtenha det A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 4 \cdot (-5) = 3 + 20 = 23$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3. Sistema Dom Bosco – Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule seu determinante.

Resolução

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1$$

$$\det A = 4 - 3 = 1$$

ROTEIRO DE AULA

MATRIZES

Matriz inversa

$A \cdot B = B \cdot A =$ ___ I_n ___ .

Dada uma matriz A, representamos sua ___ inversa ___ como A^{-1}.

Equações matriciais

Equações em que as ___ incógnitas ___ são ___ matrizes ___ .

Para resolver as equações matriciais utilizamos as ___ operações entre matrizes ___ .

DETERMINANTES

Determinantes de ordem 1

Apresenta ___ apenas um ___ elemento.

Determinantes de ordem 2

$\det A = a_{11} \cdot$ ___ $a_{22} - a_{12}$ ___ $\cdot\, a_{21}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Mackenzie-SP – Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e os inteiros x e y são tais que $A^2 +$

$+ x \cdot A + y \cdot B = C$, então

a) $x = 0$
b) $x = 1$
c) $x = -2$
d) $x = -1$
e) $x = 2$

Do enunciado, sabemos que $A^2 + x \cdot A + y \cdot B = C$. Assim:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então:

$A^2 + x \cdot A + y \cdot B = C \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & x & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1+x+y & 2+x & 0 \\ 0 & 1+x+y & 0 \\ 0 & 0 & 1+x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim:

$1 + x + y = 0$

$2 + x = 0 \rightarrow x = -2$

2. IFAL – O valor do determinante abaixo:

$\begin{vmatrix} \cos x & -\text{sen } x \\ \text{sen } x & \cos x \end{vmatrix}$ é:

a) 1
b) $\cos 2x$
c) $\text{sen } 2x$
d) $\text{tg } 2x$
e) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Para o calcular o determinante de $\begin{vmatrix} \cos x & -\text{sen } x \\ \text{sen } x & \cos x \end{vmatrix}$, temos:

$\det = \cos x \cdot \cos x - (-\text{sen } x) \cdot \text{sen } x = \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$.

3. Sistema Dom Bosco C6-H26

Alan e Mario fizeram uma viagem de 4 dias ao Nordeste. Eles combinaram que todos os gastos seriam divididos para que eles pudessem gastar a mesma quantia ao final da viagem. No total eles fizeram 4 passeios. Quando o Alan pagava o passeio, Mario pagava as refeições e vice-versa.

Considere as matrizes:

$A = \begin{pmatrix} 60 & 150 \\ 3 & 20 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 200 & 120 \end{pmatrix}$

Sabendo que os determinantes representam os gastos finais de Alan e Mario, respectivamente, assinale o que for **correto**.

a) Mario terá de pagar R$ 300,00 para Alan.
b) Alan terá de pagar R$ 625,00 para Mario.
c) Mario e Alan gastaram igualmente.
d) Mario terá de devolver 30 reais para Alan.
e) Alan terá de devolver 50 reais para Mario.

Pelo enunciado, sabemos que:

$\det A = \begin{vmatrix} 60 & 150 \\ 3 & 20 \end{vmatrix} = 1\,200 - 450 = 750 =$ gasto de Alan

$\det M = \begin{vmatrix} 100 & 50 \\ 200 & 120 \end{vmatrix} = 12\,000 - 10\,000 = 2\,000 =$ gasto de Mario

Somando os valores gastos e dividindo o total por 2, temos o valor que cada um gastou:

$2\,000 + 750 = 2\,750$

$\frac{2750}{2} =$ R$ 1.375,00

Diminuindo o valor que Alan já pagou do total a ser pago individualmente por eles, sabemos quanto ele ainda deve a Mario:

$1\,375 - 750 = 625$

Logo, Mario gastou mais que Alan e deverá receber R$ 625,00 de volta.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

4. Unicamp-SP – Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, onde a e b são números reais. Se $A^2 = A$ e A é invertível, então

a) a = 1 e b = 1.
b) a = 1 e b = 0.
c) a = 0 e b = 0.
d) a = 0 e b = 1.

$A^2 = A \to A \cdot A = A$

Sabendo que $A \cdot I_2 = A$ e $A \cdot A^{-1} = I_2$, com I_2 sendo a matriz identidade de segunda ordem, temos:

$A^2 = A \to A \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} \to A \cdot I_2 = I_2 \to A = I_2$

Logo, a = 1 e b = 0.

5. FGV-SP – Dada a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ e sabendo que a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ é a matriz inversa da matriz A, podemos concluir que a matriz X, que satisfaz à equação matricial AX = B, tem como soma de seus elementos o número

a) 14
b) 13
c) 15
d) 12
e) 16

$AX = B \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \to (I) \cdot X = A^{-1} \cdot B$

Assim, $X = A^{-1} \cdot B$. Logo:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4) \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Portanto, a soma dos elementos de X será 10 + 3 = 13.

6. Sistema Dom Bosco – Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, quais devem ser os possíveis valores reais de n para que det (A – nB) seja 0?

Temos que $A - nB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - n \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4n & 2n \\ 3n & -n \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2-4n & 1-2n \\ 3-3n & 4+n \end{pmatrix}$

Como det (A – nB) = 0:

$(2 - 4n) \cdot (4 + n) - (3 - 3n) \cdot (1 - 2n) = 0$

$10n^2 - 5n + 5 = 0 \to 2n^2 + n - 1 = 0$

Logo, $n = -1$ ou $n = \frac{1}{2}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. FGV-SP – Sabendo que a inversa de uma matriz A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ e que a matriz X é solução da equação matricial $X \cdot A = B$, em que B = [8 3], podemos afirmar que a soma dos elementos da matriz X é

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4) \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Portanto, a soma dos elementos de X será 10 + 3 = 13.

8. Espcex-SP – Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y+4 \\ y & 3 \end{bmatrix}$.

Se x e y são valores para os quais B é a transposta da inversa da matriz A, então o valor de x + y é

a) –1
b) –2
c) –3
d) –4
e) –5

9. PUC-RS – Se o determinante $\Delta = \begin{vmatrix} x & 4 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix}$ e $A = \{x \in \mathbb{R};\ \Delta = 0\}$, o número de elementos do conjunto A é igual a

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

10. Sistema Dom Bosco – Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, qual é o determinante da matriz inversa de $M = A \cdot B^t$?

11. UECE – Se x é um ângulo tal que $\cos x = \frac{1}{4}$, então o valor do determinante $\begin{vmatrix} \text{sen } 2x & 2\cos^2 x \\ -\cos x & \text{sen } x \end{vmatrix}$ é

a) 1 **b)** 2 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $-\frac{1}{4}$

12. Fuvest-SP – Sejam α e β números reais com $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \beta < \pi$. Se o sistema de equações, dado em notação matricial, $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{tg } \alpha \\ \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$, for satisfeito, então $\alpha + \beta$ é igual a

a) $-\frac{\pi}{3}$
b) $-\frac{\pi}{6}$
c) 0
d) $\frac{\pi}{6}$
e) $\frac{\pi}{3}$

13. Insper-SP – Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}$. Se x e y são as soluções não nulas da equação $A \cdot Y + B \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, então $x \cdot y$ é igual a

a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

14. Epcar-MG – Seja A a matriz $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Sabe-se que $A_n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ vezes}}$

Então, o determinante da matriz $S = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{11}$ é igual a

a) 1 **b)** −31 **c)** −875 **d)** −11

15. IFSul-RS – Seja a matriz $A_{2\times2}$, onde $a_{i\times j} = \begin{cases} 2^i, \text{ se } i \leq j \\ j^i, \text{ se } i > j \end{cases}$ é a matriz identidade. Sabendo que A^t é a matriz transposta de A, qual é o determinante de $(A^t + B)$?

a) 11 **b)** −11 **c)** 9 **d)** −9

16. UNESP – Considere a equação matricial A + BX = X + + 2C, cuja incógnita é a matriz X, e todas as matrizes são quadradas de ordem n. A condição necessária e suficiente para que essa equação tenha solução única é que:

a) B – I ≠ O, onde I é a matriz identidade de ordem n e O é a matriz nula de ordem n.

b) B seja invertível.

c) B ≠ O, onde O é a matriz nula de ordem n.

d) B – I seja invertível, onde I é a matriz identidade de ordem n.

e) A e C sejam invertíveis.

17. Unicamp-SP – Considere a matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix}$, que depende do parâmetro real $\alpha > 0$.

a) Calcule a matriz $(A_\alpha + A_{2\alpha})^2$.

b) Um ponto no plano cartesiano com as coordenadas $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é transformado pela matriz A_α em um novo ponto da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ -\frac{1}{\alpha}x - y \end{bmatrix}.$$

Calcule o valor de α, sabendo que o sistema $A_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ admite solução.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Insper-SP (adaptado) C6-H25

A tabela a seguir será usada para a transmissão de mensagens criptografadas em matrizes. A criptografia é feita ao se multiplicar a matriz C pela matriz-mensagem M, gerando a matriz criptografada MC = C · M.

0		7	**G**	14	**N**	21	**U**
1	**A**	8	**H**	15	**O**	22	**V**
2	**B**	9	**I**	16	**P**	23	**W**
3	**C**	10	**J**	17	**Q**	24	**X**
4	**D**	11	**K**	18	**R**	25	**Y**
5	**E**	12	**L**	19	**S**	26	**Z**
6	**F**	13	**M**	20	**T**	27	**?**

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Por exemplo, a matriz-mensagem

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 19 & 20 & 15 & 21 & 0 \\ 14 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 14 & 19 & 16 & 5 & 18 \end{bmatrix}$$, que significa ESTOU NO

INSPER, depois de criptografada por C, vira a matriz

$$M_C = \begin{bmatrix} 33 & 67 & 59 & 46 & 5 & 18 \\ 28 & 48 & 39 & 31 & 5 & 18 \\ 70 & 111 & 78 & 62 & 10 & 36 \end{bmatrix}.$$

Ao receber MC, o destinatário deve multiplicá-la pela matriz decodificadora D, da mesma ordem da matriz C, para recuperar a mensagem original.

Modificando-se ligeiramente a matriz C, o envio da mensagem EU ESTUDEI NO INSPER torna-se possível no sistema descrito. Uma matriz C que funcione para a transmissão dessa mensagem deve ser, necessariamente,

a) quadrada com determinante negativo.
b) quadrada e igual à sua transposta.
c) de ordem 4 × 4 e inversível.
d) de ordem 4 × 7 e inversível.
e) de ordem 7 × 7 e inversível.

19. Sistema Dom Bosco C1-H3

Em um bairro, foi realizada uma pesquisa com cerca de 300 crianças entre 5 e 10 anos de idade com o intuito de se obter o peso médio para cada faixa etária.

Sabendo que o peso médio dado por p(x), em quilos, é uma função da idade da criança (x) e que p(x) = det A,

em que $A = \begin{pmatrix} 3 & -x \\ 4 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, podemos concluir que o peso

médio de uma criança de 7 anos é, em kg, igual a:

a) 18
b) 19
c) 20
d) 22
e) 26

20. UFAM C6-H26

Para criptografar uma palavra de quatro letras um aluno de Matemática a representou como uma matriz 4 × 1 substituindo cada letra da palavra por números conforme o quadro a seguir.

A→1	B→2	C→3	Ç→4	D→5	E→6
F→7	G→8	H→9	I→10	J→11	K→12
L→13	M→14	N→15	O→16	P→17	Q→18
R→19	S→20	T→21	U→22	V→23	W→24
X→25	Y→26	Z→27	Ã→28	Õ→29	É→30

Em seguida multiplicou essa matriz pela matriz

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, obtendo como resultado a matriz

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Para descriptografar a palavra deve-se fazer o

produto da matriz B pela matriz inversa de A. Então a palavra originalmente era:

a) UFAM
b) MAÇÃ
c) HEXA
d) TUDO
e) AMOR

25 DETERMINANTE DE MATRIZ DE ORDEM N E PROPRIEDADES DO DETERMINTANTE

- Determinante de matriz de ordem maior ou igual a 3
- Regra de Sarrus
- Matriz reduzida
- Cofator
- Teorema de Laplace
- Propriedades do determinante
- Teorema de Binet
- Teorema de Jacobi

HABILIDADES

- Calcular determinante de matriz de ordem maior ou igual a 3.
- Reconhecer a Regra de Sarrus.
- Operar cofator.
- Aplicar o teorema de Laplace.
- Identificar e aplicar as diversas propriedades do determinante.
- Reconhecer o teorema de Binet.
- Aplicar o teorema de Jacobi.

DETERMINANTE DE MATRIZ DE ORDEM N

Existem dois métodos para calcular determinantes de matrizes com ordem maior ou igual a 3. O primeiro é a **regra de Sarrus**. Embora seja um método mais prático, aconselha-se utilizar matrizes de ordens próximas a 3.

O segundo é o **teorema de Laplace**, o qual, mesmo sendo um método mais complexo, pode ser utilizado para matrizes de qualquer ordem.

Regra de Sarrus

Apresentaremos essa regra com base em um exemplo prático. Tomando a matriz A de ordem 3, adotaremos os seguintes passos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Copiamos a matriz ao lado, até a penúltima coluna.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

2. Multiplicamos os elementos da diagonal principal e repetimos o procedimento para suas paralelas à direita.

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

$3 \cdot 6 \cdot 0 = 0$
$2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$
$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$

3. Multiplicamos os elementos da diagonal secundária e repetimos o procedimento para suas paralelas à direita.

$1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$
$0 \cdot 1 \cdot 3 = 0$
$4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

4. Subtraímos as somas dos produtos obtidos nos passos 2 e 3, nessa ordem. Assim:

$\det A = (0 + 2 + 60) - (15 + 0 + 48)$
$\det A = 62 - 63 = -1$

MATRIZ REDUZIDA

Dada uma matriz quadrada A, obtemos a matriz reduzida A_{ij} eliminando a linha **i** e a coluna **j** de A.

Vamos considerar a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtemos a matriz reduzida A_{13} eliminando a primeira linha e a terceira coluna. Ou seja:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_{13} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

COFATOR

Dada uma matriz quadrada A de ordem $n \geqslant 2$, chamamos **cofator** de um elemento a_{ij} de A o número real $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$, sendo A_{ij} a matriz reduzida obtida de A ao se eliminar a linha **i** e a coluna **j**.

Observe como calculamos o cofator do elemento a_{23} da matriz A, utilizada anteriormente:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot |A_{23}| \rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow C_{23} = (-1) \cdot [(-1) \cdot 5 - (2 \cdot 2)] \rightarrow C_{23} = = (-1) \cdot (-5 - 4) \rightarrow C_{23} = 9$$

Portanto, o cofator do elemento a_{23} da matriz A é 9.

TEOREMA DE LAPLACE

O determinante de uma matriz A, de ordem $n \geqslant 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Dessa forma:

$\det A = a_{13} \cdot C_{13} + a_{23} \cdot C_{23} + a_{33} \cdot C_{33}$

$$\det A = 7 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$$

$\det A = 7 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 0 \rightarrow \det A = 207$

Observação: se tivéssemos escolhido outra fila, o resultado seria o mesmo.

PROPRIEDADES DO DETERMINANTE

Propriedade 1

Se os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz forem nulos, seu determinante será nulo.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det A = 0 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 \cdot 7 - (8 \cdot 4 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 0 \cdot 3) = 0$

Propriedade 2

Se duas filas paralelas de uma matriz são iguais ou proporcionais, seu determinante será nulo.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det A = 1 \cdot 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 5 - (1 \cdot 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 5) = 0$

Propriedade 3

O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = 2 - 15 = -13$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det A^T = 1 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 2 - 15 = -13$$

Propriedade 4

Se todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada forem multiplicados por um número real **k**, o determinante da matriz será multiplicado por **k**.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = 2 - 12 = -10$$

Ao multiplicarmos a segunda coluna de A por 3, temos que $B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $\det B = 2 \cdot 3 - 9 \cdot 4 = = 6 - 36 = -30$.

Logo, $\det B = 3 \cdot \det A$.

Propriedade 5

Se a posição de duas filas (linhas ou colunas) de uma matriz quadrada for trocada, o determinante da matriz resultante será o oposto da matriz original.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 12 - 5 = 7$$

Ao invertermos as linhas da matriz A, obtemos a matriz B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \det B = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 5 - 12 = -7$$

Logo, det B = – det A.

TEOREMA DE BINET

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então det (A · B) = det A · det B.

Consequência do teorema de Binet

O determinante da matriz inversa de **A** é igual ao inverso do determinante da matriz **A**.

$$\det (A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

TEOREMA DE JACOBI

Dada uma matriz A quadrada, se multiplicarmos todos os elementos de uma fila de A por um mesmo número não nulo e somarmos os resultados dos elementos aos correspondentes de outra fila, temos uma matriz B cujo det A = det B.

Regra de Chió

Trata-se de uma aplicação direta do teorema de Jacobi que possibilita simplificar o cálculo do determinante baixando a ordem deste.

Para aplicar a regra de Chió, a matriz deve ser quadrada e de ordem maior ou igual a 2, com $a_{ij} = 1$. Além disso, é necessário seguir estas etapas:

1. Escolher um elemento $a_{ij} = 1$. Caso ele não exista, aplicar as propriedades dos determinantes para surgir o elemento 1.
2. Eliminar a matriz dada à linha i e à coluna j do elemento $a_{ij} = 1$ escolhido.
3. Subtrair de cada elemento restante o produto dos elementos que foram eliminados e que se encontram em sua linha e sua coluna, obtendo uma nova matriz de ordem (n – 1).
4. Multiplicar o determinante obtido na etapa 3 por $(-1)^{i1j}$, em que i e j se referem, respectivamente, à linha e à coluna às quais pertence o elemento $a_{ij} = 1$. Portanto, $\det A = (-1)^{i+j} \cdot \det B$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Sistema Dom Bosco – Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução

Utilizando a regra de Chió com base no elemento $a_{24} = 1$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo, } B = \begin{bmatrix} 2-(1\cdot 0) & 3-(4\cdot 0) & -1-(2\cdot 0) \\ 3-(1\cdot 0) & 2-(4\cdot 0) & 2-(2\cdot 0) \\ -1-(1\cdot 2) & 2-(4\cdot 2) & 3-(2\cdot 2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\det A = (-1)^{214} \cdot \det B = 1$.

Portanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 18 + 18 - 6 + 9 + 24 = 23$$

Dica:

Para tornar ainda mais fácil a aplicação da regra de Chió, utilize o elemento igual a 1 na linha ou na coluna que tiver maior quantidade de zeros.

ROTEIRO DE AULA

DETERMINANTES DE ORDEM MAIOR OU IGUAL A N

Regra de Sarrus

Método para calcular o determinante de matrizes de ordens próximas a 3.

Teorema de Laplace

Método para calcular determinantes de matrizes de ordem maior ou igual a 2.

É dado pela soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos respectivos cofatores.

ROTEIRO DE AULA

DETERMINANTES

Propriedades

Propriedade 1

Se os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz forem nulos, seu determinante será nulo.

Propriedade 2

Se duas filas paralelas de uma matriz são iguais ou proporcionais, seu determinante será nulo.

Propriedade 3

O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

Propriedade 4

Se todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada forem multiplicados por um número real k, o determinante da matriz ficará multiplicado por k.

Propriedade 5

Trocando-se a posição de duas filas (linhas ou colunas) de uma matriz quadrada, o determinante da matriz resultante será o oposto da matriz original.

Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem, então det (A · B) = det A · det B.

Teorema de Jacobi

Dada uma matriz A de qualquer ordem, se adicionarmos uma fila de A a uma fila paralela, previamente multiplicada por uma constante real, teremos uma matriz B cujos determinantes serão iguais.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IME-RJ – Seja Δ o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$. O número de possíveis valores de x reais que anulam Δ é

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Calculando o determinante, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = (x^2 + 2x^4 + 3x^2) - (3x^3 + x^4 + 2x) = x^4 - 3x^3 +$$

$+ 4x^2 - 2x =$
$= x \cdot (x^3 - 3x^2 + 4x - 2) =$
$= x \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 2).$
Para que Δ seja nulo, $x(x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 2) = 0$.
Como $x^2 - 2x + 2$ não tem raízes reais, apenas $x = 0$ e $x = 1$ anulam Δ.
Logo, há 2 possíveis valores reais de x.

2. UERN (adaptado) – Considere a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \log_2 8 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & \log_2 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Pela regra de Sarrus, qual é o determinante dessa matriz?

Reescrevendo a matriz A, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \log_2 8 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & \log_2 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, o determinante de A será é:

det A = (– 4 + 12 + 6) – (–18 + 16 + 1)
det A = – 4 + 12 + 6 + 18 – 16 – 1
det A = 15

3. Sistema Dom Bosco C6-H25

Uma vaga de estágio foi anunciada e dezesseis candidatos foram convocados para uma entrevista. Na sala de espera, os candidatos foram distribuídos como na representação abaixo.

$$\begin{bmatrix} \text{Alberto} & \text{Bruno} & \text{André} & \text{Geraldo} \\ \text{Carlos} & \text{Denise} & \text{Márcia} & \text{Deise} \\ \text{Daniele} & \text{Daniel} & \text{Barone} & \text{Carla} \\ \text{Álvaro} & \text{Benedito} & \text{Estela} & \text{Antônio} \end{bmatrix}$$

Na tabela, se a letra inicial de cada um dos nomes dos candidatos for substituída pelo número que representa a posição ocupada em nosso alfabeto, então obtemos uma matriz, cujo determinante é

a) –192
b) –119
c) 0
d) 119
e) 192

Fazendo a substituição indicada, obtemos a matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 13 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Chió e calculando o determinante, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 13 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 10 & -17 \\ -4 & -2 & -25 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -192$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

4. PUC-RS – Dadas as matrizes $A = [1 \ \ 2 \ \ 3]$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, qual é o det (A B)?

a) 18
b) 21
c) 32
d) 126
e) 720

$A \cdot B = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$
Logo, det $(A \cdot B) = 32$.

5. Mackenzie-SP – O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \log_3 3 & \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \\ 1 & \log_3 27 & \log_{\frac{1}{3}} 27 \\ 0 & \log_3 81 & \log_3 243 \end{vmatrix} \text{ é}$$

a) 0 **b)** 1 **c)** –1 **d)** 3 **e)** $\frac{1}{3}$

Calculando $\begin{vmatrix} 0 & \log_3 3 & \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \\ 1 & \log_3 27 & \log_{\frac{1}{3}} 27 \\ 0 & \log_3 81 & \log_3 243 \end{vmatrix}$, temos:

$$\begin{vmatrix} 0 & \log_3 3 & \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \\ 1 & \log_3 27 & \log_{\frac{1}{3}} 27 \\ 0 & \log_3 81 & \log_3 243 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Pela regra de Sarrus:

$(0 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 4) - (0 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) \cdot 0 + 5 \cdot 1 \cdot 1) =$

$= 4 - 5 = -1.$

6. IFCE – Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 2 & \operatorname{sen}\theta \\ 3 & 1 & 3 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Sabendo-se que sen θ = –cos θ, em que $0 \le \theta \le 2\pi$, o determinante da matriz inversa de A, indicado por $\det A^{-1}$, vale:

a) –1
b) 0
c) 1
d) 2
e) –5

Calculando det A, temos que $\det A = \cos^2\theta - 6 \cdot \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta - 6\cos\theta$.

Como $\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$, $\det A = 1$.

Portanto, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = 1$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. FGV-SP – Sejam $M_{3\times3}$ e $N_{4\times4}$ as matrizes quadradas indicadas a seguir, com a, b, c, d, e, f, g, h, i, j sendo números reais.

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2i & 2c \\ 0 & 0 & 2j & 0 \\ 2d & 2e & 2a & 2f \\ 2g & 2h & 2c & 2i \end{bmatrix}$$

Se o determinante de M é o número real representado por k, então o determinante de N será igual a

a) –16jk.
b) 16jk.
c) –2jk.
d) 2jk.
e) 0.

8. ITA-SP – Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz à igualdade $\det(2M) - \det\left(\sqrt[3]{2M^3}\right) = \frac{2}{9}\det(3M)$.

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{5}{4}$

9. Insper-SP – Matrizes de Vandermonde são matrizes quadradas em que os elementos ao longo de cada linha formam progressões geométricas de primeiro termo igual a 1, não necessariamente com a mesma razão para cada linha. Por exemplo, a matriz B a seguir, de ordem 4, é de Vandermonde:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Seja V uma matriz de Vandermonde de ordem 3 em que a PG formada com os elementos da 1ª linha tem razão 2, a PG formada com os elementos da 2ª linha tem razão 3 e a PG formada com os elementos da 3ª linha tem razão –2.

O determinante da matriz V é igual a

a) –16.
b) 0.
c) 16.
d) 20.
e) 36.

10. ESPM-SP (adaptado) – Se a matriz $\begin{bmatrix} 3 & x \\ 4 & x+1 \end{bmatrix}$ for multiplicada pelo valor do seu determinante, este ficará multiplicado por 49. Quais os possíveis valores de x?

11. UEPB – Se x e y são números reais não nulos e $\begin{vmatrix} x & y & x^2+y^2 \\ x & 0 & x^2 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0$, então o valor de 2x + 3y é:

a) 10
b) 4
c) 7
d) –5
e) 5

12. Espcex-SP – Considere a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} a & a^3-b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se a e b são números reais não nulos e det (M) = 0, então o valor de $14a^2 - 21b^2$ é igual a:

a) 15
b) 28
c) 35
d) 49
e) 70

13. Mackenzie-SP – Para a matriz quadrada $M = \begin{bmatrix} \cos 17° & 0 & \text{sen}\,17° \\ 1 & 1 & 1 \\ \text{sen}\,28° & 0 & \cos 28° \end{bmatrix}$ o valor do determinante M^{10} é

a) $\frac{1}{16}$
b) $\frac{1}{32}$
c) $\frac{1}{64}$
d) $\frac{1}{128}$
e) $\frac{1}{256}$

14. ITA-SP (adaptado) – Se $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então $MN^T - M^{-1}N$ é igual a?

15. UEPG-PR (adaptado) – Sobre a matriz $A = \begin{pmatrix} \cos 15° & -\text{sen}\,15° \\ \text{sen}\,15° & \cos 15° \end{pmatrix}$, assinale o que for correto.

I. $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\text{sen}\,30° \\ \text{sen}\,30° & \cos 30° \end{pmatrix}$

II. $\det A = 1$.

III. $A + A^t = \begin{pmatrix} \cos 30° & 0 \\ 2 & \cos 30° \end{pmatrix}$

IV. $\det (2A) = -\frac{1}{2}$

V. $\det A^2 = 0$

a) Apenas I e II estão corretas.
b) Apenas I e III estão corretas.
c) Apenas II e IV estão corretas.
d) Apenas I, II e V estão corretas.
e) Apenas II, III, IV e V estão corretas.

16. UEM-PR (adaptado) – Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

De acordo com conhecimentos sobre matrizes e determinantes, é correto afirmar que

I. $\det (M \cdot N) = \det (N \cdot M)$, em que N e M são matrizes quadradas de mesma ordem.
II. $\det M^t = -\det M$, em que M é matriz quadrada de ordem ímpar.
III. $\det (C) = 4$.
IV. A matriz $A \cdot B$ tem três linhas e três colunas.
V. $\det (A \cdot B) = 96$.

a) I e II apenas.
b) II e V apenas.
c) I e IV apenas.
d) III e IV apenas.
e) I e V apenas.

17. ITA-SP (adaptado) – Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ satisfaz à propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$ a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, qual é o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7+2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$?

ESTUDO PARA O ENEM

18. UnB-DF (adaptado) C6-H25

Na confecção de ursos, coelhos e elefantes de pelúcia, uma indústria utiliza três tipos de materiais: tecidos, espuma e plástico. A quantidade de material usado na fabricação de cada um desses brinquedos está indicada na tabela abaixo.

Tipo de material utilizado (em gramas)			
Brinquedo	**Plástico**	**Tecido**	**Espuma**
Urso	200	300	500
Coelho	300	200	400
Elefante	p	500	200

Nessa indústria, um funcionário, para produzir x ursos, y coelhos e z elefantes de pelúcia em um dia de trabalho, utiliza 1,8 kg de plástico; 2,3 kg de tecido; e 2,7 kg de espuma.

Com base nas informações apresentadas, pode-se obter a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & \mathbf{p} \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Sabendo que o determinante é igual a 50, qual a quantidade de plástico utilizada pelo funcionário na confecção do elefante?

a) 25 kg
b) 2,5 kg
c) 50 kg
d) 7,5 kg
e) 1,5 kg

19. Unicamp-SP (adaptado) C6-H25

Cansado das perguntas em sala de aula sobre quanto valeria a prova, um professor decide passar um exercício teste para os alunos adivinharem quanto será a pontuação da prova.

Sabendo que a e b são números reais, considere a matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a soma dos elementos em cada linha da matriz A tem sempre o mesmo valor, então o determinante de A é igual a

a) 1.
b) 4.
c) 5.
d) 10.
e) 100.

20. Famerp-SP C1-H3

No estudo da dinâmica de populações é comum ser necessário determinar o número real λ na equação $\det(M - \lambda I) = 0$, em que M é uma matriz quadrada, I é a matriz identidade, da mesma ordem de M, e det representa o determinante da matriz $(M - \lambda I)$.

Se, em um desses estudos, tem-se $M = \begin{bmatrix} 0 & 17 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, o valor positivo de λ é igual a

a) 5.
b) 8.
c) 9.
d) 12.
e) 6.

26

INTRODUÇÃO A SISTEMAS LINEARES, MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO E MÉTODO DA IGUALDADE

- Equações lineares
- Sistemas lineares
- Sistemas equivalentes
- Classificação de sistemas
- Resolução: método da substituição
- Resolução: método da igualdade

HABILIDADES

- Reconhecer um sistema linear.
- Identificar sistemas lineares equivalentes.
- Classificar sistemas lineares.
- Solucionar um sistema linear pelo método da substituição.
- Solucionar um sistema linear pelo método da igualdade.

EQUAÇÕES LINEARES

Equações do 1º grau que apresentam duas ou mais incógnitas são chamadas **equações lineares**.

Existem infinitas soluções para as equações lineares. Por exemplo, a solução de uma equação linear com duas incógnitas é todo par de valores que a verifica, ou seja, que a torna verdadeira.

Vamos calcular os valores de **x** e **y** que satisfazem à equação $2x + y = 6$.

x	2	0	3	–1	4	–2
y	2	6	0	8	–2	10

Ou seja, equações lineares com mais de uma incógnita apresentam infinitas soluções.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Trata-se de um conjunto de equações lineares. Sua representação é feita com uma chave englobando todas as equações lineares que compõem o sistema.

Solução de um sistema linear

São os valores que satisfazem, ao mesmo tempo, a todas as equações que formam o sistema.

SISTEMAS EQUIVALENTES

Dois ou mais sistemas de equações que apresentem a mesma solução são chamados **equivalentes**.

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Os sistemas de equações lineares são classificados de acordo com o número de soluções que apresentam:

- **Possível e determinado –** O sistema apresenta uma única solução.
- **Possível e indeterminado –** O sistema apresenta infinitas soluções.
- **Impossível –** O sistema não tem solução.

Considere os seguintes exemplos:

- $\begin{cases} x+y=5 \\ 4y-y=1 \end{cases}$ A solução é única: $x = 4$ e $y = 1$ (sistema possível e determinado).

- $\begin{cases} x+y=5 \\ 4x+y=20 \end{cases}$ Podemos observar que a segunda equação é equivalente à primeira. Basta multiplicarmos os dois membros por 4. Dessa forma, há uma só equação e duas incógnitas, o que oferece infinitas soluções (sistema possível e indeterminado).

- $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+3y=10 \end{cases}$ Se multiplicarmos a primeira equação por 3, teremos a equação $3x+3y=15$. Se compararmos à segunda equação, notamos que ambas apresentam informações contraditórias. Portanto, não há solução para esse sistema (sistema impossível).

Podemos resumir a classificação de sistemas da seguinte maneira:

Soluções de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas

- Tem uma ou mais soluções
  - **Possível**
    - Uma solução
      - **Determinado**
    - Infinitas soluções
      - **Indeterminado**
- Não tem solução
  - **Impossível**

RESOLUÇÃO: MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Para solucionar um sistema linear pelo **método da substituição**, devemos seguir estes passos.

Exemplo:

Vamos solucionar o sistema $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$ pelo método da substituição.

1. Isolamos x na primeira equação:

$x = 3 + y$

2. Substituímos essa expressão na segunda equação:

$3(3 + y) + 2y = 9$

3. Solucionamos a equação obtida, chegando assim ao valor de y:

$9 + 3y + 2y = 9$
$5y = 0$
$y = 0$

4. Calculamos o valor de x com base na primeira equação:

$x - y = 3$
$x - 0 = 3$
$x = 3$

4. Por fim, verificamos a solução:

$x - y = 3$ $\qquad$ $x + 2y = 9$
$3 - 0 = 3$ $\qquad$ $3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 9$

RESOLUÇÃO: MÉTODO DA IGUALDADE

Para solucionar um sistema pelo **método da igualdade**, seguimos estes passos.

Exemplo:

Vamos solucionar o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ pelo método da igualdade.

Isolamos **x** em ambas as equações:

$x = \dfrac{8 - 3y}{2} \quad x = \dfrac{7 - 2y}{3}$

- Igualamos as duas expressões:

$\dfrac{8 - 3y}{2} = \dfrac{7 - 2y}{3}$

- Solucionamos a equação obtida:

$3 \cdot (8 - 3y) = 2 \cdot (7 - 2y)$
$24 - 9y = 14 - 4y$
$5y = 10$
$y = 2$

- Calculamos o valor de **x** com base na primeira equação:

$2x + 3y = 8$
$2x + 3 \cdot 2 = 8$
$2x = 2$
$x = 1$

- Por fim, verificamos a solução:

$2x + 3y = 8 \qquad 3x + 2y = 7$
$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8 \qquad 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Resolva o sistema $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ x - y = -4 \end{cases}$ utilizando o método da igualdade.

Resolução

Do enunciado, temos $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ x - y = -4 \end{cases}$.

Isolando x em ambas equações e fazendo a igualdade, obtemos:

$x = 8 - 3y$

$x = -4 + y$

$8 - 3y = -4 + y \rightarrow 4y = 12 \rightarrow y = 3$

Substituindo y em uma das equações:

$x = -4 + 3 \rightarrow x = -1$

Logo, $x = -1$ e $y = 3$.

2. Enem C5-H21

Uma companhia de seguros levantou dados sobre carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y, juntas, respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca Y é

a) 20
b) 30
c) 40
d) 50
e) 60

Resolução

Consideramos que x e y representam o número de carros roubados das marcas X e Y, respectivamente. Então, pelo enunciado, obtemos o sistema de equações:

$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 0,6 \cdot 150 = 90 \end{cases}$

Isolamos x em ambas as equações e fazemos a igualdade:

$2y = 90 - y \rightarrow 3y = 90$

Assim, $y = \dfrac{90}{3} = 30$.

Portanto, o número esperado de carros roubados da marca Y é 30.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

ROTEIRO DE AULA

INTRODUÇÃO A SISTEMAS LINEARES

Equações lineares

Apresentam duas ou mais incógnitas.

Apresentam infinitas soluções.

Sistemas lineares

Conjunto de equações lineares.

A solução são valores que satisfazem, ao mesmo tempo, a todas as equações.

Sistemas equivalentes

Dois ou mais sistemas que apresentam a mesma solução.

Classificação

Possível e determinado.

Possível e indeterminado.

Impossível.

ROTEIRO DE AULA

SISTEMAS LINEARES

Passos do método da igualdade

1º ______Isolar______ a mesma incógnita em ambas as ______equações______.

2º ______Igualar______ as expressões obtidas.

3º ______Solucionar______ a equação obtida, agora com ______apenas uma______ incógnita.

4º ______Calcular______ o valor da ______outra______ incógnita utilizando uma das ______equações iniciais______.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFPE – Karina foi à feira e comprou 15 frutas (maçãs e abacaxis). Karina pagou R$ 0,80 por cada maçã e R$ 4,50 por cada abacaxi, totalizando R$ 34,20. Karina comprou

a) 6 maçãs
b) 9 abacaxis
c) 9 maçãs
d) 8 abacaxis
e) 8 maçãs

m = maçãs
a = abacaxis
Podemos escrever o sistema desta forma:

$$\begin{cases} 0{,}8m + 4{,}5a = 34{,}20 \\ m + a = 15 \end{cases}$$

Assim:
$0{,}8m + 4{,}5a = 34{,}20$
$m = 15 - a$
Pelo método da substituição:
$0{,}8 \cdot (15 - a) + 4{,}5a = 34{,}20 \rightarrow 12 - 0{,}8a + 4{,}5a = 34{,}20$
$3{,}7a = 22{,}20$
$a = 6$
Logo:
$m = 15 - a \rightarrow m = 15 - 6 \rightarrow m = 9$
Assim, Karina comprou 6 abacaxis e 9 maçãs.

2. IFAL (adaptado) – Em uma turma de 49 alunos, o número de homens corresponde a $\frac{3}{4}$ do número de mulheres. Quantos homens há nessa turma?

Supondo que H seja o número de homens e M, o de mulheres, temos o sistema:

$$\begin{cases} H + M = 49 \\ H = \frac{3}{4}M \end{cases} \rightarrow M = \frac{4}{3}H$$

Pelo método da substituição:
$H + \frac{4}{3}H = 49 \rightarrow \frac{7}{3}H = 49 \rightarrow H = 21$
Portanto, há 21 homens na turma.

3. Enem C5-H19

Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$ 100,00.

Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

a) 30
b) 36
c) 50
d) 60
e) 64

Chamando x = nº de acertos e y = nº de erros, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 20x - 10y = 100 \\ x + y = 80 \end{cases} \rightarrow 2x - y = 10 \rightarrow y = 2x - 10$$

Pelo método da substituição:
$x + (2x - 10) = 80 \rightarrow 3x = 90 \rightarrow x = 30.$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

4. IFAL – Resolvendo o sistema abaixo, encontramos os valores para x e y tais que o produto $x \cdot y$ é igual a

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Pelo sistema apresentado:
$x + 2y = 4 \rightarrow x = 4 - 2y$
$2x - y = 3 \rightarrow x = \frac{3 + y}{2}$
Aplicando o método da igualdade, temos:
$4 - 2y = \frac{3 + y}{2}$
$2(4 - 2y) = 3 + y$
$8 - 4y = 3 + y$
$5 = 5y \rightarrow y = 1$
Substituindo y em qualquer das equações, temos:
$x = 4 - 2(1) \rightarrow x = 2$
Assim, $x \cdot y = 2 \cdot 1 = 2.$

5. Enem C5-H19

Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12(h-12)}\right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26 °C, a mínima, 18 °C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

a) A = 18 e B = 8

b) A = 22 e B = −4

c) A = 22 e B = 4

d) A = 26 e B = −8

e) A = 26 e B = 8

Do enunciado, sabemos que:

$$T(h) = A + B\text{sen}\left(\frac{\pi}{12(h-12)}\right)$$

Ao substituir os valores 26 °C às 6h e 18 °C às 18h, temos:

$$T(6) = 26 = A + B\text{sen}\left(\frac{\pi}{12(6-12)}\right)$$

$$26 = A + B\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 26 = A - B$$

$$T(18) = 18 = A + B\text{sen}\left(\frac{\pi}{12(18-12)}\right)$$

$$18 = A + B\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 18 = A + B$$

Resolvemos o sistema pelo método da igualdade:

$A - B = 26 \rightarrow A = 26 + B$

$A + B = 18 \rightarrow A = 18 - B$

$26 + B = 18 - B \rightarrow 2B$

$18 - 26 \rightarrow B = -\frac{8}{2} \rightarrow B = -4$

$A = 26 + B \rightarrow A = 26 + (-4) \rightarrow A = 22$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

6. UPE – A loja Bem Barato está com a seguinte promoção: "Na compra de uma geladeira, uma lava-roupa tanquinho e um forno de micro-ondas, todos da marca Elizabeth III, o cliente paga R$ 1.530,00 em 8 vezes sem juros". Se a geladeira custa o triplo do micro-ondas e custa 360 reais a mais que a lava-roupa tanquinho, quanto o cliente pagará se comprar apenas a lava-roupa tanquinho e o forno micro-ondas?

a) 840 reais

b) 805 reais

c) 780 reais

d) 750 reais

e) 720 reais

Consideramos que os preços da geladeira, da lava-roupa tanquinho e do forno micro-ondas são g, l, e f, respectivamente.

Assim:

$$\begin{cases} g + l + f = 1530 \\ g = 3f \\ g = l + 360 \end{cases}$$

Por igualdade, temos $3f = l + 360 \rightarrow l = 3f - 360$

Logo: $g + l + f = 1\,530$. Então:

$3f + 3f - 360 + f = 1\,530$

$7f = 1\,890 \rightarrow f = 270$

Então: $g = 3 \cdot 270 \rightarrow g = 810$

$l = 3f - 360 \rightarrow l = 3 \cdot 270 - 360 \rightarrow l = 450$

Desse modo, o cliente vai pagar:

f + l = R$ 270,00 + R$ 450,00 = R$ 720,00.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. IFBA – Na Pizzaria "Massa Dez", verificou-se que o valor financeiro que os amigos Kiko, Bené e Zazá tinham, em reais, dependia de resolver o seguinte problema:

- a média aritmética dos valores financeiros dos amigos citados era R$ 30,00.
- a média aritmética dos valores financeiros de Bené e Zazá era R$ 20,00.
- Kiko tinha R$ 30,00 a mais que Bené.

A partir dessas informações, podemos afirmar que:

a) Kiko tem R$ 40,00 a mais que Zazá.

b) Bené tem R$ 10,00 a mais que Zazá.

c) Zazá tem o mesmo valor financeiro que Kiko.

d) O valor financeiro de Kiko corresponde à soma dos valores financeiros de Bené e Zazá.

e) Zazá tem o mesmo valor financeiro que Bené.

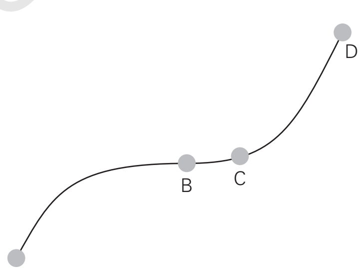
8. PUCCamp-SP (adaptado) – No início de um dia de coleta de lixo para reciclagem, foram usados quatro recipientes de coleta, todos vazios e de mesmo peso.

MSPOLI/ISTOCKPHOTO

Ao final do dia, o recipiente com vidro pesava 3 kg, a soma do peso dos recipientes com metal e com plástico era igual ao peso do recipiente com papel e, por fim, o peso do recipiente com metal superava o peso do recipiente com plástico em 1,2 kg. Se a soma dos pesos dos quatro recipientes, ao final desse dia, era igual a 8 kg, então, a coleta de papel superou a de metal em

a) 500 g.
b) 450 g.
c) 1,45 kg.
d) 1,85 kg.
e) 650 g.

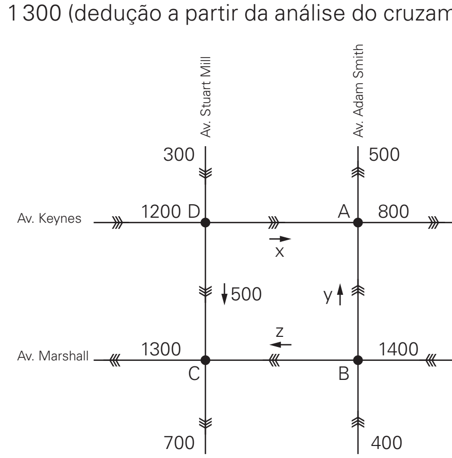
9. FGV-SP – As cidades A, B, C e D estão ligadas por uma rodovia, como mostra a figura seguinte, feita fora de escala.



Por essa rodovia, a distância entre A e C é o triplo da distância entre C e D, a distância entre B e D é a metade da distância entre A e B, e a distância entre B e C é igual a 5 km. Por essa estrada, se a distância entre C e D corresponde a x% da distância entre A e B, então x é igual a:

a) 36
b) 36,5
c) 37
d) 37,5
e) 38

10. FGV-SP – O diagrama a seguir indica o número de veículos que passaram em cada trecho de quatro avenidas de mão única na última hora. Por exemplo, 300 veículos passaram, nessa hora, pelo trecho da Av. Stuart Mill que antecede o cruzamento D. Sabe-se ainda que, nessa hora, passaram 500 veículos entre os cruzamentos de D e C, x veículos de D para A, y veículos de B para A e z veículos de B para C. Interpretando os cruzamentos do diagrama, pode-se deduzir, por exemplo, que $x + y =$ $= 1\,300$ (dedução a partir da análise do cruzamento A).



a) Calcule x, y e z.
b) Substitua, no diagrama original, a quantidade de 500 veículos que trafegam de D para C na hora analisa-

da por uma quantidade desconhecida de t veículos. Considerando que x, y, z e t são inteiros positivos, determine quantos são os valores possíveis para t.

11. UCS-RS – Sabe-se que os primeiros registros feitos pelos seres humanos eram marcados em paredes, folhas de palmeiras, tijolos de barro, tábuas de madeira. A primeira inovação foi o papiro, que tinha como matéria-prima uma planta. Depois ele foi substituído pelo pergaminho – feito de pele de animais –, que tinha maior durabilidade e que tornava a escrita mais fácil.

No século II, a partir do córtex de plantas, tecidos velhos e fragmentos de rede de pesca, os chineses inventaram o papel.

Em 1448, Johann Fust, juntamente com Gutenberg, fundou a Werk der Buchei (Fábrica de Livros), onde foi publicada a Bíblia de Gutenberg, livro que tinha 42 linhas. O aumento da oferta de papel e o aprimoramento das técnicas de impressão em larga escala ajudaram a consolidar o livro como veículo de informação e entretenimento.

Em 1971, a tecnologia inovou o mundo da leitura com os e-books, livros digitais que podem ser lidos em vários aparelhos eletrônicos.

Disponível em: <http://blog.render.com.br/diversos/a-evolucao-do--livro/>. Acesso em: 14 fev. 2017. (Parcial e adaptado)

Um livro pode ter um papel importante em narrativas de terror. Muitos escritores criam, dentro das próprias histórias, livros com determinadas características, por exemplo: conter monstros aprisionados, certas palavras que, quando pronunciadas, provocam destruição, páginas de pele humana, letras escritas em sangue. Um exemplo clássico é o *Necronomicon*, livro de presença frequente nos contos do escritor estadunidense Howard Philip Lovecraft, usado para ressuscitar mortos e contatar seres sobrenaturais. Suponha um admirador de Lovecraft que também é professor de Matemática. Ele cria uma série de histórias sobre um livro amaldiçoado, cuja capa traz o seguinte sistema de equações escrito com sangue:

$$\frac{y}{x} = 4$$

$$5y = 12x + |d|$$

$$d = \sqrt{144}$$

A narrativa diz que o livro não deve ser aberto, pois algo terrível acontecerá àquele que o fizer. Entretanto, poderá haver aquele que decidirá abri-lo e, para tanto, será necessário descobrir o valor de y, que é

a) 4.
b) 6.
c) 14.
d) 28.
e) 36.

12. Fuvest-SP – Uma dieta de emagrecimento atribui a cada alimento um certo número de pontos, que equivale ao valor calórico do alimento ao ser ingerido. Assim, por exemplo, as combinações abaixo somam, cada uma, 85 pontos:

4 colheres de arroz + 2 colheres de azeite + 1 fatia de queijo branco.

1 colher de arroz + 1 bife + 2 fatias de queijo branco.

4 colheres de arroz + 1 colher de azeite + 2 fatias de queijo branco.

4 colheres de arroz + 1 bife.

Note e adote:

	1 colher de arroz	1 colher de azeite	1 bife
Massa de alimento (g)	20	5	100
% de umidade + macronutriente minoritário + micronutrientes	75	0	60
% de macronutriente majoritário	25	100	40

Com base nas informações fornecidas, e na composição nutricional dos alimentos, considere as seguintes afirmações:

I. A pontuação de um bife de 100 g é 45.

II. O macronutriente presente em maior quantidade no arroz são os carboidratos.

III. Para uma mesma massa de lipídeo de origem vegetal e de carboidrato, a razão $\dfrac{\text{número de pontos do lipídeo}}{\text{número de pontos do carboidrato}}$ é 1,5.

É correto o que se afirma em:

a) I, apenas.
b) II, apenas.
c) I e II, apenas.
d) II e III, apenas.
e) I, II e III.

13. ESPM-SP – Bia é 6 anos mais velha que Carla. Há 2 anos, a idade de Bia era o triplo da idade de Ana e daqui a 1 ano será igual à soma das idades de Ana e Carla. Podemos afirmar que:

a) Ana tem 7 anos.
b) Bia tem 12 anos.
c) Ana é mais velha que Carla.
d) Carla tem 6 anos.
e) Ana e Carla têm a mesma idade.

14. Sistema Dom Bosco – A origem do "quadrado mágico" é desconhecida. Porém, há evidências de sua existência na China e na Índia que remontam ao século I. Em um "quadrado mágico", em cada uma das linhas, colunas e diagonais, a soma dos números inteiros deve ser a mesma. Dado o "quadrado mágico"

A	17	B
13	C	D
14	E	15

sendo que A, B, C e D são números inteiros, determine o valor da soma D + E.

15. Epcar-MG – A solução do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} - \dfrac{x-y}{6} + \dfrac{x-y}{18} - \dfrac{x-y}{54} + \ldots = -1 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

é tal que x + y é igual a

a) $\frac{11}{3}$

b) $\frac{10}{3}$

c) $-\frac{7}{3}$

d) $-\frac{8}{3}$

16. UFRGS-RS – Uma pessoa tem no bolso moedas de R$ 1,00, de R$ 0,50, de R$ 0,25 e R$ 0,10. Se somadas as moedas de R$ 1,00 com as de R$ 0,50 e com as de R$ 0,25, têm-se R$ 6,75. A soma das moedas de R$ 0,50 com as moedas de R$ 0,25 e com as de R$ 0,10 resulta em R$ 4,45. A soma das moedas de R$ 0,25 com as de R$ 0,10 resulta em R$ 2,95. Das alternativas, assinale a que indica o número de moedas que a pessoa tem no bolso.

a) 22

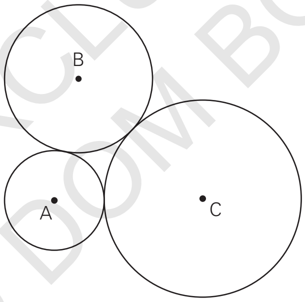
b) 23

c) 24

d) 25

e) 26

17. Unicamp-SP – A figura abaixo exibe três círculos no plano, tangentes dois a dois, com centros em A, B e C e raios de comprimentos a, b e c, respectivamente.



a) Determine os valores de a, b e c, sabendo que a distância entre A e B é de 5 cm, a distância entre A e C é de 6 cm e a distância entre B e C é de 9 cm.

b) Para $a = 2$ cm e $b = 3$ cm, determine o valor de $c > b$, de modo que o triângulo de vértices em A, B e C seja retângulo.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H21

Uma pessoa encheu o cartão de memória de sua câmera duas vezes, somente com vídeos e fotos. Na primeira vez, conseguiu armazenar 10 minutos de vídeo e 190 fotos. Já na segunda, foi possível realizar 15 minutos de vídeo e tirar 150 fotos. Todos os vídeos possuem a mesma qualidade de imagem entre si, assim como todas as fotos. Agora, essa pessoa deseja armazenar nesse cartão de memória exclusivamente fotos, com a mesma qualidade das anteriores.

Disponível em: <www.techlider.com.br>. Acesso em: 31 jul. 2012.

O número máximo de fotos que ela poderá armazenar é

a) 200.
b) 209.
c) 270.
d) 340
e) 475.

19. Enem C5-H19

Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$, em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$
b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$
c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$
d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$
e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

20. Enem C5-H21

Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

a) $5X - 3Y + 15 = 0$
b) $5X - 2Y + 10 = 0$
c) $3X - 3Y + 15 = 0$
d) $3X - 2Y + 15 = 0$
e) $3X - 2Y + 10 = 0$

27 SISTEMAS LINEARES - MÉTODO DA REDUÇÃO E ESCALONAMENTO

- Resolução: método da redução
- Igualando os coeficientes da mesma incógnita
- Sistema escalonado
- Resolução: método do escalonamento

HABILIDADE

- Solucionar um sistema linear pelo método da redução.
- Identificar um sistema escalonado.
- Solucionar um sistema linear pelo método do escalonamento.

RESOLUÇÃO: MÉTODO DA REDUÇÃO

Para solucionar um sistema pelo **método da redução**, seguimos os passos abaixo.

Exemplo:

Vamos solucionar o sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$ pelo método da redução.

1. Igualamos os coeficientes de uma incógnita, exceto seu sinal. O número pelo qual multiplicaremos ambas as equações é múltiplo comum de ambos os coeficientes. Vamos multiplicar por 2 os membros da primeira equação:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$$

2. Somamos as equações do sistema obtido. Assim, reduzimos o sistema a uma equação com uma incógnita:

$$\begin{array}{rcrcl} & 4x & + \ 2y & = & 10 \\ + & 3x & - \ 2y & = & 11 \\ \hline & 7x & & = & 21 \end{array}$$

3. Solucionamos a equação obtida:

$$7x = 21 \rightarrow x = 3$$

4. Calculamos o valor de y com base na primeira equação:

$$\begin{gathered} 2x + y = 5 \\ 2 \cdot 3 + y = 5 \\ y = 5 - 6 \\ y = -1 \end{gathered}$$

5. Por fim, verificamos a solução:

$$\begin{gathered} 2x + y = 5 \\ 2 \cdot 3 + (-1) = 5 \end{gathered} \qquad \begin{gathered} 3x - 2y = 11 \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 11 \end{gathered}$$

IGUALANDO OS COEFICIENTES DA MESMA INCÓGNITA

Podemos utilizar um método prático para igualar os coeficientes de uma das incógnitas. Observe o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 3x + 7y = 0 \end{cases}$$

Para igualar os coeficientes de x, por exemplo, multiplicamos a primeira equação por 3 – que é justamente o coeficiente de x da segunda equação. Depois, multiplicamos por 2 a segunda equação – que é o coeficiente de x da primeira equação:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 & \xrightarrow{\cdot 3} \\ 3x + 7y = 0 & \xrightarrow{\cdot 2} \end{cases} \begin{cases} 6x - 15y = 12 \\ 6x + 14y = 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1. UFPR – Uma bolsa contém 20 moedas, distribuídas entre as de 5, 10 e 25 centavos, totalizando R$ 3,25. Sabendo que a quantidade de moedas de 5 centavos é a mesma das moedas de 10 centavos, quantas moedas de 25 centavos há nessa bolsa?

a) 6
b) 8
c) 9
d) 10
e) 12

Resolução

Considerando x como o número de moedas de 25 centavos e y como, o número de moedas de 10 e 5 centavos (as quais estão na mesma quantidade), obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 0{,}25 \cdot x + 0{,}15 \cdot y = 3{,}25 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por 20:

$$\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 5x + 3y = 65 \end{cases}$$

Então, multiplicamos a primeira e a segunda equações por –3 e 2, respectivamente:

$$\begin{cases} x + 2y = 20 \cdot (-3) \\ 5x + 3y = 65 \cdot (2) \end{cases}$$

Obtemos então:

$$\begin{cases} -3x - 6y = -60 \\ 10x + 6y = 130 \end{cases}$$

Assim:

$7x = 70 \rightarrow x = 10$

Portanto, há 10 moedas de 25 centavos na bolsa.

SISTEMA ESCALONADO

Um sistema é chamado **escalonado** quando cada equação, em relação à anterior, apresenta uma incógnita a menos, de modo que a última equação apresente apenas uma incógnita.

O sistema $\begin{cases} 3x - 2y + z = 9 \\ y - 2z = -3 \\ 3z = 2 \end{cases}$ é um exemplo de **sistema escalonado**.

RESOLUÇÃO: MÉTODO DO ESCALONAMENTO

Para solucionar um sistema pelo **método do escalonamento**, seguimos os passos abaixo.

Exemplo:

Vamos solucionar o sistema $\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ -x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$ pelo método do escalonamento.

1. Organizamos as equações de modo a deixar as primeiras com os maiores coeficientes nas primeiras incógnitas.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ -x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x + 3y + 2z = 7 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

2. Anulamos os coeficientes da primeira incógnita, exceto para a primeira equação.

3. Somamos, membro a membro, a segunda e terceira equações e substituímos a terceira equação pelo resultado.

$$\begin{array}{rr} & x + 3y + 2z = 7 \\ + & -x - 2y + z = 0 \\ \hline & y + 3z = 7 \end{array}$$

4. Somamos, membro a membro, a primeira equação com a segunda multiplicada por –2. Substituímos a segunda equação pelo resultado.

$$\begin{array}{rr} & 2x + y - 3z = -5 \\ + & -2x - 6y - 4z = -14 \\ \hline & -5y - 7z = -19 \end{array}$$

O sistema, então, fica do seguinte modo:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ -5y - 7z = -19 \\ y + 3z = 7 \end{cases}$$

5. No sistema equivalente obtido, substituímos a terceira equação pela soma, membro a membro, da segunda equação com a terceira, multiplicada por 5.

$$\begin{array}{rr} & -5y - 7z = -19 \\ + & 5y - 15z = 35 \\ \hline & 8z = 16 \end{array}$$

Assim, obtemos o sistema escalonado.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ -5y - 7z = -19 \\ 8z = 16 \end{cases}$$

6. Com base no sistema escalonado, solucionamos equação a equação, de modo a obter a solução do sistema.

- Da terceira equação, temos que $z = 2$.
- Substituindo $z = 2$ na segunda equação, obtemos $y = 1$.
- Substituindo $z = 2$ e $y = 1$ na primeira equação, obtemos $x = 0$.

Portanto, a solução do sistema é $S = \{(0, 1, 2)\}$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

2. Vunesp – Se a, b e c são números reais tais que
$ax^2 + b(x + 1)^2 + c(x + 2)^2 = (x + 3)^2$,
para todo x real, então o valor de $a - b + c$ é

a) –5
b) –1
c) 1
d) 3
e) 7

Resolução

Agrupando os coeficientes de x^2, x e do termo constante, temos

$$ax^2 + b(x^2 + 2x + 1) + c(x^2 + 4x + 4) = x^2 + 6x + 9 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (a + b + c)x^2 + (2b + 4c)x + b + 4c = x^2 + 6x + 9$$

Como os polinômios são iguais, obtemos o seguinte sistema linear para os coeficientes

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2b + 4c = 6 \\ b + 4c = 9 \end{cases}$$

Simplificando a segunda linha (dividindo por 2), resulta

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ b + 2c = 3 \\ b + 4c = 9 \end{cases}$$

Substituindo a terceira linha pelo resultado da multiplicação da segunda linha por –1 somada à terceira linha, obtemos

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ b + 2c = 3 \\ 2c = 6 \end{cases}$$

Assim, $a = 1$, $b = -3$ e $c = 3$. Então, calculamos $a - b + c = 1 - (-3) + 3 = 7$.

ROTEIRO DE AULA

SISTEMAS LINEARES

Método da redução

- Passo 1 – Igualar os coeficientes de uma das incógnitas (exceto seu sinal), multiplicando os dois membros das equações por constantes não nulas.
- Passo 2 – Somar ou subtrair as duas equações do sistema equivalente.
- Passo 3 – Solucionar a equação obtida.
- Passo 4 – Calcular o valor da outra incógnita utilizando uma das equações iniciais.

Sistema escalonado

- Utilizado para solucionar qualquer sistema linear.
- Cada equação, em relação à anterior, apresenta uma incógnita a menos, devendo a última equação possuir apenas uma incógnita.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEG-GO – Cinco jovens, que representamos por a, b, c, d, e foram a um restaurante e observaram que o consumo de cada um obedecia ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a+d=20 \\ b+c-e=30 \\ a-c=15 \\ e-a=10 \\ c+e=25 \end{cases}$$

O total da conta nesse restaurante foi de

a) R$ 50,00
b) R$ 80,00
c) R$ 100,00
d) R$ 120,00
e) R$ 135,00

O total da conta corresponde à soma dos valores de a, b, c, d e e.
A soma das equações resulta exatamente na soma dessas quantias:
a + b + c + d + e = R$ 100,00.

2. Unifor-CE – A apresentação de um show de Rock gerou uma receita de R$ 11.000,00. Havia dois tipos de ingresso: um era vendido por R$ 20,00 e o outro, por R$ 40,00. Sabendo-se que foram vendidos ao todo 400 ingressos, podemos concluir que o número de ingressos vendidos a R$ 20,00 foi de

a) 150.
b) 180.
c) 200.
d) 220.
e) 250.

Vamos considerar x, e y respectivamente, a quantidade de ingressos de R$ 40,00 e R$ 20,00. Temos então, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x+y=400 \\ 40x+20y=11000 \end{cases}$$

Substituímos a segunda equação pelo resultado da multiplicação da primeira equação por –40 somado à segunda equação:

$$\begin{cases} x+y=400 \\ 0-20y=-5000 \end{cases}$$

Portanto,

$$y=-\frac{5000}{20} \rightarrow y=250.$$

3. Enem C5-H21

Algumas pesquisas estão sendo desenvolvidas para se obter arroz e feijão com maiores teores de ferro e zinco e tolerantes à seca. Em média, para cada 100 g de arroz cozido, o teor de ferro é de 1,5 mg e o de zinco é de 2,0 mg. Para 100 g de feijão, é de 7 mg o teor de ferro e de 3 mg o de zinco. Sabe-se que as necessidades diárias dos dois micronutrientes para uma pessoa adulta é de aproximadamente 12,25 mg de ferro e 10 mg de zinco.

Disponível em: <http://www.embrapa.br>.
Acesso em: 29 abr. 2010. (Adaptado)

Considere que uma pessoa adulta deseja satisfazer suas necessidades diárias de ferro e zinco ingerindo apenas arroz e feijão. Suponha que seu organismo absorva completamente todos os micronutrientes oriundos desses alimentos.

Na situação descrita, que quantidade a pessoa deveria comer diariamente de arroz e feijão, respectivamente

a) 58 g e 456 g
b) 200 g e 200 g
c) 350 g e 100 g
d) 375 g e 500 g
e) 400 g e 89 g

Sendo a e f, respectivamente, as porções de 100 g de arroz e feijão a serem ingeridas, de acordo com o enunciado, temos o sistema:

$$\begin{cases} 1{,}5a+7f=12{,}25 \\ 2a+3f=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6a+28f=49 \\ -6a-9f=-30 \end{cases}$$

Somamos as equações:
$19f = 19 \rightarrow f = 1$
Logo, $2a + 3 \cdot 1 = 10 \rightarrow 2a = 7 \rightarrow a = 3{,}5$
Dessa forma, as quantidades a serem ingeridas são:
Arroz: $3{,}5 \cdot 100 = 350$ g
Feijão: $1 \cdot 100 = 100$ g.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. Fac. Albert Einstein-SP – Um parque tem 3 pistas para caminhada, X, Y e Z. Ana deu 2 voltas na pista X, 3 voltas na pista Y e 1 volta na pista Z, tendo caminhado um total de 8420 metros. João deu 1 volta na pista X, 2 voltas na pista Y e 2 voltas na pista Z, num total de 7940 metros. Marcela deu 4 voltas na pista X e 3 voltas na pista Y, num total de 8110 metros. O comprimento da maior dessas pistas excede o comprimento da menor pista em

a) 1130 metros.
b) 1350 metros.
c) 1570 metros.
d) 1790 metros.

Vamos considerar que os comprimentos das pistas X, Y e Z sejam, respectivamente, x, y e z. Assim, temos que

$$\begin{cases} 2x+3y+z=8420 \\ x+2y+2z=7940 \\ 4x+3y=8140 \end{cases}$$

Fazendo o escalonamento:
- Invertendo a primeira linha e a segunda linha
- Trocando a segunda linha pelo resultado de (I) –2(II)
- Trocando a terceira linha pelo resultado de –2(II) + (III)

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 7940 \\ -y - 3z = -7460 \\ -5y - 8z = -23650 \end{cases}$$

Trocando a segunda linha por –1 (II).
Trocando a terceira linha por 5 (II) – (III).

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 7940 \\ y + 3z = 7460 \\ 7z = 13650 \end{cases}$$

Assim, resulta que:

$z = \dfrac{13650}{7} \to z = 1950$

Substituindo z na (II)

$y = 7460 - 3z = 7460 - 3 \cdot 1950 \to y = 1610.$

E, finalmente, substituindo y e z na (I),

$x = 7940 - 2y - 2z = 7940 - 2 \cdot 1610 - 2 \cdot 1950 \to x = 820$

Portanto, o comprimento da maior pista (1 950 m) excede o comprimento da menor pista (820 m) em

1 950 m – 820 m = 1 130 m.

5. UCS-RS – Misturando-se 200 miligramas de uma substância A e 300 miligramas de uma substância B obtém-se um produto cujo custo é de R$ 4,00 por miligrama. Porém, se forem misturados 300 miligramas da substância A com 200 miligramas da substância B, o valor do produto será de R$ 3,00 por miligrama. Qual seria o preço do produto, por miligrama, se ele fosse composto por 250 miligramas de cada uma das substâncias A e B?

a) R$ 1,50
b) R$ 1,75
c) R$ 2,00
d) R$ 3,00
e) R$ 3,50

Podemos obter o seguinte sistema linear, que expressa as condições apresentadas:

$$\begin{cases} 2A + 3B = 4 \\ 3A + 2B = 3 \end{cases}$$

Os coeficientes foram simplificados, mantendo-se a equivalência do sistema.

Multiplicamos a primeira equação por 3 e a segunda por –2:

$$\begin{cases} 6A + 9B = 12 \\ -6A - 4B = -6 \end{cases}$$

Somamos as equações:

$5B = 6 \to B = \dfrac{6}{5}$

Substituímos o valor de B na primeira equação:

$2A + 3 \cdot \dfrac{6}{5} = 4 \to A = \dfrac{4}{2} - \dfrac{9}{5} = \dfrac{1}{5}$

Somamos a quantidade pedida:

$2{,}5A + 2{,}5B = 2{,}5\,(A + B) = 2{,}5 \cdot \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{6}{5}\right) = 2{,}5 \cdot \dfrac{7}{5} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$

Portanto, o valor é R$ 3,50.

6. Unicamp-SP (adaptado) – Sejam a e b números reais. Considere, então, os dois sistemas lineares abaixo, nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} x - y = a \\ z - y = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = b \end{cases}$$

Sabendo que esses dois sistemas possuem uma solução em comum, determine o valor de a + b.

Como os sistemas têm uma solução em comum, podemos considerar o sistema formado pelas quatro equações:

$$\begin{cases} x - y = a \\ -y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ y + z = b \end{cases}$$

Somamos a segunda e a terceira equações:

$x + z = 3$

Somamos a primeira e a quarta equações:

$x + z = a + b$

Então, $a + b = 3$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. CFTMG – Uma senhora resolveu vender bombons e trufas na porta de uma escola para complementar a renda familiar. No primeiro dia, ela faturou R$ 107,50 com a venda de 25 bombons e 15 trufas. No dia seguinte, seu faturamento foi igual a R$ 185,00 e foram vendidos 20 bombons e 45 trufas. Um aluno que comprou, dessa senhora, 4 bombons e 3 trufas pagou a quantia de

a) R$ 19,00.
b) R$ 19,50.
c) R$ 22,50.
d) R$ 23,00.

8. UPE – Em uma floricultura, é possível montar arranjos diferentes com rosas, lírios e margaridas. Um arranjo com 4 margaridas, 2 lírios e 3 rosas custa 42 reais. No entanto, se o arranjo tiver uma margarida, 2 lírios e uma rosa, ele custa 20 reais. Entretanto, se o arranjo tiver 2 margaridas, 4 lírios e uma rosa, custará 32 reais. Nessa floricultura, quanto custará um arranjo simples, com uma margarida, um lírio e uma rosa?

a) 5 reais.
b) 8 reais.
c) 10 reais.
d) 15 reais.
e) 24 reais.

9. IFAL – Sabendo que Tales e Platão têm, juntos, massa de 159 kg; Platão e Fermat, 147 kg; e Tales e Fermat, 134 kg, determine a massa de Tales, Platão e Fermat juntos:

a) 200.
b) 210.
c) 220.
d) 230.
e) 240.

10. IFSC (adaptado) – Um cliente foi ao caixa do banco do qual é correntista e sacou R$ 580,00. Sabendo-se que a pessoa recebeu toda a quantia em 47 notas e que eram apenas notas de R$ 5,00 e de R$ 20,00, determine a quantidade de cada nota.

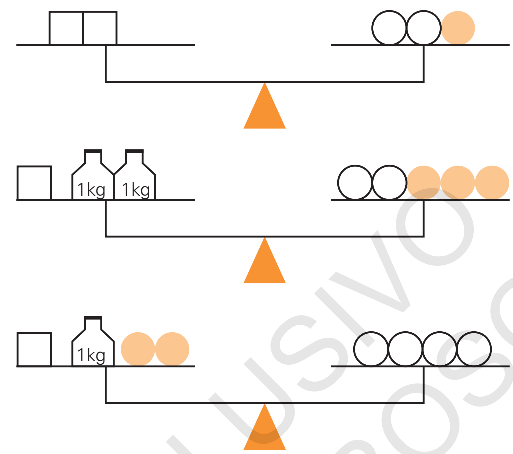
11. Efomm-RJ– Do sistema linear abaixo, analise as seguintes afirmativas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & b \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$$

I. Se $b \neq -12$, o sistema linear terá uma única solução.
II. Se $a = b = -12$, o sistema linear terá infinitas soluções.
III. Se $b = -12$, o sistema será impossível.

a) Todas as afirmativas são corretas.
b) Todas as afirmativas são incorretas.
c) Somente as afirmativas I e III são corretas.
d) Somente as afirmativas I e II são corretas.
e) Somente as afirmativas II e III são corretas.

12. Cefet-MG – Analise o seguinte esquema.



Se os pratos das balanças estão equilibrados, então a soma dos pesos dos objetos □, ○ e ●, em kg, é

a) menor que 1.
b) maior que 2,5.
c) maior que 1 e menor que 1,5.
d) maior que 1,5 e menor que 2.
e) maior que 2 e menor que 2,5.

13. Espcex-SP – Para que o sistema linear $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2y+z=2 \\ 2x+5y-3z=b \end{cases}$

, em que a e b são reais, seja possível e indeterminado, o valor de a + b é igual a

a) 10.
b) 11.
c) 12.
d) 13.
e) 14.

14. Fuvest-SP – As constantes A, B, C e D são tais que a igualdade

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+C}{x^2+4}$$

é válida para $x \in \mathbb{R}$.

a) Deduza, da igualdade acima, um sistema linear com quatro equações, satisfeito pelas constantes A, B, C e D.

b) Resolva este sistema e encontre os valores dessas constantes.

15. PUC-RS – Sabendo que uma bola, duas raquetes e três bonés custam R$ 100,00 e que três bolas, sete raquetes e onze bonés custam R$ 320,00, então uma bola, uma raquete e um boné custam, juntos,

a) 50.
b) 60.
c) 80.
d) 120.
e) 150.

16. UEM-PR – Uma empresa que faz doces para festas oferece três tipos de kits, conforme mostra o quadro abaixo.

	Quantidade de brigadeiro	Quantidade de beijinho	Quantidade de cajuzinho	Preço R$
KIT A	3	3	6	12,00
KIT B	2	5	4	11,00
KIT C	5	3	2	14,00

Sobre o exposto assinale o que for correto.

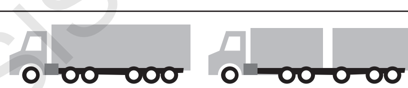
I. O cajuzinho é o doce mais caro dos kits.
II. O beijinho é o doce mais barato dos kits.
III. O cajuzinho custa 25% do valor do brigadeiro.
IV. O preço de cada brigadeiro é igual ao dobro do preço de cada beijinho.
V. O preço de cada beijinho é R$ 1,50.

a) Apenas I e II estão corretas.
b) Apenas II e IV estão corretas.
c) Apenas II e V estão corretas.
d) Apenas III e IV estão corretas.
e) Apenas III, IV e V estão corretas.

17. Sistema Dom Bosco – Em um feriado prolongado, durante um monitoramento realizado pela Polícia Rodoviária, foram registradas as seguintes informações para os veículos que retornavam da Região dos Lagos em direção ao Rio de Janeiro, correspondentes a 30 minutos de coleta de dados:

- o total de veículos foi igual a 100 (considerando ambos os sentidos);
- o valor total arrecadado pelo pedágio foi de R$ 2 000,00;
- o dobro da quantidade de motos com a quantidade de ônibus excederam em 6 a quantidade de carros.

As tarifas do pedágio são dadas pela tabela a seguir.

12,00	 AUTOMÓVEL, CAMINHONETE, FURGÃO (RODAGEM SIMPLES) E TRICICLO.	20,00
24,00	 CAMINHÃO LEVE, CAMINHÃO TRATOR, ÔNIBUS E FUGRÃO (RODAGEM DUPLA).	40,00
18,00	 AUTOMÓVEL COM SEMIRREBOQUE E CAMINHONETE COM SEMIRREBOQUE.	30,00
36,00	 ÔNIBUS, CAMINHÃO, CAMINHÃO TRATOR, CAMINHÃO TRATOR COM SEMIRREBOQUE.	60,00
24,00	 AUTOMÓVEL COM REBOQUE E CAMINHONETE COM REBOQUE.	40,00
48,00	 CAMINHÃO COM REBOQUE E CAMINHÃO COM SEMIRREBOQUE.	80,00
60,00	 CAMINHÃO COM REBOQUE E CAMINHÃO COM SEMIRREBOQUE.	100,00
72,00	 CAMINHÃO COM REBOQUE E CAMINHÃO COM SEMIRREBOQUE.	120,00
6,00	 MOTOCICLETA, MOTONETAS E BICICLETAS A MOTOR.	10,00

Considerando apenas carros, motos e ônibus, a quantidade de cada um dos veículos observada durante o monitoramento foi de

a) 76 carros, 16 motos e 8 ônibus.
b) 76 carros, 8 motos e 16 ônibus.
c) 66 carros, 12 motos e 12 ônibus.
d) 66 carros, 26 motos e 8 ônibus.
e) 66 carros, 8 motos e 26 ônibus.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H21

Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio. Quantos alunos compraram somente um bilhete?

a) 34
b) 42
c) 47
d) 48
e) 79

19. IFSul-RS C5-H21

O celular, visto por muitos como um bem essencial no dia a dia, pode ocasionar danos ao corpo humano, se usado de modo excessivo. Pesquisas científicas comprovam que dores na cabeça ligadas a tensões na nuca e no pescoço são causadas pelo tempo inclinado em uma posição indevida para visualizar a tela do celular, bem como há indícios de estreita relação entre a radiação do telefone celular e a ocorrência de tumores cerebrais.

Disponível em: <http://g1.globo.com/fantastico/noticia/2015/08/estudo-mostra-que-radiacao-de-celulares-pode-ser-prejudicial-saude.html>. Acesso em: 26 out. 2015.

Considere que um cientista pretende realizar uma pesquisa sobre os danos causados ao corpo humano devido ao uso excessivo de celulares. Para tanto, ele vai entrevistar 2 438 pacientes, dividindo-os em dois grupos (x e y), de forma que a soma de 30% do grupo x com 50% do grupo y resulta em 921 pacientes. Nessas condições, a quantidade de pacientes do grupo x e do grupo y é de, respectivamente

a) 447 e 474
b) 474 e 474
c) 948 e 1 490
d) 1 490 e 948
e) 474 e 1 490

20. UEL-PR (adaptado) C5-H21

A Internet armazena uma quantidade enorme de informações. Ao fazer uma busca na rede, os sites são listados em ordem decrescente segundo o seu grau de importância. Considere que, para calcular o grau de importância, são analisados três fatores: a quantidade de pessoas que se inscrevem no site, a quantidade de atualizações do site e a quantidade de visualizações do site. Cada um desses fatores recebe uma pontuação determinada.

- Para que o site obtenha 9 000 pontos e seja considerado de grande importância, são necessárias 600 pessoas inscritas, 600 atualizações e 800 visualizações.

- Para que o site obtenha 6 300 pontos e seja considerado de média importância, são necessárias 300 pessoas inscritas, 600 atualizações e 300 visualizações.

- Para que o site obtenha 2 000 pontos e seja considerado de importância satisfatória, são necessárias 100 pessoas inscritas, 100 atualizações e 300 visualizações.

A partir dessas informações, determine a pontuação obtida por um site que apresenta 900 pessoas inscritas, 450 atualizações e 700 visualizações.

a) 2 550
b) 3 590
c) 4 580
d) 6 600
e) 8 850

28 SISTEMAS LINEARES – GRÁFICO, MATRIZ ASSOCIADA E REGRA DE CRAMER

- Resolução: método gráfico
- Resolução: matriz associada
- Resolução: regra de Cramer
- Discussão de um sistema-linear

HABILIDADES

- Solucionar um sistema linear pelo método gráfico.
- Identificar a matriz associada de um sistema linear dado.
- Solucionar um sistema linear pelo método de matriz associada.
- Solucionar um sistema linear por meio da regra de Cramer.
- Discutir um sistema linear por meio de técnicas já conhecidas.

RESOLUÇÃO: MÉTODO GRÁFICO

Ao encontrarmos as soluções de uma equação com duas incógnitas, obtemos uma série de pares ordenados que são soluções da equação.

Se interpretarmos esses pares como pontos do plano, as soluções da equação são pontos de uma reta.

Podemos obter graficamente a solução de um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas como o ponto de intersecção entre as duas retas associadas a ambas as equações.

Vamos solucionar graficamente o sistema $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ de acordo com os passos a seguir:

1. Isolamos y nas duas equações:
$x + y = 6 \rightarrow y = -x + 6$
$x - y = 2 \rightarrow y = x - 2$

2. Atribuímos valores a x e criamos uma tabela com os valores para cada equação.

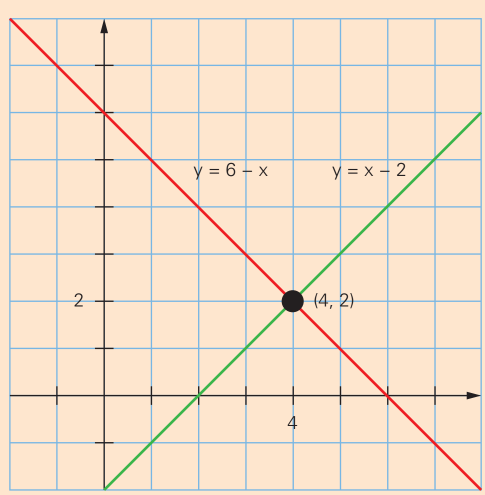
$y = -x + 6$

x	0	1	2	3	4
y	6	5	4	3	2

$y = x - 2$

x	0	1	2	3	4
y	–2	–1	0	1	2

3. Representamos, então, esses pontos sobre um plano cartesiano.

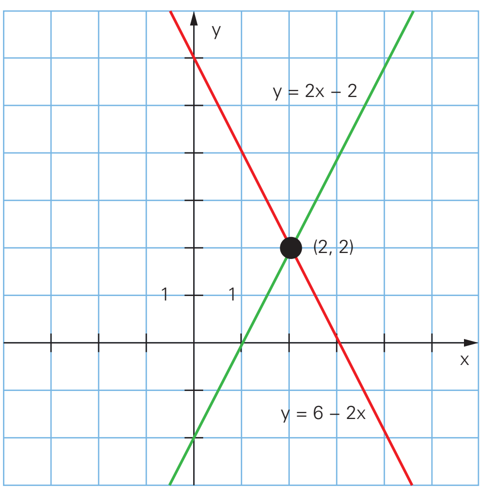


4. As retas se encontram no ponto (4, 2), que é a solução do sistema. Ou seja, $x = 4$ e $y = 2$.

Classificação de um sistema linear 2×2 a partir de sua representação gráfica

Exemplo 1:

Consideremos o sistema $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$. Vamos esboçar as retas que representam as soluções de cada equação.

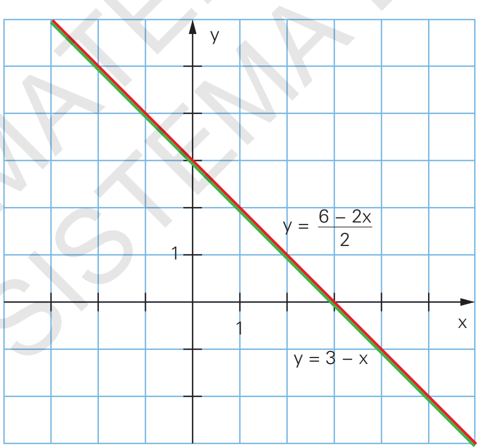


As retas se cruzam em um ponto que será a solução do sistema: x = 2 e y = 2.

Portanto, o sistema é **possível e determinado**.

Exemplo 2:

Fazemos o mesmo procedimento para o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$. Vamos desenhar as retas que representam as soluções de cada equação.



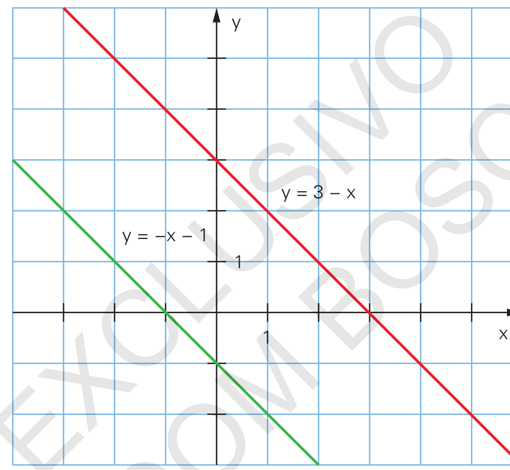
As retas são paralelas e coincidentes, ou seja, toda reta é solução do sistema.

Portanto, o sistema é **possível e indeterminado**.

Exemplo 3:

Por fim, consideremos o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -2 \end{cases}$. Vamos desenhar as retas que representam as soluções de cada equação.

Ao inserir esses dados em um plano cartesiano, obtemos as respostas de ambas as equações.



As retas são paralelas e distintas, ou seja, não há pontos em comum que sejam solução do sistema.

Portanto, o sistema é **impossível**.

De modo geral:

- se as retas se cruzam em um único ponto, o sistema tem uma única solução: ele é **possível e determinado.**
- se as retas são paralelas e coincidentes, o sistema tem infinitas soluções: ele é **possível e indeterminado.**
- se as retas são paralelas e distintas, o sistema não tem solução: ele é **impossível.**

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

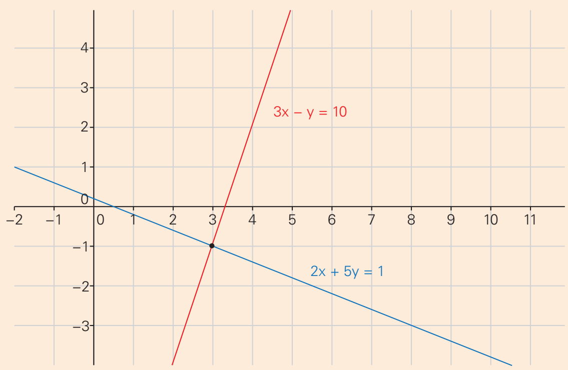
1. Sistema Dom Bosco – Determine graficamente a solução do sistema linear $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$.

Resolução

Com base nas equações, obtemos dois pontos para cada uma das retas. Assim:

Primeira equação:	Segunda equação:
$x = -2 \rightarrow y = 1$	$x = 2 \rightarrow y = -4$
$x = 8 \rightarrow y = -3$	$x = 4 \rightarrow y = 2$

Ao inserir estes pontos no plano cartesiano, obtemos:



Logo, pelo gráfico, a solução do sistema é o ponto (3, –1), dado pela intersecção das retas.

RESOLUÇÃO: MATRIZ ASSOCIADA

Para obter a matriz associada, precisamos organizar as incógnitas na mesma ordem. Depois, simplesmente extraímos seus coeficientes. Quando a matriz é formada pelos coeficientes das incógnitas, temos uma **matriz associada incompleta.** Quando ela é formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos seus respectivos termos independentes, temos uma **matriz associada completa.**

Considere o sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -x + 2y = 6 \end{cases}$:

A matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ é formada apenas pelos coeficientes das incógnitas do sistema, ou seja, uma matriz associada incompleta.

A matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ é composta pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes do sistema, ou seja, matriz associada completa.

Representação matricial de um sistema

Observe a equação matricial abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ao desenvolvermos a multiplicação, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x - 2 \cdot y \\ 4 \cdot x + 7 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da igualdade entre matrizes, temos:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x + 7y = 1 \end{cases}$$

O processo inverso também é válido. Dessa forma, a partir do sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$, obtemos a representação matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

2. Sistema Dom Bosco – Dado o sistema linear $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$, reescreva-o em forma matricial do tipo AX = B.

Resolução

Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 5y + 0z = 1 \\ 2x + 0y + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$, temos que a matriz incompleta é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para escrevermos o sistema na forma AX = B, temos que

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, logo a forma matricial será:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

RESOLUÇÃO: REGRA DE CRAMER

Observe o sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$. Vamos aplicar a regra de Cramer.

A matriz associada incompleta desse sistema é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, cujo determinante é D = 3 – 2 = 1. Já a matriz $A_x = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, obtida pela substituição da primeira coluna pelos termos independentes, tem determinante $D_x = 15 - 14 = 1$. Por sua vez, a matriz $A_y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$, obtida pela substituição da segunda coluna pelos termos independentes, tem determinante $D_y = 7 - 5 = 2$.

Uma vez que $D \neq 0$, podemos aplicar a regra de Cramer:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{1} = 1 \text{ e } y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{1} = 2$$

Assim, a solução do sistema é x = 1 e y = 2.

DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

O processo de discussão de um sistema linear, geralmente, é aplicado a sistemas em que um ou mais coeficientes não estão definidos. Assim, com base nessa discussão, serão determinados tais valores para esses coeficientes de modo que o sistema seja:

- possível e determinado;
- ou possível e indeterminado;
- ou impossível.

Pela regra de Cramer, sabemos que, para um sistema ser **possível e determinado**, o determinante da matriz associada incompleta não pode ser nulo. Dessa forma:

$$D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2$$

Se $D \neq 0 \rightarrow a - 2 \neq 0 \rightarrow a \neq 2$, temos um **sistema possível e determinado**.

Para $D = 0 \rightarrow a = 2$, podemos ter um sistema possível e indeterminado ou um sistema impossível, dependendo apenas dos valores de b.

Para isso, vamos substituir a = 2 e discutir com base no coeficiente b.

$$\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases}$$

Repare que o primeiro membro da primeira equação é igual ao dobro do primeiro membro da segunda equação.

Assim, se $b = \frac{1}{2}$, temos equações equivalentes. O sistema, então, é possível e indeterminado.

Portanto:

- para $a \neq 2$, o sistema é possível e determinado.
- para a = 2 e $b = \frac{1}{2}$, o sistema é possível e indeterminado.
- para a = 2 e $b \neq \frac{1}{2}$, o sistema é impossível.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3. Sistema Dom Bosco – Utilizando a regra de Cramer, resolva o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$.

Resolução

A matriz incompleta associada ao sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 6 - 1 - 3 - 4 = 1$$

Os determinantes A_x, A_y e A_z são:

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2$$

Então:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{0}{1} = 0$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{2}{1} = 2$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{-2}{1} = -2$$

Portanto, a solução do sistema é a terna (0, 2, $^-2$).

4. Sistema Dom Bosco – Discuta, em função de a, o sistema $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+ay=1 \end{cases}$.

Resolução

Do sistema de equações, podemos escrever a matriz associada incompleta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{bmatrix}$$

Logo, calculando o determinante, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix} \rightarrow D = a-6 \rightarrow D = 0 \rightarrow a-6 = 0 \rightarrow a = 6$$

Para $a \neq 6$: sistema possível e determinado.

Para $a = 6$:

Multiplicamos a equação 1 do sistema $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+ay=1 \end{cases}$ por –2 e somamos com a equação 2:

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 0x+0y=-9 \end{cases}$$

Logo, sistema impossível.

Assim:

$a \neq 6 \rightarrow$ SPD (sistema possível e determinado)

$a = 6 \rightarrow$ SI (sistema impossível)

ROTEIRO DE AULA

SISTEMAS LINEARES

Método gráfico

A solução de um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas pode ser obtida graficamente.

A solução é o ponto de intersecção entre duas retas associadas a ambas as equações.

Matriz associada

Os coeficientes das equações que formam o sistema serão elementos da matriz.

Para obter a matriz associada, é necessário organizar as incógnitas na mesma ordem e extrair seus coeficientes.

Matriz associada incompleta.

Formada pelos coeficientes das incógnitas.

Matriz associada completa.

Formada pelos coeficientes das incógnitas e por seus respectivos termos independentes.

ROTEIRO DE AULA

SISTEMAS LINEARES

Regra de Cramer

$X = \frac{D_x}{D}$ e $y = \frac{D_y}{D}$.

Aplicado geralmente a sistemas em que um ou mais coeficientes não estão definidos.

Discussão

Sistema possível e determinado.

- determinante da matriz associada incompleta não pode ser nulo.
- Solução única .

Sistema possível e indeterminado.

- Apresenta infinitas soluções.

Sistema impossível.

- Não possui solução.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RS – O sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$ pode ser apresentado como

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

O sistema deve ser decomposto numa matricial, assim:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. Sistema Dom Bosco – Utilizando a regra de Cramer, resolva o sistema

$$\begin{cases} 3x - 5y = 12 \\ 4x + 7y = 19 \end{cases}$$

e assinale a opção que contém o valor do denominador referente ao valor de x obtido.

a) –9
b) 9
c) 41
d) 104
e) 64

Resolvendo por Cramer, temos:

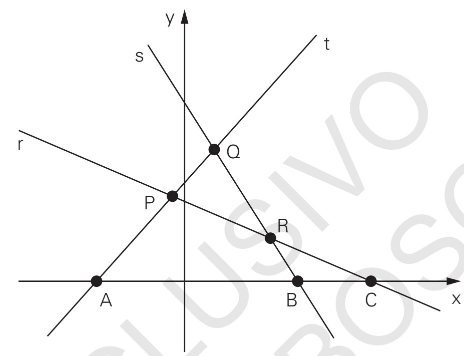
$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 20 = 41$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & -5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 84 + 20 = 104$$

$$x = \frac{D_x}{D} \rightarrow x = \frac{104}{41}$$

3. Enem C1-H1

Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de interseções entre as retas, e A, B e C os pontos de interseções dessas retas com o eixo x.



Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que

a) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.
b) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.
c) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.
d) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.
e) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

Geometricamente uma solução é um ponto de interseção entre as retas. Logo, para que as três equações tenham uma solução em comum, devem ter um ponto de interseção entre as três retas. Como isso não acontece, concluímos que não existe solução que satisfaça as três equações.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

4. Sistema Dom Bosco

A chamada "crise do apagão", que ocorreu no Brasil em 2001 e 2002, foi o resultado da combinação da falta de investimentos na geração e na transmissão de energia elétrica com uma estiagem prolongada, que reduziu drasticamente os níveis dos principais reservatórios de água no país, nas regiões Sudeste e Nordeste. Essa combinação impossibilitou a produção de energia suficiente para atender ao consumo, tanto industrial quanto residencial, levando o governo federal a implantar rigorosa política de racionamento, com a redução obrigatória do uso de energia pelos brasileiros e pelas empresas. Previsto para começar no dia 1º de junho de 2001, o governo antecipou as medidas em duas semanas e, no dia 16 de maio, o Brasil, de fato, iniciou o maior racionamento da sua História, encerrado somente no dia 28 de fevereiro do ano seguinte.

Fonte: <https://acervo.oglobo.globo.com/fatos-historicos/da-falta-de-estrutura-fez-se-crise-do-apagao-no-brasil-do-inicio-do-seculo-xxi-9396417>. Acesso em: abr. 2019.

Um supermercado possui, nas cidades A e B, uma unidade e um depósito. Na cidade A, a unidade e o depósito gastam o dobro e o triplo, respectivamente, da energia elétrica do que aqueles da cidade B. Por conta de um racionamento de energia elétrica no estado, o gasto de energia elétrica das unidades e dos depósitos foram limitados a uma conta mensal. Na cidade A, a cota total, incluindo a unidade e o depósito, foi de 16 000 kWh. Na cidade B, essa cota foi de 6 000 kWh. Supondo que o limite das cotas foi utilizado em ambas as cidades, o consumo dos dois depósitos foi igual a

a) 4 000 kWh.
b) 12 000 kWh.
c) 16 000 kWh.
d) 18 000 kWh.
e) 20 000 kWh.

Consideramos x (gasto da unidade) e y (gasto do depósito) na cidade B:

$$\begin{cases} 2x+3y=16\,000 \\ x+y=6\,000 \end{cases}$$

O determinante é:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

Substituímos a segunda coluna pela coluna das igualdades:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12\,000 - 16\,000 = -4\,000$$

Então:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-8\,000}{-1} \rightarrow y = 4\,000$$

Assim, o gasto dos dois depósitos foi:

$3\,y + y = 4\,y = 4 \cdot 4\,000 = 16\,000$

5. UFJF-MG – Considere o sistema

$$\begin{cases} x+3y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x-4y=0 \end{cases}$$

É correto afirmar que:

a) O sistema é possível e indeterminado.
b) $x = 4$, $y = 1$ e $z = 0$ é a única solução do sistema.
c) $x = -4$, $y = 1$ e $z = 1$ é a única solução do sistema.
d) O sistema é impossível.
e) $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ é a única solução do sistema.

Observamos que o sistema é homogêneo e calculamos o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot (-4) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 \cdot 0 =$$

$$= 3 - 8 + 1 + 4 = 0$$

Ou seja, o sistema é possível e indeterminado.

6. IFPE (adaptado) – Cristina resolveu empilhar seus 48 livros de duas coleções, de Matemática e de História. Seus livros de Matemática possuem 8 cm de espessura cada um, enquanto os livros de História possuem 5 cm de espessura cada um. No fim da organização, Cristina viu que a pilha de livros tinha 321 cm de altura. Quantos livros de Matemática Cristina possui?

Sendo m (livros de Matemática) e h (os de História), obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} m+h=48 \\ 8m+5h=321 \end{cases}$$

O determinante é dado por:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 48 & 1 \\ 321 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 48 - 321 = 240 - 312 = -81$$

Então:

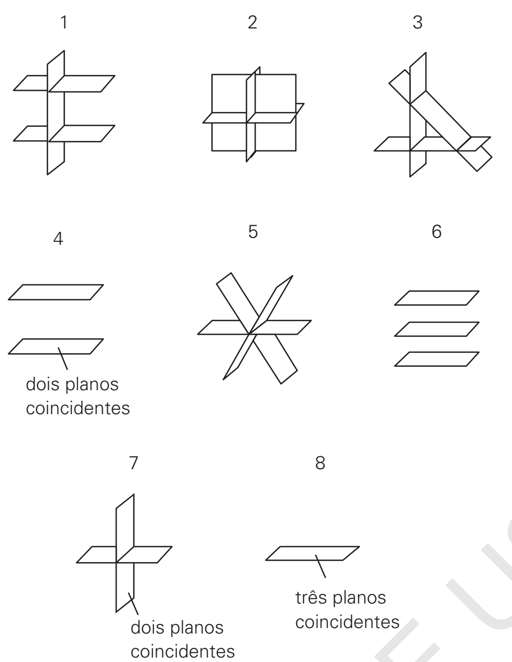
$$m = \frac{D_x}{D} = \frac{-81}{-3} \rightarrow m = 27$$

Portanto, Cristina tem 27 livros de Matemática.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Insper-SP – No plano cartesiano 0xy, equações lineares com duas incógnitas, do tipo $ax + by = c$, representam retas. Já em relação a um sistema de coordenadas cartesianas 0xyz no espaço, equações lineares com três incógnitas representam planos.

Por exemplo, na figura abaixo, pode-se ver a representação da equação $2x + y + z = 4$ em relação ao sistema de coordenadas 0xyz.



Sendo assim, das representações gráficas numeradas acima, correspondem a sistemas lineares 3×3 com infinitas soluções apenas

a) 5, 7 e 8.
b) 1, 3 e 7.
c) 4, 6 e 8.
d) 2, 5 e 7.
e) 1, 2, 3, 5 e 7.

8. Unicamp-SP (adaptado) – As companhias aéreas costumam estabelecer um limite de peso para a bagagem de cada passageiro, cobrando uma taxa por quilograma de excesso de peso. Quando dois passageiros compartilham a bagagem, seus limites são considerados em conjunto. Em um determinado voo, tanto um casal como um senhor que viajava sozinho transportaram 60 kg de bagagem e foram obrigados a pagar pelo excesso de peso. O valor que o senhor pagou correspondeu a 3,5 vezes o valor pago pelo casal. Para determinar o peso excedente das bagagens do casal (x) e do senhor que viajava sozinho (y), bem como o limite de peso que um passageiro pode transportar sem pagar qualquer taxa (z), pode-se resolver o seguinte sistema linear:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3{,}5 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3{,}5 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3{,}5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3{,}5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9. Sistema Dom Bosco – Um paciente, após realizar uma cirurgia, deve seguir uma dieta rigorosa composta por duas refeições diárias. Nessas refeições, devem ser consumidas duas vitaminas, chamadas de A, B e C, nas quantidades de 10 000, 8 000 e 12 000 unidades, respectivamente. A tabela a seguir indica a quantidade dessas vitaminas, em unidades por grama, presentes em três alimentos diferentes.

	Vitamina 1	Vitamina 2	Vitamina 3
Alimento 1	15	30	35
Alimento 2	50	45	20
Alimento 3	30	25	50

Se a terna (x, y, z) representa a quantidade de cada alimento, em gramas, que o paciente deve consumir, a matriz M que satisfaz à relação

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\,000 \\ 8\,000 \\ 12\,000 \end{pmatrix} \text{ é}$$

a) $\begin{pmatrix} 35 & 30 & 15 \\ 20 & 45 & 20 \\ 50 & 25 & 30 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 30 & 35 \\ 50 & 1 & 20 \\ 30 & 25 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 15 & 30 & 35 \\ 50 & 45 & 20 \\ 30 & 25 & 50 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 15 & 50 & 30 \\ 30 & 45 & 25 \\ 35 & 25 & 50 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 35 & 25 & 50 \\ 30 & 45 & 25 \\ 15 & 50 & 30 \end{pmatrix}$

10. Fuvest-SP – No sistema linear

$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = m \end{cases}$$

nas variáveis x, y e z, a e m são constantes reais. É correto afirmar que:

a) No caso em que a = 1, o sistema tem solução se, e somente se, m = 2.
b) O sistema tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.
c) No caso em que m = 2, o sistema tem solução se, e somente se, a = 1.
d) O sistema só tem solução se a = m = 1.
e) O sistema não tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

11. Sistema Dom Bosco – Na produção de móveis de cozinha, uma fábrica dispõe de três cores diferentes de puxadores (acinzentado, ouro-velho e prateado), para serem utilizados nos gabinetes de pia de MDF e de madeira maciça, nos modelos chamados Lisa, Nita e Bia. Para um determinado mês de produção, a tabela 1 indica a quantidade de gabinetes produzidos, e a tabela 2, a quantidade de puxadores utilizados em cada um dos gabinetes.

Tabela 1: Produção de gabinetes

	Modelo		
Tipo de madeira	Lisa	Nita	Bia
MDF	3	5	4
Maciça	4	3	5

Tabela 2: Quantidade de puxadores utilizados

	Tipo de madeira	
Tipo	MDF	Maciça
Acinzentado	10	12
Ouro-velho	8	8
Prateado	4	6

No mês de produção apresentado, o número de puxadores utilizados nos gabinetes do modelo Bia foi de

a) 170
b) 192
c) 120
d) 218
e) 188

12. UEPG-PR (adaptado) – Dados os sistemas S_1:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases} \text{ e } S_2: \begin{cases} mx + 4y = 5 \\ 3x - y = k \end{cases}$$, nas variáveis x e y,

assinale o que for correto.

I. S_2 é possível e determinado para $m = -12$ e $k = -\frac{5}{4}$.

II. S_2 é impossível para $m = -12$ e $k \neq -\frac{5}{4}$.

III. Se S_1 e S_2 são equivalentes, então $k + m = 13$.

IV. S_2 é possível e indeterminado para $m \neq -12$ e $k = -\frac{5}{4}$.

V. Se (x, y) é a solução de S_1, então $x + y = 4$.

a) Apenas I e II são corretas.
b) Apenas I e III são corretas.
c) Apenas I, IV e V são corretas.
d) Apenas II e III são corretas.
e) Apenas II, III e V são corretas.

13. Unicamp-SP – Considere o sistema linear nas variáveis x, y e z

$$\begin{cases} x+2y+3z=20 \\ 7x+8y-mz=26 \end{cases}$$

onde m é um número real. Sejam a < b < c números inteiros consecutivos tais que (x, y, z) = (a, b, c) é uma solução desse sistema. O valor de m é igual a

a) 3.
b) 2.
c) 1.
d) 0.

14. Mackenzie-SP – Um teste de Matemática tem questões valendo 1 ponto, 2 pontos e 3 pontos. Se um estudante obteve 55 pontos em 30 questões desse teste e acertou 5 questões de 2 pontos a mais do que o número de questões de 1 ponto que ele acertou, determine o número de questões de 3 pontos, respondidas corretamente por ele.

15. Sistema Dom Bosco – Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases}$$

com a, b, c, d, p, e q reais, abcd ≠ 0, a + b = m e d = nc. Sabe-se que o sistema é indeterminado. O valor de p + q é

a) m
b) $\frac{m}{n}$
c) $m^2 - n^2$
d) mn
e) m + n

16. ITA-SP – Se o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2a^2y+(2a^4-a)z=0 \\ x+ay+(a^3-1)z=0 \end{cases}$$

admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são

a) $0, -1, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.
b) $0, -1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.
c) $0, -1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.
d) $0, -1, -1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}$.
e) $0, -1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

17. **Unicamp-SP**– Sabendo que m é um número real, considere o sistema linear nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} mx + 2z = 4 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + mz = 4 \end{cases}$$

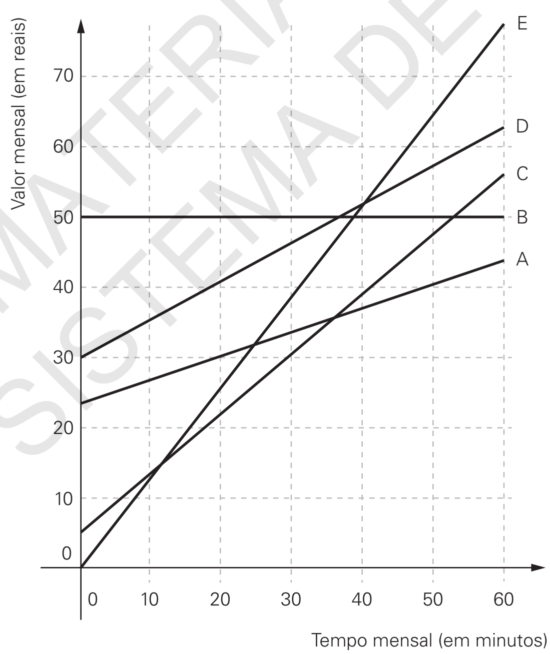
a) Seja A a matriz dos coeficientes desse sistema. Determine os valores de m para os quais a soma dos quadrados dos elementos da matriz A é igual à soma dos elementos da matriz $A^2 = A \cdot A$.

b) Para $m = 2$, encontre a solução do sistema linear para a qual o produto xyz é mínimo.

ESTUDO PARA O ENEM

18. **Enem (adaptado)** C6-H26

No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



Assumindo que as retas representam as soluções de um sistema linear, é possível afirmar que o sistema linear

a) possui 5 incógnitas, 5 equações e possui solução única.

b) possui 6 incógnitas, 5 equações e não possui solução.

c) possui 2 incógnitas, 5 equações e o sistema linear possui solução única.

d) possui 2 incógnitas, 5 equações e o sistema linear não possui solução.

e) possui 2 incógnitas, 5 equações e o sistema linear possui infinitas soluções.

19. Sistema Dom Bosco C6-H24

A resolução de sistemas lineares envolve o uso da teoria relacionada a matrizes e determinantes. Em 1855, em um artigo, o inglês Arthur Cayley (1821-1895) utilizou as matrizes para auxiliar o estudo de sistemas lineares. No artigo, o sistema linear era transformado em uma equação matricial, e a solução dessa equação, de modo equivalente, também era a solução do sistema. Atualmente, essa equivalência é dada, por exemplo, da seguinte forma:

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ 5x+3y=14 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Se A, X e B representarem as matrizes $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$, então a equação matricial é indicada por $A \cdot X = B$. A solução para essa equação é dada por $X = A^{-1} \cdot B$. A matriz A^{-1} é a matriz inversa de A.

Utilizando as informações apresentadas, determine a soma da solução (x, y) do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x + 6y = 21 \end{cases}$.

a) –1
b) 0
c) 1
d) 2
e) 3

20. Enem C5-H21

O Indicador do CadÚnico (ICadÚnico), que compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da média aritmética entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros (TC) e a taxa de atualização de cadastros (TA), em que, $TC = \frac{NV}{NF}$, $TA = \frac{NA}{NV}$, NV é o número de cadastros domiciliares válidos no perfil do CadÚnico, NF é o número de famílias estimadas como público-alvo do CadÚnico e NA é o número de cadastros domiciliares atualizados no perfil do CadÚnico.

Portaria nº 148, de 27 de abril de 2006. (Adaptado)

Suponha que o IcadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando NF o IcadÚnico cairá para 0,5.

Se NA + NV = 3 600, então NF é igual a

a) 10 000.
b) 7 500.
c) 5 000.
d) 4 500.
e) 3 000.

ELIZABETH SCOFIDIO/SHUTTERSTOCK

MATEMÁTICA 2

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

17 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

- Geometria espacial de posição
- Projeção ortogonal
- Poliedro
- Superfícies poliédricas
- Relações de Euler
- Poliedro de Platão

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma para selecionar argumentos que solucionem problemas do cotidiano.
- Identificar a relação de dependência entre grandezas.

GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

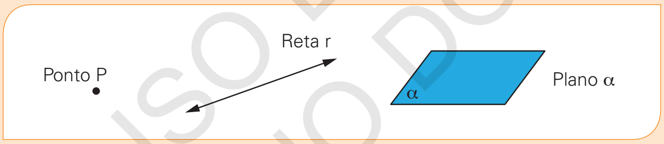
Espaço é o conjunto de todos os pontos.

A Geometria espacial é a parte da Geometria que estuda as posições relativas entre os elementos básicos (ponto, reta, plano), com base em alguns postulados.

As primeiras propriedades de uma teoria simplesmente são aceitas como verdadeiras. Chamamos essas propriedades de **postulados**.

POSTULADOS DA EXISTÊNCIA

- Existem ponto, reta e plano.



- Na reta e fora dela existem infinitos pontos.

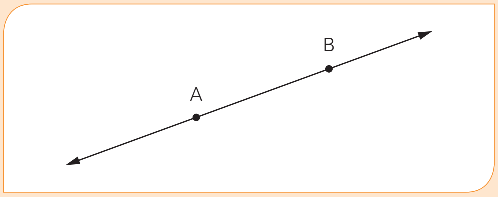
Pontos colineares são aqueles que pertencem à mesma reta, como os pontos **A**, **B** e **C** da figura acima.

- No plano ou fora dele existem infinitos pontos.

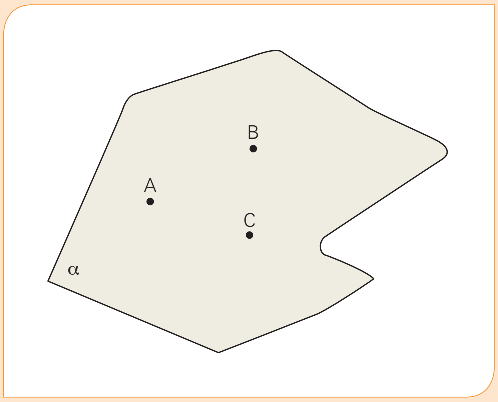
Pontos coplanares são aqueles que pertencem ao mesmo plano.

POSTULADOS DA DETERMINAÇÃO

Dois pontos distintos determinam uma única reta.



Três pontos não colineares determinam um único plano.



POSTULADO DA INCLUSÃO

A reta com dois pontos distintos em um plano está nele contida.

POSTULADOS DA DIVISÃO

Um ponto da reta a divide em duas regiões denominadas **semirretas**. Estas são denominadas opostas com origem no ponto.

Uma reta de um plano o divide em duas regiões denominadas **semiplanos**. Estes serão opostos com origem na reta.

Um plano divide o espaço em duas regiões denominadas **semiespaços**. Estes serão opostos com origem no plano.

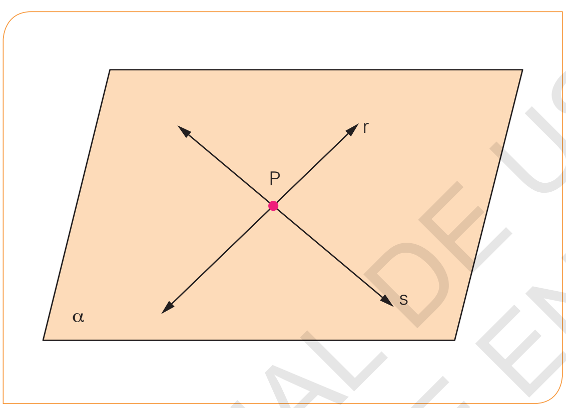
POSTULADOS DA INTERSECÇÃO

Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então há uma única reta em comum passando por esse ponto.

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

Retas concorrentes

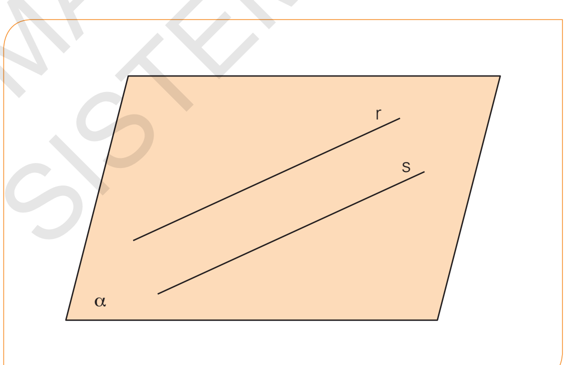
Duas retas que têm um único ponto em comum são denominadas concorrentes.



$r \cap t = \{P\} \leftrightarrow r \times t$ (concorrentes)

Retas paralelas

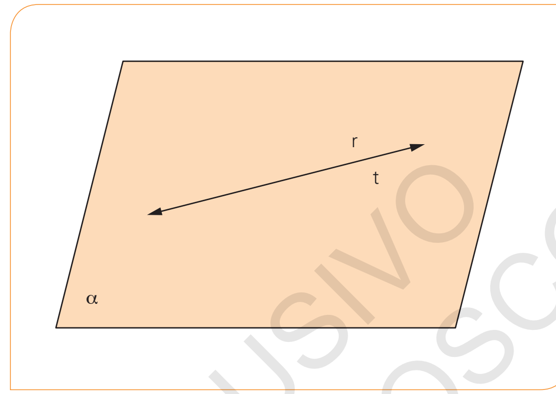
Duas retas distintas, coplanares e que não têm nenhum ponto em comum são denominadas paralelas distintas.



$\exists\, \alpha \mid r \subset \alpha$ e $t \subset \alpha$ e $r \cap b = \{\ \} \leftrightarrow r \,//\, t$ (paralelas distintas)

Retas paralelas coincidentes

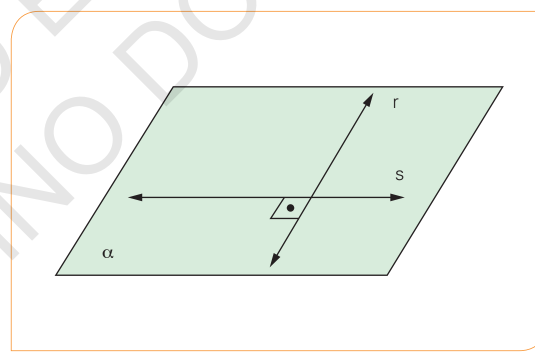
Duas retas paralelas que têm todos os pontos em comum são denominadas coincidentes.



$r \cap s = r = t \leftrightarrow r$ e t são coincidentes

Retas perpendiculares

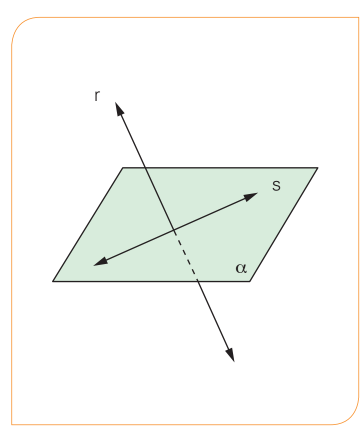
Duas retas concorrentes que formam um ângulo reto entre si são denominadas perpendiculares.



$r \perp s$ (a reta r é perpendicular à reta s)

Retas reversas

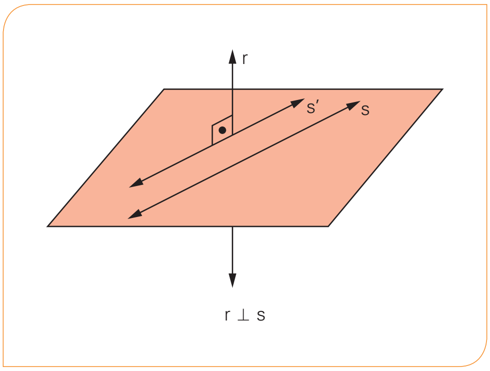
Duas retas são reversas quando não são coplanares.



$\exists\, \alpha \mid r \subset \alpha$ e $s \not\subset \alpha \leftrightarrow$ r e s são reversas

Retas ortogonais

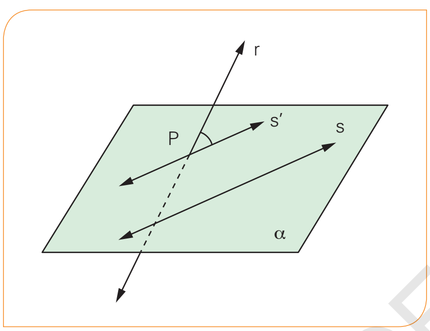
Quando duas retas reversas formam um ângulo reto entre si, são classificadas como ortogonais.



Ângulo entre duas retas reversas

Em referência a um ângulo formado por duas retas, considera-se o ângulo agudo formado entre elas.

Vamos considerar duas retas reversas **r** e **s**. Seja α um plano que contém **s** e intercepta **r** num ponto **P** e trançando por **P** a reta **s'**, paralela a **s**, dizemos que o ângulo entre **r** e **s** é o ângulo entre as retas concorrentes **r** e **s'**.

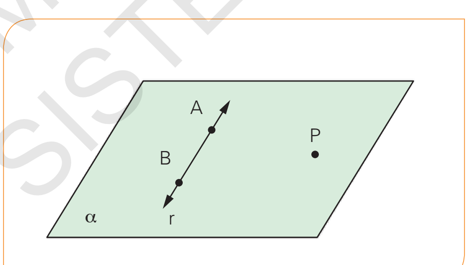


PLANO DETERMINADO POR TRÊS PONTOS NÃO COLINEARES

Três pontos não colineares determinam um plano.

PLANO DETERMINADO POR UMA RETA E UM PONTO FORA DELA

Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.



PLANO DETERMINADO POR DUAS RETAS PARALELAS DISTINTAS

Duas retas paralelas distintas determinam um plano.

PLANO DETERMINADO POR DUAS RETAS CONCORRENTES

Duas retas concorrentes determinam um plano.

QUADRILÁTERO PLANO REVERSO

Vamos considerar quatro pontos (**A**, **B**, **C**, **D)**, de modo que não existam três colineares. Em relação ao plano α determinado pelos pontos **B**, **C**, **D**, o ponto **A** pode ou não pertencer a ele. Assim:

$A \in \alpha\ (BCD)$

Os pontos **A**, **B**, **C**, **D** são vértices de um quadrilátero chamado **quadrilátero plano**.

$A \notin \alpha\ (BCD)$

Os pontos **A**, **B**, **C** e **D** são vértices de um quadrilátero chamado **quadrilátero reverso**.

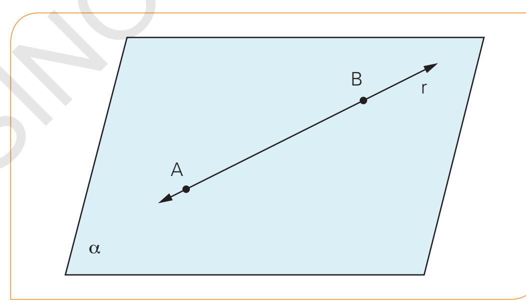
As diagonais de um quadrilátero plano estão em retas concorrentes. Por sua vez, as diagonais de um quadrilátero reverso estão em retas reversas.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E PLANO

Existem três posições possíveis entre reta e plano.

Reta contida no plano (continência)

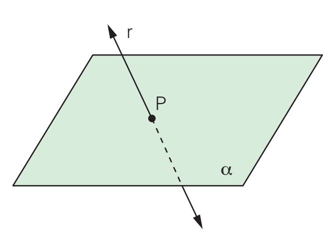
Uma reta está contida em um plano quando ela tem dois pontos distintos pertencentes ao plano.



$$\left.\begin{array}{c} A \in \alpha \text{ e } A \in r \\ B \in \alpha \text{ e } B \in r \\ A \neq B \end{array}\right\} \leftrightarrow r \subset \alpha \leftrightarrow r \cap \alpha = r$$

Reta concorrente com o plano (concorrência)

Uma reta e um plano que têm um único ponto em comum são denominados concorrentes ou secantes.

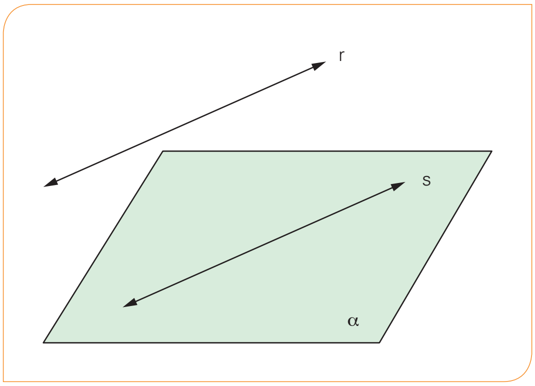


$\exists P \mid r \cap \alpha = \{P\} \leftrightarrow r$ e α são concorrentes

O ponto P é denominado **traço** da reta no plano.

Reta paralela ao plano (paralelismo)

Quando uma reta e um plano não têm pontos em comum, então são paralelos entre si.



$$r \cap \alpha = \{\ \} \leftrightarrow r \,//\, \alpha$$

Se a reta **r** é paralela ao plano α, ela não tem ponto em comum com α. Desse modo, não tem ponto em comum com as retas contidas em α. Logo, se a reta é paralela ao plano, então ela é paralela ou reversa a qualquer reta do plano.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DOIS PLANOS

Planos concorrentes

Quando dois planos têm uma reta em comum, são denominados concorrentes ou secantes.

Planos paralelos coincidentes

Quando dois planos têm todos os pontos em comum, são classificados como paralelos coincidentes.

Planos paralelos distintos

Quando dois planos não têm ponto em comum, são denominados planos paralelos distintos.

Paralelismo entre planos

Teorema 1

Se dois planos são paralelos e distintos, qualquer reta de um deles é paralela ao outro.

Teorema 2

Se dois planos são paralelos distintos, toda reta concorrente com um deles é concorrente com o outro.

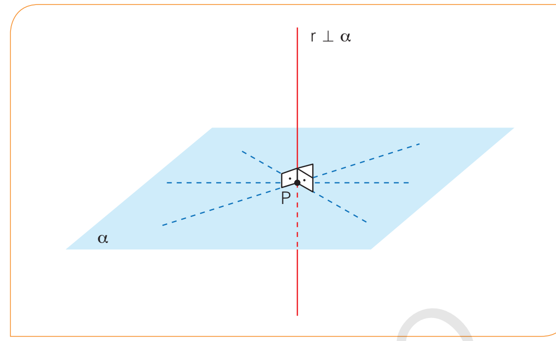
Teorema 3

Se um plano contém duas retas concorrentes paralelas a outro plano, então esses planos também são paralelos.

PERPENDICULARISMO

Reta e plano perpendiculares

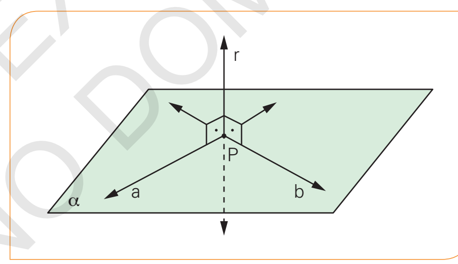
Uma reta **r** é **perpendicular** a um plano **α** quando ela é concorrente ao plano e perpendicular a todas as retas de α que passam por seu traço no plano.



$$\left.\begin{array}{r} r \cap \alpha = \{P\} \\ \forall \text{ reta} \subset \alpha \mid P \in \text{reta} \\ r \perp \text{reta} \end{array}\right\} \rightarrow r \perp \alpha$$

Teorema do perpendicularismo entre reta e plano

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

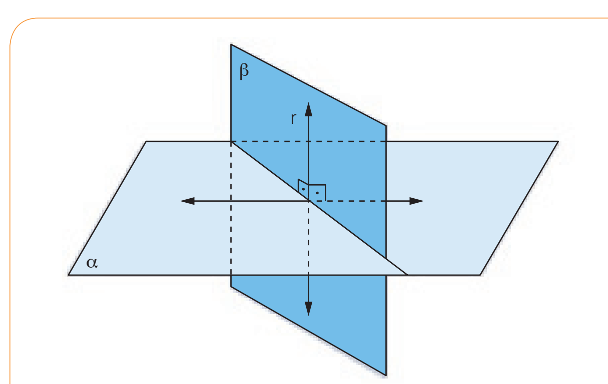


$$\left\{\begin{array}{l} a \subset \alpha,\ b \subset \alpha \\ r \perp a,\ \ r \perp b \\ a \cap b = \{P\} \end{array}\right.$$

Logo, $r \perp \alpha$.

Planos perpendiculares

Dois planos são perpendiculares se um deles contém uma reta perpendicular ao outro.



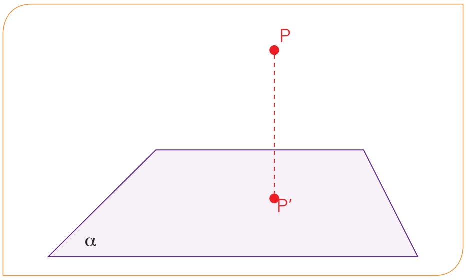
$$\left.\begin{array}{r} r \subset \beta \\ r \perp \alpha \end{array}\right\} \leftrightarrow \alpha \perp \beta$$

PROJEÇÃO ORTOGONAL

A projeção ortogonal das figuras geométricas sobre um plano corresponde à imagem formada nesse plano pelo pé do segmento de reta ortogonal que liga cada ponto dessa figura ao plano.

PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM PONTO SOBRE O PLANO

A figura formada pela **projeção ortogonal** de um ponto **P** sobre o plano α é um ponto **P'**.



PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM SEGMENTO DE RETA SOBRE UM PLANO

A projeção de uma reta sobre um plano está condicionada ao ângulo que a reta forma com o plano. Caso a reta seja perpendicular ao plano, sua projeção será apenas um ponto, conforme a figura 1. Caso a reta esteja paralela ou inclinada em relação ao plano, sua projeção também será uma reta, limitada por suas extremidades, projetadas ortogonalmente ao plano, conforme a figura 2.

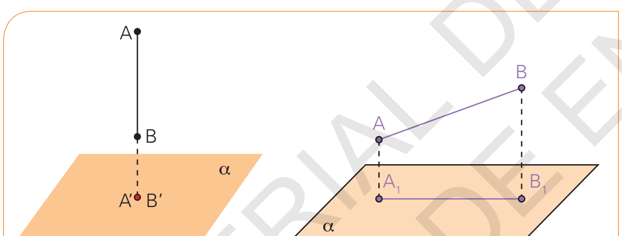
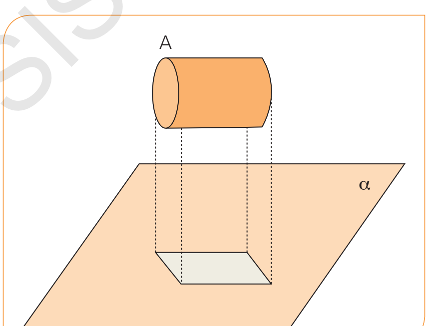


Fig. 1 Fig. 2

PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UMA FIGURA GEOMÉTRICA

A projeção ortogonal de uma figura é composta do conjunto de todos os pontos do objeto A, sobre o plano α, conforme a figura.



EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. UFSCar-SP – Considere um plano α e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçarmos a reta perpendicular a α, a intersecção dessa reta com α é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto P sobre α. No caso de uma figura S no espaço, a projeção ortogonal de S sobre α é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos.

Com relação a um plano α qualquer fixado, pode-se dizer que

a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar em uma semirreta.

b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.

c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.

d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.

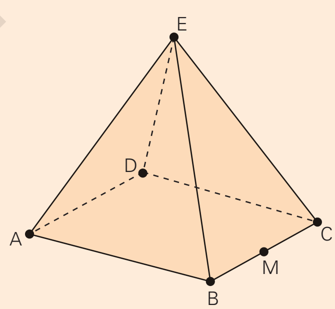
e) a projeção de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

Resolução

Caso a circunferência esteja contida em um plano perpendicular a α, sua projeção ortogonal será um segmento de reta.

2. Enem C2-H6

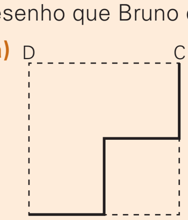
João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



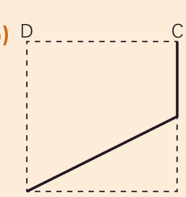
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

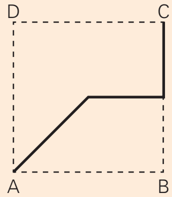
O desenho que Bruno deve fazer é

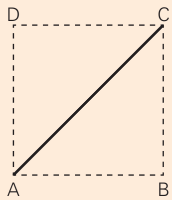
a)

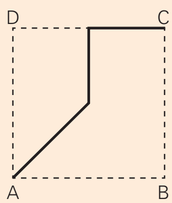


b)



c)


d)


e)


Resolução

A figura da alternativa C corresponde à projeção ortogonal do deslocamento do plano da base da pirâmide, supondo ser uma pirâmide regular.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

POLIEDRO

A região do espaço delimitada por uma superfície poliédrica fechada é denominada **poliedro**.

Quando a superfície poliédrica fechada é convexa, o poliedro por ela delimitado é classificado como **poliedro convexo**.

O poliedro convexo é composto de um número finito n ($n \geqslant 4$) de polígonos convexos, tais que:

- dois desses polígonos nunca sejam coplanares;
- o plano contendo um deles deixe os demais no mesmo semiespaço;
- cada lado do polígono seja comum a somente dois polígonos.

ELEMENTOS DOS POLIEDROS

Todo poliedro é composto de face (F), aresta (A) e vértice (V).

SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS

Considere n ($n \in \mathbb{N}^*$) polígonos convexos (regiões poligonais), tais que:

- dois polígonos que tenham um lado em comum nunca sejam coplanares;
- o plano contendo um dos polígonos deixe os demais no mesmo semiespaço;
- cada lado do polígono pertença no máximo a dois polígonos.

Por fim, a união desses polígonos forma a figura denominada **superfície poliédrica convexa**.

SUPERFÍCIE POLIÉDRICA ABERTA

Uma superfície poliédrica que tenha arestas livres é denominada **superfície poliédrica aberta**.

SUPERFÍCIE POLIÉDRICA FECHADA

Uma superfície poliédrica que não tenha arestas livres é denominada **superfície poliédrica fechada**.

RELAÇÕES DE EULER

Sendo:

- V = número de vértices do poliedro;
- A = número de arestas do poliedro;
- F = número de faces do poliedro.
- Para uma superfície poliédrica aberta, temos:

$V - A + F = 1$

- Para uma superfície poliédrica fechada, ou poliedro convexo, temos:

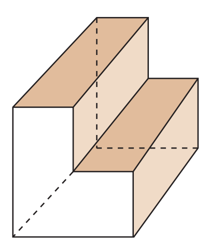
$V - A + F = 2$

Os poliedros que satisfazem essa relação são denominados **poliedros eulerianos**.

Observação: A relação de Euler vale para todos os poliedros convexos, sendo que existem poliedros não convexos e mesmo assim **eulerianos**.

Exemplo:

O poliedro abaixo, apesar de não ser convexo, é euleriano?



$$\left.\begin{array}{r} V = 12 \\ A = 18 \\ F = 8 \end{array}\right\}$$

$V - A + F = 2$

$12 - 18 + 8 = 2$

$2 = 2 \therefore$ É um poliedro euleriano.

A soma dos ângulos de todas as faces do poliedro convexo, sendo V o número de vértices e r o ângulo reto, é dada por $S = (V - 2) \cdot 4r$.

POLIEDRO DE PLATÃO

O poliedro euleriano é considerado poliedro de Platão, quando:

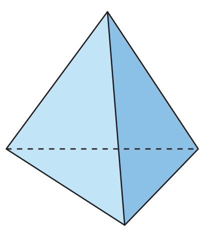
a) todas as faces têm o mesmo número de arestas;
b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas.

Existem apenas cinco poliedros de Platão. Observe a tabela a seguir.

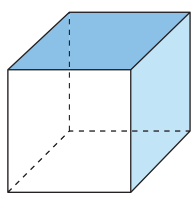
Nome	Tipo de face	V	F	A
Tetraedro	Triângulo	4	4	6
Hexaedro	Quadrilátero	8	6	12
Octaedro	Triângulo	6	8	12
Dodecaedro	Pentágono	20	12	30
Icosaedro	Triângulo	12	20	30

POLIEDROS REGULARES

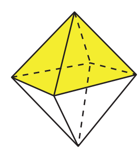
Os poliedros de Platão cujas faces são polígonos regulares congruentes e cujos ângulos poliédricos são congruentes são denominados **poliedros regulares** (os cinco descritos na tabela anterior).



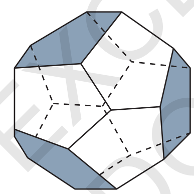
Tetraedro regular
(4 triângulos equiláteros)



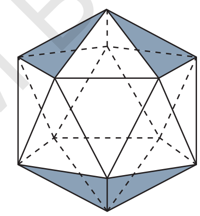
Hexaedro regular
(6 quadrados)



Octaedro regular
(8 triângulos equiláteros)



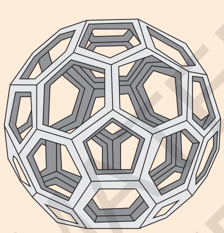
Dodecaedro regular
(12 pentágonos regulares)



Icosaedro regular
(20 triângulos equiláteros)

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

3. Cesgranrio – O poliedro da figura (uma invenção de Leonardo da Vinci utilizada modernamente na fabricação de bolas de futebol) tem como faces 20 hexágonos e 12 pentágonos, todos regulares. O número de vértices do poliedro é:



a) 64
b) 90
c) 60
d) 72
e) 56

Resolução

Como há 20 hexágonos e 12 pentágonos:

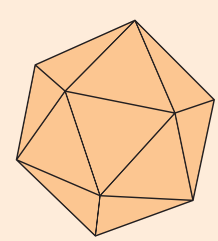
$F = 20 + 12 = 32$

$A = \dfrac{20 \cdot 6 + 12 \cdot 5}{2} = 90$

$V + F - A = 2$

$V = 2 + A - F = 2 + 90 - 32 = 60 \therefore V = 60$

4. Sistema Dom Bosco – Quantos vértices tem o icosaedro regular, um dos sólidos de Platão, composto de 20 triângulos equiláteros?



Resolução

Primeiro calculamos o número de arestas do icosaedro.

$A = \dfrac{20 \cdot 3}{2} = 30$

Como o icosaedro é um poliedro euleriano:

$V + F - A = 2$

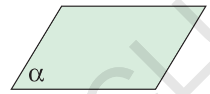
$V = 2 + A - F = 2 + 30 - 20 = 12$

Portanto, o icosaedro tem 12 vértices.

GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Postulados

Num plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.



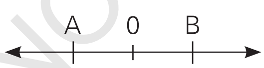
Plano α

Existem ponto, reta e plano.

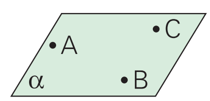
P

Ponto **P**

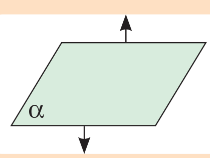
Um ponto de reta a divide em duas regiões denominadas semirretas.



Três pontos não colineares determinam um único plano.



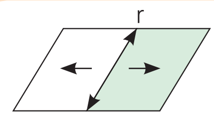
Um plano divide um espaço em duas regiões denominadas semiespaço.



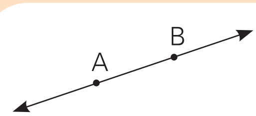
Na reta e fora dela existem infinitos pontos

Reta **r**

Uma reta de um plano o divide em duas regiões denominadas semiplanos



Dois pontos distintos determinam uma única reta.



Projeção ortogonal

Imagem formada pelo pé do segmento de reta ortogonal que liga cada ponto.

ROTEIRO DE AULA

POLIEDROS

RELAÇÕES DE EULER

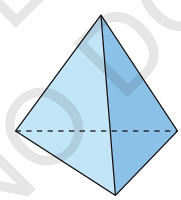
SUPERFÍCIE POLIÉDRICA ABERTA

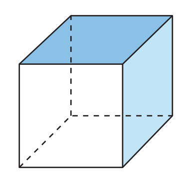
$V - A + F =$ 1

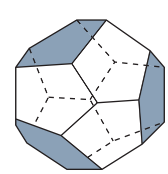
SUPERFÍCIE POLIÉDRICA ABERTA

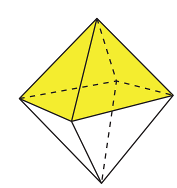
$V - A + F =$ 2

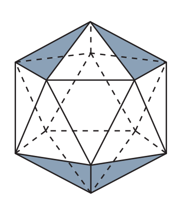
POLIEDROS DE PLATÃO


Tetraedro regular
(4 triângulos equiláteros)


Hexaedro regular
(6 quadrados)


Dodecaedro regular
(12 pentágonos regulares)


Octaedro regular
(8 triângulos equiláteros)

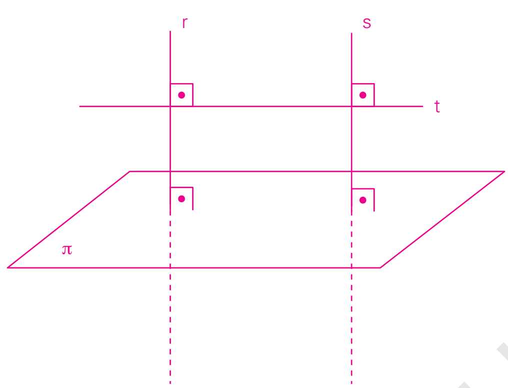

Icosaedro regular
(20 triângulos equiláteros)

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEM-PR – No espaço tridimensional, considere um plano π e as retas r, s e t, distintas duas a duas, de modo que r e s são perpendiculares ao plano π e a reta t não possua qualquer ponto em comum com o plano π e seja concorrente com as retas s e r. Sobre a situação descrita, assinale o que for correto.

01) As retas r e s são paralelas.
02) As retas s e t são reversas.
04) A reta t é paralela ao plano π
08) A reta s é perpendicular a qualquer reta do plano π concorrente a ela.
16) Se A e B são pontos distintos de r, e P e Q são pontos distintos de s, então os triângulos APQ e BPQ possuem a mesma área.

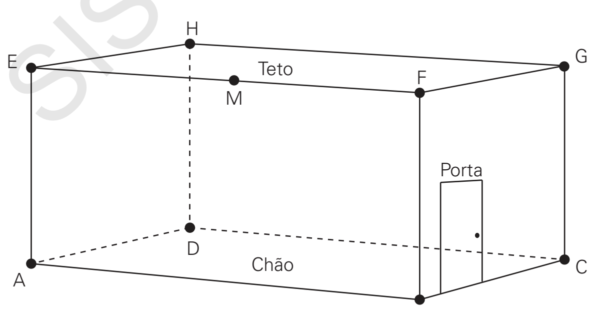
29 (01 + 04 + 08 + 16)
A figura abaixo ilustra a situação descrita na questão.



01) Verdadeira, pois são paralelas ao plano.
02) Falsa, pois são concorrentes.
04) Verdadeira, porque não tem ponto comum com o plano.
08) Verdadeira, pois formará 90° com qualquer reta do plano que seja concorrente a ela.
16) Verdadeira, porque terão a mesma base PQ e a mesma altura h, dada pela distância entre as retas paralelas r e s.

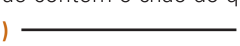
2. Enem C2-H6

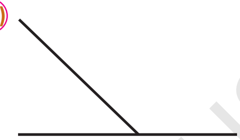
Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.

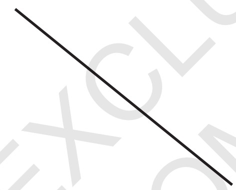


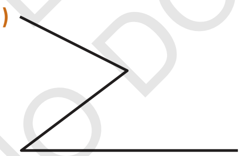
A lagartixa parte do ponto B e vai até o ponto A. A seguir, de A ela se desloca, pela parede, até o ponto M, que é o ponto médio do segmento EF. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto M até o ponto H. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

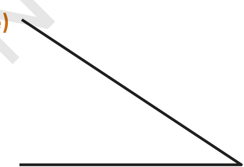
A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dada por:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Sendo B, A e M coplanares, a projeção ortogonal do deslocamento de A para M está contida no segmento $\overline{AB}$. Além disso, a projeção ortogonal do deslocamento de M para H sobre o chão do quarto corresponde a um segmento de reta oblíquo em relação a $\overline{AB}$, cuja origem é o ponto M', médio de $\overline{AB}$, e cuja extremidade é o ponto D, projeção de H sobre o plano ABC.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

3. Enem C2-H7

Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

a) 6
b) 8
c) 14
d) 24
e) 30

Após os cortes, o poliedro P resultante é um sólido com 6 + 8 = 14 faces.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

4. UPE – Analise as afirmativas a seguir, relativas à geometria espacial e coloque V nas verdadeiras e F nas falsas.

( ) Se uma reta está contida em um plano, então toda reta perpendicular a ela será perpendicular ao plano.

( ) Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta perpendicular a um deles é paralela ao outro.

( ) Se dois planos distintos são paralelos a uma reta fora deles, então eles são paralelos entre si.

( ) Se dois planos distintos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.

Assinale a alternativa que apresenta a sequência CORRETA.

a) F – F – V – V
b) F – V – V – F
c) F – F – F – F
d) V – F – F – V
e) V – V – F – F

Falsa. Sejam α um plano e r uma reta contida em α. É imediato que existe pelo menos uma reta s contida em α tal que s é perpendicular a r. Logo, s não é perpendicular a α.

Falsa. Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.

Falsa. Sejam α e β dois planos distintos não paralelos. Basta considerar a reta r, interseção de α e β, e uma reta s paralela a r.

Falsa. Sejam α e β dois planos paralelos distintos. Se $r \in \alpha$, basta tomar $s \in \beta$ de modo que r e a projeção ortogonal de s sobre α sejam concorrentes.

5. IFSP – A figura mostra uma peça feita em 1587 por Stefano Buonsignori, e está exposta no Museu Galileo, em Florença, na Itália. Esse instrumento tem a forma de um dodecaedro regular e, em cada uma de suas faces pentagonais, há a gravação de um tipo diferente de relógio.

BETTMANN/GETTY IMAGES

Em 1758, o matemático Leonard Euler (1707-1783) descobriu o teorema conhecido por relação de Euler: em todo poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, vale a relação V – A + F = 2. Ao se aplicar a relação de Euler no poliedro da figura, o número de arestas não visíveis é

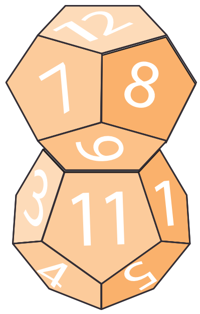
a) 10.
b) 12.
c) 15.
d) 16.
e) 18.

Número de arestas: $\frac{(12 \cdot 5)}{2} = 30$.

Número de arestas visíveis: 20.

Número de arestas não visíveis: 30 – 20 = 10.

6. UERJ (adaptado) – Dois dados, com doze faces pentagonais cada um, têm a forma de dodecaedros regulares. Se os dodecaedros estão justapostos por uma de suas faces, que coincidem perfeitamente, formam um poliedro côncavo, conforme ilustra a figura.



Considere o número de vértices V, de faces F e de arestas A desse poliedro côncavo.

Qual a soma V + F + A?

Para o dodecaedro regular, temos 12 faces pentagonais.

Então, $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$ arestas.

Utilizando a relação de Euler, temos:

$V - A + F = 2$

$V - 30 + 12 = 2$

$V = 20$ (vértices)

Portanto, o poliedro formado terá:

$12 + 12 - 2 = 22$ faces ($F = 22$)

$30 + 30 - 5 = 55$ arestas ($A = 55$)

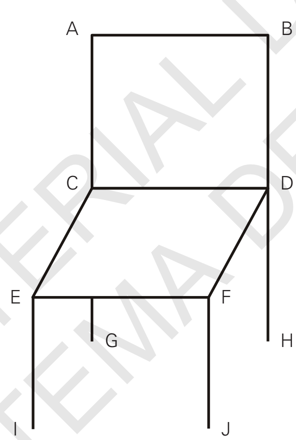
$20 + 20 - 5 = 35$ vértices ($V = 35$)

A soma pedida será dada por:

$V + F + A = 35 + 22 + 55 = 112$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. CFTMG – A figura a seguir representa uma cadeira onde o assento é um paralelogramo perpendicular ao encosto.



A partir dos pontos dados, é correto afirmar que os segmentos de retas

a) CD e EF são paralelos.

b) BD e FJ são concorrentes.

c) AC e CD são coincidentes.

d) AB e EI são perpendiculares.

8. UECE – Um poliedro convexo com 32 vértices possui apenas faces triangulares. O número de arestas deste poliedro é

a) 100

b) 120

c) 90

d) 80

9. UEM-PR (adaptado) – O que pode-se concluir quanto aos itens a seguir?

a) Sejam a reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$, onde π_1 e π_2 são planos, e a reta s paralela a r, de tal forma que $s \not\in \pi_1 \cup \pi_2$. Então, toda reta perpendicular a r contida em um desses dois planos é reversa a s?

b) Dados um ponto P pertencente a um plano π e uma reta r perpendicular a π, tal que $P \in r$, temos que toda reta contendo P perpendicular a r está em π?

c) Considere 6 retas contendo as arestas de um tetraedro regular. Fixada uma das retas, então ela é reversa a apenas uma dessas 6 retas?

d) A interseção de um poliedro convexo com um plano é uma região convexa?

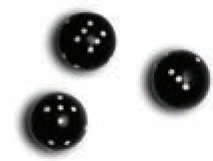
10. UEL-PR (adaptado) – Leia o texto a seguir.

Originalmente os dados eram feitos de osso, marfim ou argila. Há evidências da existência deles no Paquistão, Afeganistão e noroeste da Índia, datando de 3 500 a.C. Os dados cúbicos de argila continham de 1 a 6 pontos, dispostos de tal maneira que a soma dos pontos de cada par de faces opostas é sete.

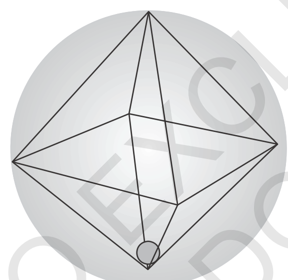
Museu Arqueológico do Red Fort. Delhi, Índia. (Adaptado.)

Atualmente, além dos dados em forma de cubo (hexaedro), encontram-se dados em vários formatos, inclusive esféricos, como mostram as figuras a seguir.

MARIA DMITRIEVA/ISTOCKPHOTO


EVERYDAY IMAGES/ALAMY STOCK PHOTO

Apesar do formato esférico, ao ser lançado, o dado mostra pontos de um a seis, como se fosse um dado cúbico. Isso acontece porque no interior da esfera existe uma cavidade em forma de octaedro, na qual existe um peso (um chumbinho) que se aloja em um dos vértices do octaedro.



Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a propriedade dos poliedros regulares que justifica o fato de a cavidade no interior da esfera ser octaédrica.

a) O número de vértices do octaedro é igual ao número de faces do hexaedro.

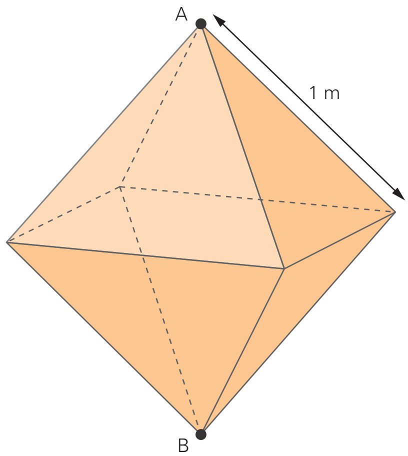
b) O número de vértices do octaedro é diferente do número de faces do hexaedro.

c) O número de arestas do octaedro é igual ao número de arestas do hexaedro.

d) O número de faces do octaedro é igual ao número de vértices do hexaedro.

e) O número de faces do octaedro é diferente do número de vértices do hexaedro.

11. FMP-RJ – A figura mostra uma peça metálica que tem a forma de um octaedro regular, cujas arestas medem 1 metro.



Qual a medida da distância entre os vértices A e B, em metros?

12. UEM-PR – Sobre as posições relativas entre pontos, retas e planos no espaço, assinale o que for correto.

01) Duas retas r e s são ortogonais quando são reversas e existe uma reta t, paralela a s e perpendicular a r.

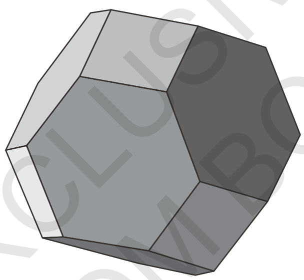
02) Se um plano α é paralelo a uma reta r, então todas as retas do plano α são paralelas a r.

04) É possível ter retas paralelas contidas em planos que não sejam paralelos.

08) Se um plano α intercepta os planos β e γ formando um ângulo de 90°, então os planos β e γ são paralelos.

16) Considere as retas r, s e t. Se r é reversa a s e a reta s é concorrente a t, então r e t são reversas.

13. UPF-MG – O poliedro representado na figura (octaedro truncado) é construído a partir de um octaedro regular, cortando-se, para tal, em cada vértice, uma pirâmide regular de base quadrangular. A soma dos ângulos internos de todas as faces do octaedro truncado é:



a) 2 160°
b) 5 760°
c) 7 920°
d) 10 080°
e) 13 680°

14. Escola Naval-RJ – Nas proposições abaixo, coloque **V** na coluna à esquerda quando a proposição for verdadeira e **F** quando for falsa.

( ) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

( ) Se uma reta é perpendicular a uma reta perpendicular a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.

( ) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.

( ) Se dois planos são perpendiculares, todo plano paralelo a um deles é perpendicular ao outro.

( ) Se três planos são dois a dois perpendiculares, eles têm um único ponto em comum.

Lendo-se a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

a) F – F – V – F – V
b) V – F – V – V – F
c) V – V – F – V – V
d) F – V – V – V – V
e) V – V – V – V – V

15. FGV-SP – Dado um tetraedro regular de aresta 6 cm, assinale os pontos que dividem cada aresta em três partes iguais. Corte o tetraedro pelos planos que passam pelos três pontos de divisão mais próximos de cada vértice e remova os pequenos tetraedros regulares que ficaram formados.

A soma dos comprimentos de todas as arestas do sólido resultante, em centímetros, é

a) 56
b) 32
c) 30
d) 36
e) 48

16. UEPG-PR – Considerando os planos α e β, e as retas r e s, assinale o que for correto.

01) Se $\alpha \cap \beta = s$, $r // s$, $r \not\subset \alpha$ e $r \not\subset \beta$, então $r // \alpha$ e $r // \beta$.
02) Se $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = r$, $s \subset \alpha$, $s \perp r$, então $s \perp \beta$.
04) Se $r \subset \beta$ e $s \perp r$, então $s \perp \beta$.
08) Se $\alpha // \beta$, $r \perp \alpha$, então $s \perp \beta$.
16) Se $r // \alpha$ e $r // \beta$, então $\alpha // \beta$.

17. UECE – Se, em um tetraedro, três das faces que possuem um vértice comum V são limitadas por triângulos retângulos e as medidas das arestas da face oposta ao vértice V são respectivamente 8 cm, 10 cm e 12 cm, então as medidas, em cm, das outras três arestas são

a) $3\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$

b) $\sqrt{6}$, $5\sqrt{3}$, 9

c) $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{6}$, 8

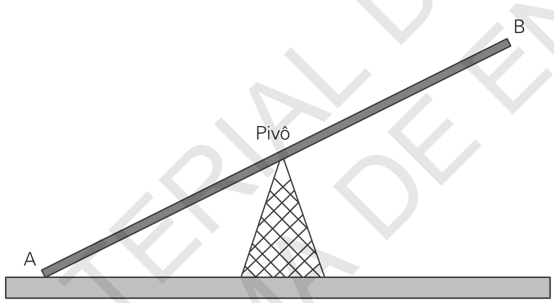
d) $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $2\sqrt{3}$

ESTUDO PARA O ENEM

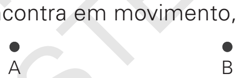
18. Enem C2-H6

Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

a)


b)

c)


d)


e)


19. Enem C2-H7

Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

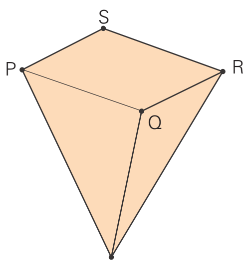


Figura 1

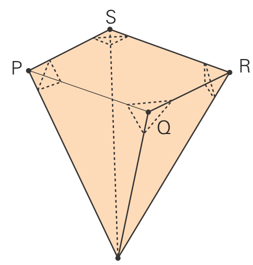


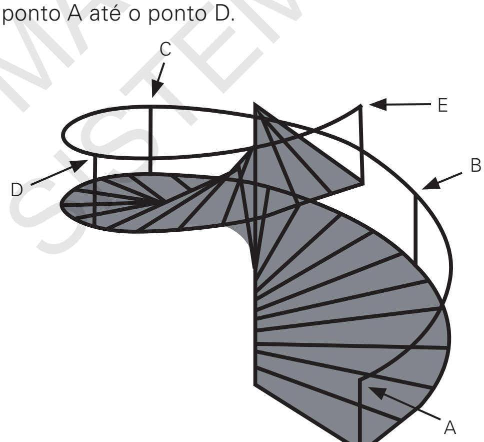
Figura 2

Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

a) 9, 20 e 13.
b) 3, 24 e 13.
c) 7, 15 e 12.
d) 10, 16 e 5.
e) 11, 16 e 5.

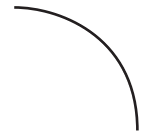
20. Enem C2-H6

O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos A, B, C, D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.

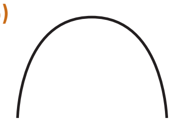


A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:

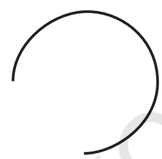
a)



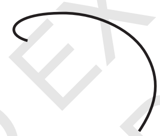
b)



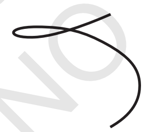
c)



d)



e)



18

PRISMAS

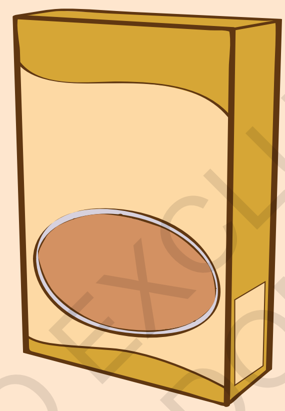
- Prismas

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma para selecionar argumentos que solucionem problemas do cotidiano.
- Identificar a relação de dependência entre grandezas.

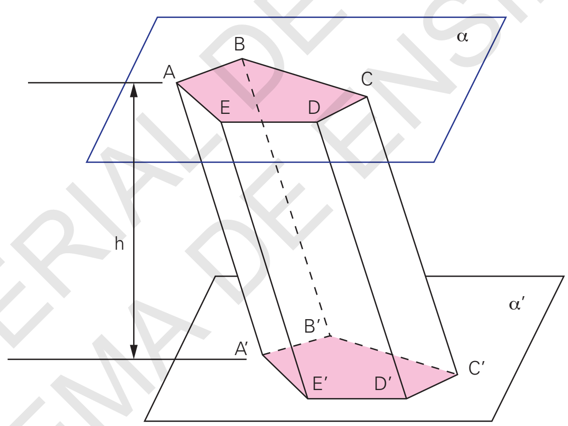
PRISMAS

São assim chamados os sólidos geométricos que têm as bases paralelas e todas as faces em forma de quadrilátero. O uso de prismas é frequente em embalagens diversas, desde caixas de eletrodomésticos até pacotes de biscoitos finos e presentes.



ELEMENTOS DO PRISMA

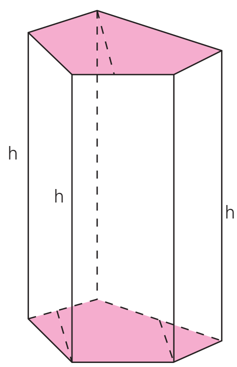
Prisma é um poliedro convexo tal que duas faces são polígonos congruentes (iguais) situados em planos paralelos e cujas demais faces são paralelogramos.



Observando a figura, podemos constatar os seguintes elementos desse sólidos geométricos:

- **Bases** – Correspondem aos pentágonos ABCDE e A′B′C′D′E′, sendo polígonos congruentes e paralelos entre si.
- **Faces laterais** – Correspondem aos paralelogramos ABB′A′, CBB′C′, CDD′C′, DEE′D′ e EAA′E′.
- **Arestas das bases do prisma** – Correspondem aos lados dos polígonos que constituem a base do prisma: AB, BC, CD, DE, EA, A′B′, B′C′, C′D′, D′E′, E′A′.
- **Arestas laterais do prisma** – Correspondem aos lados das faces laterais do prisma: AA′, BB′, CC′, DD′, EE′.
- **Altura do prisma** – Correspondem à distância perpendicular **h** entre os dois planos das bases α e α'.

Caso as arestas laterais sejam perpendiculares aos planos das bases, suas medidas coincidem com a altura do prisma. Nesse caso, as faces laterais são retângulos e estão situadas em planos perpendiculares aos planos das bases.



NOMENCLATURA E CLASSIFICAÇÃO DOS PRISMAS

Nomenclatura

Esses sólidos geométricos são nomeados de acordo com os polígonos das bases, conforme os exemplos:

- prisma triangular (suas bases são triângulos);
- prisma quadrangular (suas bases são quadriláteros);
- prisma pentagonal (suas bases são pentágonos);
- prisma hexagonal (suas bases são hexágonos).

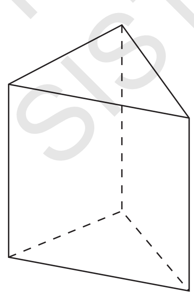
Classificação

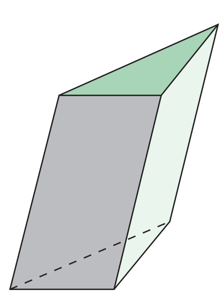
Os primas podem ser:

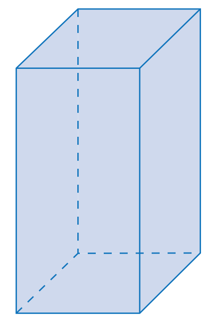
- retos (quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases);
- oblíquos (quando as arestas laterais não são perpendiculares aos planos das bases).

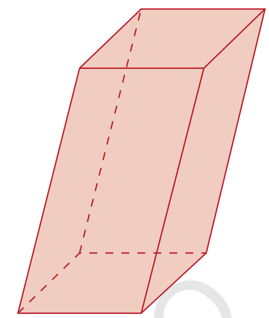
Observação: Prismas retos cujas bases sejam polígonos regulares são denominados prismas regulares.

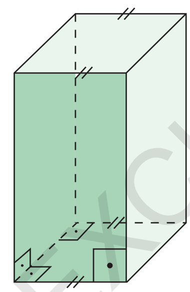
Exemplos:

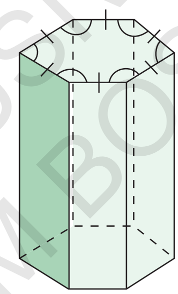

Prisma triangular reto


Prisma triangular oblíquo


Prisma quadrangular reto

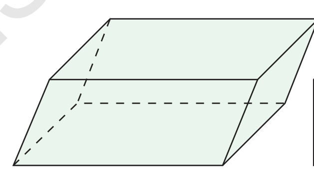

Prisma quadrangular oblíquo

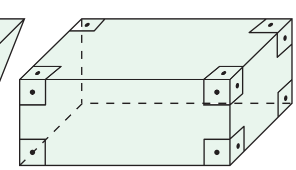

Prisma quadrangular regular


Prisma hexagonal regular

PARALELEPÍPEDO

Recebe esse nome o prisma cujas bases são paralelogramos.


Paralelepípedo oblíquo

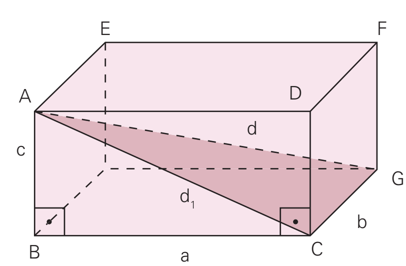

Paralelepípedo reto

Paralelepípedo reto

Recebe esse nome o paralelepípedo cujas bases e todas as seis faces sejam retângulos. Também são chamados paralelepípedo retângulo ou ortoedro.

Diagonais do paralelepípedo retângulo

Para calcular a diagonal **d** do paralelepípedo, temos:



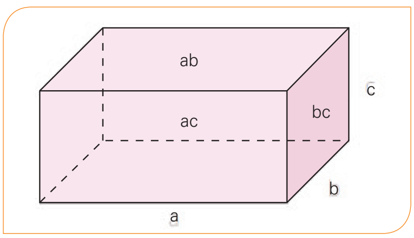
No triângulo ABC:
AC = d_1 = diagonal da face ABCD do paralelepípedo.
$d_1^2 = c^2 + a^2$

No triângulo ACG:
AG = d = diagonal do paralelogramo
$d^2 = b^2 + c^2 + a^2$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Área do paralelepípedo retângulo

Obtemos a área do paralelepípedo somando as áreas das bases com as áreas das faces.

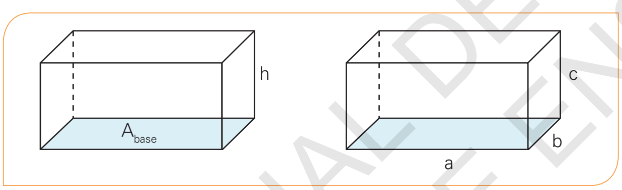


Assim:
$A = 2 \cdot ab + 2 \cdot ac + 2 \cdot bc$

$$A = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$

Volume do paralelepípedo retângulo

Sendo V o volume do paralelepípedo retângulo de medidas **a**, **b** e **c**, podemos obter o valor dele por meio da seguinte relação:

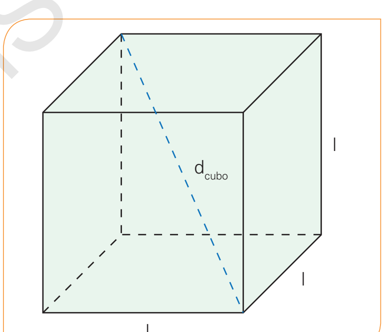


$V = A_{base} \cdot h = (a \cdot b) \cdot c$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

CUBO

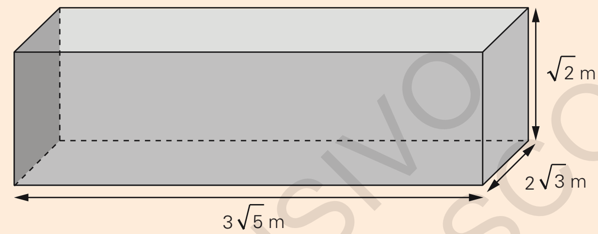
O cubo é um prisma quadrangular retangular. Podemos demonstrar o cálculo da medida de sua diagonal $\mathbf{d_{cubo}}$, da sua área $\mathbf{A_{cubo}}$ e de seu volume $\mathbf{V_{cubo}}$, obtendo as seguintes relações:



$$d_{cubo} = l\sqrt{3} \qquad A_{cubo} = 6l^2 \qquad V_{cubo} = l^3$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. IFSP – A figura a seguir representa uma piscina em forma de bloco retangular.



De acordo com as dimensões indicadas, podemos afirmar corretamente que o volume dessa piscina é, em m^3, igual a

a) $5\sqrt{10}$
b) $6\sqrt{10}$
c) $6\sqrt{15}$
d) $5\sqrt{30}$
e) $6\sqrt{30}$

Resolução

$a = 3\sqrt{5}$ m

$b = 2\sqrt{3}$ m

$c = \sqrt{2}$ m

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$

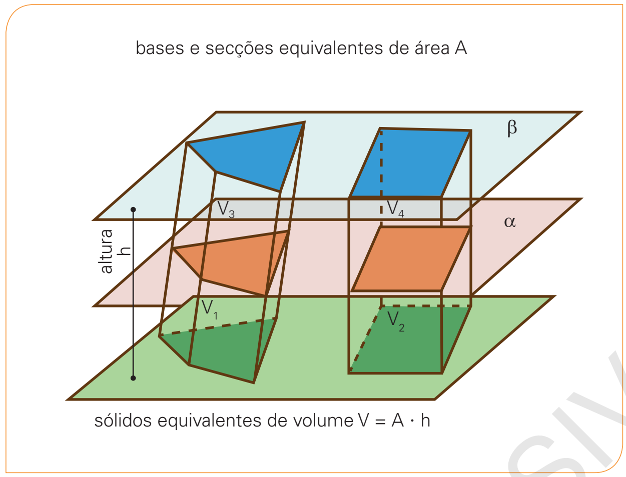
$\therefore V = 6\sqrt{30}$ m³

PRINCÍPIO DE CAVALIERI

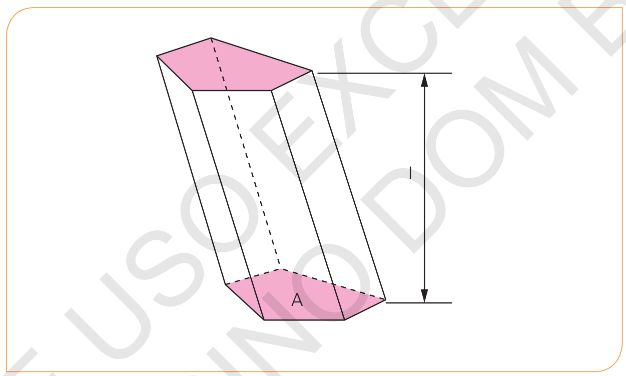
Sejam dois sólidos, **A** e **B**, cujas bases estão contidas no mesmo plano α. Se todo plano β, paralelo a α, intercepta **A** e **B** e determina secções de mesma área, então os sólidos **A** e **B** têm o mesmo volume.

VOLUME DE UM PRISMA QUALQUER

Pelo princípio de Cavalieri, pode-se garantir que, caso os prismas da figura abaixo tenham áreas de bases iguais ($A_1 = A_2 = A$), quando segmentados por planos paralelos à base (α e β), os volumes têm mesma medida ($V_1 = V_2$, $V_3 = V_4$).



Logo, o volume do prisma é obtido multiplicando-se a área da base (ou a área de qualquer secção reta) pela aresta lateral do prisma.

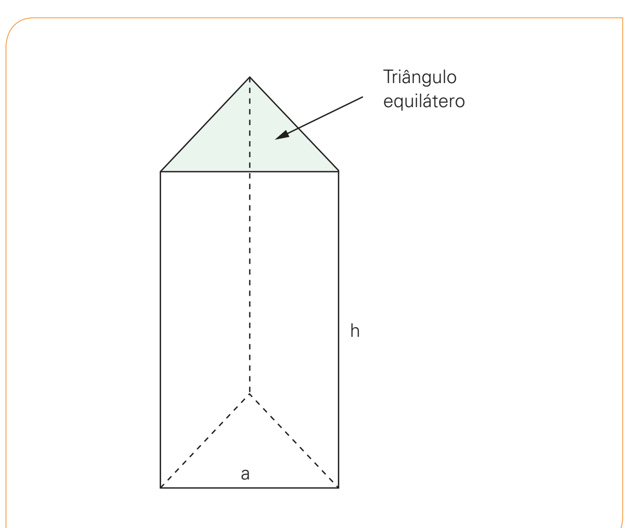


$$V = A \cdot l$$

PRISMAS REGULARES

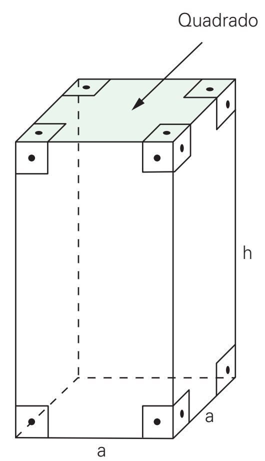
São assim chamados os prismas retos cujas bases são polígonos regulares, muito comuns nos estudos dos prismas. Na análise dos exemplos a seguir, temos área da base **(B)**, altura **(h)**, **aresta da base (a)** e volume **(V).**

Prisma triangular regular



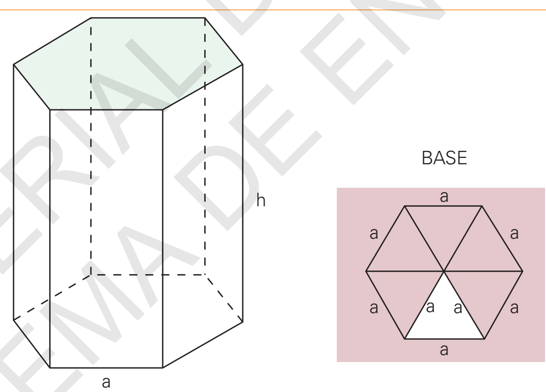
Área da base (B)	Área lateral (A_L)	Área total (A_T)	Volume (V)
$B = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$	$A_L = 3 \cdot A_{\text{face lateral}}$ $A_L = 3 \cdot a \cdot h$	$A_T = A_L + 2B$ $A_T = 3 \cdot a \cdot h + \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	$V = B \cdot h$ $V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h$

Prisma quadrangular regular



Área da base (B)	Área lateral (A_L)	Área total (A_T)	Volume (V)
$B = a^2$	$A_L = 4 \cdot A_{\text{face lateral}}$ $A_L = 4 \cdot a \cdot h$	$A_T = A_L + 2B$ $A_T = 4 \cdot a \cdot h + 2 \cdot a^2$	$V = B \cdot h$ $V = a^2 \cdot h$

Prisma hexagonal regular



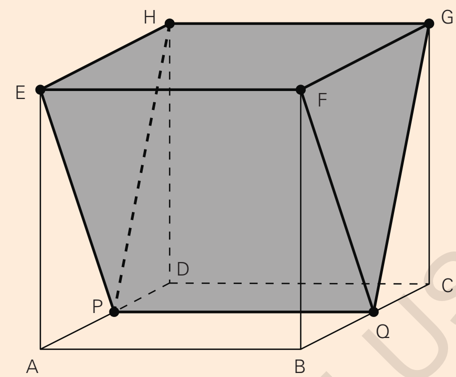
A área da base corresponde à soma das áreas dos seis triângulos equiláteros:

$$B = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Área da base (B)	Área lateral (A_L)	Área total (A_T)	Volume (V)
$B = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	$A_L = 6 \cdot A_{\text{f. lateral}}$ $A_L = 6 \cdot a \cdot h$	$A_T = A_L + 2B$ $A_T = 6 \cdot a \cdot h + 3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$	$V = B \cdot h$ $V = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot h$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. UFRGS-RS – Um sólido geométrico foi construído dentro de um cubo de aresta 8, de maneira que dois de seus vértices, P e Q, sejam os pontos médios, respectivamente, das arestas AD e BC, e os vértices da face superior desse sólido coincidam com os vértices da face superior do cubo, como indicado na figura abaixo.



O volume desse sólido é

a) 64
b) 128
c) 256
d) 512
e) 1 024

Resolução

O sólido em questão é um prisma triangular reto.

Como o triângulo (base do prisma) está contido em um cubo, a área da base do prisma será

$B = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32.$

Com o valor da área da base B conhecido, calculamos o volume do prisma:

$V = B \cdot h$

$V = 32 \cdot 8 \quad \therefore \quad V = 256$

ROTEIRO DE AULA

PRISMAS

Sólidos geométricos que têm as bases paralelas e todas as faces em forma de quadriláteros.

Classificação

Oblíquo

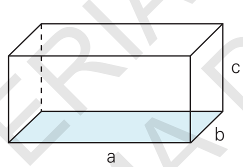
Reto

Regular

Nomenclatura

Os prismas são nomeados de acordo com os polígonos das bases.
Exemplo: prisma triangular, prisma pentagonal

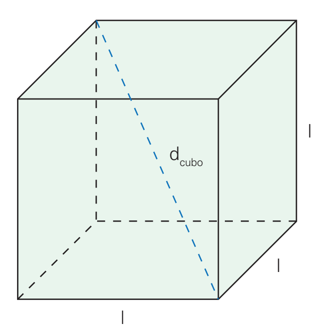
Paralelepípedo



$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$A = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

$V = a \cdot b \cdot c$



$d_{cubo} = l\sqrt{3}$

$A_{cubo} = 6l^2$

$V_{cubo} = l^3$

ROTEIRO DE AULA

PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Sejam dois sólidos, **A** e **B**, cujas bases estão contidas no mesmo plano α. Se todo plano β, paralelo a α, intercepta **A** e **B**, determinando secções de mesma área, então os sólidos **A** e **B** têm o mesmo volume.

PRISMAS REGULARES

$V = B \cdot h$

PRISMA TRIANGULAR REGULAR

PRISMA HEXAGONAL REGULAR

PRISMA QUADRANGULAR REGULAR

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEMG (adaptado) – Um *design* projetou um chaveiro no formato de um prisma triangular reto com 12 cm de altura. Sabe-se que as arestas da base formam um triângulo retângulo com catetos de medidas 6 cm e 8 cm. Para cobrir todas as faces desse prisma, adquirindo a quantidade suficiente de papel adesivo, e, com isso, evitar o desperdício, será preciso saber a área total da superfície desse prisma. Fazendo os cálculos corretos, qual a área total desse prisma?

A base triangular tem catetos medindo 6 cm e 8 cm. Portanto, a hipotenusa terá 10 cm.

$A_{bases} = 2 \cdot \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 48$

$A_{lateral} = 6 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 12 = 288$

Logo, 48 + 288 = 336 cm².

2. Enem C2-H8

Para a Olimpíada de 2012, a piscina principal do Centro Aquático de Londres, medindo 50 metros de comprimento, foi remodelada para ajudar os atletas a melhorar suas marcas. Observe duas das melhorias:

Largura das raias
Cada uma das dez raias mede 2,5 metros, conforme o padrão oficial. Nas provas finais, a primeira e a décima ficarão vazias para evitar que as ondas desfavoreçam os atletas

Profundidade 3 metros
Com essa profundidade, a água que se movimenta em direção ao fundo da piscina demora mais para retornar à superfície e não atrapalha a progressão dos nadadores

Veja, n. 2 278, jul 2012. (Adaptado.)

A capacidade da piscina em destaque, em metro cúbico, é igual a

a) 3 750
b) 1 500
c) 1 250
d) 375
e) 150

O volume da piscina é dado por:

$V = a \cdot b \cdot c$

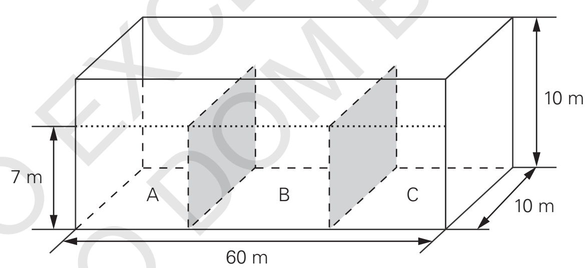
$V = 50 \cdot 10 \cdot 2{,}5 \cdot 3 = 3\,750 \therefore V = 3\,750\ m^3$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

3. Enem C2-H8

Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m × 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

a) $1{,}4 \cdot 10^3\ m^3$
b) $1{,}8 \cdot 10^3\ m^3$
c) $2{,}0 \cdot 10^3\ m^3$
d) $3{,}2 \cdot 10^3\ m^3$
e) $6{,}0 \cdot 10^3\ m^3$

O volume total de petróleo acumulado no reservatório corresponde a:

$V = 60 \cdot 10 \cdot 10 = 6{,}0 \cdot 10^3\ m^3$

Após o vazamento do volume, restarão apenas:

$\dfrac{2}{3} \cdot 6{,}0 \cdot 10 \cdot 7 = 2{,}8 \cdot 10^3\ m^3$

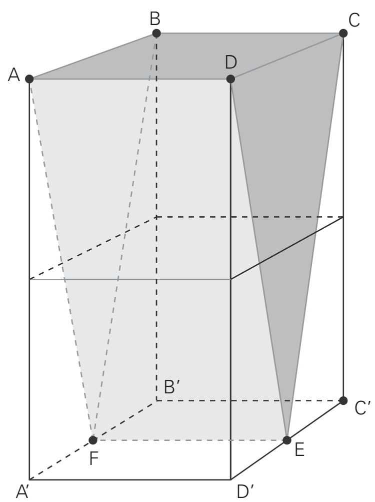
Logo, $V_{derramado} = 6{,}0 \cdot 10^3 - 2{,}8 \cdot 10^3 = 3{,}2 \cdot 10^3\ m^3$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

4. UERJ – Dois cubos cujas arestas medem 2 cm são colados de modo a formar o paralelepípedo ABCDA′B′C′D′. Esse paralelepípedo é seccionado pelos planos ADEF e BCEF, que passam pelos pontos médios F e E das arestas A′B′ e C′D′, respectivamente.

A parte desse paralelepípedo compreendida entre esses planos define o ABCDEF, conforme indica a figura a seguir.



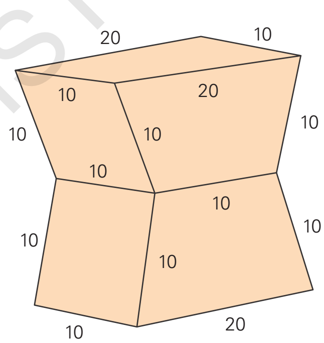
O volume do sólido ABCDEF, em cm³, é igual a:

a) 4 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 12

O sólido ABCDEF é um prisma triangular de bases ABF e DCE. Assim,

$V = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AA'} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 8\ cm^3$.

5. UFRGS-RS – O primeiro prêmio de um torneio recebe um troféu sólido confeccionado em metal, com as medidas abaixo.

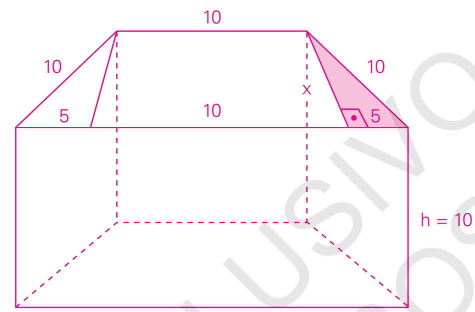


Considerando que as bases do troféu são congruentes e paralelas, o volume de metal utilizado na sua confecção é

a) $100\sqrt{3}$ **c)** $1\,000\sqrt{3}$ **e)** $3\,000\sqrt{3}$
b) $150\sqrt{3}$ **d)** $1\,500\sqrt{3}$

Temos:

Prisma trapezoidal



Analisando essa figura e aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos o valor de x:

$x^2 + 5^2 = 10^2 \rightarrow x = 5\sqrt{3}$

Como o valor de x, calculamos a área da base B do prisma:

$B = \frac{(10 + 20) \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 75\sqrt{3}$

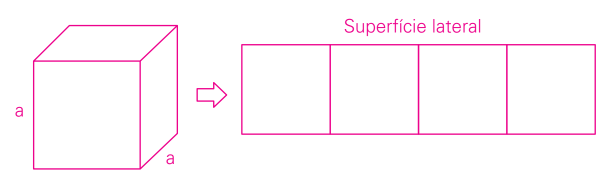
Como são dois prismas congruentes, obtemos:

$V = 2 \cdot 75\sqrt{3} \cdot 10 = 1\,500\sqrt{3}$

6. UEPB – Uma cisterna de formato cúbico cuja área lateral mede 200 m² tem por volume, aproximadamente:

a) $250\sqrt{2}\ m^3$
b) $25\sqrt{2}\ m^3$
c) $2500\sqrt{2}\ m^3$
d) $352\sqrt{2}\ m^3$
e) $125\sqrt{2}\ m^3$

Medida da aresta da cisterna = a.



$A = 4 \cdot a^2 = 200 \rightarrow a^2 = 50 \rightarrow a = \sqrt{50}\ \therefore\ a = 5\sqrt{2}$ m

Calculando o volume V da cisterna, temos:

$V = a^3 = (5 \cdot \sqrt{2})^3 = 250\sqrt{2}$

$\therefore V = 250\sqrt{2}\ m^3$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UPE (adaptado) – Um engenheiro construiu uma piscina em formato de bloco retangular a qual mede 7 m de comprimento, 4 m de largura e 1,5 m de profundidade. Após encher a piscina completamente, o engenheiro abriu um ralo que tem a capacidade de esvaziá-la à razão de 20 litros por minuto. Utilizando esse ralo, em quanto tempo o nível da água dessa piscina vai baixar em 10 centímetros?

8. Enem C2-H28

Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

a) 450.
b) 500.
c) 600.
d) 750.
e) 1 000.

9. PUC-RJ – Um cubo de aresta a tem volume 24.

Assinale o valor do volume de um cubo de aresta $\frac{a}{3}$.

a) $\frac{8}{9}$
b) $\frac{9}{3}$
c) 8
d) 24
e) 72

10. UNESP – Uma chapa retangular de alumínio, de espessura desprezível, possui 12 metros de largura e comprimento desconhecido (figura 1). Para a fabricação de uma canaleta vazada de altura x metros são feitas duas dobras, ao longo do comprimento da chapa (figura 2).

Figura 1

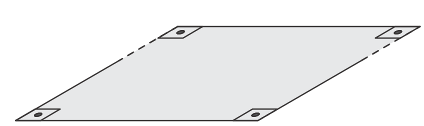
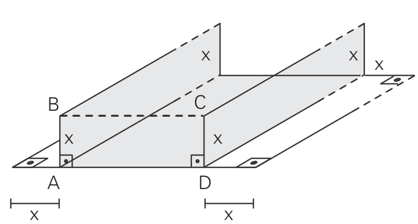


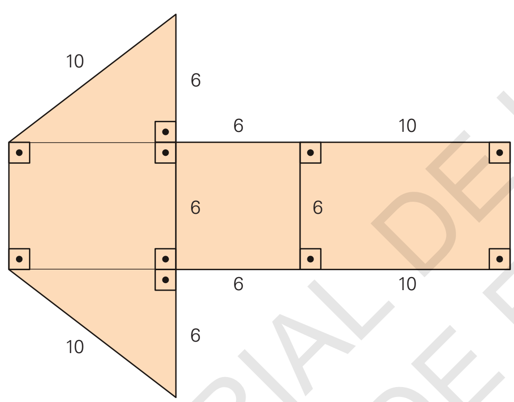
Figura 2



Se a área da secção transversal (retângulo ABCD) da canaleta fabricada é igual a 18 m², então a altura dessa canaleta, em metros, é igual a

a) 3,25
b) 2,75
c) 3,50
d) 2,50
e) 3,00

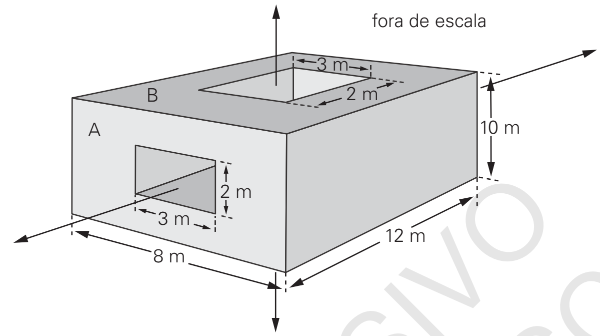
11. UFRGS-RS – Na figura a seguir, encontra-se representada a planificação de um sólido de base quadrada cujas medidas estão indicadas.



O volume desse sólido é

a) 144
b) 180
c) 216
d) 288
e) 360

12. UNESP – Um bloco maciço com a forma de paralelepípedo reto-retângulo tem dimensões 8 m, 12 m e 10 m. Em duas de suas faces, indicadas por A e B na figura, foram marcados retângulos, de 2 m por 3 m, centralizados com as faces do bloco e com lados paralelos às arestas do bloco. Esses retângulos foram utilizados como referência para perfurar totalmente o bloco, desde as faces A e B até as respectivas faces opostas a elas no bloco.



Calcule o volume e a área total do novo sólido, que resultou após a perfuração do bloco.

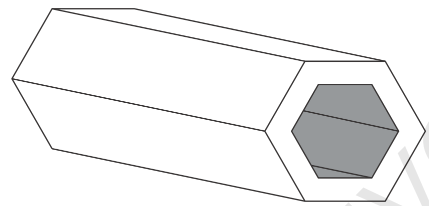
13. PUC-SP – Um bloco maciço de madeira na forma de um prisma reto de base retangular medindo 18 cm por 24 cm e com 30 cm de altura foi totalmente dividido em cubinhos iguais e de maior aresta possível. Supondo que não tenha ocorrido perda alguma no corte do bloco, o volume de um cubinho é

a) 64 cm^3.
b) 125 cm^3.
c) 216 cm^3.
d) 343 cm^3.

14. Unicamp-SP – Um paralelepípedo retângulo tem faces de áreas 2 cm^2, 3 cm^2 e 4 cm^2. O volume desse paralelepípedo é igual a

a) $2\sqrt{3}$ cm^3.
b) $2\sqrt{6}$ cm^3.
c) 24 cm^3.
d) 12 cm^3.

15. UERN – A peça geométrica, desenvolvida através de um *software* de modelagem em três dimensões por um estudante do curso de engenharia e estagiário de uma grande indústria, é formada a partir de dois prismas de base hexagonal regular e assemelha-se ao formato de uma porca de parafuso.

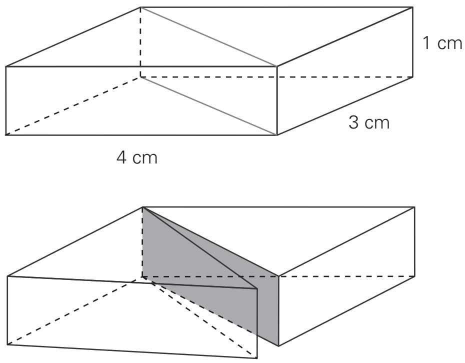


Considerando que o lado do hexágono maior mede 8 cm que o comprimento do prisma é igual a 35 e, que o lado do hexágono menor mede 6 cm, então o volume da peça, de forma que se possa calcular, posteriormente, a quantidade de matéria-prima necessária à sua produção em massa em determinado período de tempo é, em cm^3:

Considere $\left(\sqrt{3} = 1{,}7\right)$

a) 1 064
b) 1 785
c) 2 127
d) 2 499

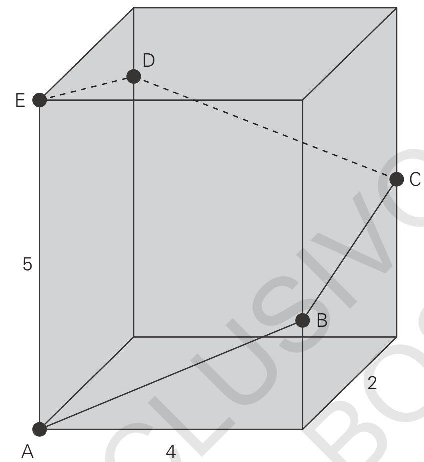
16. UNESP – Um paralelepípedo reto-retângulo foi dividido em dois prismas por um plano que contém as diagonais de duas faces opostas, como indica a figura.



Comparando-se o total de tinta necessária para pintar as faces externas do paralelepípedo antes da divisão como total necessário para pintar as faces externas dos dois prismas obtidos após a divisão, houve um aumento aproximado de

a) 42%
b) 36%
c) 32%
d) 26%
e) 46%

17. ESPM-SP – Em volta do paralelepípedo reto-retângulo mostrado na figura abaixo será esticada uma corda do vértice A ao vértice E, passando pelos pontos B, C e D.



De acordo com as medidas dadas, o menor comprimento que essa corda poderá ter é igual a:

a) 15 **b)** 13 **c)** 16 **d)** 14 **e)** 17

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H9

Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

- Caixa 1: 86 cm × 86 cm × 86 cm
- Caixa 2: 72 cm × 82 cm × 90 cm
- Caixa 3: 85 cm × 82 cm × 90 cm
- Caixa 4: 82 cm × 95 cm × 82 cm
- Caixa 5: 80 cm × 95 cm × 85 cm

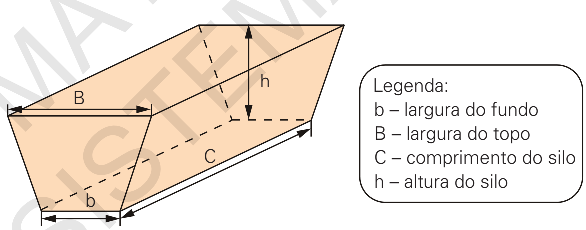
O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior.

A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

a) 1. **b)** 2. **c)** 3. **d)** 4. **e)** 5.

19. Enem C2-H8

Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m³ desse tipo de silo.

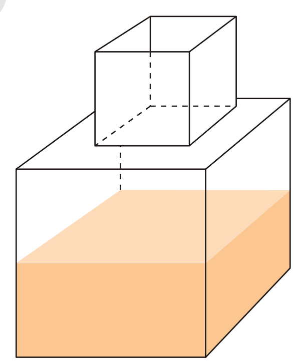
EMBRAPA. *Gado de corte*. Disponível em: <www.cnpgc.embrapa.br>. Acesso em: 1º ago. 2012. (Adaptado.)

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

a) 110 **b)** 125 **c)** 130 **d)** 220 **e)** 260

20. Enem C2-H8

Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

a) 8. **b)** 10. **c)** 16. **d)** 18. **e)** 24.

19 PIRÂMIDES E CILINDROS

- Pirâmides
- Sólidos especiais
- Cilindros
- Cilindros equiláteros

HABILIDADES

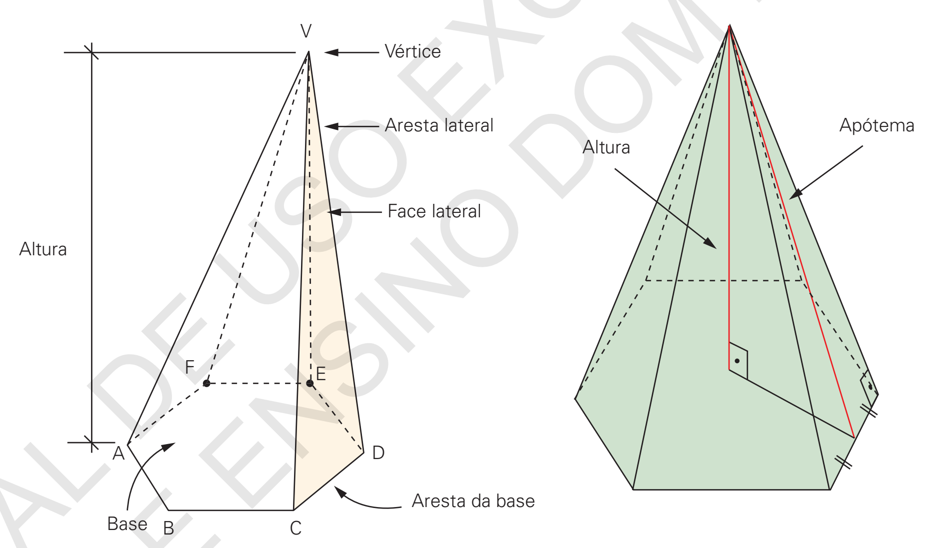
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma para selecionar argumentos que solucionem problemas do cotidiano.

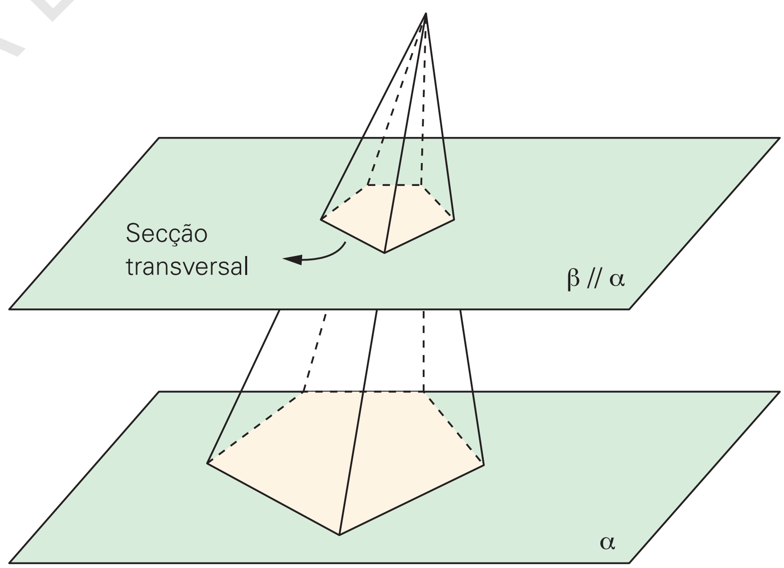
PIRÂMIDES

São assim chamados os poliedros cuja base é um polígono convexo $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ de **n** lados num plano α e cujas faces laterais são triângulos com um vértice **V** em comum fora do plano α.

ELEMENTOS DE UMA PIRÂMIDE

Na figura, considere os elementos da pirâmide.





- **Vértice** – Ponto em comum **V** entre as faces da pirâmide.
- **Base** – Polígono **ABCDEF**.
- **Arestas da base** – Lados do polígono da base.
- **Arestas laterais** – Segmentos que unem o vértice V aos vértices do polígono da base.
- **Faces laterais** – Triângulos determinados pelo vértice V e cada uma das arestas das bases.
- **Superfície lateral** – Superfície poliédrica formada por todas as faces laterais.
- **Secção transversal** – Intersecção dessa pirâmide com qualquer plano paralelo à sua base.
- **Altura** – Distância do vértice V ao plano da base.
- **Apótema** – Distância perpendicular do vértice à aresta da base da pirâmide.

NOMENCLATURA

O nome da pirâmide é dado de acordo com o polígono da sua base, conforme estes exemplos:

- **Pirâmide triangular:** o polígono da base é um triângulo.
- **Pirâmide quadrangular**: o polígono da base é um quadrilátero.
- **Pirâmide pentagonal**: o polígono da base é um pentágono.
- **Pirâmide hexagonal**: o polígono da base é um hexágono.

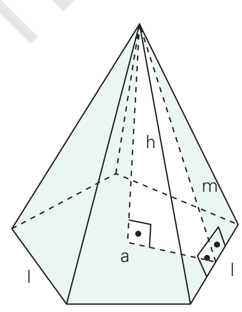
CLASSIFICAÇÃO

As pirâmides são classificadas conforme a projeção do vértice sobre o plano da base.

- **Pirâmide oblíqua**: a projeção do vértice sobre o centro da base não corresponde ao seu circuncentro.
- **Pirâmide reta**: a projeção do vértice sobre o centro da base corresponde ao seu circuncentro.
- **Pirâmide regular**: corresponde a uma pirâmide reta cuja base é um polígono regular e tem todas as arestas laterais congruentes.

ÁREA LATERAL E ÁREA TOTAL

Considere uma pirâmide regular de **n** lados, com apótema da base **a**, apótema da pirâmide **m** e aresta da base l.



A área lateral será dada por:

$$A_L = n \cdot \frac{l \cdot m}{2}$$

Sendo B a área da base, a área total da pirâmide é dada por:

$$A_T = A_L + B$$

VOLUME DE UMA PIRÂMIDE

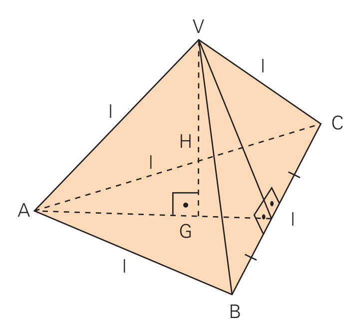
O volume de uma pirâmide corresponde a um $\frac{1}{3}$ (um terço) do volume de um prisma $\left(V_{Prisma} = B \cdot h\right)$ de mesma base (B) e mesma altura (h). Portanto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

SÓLIDOS ESPECIAIS

TETRAEDRO REGULAR

Trata-se de um sólido geométrico cujas quatro faces são triângulos equiláteros de lado l.



Área total (A_T) do tetraedro regular:

$A_T = 4 \cdot a^2\sqrt{3}$

Altura (H) do tetraedro regular é dada por:

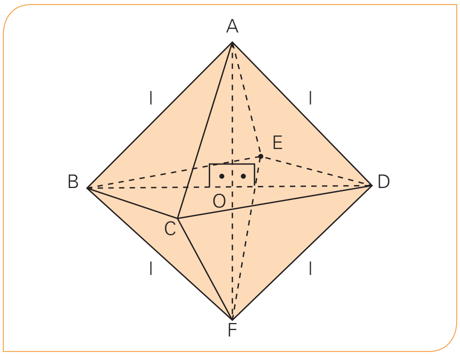
$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

O volume do tetraedro é dado por:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

OCTAEDRO REGULAR

Trata-se de um sólido geométrico cujas oito faces são triângulos equiláteros de lado l.



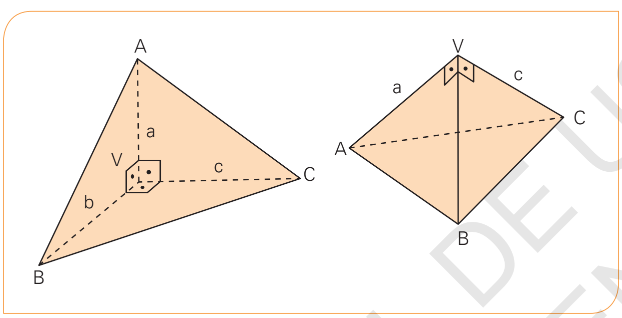
A área total (A_T) e o volume do octaedro são respectivamente iguais a:

$$A_T = 2 \cdot a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

TETRAEDRO TRIRRETANGULAR

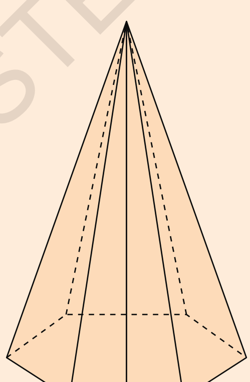
Trata-se de um sólido com triângulos retângulos em três de suas quatro faces. Seu volume é obtido por meio das medidas das arestas **a**, **b** e **c**.



$$V = \frac{a \cdot b \cdot c}{6}$$

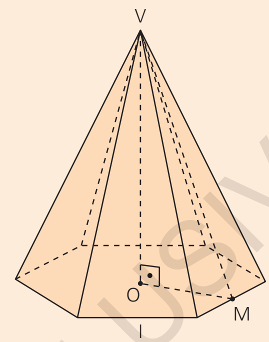
EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. UFPE – Uma pirâmide hexagonal regular tem a medida da área da base igual à metade da área lateral. Se a altura da pirâmide mede 6 cm, assinale o inteiro mais próximo do volume da pirâmide, em cm³. Dado: use a aproximação: $\sqrt{3} \approx 1,73$.



Resolução

Conforme figura a seguir, V, O, M e l são, respectivamente, o vértice, o centro da base, o ponto médio de uma das arestas da base e a medida da aresta da base da pirâmide.



Metade da área lateral da pirâmide: $A'_L = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{l \cdot VM}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot l \cdot VM$.

Área lateral: $B = \frac{3l^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

Igualando as equações, obtemos:

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot l \cdot VM = \frac{3l^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \rightarrow VM = l\sqrt{3}$$

Apótema da base: $OM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Altura da pirâmide: $VO = 6$ cm.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VMO, obtemos:

$$VM^2 = VO^2 + OM^2$$

$$\left(l\sqrt{3}\right)^2 = 6^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow 3l^2 = 36 + \frac{3}{2}l^2 \rightarrow \frac{9}{4}l^2 = 36 \therefore$$

$\therefore l = 4$ cm

Volume da pirâmide: $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{6l^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \cong$

$\cong 83,04$ cm³.

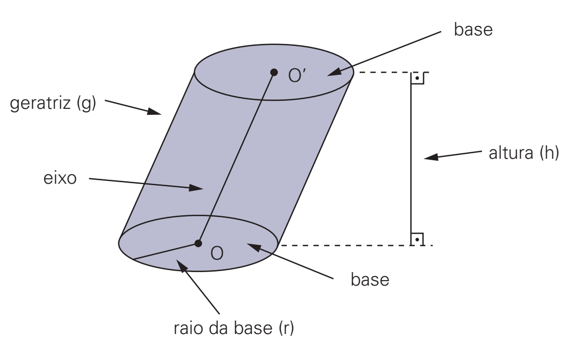
$\therefore V = 83$ cm³

CILINDROS

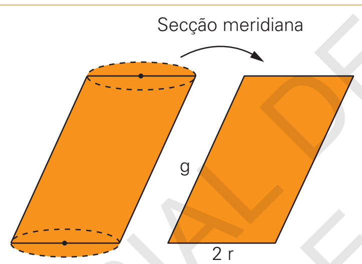
Trata-se de sólidos de revolução, ou seja, são corpos formados pelo movimento completo de uma figura em torno do próprio eixo. Apesar de os cilindros não serem poliedros, são sólidos geométricos com as bases constituídas por círculos.

ELEMENTOS DO CILINDRO

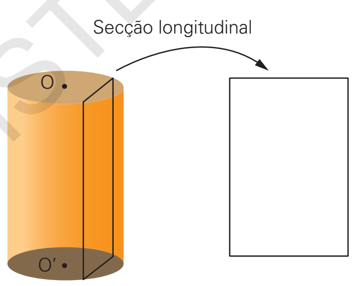
Na figura a seguir, estão representados os elementos de um cilindro.



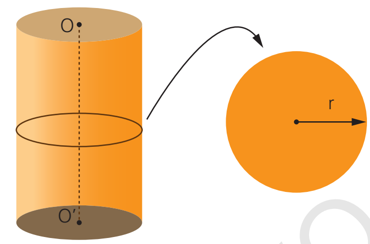
- **Base** – Dois círculos determinados pelas extremidades de todos os segmentos paralelos a PQ, os quais, reunidos, formam o cilindro.
- **Eixo** – Reta determinada pelos centros das bases.
- **Geratriz (g)** – Qualquer segmento com extremidades nas circunferências das bases e que seja paralelo ao eixo do cilindro.
- **Altura (h)** – Distância perpendicular entre os planos das bases do cilindro.
- **Superfície lateral** – Reunião de todas as geratrizes. Denomina-se área lateral do cilindro AL a área da superfície lateral.
- **Seção meridiana** – Quadrilátero obtido pela intersecção do cilindro com um plano que contenha o eixo, conforme a figura.



- **Seção longitudinal** – Quadrilátero obtido pela intersecção do cilindro com um plano que esteja paralelo ao seu eixo (conforme a figura), ou que contenha o eixo do cilindro. Neste caso, a seção longitudinal é denominada seção meridiana.



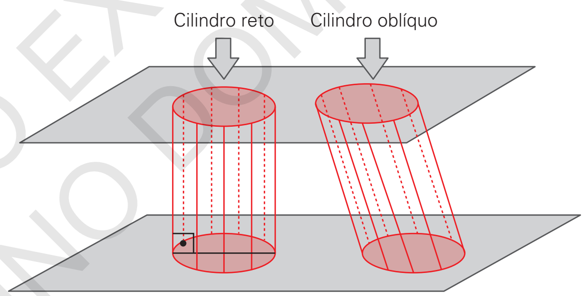
- **Secção transversal** – Círculo congruente à base obtido pela intersecção do cilindro com um plano perpendicular ao eixo da base, conforme a figura, sendo sua área igual à área da base B.



CLASSIFICAÇÃO

Os cilindros são classificados em:

- **circular oblíquo:** apresenta as geratrizes oblíquas ao plano das bases.
- **circular reto** (ou cilindro de revolução): apresenta as geratrizes perpendiculares ao plano da base.



ÁREA LATERAL

A área lateral de um cilindro de raio de base **r** e altura **h** é:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

ÁREA TOTAL

A área total da superfície de um cilindro corresponde à soma das áreas das bases com a área da superfície lateral.

$$A_T = A_L + 2B$$

$$A_T = 2\pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$A_T = 2\pi r \cdot (h + r)$$

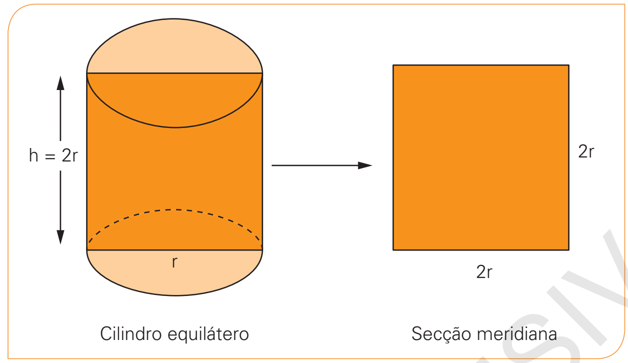
VOLUME

Sendo B a área da base do cilindro e h a altura, o volume do cilindro é obtido pela seguinte relação:

$$V = B \cdot h$$
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

CILINDRO EQUILÁTERO

É assim chamado o cilindro de revolução cuja secção meridiana é um quadrado ($h = 2r$). Observe a figura.



Área lateral

$$A_L = 2\pi r \cdot h = 2\pi r \cdot 2r \quad \therefore \quad A_L = 4\pi r^2$$

Área total

$$A_T = 2 \cdot B + A_L = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 \quad \therefore \quad A_T = 6\pi r^2$$

Volume

$$V = B \cdot h = \pi r^2 \cdot 2r \quad \therefore \quad V = 2\pi r^3$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2. UECE – A medida, em m², da área da superfície total (área lateral e bases) de um cilindro circular reto tal que a medida da altura e a medida do raio da base são ambas iguais a 2 m é:

a) 14π **b)** 12π **c)** 16π **d)** 10π

Resolução

Dados:

$h = 2$ m

$r = 2$ m

$B = \pi r^2 = \pi \cdot (2)^2 = 4\pi$

$A_L = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi$

$A_T = 2 \cdot B + AL$

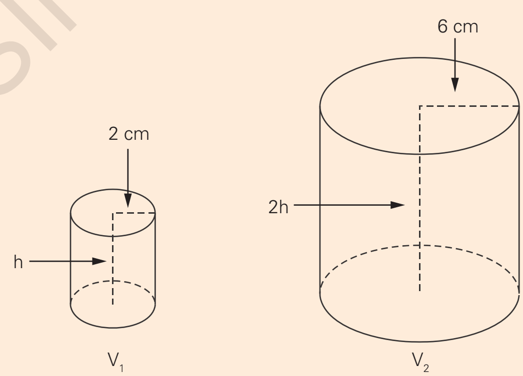
$A_T = 2 \cdot 4\pi + 8\pi = 8\pi + 8\pi = 16\pi$

$\therefore A_T = 16\pi$ m²

3. PUC-SP – Dispõe-se de N tubos cilíndricos, todos iguais entre si, cada qual com diâmetro interno de 4 cm. Se esses tubos transportam a mesma quantidade de água que um único tubo cilíndrico, cujo diâmetro interno mede 12 cm e cujo comprimento é igual ao dobro do comprimento dos primeiros, então:

a) $N > 15$ **c)** $6 < N < 10$

b) $10 < N < 15$ **d)** $N < 6$



Resolução

Identificando que o volume 2 (V_2) é N vezes o volume 1 (V_1), obtemos a seguinte relação:

$N \cdot V_1 = V_2$

$N \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 2 \cdot h$

$4\,N = 72 \quad \rightarrow \quad N = 72/4 = 18$

Logo, $N > 15$.

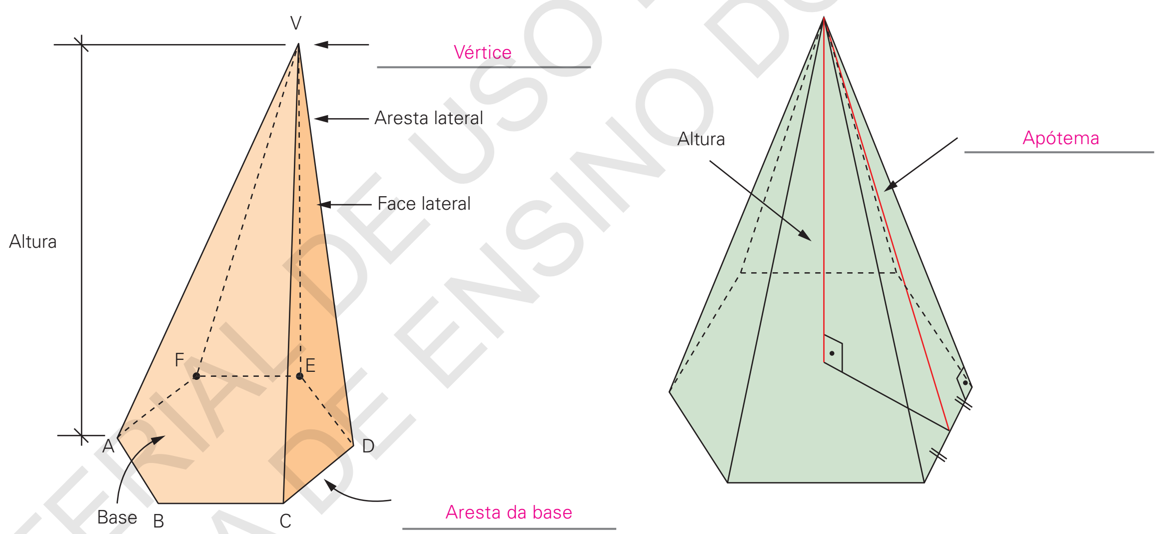
ROTEIRO DE AULA

PIRÂMIDE

A nomenclatura de uma pirâmide ocorre conforme a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base, que pode ser

oblíqua ou

reta.



$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$

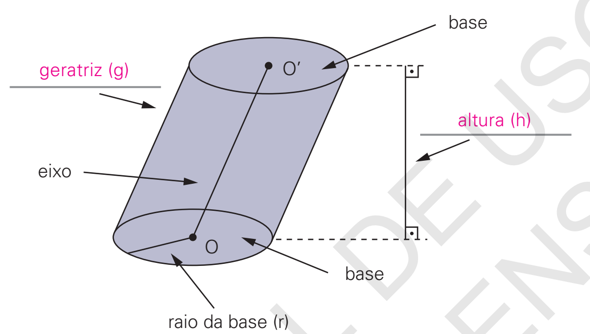
$A_L = n \cdot \frac{l \cdot m}{2}$

$A_T = A_L + B$

ROTEIRO DE AULA

CILINDRO

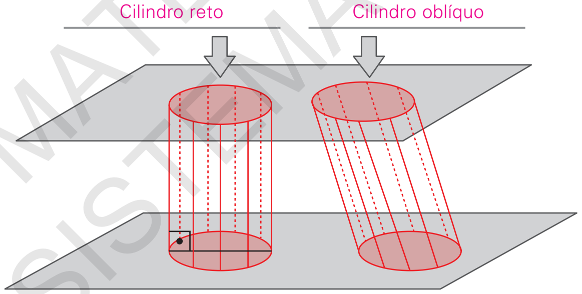
Sólido de revolução é um corpo que se forma a partir do movimento completo de uma figura em torno de seu eixo. Apesar de não ser um poliedro, é um sólido geométrico que bases formadas por círculos.

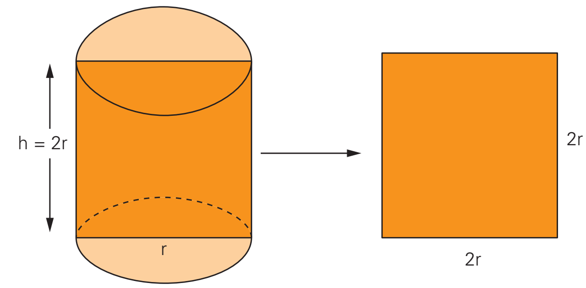


$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$A_T = 2\pi\ r \cdot (h + r)$

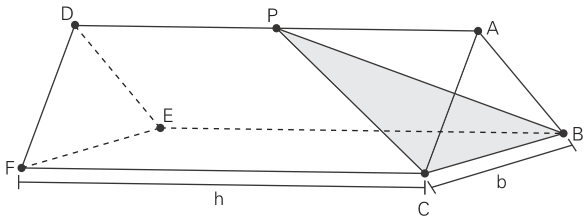
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$





EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UERJ – A imagem a seguir ilustra um prisma triangular regular. Sua aresta da base mede b e sua aresta lateral mede h.



Esse prisma é seccionado por um plano BCP, de modo que o volume da pirâmide ABCP seja exatamente $\frac{1}{9}$ do volume total do prisma.

Logo, a medida de $\overline{AP}$ é igual a:

a) $\frac{h}{9}$

b) $\frac{h}{3}$

c) $\frac{2h}{3}$

d) $\frac{5h}{6}$

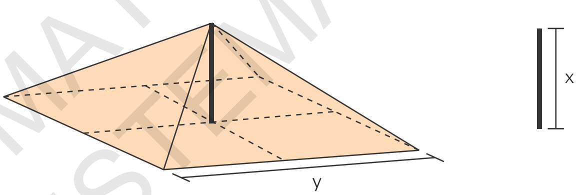
$V_{prisma} = B \cdot h$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot \overline{PA} = \frac{1}{9} \cdot V_{prisma}$

$\frac{1}{3} \cdot B \cdot \overline{PA} = \frac{1}{9} \cdot B \cdot h \rightarrow \overline{PA} = \frac{h}{3}$

2. Enem C2-H9

A cobertura de uma tenda de lona tem formato de uma pirâmide de base quadrada e é formada usando quatro triângulos isósceles de base y. A sustentação da cobertura é feita por uma haste de medida x. Para saber quanto de lona deve ser comprado, deve-se calcular a área da superfície da cobertura da tenda.



A área da superfície da cobertura da tenda, em função de y e x, é dada pela expressão

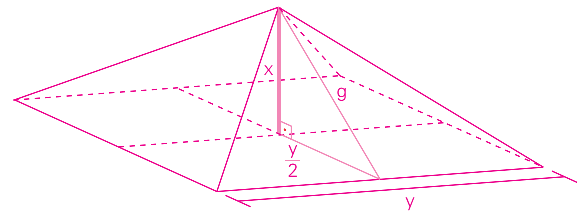
a) $2y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$

b) $2y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}$

c) $4y\sqrt{x^2 + y^2}$

d) $4y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$

e) $4y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}$



$g^2 = x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \rightarrow g = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$

$A_{lateral} = \frac{4 \cdot (y \cdot g)}{2} \rightarrow A_{lateral} = 2y \cdot \left(\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}\right)$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

3. Enem C2-H9

Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m³ de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada.

Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

a) 0,5
b) 1,0
c) 2,0
d) 3,5
e) 8,0

O volume da cisterna é:
$V = \pi \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot 3 \cong 9\ m^3$.

Conservando a altura, o raio r da nova cisterna deverá ser:
$81 = \pi \cdot r^2 \cdot 3 \therefore r \cong 3$ m.

Logo, o aumento solicitado será aproximadamente de 3 − 1 = 2 m.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

4. PUC-RJ – Numa pirâmide de base quadrada, todas as arestas medem x.

Quanto vale o volume da pirâmide?

a) $\frac{\sqrt{2}}{6}x^3$

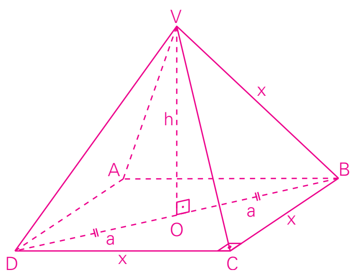
b) πx^2

c) $x^3 + x^2 + x + 1$

d) x^3

e) $\frac{\sqrt{6}}{3}x^3$

Do enunciado, temos:



No triângulo BCD:

$(2a)^2 = x^2 + x^2$

$4a^2 = 2x^2$

$a^2 = \frac{2x^2}{4}$

No triângulo VOB:

$x^2 = h^2 + a^2$

$x^2 = h^2 + \frac{2x^2}{4}$

$h^2 = x^2 - \frac{2x^2}{4}$

$h^2 = \frac{2x^2}{2}$

$h = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

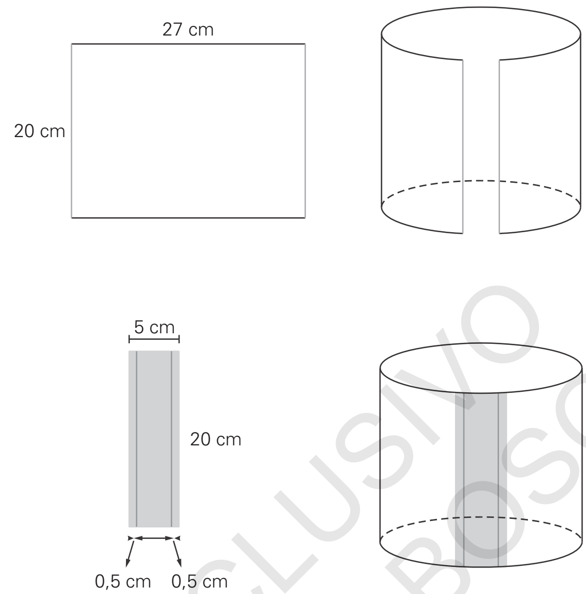
Assim, sendo V o volume da pirâmide:

$V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2}$

$V = \frac{\sqrt{2} \cdot x^3}{6}$

5. UNESP – Os menores lados de uma folha de papel retangular de 20 cm por 27 cm foram unidos com uma fita adesiva retangular de 20 cm por 5 cm, formando um cilindro circular reto vazado. Na união, as partes da fita adesiva em contato com a folha correspondem a dois retângulos de 20 cm por 0,5 cm, conforme indica a figura.



Desprezando-se as espessuras da folha e da fita e adotando $\pi = 3,1$, o volume desse cilindro é igual a

a) 1 550 cm³

b) 2 540 cm³

c) 1 652 cm³

d) 4 805 cm³

e) 1 922 cm³

Seja r a medida do raio da base do cilindro e compreendendo que o comprimento da circunferência da base tem uma dimensão de 31 cm, obtemos:

$31 = 2\pi \cdot r \quad \rightarrow \quad r \cong \frac{31}{2 \cdot 3,1} \quad \rightarrow \quad r \cong 5 \text{ cm}$

Assim, $V = 3,1 \cdot 5^2 \cdot 20 \cong 1\,550 \text{ cm}^3$.

6. UFU-MG – O rendimento teórico de uma tinta é a quantidade necessária para pintar um metro quadrado de área e serve apenas para determinar o custo por metro quadrado da tinta. O rendimento real de uma tinta é calculado no final do trabalho executado que leva em conta o número de demãos (números de camadas de tintas necessárias para obter o resultado esperado) e as perdas decorrentes da preparação e do método de aplicação. Admita que as perdas usando os diferentes métodos de pintura são estimadas em: pincel 10%, rolo 20% e pistola pneumática 25%.

Um pintor vai pintar toda a superfície de um tanque de combustível na forma de um cilindro circular de 10 m de altura e raio da base igual a 2 m. Sabe-se que a tinta a ser usada tem rendimento teórico de 20 m² por litro e que são necessárias duas demãos.

Determine a quantidade, em litros, de tintas necessárias para pintar esse tanque utilizando a pistola pneumática.

Dado: Use $\pi = 3{,}14$.

Deduzindo que somente a superfície externa do cilindro será pintada e entendendo que serão aplicadas duas demãos, a área que receberá a tinta será $2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot (2 + 10) \cong 301{,}44$ m².

O volume de tinta necessário para pintar o tanque seria de:

$$V = \frac{301{,}44}{20} = 15{,}072 \text{ litros}$$

No entanto, como a pistola pneumática desperdiça 25% da tinta usada, 15,072 litros correspondem a 75% do volume de tinta necessário. Logo:

$$V_{tinta} = \frac{15{,}072}{0{,}75} \quad \therefore \; V_{tinta} = 20{,}096 \text{ litros}$$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UECE – A medida da altura de uma pirâmide é 10 m e sua base é um triângulo retângulo isósceles cuja medida da hipotenusa é 6 m. Pode-se afirmar corretamente que a medida do volume dessa pirâmide, em m³, é igual a

a) 60. **b)** 30. **c)** 15. **d)** 45.

8. UECE – Assinale a opção que corresponde à medida da altura do tetraedro regular cuja medida da aresta é igual a 3 m.

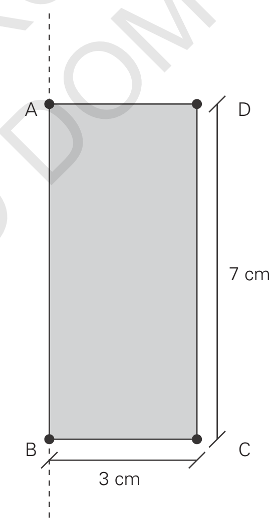
a) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ m.

b) $\sqrt{6}$ m.

c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ m.

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ m.

9. FMP-RJ – A figura mostra um retângulo ABCD cujos lados medem 7 cm e 3 cm. Um cilindro será formado girando-se o retângulo ABCD em torno da reta definida pelo seu lado AB.

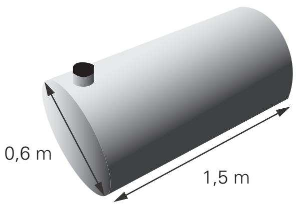


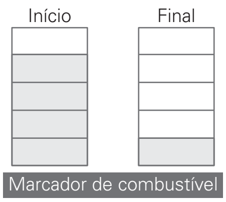
A medida do volume desse cilindro, em centímetros cúbicos, é mais próxima de

a) 750
b) 441
c) 63
d) 126
e) 190

10. UPE – A figura a seguir representa um tanque de combustível de certa marca de caminhão a diesel. Sabendo que esse veículo faz, em média, 3 km/L, e, observando o marcador de combustível no início e no final de uma viagem, quantos quilômetros esse caminhão percorreu?

Considere $\pi = 3$.





a) 243 km
b) 425 km
c) 648 km
d) 729 km
e) 813 km

11. UFU-MG – No Brasil, é comercializada, nos postos de combustível, a mistura do álcool anidro (etanol) com gasolina pura (gasolina A), conhecida como gasolina C. A proporção entre esses combustíveis é indicada pela porcentagem de etanol precedido pela letra E maiúscula. Dessa maneira, a mistura E10 é composta de 10% de etanol e 90% de gasolina A. As misturas mais comuns são E15, E20, E25 e E27.

Suponha-se que um tanque de uma distribuidora, na forma de um cilindro circular reto com 4 metros de diâmetro e capacidade de 120 000 litros, esteja com 100 000 litros da mistura E15. Suponha-se também que, devido a uma nova regulamentação da ANP (Agência Nacional do Petróleo), deva ser adicionado etanol nesse tanque de modo a obter a mistura E20, que passará a ser distribuída para comercialização.

Com base no texto apresentado, elabore e execute um plano de resolução de maneira a determinar

a) a quantidade de litros de etanol que serão adicionados a esse tanque.
b) o aumento, em metros, no nível de combustível (altura da coluna) nesse tanque.

Dados: use ∴ $\pi = 3{,}125$

12. Insper-SP – Um cilindro circular reto, branco, possui 20 cm de diâmetro da base e 80 cm de altura. Sobre a lateral desse cilindro, foi pintada uma faixa marrom de largura uniforme igual a 3,14 cm. A faixa completou duas revoluções ao redor do cilindro, como mostra a figura.

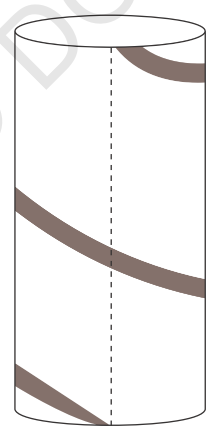


figura fora de escala

Nas condições descritas, a faixa marrom ocupou, da área lateral do cilindro, aproximadamente,

a) 5%
b) 25%
c) 0,5%
d) 2,5%
e) 10%

13. Mackenzie-SP (adaptado) – Qual a altura, em cm, de um tetraedro regular cuja área total mede $48\sqrt{3}$ cm²?

14. Unicamp-SP – Considere um cilindro circular reto. Se o raio da base for reduzido pela metade e a altura for duplicada, o volume do cilindro

a) é reduzido em 50%.

b) aumenta em 50%.

c) permanece o mesmo.

d) é reduzido em 25%.

15. Fuvest-SP – Cada aresta do tetraedro regular ABCD mede 10. Por um ponto P na aresta $\overline{AC}$, passa o plano α paralelo às arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Dado que AP = 3, o quadrilátero determinado pelas interseções de α com as arestas do tetraedro tem área igual a

a) 21

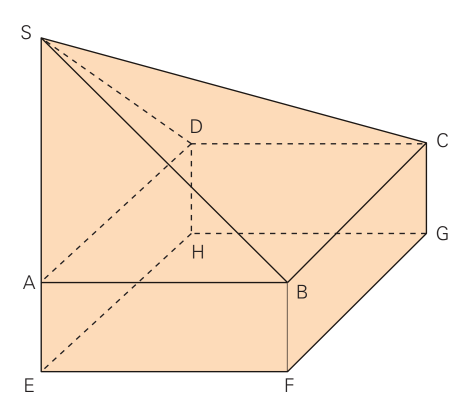
b) $\dfrac{21\sqrt{2}}{2}$

c) 30

d) $\dfrac{30}{2}$

e) $\dfrac{30\sqrt{3}}{2}$

16. Fuvest-SP – O sólido da figura é formado pela pirâmide SABCD sobre o paralelepípedo reto ABCDEFGH. Sabe-se que S pertence à reta determinada por A e E que $\overline{AE}$ = 2 cm, $\overline{AD}$ = 4 cm e $\overline{AB}$ = 5 cm.



A medida do segmento SA que faz com que o volume do sólido seja igual a $\frac{4}{3}$ do volume da pirâmide SEFGH é

a) 2 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 8 cm
e) 10 cm

17. Fuvest-SP – A grafite de um lápis tem quinze centímetros de comprimento e dois milímetros de espessura. Dentre os valores abaixo, o que mais se aproxima do número de átomos presentes nessa grafite é

Nota:

1) Assuma que a grafite é um cilindro circular reto, feito de grafita pura. A espessura do grafite é o diâmetro da base do cilindro.

2) Adote os valores aproximados de:

- 2,2 g/cm^3 para a densidade da grafite;
- 12 g/mol para a massa molar do carbono;
- $6{,}0 \cdot 10^{23}$ mol^{-1} para a constante de Avogadro;

a) $5 \cdot 10^{23}$
b) $1 \cdot 10^{23}$
c) $5 \cdot 10^{22}$
d) $1 \cdot 10^{22}$
e) $5 \cdot 10^{21}$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H8

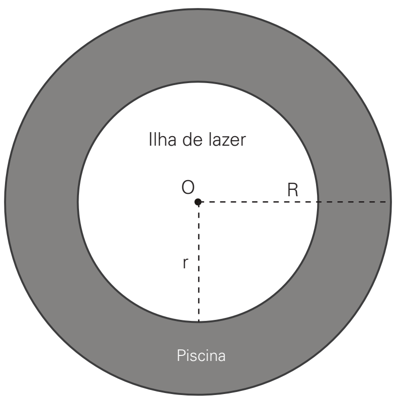
É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada.

Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

a) Quadrados, apenas.
b) Triângulos e quadrados, apenas.
c) Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.
d) Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.
e) Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.

19. Enem C2-H9

Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m^3, cuja base tem um raio R e centro O. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será r. Deseja-se que após a construção dessa ilha o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m^3.



Considere 3 como o valor aproximado para π.

Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer r, em metros, estará mais próximo de

a) 1,6.
b) 1,7.
c) 2,0.
d) 3,0.
e) 3,8.

20. Enem C2-H8

É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

Ciência Hoje das Crianças. FNDE;
Instituto Ciência Hoje, n. 166, mar. 1996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro. A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize $\pi = 3$).

a) 20 mL.
b) 24 mL.
c) 100 mL.
d) 120 mL.
e) 600 mL.

20 CONES E ESFERAS

- Cones
- Cones equiláteros
- Esferas

HABILIDADES

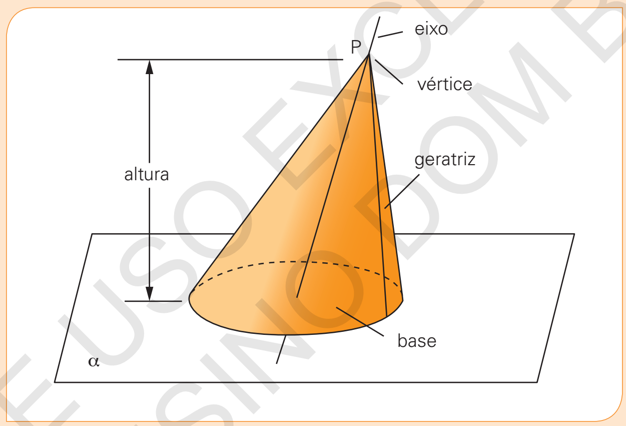
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma para selecionar argumentos que solucionem problemas do cotidiano.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.

CONES

Trata-se de sólidos de revolução, ou seja, são corpos formados pelo movimento completo de uma figura (no caso, um setor circular) em torno do próprio eixo.

ELEMENTOS DO CONE

Na figura a seguir, estão representados os elementos de um cone.

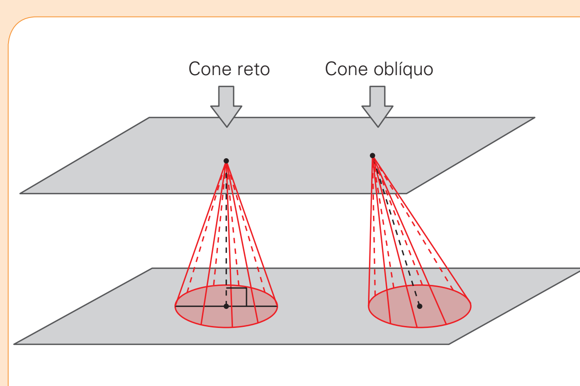


- **Base –** Círculo contido no plano α.
- **Vértice –** Ponto P em que se encontram os segmentos originados na base fora do plano α.
- **Eixo –** Reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.
- **Geratriz –** Qualquer segmento com uma extremidade no vértice e outra na circunferência da base do cone.
- **Altura –** Distância perpendicular do vértice ao plano da base do cone.

CLASSIFICAÇÃO

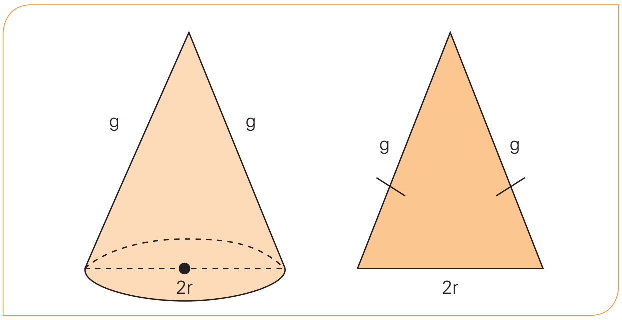
Os cones podem ser classificados em:

- **circular oblíquo:** apresenta as geratrizes oblíquas ao plano das bases.
- **circular reto (ou cilindro de revolução):** tem as geratrizes perpendiculares ao plano da base.

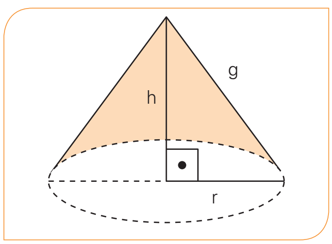


Observações:

- No cone reto, a secção meridional é um triângulo isósceles.



- Todo cone pode ser definido como um sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Assim, o cone reto também é conhecido como **cone de revolução**.
- Um dos catetos desse triângulo corresponde à altura do cone (h); o outro, ao raio (r). A hipotenusa é a geratriz (g).



Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

ÁREA LATERAL

A área lateral de um cone circular reto de raio da base r e geratriz **g** é equivalente a um setor circular de raio **g**, cujo arco tem comprimento 2 πr.

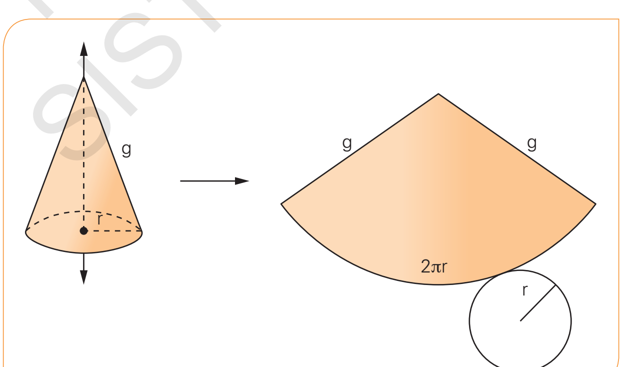
$$A_L = \frac{2\pi r \cdot g}{2}$$

Então:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g$$

ÁREA TOTAL

A superfície total de um cone de revolução de geratriz g e raio de base r é formada pela soma da área lateral (setor circular) com a área do círculo da base.



$$A_T = A_L + B \rightarrow A_T = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

Logo, a área total do cone é dada por:

$$A_T = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$

VOLUME

O volume de um cone corresponde a um terço do volume de um cilindro de mesmo raio.

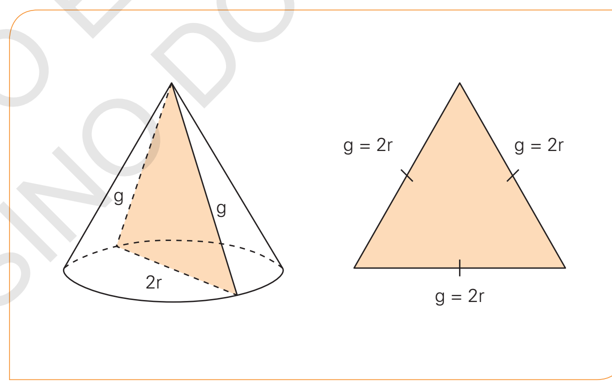
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot r^2) \cdot h$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

CONE EQUILÁTERO

É assim chamado o cone de revolução cuja secção meridiana é composta de um triângulo equilátero.



Área lateral

$A_L = \pi r \cdot g = 2\pi r \cdot r \therefore A_L = 2\pi r^2$

Área da base

$B = \pi r^2$

Área total

$A_T = A_L + B = 2\pi r^2 + \pi r \therefore A_T = 3\pi r^3$

Altura

$$h = \frac{2r\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = r\sqrt{3}$$

Volume

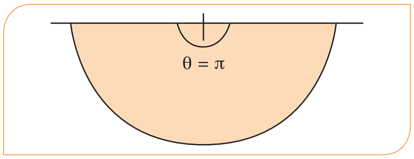
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} \therefore V = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Ângulo

O ângulo θ, em radianos, da superfície lateral planificada é dado por $\theta = \dfrac{2\pi r}{g}$.

Como para o cone equilátero g = 2r, temos que $\theta = \frac{2\pi r}{2r} \rightarrow \theta = \pi$.

Portanto, a superfície lateral planificada do cone equilátero é um semicírculo.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. UECE – A superfície lateral de um cone circular reto, quando planificada, torna-se um setor circular de 12 cm de raio com um ângulo central de 120 graus. A medida, em centímetros quadrados, da área da base deste cone é

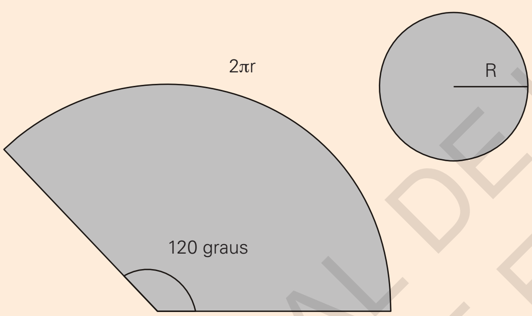
a) 144 π
b) 72 π
c) 36 π
d) 16 π

Resolução

Com a planificação do cone circular reto, obtemos:

g = 12 cm

$\theta = 120° = \frac{2}{3}\pi$ rad



$\theta = \frac{2\pi R}{g} \rightarrow 2\pi R = \theta \cdot g \rightarrow 2\pi R = \frac{2}{3}\pi \cdot 12 \therefore$

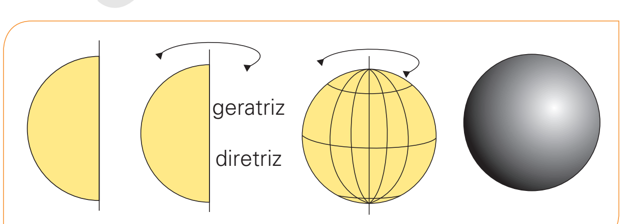
$\therefore R = 4$ cm

Com o valor de R, podemos calcular a área da base do cone.

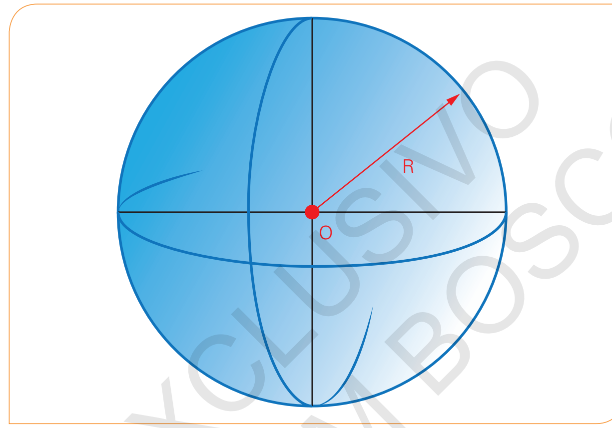
$B = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 4^2 \therefore B = 16\pi\ \text{cm}^2$

ESFERA

Trata-se de um sólido de revolução obtido pela rotação de um semicírculo em torno do eixo que contém o diâmetro. Assim, a esfera é um objeto tridimensional perfeitamente simétrico.



Dado um ponto **O** e uma distância **R**, denomina-se **esfera** o conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias em relação ao ponto **O** sejam menores ou iguais a **R**. Assim, o ponto **O** é o centro e **R** é o raio da esfera.



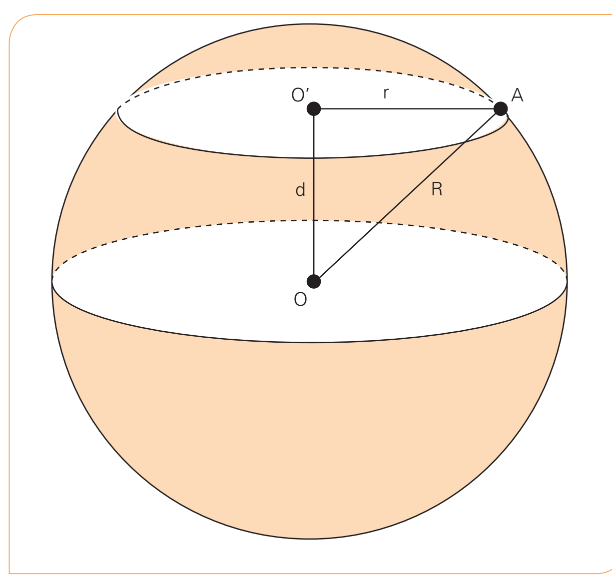
SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Superfície esférica de centro **O** e raio **R** é o conjunto de todos os pontos **P** do espaço, tais que a distância **OP** é igual a **R**.

SECÇÃO DA ESFERA

Quando seccionamos uma esfera com um plano, obtemos um círculo. Caso o plano passe pelo centro da esfera, o círculo obtido é denominado **círculo máximo**.

Sendo **d** a distância do plano até o centro da esfera de raio **R** (d < R), a secção é um círculo de raio **r,** e a relação entre **d**, **R** e **r** é dada pelo teorema de Pitágoras.

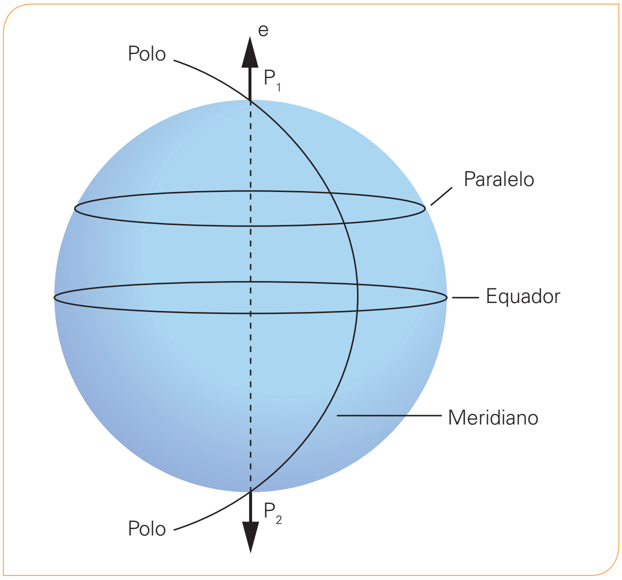


No Δ AO'O, temos:

$$R^2 = r^2 + d^2$$

ELEMENTOS DE UMA ESFERA

Vamos considerar a superfície esférica de centro **O**, raio **R** e eixo e.



- **Polos –** Pontos em que o eixo intersecta a superfície da esfera.
- **Equador –** Circunferência obtida pela intersecção do plano perpendicular ao eixo que passa pelo centro O com a superfície esférica.
- **Paralelo –** Circunferência obtida pela intersecção do plano perpendicular ao eixo com a superfície esférica.
- **Meridiano –** Circunferência obtida pela intersecção do plano que contém o eixo com a superfície esférica.

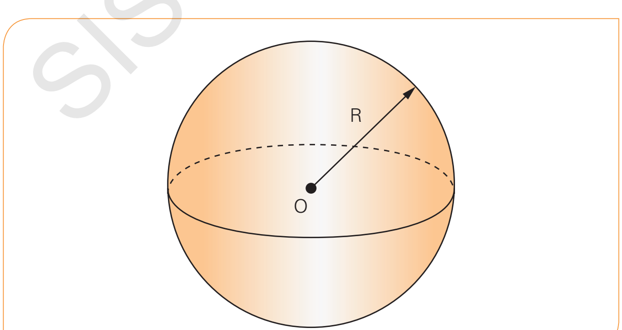
VOLUME

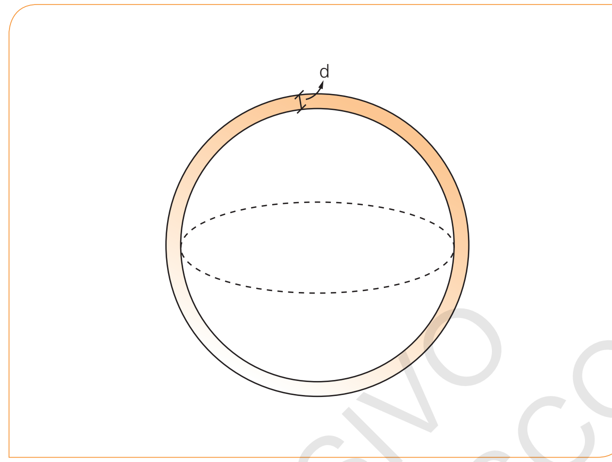
O volume da esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

O lugar geométrico dos pontos do espaço que estão sempre à mesma distância **R** de um ponto fixo **O** é denominado **superfície esférica**.



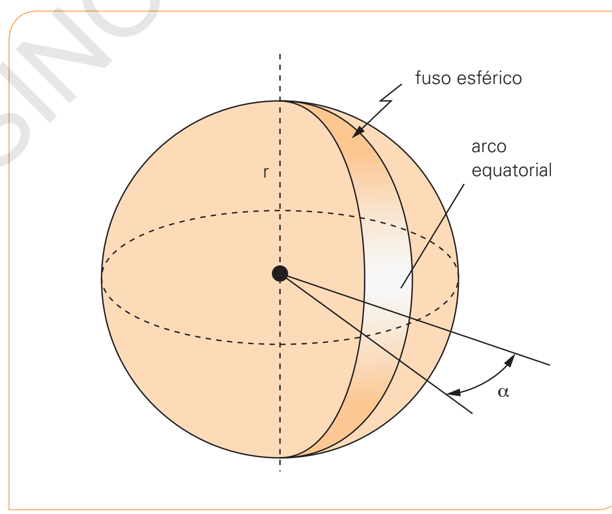


Por meio do volume da esfera e do volume de uma casca esférica de espessura d, é possível demonstrar que a área da superfície esférica é dada por:

$$A = 4\pi \cdot R^2$$

FUSO ESFÉRICO

O fuso esférico é caracterizado pelo ângulo α medido na secção equatorial.



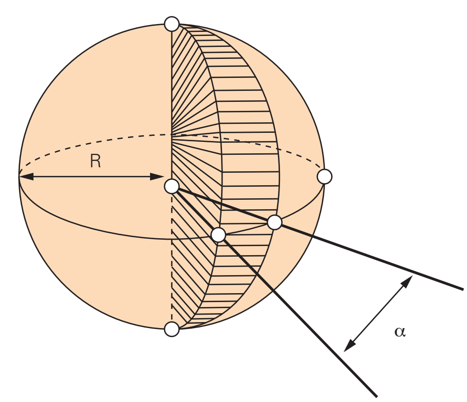
A área do fuso é proporcional à medida do ângulo α.

$$A_{fuso} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 4\pi R^2 \text{ (α em graus)}$$

$$A_{fuso} = \alpha \cdot 2R^2 \text{ (α em radianos)}$$

CUNHA ESFÉRICA

É assim chamada a parte da esfera limitada por dois planos que contenham o diâmetro. A cunha esférica é caracterizada pelo ângulo α medido na secção equatorial.



O volume do fuso é proporcional à medida do ângulo α.

$$V_{cunha} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \text{ (α em graus)}$$

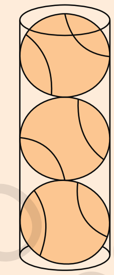
$$V_{cunha} = \alpha \cdot \frac{2R^3}{3} \text{ (α em radianos)}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. FGV-RJ – Em uma lata cilíndrica fechada de volume 5 175 cm³, cabem exatamente três bolas de tênis.

a) Calcule o volume da lata não ocupado pelas bolas.

b) Qual é a razão entre o volume das três bolas e o volume da lata?



Resolução

a) O raio de cada bola corresponde ao raio do cilindro R. A altura do cilindro h é igual à altura das três bolas: h = 6R.

Logo, o volume do cilindro é:

$$V_{cilindro} = \pi R^2 \cdot h$$

$$\pi R^2 \cdot 6R = 5\,175 \rightarrow R^3 = \frac{5\,175}{6 \cdot \pi} \therefore R^3 = \frac{1\,725}{2\pi}$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

$$\frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1\,725}{2\pi} = \frac{6\,900}{3} = 1\,150 \text{ cm}^3$$

Logo, como o cilindro tem 3 bolinhas, o espaço vazio é:

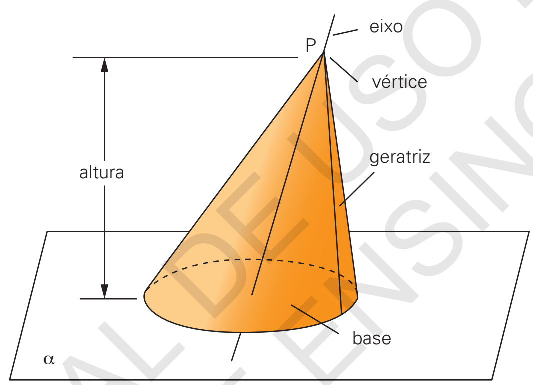
$$5\,175 - 3 \cdot 1\,150 = 5\,175 - 3\,450 = 1\,725 \text{ cm}^3$$

b) $\frac{V_{bolinhas}}{V_{latas}} = \frac{3\,450}{5\,175} = \frac{2}{3}$

ROTEIRO DE AULA

CONE

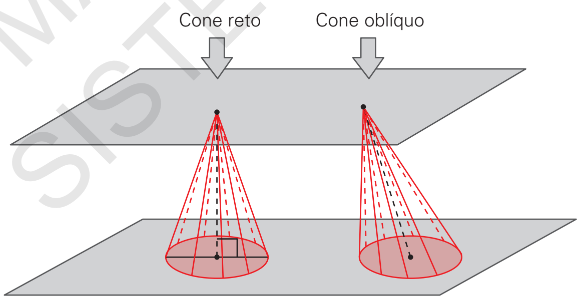
Sólido de revolução, ou seja, corpo formado pelo movimento completo de uma figura (no caso, um setor circular) em torno do próprio eixo. Apesar de não ser um poliedro, é um sólido geométrico cuja base é constituída por um círculo.

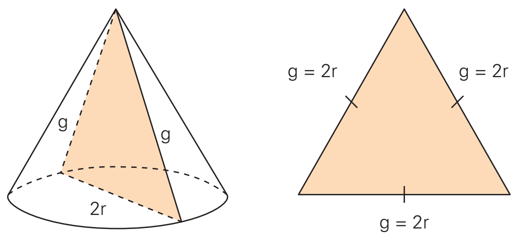


$A_L = 2\pi r^2$

$A_T = 3\pi r^3$

$V = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

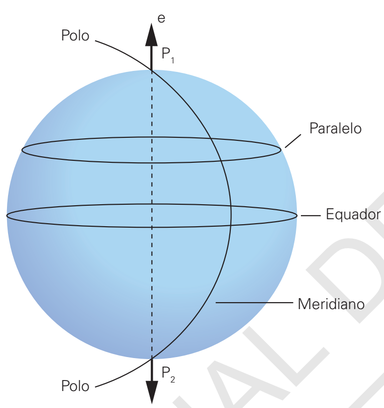


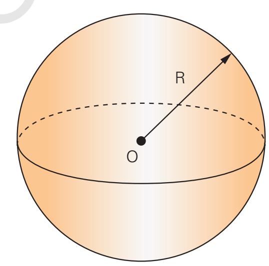


ROTEIRO DE AULA

ESFERA

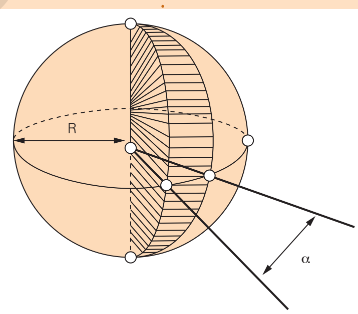
A esfera é um sólido de revolução obtido através da rotação de um semicírculo em torno do eixo que contém o diâmetro, sendo um objeto tridimensional perfeitamente simétrico.





$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

$A = 4\pi \cdot R^2$



$V_{cunha} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \frac{4\pi R^3}{3}$ (α em graus)

$V_{cunha} = \alpha \cdot \frac{2R^3}{3}$ (α em radianos)

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEMG (adaptado) – Um reservatório de água, de formato cônico, com raio da tampa circular igual a 8 metros e altura igual a 9 metros, será substituído por outro de forma cúbica, de aresta igual a 10 metros.

Estando o reservatório cônico completamente cheio, ao se transferir a água para o reservatório cúbico, qual a altura do nível atingida pela água?

(considere $\pi \cong 3$)

O volume de água no reservatório cônico é:

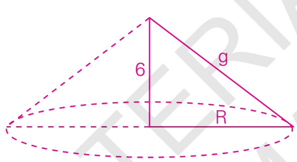
$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 9 \cong 576 \text{ m}^3.$

Portanto, a altura h atingida no reservatório cúbico será:

$10^2 \cdot h = 576 \leftrightarrow h = 5{,}76 \text{ m}^3.$

2. Mackenzie-SP – Em um triângulo retângulo, a medida do menor cateto é 6 cm. Rotacionando esse triângulo ao redor desse cateto, obtém-se um sólido de revolução, cujo volume é 128 π cm³. Nessas condições, a área total da superfície do sólido obtido na revolução, em cm², é

a) 144 π
b) 120 π
c) 80 π
d) 72 π
e) 64 π



Usando o volume do cone, temos:

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 6 = 128\,\pi$

$R^2 = 64$
$R = 8$

Determinando a geratriz do cone, temos:

$g^2 = 6^2 + 8^2$
$g^2 = 36 + 64$
$g^2 = 100$
$g = 10$

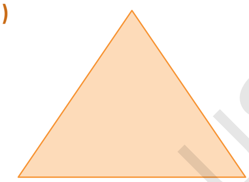
Logo, a área total será dada por:

$A_T = \pi \cdot R \cdot g + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 8 \cdot 10 + \pi \cdot 8^2 = 144\,\pi \text{ cm}^2$

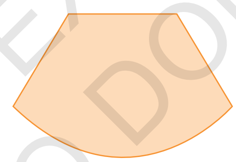
3. Enem C2-H7

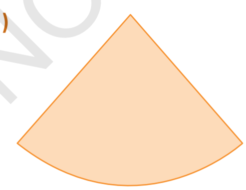
Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.

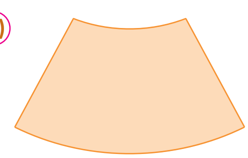
Qual deverá ser a forma do adesivo?

a)


b)


c)


d)


e)


A superfície lateral de um cone é obtida por um setor circular. Assim, o objetivo do responsável pelo adesivo será alcançado se ele fizer o corte indicado na alternativa E.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

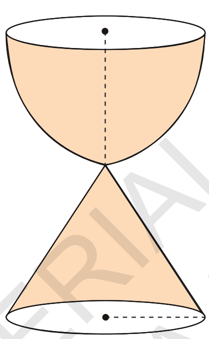
Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

4. Unicamp-SP – Um cilindro circular reto, com raio da base e altura iguais a R, tem a mesma área de superfície total que uma esfera de raio

a) 2R
b) $\sqrt{3}$R
c) $\sqrt{2}$R
d) R

$A_{cilindro} = 2\pi R^2 \cdot 2\pi R \cdot R = 2\pi R \cdot (R + R) = 4\pi R^2$
$A_{esfera} = 4\pi r^2$
$A_{esfera} = A_{cilindro}$
$4\pi r^2 = 4\pi R^2$
$r = R$

5. Cefet-SP – Um artesão resolveu fabricar uma ampulheta de volume total V constituída de uma semiesfera de raio 4 cm e de um cone reto, com raio e altura 4 cm, comunicando-se pelo vértice do cone, de acordo com a figura abaixo.



Para seu funcionamento, o artesão depositará na ampulheta areia que corresponda a 25% de V. Portanto, o volume de areia, em cm³, é

a) 16 π
b) $\frac{64\,\pi}{3}$
c) 32 π
d) $\frac{128\,\pi}{3}$
e) 64 π

$V = V_{semiesfera} + V_{cone} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 4^3\right)+\left(\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4^2\cdot 4\right) = 64\,\pi$

$V_{areia} = 0{,}25\,V = 0{,}25 \cdot 64\pi = 16\pi \text{ cm}^3$

6. Enem C2-H9

Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

Use 3 como valor aproximado para π.

A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a

a) 168
b) 304
c) 306
d) 378
e) 514

$R_1 = 5$ mm; $h = 10$ mm

$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \pi R_1^2 h = \frac{4}{3}\cdot 3\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2\cdot 10 = 500 + 750 = 1\,250 \text{ mm}^3$

$R_2 = 4$ mm

$V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 + \pi R_2^2 h = \frac{4}{3}\cdot 3\cdot 4^3 + 3\cdot 4^2\cdot 10 = 256 + 480 = 736 \text{ mm}^3$

A redução do volume é:

$V_1 - V_2 = 1\,250 - 736 = 514 \text{ mm}^3$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Mackenzie-SP – Se um cone reto tem altura igual a 12 cm e seu volume é 64 π cm³, então sua geratriz, em cm, mede

a) 20
b) $10\sqrt{2}$
c) $4\sqrt{10}$
d) $4\sqrt{2}$
e) $2\sqrt{10}$

8. Enem C2-H9

Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio R, com volume dado por $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$.

Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$ cujo volume será dado por $\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot h$, sendo h a altura da nova embalagem.

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, a altura do frasco cilíndrico (em termos de R) deverá ser igual a

a) 2R
b) 4R
c) 6R
d) 9R
e) 12R

9. PUC-SP – O volume de um cilindro de 8 cm de altura equivale a 75% do volume de uma esfera com 8 cm de diâmetro. A área lateral do cilindro, em cm³, é

a) $42\sqrt{2}\pi$ **b)** $36\sqrt{3}\pi$ **c)** $32\sqrt{2}\pi$ **d)** $24\sqrt{3}\pi$

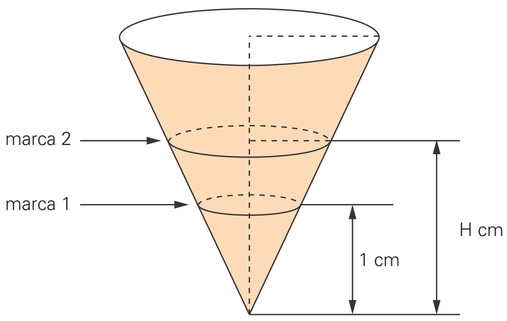
10. UNESP – Prato da culinária japonesa, o *temaki* é um tipo de sushi na forma de cone, enrolado externamente com nori, uma espécie de folha feita a partir de algas marinhas, e recheado com arroz, peixe cru, ovas de peixe, vegetais e uma pasta de maionese e cebolinha.

SZEFEI/ISTOCKPHOTO

Um *temaki* típico pode ser representado matematicamente por um cone circular reto em que o diâmetro da base mede 8 cm e a altura 10 cm. Sabendo-se que, em um *temaki* típico de salmão, o peixe corresponde a 90% da massa do seu recheio, que a densidade do salmão é de 0,35 g/cm³, e tomando $\pi \cong 3$, a quantidade aproximada de salmão, em gramas, nesse *temaki*, é de

a) 46.
b) 58.
c) 54.
d) 50.
e) 62.

11. UFU-MG – Um recipiente cônico utilizado em experiências de química deve ter duas marcas horizontais circulares, uma situada a 1 centímetro do vértice do cone, marcando um certo volume V, e outra marcando o dobro deste volume, situada a H centímetros do vértice, conforme figura.



Nestas condições, a distância H, em centímetros, é igual a:

a) $\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{3}$

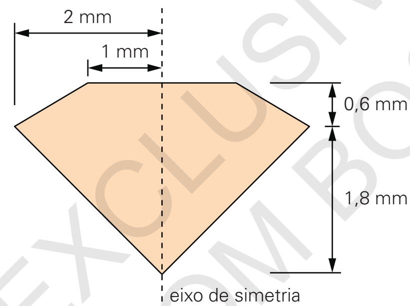
c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{3}{2}$

12. Unicamp-SP – Um brilhante é um diamante com uma lapidação particular, que torna essa gema a mais apreciada dentre todas as pedras preciosas.

a) Em geologia, um quilate é uma medida de massa que corresponde a 200 mg. Considerando que a massa específica do diamante é de aproximadamente 3,5 g/cm³, determine o volume de um brilhante com 0,7 quilate.

b) A figura abaixo apresenta a seção transversal de um brilhante. Como é muito difícil calcular o volume exato da pedra lapidada, podemos aproximá-lo pela soma do volume de um tronco de cone (parte superior) com o de um cone (parte inferior). Determine, nesse caso, o volume aproximado do brilhante.



Dica: o volume de um tronco de cone pode ser obtido empregando-se a fórmula $V = \frac{\pi}{3}h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$ em que R e r são os raios das bases e h é a altura do tronco.

13. Fuvest-SP (adaptado)


ALOISIO MAURICIO/FOTOARENA

Relógio Solar é um projeto de Caetano Fraccaroll, executado por Vera Pallamin

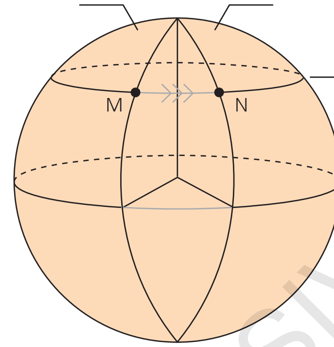
Esta foto é do relógio solar localizado no *campus* do Butantã, da USP. A linha inclinada (tracejada na foto), cuja projeção ao chão pelos raios solares indica a hora, é paralela ao eixo de rotação da Terra. Sendo μ e ρ, respectivamente, a latitude e a longitude do local, medidas em graus, pode-se afirmar, corretamente, que a medida em graus do ângulo que essa linha faz com o plano horizontal é igual a

Nota:

Entende-se por "plano horizontal", em um ponto da superfície terrestre, o plano perpendicular à reta que passa por esse ponto e pelo centro da Terra.

a) ρ
b) μ
c) $90 - \rho$
d) $90 - \mu$
e) $180 - \rho$

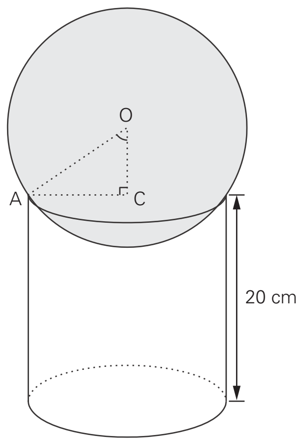
14. UNESP – Observe a figura da representação dos pontos M e N sobre a superfície da Terra.



Considerando a Terra uma esfera de raio 6 400 km e adotando $\pi = 3$, para ir do ponto M ao ponto N, pela superfície da Terra e no sentido indicado pelas setas vermelhas, a distância percorrida sobre o paralelo 60° Norte será igual a

a) 2 100 km
b) 1 600 km
c) 2 700 km
d) 1 800 km
e) 1 200 km

15. FGV-SP (adaptado) – Uma bola de vidro que é uma esfera de centro O se encaixou num copo exatamente como mostra a figura. O raio da bola mede 13 cm e OC = 5 cm. O segmento $\overline{AC}$ é o raio do cilindro. O que tem o maior volume: a bola ou o copo?



16. Fuvest-SP – Um reservatório de água tem o formato de um cone circular reto. O diâmetro de sua base (que está apoiada sobre o chão horizontal) é igual a 8 m. Sua altura é igual a 12 m. A partir de um instante em que o reservatório está completamente vazio, inicia-se seu enchimento com água a uma vazão constante de 500 litros por minuto.

O tempo gasto para que o nível de água atinja metade da altura do reservatório é de, aproximadamente,

Dados:

- π é aproximadamente 3,14.
- O volume V do cone circular reto de altura h e raio da base r é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

a) 4 horas e 50 minutos.
b) 5 horas e 20 minutos.
c) 5 horas e 50 minutos.
d) 6 horas e 20 minutos.
e) 6 horas e 50 minutos.

17. Escola Naval-RJ – Um prisma quadrangular regular tem área lateral $36\sqrt{6}$ unidades de área. Sabendo que suas diagonais formam um ângulo de 60° com suas bases, então a razão do volume de uma esfera de raio $24^{\frac{1}{6}}$ unidades de comprimento para o volume do prisma é

a) $\frac{8}{81\pi}$ **b)** $\frac{81\pi}{8}$ **c)** $\frac{8\pi}{81}$ **d)** $\frac{8\pi}{27}$ **e)** $\frac{81}{8\pi}$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H9

Para fazer um pião, brinquedo muito apreciado pelas crianças, um artesão utilizará o torno mecânico para trabalhar num pedaço de madeira em formato de cilindro reto, cujas medidas do diâmetro e da altura estão ilustradas na Figura 1. A parte de cima desse pião será uma semiesfera, e a parte de baixo, um cone com altura 4 cm, conforme Figura 2. O vértice do cone deverá coincidir com o centro da base do cilindro.

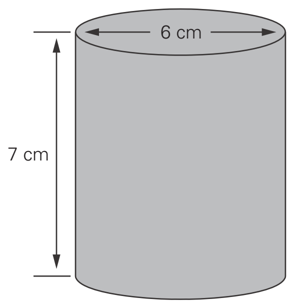


Figura 1

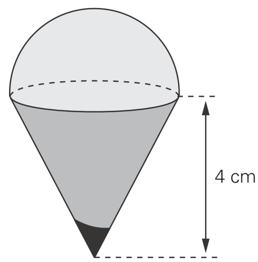


Figura 2

O artesão deseja fazer um pião com a maior altura que esse pedaço de madeira possa proporcionar e de modo a minimizar a quantidade de madeira a ser descartada.

Dados:

O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$;

O volume do cilindro de altura h e área da base S é $S \cdot h$;

O volume do cone de altura h e área da base S é $\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$;

Por simplicidade, aproxime π para 3.

A quantidade de madeira descartada, em centímetros cúbicos, é

a) 45 **b)** 48 **c)** 72 **d)** 90 **e)** 99

19. Enem C2-H8

A bocha é um esporte jogado em canchas, que são terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada.

A Figura 1 ilustra uma bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha. Suponha que um jogador tenha lançado uma bocha, de raio 5 cm, que tenha ficado encostada no bolim, de raio 2 cm, conforme ilustra a Figura 2.


BLEEX/ISTOCKPHOTO
Figura 1

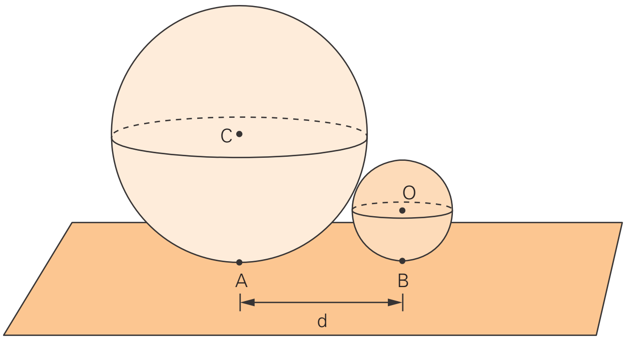


Figura 2

Considere o ponto C como o centro da bocha, e o ponto O como o centro do bolim. Sabe-se que A e B são os pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre A e B é igual a d.

Nessas condições, qual a razão entre d e o raio do bolim?

a) 1

b) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

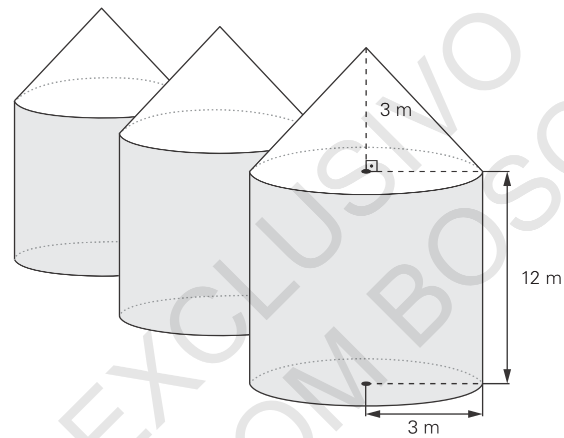
c) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

d) 2

e) $\sqrt{10}$

20. Enem C2-H9

Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposta por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m³. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

a) 6.

b) 16.

c) 17.

d) 18.

e) 21.

21 ESTATÍSTICA - ANÁLISE DE DADOS

- Variáveis
- Tabelas de frequência
- Representações gráficas
- Representações gráficas
- Pictograma
- Histograma
- Polígono de frequência
- Gráfico de linhas oupoligonal

HABILIDADES

- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Resolver problemas com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recursos para a construção de argumentos.

VARIÁVEIS

Em pesquisas, é importante inicialmente conhecer o **conjunto universo** ou a **população** (pessoas ou objetos que tenham em comum a característica pesquisada). Geralmente a totalidade do grupo a ser analisado é grande, o que torna o custo dessa operação inviável. Por isso é definida o que se chama de **amostra**, que nada mais é que uma parcela do grupo a ser pesquisado.

TABELAS DE FREQUÊNCIA

Organizar dados estatísticos em **tabelas de frequência** possibilita a leitura rápida e resumida dos resultados obtidos em uma pesquisa.

Vamos analisar os dois tipos de tabelas de frequência.

FREQUÊNCIA ABSOLUTA

Na construção de uma tabela, precisamos nos atentar para o fato de que cada variável em questão é citada certo número de vezes. Isso corresponde à **frequência absoluta**, representada por **Fa**.

Considerando o exemplo anterior, podemos construir a seguinte tabela:

Observação:

A soma das frequências absolutas deve ser igual ao número total de entrevistados (2 + 12 + 4 + 2 = 20).

Idade	Frequência (Fa)
16	2
17	12
18	4
19	2

FREQUÊNCIA RELATIVA

Define-se **frequência relativa** (Fr) como a razão entre a frequência absoluta (Fa) e o número total de dados (n):

$$Fr = \frac{Fa}{n}$$

A frequência relativa é representada em porcentagem.

Vamos observar a tabela de frequência completa, novamente considerando a pesquisa realizada entre os alunos do colégio na cidade de Dracena.

Idade	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)	Porcentagem (%)
16	2	$\frac{2}{20} = 0,1$	10
17	12	$\frac{12}{20} = 0,6$	60
18	4	$\frac{4}{20} = 0,2$	20
19	2	$\frac{2}{20} = 0,1$	10
Total	**20**	**1**	**100**

Saiba mais

A amplitude da classe a ⊢ b é dada pela diferença b – a. No exemplo citado, a amplitude de cada classe é 5.

Essa escolha é geralmente definida pelo desenvolvedor da pesquisa, de acordo com a necessidade. Desse modo, a classe pode assumir valor diferenciado para o mesmo experimento.

REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

Vamos analisar algumas situações e os respectivos detalhes do processo de construção, interpretação e análise de gráficos.

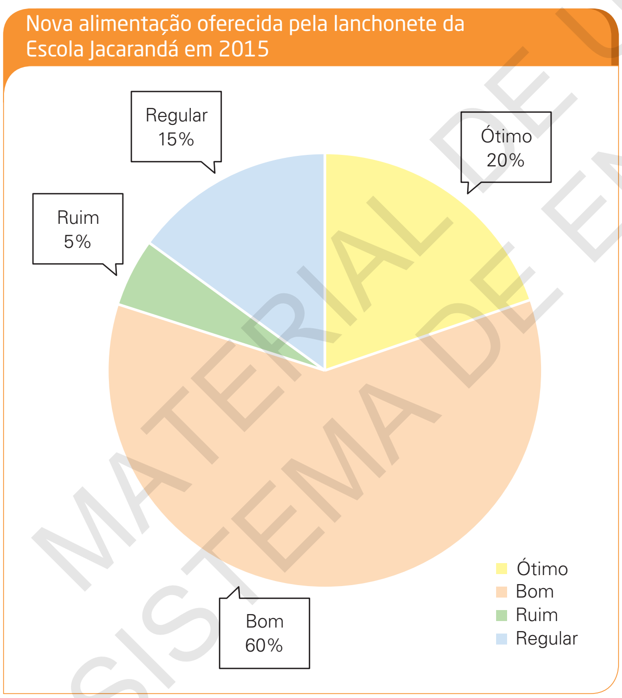
GRÁFICO DE SETORES

É empregado para ressaltar a participação do dado no total, o qual é expresso pelo círculo, cujas divisões representam cada parte que compõe essa totalidade. Cada setor tem área proporcional aos dados da série.

Exemplo

Em 2015, uma pesquisa realizada com um grupo de alunos perguntou sobre a nova alimentação oferecida pela lanchonete da Escola Jacarandá.

Os dados foram organizados e expressos em um gráfico de setores:



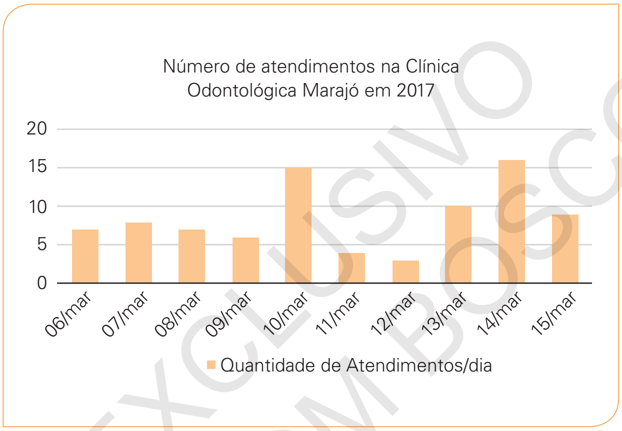
Podemos observar que o círculo ficou dividido em quatro partes – ou seja, quatro setores circulares. As medidas de cada parte são ângulos proporcionais às frequências correspondentes.

GRÁFICO DE BARRAS

Quando as legendas não são breves, a preferência é pelo gráfico de barras horizontais ou verticais, cujos retângulos têm mesma base e altura proporcional aos respectivos dados.

Exemplo

O gráfico na sequência considera a quantidade de pessoas atendidas na Clínica Odontológica Marajó. Durante dez dias seguidos do ano de 2017, ela funcionou 24 horas, em sistema de plantão.



Fonte: Arquivo da Clínica Odontológica Marajó.

O número de atendimentos é representado pela coluna vermelha. E os valores de cada dia são proporcionais à altura das colunas.

Note que o período (cronológico) apresentado se inicia em uma segunda-feira (06/03) e encerra em uma quarta-feira (15/03).

De acordo com o gráfico, podemos saber outras informações:

- o período considerado é de 10 dias.
- no dia 14/03, o número de atendimentos atingiu o maior valor (16 atendimentos).
- entre 06/03 e 09/03, o número de atendimentos praticamente se manteve constante.
- em 12/03, ocorreu a menor quantidade de atendimentos no período (3 atendimentos).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Uma pesquisa sobre o lazer preferido de 100 funcionários de uma empresa apresentou o seguinte resultado:

Lazer	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)	Porcentagem (%)
Esporte	x	0,3	30
Música	20	y	20
Internet	20	0,2	z
Leitura	10	m	10
Outros	n	0,2	p
Total	**100**	**1,0**	**100**

Quais os valores de x, y, m, n, p e z?

Resolução

Para determinar os valores, basta relacionarmos as três colunas, linha por linha.

Para determinar o valor de x, aplicamos regra de três simples direta.

100 ———————— 100%

x ———————— 30% → x = 30

Para determinar o valor de y, seguimos a mesma lógica de x.

1,0 ———————— 100%

y ———————— 20% → y = 0,2

Para determinar m, comparamos ao valor de y.

20 ———————— 0,2

10 ———————— m → m = 0,1

Para determinar n, p e z, seguimos a mesma lógica.

n = 20

p = 20

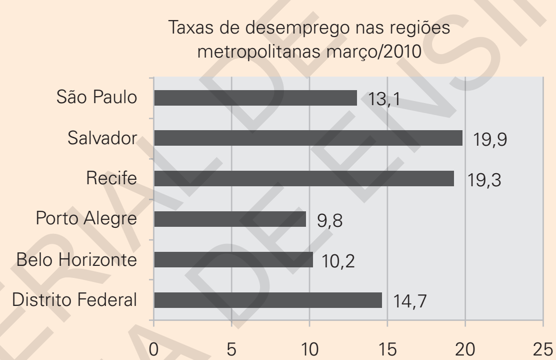
z = 20

Censo (ou recenseamento demográfico) é um levantamento estatístico referente à população. Com ele é possível analisar várias informações, como número de homens, mulheres, crianças, idosos; onde e como vivem as pessoas, entre tantos outros dados importantes.

A maioria dos países realiza esse estudo de dez em dez anos. Para saber mais sobre o assunto, acesse <www.ibge.gov.br>.

2. Enem C6-H26

Pesquisa realizada apresenta a taxa de desemprego nas regiões metropolitanas em março/2010. Eis os resultados no gráfico a seguir: (%)



Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 28 abr. 2010. (Adaptado.)

A partir do exposto, qual a média aritmética das taxas de desemprego apresentadas (em %)?

a) 15,2 **b)** 19,3 **c)** 9,8 **d)** 16,1 **e)** 17,4

Resolução

Somamos os valores expressos no gráfico e os dividimos por cinco (n = 5).

Assim:

Média = (13,1 + 19,9 + 19,3 + 9,8 + 10,2 + 14,7) : 5

87 : 5 = 17,4%

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

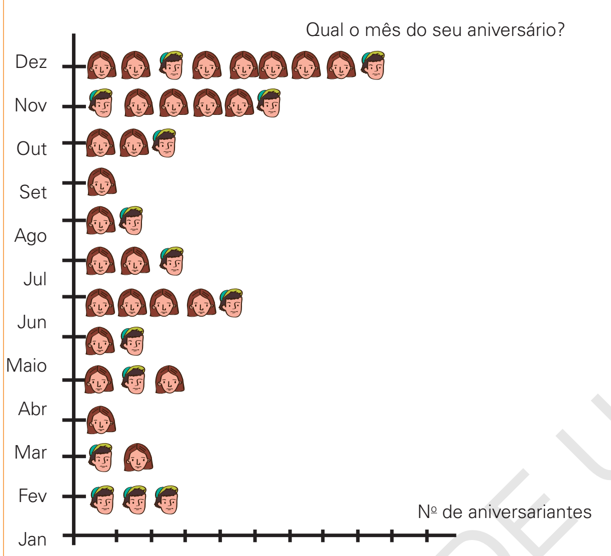
REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

PICTOGRAMA

Trata-se de uma representação gráfica construída com figura representativa da intensidade do fenômeno.

Exemplo

Uma pesquisa realizada com um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio visava traçar o perfil dos estudantes da sala. Entre as perguntas realizadas, destacou-se a que questionava o mês de aniversário de cada aluno.



Observando o gráfico pictograma, percebemos que os meses de novembro e dezembro têm as maiores quantidades. Em dezembro há 9 alunos aniversariantes (2 meninos e 7 meninas). Em novembro constam 8 aniversariantes (2 meninos e 6 meninas). Por outro lado, os meses de setembro e março apresentam somente 1 aniversariante cada um.

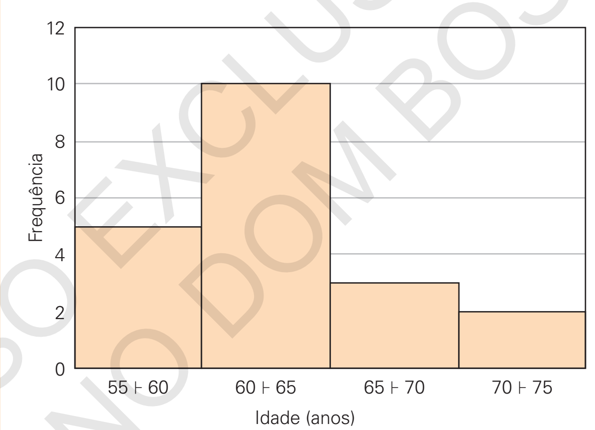
HISTOGRAMA

Esse tipo de gráfico é formado por um conjunto de retângulos justapostos. Suas bases se localizam sobre o eixo horizontal, de tal modo que seus pontos médios coincidam com os pontos médios dos intervalos de classe. A área do histograma é proporcional à soma das frequências simples ou absolutas. Em geral, um histograma representa graficamente situações-problema em que os dados obtidos estão organizados em classes.

Observe uma tabela que representa a idade de um grupo de pessoas que praticam pilates em determinada clínica.

Idade	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr) em porcentagem (%)
55 ⊢ 60	5	25
60 ⊢ 65	10	50
65 ⊢ 70	3	15
70 ⊢ 75	2	10
Total	**20**	**100**

Com base nos dados dessa tabela, foi elaborado um histograma. Observe.

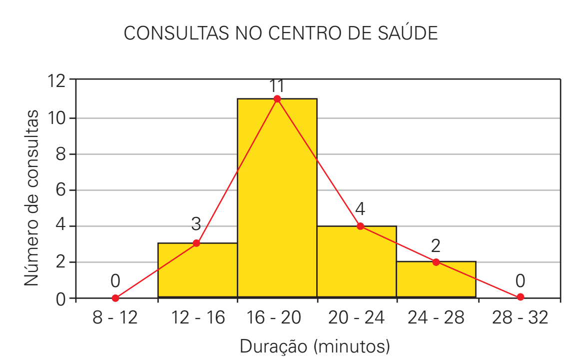


POLÍGONO DE FREQUÊNCIA

Trata-se de um gráfico em linha, com frequência marcada sobre as linhas perpendiculares ao eixo horizontal, levantadas pelos pontos médios dos intervalos de classe.

Para obter o polígono (linha fechada), completa-se a figura, ligando os extremos da linha aos pontos médios da classe anterior à primeira linha e da classe posterior à última linha da distribuição.

Para construir um polígono de frequência, geralmente o "pano de fundo" é o histograma de frequências, conforme o exemplo a seguir.



Saiba mais

Originário dos estudos de Pareto, o diagrama que leva o nome do economista italiano é construído com objetivo de se compreender a relação ação/benefício. Ou seja, no diagrama de Pareto prioriza-se a ação que supõe melhor resultado. Ele é composto de um gráfico de barras que ordena a frequência das ocorrências em ordem decrescente e possibilita localizar problemas vitais e eliminar futuras perdas.

Considerada uma das sete ferramentas básicas da qualidade, o diagrama de Pareto baseia-se no princípio de que a maioria das perdas tem poucas causas ou que poucas causas são vitais e que a maioria das causas é trivial.

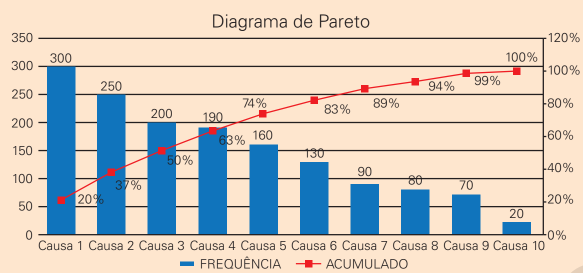
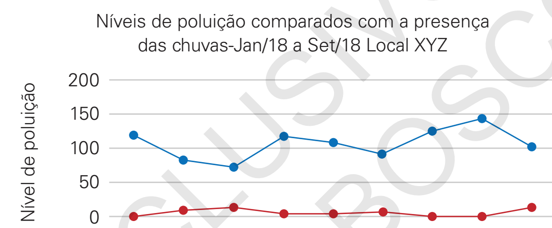


GRÁFICO DE LINHAS OU POLIGONAL

Esse tipo de gráfico constitui uma aplicação do processo de representação das funções no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Esse gráfico pode apresentar uma ou mais linhas, dependendo da situação descrita.

Exemplo

O gráfico a seguir representa a comparação entre os níveis de poluição e os níveis de chuva durante 9 períodos referenciais – representados ao final dos 9 meses iniciais de 2018 (janeiro a setembro).



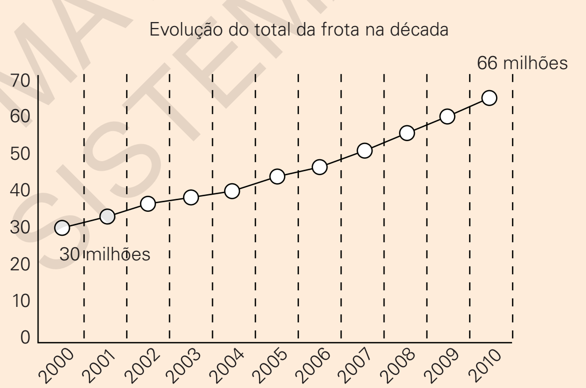
	jan/18	fev/18	mar/18	abr/18	maio/18	jun/18	jul/18	ago/18	set/18
Poluição	121	85	75	118	109	95	126	145	104
Chuva	4,2	12,7	15,2	5,7	5,2	8,7	3,8	1,9	15,6

Com base no gráfico, facilmente podemos identificar que a falta de chuvas interfere sensivelmente no nível de poluição. O mês de maior concentração de chuvas coincide com o menor nível de poluição (março). Por outro lado, o mês com menor quantidade de chuva é o que tem maior nível de poluição (agosto).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3. Enem C6-H25

Nos últimos anos, a frota de veículos no Brasil tem crescido de forma acentuada. Observando o gráfico, é possível verificar a variação do número de veículos (carros, motocicletas e caminhões), no período de 2000 a 2010. Projeta-se que a taxa de crescimento relativo no período de 2000 a 2010 mantenha-se para a década seguinte.



Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 27 fev. 2012. (Adaptado.)

Qual será o número de veículos no ano de 2020?

a) 79,2 milhões
b) 102,0 milhões
c) 132,0 milhões
d) 138,0 milhões
e) 145,2 milhões

Resolução

Entre 2000 a 2010, a taxa de crescimento relativo na frota de veículos foi de:

$$\frac{66-30}{30} = \frac{36}{30} = 1{,}2$$

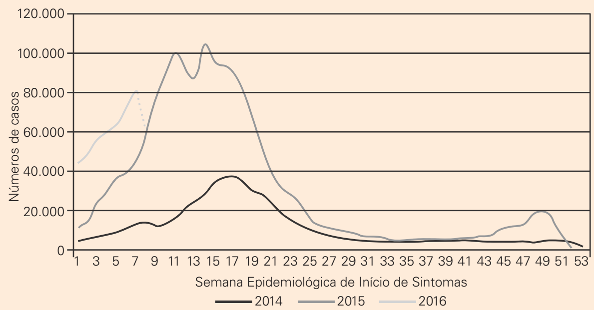
Mantida essa taxa, em 2020 o número (em milhões) de veículos será:

$$66 \cdot (1 + 1{,}2) = 66 \cdot 2{,}2 = 145{,}2$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

4. UFPA – O gráfico abaixo, retirado do Boletim Epidemiológico 16 de 2016 do Ministério da Saúde, registra os casos de dengue por semana, no Brasil, nos anos de 2014, 2015 e início de 2016.



Fonte: Sinal Online (atualizado em [a]13/07/2015; [b]04/01/2016; [c]07/03/2016). Dados sujeitos a alteração.

Figura – Casos prováveis de dengue, por semana epidemiológica de início de sintomas, Brasil, 2014a, 2015b e 2016c.

Com base no gráfico, pode-se afirmar que

a) o maior número de casos de dengue ocorreu em 2014.

b) número de casos de dengue tem comportamento crescente próximo da vigésima segunda semana.

c) os dados das 7 primeiras semanas de 2016 indicam uma diminuição do número de casos em relação a 2014 e 2015.

d) o gráfico de 2015 permite afirmar que houve mais de um milhão de casos em 2015.

e) o maior número de casos ocorre em cada ano na décima quarta semana.

Resolução

a) Incorreta. Em todas as semanas de 2015, o número de casos foi maior que em 2014.

b) Incorreta. O comportamento é decrescente em 2014 e 2015.

c) Incorreta. O gráfico de 2016 está acima dos gráficos de 2014 e 2015 nas sete primeiras semanas.

d) Correta. Entre as semanas 9 e 18, o número de casos foi maior ou igual a 80 000.

e) Incorreta. Não há informações sobre o número de casos na 14ª semana de 2016.

ROTEIRO DE AULA

ESTATÍSTICA – ANÁLISE DE DADOS

Variável:

Quantitativa

Qualitativa

Frequência:

Absoluta

Relativa

Representações gráficas

Gráfico de setores

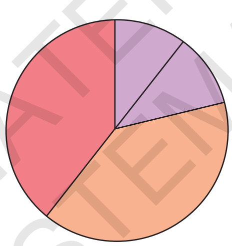
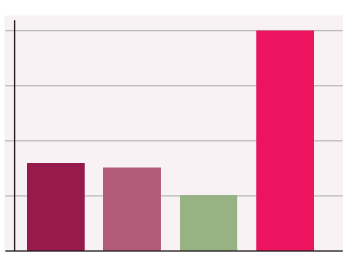
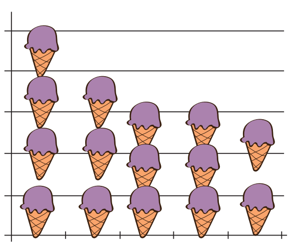


Gráfico de barra

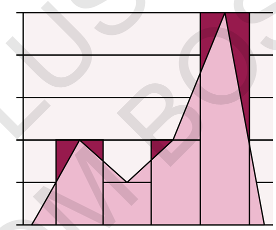


ROTEIRO DE AULA

PICTOGRAMA



POLÍGONO DE FREQUÊNCIA



HISTOGRAMA

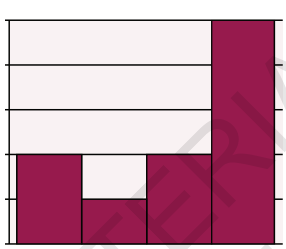
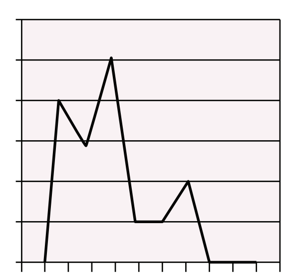
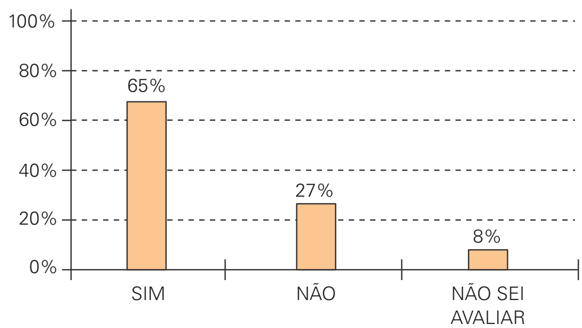


GRÁFICO DE LINHAS



EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RJ (adaptado) – Em uma pesquisa, realizada em janeiro de 2015, perguntava-se aos internautas se eles acreditavam que a reciclagem de lixo era importante para o meio ambiente. Eram 3 alternativas possíveis, e 4 600 internautas responderam, como mostra o gráfico abaixo.



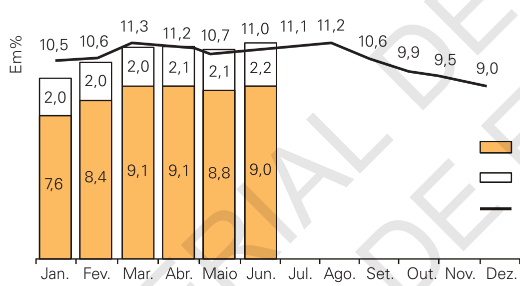
Quantas pessoas responderam "não sei avaliar"?

Pelo gráfico, observamos que 8% dos entrevistados não souberam avaliar.

$\frac{8}{100} \cdot 4\,600 = 368$ pessoas

2. Enem **C6-H25**

O gráfico apresenta as taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na região metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto.



Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011.

Disponível em: <www.dieese.org.br>. Acesso em: 1º ago. 2012. (Fragmento.)

Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de

a) 1,1 **b)** 3,5 **c)** 4,5 **d)** 6,8 **e)** 7,9

Taxa de desemprego total em dez/11 = 9%.

Taxa de desemprego oculto em jun/12 = 2,2%.

Taxa de desemprego aberto: x

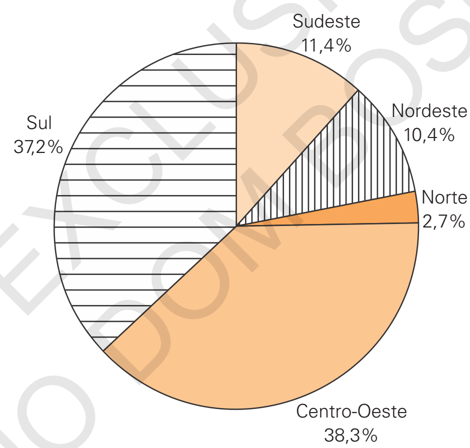
$x + \frac{2,2}{2} = 9 \rightarrow x = 9 - 1,1 \therefore x = 7,9\%$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

3. Enem **C6-H25**

Estimativas do IBGE para a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, apontavam uma participação por região conforme indicado no gráfico.



As estimativas indicavam que as duas regiões maiores produtoras produziriam, juntas, um total de 119,9 milhões de toneladas dessas culturas, em 2012.

Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 3 jul. 2012.

De acordo com esses dados, qual seria o valor mais próximo da produção, em milhão de tonelada, de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, na Região Sudeste do país?

a) 10,3 **c)** 13,6 **e)** 18,1
b) 11,4 **d)** 16,5

O total, em milhões de toneladas, da safra nacional de cereais (oleaginosas e leguminosas em 2012) corresponde a x.

Centro-Oeste (38,3%) e Sul (37,2%) são os maiores produtores. Logo:

$(0,383 + 0,372) \cdot x = 119,9$

$0,755 \cdot x = 119,9 \rightarrow x = \frac{119,9}{0,755} \therefore x = 158,8$ milhões

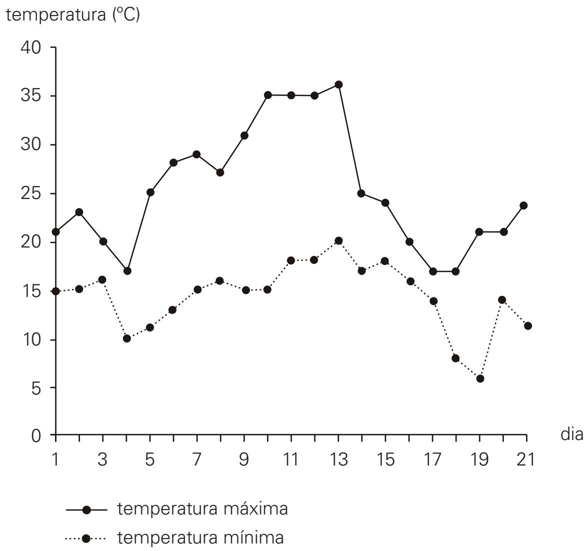
Como o objetivo é calcular a produção no Sudeste (11,4%), obtemos:

$0,114 \cdot 158,8 = 18,1$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

4. UFRGS-RS – O gráfico abaixo mostra o registro das temperaturas máximas e mínimas em uma cidade, nos primeiros 21 dias do mês de setembro de 2013.



Assinale a alternativa correta com base nos dados apresentados no gráfico.

a) No dia 13, foi registrada a menor temperatura mínima do período.

b) Entre os dias 3 e 7, as temperaturas máximas foram aumentando dia a dia.

c) Entre os dias 13 e 19, as temperaturas mínimas diminuíram dia a dia.

d) No dia 19, foi registrada a menor temperatura máxima do período.

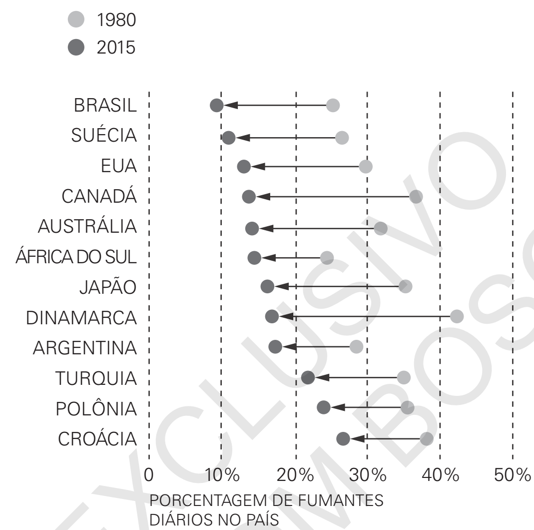
e) No dia 19, foi registrada a menor temperatura do período.

O menor patamar atingido de temperatura no período ocorreu no dia 19.

5. Insper-SP – Observe os gráficos.

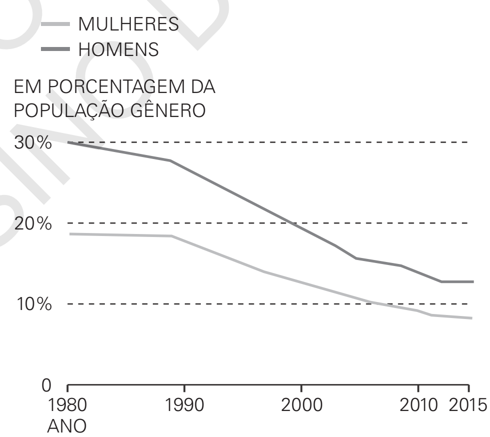
VARIAÇÃO DA POPULAÇÃO FUMANTE ENTRE 1980 E 2015

No Brasil e em países com a maior variação no período



FUMANTES DIÁRIOS NO BRASIL POR GÊNERO

De 1980 a 2015



Fonte:<http://www.nexojornal.com.br>.

Utilizando apenas a análise dos dados expressos nos gráficos, é possível concluir corretamente que

a) a África do Sul foi o país que teve a maior redução na porcentagem de fumantes diários de 1980 para 2015.

b) em 2015 o Brasil tinha mais fumantes diários do que os EUA.

c) no Brasil houve uma redução maior no percentual de homens fumantes do que no de mulheres fumantes de 1980 para 2015.

d) o país com maior número de fumantes em 1980 era a Dinamarca e, em 2015, passou a ser a Croácia.

e) o Japão sempre teve mais fumantes do que o Brasil no período de 1980 a 2015.

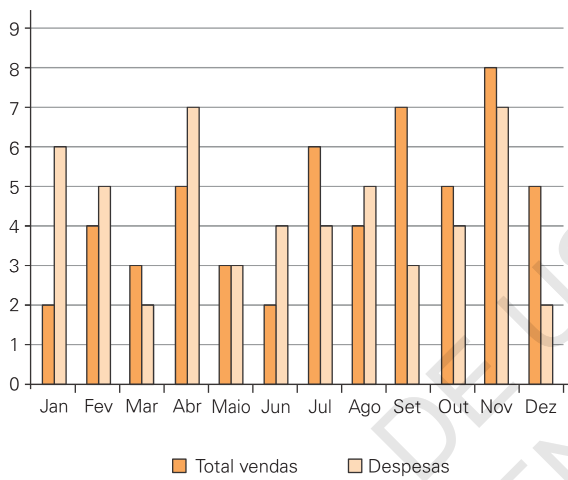
Item a) – Segundo o gráfico, a África do Sul teve menor redução que a Dinamarca na porcentagem de fumantes no período analisado, e não maior.

Itens b), d) e e) – As populações dos países citados não foram informadas. Por isso essa conclusão não é possível.

Item c) – A redução no percentual de homens fumantes foi de aproximadamente 17%. Em relação às mulheres fumantes, esse número foi de 10%.

6. Enem C6-H24

Uma empresa registrou seu desempenho em determinado ano por meio do gráfico, com dados mensais do total de vendas e despesas.



O lucro mensal é obtido pela subtração entre o total de vendas e despesas, nesta ordem.

Quais os três meses do ano em que foram registrados os maiores lucros?

a) Julho, setembro e dezembro.
b) Julho, setembro e novembro.
c) Abril, setembro e novembro.
d) Janeiro, setembro e dezembro.
e) Janeiro, abril e junho.

Pelo gráfico, observamos que houve lucro nos seguintes meses:
Março (3 – 2 = 1)
Julho (6 – 4 = 2)
Setembro (7 – 3 = 4)
Novembro (8 – 7 = 1)
Dezembro (5 – 2 = 3)
Logo, os meses de maior lucro foram julho, setembro e dezembro.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

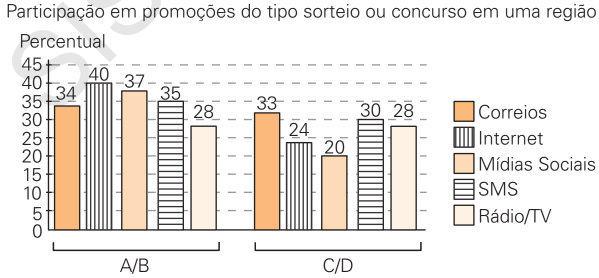
Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Enem C6-H26

Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no site da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/TV.

Participação em promoções do tipo sorteio ou concurso em uma região



Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D).

De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via

a) correios e SMS.
b) internet e Correios.
c) internet e internet.
d) internet e mídias sociais.
e) rádio/TV e rádio/TV.

8. UNESP – A revista *Superinteressante* trouxe uma reportagem sobre o custo de vida em diferentes cidades do mundo. A tabela mostra o ranking de cinco das 214 cidades pesquisadas pela "Mercer LLC", empresa americana, em 2010.

Cidade mais cara do mundo fica na África

	Aluguel(1)	Cafezinho(2)	Jornal(3) Importado	Lanche(4)	Gasolina(5)	
1º LUANDA, ANGOLA	R$ 12 129,60	R$ 197,40	R$ 256,20	R$ 909,60	R$ 95,00	R$ 13 587,80
2º TÓQUIO, JAPÃO	R$ 7686,70	R$ 345,60	R$ 288,60	R$ 374,70	R$ 244,00	R$ 8 939,60
3º JAMENA, CHADE	R$ 3 754,00	R$ 162,30	R$ 368,10	R$ 1 353,60	R$ 217,00	R$ 5 855,00
7º LIBREVILLE, GABÃO	R$ 3 609,42	R$ 216,90	R$ 238,20	R$ 1407,60	R$ 192,00	R$ 5 664,12
21º SÃO PAULO	R$ 2 500,00	R$ 90,00	R$ 750,00	R$ 435,00	R$ 240,00	R$ 4 015,00

(1) apartamento de dois quartos num bairro de classe média alta;
(2) 30 cafezinhos;
(3) 30 exemplares do *New York Times*;
(4) 30 lanches do McDonald's;
(5) 100 litros.

Superinteressante, jan. 2011. (Adaptado.)

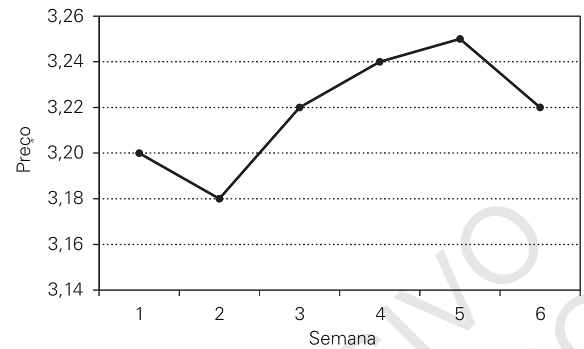
Observando as informações, numéricas e coloridas, contidas na tabela, analise as afirmações:

I. O custo do aluguel em Luanda é o mais alto do mundo.
II. O custo do cafezinho em Tóquio é o mais alto do mundo.
III. O custo do jornal importado em São Paulo é o mais alto do mundo.
IV. O custo do lanche em Libreville é o mais alto do mundo.
V. O custo da gasolina em Tóquio é o mais alto do mundo.

Estão corretas as afirmações:

a) I, III e V, apenas.
b) II, III e IV, apenas.
c) I, II, III e IV, apenas.
d) I, III, IV e V, apenas.
e) I, II, III, IV e V.

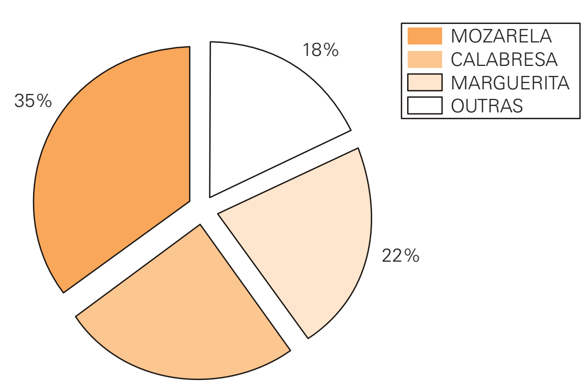
9. UEG-GO – As ações de uma empresa variaram semanalmente conforme os dados da figura a seguir.



De acordo com os dados apresentados, o período de maior variação ocorreu entre as semanas

a) 2 e 3
b) 1 e 2
c) 4 e 5
d) 3 e 4
e) 5 e 6

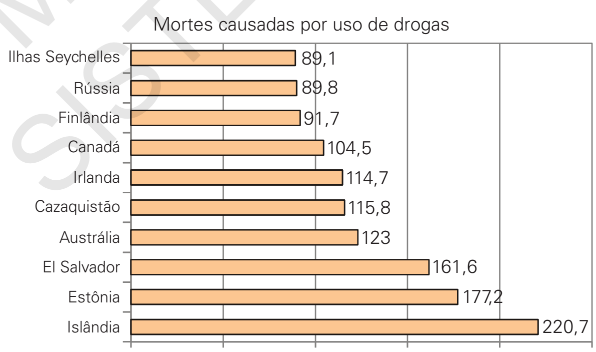
10. Unicamp-SP – A pizza é, sem dúvida, o alimento preferido de muitos paulistas. Estima-se que o consumo diário no Brasil seja de 1,5 milhão de pizzas, sendo o Estado de São Paulo responsável por 53% desse consumo. O gráfico abaixo exibe a preferência do consumidor paulista em relação aos tipos de pizza.



a) Se não for considerado o consumo do Estado de São Paulo, quantas pizzas são consumidas diariamente no Brasil?

b) Quantas pizzas de mozarela e de calabresa são consumidas diariamente no Estado de São Paulo?

11. UFG-GO – O gráfico a seguir apresenta os dez países com a maior taxa de mortalidade decorrente do uso de drogas.



Fonte: World Drug Reporter 2013 – UNODC (United Nations Office on Drugs and Crime)

Na tabela a seguir encontra-se o número estimado de mortes causadas por uso de drogas por continente.

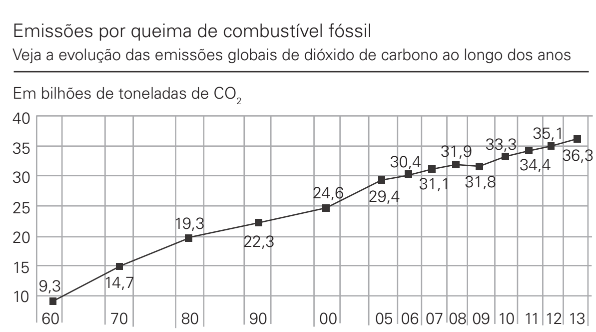
Número estimado de mortes por uso de drogas

Região	Número de mortes estimadas
África	36 435
América do Norte	47 813
América Latina e Caribe	4 756
Ásia	104 116
Europa	15 469
Oceania	1 957
Total Mundial	**210 546**

World Drug Reporter 2013 – UNODC
(United Nations Office on Drugs and Crime)

Sabendo que a população da Islândia é de 320 137 habitantes, determine o porcentual aproximado de mortes desse país em relação ao número de mortes estimadas para o continente europeu.

12. UFRGS-RS – O gráfico abaixo apresenta a evolução da emissão de dióxido de carbono ao longo dos anos.



Fonte: CDIAC

Disponível em: <http://noticias.uol.com.br/meio-ambiente/ultimas-noticias/redacao/2013/12/27/em-busca-de-forca-emissoes-recorde-de-co2.html>. Acesso em: 25 set. 2014.

Com base nos dados do gráfico, assinale a alternativa correta.

a) Ao longo do período, a emissão de dióxido de carbono apresentou crescimento constante.

b) Em relação aos anos 80, os anos 90 apresentaram emissão de dióxido de carbono 30% maior.

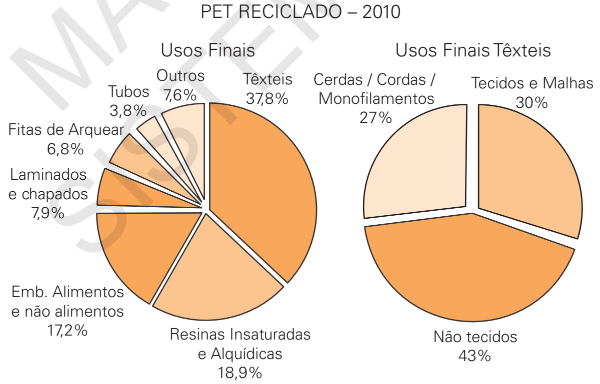
c) O ano de 2009 apresentou menor valor de emissão de dióxido de carbono da primeira década do século XXI.

d) De 2000 a 2013, houve crescimento percentual de 11,7% na emissão de dióxido de carbono.

e) Em relação a 2000, o ano de 2013 apresentou emissão de dióxido de carbono aproximadamente 50% maior.

13. Enem C6-H25

O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).



Disponível em: <www.abipet.org.br>. Acesso em: 12 jul. 2012. (Adaptado.)

De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de

a) 16,0

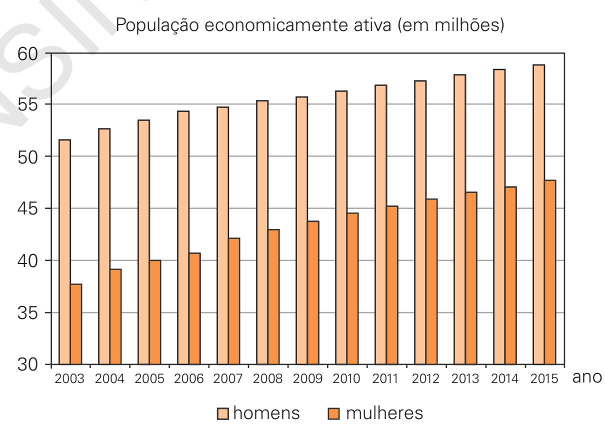
b) 22,9

c) 32,0

d) 84,6

e) 106,6

14. UFRGS-RS – O gráfico a seguir representa a população economicamente ativa de homens e mulheres no Brasil de 2003 a 2015.



Fonte: Organização das Nações Unidas para Alimentação e Agricultura

Com base nos dados do gráfico, é correto afirmar que,

a) no ano de 2009, a população economicamente ativa de mulheres era cerca de 50% da população economicamente ativa de homens.

b) de 2003 a 2015, em termos percentuais, a população economicamente ativa de homens cresceu mais do que a de mulheres.

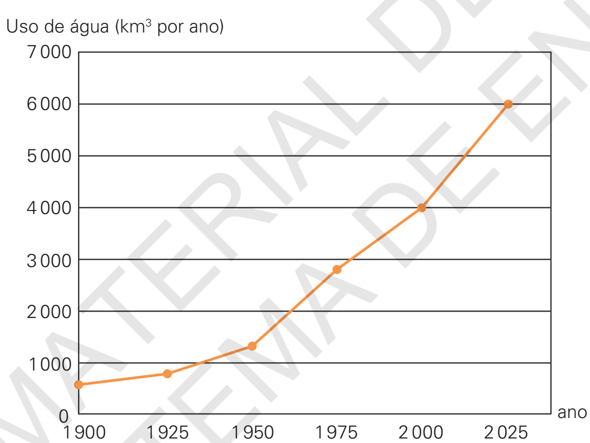
c) em relação a 2005, a população economicamente ativa de mulheres em 2011 cresceu cerca de 5%.

d) de 2003 a 2015, em termos percentuais, a população economicamente ativa de mulheres cresceu mais do que a de homens.

e) em relação a 2007, a população economicamente ativa de homens em 2015 cresceu cerca de 3%

15. UFRGS-RS – As estimativas para o uso da água pelo homem, nos anos 1900 e 2000, foram, respectivamente, de 600 km³ e 4 000 km³ por ano. Em 2025, a expectativa é que sejam usados 6 000 km³ por ano de água na Terra.

O gráfico abaixo representa o uso da água em km³ por ano de 1900 a 2025.



Fonte: <http://www.fao.org>.

Com base nos dados do gráfico, é correto afirmar que,

a) de 1900 a 1925, o uso de água aumentou em 100%.

b) de 1900 a 2000, o uso da água aumentou em mais de 600%.

c) de 2000 a 2025, mantida a expectativa de uso da água, o aumento será de 66,6%.

d) de 1900 a 2025, mantida a expectativa de uso da água, o aumento será de 900%.

e) de 1900 a 2025, mantida a expectativa de uso da água, o aumento será de 1 000%.

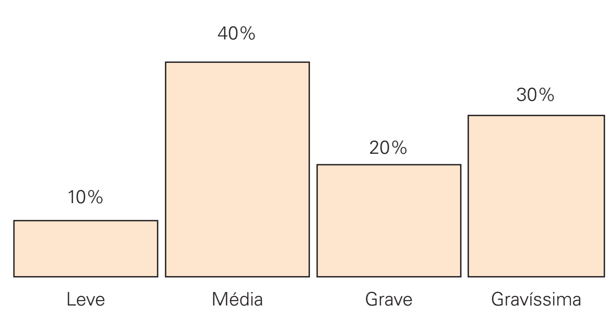
16. Unicamp-SP – O Código de Trânsito Brasileiro classifica as infrações, de acordo com a sua natureza, em leves, médias, graves e gravíssimas. A cada tipo corresponde uma pontuação e uma multa em reais, conforme a tabela abaixo.

Infração	Pontuação	Multa*
Leve	3 pontos	R$ 53,00
Média	4 pontos	R$ 86,00
Grave	5 pontos	R$ 128,00
Gravíssima	7 pontos	R$ 192,00

* Valores arredondados

a) Um condutor acumulou 13 pontos em infrações. Determine todas as possibilidades quanto à quantidade e à natureza das infrações cometidas por esse condutor.

b) O gráfico de barras abaixo exibe a distribuição de 1 000 infrações cometidas em certa cidade, conforme a sua natureza. Determine a soma das multas aplicadas.



17. Enem C6-H25

Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R$ 400 000,00, distribuídos de acordo com o Gráfico 1. No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no Gráfico 2.

Distribuição da folha salarial

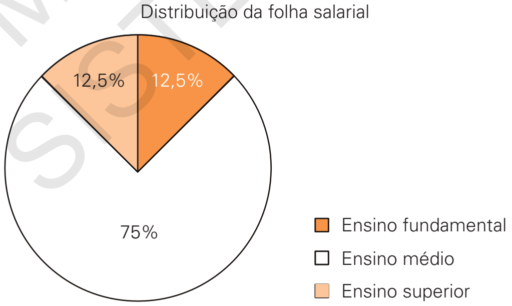


Gráfico 1

Número de funcionários por grau de instrução

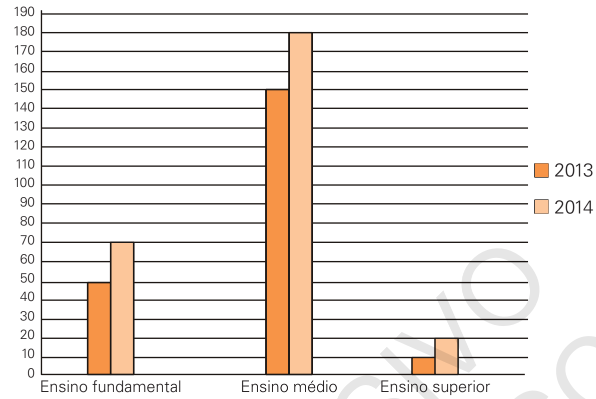


Gráfico 2

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

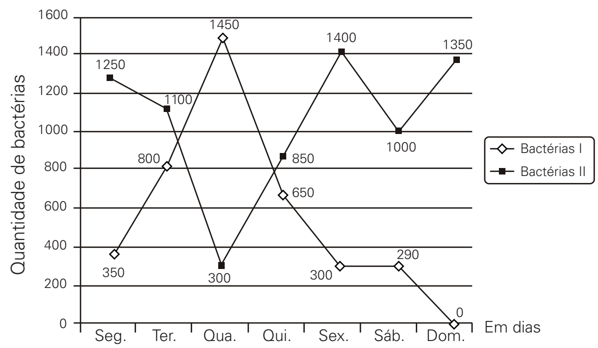
a) R$ 114 285,00
b) R$ 130 000,00
c) R$ 160 000,00
d) R$ 210 000,00
e) R$ 213 333,00

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C6-H25

Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 350 bactérias da espécie I e 1 250 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.

Bactérias das espécies I e II



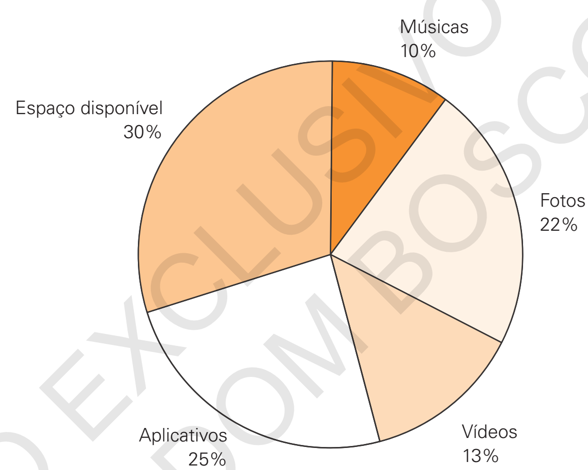
Em que dia dessa semana a quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima?

a) Terça-feira
b) Quarta-feira
c) Quinta-feira
d) Sexta-feira
e) Domingo

19. Enem C6-H24

O cartão Micro SD é um tipo de mídia utilizada para armazenamento de dados (arquivos, fotos, filmes, músicas etc.). Um usuário tem um cartão Micro SD de 16 GB, e, utilizando seu computador, visualiza, em termos percentuais, os dados armazenados no cartão, conforme o gráfico.

Dados do cartão Micro SD de 16 GB



O usuário adquiriu um cartão do mesmo tipo, mas de 32 GB, com o objetivo de gravar os dados do seu cartão de 16 GB em seu novo cartão de 32 GB. No entanto, para aumentar o espaço de armazenamento disponível, decidiu não gravar suas músicas no novo cartão.

Analisando o gráfico, o espaço disponível no novo cartão de 32 GB, em termos percentuais, é igual a

a) 60.
b) 65.
c) 70.
d) 75.
e) 80.

20. Enem C6-H26

O cultivo de uma flor rara só é viável se do mês do plantio para o mês subsequente o clima da região possuir as seguintes peculiaridades:

- a variação do nível de chuvas (pluviosidade), nesses meses, não for superior a 50 mm;
- a temperatura mínima, nesses meses, for superior a 15ºC;
- ocorrer, nesse período, um leve aumento não superior a 5ºC na temperatura máxima.

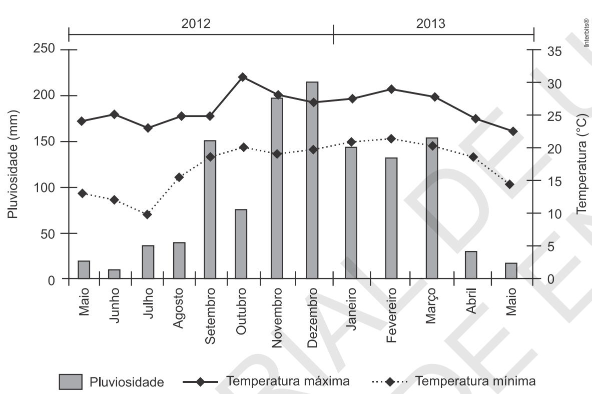
Um floricultor, pretendendo investir no plantio dessa flor em sua região, fez uma consulta a um meteorologista que lhe apresentou o gráfico com as condições previstas para os 12 meses seguintes nessa região.

a variação do nível de chuvas (pluviosidade), nesses meses, não for superior a 50 mm;

a temperatura mínima, nesses meses, for superior a 15ºC;

ocorrer, nesse período, um leve aumento não superior a 5ºC na temperatura máxima.

Um floricultor, pretendendo investir no plantio dessa flor em sua região, fez uma consulta a um meteorologista que lhe apresentou o gráfico com as condições previstas para os 12 meses seguintes nessa região.



Com base nas informações do gráfico, o floricultor verificou que poderia plantar essa flor rara.

O mês escolhido para o plantio foi

a) janeiro
b) fevereiro
c) agosto
d) novembro
e) dezembro

22 ESTATÍSTICA – MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

- Medidas de tendência central
- Média aritmética
- Média aritmética ponderada
- Medidas de dispersão

HABILIDADES

- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Resolver problemas com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recursos para a construção de argumentos.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

São as mais importantes medidas de posição, definidas como medidas estatísticas que representam uma série de dados que nos orientam quanto à posição da distribuição no eixo horizontal do gráfico da curva de frequência.

As medidas de posição mais importantes são **média aritmética**, **mediana** e **moda**.

Além disso, as notações mais usadas são:

- x – valor de cada indivíduo da amostra;
- n – tamanho amostral;
- $\overline{x}$ – média aritmética;
- M_e – mediana;
- M_o – moda.

MÉDIA ARITMÉTICA

Calculamos a média aritmética de um conjunto de dados somando todos os valores da população e dividindo o resultado pelo total de elementos dela. Numa população de n elementos, a média aritmética é dada por:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Lembrando que:

- $\overline{x}$ – média aritmética;
- x_i – valores da variável;
- n – número de valores.

Usando o símbolo de somatório para representar o numerador da expressão, podemos escrever $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$.

Exemplo

A amostra do preço de um produto x em 5 locais diferentes, em reais, é 14,5; 14,6; 14,5; 14,4; 14,5. Assim, a média é dada por:

$$\overline{x} = \frac{14{,}5 + 14{,}6 + 14{,}5 + 14{,}4 + 14{,}5}{5} = \frac{72{,}55}{5} = 14{,}5 \text{ reais}$$

MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Vamos considerar a pesquisa realizada com um grupo de alunos da escola XYZ, em que se questionou a quantidade de irmãos de cada aluno. Observe os resultados.

Números de irmãos	Frequência (f_i)
0	6
1	12
2	3
3	2
4	1

Neste caso, como as frequências são números indicadores de intensidade de cada valor da variável, elas funcionam como **fatores de ponderação**, o que nos possibilita calcular a média aritmética ponderada.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$$

O modo mais prático de determinarmos a média ponderada é inserir, na tabela, uma coluna correspondente ao $x_i f_i$.

Números de irmãos	Frequência (f_i)	$x_i f_i$
0	6	$0 \cdot 6 = 0$
1	12	$1 \cdot 12 = 12$
2	3	$2 \cdot 3 = 6$
3	2	$3 \cdot 2 = 6$
4	1	$4 \cdot 1 = 4$
	$\sum = 24$	$\sum = 28$

Como $\sum f_i = 24$ e $\sum x_i \cdot f_i = 28$, podemos determinar a média aritmética ponderada:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{28}{24} = 1{,}17 \ \therefore \ \overline{x} = 1{,}17 \text{ irmão}$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Funcab – A tabela abaixo representa os dados dos balanços das operações do Batalhão de Polícia de Trânsito (BPTran) da Polícia Militar – ES em três grandes feriados nacionais do ano de 2012.

Dia do trabalho: 220 acidentes, 2 mortos, 78 feridos

Dia de finados: 186 acidentes, 2 mortos, 54 feridos

Proclamação da República: 219 acidentes, 1 morto, 51 feridos

O valor que melhor representa a média do número de feridos, de acordo com a tabela acima, é:

a) 57
b) 59
c) 61
d) 63
e) 65

Resolução

Calculando a média aritmética simples, obtemos:

$$\overline{x} = \frac{78+54+51}{3} = \frac{183}{3} = 61$$

2. USCS-SP (adaptado) – João tem 5 filhos, sendo que dois deles são gêmeos. A média das idades deles é 8,6 anos. Porém, se não forem contadas as idades dos gêmeos, a média dos demais passa a ser de 9 anos. Pode-se concluir que a idade dos gêmeos, em anos, é:

a) 6,5.
b) 7,0.
c) 7,5.
d) 8,0.
e) 8,5.

Resolução

Seja x a idade de cada gêmeo.

Como a média das idades dos três filhos que não são gêmeos é 9, a soma das idades dos três é 27 anos.

Sabendo que a média dos cinco filhos é 8,6 e sendo x a idade de um dos gêmeos:

$$\overline{x} = \frac{27+2x}{5} = 8{,}6$$

$$27 + 2x = 5 \cdot 8{,}6$$

$$2x = 43 - 27$$

$$2x = 16$$

$$x = \frac{16}{2}$$

$$x = 8 \text{ anos}$$

MEDIANA

Refere-se ao valor central que divide um conjunto de dados em duas partes com o mesmo número de elementos. Para determinar a **mediana (M_e)**, primeiramente se ordenam os dados do menor para o maior. Se o número de observações é ímpar, a mediana corresponde à observação central. Se é par, a mediana refere-se à média aritmética das duas observações centrais.

Vamos analisar os casos a seguir.

Exemplo 1

Consideremos a série de valores 1, 8, 7, 5, 4, 6, 10, 3, 6.

De acordo com a definição de mediana, o primeiro passo é ordenarmos os valores (de forma crescente ou decrescente):

1, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 10.

Neste caso, como o número de termos é ímpar, a mediana é 6, já que existem 4 elementos abaixo e outros 4 acima dele. Ou seja, a mediana (M_e) divide o conjunto de dados em duas partes iguais, cada uma com 4 elementos.

Exemplo 2

Vamos considerar a série de valores de quantidade par 3, 4, 2, 7, 5, 9, 8, 1, 9, 10.

De acordo com a definição de mediana, o primeiro passo é ordenarmos os valores (de modo crescente ou decrescente):

1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 9, 10.

$$M_e = \frac{5+7}{2} = 6$$

Neste caso, como o número de termos é par, a mediana é dada pela média aritmética dos termos centrais 5 e 7. De modo geral, para dados não agrupados em intervalos, temos:

- Se n for ímpar, a mediana será o elemento central posicionado em $\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Ou seja, será o elemento central da série em ordem.
- Se n for par, a mediana será a média entre os dois elementos mais centrais da série em ordem.
- Assim a mediana será a média entre os elementos de posição $\left(\frac{n}{2}\right)$ e $\left(\frac{n}{2}+1\right)$

FREQUÊNCIA ACUMULADA

Trata-se do número de vezes em que uma variável assume valor inferior ou igual ao valor considerado na situação em pauta. A coluna de valores obtidos com a frequência acumulada é útil para determinarmos a mediana.

Por exemplo:

Nº de filhos	Nº de pessoas (fi)	Frequência acumulada (Fac)
0	3	3
1	10	13
2	7	20
3	2	22
4	1	23
	$\Sigma = 23$	

Nesse caso, a mediana (M_e) é igual a 1 filho, pois a posição em que se encontra a mediana x_{12} linha que corresponde aos elementos da posição x_4 até x_{12}.

Considerando que o conjunto tem 23 elementos, então a mediana é dada pelo termo central da série. No caso, o elemento x_{12}, ou seja, o 12º elemento.

MODA

Refere-se ao conjunto de valores que apresenta a maior frequência, ou seja, o que ocorre mais vezes na relação.

Ao determinarmos a moda (M_o) do conjunto de elementos, encontramos três situações:

- existência de apenas uma moda;
- existência de mais de uma moda;
- ausência de moda.

Vamos analisar os casos a seguir.

Exemplo

Encontre a moda dos conjuntos de valores.

a) 2, 3, 4, 3, 5, 4, 3

Há uma moda, isto é, $M_o = 3$, pois o elemento 3 é o que mais se repete.

b) 4, 3, 7, 5, 7, 6, 5

Há duas modas: 5 e 7. Caso de distribuição bimodal.

c) 8, 7, 5, 4, 3, 2, 9

Não há moda. Os valores aparecem apenas uma vez. Trata-se de distribuição amodal.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

Dispersão é sinônimo de variação ou variabilidade. Para medirmos a dispersão, usamos mais frequentemente duas medidas: **amplitude** e **desvio-padrão**.

AMPLITUDE

Denotada por **A**, refere-se à diferença entre o maior e o menor valor do conjunto de dados. A amplitude também é chamada **amplitude total** ou **range** (R).

Vamos analisar o caso a seguir.

Exemplo

Uma auditoria em uma grande empresa observou os maiores custos em 10 de seus produtos (em reais):

250	350	300	280	290
400	450	420	390	400

Determinarmos a amplitude do conjunto de dados significa encontrar a diferença entre o maior e o menor valor da série.

Assim: $A = 450 - 250 \quad \therefore \quad A = 200$ reais.

A definição de desvio-padrão exige sabermos o que seja variância.

As notações mais comuns são:

- σ^2: variância (populacional);
- σ: desvio-padrão (populacional) – corresponde à raiz quadrada da variância.

VARIÂNCIA

Variância da população $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ de n elementos é a medida de dispersão definida como a média do quadrado dos desvios dos elementos em relação à média aritmética. Ou seja, a variância populacional é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + (x_3-\bar{x})^2 + \ldots + (x_n-\bar{x})^2}{n}$$

Usando o símbolo de somatório, podemos escrever:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i^n (x_i-\bar{x})^2}{n}$$

Vamos observar o caso na sequência.

Exemplo

Consideremos o conjunto formado pelo elementos 80, 93, 86, 98, 89.

Antes da variância, calculamos a média x. Em seguida, aplicamos os valores obtidos na fórmula:

$$\overline{x} = \frac{80+93+86+98+89}{5} = \frac{446}{5} = 89,2$$

Aplicando os valores na fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{(80-89,2)^2 + (93-89,2)^2 + (86-89,2)^2 + (98-89,2)^2 + (89-89,2)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{(-9,2)^2 + (3,8)^2 + (-3,2)^2 + (8,8)^2 + (-0,2)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{84,64 + 14,44 + 10,24 + 77,44 + 0,04}{5} = \frac{186,8}{5} = 37,36$$

Portanto, a variância do conjunto desses elementos é 37,36.

DESVIO-PADRÃO

Refere-se à raiz quadrada da variância. Dessa forma, o desvio-padrão populacional é dado por:

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Ou seja:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i^n (x_i - \overline{x})}{n}}$$

Vamos acompanhar o caso a seguir.

Exemplo

Consideremos o conjunto de elementos 80, 93, 86, 74, 92, 85, 98, 89.

$$\overline{x} = \frac{80+93+86+74+92+85+98+89}{8} = \frac{697}{8} = 87,125$$

Subtraímos x de cada valor, elevamos os resultados ao quadrado e os somamos. Dividimos o total dos quadrados pelo número de valores (n = 8) e extraímos a raiz quadrada:

$(x - \overline{x})$	$(x - \overline{x})^2$
80 – 87,125 = −7,125	$(-7,125)^2$ = 50,765625
93 – 87,125 = 5,875	$(5,875)^2$ = 34,515625
86 – 87,125 = −1,125	$(-1,125)^2$ = 1,265625
74 – 87,125 = −13,125	$(-13,125)^2$ = 172,265625
92 – 87,125 = 4,875	$(4,875)^2$ = 23,765625
85 – 87,125 = −2,125	$(-2,125)^2$ = 4,515625
98 – 87,125 = 10,875	$(10,875)^2$ = 118,265625
89 – 87,125 = 1,875	$(1,875)^2$ = 3,515625
	Total = 408,875

$$\sigma = \sqrt{\frac{408,88}{8}} = \sqrt{51,11} = 7,15$$

Portanto, o desvio-padrão é de aproximadamente 7,15.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3. UFPR (adaptado) – Segundo a Prefeitura Municipal de Matinhos-PR, em 2010 foram destinados para o aterro sanitário 12 689 645 kg de resíduos sólidos, coletados mensalmente, conforme os dados abaixo. Então é correto afirmar que, nos meses de alta temporada (dezembro, janeiro e fevereiro), a média e a mediana de resíduos sólidos coletados em 2010 foram, respectivamente, de:

Mês	Quantidade (kg)
Janeiro	2 813 190
Fevereiro	1 778 870
Março	798 150
Abril	691 140
Maio	607 440
Junho	625 010
Julho	647 135
Agosto	597 730
Setembro	786 210
Outubro	714 880
Novembro	851 740
Dezembro	1 778 150
Total	12 689 645

Fonte: Plano de Gerenciamento Integrado dos Resíduos Sólidos (02/2012)

a) 3 185 105 e 1 778 870 kg.
b) 2 123 403,33 e 2 813 190 kg.
c) 1 778 870 e 1 778 150 kg.
d) 2 123 403,33 e 1 778 870 kg.
e) 530 850,83 e 1 778 150 kg.

Resolução

Inicialmente calculamos a média. Assim:

$$\text{Média} = \frac{1\,778\,150 + 2\,813\,190 + 1\,778\,870}{3} =$$

$$= \frac{6\,370\,210}{3} = 2\,123\,403,33 \text{ kg}$$

Depois, organizamos os três valores (correspondentes a dezembro, janeiro e fevereiro): 1 778 150, 1 778 870 e 2 813 190. Assim, obtemos a mediana = termo central da tabela = 1 778 870 kg

4. UEG-GO – A professora Maria Paula registrou as notas de sete alunos, obtendo os seguintes valores: 2, 7, 5, 3, 4, 7 e 8. A mediana e a moda das notas desses alunos são, respectivamente:

a) 3 e 7
b) 3 e 8
c) 5 e 7
d) 5 e 8
e) 3 e 5

Resolução

Ordenando a sequência de forma crescente, obtemos 2, 3, 4, 5, 7, 7 e 8. Então, como a série tem sete valores, a mediana é $M_e = 5$. Como o valor mais frequente é 7, a moda é $M_o = 7$.

ROTEIRO DE AULA

ESTATÍSTICA - MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Média aritmética

Média aritmética simples

$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

Média aritmética ponderada

$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot f_i}{\Sigma f_i}$

Mediana (M_e)

Medidas de dispersão

ROTEIRO DE AULA

Moda (M_o)

É o valor central que divide um conjunto de dados em duas partes com o mesmo número de elementos.

AMPLITUDE é a diferença entre o maior e o menor valor do conjunto de dados. Também chamada amplitude total ou range (R).

VARIÂNCIA

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i^n \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$$

É o valor que apresenta a maior frequência, ou seja, o que ocorre mais vezes na relação.

Desvio-padrão

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i^n \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEL-PR – Um professor de Matemática combinou com os alunos que a nota final de cada bimestre seria calculada pela média ponderada das notas de três avaliações, como esquematizado no quadro a seguir.

Avaliações	Peso
A	5
B	3
C	2

A partir dessas informações, responda aos itens a seguir.

a) Qual é a média ponderada a ser atribuída a uma aluna que obteve notas: quatro, na Avaliação A; seis, na Avaliação B; e nove, na Avaliação C?

Justifique sua resposta, apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

b) Considere que um aluno obteve as três seguintes notas: sete, na Avaliação A; três, na Avaliação B; e oito, na Avaliação C. A partir destas notas, ele efetuou o cálculo de uma média aritmética simples.

A média aritmética simples obtida pelo aluno é igual, menor ou maior que a média ponderada calculada corretamente pelo professor na nota desse aluno?

Justifique sua resposta, apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

a) Calculando, obtemos:

$$\text{Média} = \frac{5 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 9}{5 + 3 + 2} = \frac{56}{10} = 5{,}6$$

b) A média aritmética simples obtida pelo aluno é idêntica à média moderada calculada corretamente pelo professor. Calculando, temos:

$$\text{Média}_{\text{aritmética simples}} = \frac{7 + 3 + 8}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\text{Média}_{\text{aritmética ponderada}} = \frac{5 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 8}{5 + 3 + 2} = \frac{60}{10} = 6$$

2. Enem C7-H29

Três alunos, X, Y e Z, estão matriculados em um curso de inglês. Para avaliar esses alunos, o professor optou por fazer cinco provas. Para que seja aprovado nesse curso, o aluno deverá ter a média aritmética das notas das cinco provas maior ou igual a 6. Na tabela, estão dispostas as notas que cada aluno tirou em cada prova.

Aluno	1ª prova	2ª prova	3ª prova	4ª prova	5ª prova
X	5	5	5	10	6
Y	4	9	3	9	5
Z	5	5	8	5	6

Com base nos dados da tabela e nas informações dadas, ficará(ão) reprovado(s)

a) apenas o aluno Y.
b) apenas o aluno Z.
c) apenas os alunos X e Y.
d) apenas os alunos X e Z.
e) os alunos X, Y e Z.

Calculando, temos:

$$X \to \frac{5 + 5 + 5 + 10 + 6}{5} = 6{,}2$$

$$Y \to \frac{4 + 9 + 3 + 9 + 5}{5} = 6$$

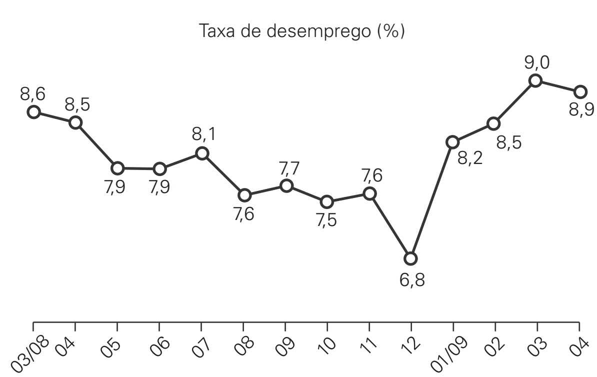
$$Z \to \frac{5 + 5 + 8 + 5 + 6}{5} = 5{,}8 \text{ (ou seja, reprovado)}$$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

3. Enem C7-H27

O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.



IBGE. *Pesquisa mensal de emprego.* <Disponível em: www.ibge.gov.br>. Acesso em: 30 jul. 2012. (Adaptado.)

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de

a) 8,1%
b) 8,0%
c) 7,9%
d) 7,7%
e) 7,6%

Organizando os dados, teremos:

6,8 – 7,5 – 7,6 – 7,6 – 7,7 – 7,9 – 7,9 – 8,1 – 8,2 – 8,5 – 8,5 – 8,6 – 8,9 – 9,0

Logo, o cálculo da mediana será:

$$\left.\begin{matrix}7,9\\8,1\end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{7,9+8,1}{2}=8$$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

4. Enem C7-H29

A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo, caso contrário, ele será despedido. O quadro mostra o lucro mensal, em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso.

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

a) 26
b) 29
c) 30
d) 31
e) 35

Sendo ℓ o lucro, em milhares de reais, no período de junho:

$$\frac{21+35+21+30+38+\ell}{6} \geq 30 \rightarrow 145+\ell \geq 180 \therefore \ell \geq 35$$

Logo, a resposta é 35.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construçãode argumentação.

5. Enem C7-H29

O procedimento de perda rápida de "peso" é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso--Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens" antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio--padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta.

A primeira luta foi entre os atletas

a) I e III. **b)** I e IV. **c)** II e III. **d)** II e IV. **e)** III e IV.

O que menos aparece regularmente é o que mostra maior desvio-padrão. O mais regular é o que apresenta menor desvio-padrão. Logo, a luta acontecerá entre os atletas II e III.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

6. Enem C7-H27

Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas química e física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas.

O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de química para vencer a competição é

a) 18. **b)** 19. **c)** 22. **d)** 25. **e)** 26.

Teremos $M_I = \dfrac{4 \cdot 20 + 6 \cdot 23}{4 + 6} = 21{,}8$ e $M_{III} = \dfrac{4 \cdot 21 + 6 \cdot 18}{4 + 6} = 19{,}2$.

Assim, $M_{II} > 21{,}8 \rightarrow \dfrac{4 \cdot x + 6 \cdot 25}{4 + 6} > 21{,}8 \leftrightarrow 4x > 218 - 150 \leftrightarrow x > 17$.

Portanto, a menor nota que o candidato II precisa obter na prova de Química é 18.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou emgráficos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Enem C7-H28

Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

8. Enem C7-H27

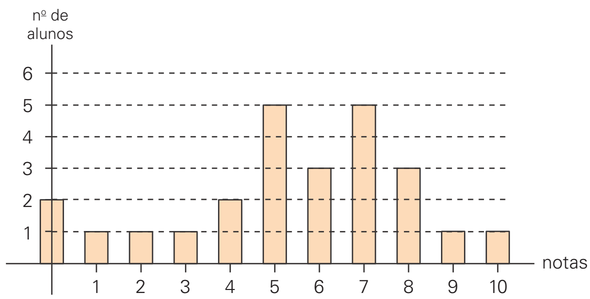
Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é

a) 20,70 **b)** 20,77 **c)** 20,80 **d)** 20,85 **e)** 20,90

9. PUC-RJ – O gráfico de barras abaixo mostra a distribuição das notas de uma turma de alunos em uma prova de matemática. A nota é sempre um número inteiro de 0 a 10.



Assim, por exemplo, 2 alunos tiraram zero, e 1 aluno tirou dez.

a) Quantos alunos tiraram nota maior ou igual a 7?

b) Se a nota mínima para aprovação é 5, qual é a porcentagem de alunos aprovados?

c) Qual é a mediana das notas dos alunos desta turma? Lembre que a mediana é a nota N tal que pelo menos a metade dos alunos tira nota menor ou igual a N, e que pelo menos a metade dos alunos tira nota maior ou igual a N.

10. Enem C7-H27

Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos. As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

a) 17°C, 17°C e 13,5°C

b) 17°C, 18°C e 13,5°C

c) 17°C, 13,5°C e 18°C

d) 17°C, 18°C e 21,5°C

e) 17°C, 13,5°C e 21,5°C

11. ESPM-SP – A nota final de um concurso é dada pela média aritmética das notas de todas as provas realizadas. Se um candidato conseguiu x notas 8, x+1, notas 6 e x – 1 notas 5 e sua nota final foi 6,5, o número de provas que ele realizou foi:

a) 6

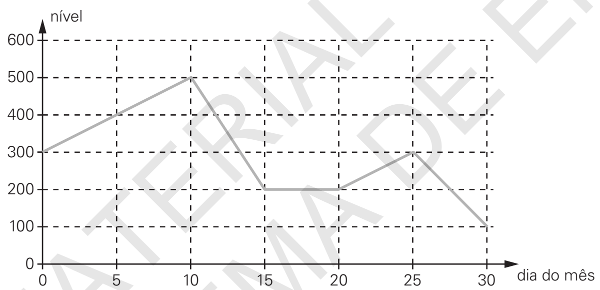
b) 9

c) 7

d) 5

e) 12

12. Insper-SP – O gráfico abaixo mostra o nível de água no reservatório de uma cidade, em centímetros.



Considerando o mês inteiro, o nível médio de água no reservatório é igual a

a) 225 centímetros.

b) 250 centímetros.

c) 275 centímetros.

d) 300 centímetros.

e) 325 centímetros.

13. Fac. Albert Einstein-SP – Pedro e Luiza estão jogando cartas, sendo que, em cada carta está escrito algum número inteiro e positivo. Cada um inicia o jogo com 5 cartas e informa ao adversário a média dos números de suas cartas. No início do jogo, Pedro avisou que a média de suas cartas era 6 e Luiza avisou que a média de suas cartas era 4. Na primeira rodada Pedro passou uma carta para Luiza e ela passou uma carta para Pedro que estava escrito o número 1.

Se a média das cartas que Pedro passou a ter ficou igual a 4,8, o número da carta que Pedro passou para Luiza era

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

14. UPE – A nutricionista de uma escola fez a medição da massa (peso) de alguns alunos para analisar o cardápio escolar e montou a tabela a seguir. Com base nessa tabela, determine a moda e a média das massas (pesos) desses estudantes.

Número de alunos	Pesos (kg)
1	50
2	40
3	80
4	60
5	65
6	55
7	75
8	45

a) moda = 80 kg e média = 58,75 kg
b) moda = 80 kg e média = 59,72 kg
c) moda = 45 kg e média = 59,72 kg
d) moda = 45 kg e média = 58,72 kg
e) moda = 80 kg e média = 59,75 kg

15. Fuvest-SP – Em uma classe com 14 alunos, 8 são mulheres e 6 são homens. A média das notas das mulheres no final do semestre ficou 1 ponto acima da média da classe. A soma das notas dos homens foi metade da soma das notas das mulheres. Então, a média das notas dos homens ficou mais próxima de

a) 4,3
b) 4,5
c) 4,7
d) 4,9
e) 5,1

16. FGV-RJ (adaptado) – Considere quatro números inteiros positivos. A cada um desses quatro números soma-se a média aritmética dos outros três, obtendo-se como resultados os números 48, 42, 32 e 34.

Quais são esses quatro números?

17. Fuvest-SP – Cada uma das cinco listas dadas é a relação de notas obtidas por seis alunos de uma turma em uma certa prova.

Assinale a única lista na qual a média das notas é maior do que a mediana.

a) 5, 5, 7, 8, 9, 10
b) 4, 5, 6, 7, 8, 8
c) 4, 5, 6, 7, 8, 9
d) 5, 5, 5, 7, 7, 9
e) 5, 5, 10, 10, 10

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C7-H28

Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses.

Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

a) I.
b) II.
c) IV.
d) V.
e) VII.

19. Enem C7-H29

Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio padrão das produções de uma safra dos talhões de suas propriedades. Os talhões têm a mesma área de 30 000 m^2 e o valor obtido para o desvio padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare (10 000 m^2).

A variância das produções dos talhões expressa em $(\text{sacas/hectare})^2$ é

a) 20,25
b) 4,50
c) 0,71
d) 0,50
e) 0,25

20. Enem C7-H27

A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas (M)
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M < 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte.

Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação "Bom" ou "Excelente" conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro.

Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é

a) 7,00.
b) 7,38.
c) 7,50.
d) 8,25.
e) 9,00.

23 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA – ÁREA DE POLÍGONOS

- Localização
- Sistema cartesiano
- Área de polígonos

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.
- Resolver situações-problemas que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.

LOCALIZAÇÃO

Em Geometria analítica, a localização espacial de um objeto pode ser representada de três maneiras distintas: unidimensional, bidimensional e tridimensional. Neste módulo, são objetos de estudo somente as duas primeiras.

Localização unidimensional

Nesse caso, a posição do objeto é indicada por apenas uma única coordenada. Por exemplo: imagine uma pista de Fórmula 1 sem incluir o *pitstop*. Assim, os carros só conseguem se locomover sobre uma única reta.

Localização bidimensional

Nesse modo, a posição do objeto é sinalizada por um par de coordenadas do plano. Por exemplo: na batalha naval, um competidor deve acertar os navios do adversário apontando em quais coordenadas do plano eles estão localizados.

Eixo

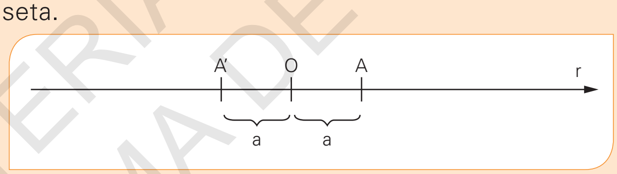
Chamamos assim a reta orientada com um sentido positivo, com uma origem arbitrada e uma unidade de medida estabelecida.

Vamos considerar uma reta **r** e uma unidade (u) de comprimento com a qual se medem os segmentos contidos em **r**.

Também iremos levar em conta um ponto **O** arbitrário na reta, o qual chamaremos de origem.

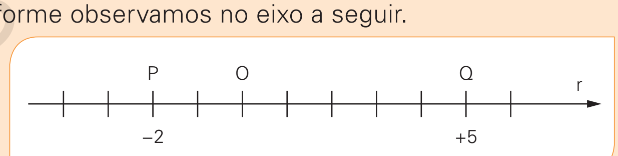
Sejam **A** e **A’** dois pontos de **r** tais que $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$ tenham a mesma medida **a**, tomada com unidade **u**, de modo que **A** esteja à direita de **O** e **A’** se encontre à esquerda de **O**.

Fixamos o sentido de **O** para **A** como o sentido positivo e o representamos com uma ponta de seta.



Dessa forma, dizemos que os pontos **A** e **A’** estão simétricos, à mesma distância **a** de **O**.

De modo geral, associa-se a cada ponto de **r** um único número real, chamado **abscissa do ponto**, número esse que é positivo para pontos marcados a partir da origem no sentido positivo. Ele também é negativo para pontos marcados no sentido contrário, conforme observamos no eixo a seguir.



Abscissa de **P** = – 2

Abscissa de **Q** = +5

Logo, quando queremos localizar pontos em uma reta, transformamos a reta em um eixo. A localização do ponto é dada pela abscissa dele.

Importante!

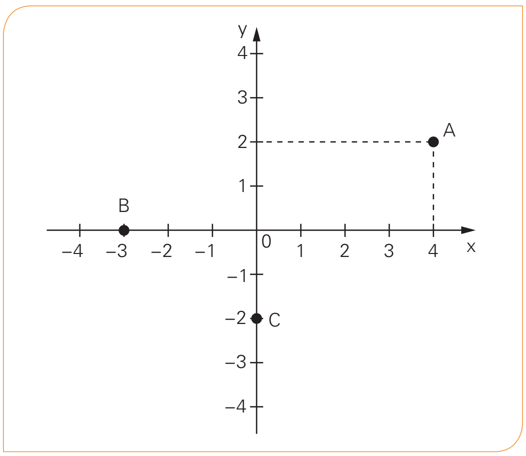
O número zero real representa a abscissa da origem.

Cada ponto de um eixo tem **uma única abscissa** e, para cada abscissa, há um único ponto do eixo.

SISTEMA CARTESIANO

Dois eixos **x** e **y** perpendiculares entre si, com origem **O** comum e localizados no mesmo plano, formam um sistema cartesiano ortogonal.

Vamos observar no plano cartesiano a seguir a localização dos pontos **A** e **B**.

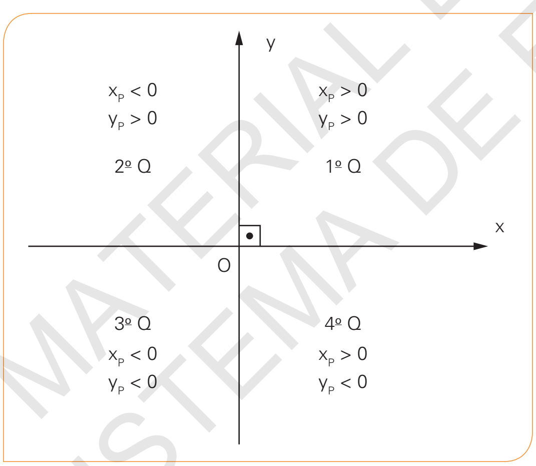


A(4, 2)

B(−3, 0)

C(0, −2)

Os eixos **x** e **y** dividem o plano cartesiano em quatro quadrantes, conforme a figura:



Observações:

I. Um ponto **P** com ordenada nula ($y_P = 0$) pertence ao eixo **x**.

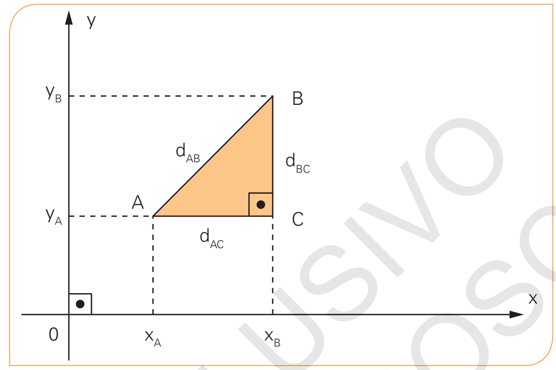
II. Um ponto **P** com abscissa nula ($x_P = 0$) pertence ao eixo **y**.

III. O segmento **PQ**, que une os pontos **P** e **Q** de mesma ordenada, é paralelo ao eixo **x**.

IV. O segmento **PQ**, que une os pontos **P** e **Q** de mesma abscissa, é paralelo ao eixo **y**.

Distância entre dois pontos

Dados dois pontos **A** e **B** pertencentes ao plano cartesiano xy, a distância entre eles (d_{AB}) é obtida ao traçarmos por **A** e **B** retas paralelas aos eixos coordenados xy e aplicarmos o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC obtido, conforme o gráfico:



$d_{AC} = \Delta x = |x_B - x_A|$

$d_{BC} = \Delta y = |y_B - y_A|$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

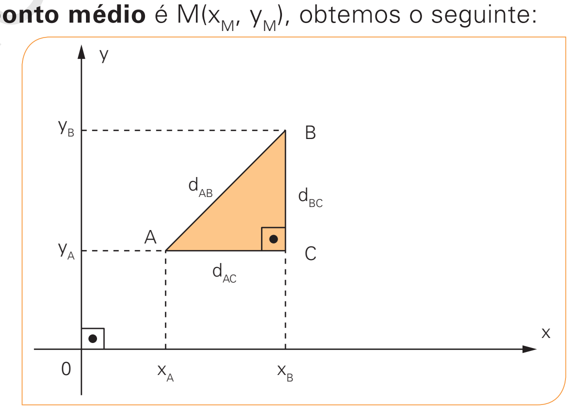
$d_{AB}{}^2 = d_{AC}{}^2 + d_{BC}{}^2$

$d_{AB}{}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

A fórmula do cálculo da distância entre dois pontos **A** e **B** continua válida quando $\overline{AB}$ é paralelo a um dos eixos cartesianos, ou mesmo quando **A** e **B** coincidem, caso em que $d_{AB} = 0$.

Ponto médio de um segmento

Dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pertencentes ao plano xy e com extremidades do segmento $\overline{AB}$ cujo **ponto médio** é $M(x_M, y_M)$, obtemos o seguinte:



AM = MB → A'M = M'B

Logo:

$x_M - x_A = x_B - x_M$

$2x_M = x_A + x_B$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Analogamente, temos:

M = MB → A''M = M''B

Logo:

$y_M - y_A = y_B - y_M$

$2y_M = y_A + y_B$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. PUC-RJ – Se os pontos A = (−1,0), B = (1,0) e C = (x, y) são vértices de um triângulo equilátero, então a distância entre A e C é

a) 1
b) 2
c) 4
d) $\sqrt{2}$
e) $\sqrt{3}$

Resolução

Por se tratar de um triângulo equilátero (ΔABC), temos:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$

Logo, ao calcular a distância entre os pontos A e B, obtemos a distância entre os pontos A e C:

$d_{AB}{}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

$d_{AB}{}^2 = (-1 - 1)^2 + (0 - 0)^2$

$d_{AB}{}^2 = (-2)^2 = 4 \;\rightarrow\; d_{AB} = 2$

Assim, $\overline{AC} = 2$.

2. Sistema Dom Bosco – Considere o segmento de reta AB, em que A = (2,3) e B = (−5, 12). Se M é o ponto médio do segmento AB, quais as coordenadas de M?

Resolução

$x_A = 2$

$x_B = -5$

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2+(-5)}{2} = \dfrac{-3}{2} \;\rightarrow\; x_M = -\dfrac{3}{2}$

$y_A = 3$

$y_B = 12$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3+12}{2} = \dfrac{15}{2} \;\rightarrow\; y_M = \dfrac{15}{2}$

Logo, as coordenadas do ponto médio são:

$M = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{15}{2}\right)$

ÁREA DE POLÍGONOS

Em Geometria plana, aprendemos a calcular as áreas dos mais diversos polígonos. Em Geometria analítica, também podemos calcular a área dos polígonos. Para tanto, dividimos o polígono em vários triângulos e utilizamos a área de um triângulo como base.

ÁREA DE UM TRIÂNGULO

A área **A** de um triângulo ABC corresponde à metade do módulo do determinante das coordenadas de seus vértices.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \quad A = \frac{1}{2}\cdot|\Delta|$$

Dessa forma, dados três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, a área do triângulo é dada por $\left(A_{\Delta BC} = \dfrac{1}{2}\cdot|\Delta|\right)$.

Observações:

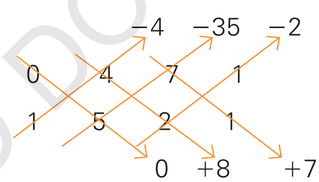
- **Pontos colineares** – ocorrem quando Δ = 0, ou seja, se a área do triângulo for zero. Assim, os pontos **A**, **B** e **C** estão alinhados.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- **Regra do agrimensor** – trata-se de um modo prático e rápido para calcular Δ.

Exemplo:

Sendo A(0, 1), B(4, 5) e C(7, 2), utilizando a regra do agrimensor, temos:



$\Delta = 0 + 8 + 7 - 4 - 35 - 2 = -26$

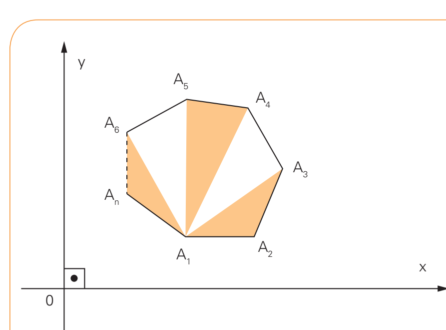
$$A = \frac{\Delta}{2}$$

ÁREA DE UM POLÍGONO

Por meio da Geometria analítica, podemos encontrar a área de um polígono qualquer.

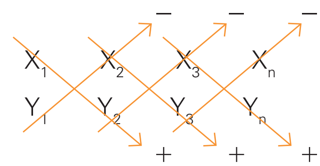
Vamos considerar um polígono convexo A_1, A_2, A_3, ..., A_n, com as coordenadas do vértice dadas por $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$, lidos no sentido anti-horário.

Ao dividirmos o polígono em (n – 2) triângulos, conforme figura abaixo, podemos demonstrar que sua área é dada por:



$$A = \frac{\Delta p}{2}$$

Sendo o valor de Δp obtido por meio da regra do agrimensor, colocamos as coordenadas em sentido anti-horário.

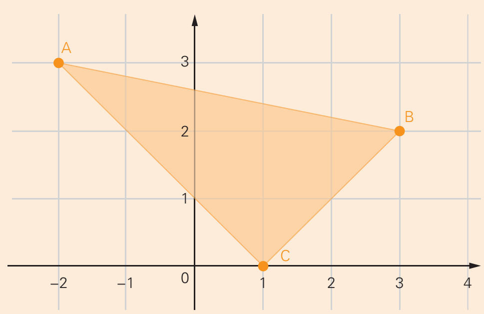


$$\Delta p = x_1y_2 + x_2y_3 + ...\ x_{n-1}y_n - y_1x_2 - y_2x_7 - ... - y_{n-1}x_n$$

Observação: caso os pontos sejam dispostos em uma sequência horária, basta considerarmos o resultado em módulo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3. Sistema Dom Bosco – Na figura está representado um triângulo de vértices ABC:



Sabe-se que as coordenadas cartesianas dos pontos A, B e C são, respectivamente, A(–2, 3), B(3, 2) e C(1, 0).

Então, é correto afirmar que a área do triângulo ABC corresponde a:

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

Resolução

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 0 - 2 - 0 - 9 =$$

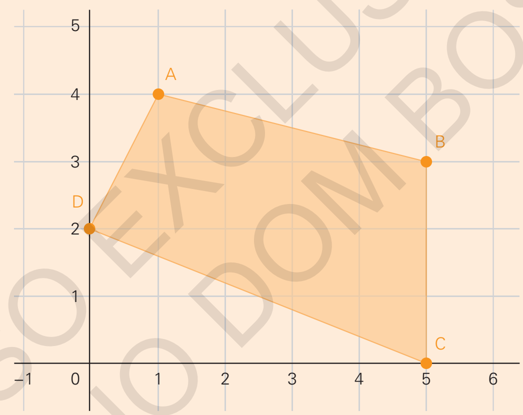
$= -12$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |-12|$

Portanto, $A_{\Delta ABC} = 6$.

4. Sistema Dom Bosco – A área de um quadrilátero de vértices A, B, C e D pode ser calculada por meio da relação $A = \frac{\Delta p}{2}$.

Sendo Δp obtido com base na regra prática do agrimensor, pode-se afirmar que a área do quadrilátero descrito na figura corresponde a:



a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

Resolução

Primeiramente identificamos as coordenadas dos pontos ABCD do quadrilátero.

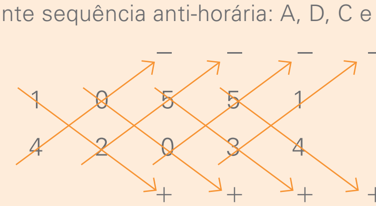
A = (1, 4)

B = (5, 3)

C = (5, 0)

D = (0, 2)

Para aplicar a regra do agrimensor, podemos usar a seguinte sequência anti-horária: A, D, C e B.



Logo:

$A = \frac{1}{2} \cdot |2 + 0 + 15 + 20 - 0 - 10 - 0 - 3|$

$A = \frac{1}{2} \cdot (24)$

Portanto, A = 12.

ROTEIRO DE AULA

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA

Localização

Unidimensional

posição na reta.

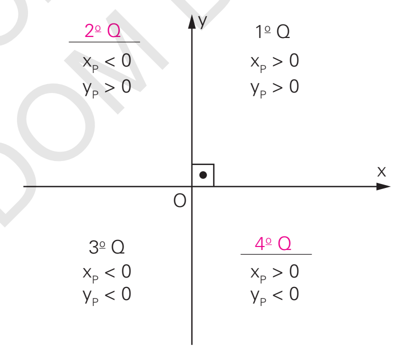
Bidimensional

posição no plano.

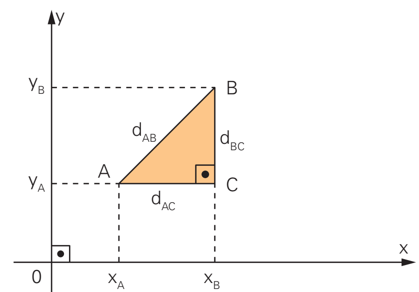
Eixo

Reta orientada em sentido positivo, origem arbitrada e unidade de medida estabelecida.

Sistema cartesiano

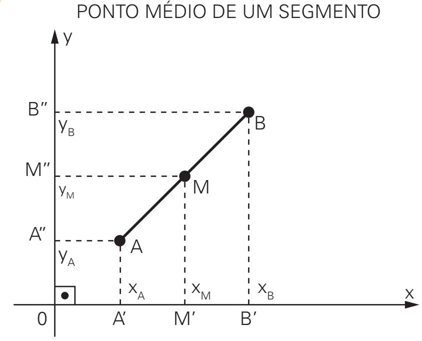


DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS



$d_{AB}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

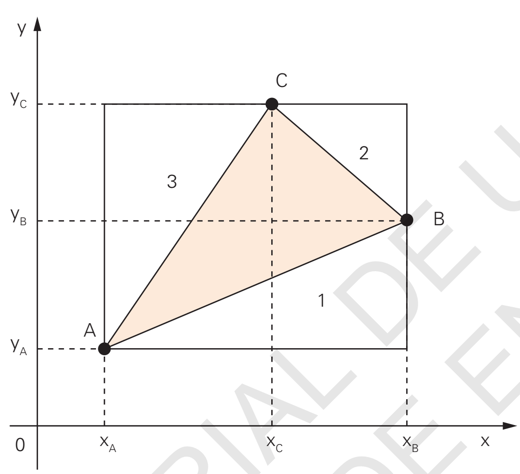


$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ $\qquad y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

ROTEIRO DE AULA

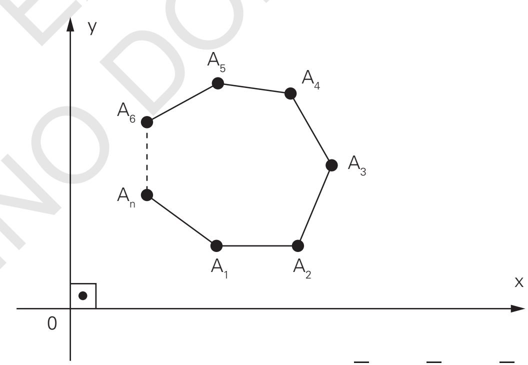
ÁREA DE POLÍGONOS

ÁREA DE TRIÂNGULOS

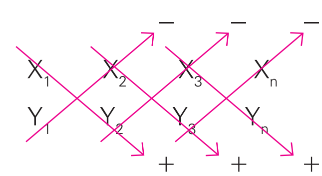


$$A = \frac{1}{2} \cdot |\Delta| \quad \text{em que } \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

ÁREA DE POLÍGONOS



$$\Delta = \frac{\Delta p}{2}$$



$$\Delta p = x_1y_2 + x_2y_3 + \ldots x_{n-1}y_n - y_1x_2 - y_2x_3 - \ldots - y_{n-1}x_n$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. EEAR-SP – O triângulo determinado pelos pontos A(–1, –3), B(2, 1) e C(4, 3) tem área igual a

a) 1
b) 2
c) 3
d) 6

Utilizando a regra de Sarrus para calcular o determinante, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix} = -1-12+6-4+3+6=-2 \rightarrow D=-2$$

Logo, a área do triângulo será dada por: $A=\frac{1}{2}\cdot|-2|=1$

2. EEAR-SP – O triângulo ABC formado pelos pontos A(7, 3), B(−4, 3) e C(−4, −2) é

a) escaleno
b) isósceles
c) equiângulo
d) obtusângulo

Calculando os quadrados das medidas dos lados do triângulo ABC, encontramos:

$d^2_{A,\,B}=(-4-7)^2+(3-3)^2=121$

$d^2_{A,\,C}=(-4-7)^2+(-2-3)^2=146$

E também:

$d^2_{B,\,C}=(-4+4)^2+(-2-3)^2=25$

Portanto:

$d^2_{A,\,C}=d^2(A,\,B)+d^2(B,\,C)$

Podemos concluir que o triângulo ABC é retângulo escaleno.

3. Enem C5-H20

Foi utilizado o plano cartesiano para a representação de um pavimento de lojas. A loja A está localizada no ponto A(1; 2). No ponto médio entre a loja A e a loja B está o sanitário S, localizado no ponto S(5; 10).

Determine as coordenadas do ponto de localização da loja B.

a) (−3; −6)
b) (−6; −3)
c) (3; 6)
d) (9; 18)
e) (18; 9)

Pelo enunciado, temos:

$$\left(\frac{1+x_B}{2},\ \frac{2+y_B}{2}\right)=(5,\ 10)\leftrightarrow \begin{cases} x_B=9 \\ y_B=18 \end{cases}$$

Portanto, concluímos que B = (9; 18).

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

4. FGV-SP – O comprimento do segmento determinado pelos pontos de interseção das parábolas de equações $y=x^2-8x+3$ e $y=-4x^2+2x+3$ é:

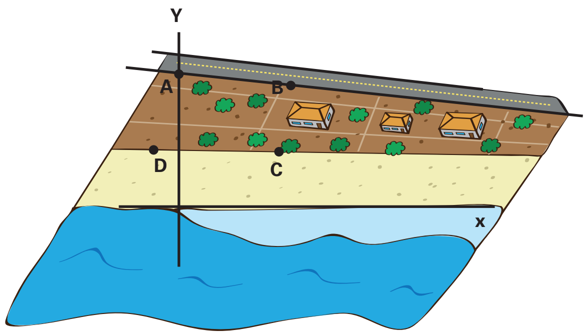
a) $2\sqrt{37}$
b) $3\sqrt{41}$
c) $\frac{7}{3}\sqrt{43}$
d) $\frac{5}{2}\sqrt{39}$
e) $4\sqrt{45}$

Calculando, temos:

$$-4x^2+2x+3=x^2-8x+3 \rightarrow 5x^2-10x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=3 \\ \text{ou} \\ x=2 \rightarrow y=-9 \end{cases}$$

$$d=\sqrt{(0-2)^2+(3-(-9))^2}=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$$

5. Sistema Dom Bosco – Um arquiteto precisa elaborar o projeto de uma casa de praia em um grande terreno. Como não está no local da construção, recorre ao mapa que indica, por coordenadas cartesianas, a posição dos extremos (vértices) do terreno, conforme a figura a seguir.



Os vértices A, B, C e D do quadrilátero possuem as respectivas coordenadas, em metros: (0, 120); (30, 110); (25, 80); e (–10, 85).

Logo, a área de terreno que o arquiteto terá para executar o seu projeto corresponde a

a) 1 112,5 m²
b) 2 225,0 m²
c) 4 450,0 m²
d) 440,0 m²
e) 250,0 m²

Primeiramente, identificamos as coordenadas dos pontos ABCD do quadrilátero:

A = (0, 120)

B = (30, 110)

C = (25, 80)

D = (–10, 85)

Para aplicar a regra do agrimensor, podemos usar a seguinte sequência horária, calculando o módulo de Δp: A, B, C e D.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 30 & 25 & -10 & 0 \\ 120 & 110 & 80 & 85 & 120 \end{array}$$

Logo:

$A = \dfrac{1}{2} \cdot |0 + 2\,400 + 2\,125 - 1\,200 - 3\,600 - 2\,750 + 800 - 0|$

$A = \dfrac{1}{2} \cdot |2\,225|$

Portanto, A = 1 112,50 m².

6. UPE – Qual é a medida da área e do perímetro do losango cujos vértices são A(2, 3); B(1, 0); C(0, 3); e D(1, 6)?

Utilize $\sqrt{10} \cong 3{,}2$

a) Área = 6 e perímetro = 12,8
b) Área = 6 e perímetro = 10,4
c) Área = 12 e perímetro = 22,3
d) Área = 12 e perímetro = 25,9
e) Área = 18 e perímetro = 27,1

A área é dada por:

$\dfrac{1}{2} \cdot (x_A - x_C) \cdot (y_D - y_B) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$

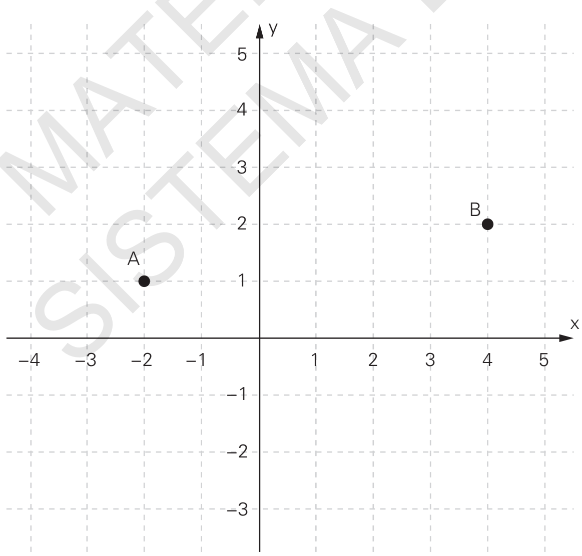
Por outro lado:

$d(B, C) = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \cong 3{,}2$

Segue, então, que o perímetro mede $4 \cdot 3{,}2 \cong 12{,}8$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Feevale-RS – Na figura a seguir, o ponto A representa uma praça, e o ponto B, uma livraria.

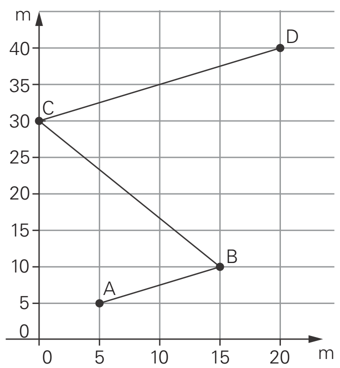


Considerando quilômetro (km) como unidade de medida, a menor distância entre a praça e a livraria é de aproximadamente

a) 4 km.
b) 5 km.
c) 6 km.
d) 7 km.
e) 8 km.

8. EEAR-SP (adaptado) – Considere os pontos A(2, 8) e B(8, 0). Qual a distância entre eles?

9. IFSC – O plano cartesiano representado abaixo mostra o deslocamento de uma pessoa por 4 pontos diferentes, no interior do pavilhão da Oktoberfest. Considere que essa pessoa partiu do ponto A e formou, com seu trajeto, segmentos de reta entre os pontos consecutivos A, B, C e D, nessa ordem. Em uma escala em metros, é **CORRETO** afirmar que ela se deslocou



a) $5\left(3\sqrt{5}+5\right)$ m.

b) $\left(3\sqrt{5}+5\right)$ m.

c) 53 m.

d) $2\left(3\sqrt{2}+7\right)$ m.

e) $4\left(3\sqrt{5}+5\right)$ m.

10. Sistema Dom Bosco – Qual a área de um triângulo escaleno de vértices A(–1, 2), B(1, 4) e C(3, –1)?

11. EEAR-SP – Considere os segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, onde A(0, 10), B(2, 12), C(−2, 3) e D(4, 3). O segmento $\overline{MN}$, determinado pelos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, é dado pelos pontos M e N, pertencentes, respectivamente, a $\overline{AB}$ e a $\overline{CD}$.

Assinale a alternativa que corresponde corretamente a esses pontos.

a) $M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e $N(-1, 3)$

b) $M(-2, 10)$ e $N(-1, 3)$

c) $M(1, -2)$ e $N(1, 3)$

d) $M(1, 11)$ e $N(1, 3)$

12. UFRGS-RS – Os pontos A(1, 2), B(6, 2) e C são os vértices de um triângulo equilátero, sendo o segmento AB a base dele. O seno do ângulo formado pelo eixo das abscissas e a reta suporte do lado BC no sentido anti-horário é

a) $-\frac{1}{2}$.

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. UEFS-BA – Dado um número complexo $z = a + bi$, com a e b reais, define-se afixo de z como o ponto do plano complexo de coordenadas (a, b). Sejam A, B e C os afixos dos números complexos $z_A = 14 + 4i$, $z_B = 6 - 2i$ e $z_C = 16 - 2i$. A área do triângulo de vértices A, B e C é

a) 18.

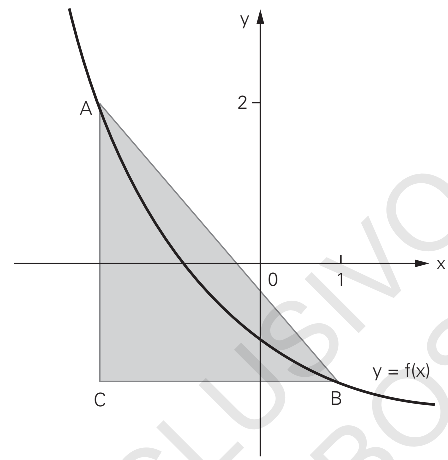
b) 24.

c) 30.

d) 36.

e) 40.

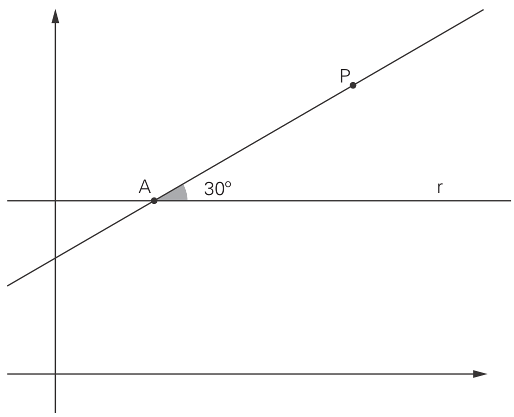
14. UPF-RS – Na figura abaixo, está representado um triângulo retângulo em que os vértices A e B pertencem ao gráfico da função f, definida por $f(x) = 2^{-x} - 2$.



Como indica a figura, a abscissa do ponto B é 1, a ordenada do ponto A é 2 e os pontos A e C têm a mesma abscissa. A medida da área do triângulo ABC é

a) $\frac{21}{2}$ **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** 6 **d)** 12 **e)** $\frac{21}{4}$

15. UDESC – Seja r uma reta passando por um ponto A e seja P um ponto não pertencente à reta, de tal forma que a distância entre os pontos P e A seja de 4 unidades de comprimento e o ângulo formado entre a reta r e o segmento AP seja de 30 graus, conforme a figura abaixo.

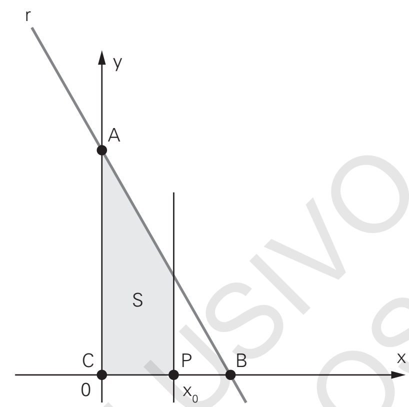


Reta r e pontos

Sabendo-se que a equação da reta r é y = 3 e que a reta que passa pelos pontos A e P corta o eixo y no ponto (0, 2), então a soma dos quadrados das coordenadas do ponto P é igual a:

a) 34
b) 12
c) 4
d) 52
e) 45

16. UERJ – Considere o gráfico a seguir, em que a área S é limitada pelos eixos coordenados, pela reta r, que passa por A(0, 4) e B(2, 0), e pela reta perpendicular ao eixo x no ponto P(x_0, 0), sendo $0 \le x_0 \le 2$.

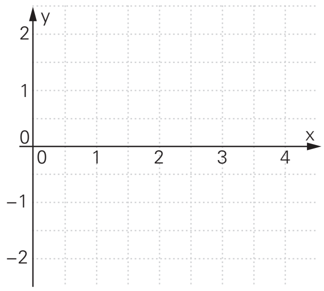


Para que a área S seja a metade da área do triângulo de vértices C (0, 0), A e B, o valor de x_0 deve ser igual a:

a) $2-\sqrt{2}$
b) $3-\sqrt{2}$
c) $4-\sqrt{2}$
d) $5-\sqrt{2}$

17. Unicamp-SP – Sejam c um número real e $f(x) = x^2 - 4x + c$ uma função quadrática definida para todo número real x. No plano cartesiano, considere a parábola dada pelo gráfico de $y = f(x)$.

a) Determine c no caso em que a abscissa e a ordenada do vértice da parábola têm soma nula e esboce o respectivo gráfico para $0 \leqslant x \leqslant 4$.



b) Considere os pontos de coordenadas $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, onde a e b são números reais com $a < b$. Sabendo que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é $M = (1, c)$, determine a e b.

ESTUDO PARA O **ENEM**

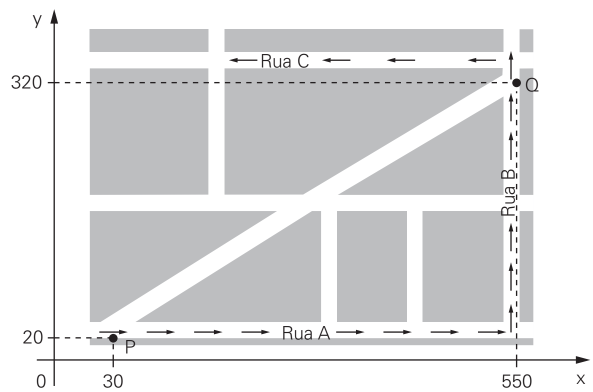
18. Enem C2-H9

Observou-se que todas as formigas de um formigueiro trabalham de maneira ordeira e organizada. Foi feito um experimento com duas formigas e os resultados obtidos foram esboçados em um plano cartesiano no qual os eixos estão graduados em quilômetros. As duas formigas partiram juntas do ponto O, origem do plano cartesiano xOy. Uma delas caminhou horizontalmente para o lado direito, a uma velocidade de 4 km/h. A outra caminhou verticalmente para cima, à velocidade de 3 km/h.
Após 2 horas de movimento, quais as coordenadas cartesianas das posições de cada formiga?

a) (8; 0) e (0; 6).
b) (4; 0) e (0; 6).
c) (4; 0) e (0; 3).
d) (0; 8) e (6; 0).
e) (0; 4) e (3; 0).

19. Enem C2-H9

Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.

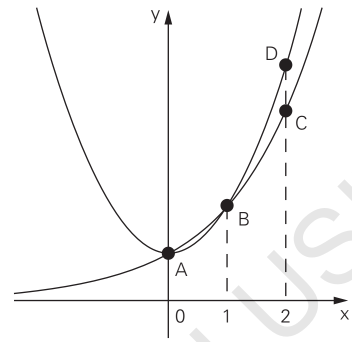


Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais. De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

a) (290; 20).
b) (410; 0).
c) (410; 20).
d) (440; 0).
e) (440; 20).

20. ESPM-SP (adaptado) C5-H20

Através das equações polinomiais, podemos modelar graficamente vários tipos de funções matemáticas. A figura abaixo representa os gráficos das funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2^x$. A área do quadrilátero ABCD é igual a:



a) 2,0
b) 1,5
c) 0,5
d) 2,5
e) 1,0

24 ESTUDO DA RETA - EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA E OUTRAS EQUAÇÕES

- Inclinação de uma reta
- Equação fundamental da reta
- Outras equações da reta

HABILIDADES

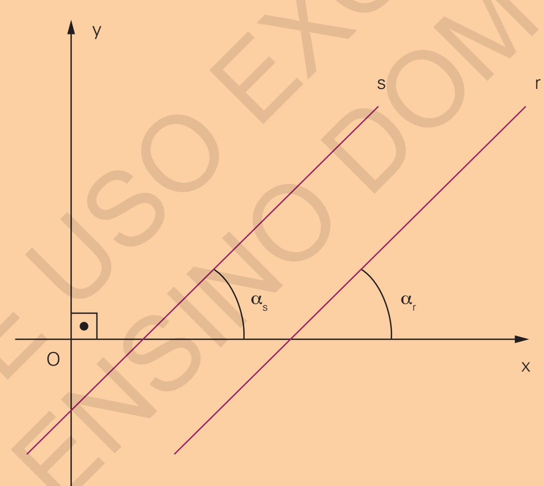
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.

INCLINAÇÃO DE UMA RETA

Dados um plano cartesiano e uma reta r concorrente com o eixo x, chamamos de **inclinação de r** a medida α do ângulo que **r** forma com o eixo **x**. Esse ângulo é medido do eixo **x** até a reta **r** no sentido anti-horário.

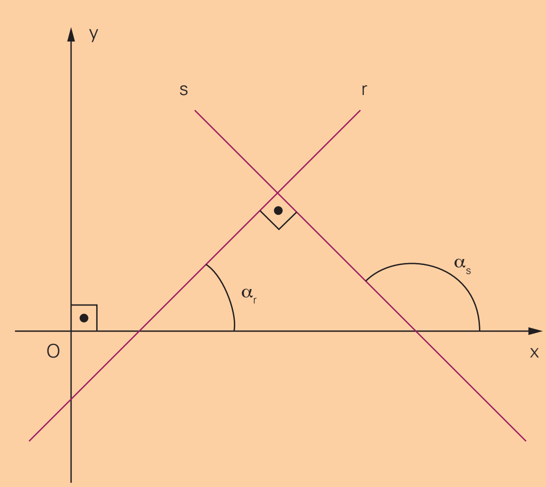
Propriedades importantes

1. Se duas retas de um plano cartesiano são paralelas, suas inclinações são iguais.



$r \parallel s \leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s$

2. Se duas retas são perpendiculares, a diferença entre suas inclinações é de 90°.



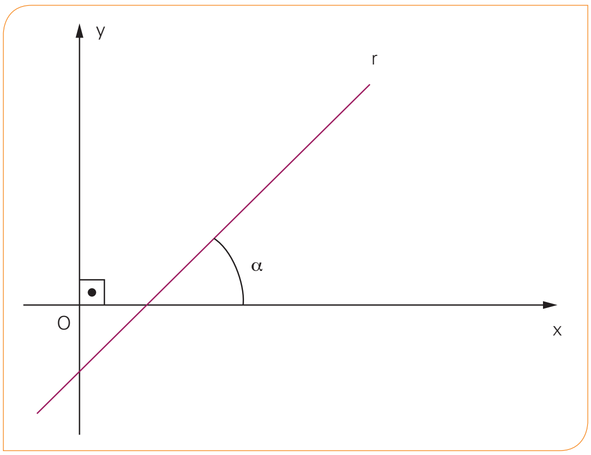
$r \perp s \leftrightarrow |\alpha_s - \alpha_r| = 90°$

Coeficiente angular de uma reta

Também chamado **declividade** de uma reta **r**, não paralela ao eixo y, o **coeficiente angular** é definido como a tangente da inclinação de **r** em relação à horizontal, sendo indicado por **m**.

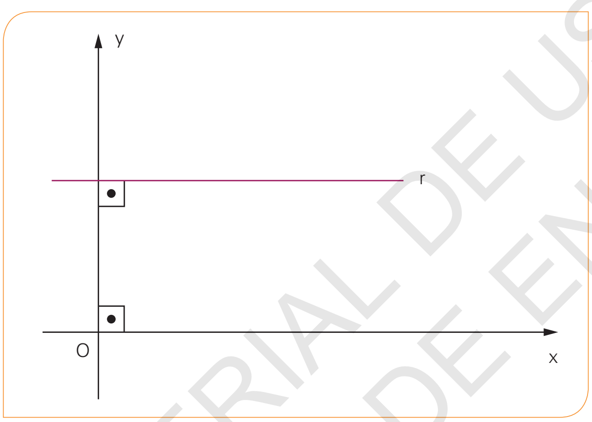
Observe os casos possíveis:

- Para $0° < \alpha < 90°$



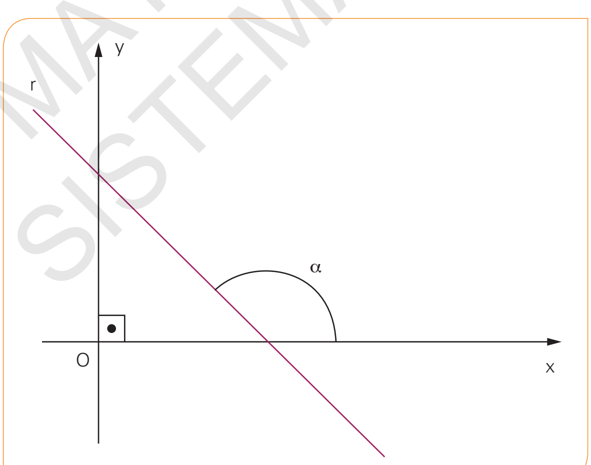
$m = tg\ \alpha$ Portanto, $m > 0$.

- Para $\alpha = 0°$



$m = tg\ \alpha$ Portanto, $m = 0$.

- Para $90° < \alpha < 180°$

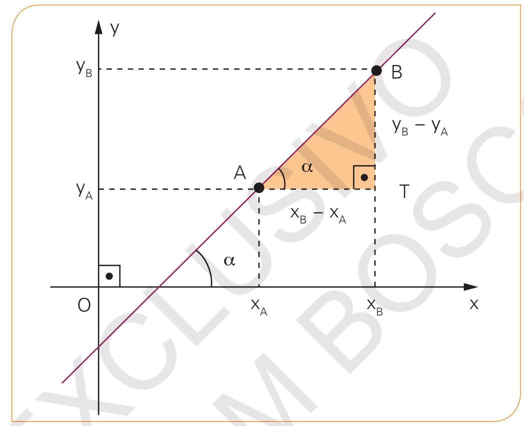


$m = tg\ \alpha$ Portanto, $m < 0$.

No caso em que **r** é paralela ao eixo y, o **coeficiente angular de r não é definido**, pois não há tangente estabelecida para tal ângulo.

Cálculo do coeficiente angular de uma reta

Considere no plano cartesiano a reta não paralela ao eixo **y**, determinada por dois pontos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, com $x_A \neq x_B$, conforme a figura a seguir.



Assim, o coeficiente angular (m) da reta é dado pela seguinte relação:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Podemos observar as seguintes situações:

- Para $0° < \alpha < 90°$, a função é crescente e $m > 0$.
- Para $\alpha = 0°$, a função é constante e $m = 0$.
- Para $90° < \alpha < 180°$, a função é decrescente e $m < 0$.
- Para $\alpha = 90°$, não existe tg 90°. Logo, **m** não está definido.

Conclusão:

Em qualquer um dos casos, o coeficiente angular da reta é dado pela razão entre a diferença das ordenadas (Δy) e das abscissas (Δx).

CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO PARA TRÊS PONTOS

Podemos verificar se três pontos estão alinhados analisando o coeficiente angular do segmento de reta que os une.

Quando os coeficientes angulares dos segmentos de retas que unem três pontos são iguais ($m_{AB} = m_{BC}$), podemos afirmar que os pontos são colineares.

EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA

Ao conhecermos um dos pontos da reta e sua direção, podemos determinar sua equação.

- **1º caso**: a reta tem coeficiente angular **m.**

Seja **r** uma reta do plano cartesiano que passa pelo ponto $Q(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular **m**. Para determinarmos a equação dessa reta, consideramos um ponto $P(x, y)$, fazendo-o ter a propriedade característica de **r**.

$$P(x, y) \in r \leftrightarrow m_{PQ} = m$$

Então, $m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$. Isso nos leva à **equação fundamental** de **r**.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- **2º caso**: a reta não tem coeficiente angular (r // y).

Seja **r** uma reta do plano cartesiano que passa pelo ponto $Q(x_0, y_0)$ e tem inclinação de 90°. Para determinarmos a equação dessa reta, consideramos um ponto P(x, y), fazendo-o ter a propriedade característica de **r**.

Então: $x = x_0$.

Essa equação obtida é a equação de **r**.

Por exemplo, para obtermos a equação da reta que passa pelo ponto A(5, 3) e é paralela ao eixo **y**, $x = x_0$. Isto é, $x = 5$ é a equação da reta.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – A reta **r** passa pelos pontos A(3, 7) e B(5, 12). Sendo a tangente do ângulo α formada pela reta com o eixo das abscissas igual a **m**, pode-se afirmar que o coeficiente angular da reta corresponde a:

a) −1,5
b) +1,5
c) −2,5
d) +2,5
e) −3,5

Resolução

$\Delta y = y_B - y_A = 12 - 7 = 5$

$\Delta x = x_B - x_A = 5 - 3 = 2$

$\text{tg}\ \alpha = m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow m = \dfrac{5}{2}$

Portanto, m = 2,5.

2. Sistema Dom Bosco – Para que os pontos A(−5, −2), B(1, 0) e $C(x_c, 1)$ pertençam à mesma reta, pode-se afirmar que

a) $x_c = 10$
b) $x_c = 8$
c) $x_c = 6$
d) $x_c = 4$
e) Indiferente ao valor de x_c, os pontos jamais estarão alinhados.

Resolução

Para que os pontos estejam alinhados, Δ = 0. Logo, escrevendo as coordenadas de A, B e C, obtemos:

A: $x_A = -5$ e $y_A = -2$

B: $x_B = +1$ e $y_B = 0$

C: x_C e $y_C = 1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ +1 & 0 & 1 \\ x_C & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 0 - 2x_C + 1 - 0 + 5 + 2 = 0$$

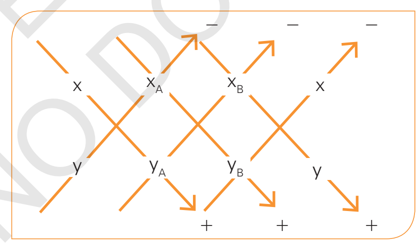
$\rightarrow 2x_C = 8$

Portanto, $x_C = 4$.

Equação geral da reta

Vamos considerar três pontos distintos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e P(x, y), de uma reta **r** qualquer.

Uma equação de **r** pode ser obtida por meio de uma regra prática conhecida como regra do agrimensor, uma vez que, por pertencerem à mesma reta, os pontos são colineares. Com isso, temos:



$$xy_A + x_Ay_B + x_By - x_Ay - x_By_A - xy_B = 0$$
$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + (x_Ay_B - x_By_A) = 0$$

Ao calcularmos
$y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$ e $x_Ay_B - x_By_A = c$, temos a **equação geral da reta**:

$$ax + by + c = 0$$

Observações:

I. Se a = 0, temos que $y_A = y_B$. Desse modo, a reta é paralela ao eixo **x**.
II. Se b = 0, temos que $x_A = x_B$. Assim, a reta é paralela ao eixo **y**.
III. Se c = 0, a reta passa pela origem, pois (0, 0) é uma solução de ax + by = 0.

Equação reduzida da reta

A **equação reduzida da reta** é descrita por:

$$y = mx + n$$

Com base na equação geral da reta, podemos escrever sua equação reduzida:

$$ax + by + c = 0 \ \rightarrow \ by = -ax - c \ \rightarrow$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \ \text{(desde que } b \neq 0)$$

Logo, os coeficientes **m** e **n**, que, na forma reduzida da reta, são fornecidos diretamente na equação, podem ser obtidos por meio da seguinte relação na equação geral da reta:

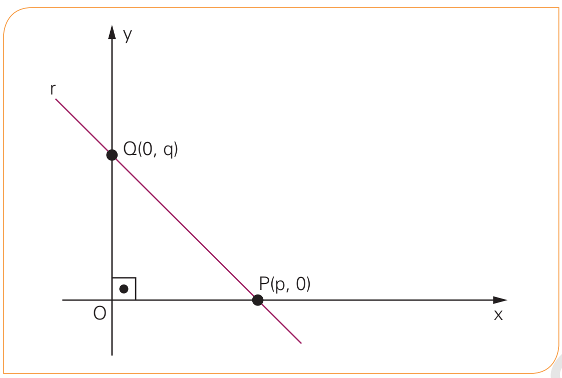
$$m = -\frac{a}{b}$$

$$n = -\frac{c}{b}$$

Já as retas com inclinação de 90° (paralelas ao eixo **y**) não têm equação na forma reduzida.

Equação segmentária da reta

No gráfico a seguir, a reta **r** intercepta os eixos cartesianos nos pontos P(p, 0) e Q(0, q), com $p \cdot q \neq 0$.



A partir da equação da reta r: $qx + py = pq$.

Ao dividirmos ambos os membros por **pq**, obtemos:

$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq}$$

Finalmente, encontramos a **equação segmentária da reta r**:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Importante!
Os denominadores de **x** e **y** na equação segmentária são, respectivamente, a abscissa do ponto em que **r** intercepta o **eixo x** e a ordenada do ponto em que **r** intercepta o **eixo y**.

Equação paramétrica da reta

Vamos considerar uma reta **r** não paralela a algum dos eixos cartesianos que passa pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

As equações paramétricas da reta são descritas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}$$

Observações:

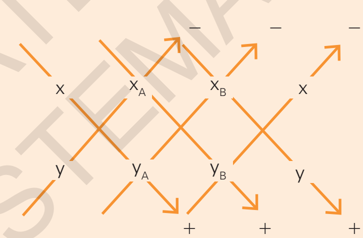
- O **t** na equação paramétrica corresponde a um número real e é denominado **parâmetro** das equações.
- Ao isolarmos o número **t** e igualarmos as equações, obtemos a equação geral da reta.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

3. Sistema Dom Bosco – Qual a equação geral da reta que passa pelos pontos A(1, 4) e B(3, 2)?

Resolução

Como os pontos pertencem à mesma reta, estão alinhados. Logo, para encontrar a equação geral da reta, aplicamos a regra prática.



$$\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ y & 2 & y \end{vmatrix} \rightarrow 4x + 2 + 3y - y - 12 - 2x = 0 \rightarrow 2x +$$

$+ 2y - 10 = 0$

Dividindo todos os membros da equação por 2, obtemos a equação geral da reta:

$x + y - 5 = 0$

4. Sistema Dom Bosco – Qual a equação reduzida da reta que possui inclinação de 45° com o eixo horizontal e corta o eixo y no ponto A(0, 4)?

Resolução

O coeficiente angular da reta **m** corresponde à tangente do ângulo α.

$m = tg\ \alpha = tg\ 45° = 1$

Escrevendo a equação reduzida da reta, temos:

$y = mx + q$

$q = 4$ (termo independente)

$y = 1 \cdot x + 4$

Portanto, $y = x + 4$.

ROTEIRO DE AULA

EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA

Equação da reta

Teoria angular

Equação fundamental

$y - \underline{\ y_0\ } = m\,(x - x_0)$

Três pontos estão ___alinhados___ em uma reta não vertical quando o ___coeficiente angular___ das retas que passam por eles, agrupados dois a dois, é o mesmo.

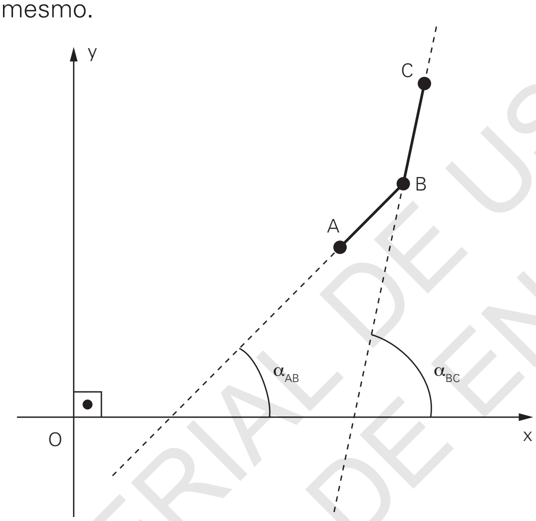
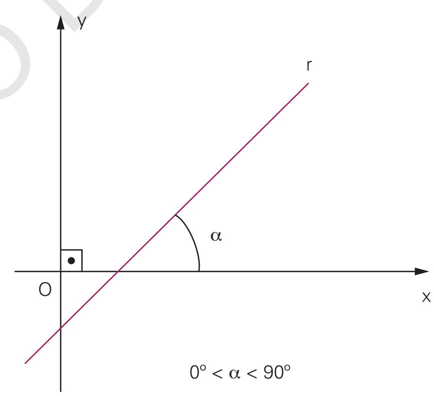


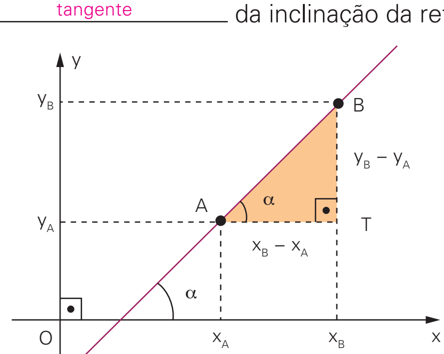
Figura 1

Dados um plano cartesiano e uma reta **r** concorrente com o eixo **x**, chama-se inclinação de **r** a ___medida α do ângulo___ que **r** forma com o eixo **x**. Esse ângulo é medido do eixo **x** até a reta **r** no ___sentido anti-horário___.



$0° < \alpha < 90°$

O coeficiente angular de uma reta **r** é a ___tangente___ da inclinação da reta.



$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

OUTRAS EQUAÇÕES DA RETA

Equação geral da reta

$ax + by + c = 0$

Equação reduzida da reta

$y = mx + q$

Equação segmentária da reta

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

Equação paramétrica da reta

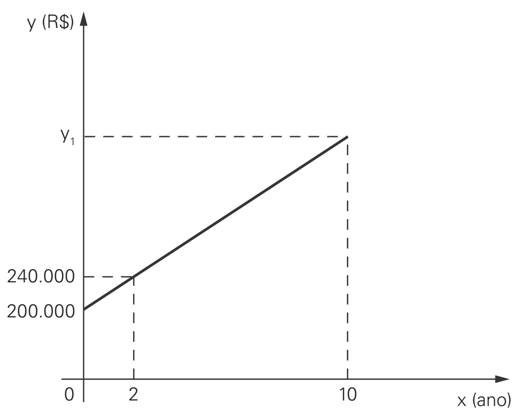
$x = x_A + t\,(x_B - x_A)$

$y = y_A + t\,(y_B - y_A)$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Enem C5-H20

Um sítio foi adquirido por R$ 200.000,00. O proprietário verificou que a valorização do imóvel, após sua aquisição, cresceu em função do tempo conforme o gráfico e que sua tendência de valorização se manteve nos anos seguintes.



O valor desse sítio, no décimo ano após sua compra, em real, será de

a) 190 000
b) 232 000
c) 272 000
d) 400 000
e) 500 000

Contando que os pontos (0; 200 000), (2; 240 000) e (10, y_1) estão alinhados, teremos $\Delta = 0$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 10 & 0 \\ 200000 & 240000 & y_1 & 200000 \end{vmatrix} = 0$$

$2y_1 + 200000 - 400000 - 240000 = 0$
y_1 = R$ 400.000,00

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

2. Unifenas-MG (adaptado) – Uma reta passa pelos pontos (5; 7) e (−2; 9). Qual é o coeficiente angular da equação de reta?

a) $\frac{2}{7}$

b) $\frac{-2}{7}$

c) $\frac{7}{2}$

d) $-\frac{7}{2}$

Temos:

$\Delta y = y_B - y_A = 9 - 7 = 2$

$\Delta x = x_B - x_A = -2 - 5 = -7$

Assim,

$\text{tg}\,\alpha = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow m = \frac{-2}{7}$

Portanto, o coeficiente angular da equação da reta é $m = \frac{-2}{7}$.

3. Enem C6-H25

Os procedimentos de decolagem e pouso de uma aeronave são os momentos mais críticos de operação, necessitando de concentração total da tripulação e da torre de controle dos aeroportos. Segundo levantamento da Boeing, realizado em 2009, grande parte dos acidentes aéreos com vítimas ocorre após iniciar-se a fase de descida da aeronave. Desta forma, é essencial para os procedimentos adequados de segurança monitorar-se o tempo de descida da aeronave.

A tabela mostra a altitude y de uma aeronave, registrada pela torre de controle, t minutos após o início dos procedimentos de pouso.

Considere que, durante todo o procedimento de pouso, a relação entre y e t é linear.

tempo t (em minutos)	0	5	10	15	20
altitude y (em metros)	10 000	8 000	6 000	4 000	2 000

Disponível em: <www.meioaereo.com>.

De acordo com os dados apresentados, a relação entre y e t é dada por

a) $y = -400t$
b) $y = -2\,000t$
c) $y = 8\,000 - 400t$
d) $y = 10\,000 - 400t$
e) $y = 10\,000 - 2\,000t$

Analisando a tabela e escrevendo a equação reduzida da reta $y = mx + q$, obtemos:
$q = 10000$ e $x = t$
Como o ponto (20, 2 000) pertence à reta, podemos escrever:
$y = mx + q \rightarrow 2000 = m \cdot 20 + 10000 \rightarrow m = -400$
Logo, $y = -400t + 10000$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

4. Unioeste-PR – Duas retas, $y = ax$ e $y = bx + c$, com a, b e c constantes reais, encontram-se no ponto (3, 2). Sabe-se ainda que $b = -3a$. Assim, é CORRETO afirmar que as equações das retas são

a) $y = \frac{2}{3}x$ e $y = -2x + 8$

b) $y = \frac{3}{2}x$ e $y = -3x + 2$

c) $y = \frac{2}{3}x$ e $y = -3x + 2$

d) $y = -x$ e $y = 3x - 3$

e) $y = 3x$ e $y = -9x + 2$

Como as retas se encontram no ponto (3, 2) e $b = -3a$, temos:

$y = ax$

$2 = 3a \rightarrow a = \frac{2}{3}$

$b = -3a = -3 \cdot \frac{2}{3} \rightarrow b = -2$

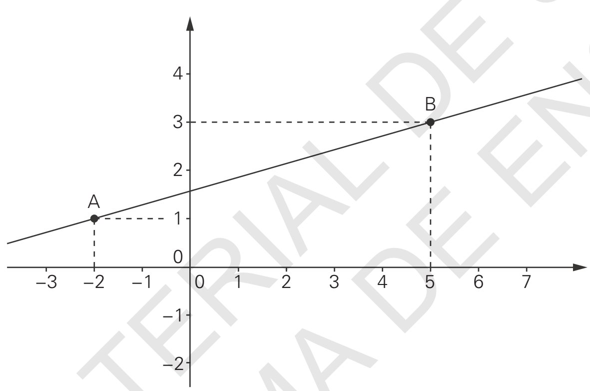
$y = bx + c \rightarrow 2 = -2 \cdot 3 + c \rightarrow c = 2 + 6 \rightarrow c = 8$

Logo, as equações são:

$y = ax \rightarrow y = \frac{2}{3}x$

$y = bx + c \rightarrow y = -2x + 8$

5. Unisinos-RS – A equação da reta que passa pelos pontos A e B da figura abaixo é dada por:



a) $2y - 7x = 11$

b) $2x - 7y = -11$

c) $2x - 7y = 11$

d) $2x - 3y = -5$

e) $2x - 3y = 1$

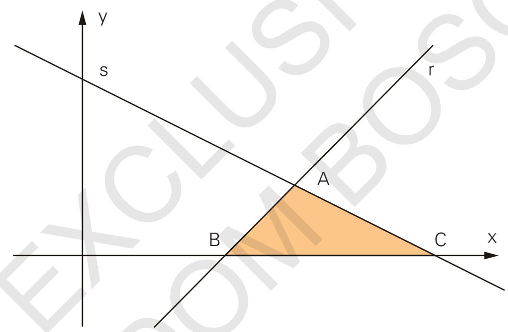
A equação da reta é obtida por:

$y - 1 = \frac{3-1}{5-(-2)} \cdot (x - (-2))$

$7y - 7 = 2x + 4$

Portanto, $2x - 7y = -11$.

6. PUC-RJ (adaptado) – Sejam r e s as retas de equações $y = x - 2$ e $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$, respectivamente, representadas no gráfico abaixo. Seja A o ponto de interseção das retas. Sejam B e C os pontos de interseção de r e s com o eixo horizontal, respectivamente.



Qual a área do triângulo ABC?

Pela equação da reta r, obtemos as coordenadas de B:

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow B(2, 0)$

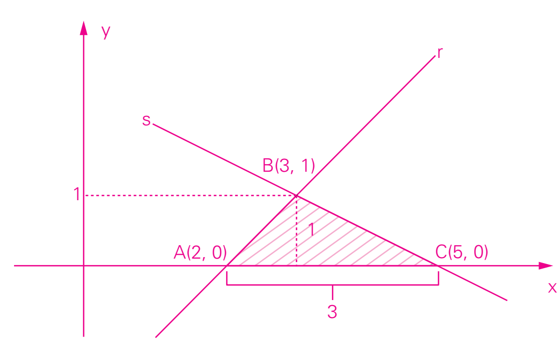
Pela equação da reta s, obtemos as coordenadas de C:

$-\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = 0 \rightarrow -2x = -5 \cdot 2 \rightarrow x = 2 \rightarrow C(5, 0)$

O ponto A corresponde à interseção das retas r e s, sendo obtido pela resolução do sistema a seguir:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow x = 3 \text{ e } y = 1 \rightarrow A(3, 1)$$

Localizadas as coordenadas de A, B e C, conforme o gráfico, calculamos a área do triângulo solicitada.



$A = \frac{3 \cdot 1}{2}$

Portanto, A = 1,5.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. EEAR-SP (adaptado) – A equação fundamental da reta **r** que passa pelo pontos A(0, 1) e B(6, 8) é dada por

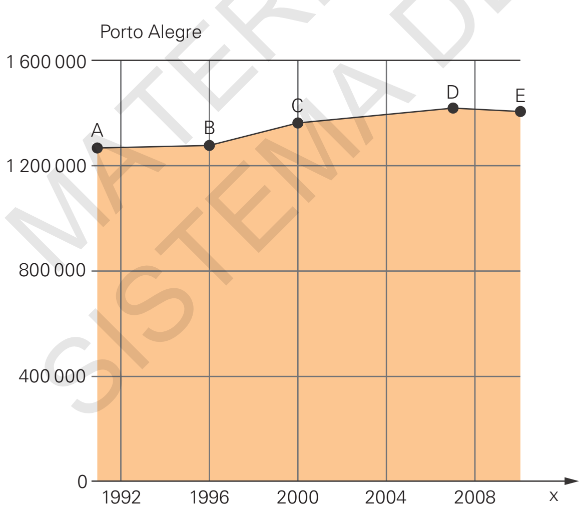
a) $y - 7x - 1 = 0$

b) $y - 6x - 4 = 0$

c) $y - \frac{7}{6}x - 1 = 0$

d) $y - \frac{6}{7}x - 1 = 0$

8. PUC-RS – O gráfico abaixo representa a evolução populacional de Porto Alegre entre os anos de 1992 e 2010.



Fonte: IBGE. Censo Demográfico 1991, Contagem Populacional 1996, Censo Demográfico 2000, Contagem Populacional 2007 e Censo Demográfico 2010.

Considerando as seguintes retas: r, determinada pelos pontos A e B; s, pelos pontos B e C; t, pelos pontos C e D; e u, pelos pontos D e E, cujos coeficientes angulares são, respectivamente, a_r, a_s, a_t e a_u, é correto afirmar que

a) $a_r < a_u < a_t < a_s$

b) $a_r < a_u < a_s < a_t$

c) $a_u < a_r < a_t < a_s$

d) $a_u < a_r < a_s < a_t$

e) $a_u < a_t < a_r < a_s$

9. Imed-RS – Dadas as equações das retas (r): $x - 2y - 10 = 0$ e (s): $3x + 2y - 6 = 0$, representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, pode-se afirmar que a abscissa do ponto de interseção entre as retas r e s é:

a) -3

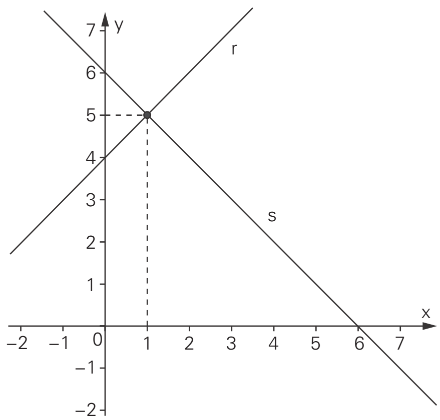
b) -2

c) 2

d) 4

e) 6

10. UFRGS-RS – A representação geométrica das retas r e s encontra-se desenhada no sistema de coordenadas cartesianas na imagem a seguir.



Assinale a alternativa que apresenta o sistema de equações lineares que pode representar as retas r e s da imagem acima.

a) $\begin{cases} -2x+3y=4 \\ 5x+5y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x-y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x+y=4 \\ x+y=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x+2y=3 \\ x+y=6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=0 \end{cases}$

11. Unicamp-SP – No plano cartesiano, a equação $|x-y| = |x+y|$ representa

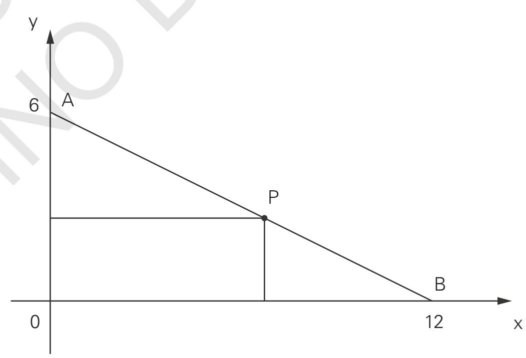
a) um ponto.

b) uma reta.

c) um par de retas paralelas.

d) um par de retas concorrentes.

12. PUC-RJ – Considere os pontos A = (0, 6) e B = (12, 0). Tomamos um ponto P sobre o segmento de reta $\overline{AB}$. Considere o retângulo R com um vértice na origem, um vértice em P e lados sobre os eixos x e y, conforme a figura abaixo.



a) Encontre a equação da reta r que passa pelos pontos A e B.

b) Sejam (x, y) as coordenadas do ponto P. Escreva, em função apenas de x, uma fórmula para a área do retângulo R.

c) Qual é a maior área possível para o retângulo R?

13. FGV-SP – Os pares (x, y) dados abaixo pertencem a uma reta (r) do plano cartesiano:

X	−4	−2	0	2	4
Y	−24	−14	−4	6	16

Podemos afirmar que

a) a reta (r) intercepta o eixo das abscissas no ponto de abscissa (− 4).

b) o coeficiente angular da reta (r) é − 5.

c) a reta (r) determina com os eixos cartesianos um triângulo de área 1,6.

d) y será positivo se, e somente se, $x > -\frac{4}{5}$.

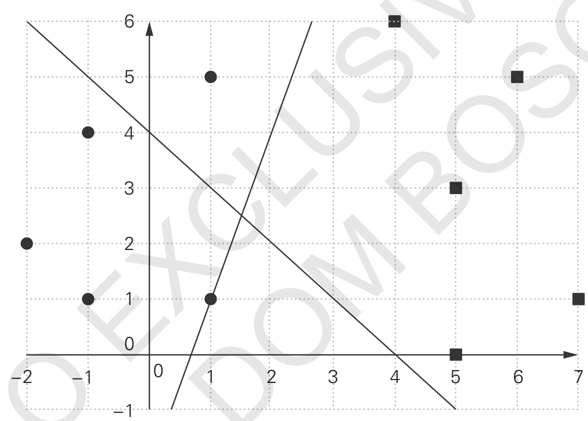
e) A reta (r) intercepta o eixo das ordenadas no ponto de abscissa $\frac{4}{5}$.

14. UFPR – Considere os conjuntos de pares ordenados

C = {(–2, 2), (–1, 1), (–1, 4), (1, 1), (1, 5)} e Q = {(4,6), (5,0), (5, 3), (6, 5), (7, 1)}.

Diremos que a reta r separa os pontos dos conjuntos C e Q quando nenhum elemento de C está à direita da reta r e nenhum elemento de Q está à esquerda da reta r.

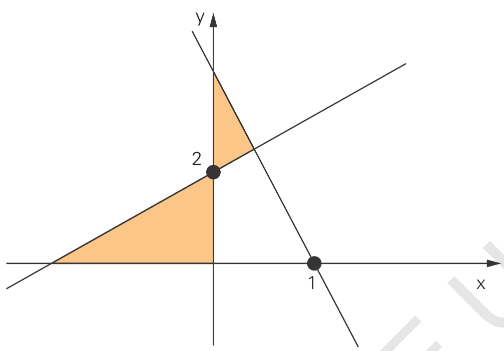
Na figura abaixo, podemos ver que a reta de equação y = 3x – 2 separa os pontos de C e Q. Por outro lado, a reta de equação y = – x + 4 não separa os pontos de C e Q, pois o par ordenado (1, 5) pertence ao conjunto C e está à direita dessa reta.



a) A reta de equação y = 2x +1 separa os pontos dos conjuntos C e Q? Justifique sua resposta.

b) Para quais valores de a ∈ ℝ a reta de equação y = ax – 3 separa os pontos dos conjuntos C e Q?

15. UEMG – No gráfico representado a seguir, uma das retas esboçadas tem inclinação igual a – 3 e a outra reta, inclinação igual a $\frac{1}{2}$. Sabendo-se disso, a área (em unidade de área) da região hachurada é

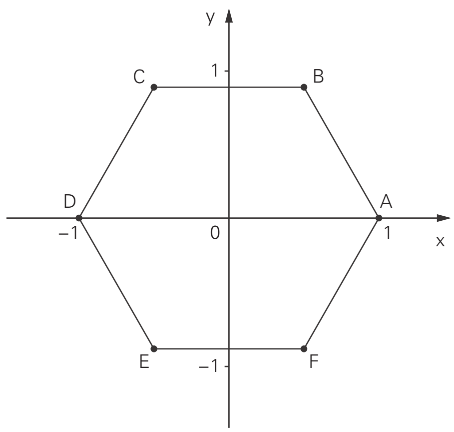


a) 6 u.a. **b)** $\frac{21}{5}$ u.a. **c)** $\frac{29}{7}$ u.a. **d)** $\frac{33}{7}$ u.a.

16. UDESC – Considere o prisma triangular com 8 u.c. de altura e a base sendo um triângulo ABC cujos vértices são os pontos de interseção das retas $2y = x$, $y + x = 3$ e $3y = ax$, com $a \in \mathbb{R}^*$. Se o volume desse prisma triangular é 12 u. v., o valor da soma das abscissas dos vértices do triângulo ABC é:

a) 5 **c)** 4 **e)** 1
b) 2 **d)** 3

17. UFRGS-RS – Os pontos A, B, C, D, E e F determinam um hexágono regular ABCDEF de lado 1, tal que o ponto A tem coordenadas (1, 0) e o ponto D tem coordenadas (–1, 0), como na figura abaixo.



A equação da reta que passa pelos pontos B e D é

a) $y = \sqrt{3}x$

b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

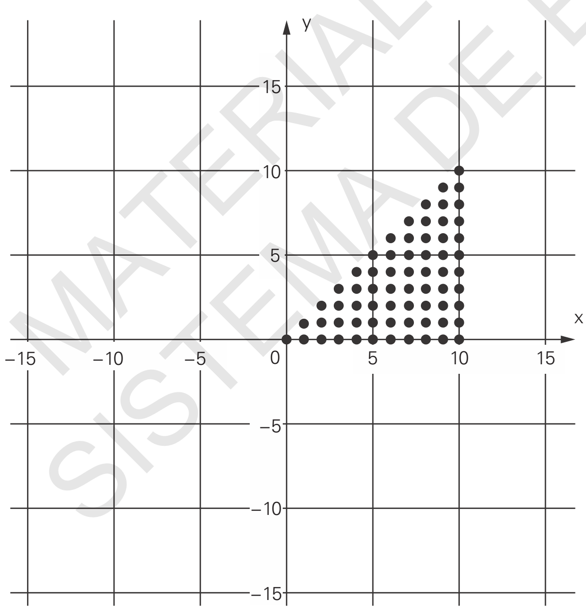
d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. Enem C5-H20

Para criar um logotipo, um profissional da área de design gráfico deseja construí-lo utilizando o conjunto de pontos do plano na forma de um triângulo, exatamente como mostra a imagem.



Para construir tal imagem utilizando uma ferramenta gráfica, será necessário escrever algebricamente o conjunto que representa os pontos desse gráfico.

Esse conjunto é dado pelos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tais que

a) $0 \leq x \leq y \leq 10$

b) $0 \leq y \leq x \leq 10$

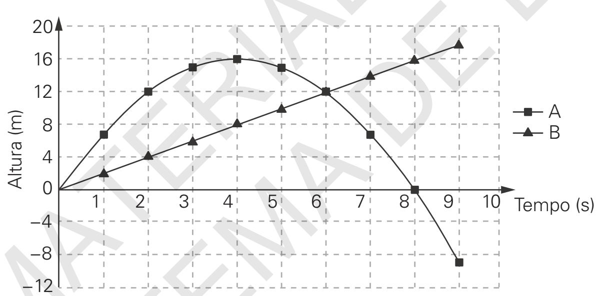
c) $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$

d) $0 \leq x + y \leq 10$

e) $0 \leq x + y \leq 20$

19. Enem C5-H22

Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

a) diminuir em 2 unidades.

b) diminuir em 4 unidades.

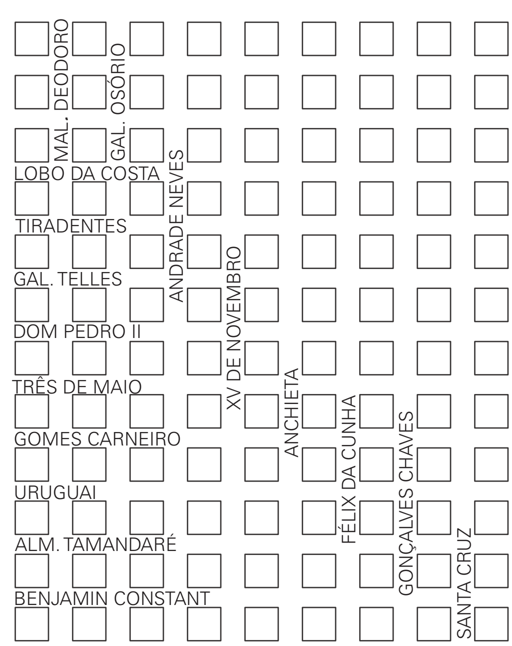
c) aumentar em 2 unidades.

d) aumentar em 4 unidades.

e) aumentar em 8 unidades.

20. IFSul-RS (adaptado) C2-H6

Observe a figura abaixo, na qual estão representadas algumas ruas de Pelotas.



Considere que:

1. As larguras das ruas sejam desprezíveis e o lado de cada quadra seja 01 (uma) unidade de medida;
2. Todas as quadras sejam quadradas de dimensões iguais;
3. A rua Gomes Carneiro seja o EIXO DAS ABSCISSAS;
4. A rua XV de Novembro seja o EIXO DAS ORDENADAS;
5. O cruzamento das ruas Tiradentes e Mal. Deodoro seja o PONTO A;
6. O cruzamento das ruas Alm. Tamandaré e Gonçalves Chaves seja o PONTO B.

A equação da reta que passa pelos pontos A e B é

a) $x + y + 1 = 0$
b) $x + y - 1 = 0$
c) $x - y - 1 = 0$
d) $x - y + 1 = 0$
e) $x + y + 2 = 0$

25

POSIÇÃO RELATIVA ENTRE RETAS E DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

- Posições relativas de duas retas
- Fórmula para cálculo da distância entre o ponto e a reta
- Inequações do 1º- grau no plano cartesiano

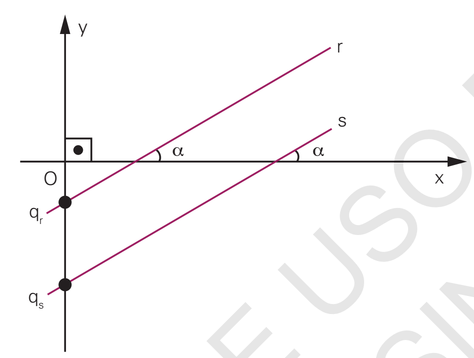
HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.
- Aplicar conhecimentos algébricos/geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.
- Resolver situações-problemas que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

Retas paralelas distintas

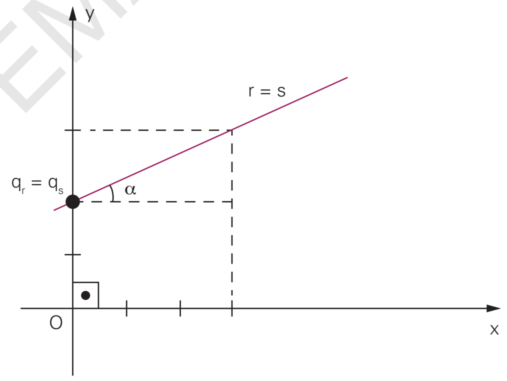
Duas retas com diferentes coeficientes lineares formam ângulos congruentes em relação ao eixo **x** (abscissa), ou seja, ambas têm o mesmo coeficiente angular. Desse modo, elas são denominadas **retas paralelas** entre si.



$$r \parallel s \quad \leftrightarrow \quad m_r = m_s \quad e \quad n_r \neq n_s$$

Retas paralelas coincidentes

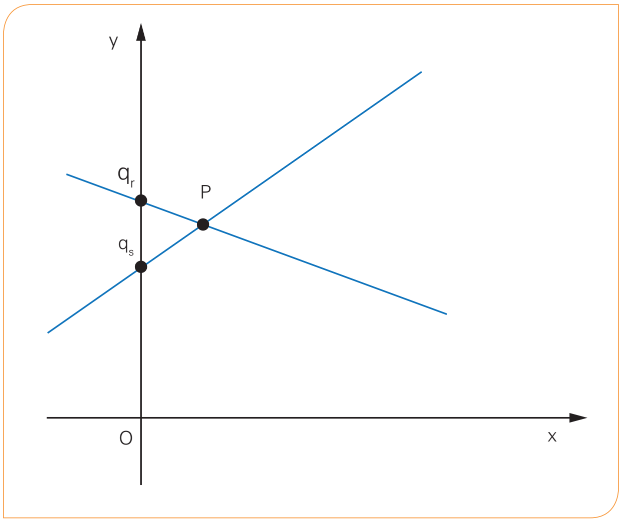
Duas retas com o mesmo coeficiente angular e o mesmo coeficiente linear são denominadas **retas coincidentes**, conforme o gráfico:



$$m_r = m_s \quad e \quad n_r = n_s$$

Retas concorrentes

Duas retas com diferentes coeficientes angulares e um ponto de interseção **P**, podendo ou não ter o mesmo coeficiente linear, são denominadas **retas concorrentes**.



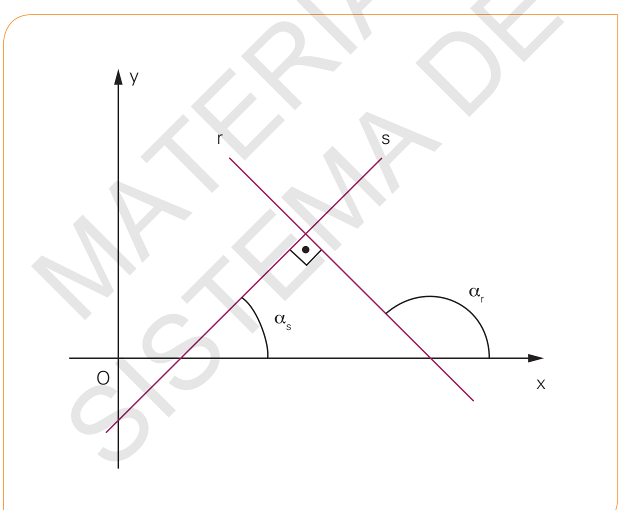
$m_r \neq m_s$

Observações:

- Se alguma das retas for paralela a algum dos eixos coordenados, a resolução do sistema se torna imediata.
- Se as retas forem concorrentes em um ponto **P**, para obter esse ponto, basta resolvermos o sistema formado pelas equações de **r** e **s**.

Retas perpendiculares entre si

Duas retas concorrentes que formam 90° entre si, não paralelas ao eixo **y**, são denominadas **retas perpendiculares**.



$r \perp s \rightarrow \alpha_r = \alpha_s + 90°$

Como $m_s = \text{tg}\ \alpha_s$, $m_r = -\dfrac{1}{m_s}$.

Logo, $r \perp s \rightarrow m_s \cdot m_r = -1$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Unioeste-PR – Os valores de k para que as retas $2x + ky = 3$ e $x + y = 1$ sejam paralelas e perpendiculares entre si, respectivamente, são:

a) $-\dfrac{3}{2}$ e 1.

b) – 1 e 1.

c) 1 e – 1.

d) – 2 e 2.

e) 2 e – 2.

Resolução

Para que as retas **r** e **s** sejam paralelas, seus coeficientes angulares devem ser iguais. Assim:

$$r: 2x + ky = 3 \rightarrow ky = -2x + 3 \rightarrow y = -\frac{2x}{k} + 3$$

Portanto, $m_r = -\dfrac{2}{k}$.

$s: x + y = 1 \rightarrow y = -x + 1$

Dessa forma, $m_s = -1$.

$m_r = m_s$

$-\dfrac{2}{k} = -1$

Logo, $k = 2$.

Para que as retas **r** e **s** sejam perpendiculares, $m_s \cdot m_r = -1$.

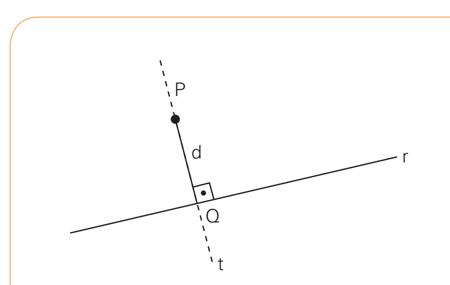
Assim, $-\dfrac{2}{k} \cdot (-1) = -1$.

Então, $k = -2$.

FÓRMULA PARA CÁLCULO DA DISTÂNCIA ENTRE O PONTO E A RETA

A distância de um ponto **P** a uma reta **r** corresponde à projeção ortogonal do ponto **P** à reta **r**.

Dados um ponto $P(x_p, y_p)$ e a reta **r** ($ax + by + c = 0$), temos:



Assim:

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a + b}}$$

Observação:

A distância de **P** é igual ao módulo do valor numérico obtido ao substituir as coordenadas de **P** no 1º membro da equação geral de **r**, dividido por $\sqrt{a+b}$.

Exemplo:

Vamos calcular a distância do ponto P(3, 4) à reta **r** (x + y − 3 = 0) utilizando a fórmula para calcular a distância do ponto à reta:

r: x + y − 3 = 0 → a = 1; b = 1; c = − 3
P (3, 4) → $x_P = 3$; $y_P = 4$

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a+b}} = \frac{|1\ \ 3+1\ \ 4-3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Portanto, d = $2\sqrt{2}$.

INEQUAÇÕES DO 1º GRAU NO PLANO CARTESIANO

Chamamos de **inequações do 1º grau** as inequações do tipo ax + by + c > 0, em que:

- **a**, **b** e **c** são constantes reais;
- **x** e **y** são variáveis reais.

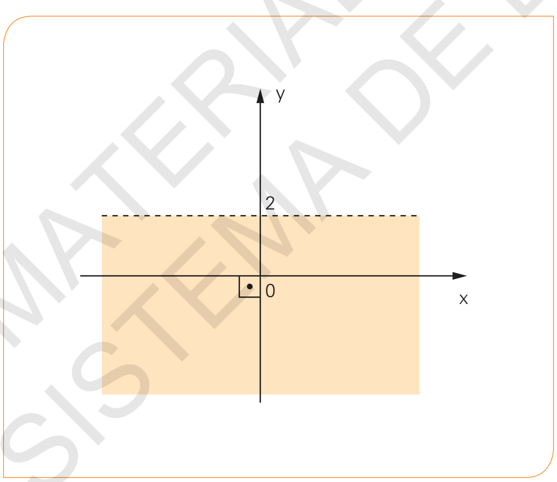
CASOS PARTICULARES

- **a = 0 e b ≠ 0**

Exemplo:

Vamos representar no plano os pontos que satisfazem à condição y − 2 < 0:

y − 2 < 0 → y < 2

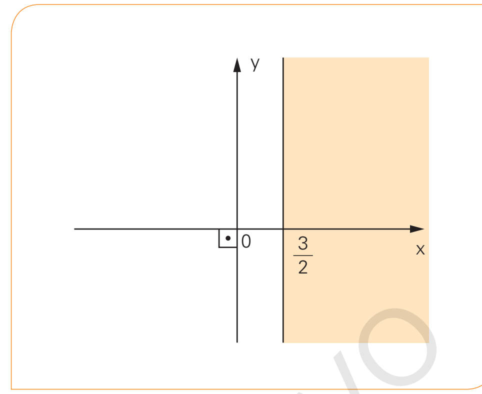


- **a ≠ 0 e b = 0**

Exemplo:

Vamos representar no plano os pontos que satisfazem à condição 3x − 2 ≥ 0:

$3x - 2 \geq 0 \rightarrow 3y \geq 2 \rightarrow x \geq \frac{3}{2}$



- **a = 0 e b = 0**

Exemplos:

1. 0x + 0y + 3 > 0.

A condição é satisfeita por todos os pontos P(x, y) do plano cartesiano.

2. 0x + 0y − 3 > 0.

Nenhum ponto do plano cartesiano pode satisfazer a essa condição, portanto, ela representa um conjunto vazio.

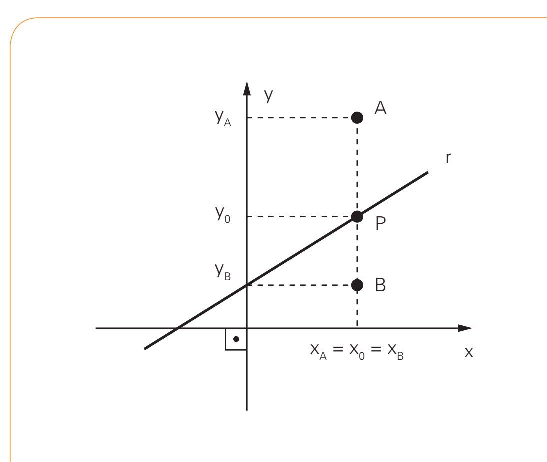
CASO GERAL

Agora analisaremos os casos em que as constantes reais **a** e **b** não são nulas.

Vamos considerar uma reta **r** do plano cartesiano de equação ax + by + c (a ≠ 0 e b ≠ 0).

Vamos considerar também a equação reduzida de **r** (y = mx + q), sendo $P(x_0, y_0)$ um ponto de **r**, sabendo que $y_0 = mx_0 + q$.

Agora levaremos em conta, no plano cartesiano, um ponto $A(x_A, y_A)$, situado "acima" de **r**, e um ponto $B(x_B, y_B)$, situado "abaixo" de **r**, de modo que $x_A = x_B = x_0$, em que x_0 é a abscissa de um ponto $P(x_0, y_0)$ da reta **r**.



Ao analisar o gráfico, concluímos que:

- para todos os pontos P(x, y) do plano situados "acima" de **r**, vale a relação: y > mx + q.
- para todos os pontos P(x, y) do plano situados "abaixo" de **r**, vale a relação: y < mx + q.

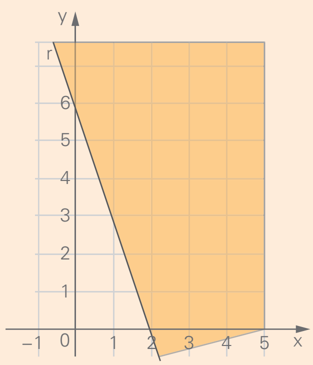
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2. Sistema Dom Bosco – Represente no plano cartesiano os pontos que satisfazem à seguinte condição: $3x + y - 5 \geq 0$.

Resolução

$3x + y - 5 \geq 0 \rightarrow y \geq -3x + 5$

Sendo **r** a reta de equação $y = -3x + 5$ (ou $3x + y - 5 = 0$), os pontos que satisfazem à condição $y \geq -3x + 5$ (ou $-3x + y + 5 = 0$) são aqueles situados "acima" de **r**, reunidos com os pontos de **r**, em um semiplano fechado.

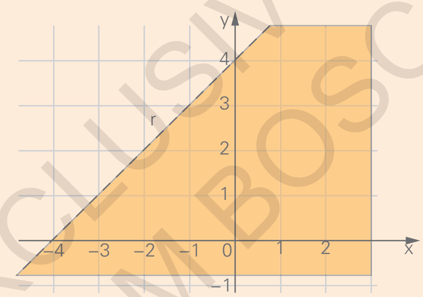


3. Sistema Dom Bosco – Represente no plano cartesiano os pontos que satisfazem à seguinte condição: $x - y + 4 > 0$.

Resolução

$x - y + 4 > 0 \rightarrow -y > -x - 4 \rightarrow$
$\rightarrow y < x + 4$

Sendo **r** a reta de equação $y = x + 4$ (ou $x - y + 4 = 0$), os pontos que satisfazem à condição $y < x + 4$ (ou $x - y + 4 > 0$) são aqueles do semiplano abaixo de **r**, em um semiplano aberto.

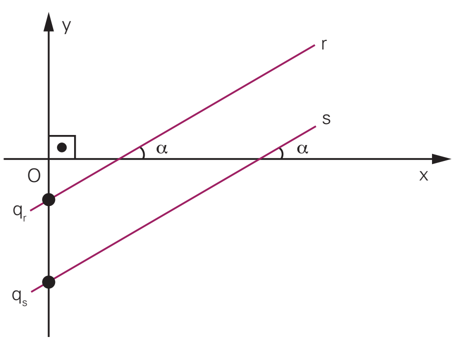


Ao observar os dois exercícios anteriores, notamos que o semiplano fechado contempla os valores da reta $ax + by + c = 0$, enquanto o semiplano aberto não contempla os valores da reta.

Para descobrir se o semiplano positivo ($ax + by + c > 0$) é o que está "acima" ou "abaixo" de **r**, devemos tomar um ponto no plano (fora de **r**), substituir na expressão $ax + by + c$ e verificar se o valor é positivo ou negativo.

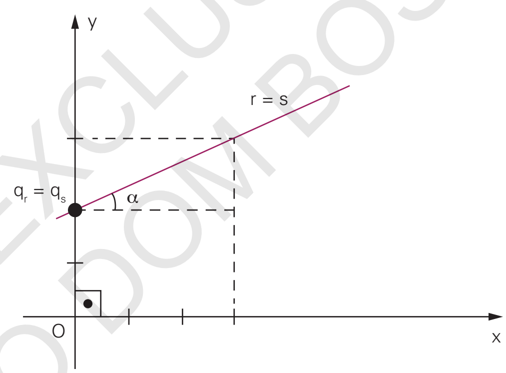
POSIÇÃO RELATIVA ENTRE RETAS

Retas paralelas distintas



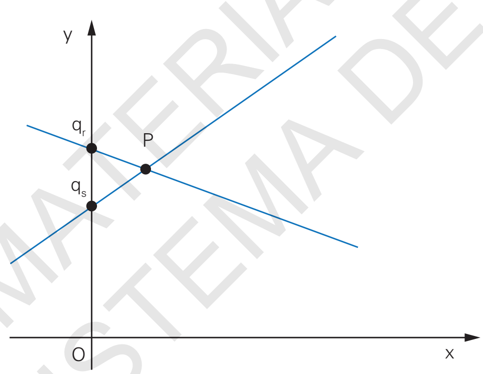
$m_r =$ m_s e $q_r \neq$ q_s

Retas paralelas coincidentes



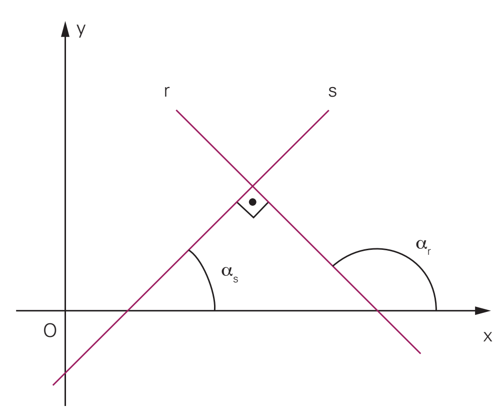
$m_r =$ m_s e $q_r =$ q_s

Retas coincidentes



$m_r =$ m_s

Retas perpendiculares entre si

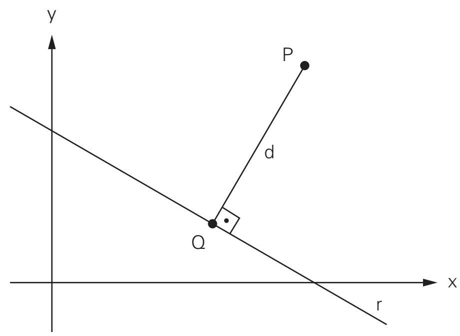


$m_s \cdot m_r$ $= -1$

ROTEIRO DE AULA

DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

$d = \dfrac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



Inequação do 1º grau no plano cartesiano

$ax + by + c = 0$

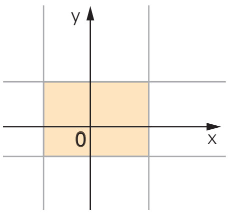
Em que **a**, **b** e **c** são constantes reais e **x** e **y** são variáveis reais.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

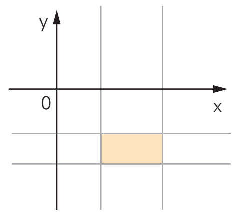
1. UFRGS-RS – Considere as desigualdades definidas por $|x + 5| \leq 2$ e $|y - 4| \leq 1$ representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Qual das regiões sombreadas dos gráficos abaixo melhor representa a região do plano cartesiano determinada pela interseção das desigualdades?

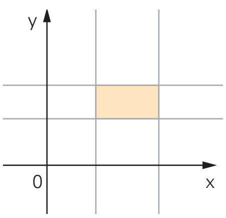
a)



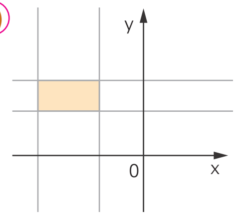
d)



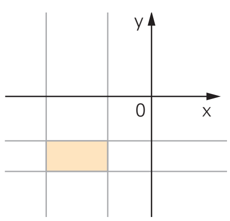
b)



e)



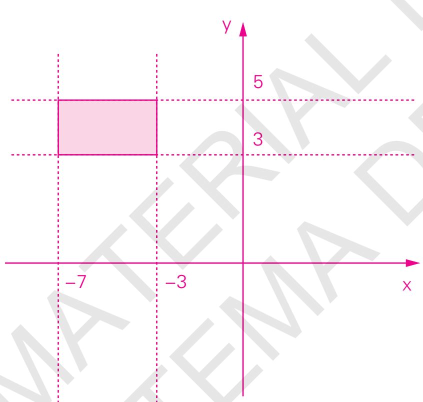
c)



$|x+5| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x+5 \leq 2 \rightarrow -7 \leq x \leq -3$

$|y-4| \leq 1 \rightarrow -1 \leq y-4 \leq 1 \rightarrow 3 \leq y \leq 5$

Representando essas duas regiões em um mesmo sistema cartesiano e determinando a intersecção entre elas, temos a seguinte região:



2. PUC-RS (adaptado) – Dois amigos caminham no plano xy ao longo de retas paralelas cujas equações são $2x + 5y = 7$ e $3x + my = 1$. Então, o valor de m é

a) $\frac{11}{2}$

b) $\frac{13}{2}$

c) $\frac{15}{2}$

d) $\frac{17}{2}$

e) $\frac{2}{5}$

Retas paralelas têm o mesmo coeficiente angular. Portanto:

r: $2x + 5y = 7 \rightarrow y = -\frac{2x}{5} + \frac{7}{5}$

Logo, $m_r = -\frac{2}{5}$.

s: $3x + my = 1 \rightarrow y = -\frac{3}{m}x + \frac{1}{3}$

Assim, $m_s = -\frac{3}{m}$.

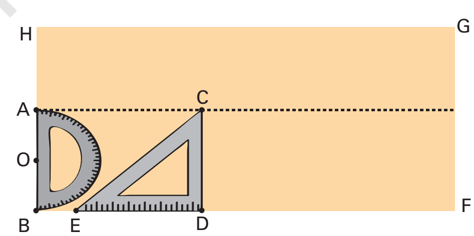
Portanto, $m_r = m_s \rightarrow -\frac{2}{5} = -\frac{3}{m}$.

Logo, $m = \frac{15}{2}$.

3. UERJ (adaptado) C5-H21

A figura abaixo representa a superfície plana de uma mesa retangular BFGH na qual estão apoiados os seguintes instrumentos para desenho geométrico, ambos de espessuras desprezíveis:

- um transferidor com a forma de um semicírculo de centro O e diâmetro $\overline{AB}$;
- um esquadro CDE, com a forma de um triângulo retângulo isósceles.



Considere as informações abaixo:

$\overline{ED}$ está contido em $\overline{BF}$.

$\overline{OA}$ está contido em $\overline{BH}$.

$\overline{AB} = 10$ cm.

$\overline{BD} = 13$ cm.

Calculando a medida, em centímetros, do menor segmento que liga a borda do transferidor à borda do esquadro, obtemos:

a) $(4\sqrt{2}+5)$ cm.

b) $(4\sqrt{2}-5)$ cm.

c) $4\sqrt{2}$ cm.

d) 5 cm.

e) $8\sqrt{2}$ cm.

Adotando o ponto B como a origem do sistema de coordenadas, temos um semicírculo de centro O = (0, 5) e raio 5, além de uma reta $\overline{EC}$ que forma 45° com o eixo horizontal. A equação é igual a: m = tg 45° = 1.

$y - 0 = 1 \cdot (x - 3) \rightarrow y = x - 3 \rightarrow x - y - 3 = 0$

O segmento perpendicular à reta $\overleftrightarrow{EC}$, cuja reta suporte passa por O, é o menor segmento que une a borda do esquadro à borda do transferidor.

Logo, a distância do ponto O à reta $\overleftrightarrow{EC}$ é igual a:

$$d = \frac{|0-5-3|}{\sqrt{1+(-1)}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Assim, a medida será: $\left(4\sqrt{2}-5\right)$ cm.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. UFJF-MG – Dados os pontos A = (1, 2), B = (3, 5), C = (1, 1) e D = (2, 3), considere as afirmações:

I. Os pontos A, B e D são colineares.

II. Uma reta perpendicular à reta determinada pelos pontos A e B tem coeficiente angular $m = -\frac{2}{3}$.

III. A distância do ponto A à reta determinada pelos pontos B e C é 10 unidades de comprimento.

É **CORRETO** afirmar que:

a) Apenas a afirmação II é verdadeira.
b) Apenas a afirmação III é verdadeira.
c) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
d) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
e) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

I. Falsa, pois:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5+9+4-6-10-3 = -1 \neq 0$$

II. Verdadeira, pois o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $m_{AB} = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$.

Logo, qualquer reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ tem coeficiente angular igual a $-\frac{2}{3}$.

III. Falsa. A equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é:

$$y-1 = \frac{5-1}{3-1}(x-1) \leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$$

Portanto, a distância do ponto A da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é igual a:

$$d = \frac{|2\cdot 1-2-1|}{\sqrt{2^2+(-1)}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ \text{u.c.}$$

5. Mackenzie-SP (adaptado) – Qual a equação da mediatriz do segmento que une os pontos P = (1, –2) e Q = (5, 4)?

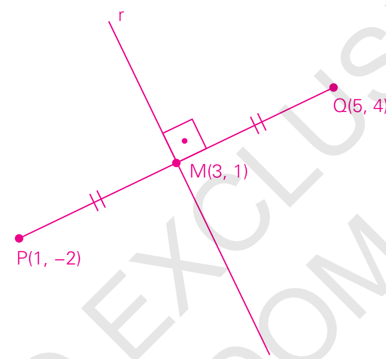
Primeiramente encontramos o coeficiente angular da equação da reta s que passa pelos pontos P e Q:

$$m_s = \frac{4-(-2)}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Sendo a reta r a mediatriz do segmento PQ, temos $r \perp \overline{PQ}$.

Assim, $m_s \cdot m_r = -1 \rightarrow \frac{3}{2} \cdot m_r = -1 \rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$.

De acordo com o gráfico, obtemos o ponto em que a mediatriz intersecta o segmento PQ.



$$x_M = \frac{1+5}{2} = 3 \quad \text{e} \quad y_M = \frac{4+(-2)}{2} = 1$$

Logo, M(3, 1).

Com M e m_r, obtemos a equação da reta r:

$$y-1 = -\frac{2}{3}\cdot(x-3) \rightarrow 3y-3 = -2x+6 \rightarrow 2x+3y-3-6 = 0$$

Portanto, a equação da reta r é $2x + 3y - 9 = 0$.

6. UEMG – Dadas as equações de reta r: $x + y - 6 = 0$ e s: $2x - y = 0$ em um dado plano cartesiano de centro O. As retas r e s são concorrentes no ponto P, e a reta r intercepta o eixo das abscissas no ponto Q. O volume do sólido formado pela rotação da figura plana formada pelos pontos OPQ em torno do lado OQ é: (use $\pi \cong 3$)

a) 32 cm³
b) 64 cm³
c) 96 cm³
d) 88 cm³

Como o volume dado está em cm³, vamos supor que o plano xy esteja graduado em centímetros.

A reta r intersecta o eixo x (abscissas) no ponto Q = (6, 0). E a abscissa do ponto obteremos analisando as equações de r e s:

$y - 2x = 0 \rightarrow y = 2x$

$x + y - 6 = 0 \rightarrow x + 2x = 6 \rightarrow x = 2$

$y = 2x = 2 \cdot 2 = 4$

Logo, P = (2, 4).

Convém que o volume do sólido solicitado corresponde à soma dos volumes de dois cones cujos raios da base medem 4 cm e cujas alturas medem, respectivamente, 2 cm e 4 cm. Assim, temos:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4$$

Portanto, $V \cong 96$ cm³.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. EEAR-SP – A reta s que passa por P(1,6) e é perpendicular a r: $y = \frac{2}{3}x + 3$ é

a) $y = \frac{3}{2}x$

b) $y = x + 5$

c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$

d) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$

8. UPE – No plano cartesiano, a reta s: $4x - 3y + 12 = 0$ intersecta o eixo das abscissas no ponto A e o eixo das ordenadas no ponto B. Nessas condições, qual é a distância entre os pontos A e B?

a) 5 **c)** $2\sqrt{2}$ **e)** $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{5}$ **d)** 2

9. UFJF-MG – Considere as retas $y = 5x + 8$ e $y = -5x + 8$. É CORRETO afirmar que:

a) As retas são paralelas.

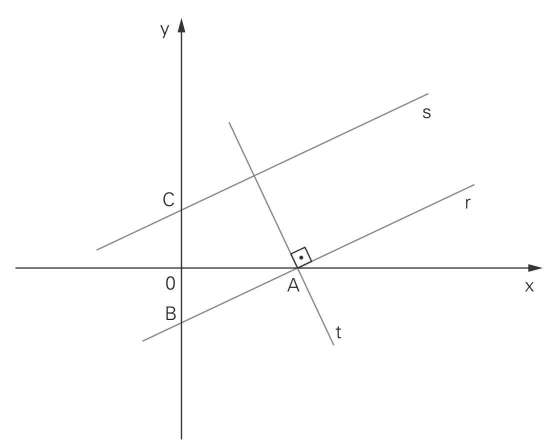
b) As retas são perpendiculares.

c) O ponto (4, 28) não pertence a nenhuma das duas retas.

d) O ponto (1, 10) pertence a pelo menos uma das duas retas.

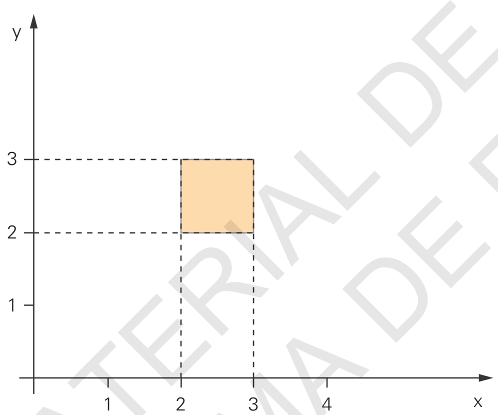
e) As retas possuem um ponto em comum.

10. UPF-RS (adaptado) – Sobre a figura a seguir, sabe-se que a equação de r é $2y = x - 3$; que os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo das abscissas; que as retas r e s são paralelas; e que t é perpendicular a r.



Nessas condições, qual a equação reduzida da reta t?

11. PUC-RS – Considere a figura abaixo, onde um quadrado está representado no primeiro quadrante do plano xy.



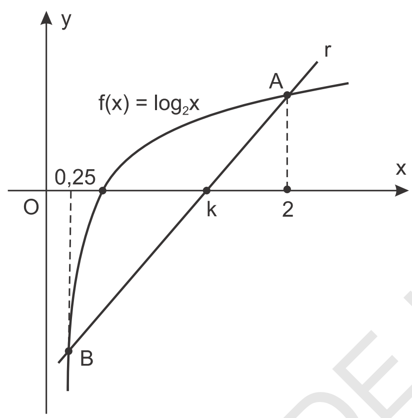
Para que uma reta da forma y = x + m não intercepte qualquer ponto do quadrado, devemos ter

a) $m < 3$
b) $m < 0$
c) $m > 0$
d) $m > -1$
e) $m < -1$ ou $m > 1$

12. FGV-SP – Sejam m e n números reais e $\begin{cases} 3x + my = n \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ um sistema de equações nas incógnitas x e y. A respeito da representação geométrica desse sistema no plano cartesiano, é correto afirmar que, necessariamente, é formada por duas retas

a) paralelas distintas, se $m = 6$ e $n \neq 3$.
b) paralelas coincidentes, se $m = 6$ e $n \neq 3$.
c) paralelas distintas, se $m = 6$.
d) paralelas coincidentes, se $n = 3$.
e) concorrentes, se $m \neq 0$.

13. UFPR (adaptado) – Considere o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ e a reta r que passa pelos pontos A e B, como indicado na figura abaixo, sendo k a abscissa do ponto em que a reta r intersecta o eixo Ox. Qual é o valor de k?



14. FGV-SP – No plano cartesiano, os pontos (x, y) que satisfazem a equação $x^2 - 5x + 4 = 0$ são representados por

a) um par de retas paralelas.
b) dois pontos do eixo das ordenadas.
c) dois pontos do eixo das abscissas.
d) uma parábola com abscissa do vértice igual a $-\frac{5}{2}$.
e) uma parábola com concavidade voltada para cima.

15. UECE – Em um sistema de coordenadas cartesiano usual os pontos P = (1, 2) e Q = (4, 6) são vértices do triângulo PQM. Se o vértice M está sobre a reta paralela ao segmento PQ que contém o ponto (8, 6), então a medida da área do triângulo PQM é

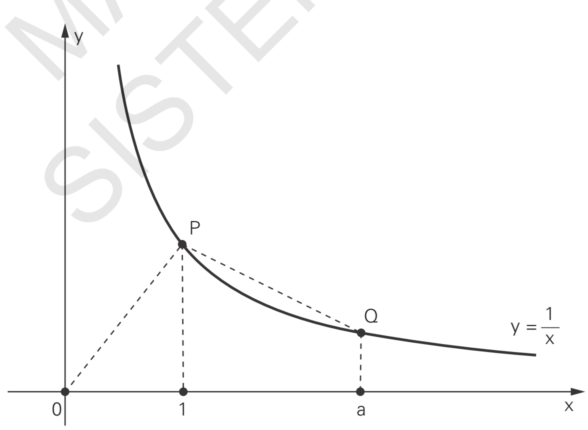
u.a. = unidade de área

a) 7 u.a.
b) 8 u.a.
c) 9 u.a.
d) 10 u.a.

16. UFRGS-RS – As retas de equações $y = ax$ e $y = -x + b$ interceptam-se em um único ponto cujas coordenadas são estritamente negativas. Então, pode-se afirmar que

a) $a > 0$ e $b > 0$.
b) $a < 0$ e $b < 0$.
c) $a < -1$ e $b > 0$.
d) $a > 0$ e $b < 0$.
e) $a < -1$ e $b < 0$.

17. Unicamp-SP – A figura abaixo exibe o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, definida para todo número real $x > 0$. Os pontos P e Q têm abscissas $x = 1$ e $x = a$, respectivamente, onde a é um número real e $a > 1$.



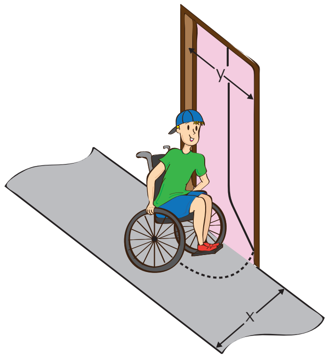
a) Considere o quadrilátero T com vértices em (0, 0), P, Q e (a, 0). Para $a = 2$, verifique que a área de T é igual ao quadrado da distância entre P e Q.

b) Seja r a reta que passa pela origem e é ortogonal à reta que passa por P e Q. Determine o valor de a para o qual o ponto de interseção da reta r com o gráfico da função f tem ordenada $y = \frac{a}{2}$.

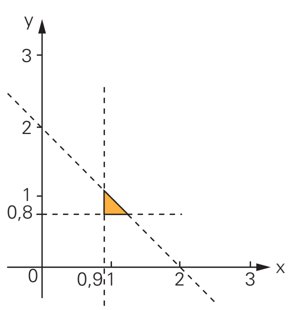
ESTUDO PARA O ENEM

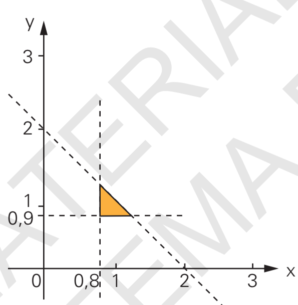
18. UFTM-MG C2-H6

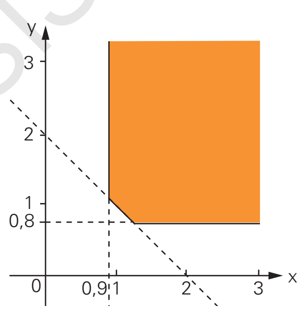
Uma pessoa em cadeira de rodas necessita de espaço mínimo para a rotação da sua cadeira em um corredor que dá acesso a uma porta. De acordo com as normas técnicas da obra, a largura mínima (x) do corredor deve ser de 90 cm, a da porta (y), de 80 cm e, além disso, é necessário que a soma dessas duas medidas seja igual ou maior que 2 m.

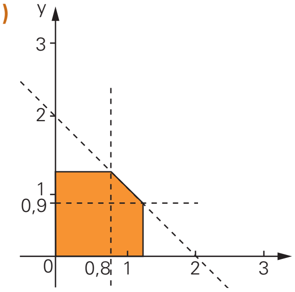


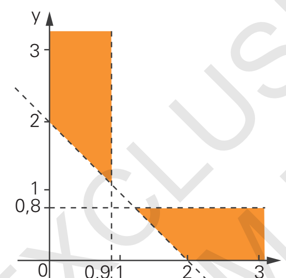
Uma representação no plano cartesiano ortogonal apenas dos pares (x, y), com ambas as coordenadas dadas em metros, que atendem às normas técnicas da obra, é

a)


b)


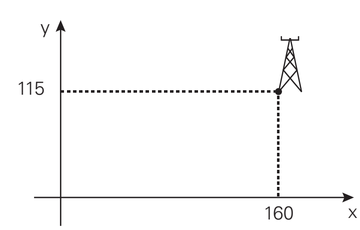
c)


d)


e)


19. UFSM-RS C2-H8

A figura mostra a localização no plano cartesiano de uma torre T de transmissão de energia.



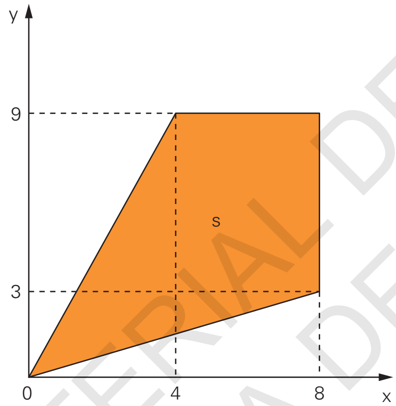
Duas outras torres devem ser instaladas em posições diferentes sobre a reta $y = \frac{3}{4}x - 5$, de modo que a distância entre cada uma dessas torres e a torre T seja igual a 200 metros.

Os pontos de localização dessas torres são iguais a

a) (20, 10) e (160, 315)
b) (0, –5) e (320, 235)
c) (0, –5) e (160, 315)
d) (–40, 115) e (320, 235)
e) (–40, 115) e (160, 315)

20. Enem C5-H23

Uma região de uma fábrica deve ser isolada, pois nela os empregados ficam expostos a riscos de acidentes. Essa região está representada pela porção de cor cinza (quadrilátero de área S) na figura.



Para que os funcionários sejam orientados sobre a localização da área isolada, cartazes informativos serão afixados por toda a fábrica. Para confeccioná-los, o programador utilizará um software que permite desenhar essa região a partir de um conjunto de desigualdades algébricas.

As desigualdades que devem ser utilizadas no referido software, para o desenho da região de isolamento, são

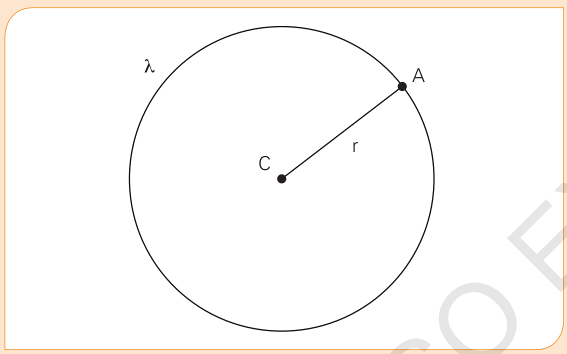
a) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $x \leq 9$
b) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$
c) $3y - x \geq 0$; $2y - x \leq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$
d) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 8$; $x \leq 9$
e) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$

EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA - EQUAÇÃO REDUZIDA E EQUAÇÃO GERAL

26

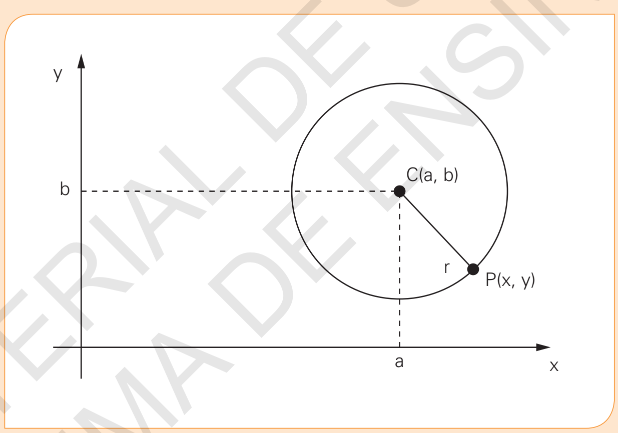
CIRCUNFERÊNCIA

A figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo é denominada **circunferência**.



EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

Vamos considerar uma circunferência de centro C(a, b) e raio **r**.



Como a distância **d** de um ponto P(x, y) qualquer pertencente à circunferência até o centro C(a, b) é constante, a seguinte condição é imposta para obtermos a equação da circunferência:

$$d_{PC} = \text{raio} = r$$

Assim:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Elevando-se os dois membros ao quadrado, obtemos a **equação reduzida da circunferência**.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

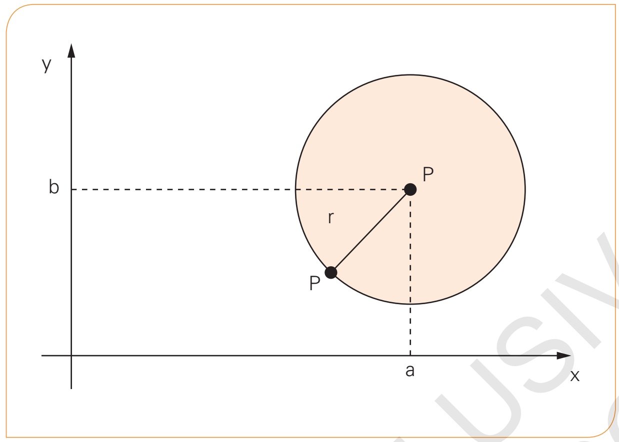
- Circunferência
- Equação reduzida da circunferência
- Equação geral da circunferência

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situações-problemas que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.

Observação:

O gráfico da relação $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant r^2$ é um círculo de centro C(a, b) e raio **r**, pois é uma relação satisfeita pelos pontos **P**, tais que $d_{PC} \leqslant r$.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Obtenha a equação reduzida da circunferência de centro **C** e raio **r**.

a) C(2, 5) e $r = \sqrt{6}$

Resolução

Sendo a = 2, b = 5, temos:

$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 \rightarrow (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 6$

b) C(7, –2) e r = 3

Resolução

Sendo a = 7, b = –2, temos:

$(x - 7)^2 + [y - (-2)]^2 = 3^2 \rightarrow (x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 9$

c) C(–5, 0) e $r = \dfrac{2}{3}$

Resolução

Sendo a = –5, b = 0, temos:

$[(x - (-5)]^2 + (y - 0)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \rightarrow (x + 5)^2 + y^2 = \dfrac{4}{9}$

d) C(0, –2) e r = 0,2

Resolução

Sendo a = 0, b = –2, temos:

$(x - 0)^2 + [y - (-2)]^2 = (0{,}2)^2 \rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 0{,}04$

2. Sistema Dom Bosco – Obtenha o centro **C** e o raio **r** das circunferências com equações.

a) $x^2 + y^2 = 100$

Resolução

Sendo a = 0, b = 0 → C(0, 0), temos:

$r^2 = 1\,002 \rightarrow r = \sqrt{100} \rightarrow r = 10$

b) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 7$

Resolução

Sendo a = 3, b = 5 → C(3, 5), temos:

$r^2 = 7 \rightarrow r = \sqrt{7}$

EQUAÇÃO GERAL DA CIRCUNFERÊNCIA

Por meio da equação reduzida da circunferência de centro C(a, b) e raio **r**, encontramos a equação geral da circunferência:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Ao desenvolver os quadrados e isolar os termos da equação no primeiro membro, obtemos:

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Calculando $-2a = d$, $-2b = f$ e $a^2 + b^2 - r^2 = g$, obtemos a **equação geral da circunferência:**

$$x^2+y^2+dx+fy+g=0$$

Devemos notar que:

$$-2a = d \to 2a = -d \to a=-\frac{d}{2}$$

$$-2b = f \to 2b = -f \to b=-\frac{f}{2}$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = g \to r^2 = a^2 + b^2 - g \to r=\sqrt{a^2+b^2-g}$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

3. Sistema Dom Bosco – Por meio da equação reduzida da circunferência, obtenha a equação geral da circunferência de centro C(5, –2) e raio $\sqrt{7}$.

Resolução

De acordo com o enunciado:

C(5, –2) e $r=\sqrt{7}$

a = 5, b = –2

Substituindo os valores na equação reduzida da circunferência, temos:

$$(x-5)^2+[y-(-2)]^2=\left(\sqrt{7}\right)^2$$

$$x^2-10x+25+y^2+2y+4=7$$

$$x^2+y^2-10x+2y+25+4-7=0$$

Portanto, a equação geral da circunferência será:

$$x^2+y^2-10x+2y+22=0$$

4. Sistema Dom Bosco – Por meio da equação geral $x^2 + y^2 - 16x + 8y - 10 = 0$, obtenha o centro e o raio da circunferência.

Resolução

Sendo:

d = –16; f = 8; g = –10

Para o cálculo de centro C(a, b), temos:

$$a=-\frac{d}{2}\to a=-\frac{-16}{2}\to a=8$$

$$b=-\frac{f}{2}\to b=-\frac{8}{2}\to b=-4$$

Assim:

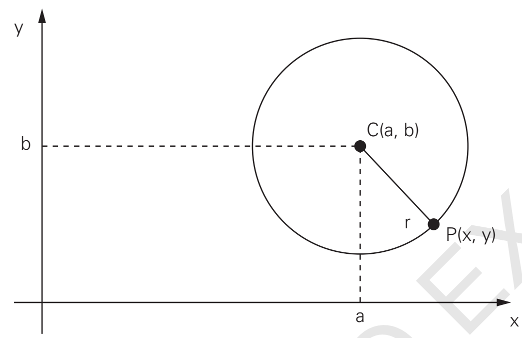
$$r=\sqrt{a^2+b^2-g}\to r=\sqrt{8^2+(-4)^2-(-10)}\to$$

$$\to r=\sqrt{90}\to r=3\sqrt{10}$$

Logo, C(8, –4) e $r = 3\sqrt{10}$.

ROTEIRO DE AULA

EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA – EQUAÇÃO REDUZIDA



$(x - a)^2$ + $(y - b)^2$ $= r^2$

EQUAÇÃO GERAL

Equação geral da circunferência

$x^2 + y^2 + dx + fy + g = 0$

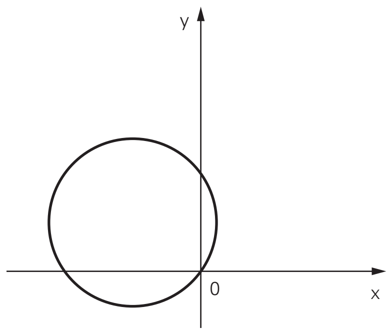
Centro da circunferência C(a, b) e raio r

$a = -\dfrac{d}{2}$ $b = -\dfrac{f}{2}$

$r = \sqrt{a^2 + b^2 - g}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unisc – Observando o círculo abaixo, representado no sistema de coordenadas cartesianas, identifique, entre as alternativas apresentadas, a equação que o representa.



a) $x^2+(y+2)^2=10$
b) $(x+3)^2+y^2=10$
c) $(x+3)^2+(y+2)^2=13$
d) $(x+3)^2+(y-2)^2=13$
e) $(x-3)^2+(y+2)^2=13$

Sabemos que o centro da circunferência será um ponto do segundo quadrante. Dessa maneira, a equação da circunferência vai ser $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$, pois seu centro é o ponto $(-3, 2)$.

2. UEG-GO (adaptado) – Um espelho em formato de circunferência foi pendurado em uma parede. Considerando o canto inferior esquerdo como a origem de um sistema cartesiano, o espelho pode ser representado pela equação da circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7{,}84 = 0$. Dessa forma, constata-se que o espelho está a uma altura do chão de

a) 1,00 metro
b) 1,55 metro
c) 1,60 metro
d) 1,74 metro
e) 1,80 metro

Da equação $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7{,}84 = 0$, temos:
$d = -4;\ f = -4;\ g = 7{,}84$

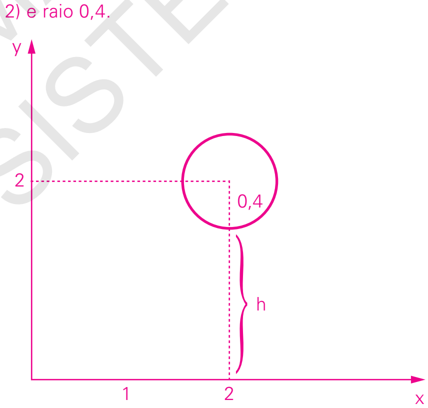
$$a = -\frac{d}{2} \rightarrow d = -\frac{-4}{2} \rightarrow d = 2$$

$$b = -\frac{f}{2} \rightarrow b = -\frac{-4}{2} \rightarrow b = 2$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - g} \rightarrow r = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 - 7{,}84} \rightarrow r = \sqrt{0{,}16} \rightarrow r = 0{,}4$$

Logo, $C(2, 2)$ e $r = 0{,}4$.

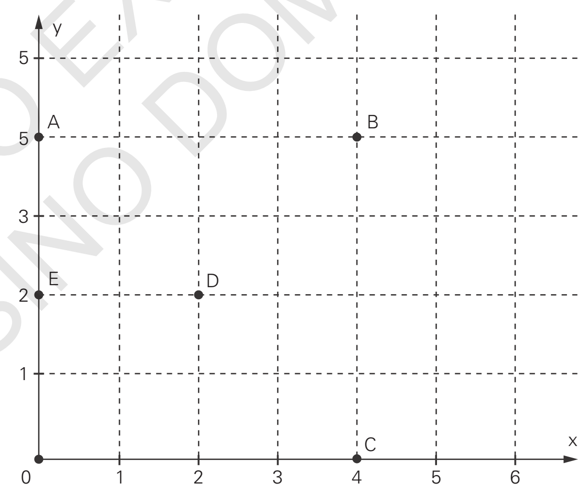
O espelho é representado por uma circunferência de centro (2, 2) e raio 0,4.



Assim, temos $h = 2 - 0{,}4 \rightarrow h = 1{,}60$.
Portanto, a altura h do espelho a partir do chão será 1,60 m.

3. Enem **C5-H22**

Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros", seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A(0; 4), B(4; 4), C(4; 0), D(2; 2) e E(0; 2).



Passando pelo ponto A, qual equação forneceria a maior pontuação?

a) $x = 0$
b) $y = 0$
c) $x^2 + y^2 = 16$
d) $x^2 + (y - 2)^2 = 8$
e) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

Afirmando que ABCO é um quadrado, e como uma reta transitando por A pode atingir no máximo os pontos C e D, compreendemos que a pontuação maior é obtida com a circunferência de centro em D(2, 2) e raio $2\sqrt{2}$. Sendo assim:
$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = (2\sqrt{2})^2 \leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$
Essa circunferência passa pelos pontos A, B e C.

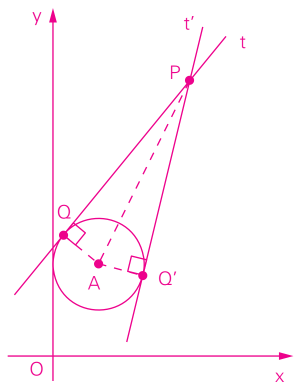
Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

4. Fuvest-SP – São dados, no plano cartesiano, o ponto P de coordenadas (3, 6) e a circunferência C de equação $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$. Uma reta t passa por P e é tangente a C em um ponto Q. Então a distância de P a Q é

a) $\sqrt{15}$
b) $\sqrt{17}$
c) $\sqrt{18}$
d) $\sqrt{19}$
e) $\sqrt{20}$

A circunferência C tem centro no ponto A(1, 2) e raio igual a 1. Assim, em consenso com as informações, observe a figura:



Sendo $\overline{PQ} = \overline{PQ}'$ e $\overline{AQ} = \overline{AQ}' = 1$, temos:

$\overline{PA}^2 = (3-1)^2 + (6-2)^2 \rightarrow \overline{PA}^2 = 2^2 + 4^2 \rightarrow$

$\rightarrow \overline{PA}^2 = 4 + 16 \rightarrow \overline{PA}^2 = 20$

Assim, $\overline{PQ}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{AQ}^2 \rightarrow \overline{PQ}^2 = 20 - 1 \rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{19}$.
Portanto, a distância de P a Q é $\sqrt{19}$ u.c.

5. UFRGS-RS – A área de um quadrado inscrito na circunferência de equação $x^2 - 2y + y^2 = 0$ é:

a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) $\sqrt{2}$
d) 2
e) $2\sqrt{2}$

Resolvendo a equação, temos:
$x^2 - 2y + y^2 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 + 1$

$x^2 + (y-1)^2 = 1 \rightarrow x^2 - 2y + y^2 = 0$

$x^2 + y^2 - 2y = 0$

$d = 0;\ f = -2;\ g = 0$

$a = -\frac{d}{2} \rightarrow a = \frac{0}{2} \rightarrow a = 0$

$b = -\frac{f}{2} \rightarrow b = -\frac{(-2)}{2} \rightarrow b = 1$

$r = \sqrt{a^2 + b^2 - g} \rightarrow r = \sqrt{0^2 + 1^2 - 0} \rightarrow r = 1$

Logo, C(0, 1) e r = 1.

Todo quadrado é um losango. Desse modo, sua área pode ser calculada como a dimensão do produto de suas diagonais. A diagonal d desse quadrado é o diâmetro da circunferência. Portanto, d = 2.
Sua área será obtida por $A = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$.

6. Espcex-SP – Uma circunferência tem centro no eixo das abscissas, passa pelo ponto (4, 4) e não intercepta o eixo das coordenadas. Se a área do círculo definido por essa circunferência é 17π, a abscissa de seu centro é

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 7

Como a área do círculo é 17π, teremos:
$A = \pi \cdot r^2 = 17\pi$, em que r é a medida do raio do círculo:
$r^2 = 17$
Como a circunferência tem centro no eixo das abscissas, C(a, 0) é centro da circunferência.
Logo, $(x - a)^2 + y^2 = 17$.
Como o ponto (4, 4) faz parte da circunferência, teremos:

$(x - a)^2 + y^2 = 17$
$(4 - a)^2 + 4^2 = 17$
$(4 - a)^2 = 17 - 16$
$(4 - a)^2 = 1$
$4 - a = 1$ ou $4 - a = -1$
Logo:
$4 - a = 1 \rightarrow a = 3$
$4 - a = -1 \rightarrow a = 5$

Portanto, a circunferência tem equação $(x-3)^2 + y^2 = 17$ ou $(x-5)^2 + y^2 = 17$.
Analisando a circunferência $(x-3)^2 + y^2 = 17$, podemos ver que ela intercepta o eixo das ordenadas, pois a equação $(0-3)^2 + y^2 = 17$ tem solução real.

Já $(x-5)^2 + y^2 = 17$ não corta o eixo das ordenadas, pois a equação $(0-5)^2 + y^2 = 17$ tem solução real.
Sendo assim, a abscissa do centro da circunferência é 5.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UPE – Em qual das alternativas a seguir o ponto P pertence à circunferência β?

a) $P(5,\ 6);\ \beta: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 4$

b) $P(1,\ 2);\ \beta: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$

c) $P(1,\ 5);\ \beta: x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$

d) $P(1,\ 3);\ \beta: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$

e) $P(3,\ 1);\ \beta: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$

8. IFAL – A equação da circunferência que tem um dos diâmetros com extremidades nos pontos A(– 1, 3) e B(3, – 5) é dada por:

a) $(x-1)^2+(y+1)^2=20$

b) $(x+1)^2+(y-2)^2=20$

c) $(x-2)^2+(y+4)^2=80$

d) $(x-1)^2+(y-1)^2=80$

e) $(x+2)^2+(y-4)^2=20$

9. Cefet-MG – Considere as circunferência $\lambda_1:(x+2)^2+(y+1)^2=5$ e $\lambda_2:(x-4)^2+(y-3)^2=9$.

A área do triângulo cujos vértices são os centros dessas circunferências e o ponto $P\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$, em unidades de área, é igual a

a) $\frac{13}{2}$

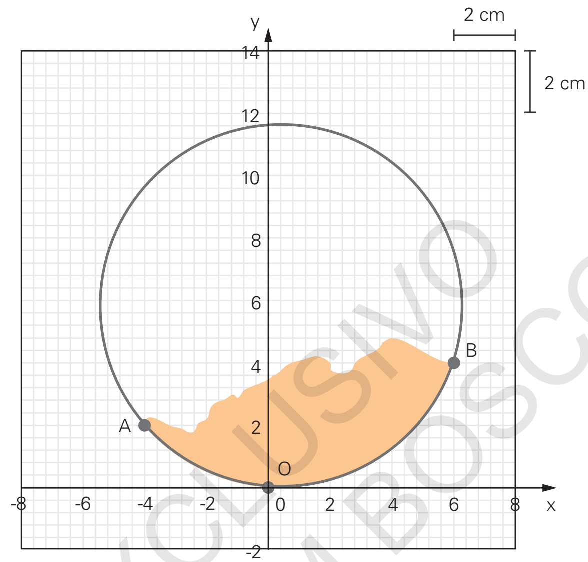
b) $\frac{11}{2}$

c) $\frac{9}{4}$

d) $\frac{7}{4}$

e) $\frac{5}{4}$

10. UNESP – Uma expedição arqueológica encontrou um pedaço de um prato de cerâmica antigo, supostamente circular. Para estimar o tamanho do prato, os arqueólogos desenharam o pedaço de cerâmica encontrado, em tamanho real, em um plano cartesiano de origem O(0, 0). A circunferência do prato passa pela origem do plano cartesiano e pelos pontos A(–4, 2) e B(6, 4), como mostra a figura.



a) A área do pedaço de cerâmica é aproximadamente igual à área do triângulo ABO. Calcule a área desse triângulo, em cm².

b) Calcule as coordenadas do ponto em que estaria localizado o centro do prato cerâmico circular nesse sistema de eixos cartesianos ortogonais.

11. Espcex-SP – Sejam dados a circunferência $\lambda: x^2+y^2+4x+10y+25=0$ e o ponto P, que é simétrico de (–1, 1) em relação ao eixo das abscissas. Determine a equação da circunferência concêntrica à λ e que passa pelo ponto P.

a) $\lambda: x^2+y^2+4x+10y+16=0$

b) $\lambda: x^2+y^2+4x+10y+12=0$

c) $\lambda: x^2-y^2+4x-5y+16=0$

d) $\lambda: x^2+y^2-4x-5y+12=0$

e) $\lambda: x^2-y^2-4x-10y-17=0$

12. UPF-RS – Considere uma circunferência C definida pela equação x + y = 36. O ponto P de coordenadas (x, 4) pertence a essa circunferência e está localizado no 1º quadrante. Considerando que o ponto O é o centro da circunferência e o ângulo α é formado pelo segmento OP com o lado positivo do eixo x, os cossenos dos ângulos α e $(180° - \alpha)$ serão iguais a:

a) $\frac{5}{6}$ e $-\frac{5}{6}$

b) $\frac{2}{3}$ e $-\frac{2}{3}$

c) $\frac{5}{6}$ e $\frac{4}{5}$

d) $\frac{2\sqrt{5}}{6}$ e $-\frac{2\sqrt{5}}{3}$

e) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ e $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

13. UFRGS-RS – A circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 6$ está inscrita em um quadrado.

A medida da diagonal desse quadrado é

a) $\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{2}$

c) $4\sqrt{2}$

d) $6\sqrt{2}$

e) $8\sqrt{2}$

14. UPE – No sistema cartesiano, sendo a circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 6x - 2y = -6$, qual a equação da circunferência C' simétrica de C em relação à origem do sistema?

a) $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 4$

b) $x^2 + y^2 - 6x - 2y = -4$

c) $x^2 + y^2 + 6x + 2y = -4$

d) $x^2 + y^2 - 6x + 2y = -6$

e) $x^2 + y^2 + 6x + 2y = -6$

15. UFJF-MG – Ao estudar a órbita circular de um planeta ao redor de uma estrela, com o auxílio de um plano cartesiano, um jovem astrônomo percebeu que esta passava pelos pontos A = (0, 1) e B = (1, 2) e tinha raio $r = \sqrt{5}$ u.a., sendo que, uma unidade astronômica ou um u.a. é igual a $1{,}5 \times 10^{11}$ metros.

a) Sabendo que a estrela encontra-se no ponto P que é o centro da órbita circular, cuja primeira coordenada é positiva, determine a equação da circunferência que descreve a órbita.

b) Após um período de observação, o astrônomo percebeu que uma grande erupção estelar atingiu a órbita do planeta do ponto A até o ponto B. Determine a área atingida pela erupção, considerando que essa é aproximadamente a área do triângulo de vértices A, B e P.

16. UECE – No plano cartesiano usual, a equação da circunferência que contém os pontos (– 4 , 0), (4, 0) e (0, 8) é $x^2 + y^2 + my + n = 0$. O valor da soma $m^2 + n$ é

a) 30
b) 10
c) 40
d) 20

17. Fuvest-SP – A equação $x^2 + 2x + y^2 + my = n$, em que m e n são constantes, representa uma circunferência no plano cartesiano. Sabe-se que a reta $y = -x + 1$ contém o centro da circunferência e a intersecta no ponto (– 3, 4). Os valores de m e n são, respectivamente,

a) –4 e 3
b) 4 e 5
c) –4 e 2
d) –2 e 4
e) 2 e 3

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H22

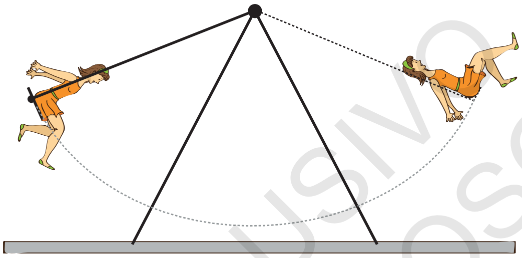
Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.

Nessas condições, a maior distância, em metros, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é

a) 30
b) 40
c) 45
d) 60
e) 68

19. Enem C5-H21

A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo x é paralelo ao chão do parque e o eixo y tem orientação positiva para cima.

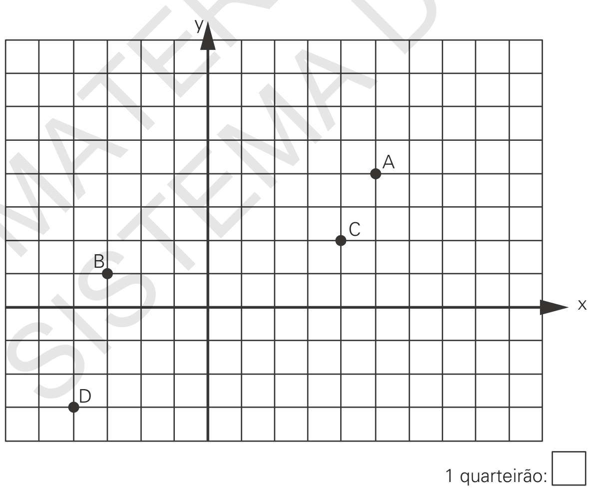
A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função

a) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$
b) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$
c) $f(x) = x^2 - 2$
d) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$
e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

20. Enem C2-H9

Considere que os quarteirões de um bairro tenham sido desenhados no sistema cartesiano, sendo a origem o cruzamento das duas ruas mais movimentadas desse bairro. Nesse desenho, as ruas têm suas larguras desconsideradas e todos os quarteirões são quadrados de mesma área, sendo a medida de seu lado a unidade do sistema.

A seguir há uma representação dessa situação, em que os pontos A, B, C e D representam estabelecimentos comerciais desse bairro.



Suponha que uma rádio comunitária, de fraco sinal, garante área de cobertura para todo estabelecimento que se encontre num ponto cujas coordenadas satisfaçam à inequação: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leq 0$.

A fim de avaliar a qualidade do sinal e proporcionar uma futura melhora, a assistência técnica da rádio realizou uma inspeção para saber quais estabelecimentos estavam dentro da área de cobertura, pois estes conseguem ouvir a rádio, enquanto os outros não.

Os estabelecimentos que conseguem ouvir a rádio são apenas

a) A e C
b) B e C
c) B e D
d) A, B e C
e) B, C e D

27 CIRCUNFERÊNCIA - POSIÇÕES RELATIVAS E CÔNICAS - ELIPSE

- Posições relativas entre pontos e circunferência
- Posições relativas entre reta e circunferência
- Posições relativas entre duas circunferências
- Introdução às cônicas
- Elipse

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
- Aplicar conhecimentos algébricos/geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTOS E CIRCUNFERÊNCIA

Um ponto **P** pode ser **interno**, **externo** ou **pertencer** à circunferência de centro C(a, b) e raio **r**.

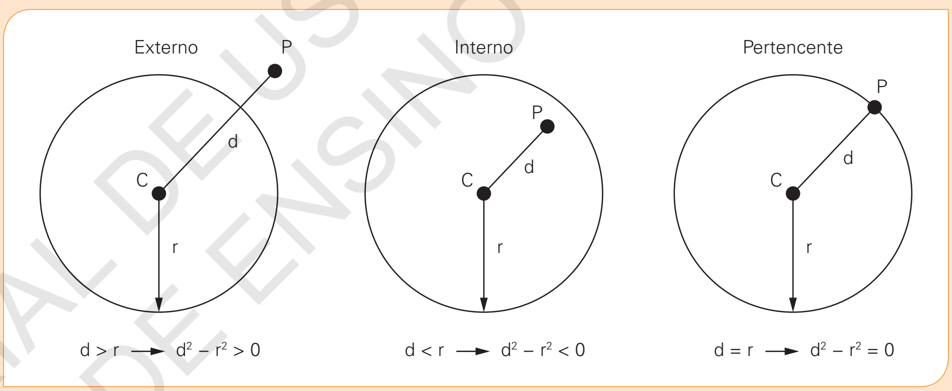
Sendo $P(x_0, y_0)$ um ponto no plano cartesiano, a distância de **P** ao centro **C** da circunferência é dada por:

$$d = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$$

A circunferência de centro C(a, b) e raio **r** tem equação descrita por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

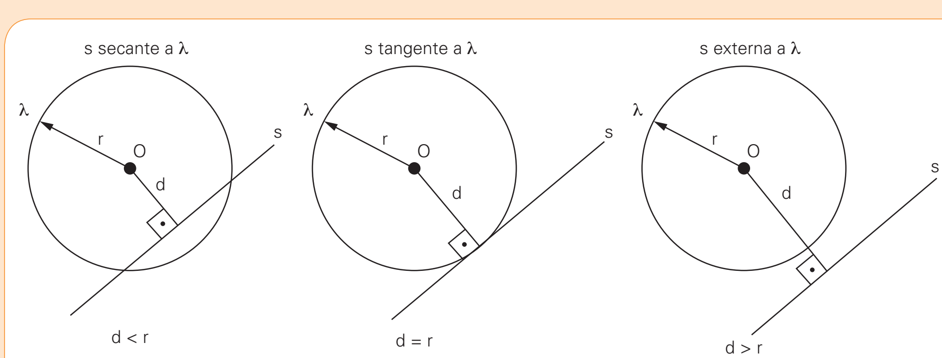
O número **d² − r²** é denominado **potência de P em relação à circunferência** e pode ser positivo, negativo ou nulo, conforme o ponto **P** seja, respectivamente, externo, interno ou pertencente à circunferência.



POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Há duas maneiras distintas para identificar se uma reta **s** de equação $ax + by + c = 0$ é tangente, secante ou externa a uma circunferência λ de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r = 0$:

I. Comparar a distância **d**, do centro da circunferência até a reta **s**, com o raio dessa circunferência:



II. Resolver o sistema formado pelas equações de **s** e **λ**, recaindo sempre em uma equação do 2º grau. A posição de **s** e **λ** é determinada pelo valor do Δ (discriminante) dessa equação.

$\Delta > 0 \quad \leftrightarrow \quad$ **s** é secante a λ.

$\Delta = 0 \quad \leftrightarrow \quad$ **s** é tangente a λ.

$\Delta < 0 \quad \leftrightarrow \quad$ **s** é externa a λ.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Determine a equação da reta que passa por P(1, 4) e é tangente à circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 9 = 0$.

Resolução

Determine a posição de **P** em relação à circunferência:

$x = 1;\ y = 4$

P: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 9 = (1 - 2)^2 + (4 - 3)^2 - 9 = = 1 + 1 - 9 = -7 < 0$

Como o ponto **P** é interno à circunferência, o problema não tem solução, isto é, não há uma reta tangente à circunferência passando por ele.

2. Sistema Dom Bosco – Determine a equação da reta que passa por P(4, 1) e é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$.

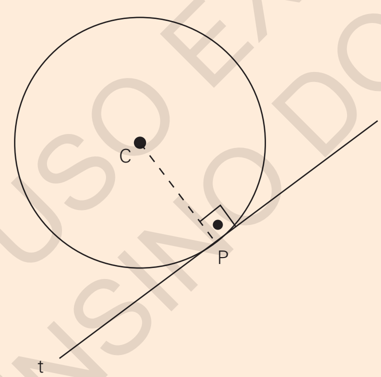
Resolução

Determine a posição de **P** em relação à circunferência:

$x = 4;\ y = 1$

P: $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = (4)^2 + (1)^2 - 2 \cdot (4) - 6 \cdot (1) - 3 = 16 + 1 - 8 - 6 - 3 = 0$

Logo, o ponto **P** pertence à circunferência e o problema tem uma única solução.



Para encontrar as coordenadas do centro da circunferência, temos:

$$a = -\frac{d}{2} = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$b = -\frac{f}{2} = -\frac{-6}{2} = 3$$

Logo, C(1, 3).

Assim, a reta **s** que passa pelos pontos P(4, 1) e C (1, 3) é perpendicular à reta **t** tangente à circunferência.

Calculando o coeficiente angular da reta **s**, obtemos:

$$s\colon m_s = \frac{1 - 3}{4 - 1} = -\frac{2}{3}$$

Calculando o coeficiente angular da reta **t**, perpendicular a s, obtemos:

$$m_s \cdot m_r = -1 \rightarrow -\frac{2}{3} \cdot m_r = -1 \rightarrow m_r = \frac{3}{2}$$

Logo, a equação de **t** será:

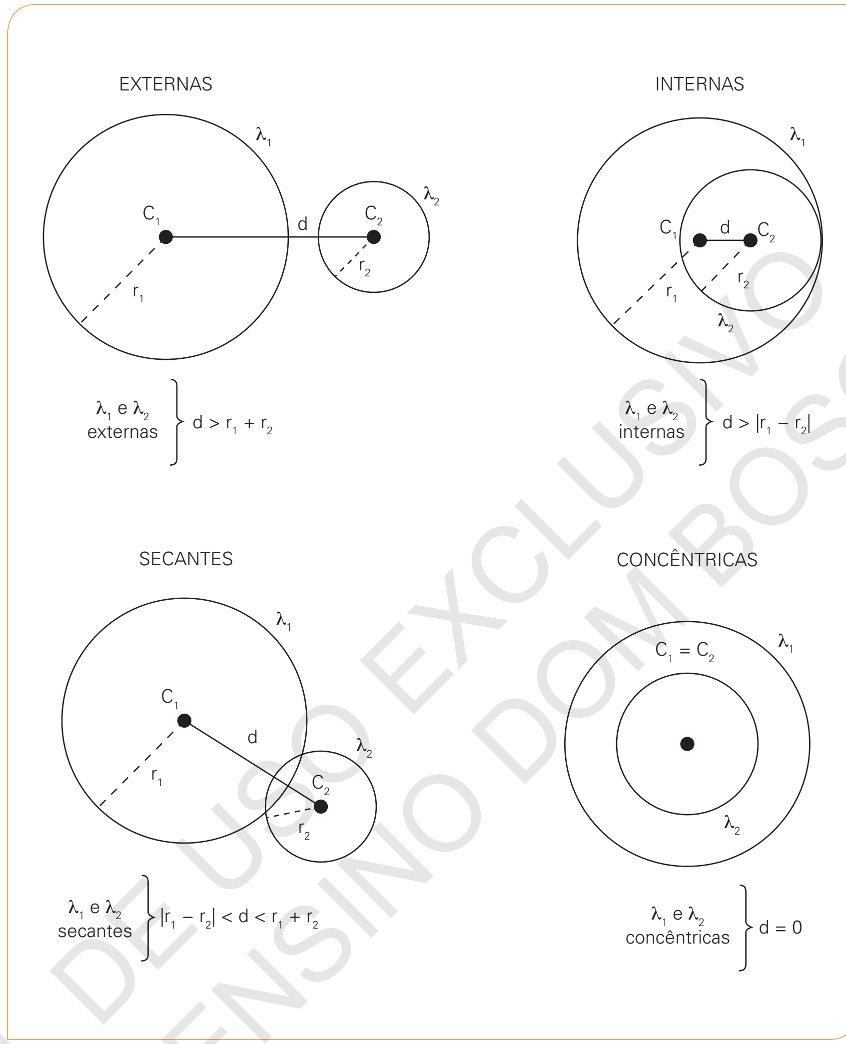
$$y - 1 = \frac{3}{2} \cdot (x - 4) \rightarrow y - 1 = +\frac{3}{2}x - 6$$

Portanto, t: $\frac{3}{2}x - y - 5 = 0$.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Duas circunferências λ_1 e λ_2 podem ser **externas**, **internas**, **secantes** ou **concêntricas** entre si. Para melhor entendimento, considere duas circunferências, λ_1 e λ_2, de centros $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ e raios $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$, respectivamente.

Sendo **d** a distância entre os centros $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$, tem-se:



EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3. Sistema Dom Bosco – Dadas as circunferências $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$, de equações respectivamente iguais a $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 8 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 5 = 0$, pode-se afirmar que:

a) são internas
b) são externas
c) são secantes
d) são concêntricas

Resolução

$$\lambda_1\text{: } a = -\frac{d}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5;\ b = -\frac{f}{2} = -\frac{-2}{2} = 1;\ g = -8$$

$$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - g} = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1^2 - (-8)} = \sqrt{11{,}25} \cong 3{,}35$$

$$\lambda_2\text{: } a = -\frac{d}{2} = -\frac{-4}{2} = 2;\ b = -\frac{f}{2} = -\frac{+4}{2} = -2;\ g = -5$$

$$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - g} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 - (-5)} = \sqrt{13} \cong 3{,}60$$

$$|r_1 - r_2| \cong |3{,}35 - 3{,}60| \cong 0{,}25 \text{ e } r_1 + r_2 = 3{,}35 + 3{,}60 = 6{,}95$$

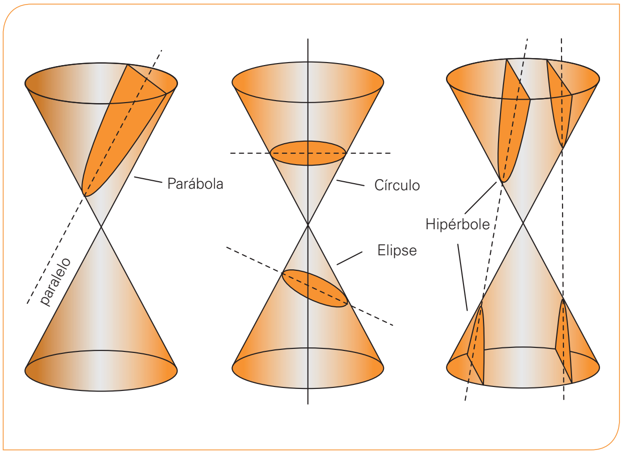
$$d = \sqrt{[2 - (-1{,}5)]^2 + (-2 - 1)} \cong 4{,}60$$

Como:
$3{,}6 < d < 6{,}95$, as circunferências são secantes entre si.

INTRODUÇÃO ÀS CÔNICAS

Uma superfície cônica de revolução é gerada quando uma reta G intercepta outra reta fixa, girando em torno dela.

Passando um plano secante, são produzidas curvas cônicas sobre a superfície de revolução. Dependendo do ângulo que o plano secante forma com o eixo da superfície cônica, surgem diferentes curvas cônicas, as quais nomeamos **elipse**, **hipérbole** ou **parábola**.



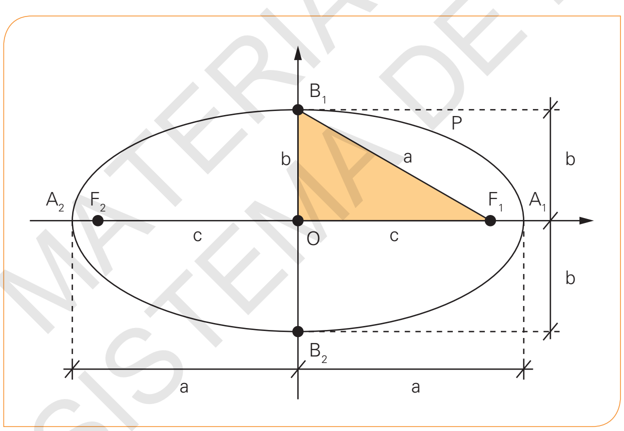
CONCEITO

Elipse é um lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é sempre constante.

ELEMENTOS

Na figura, temos:

- Focos – Os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$.
- Centro – O ponto **O**, que é o ponto médio entre $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$.



- Semieixo maior – **a.**
- Semieixo menor – **b.**
- Semidistância focal – **c.**
- Vértices – os pontos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$.
- Eixo maior – $|\mathbf{A_1 A_2}| = \mathbf{2a}$.
- Eixo menor – $|\mathbf{B_1 B_2}| = \mathbf{2b}$.
- Distância focal – $|\mathbf{F_1 F_2}| = \mathbf{2c}$.

Relação fundamental

Na figura anterior, ao aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo OF_1B_1, retângulo em O, podemos escrever a seguinte relação fundamental: $a^2 = b^2 + c^2$.

Excentricidade

Pela definição de elipse, $2c < 2a$. Então, $c < a$. Consequentemente, $0 < e < 1$:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Observações:

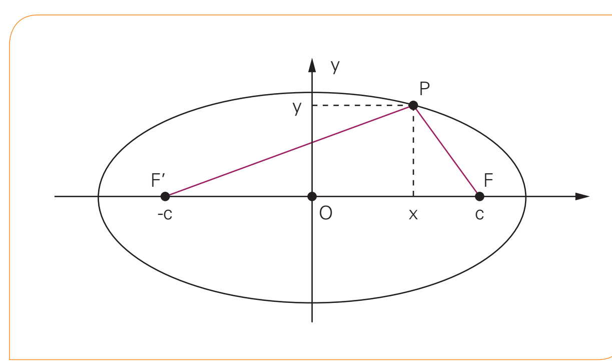
- Os focos estão sempre na reta que contém o eixo maior.
- A excentricidade é sempre menor que 1.

EQUAÇÃO DA ELIPSE

Equação com centro na origem e focos no eixo das abscissas

Devem ser consideradas as seguintes condições:

- Centro da elipse coincidindo com a origem do sistema de coordenadas cartesianas.
- Coordenadas dos focos iguais a $F(-c, 0)$ e $F'(c, 0)$.
- Eixo maior igual a 2a.

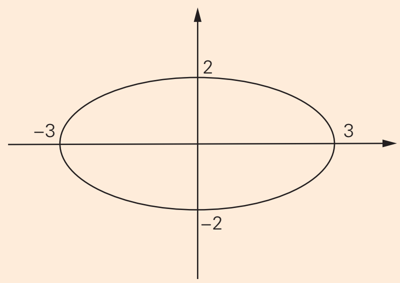


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Essa equação da elipse tem os focos no eixo das abscissas e o centro na origem do sistema cartesiano ortogonal.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

4. Sistema Dom Bosco – Dada a elipse representada na figura abaixo, determine a sua equação:



Resolução

Inicialmente determinamos os eixos. O eixo maior (2a) está localizado no eixo das abscissas; o menor está no eixo das ordenadas (2b). Identificamos, então, os elementos:

$$\begin{cases} 2a = 3-(-3) = 6 \rightarrow a = 3 \\ 2b = 2-(-2) = 4 \rightarrow b = 2 \end{cases}$$

Substituindo os valores de **a** e **b** na equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, temos:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

5. Sistema Dom Bosco – Determine a equação da elipse em que os focos são F_1 (–2, 0) e F_2 (2, 0) e o comprimento do eixo maior é 6:

Resolução

Os focos estão no eixo das abscissas. Identificando os elementos, temos:

$$\begin{cases} 2c = 2-(-2) = 4 \rightarrow c = 2 \\ 2a = 6 \rightarrow a = 3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3^2 = 2^2 + b^2 \rightarrow b = \sqrt{9-4} \rightarrow b = \sqrt{5}$$

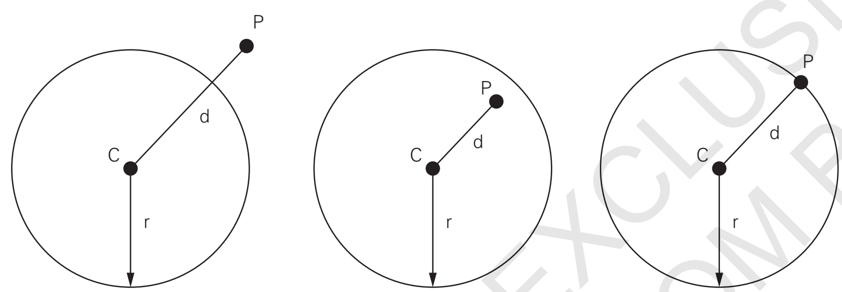
Substituindo os valores de **a** e **b** na equação, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, temos:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

CIRCUNFERÊNCIAS – POSIÇÕES RELATIVAS

Um ponto **P** pode ser externo, interno ou pertencente à circunferência.

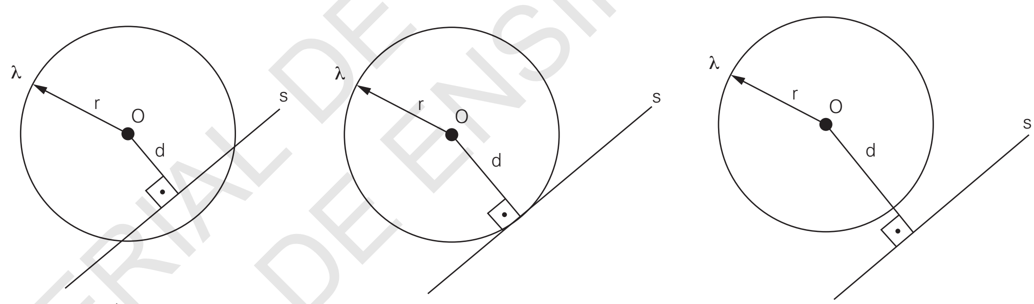
Externo	Interno	Pertencente



$d > r \longrightarrow d^2 - r^2 > 0$ $\quad$ $d < r \longrightarrow d^2 - r^2 < 0$ $\quad$ $d = r \longrightarrow d^2 - r^2 = 0$

Uma reta **r** pode ser tangente, secante ou externa à circunferência.

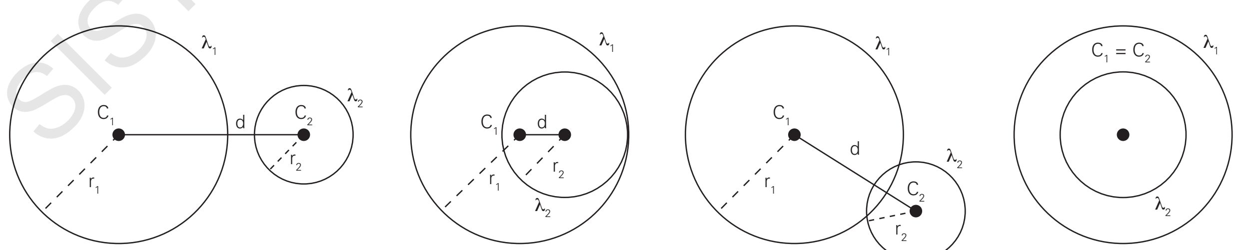
Secante	Tangente	Externa



$d < r$ $\quad$ $d = r$ $\quad$ $d > r$

Duas circunferências podem ser internas, externas, secantes ou concêntricas.

Externas	Internas	Secantes	Concêntricas



λ_1 e λ_2 externas $\Big\}\ d > r_1 + r_2$

λ_1 e λ_2 internas $\Big\}\ d > |r_1 - r_2|$

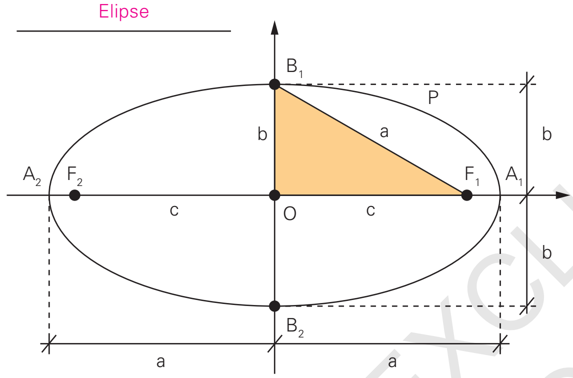
λ_1 e λ_2 secantes $\Big\}\ |r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$

λ_1 e λ_2 concêntricas $\Big\}\ d = 0$

ROTEIRO DE AULA

CÔNICAS – ELIPSE

Elipse



Elementos:

Focos: F_1 e F_2

Distância focal: 2c

Vértices: A_1, A_2, B_1, B_2

Eixo maior: 2a

Eixo menor: 2b

Centro: O

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$

Equação da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UFJF-MG (adaptado) – Determine a distância entre o centro da circunferência $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 6 = 0$ e a reta $3y = -4x - 1$.

De $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 6 = 0$, vamos ter:

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 6 = 0 + 1 + 9$

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$

C(1, −3) corresponde ao centro da circunferência.

De $3y = -4x - 1$, vamos ter:

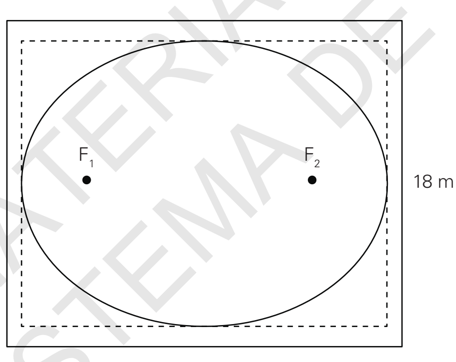
$4x + 3y + 1 = 0$

Portanto, sendo d a medida da distância solicitada, obtemos:

$$d = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$d = \frac{4}{5}$$

2. UFRN (adaptado) – Um arquiteto projetou, para um salão de dimensões 22 m por 18 m, um teto de gesso em formato de elipse com o eixo maior medindo 20 m e o eixo menor, 16 m, conforme ilustra a figura abaixo.

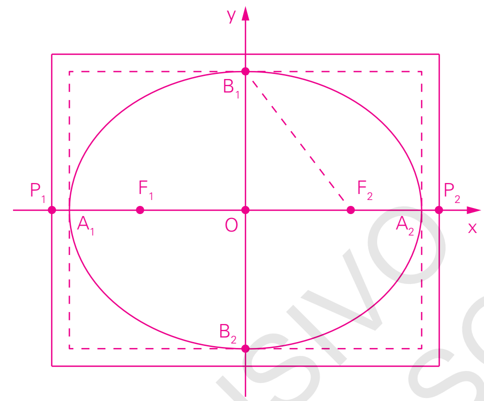


O aplicador do gesso afirmou que saberia desenhar a elipse, desde que o arquiteto informasse as posições dos focos.

Para orientar o aplicador do gesso, o arquiteto informou que, na direção do eixo maior, a distância entre cada foco e a parede mais próxima é de

a) 3 m
b) 4 m
c) 5 m
d) 6 m
e) 12 m

Conforme a ilustração a seguir, temos:



$A_1 = (-10, 0)$

$A_2 = (10, 0)$

$B_1 = (0, 8)$

$B_2 = (0, 8)$

$F_1 = (-c, 0)$

$F_2 = (0, c)$, sendo $c > 0$

Portanto, da relação fundamental da elipse, temos:

$(B_1F_2)^2 = (OF_2)^2 + (OF_1)^2 + (OB_1)^2 \Rightarrow$

$10^2 = c^2 + 8^2 \rightarrow c^2 = 100 - 64 \rightarrow c^2 = 36$

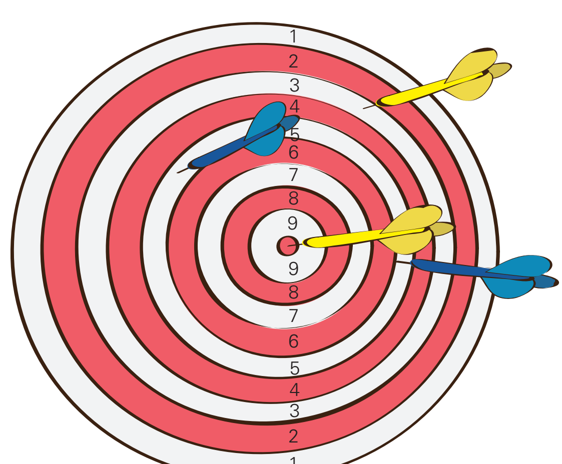
$c = 6$

Sendo assim, a distância solicitada é obtida por:

$OP_2 - OF_2 = 11 - 6 = 5$ m

3. Sistema Dom Bosco C2-H6

Um tabuleiro de dardos é pendurado na parede de uma garagem e passa a fazer a diversão da garotada. Nesse tabuleiro, a pontuação que cada criança recebe depende da posição em que o dardo se fixa no tabuleiro, conforme figura a seguir. Adotando o plano cartesiano como referência para o estudo do posicionamento das circunferências, sabe-se que, dentre as muitas circunferências concêntricas do tabuleiro, a maior possui equação $x^2 + y^2 - 16 = 0$. Logo, pode-se concluir que o dardo lançado, ao atingir o ponto P (6, 10) do sistema de coordenadas,



a) marcou apenas 2 pontos.
b) marcou apenas 4 pontos.
c) marcou apenas 6 pontos.
d) marcou apenas 10 pontos.
e) não pontuou.

Deve-se determinar a posição de P em relação à circunferência:

$x = 6; y = 10$

P: $x^2 + y^2 - 16 = (6)^2 + (10)^2 - 16 = 36 + 100 - 16 = 120 > 0$

Logo, o ponto P é externo à maior circunferência. Contudo, no lançamento desse dardo, não houve pontuação registrada.

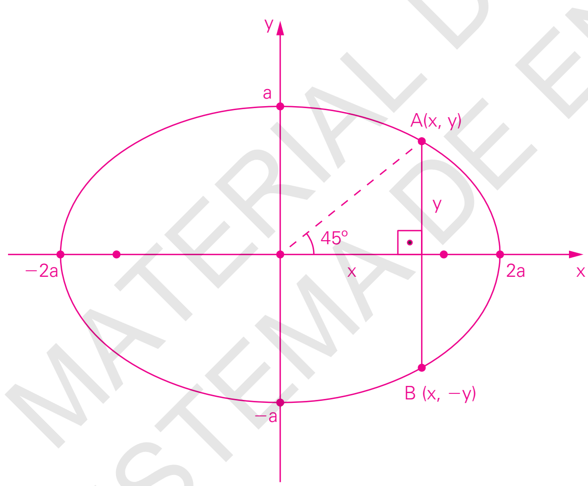
Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

4. Espcex-SP – Uma elipse tem centro na origem e vértices em (2a, 0) e (0, a), com a > 0. A área do quadrado inscrito nessa elipse é

a) $\frac{16a^2}{5}$
b) $\frac{4a^2}{5}$
c) $\frac{12a^2}{5}$
d) $\frac{8a^2}{5}$
e) $\frac{20a^2}{5}$

Do enunciado, temos:



A equação da elipse é obtida por:

$$\frac{x^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Traçando um ângulo de 45°, conforme a figura, obtemos os pontos A e B, os quais são vértices do quadrado ABCD inscrito na elipse.

Portanto, o lado AB do quadrado tem medida 2y.

Assim, $A = 2y \cdot 2y \rightarrow A = 4y^2$.

Observe, na ilustração, que x = y. Assim:

$$\frac{y^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow y^2 + 4y^2 = 4a^2 \rightarrow 5y^2 = 4a^2 \rightarrow y^2 = \frac{4}{5} \cdot a^2$$

Substituindo o valor de y em $A = 4y^2$, temos:

$$A = 4y^2 \rightarrow A = 4 \cdot \frac{4}{5}a^2 \rightarrow A = \frac{16a^2}{5}$$

5. Unicamp-SP – No plano cartesiano, sejam C a circunferência de centro na origem e raio r > 0 e s a reta de equação x + 3y = 10. A reta s intercepta a circunferência C em dois pontos distintos se, e somente se,

a) $r > 2$.
b) $r > \sqrt{5}$.
c) $r > 3$.
d) $r > \sqrt{10}$.

A reta s encontra a circunferência C em dois pontos únicos se, e apenas se, a distância da origem à reta $x + 3y - 10 = 0$ for menor do que r. Assim,

C (0, 0); a = 1; b = 3; c = − 10

$$\frac{|0 + 3 \cdot 0 - 10|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} < r$$

Portanto, $r > \sqrt{10}$.

6. Espcex-SP – Sobre a curva $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$, assinale a alternativa correta.

a) Seu centro é (–2,1).
b) A medida do seu eixo maior é 25.
c) A medida do seu eixo menor é 9.
d) A distância focal é 4.
e) Sua excentricidade é 0,8.

Temos:

$9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$

$9x^2 - 36x + 36 + 25y^2 + 50y + 25 = 164 + 36 + 25$

$9(x^2 - 4x + 4) + 25(y^2 + 2y + 1) = 164 + 36 + 25$

$9(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 = 225$

$$\frac{9(x-2)^2}{225} + \frac{25(y+1)^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

Analisando a equação da elipse, concluímos que:

– C (2, −1);

– eixo superior = 10;

– eixo inferior = 6;

$-2c = 8$;

– $e = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Sendo assim, a afirmativa E é a correta.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

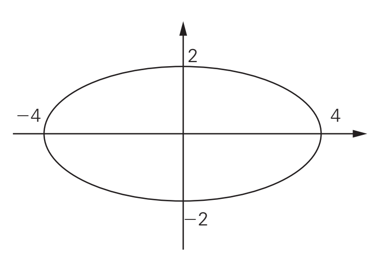
7. Sistema Dom Bosco – Dadas as circunferências λ_1 e λ_2, de equações respectivamente iguais a $x^2 + y^2 - 4 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 12 = 0$, o que se pode concluir quanto à posição de uma em relação à outra?

a) são internas
b) são externas
c) são secantes
d) são concêntricas

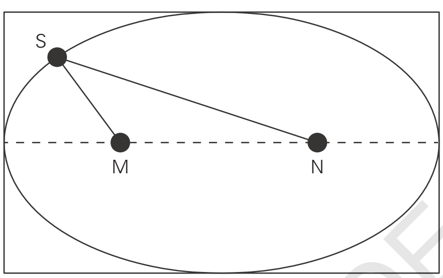
8. FGV-SP – No plano cartesiano, a reta de equação $3x + 4y = 17$ tangencia uma circunferência de centro no ponto (1, 1).
A equação dessa circunferência é:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

9. Sistema Dom Bosco – Dada a elipse representada na figura abaixo, determine a sua equação:



10. IFPE – Bira adquiriu uma cabra que pasta em um campo retangular. Para delimitar o gramado, ele pretende traçar uma elipse inscrita num terreno retangular de 10 m por 8 m. Para isso, ele deve utilizar um fio esticado preso por duas estacas M e N, conforme mostra a figura.



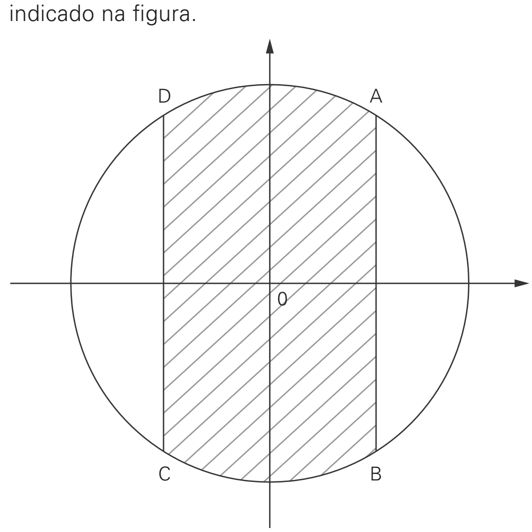
Qual deve ser a distância entre as estacas M e N?

a) 5
b) 4
c) 8
d) 6
e) 9

11. Mackenzie-SP – A equação da reta que corta o eixo das ordenadas no ponto P(0, − 6) e que tangencia a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no quarto quadrante é

a) $y = -2\sqrt{2}x + 6$
b) $y = 2\sqrt{2}x - 6$
c) $y = 2\sqrt{2}x + 6$
d) $y = 4x - 6$
e) $y = -4x + 6$

12. PUC-RJ – Considere o círculo de raio 2 centrado na origem e as retas verticais x = 1 e x = − 1, como indicado na figura.



a) Encontre as coordenadas dos pontos de interseção A, B, C, D entre o círculo e as retas verticais.
b) Calcule a área da região interior ao círculo que fica entre as duas retas verticais.

13. Epcar-MG – No plano cartesiano, os pontos P(x, y) satisfazem à equação $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$ da curva λ.

Se F_1 e F_2 são os focos de λ, tais que a abscissa de F_1 é menor que a abscissa de F_2, é INCORRETO afirmar que

a) a soma das distâncias de P e F_1 e de P a F_2 é igual a 10.

b) F_1 coincide com o centro da curva $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$.

c) F_2 é exterior a $x^2 + y^2 = 25$.

d) o ponto de abscissa máxima de λ pertence à reta $y = x - 8$.

14. Mackenzie-SP – Com relação às equações das elipses $25x^2 + 16y^2 + 150x + 256y - 351 = 0$ e $16x^2 + 25y^2 - 96x - 200y + 144 = 0$, podemos afirmar que

a) as elipses têm centros coincidentes.

b) as elipses têm a mesma distância focal.

c) as elipses têm a mesma excentricidade.

d) as elipses têm focos sobre o eixo das abscissas.

e) o eixo maior de uma delas é o dobro do eixo menor da outra.

15. UFPR – Seja C_1 o círculo de raio r = 2 e centro no ponto P = (3, 4).

a) Qual é a equação do círculo C_1?

b) Considere o círculo C_2 definido pela equação $x^2 + y^2 = \rho^2$. Para quais valores de ρ o círculo C_1 intersecta o círculo C_2?

17. Fuvest-SP – Duas circunferências com raios 1 e 2 têm centros no primeiro quadrante do plano cartesiano e ambas tangenciam os dois eixos coordenados. Essas circunferências se interceptam em dois pontos distintos de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

O valor de $(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2$ é igual a

a) $\frac{5}{2}$

b) $\frac{7}{2}$

c) $\frac{9}{2}$

d) $\frac{11}{2}$

e) $\frac{13}{2}$

16. FGV-SP – Na representação gráfica do sistema de equações $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 4x^2 - y = 2 \end{cases}$ no plano cartesiano, uma das soluções é (0, –2). A distância entre os pontos que representam as duas outras soluções desse sistema é igual a

a) $\sqrt{14}$

b) $\frac{7}{2}$

c) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

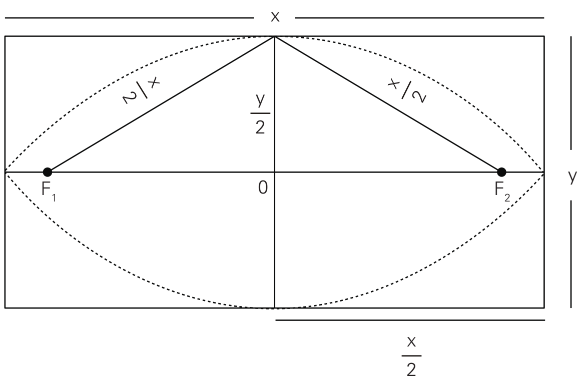
d) $\frac{\sqrt{14}}{2}$

e) $\frac{3}{2}$

ESTUDO PARA O ENEM

18. UEPB C2-H9

Deseja-se construir uma praça em forma de elipse em um terreno retangular de dimensões x metros e y metros, com x > y, de perímetro 300 m e área 5000 m², conforme nos mostra a figura.



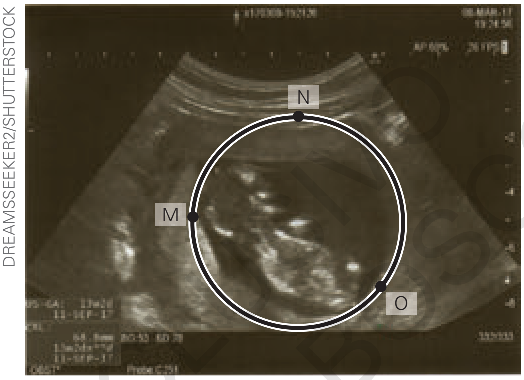
Estando previstas as instalações de duas torres de iluminação, uma em cada foco da elipse, F_1 e F_2, local de melhor distribuição e aproveitamento das mesmas, concluímos que a distância em metros entre as torres é

a) $100\sqrt{3}$
b) $25\sqrt{3}$
c) $50\sqrt{3}$
d) $40\sqrt{3}$
e) $30\sqrt{3}$

19. Acafe-SC (adaptado) C5-H22

O ultrassom morfológico é um exame muito utilizado para identificar doenças de um bebê que ainda está no ventre da mãe. O formato, a estrutura e a medida da cabeça do bebê podem ser analisados e comparados com medidas de referência.

DREAMSSEEKER2/SHUTTERSTOCK



A figura representa a cabeça de um bebê em um exame desse tipo. Através de recursos computacionais, define-se uma circunferência em um sistema de coordenadas cartesianas através de três pontos:

M(− 3, 3), N(2, 8) e O(6, 0).

O comprimento dessa circunferência corresponde ao que os médicos chamam de perímetro cefálico. No caso indicado na figura, por um problema técnico, o computador não indicou o comprimento da circunferência. Sabe-se que cada unidade linear do plano cartesiano que contém a figura corresponde a 1 cm na medida real.

Analise o caso e responda: Qual a medida do perímetro cefálico do bebê, se $\pi = 3{,}14$?

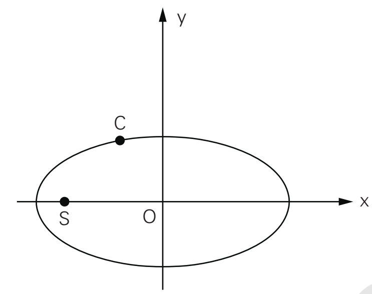
a) Superior a 40 cm.
b) Entre 30 cm e 35 cm.
c) Inferior a 30 cm.
d) Entre 35 cm e 40 cm.
e) Entre 25 cm e 30 cm.

20. UnB-DF (adaptado) C6-H24

O vento solar é uma emissão contínua, em todas as direções, de partículas carregadas que têm origem na coroa solar. As partículas emitidas podem ser elétrons, prótons ou neutrinos. A velocidade dessas partículas varia entre 400 km/s e 800 km/s.

Essa emissão contínua gera uma distribuição de íons, prótons e elétrons em todo o espaço do Sistema Solar. Esse plasma de partículas carregadas é comumente denominado mar de prótons, ou mar de elétrons. Ao se aproximarem da Terra, esses íons sofrem alterações em suas trajetórias devido à presença do campo magnético terrestre. Na região do espaço que circunda a Terra, a densidade desse plasma é de aproximadamente 10 partículas por centímetro cúbico. O bombardeamento da atmosfera terrestre pelo vento solar tem efeitos profundos, uma vez que as partículas e a radiação solar interagem com os gases presentes na atmosfera, tais como H_2, N_2, O_2, CO_2, CO, NO_2, N_2O, SO_2.

Planeta	Distância média do Sol, em 10^6 km
Mercúrio	57,9
Vênus	108
Terra	150
Marte	228
Júpiter	778
Saturno	1 430
Urano	2 870
Netuno	4 500
Plutão	5 900



A figura acima ilustra a situação em que um cometa (C) percorre uma órbita elíptica de centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy. Nessa órbita elíptica, o Sol (S) aparece em um dos focos. Considere que a elipse seja representada pela equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, em que $a > b > 0$, e tenha excentricidade igual a 0,96. Nesse caso, se a distância mínima desse cometa ao Sol for igual a 0,58 UA (unidade astronômica), em que 1 UA = 150 106 km é a distância média da Terra ao Sol, então a distância máxima do cometa ao Sol, em milhões de km, será

a) inferior a 3 700.

b) superior a 3 700 e inferior a 4 000.

c) superior a 4 000 e inferior a 4 300.

d) superior a 4 300 e inferior a 5 300.

e) superior a 5 300.

CÔNICAS - HIPÉRBOLE E PARÁBOLA

- Hipérbole
- Parábola

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Aplicar conhecimentos algébricos/geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

HIPÉRBOLE

CONCEITO

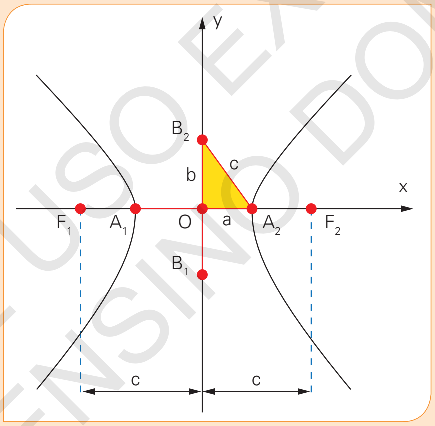
Hipérbole é um lugar geométrico de pontos no plano cujo módulo de diferença de distâncias a dois pontos fixos no plano é sempre constante. Assim:

Sejam F_1 e F_2 dois pontos no plano e seja 2c a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos no plano cuja diferença (em módulo) das distâncias à F_1 e à F_2 é a constante 2a ($0 < 2a < 2c$).

ELEMENTOS

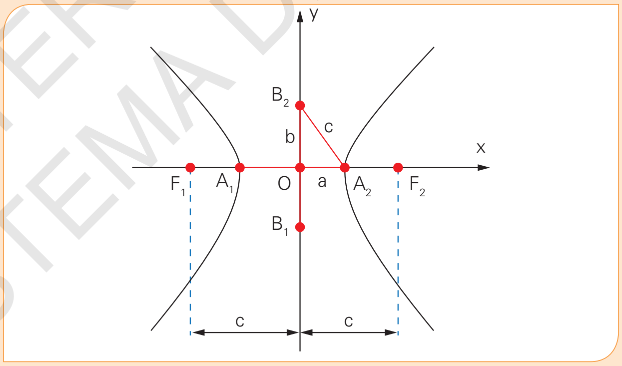
F_1 e F_2: são os focos da hipérbole
O: é o centro da hipérbole
2c: distância focal
2a: medida do eixo real ou transverso
2b: medida do eixo imaginário
$\frac{c}{a}$: excentricidade

No triângulo retângulo B_2OA_2, vale a relação $c^2 = a^2 + b^2$.



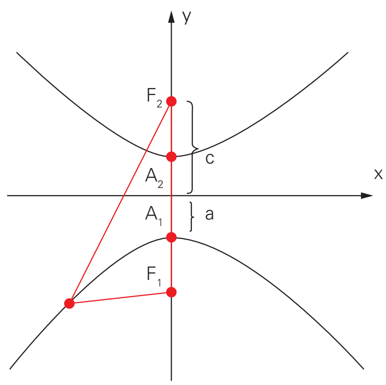
EQUAÇÃO REDUZIDA DA HIPÉRBOLE

1º caso: Hipérbole com focos sobre o eixo **x**.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2º caso: Hipérbole com focos sobre o eixo **y**.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Observações:

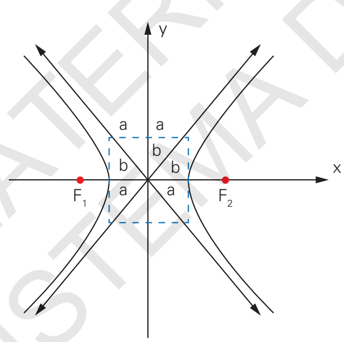
1. Vértices sempre estão na reta que contém os focos.

2. Excentricidade é sempre maior que 1.

ASSÍNTOTAS

Assíntotas de uma hipérbole são retas que contêm as diagonais do retângulo de lados 2a e 2b.

Quando o eixo real é horizontal, o coeficiente angular dessas retas é $m = \pm\frac{b}{a}$; quando é vertical, o coeficiente é $m = \pm\frac{a}{b}$.

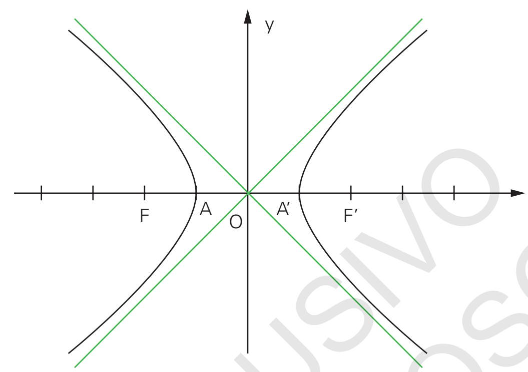


EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE

Equação com centro na origem e focos no eixo das abscissas

Consideram-se as seguintes condições:

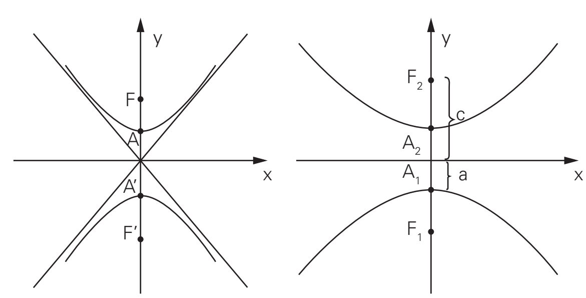
- Centro da hipérbole coincidindo com a origem do sistema de coordenadas cartesianas.
- Coordenadas dos focos iguais a F(– c, 0) e F'(c, 0).
- Eixo real é igual a 2a.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Essa equação da hipérbole tem os focos no eixo das abscissas e o centro na origem do sistema cartesiano ortogonal.

Equação com centro na origem e focos no eixo das ordenadas



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

O semieixo real define se os focos estão no eixo das abscissas ou das ordenadas. Então, a fração possuidora do sinal positivo identifica o eixo real contido na linha das abscissas ou das ordenadas – por consequência, focos situados respectivamente no eixo das abscissas ou das ordenadas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Sistema Dom Bosco – Determine a excentricidade da hipérbole de equação $25x^2 - 16y^2 - 400 = 0$.

Resolução

Temos: $25x^2 - 16y^2 = 400$.
Observe que a equação da hipérbole não está na forma reduzida.
Vamos dividir ambos os membros por 400, obtendo:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$$

Portanto, $a^2 = 16$ e $b^2 = 25$.

Daí, vem: $a = 4$ e $b = 5$.

Como $c^2 = a^2 + b^2$, substituindo e efetuando, vem que $c = \sqrt{41}$.

A excentricidade e será igual a: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{4} = 1{,}60$.

Logo, $e = 1{,}60$.

PARÁBOLA

CONCEITO

Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano, cuja distância a um ponto fixo dele é igual ao espaço até uma reta desse plano.

ELEMENTOS DA PARÁBOLA

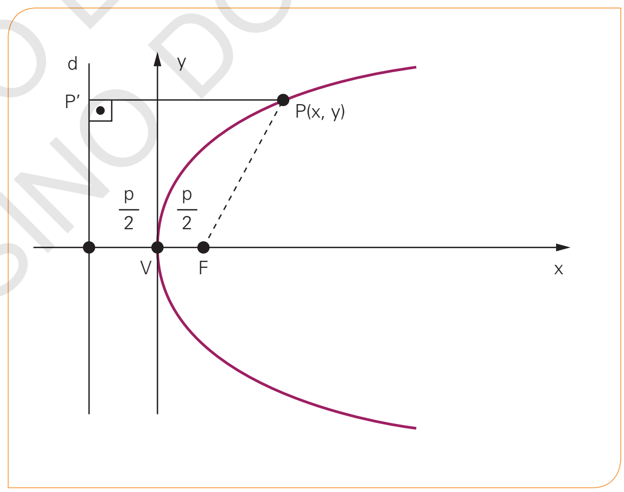
Os elementos da parábola são figuras geométricas mais simples que ela e que fazem parte de sua definição, estando envolvidos em sua construção. São eles:

- **Foco:** o ponto **F** da definição da **parábola** e da imagem anterior é chamado de foco e determina essa figura.
- **Diretriz:** a reta **r**, também presente na definição e na imagem anterior, é chamada de diretriz da parábola. Essa reta é usada junto ao foco para a definição dessa figura. A distância entre qualquer ponto da parábola e sua diretriz é igual à distância entre esse mesmo ponto da parábola e seu foco.
- **Parâmetro:** é a distância entre o **foco** e a **diretriz**. Esse cálculo pode ser feito por meio da distância entre ponto e reta.
- **Vértice:** o **vértice da parábola** é o ponto mais próximo de sua diretriz. Existe uma propriedade que afirma o seguinte:

$$VF = \frac{P}{2}$$

Reforça-se que VF é o segmento de reta que tem início no vértice da parábola e tem fim em seu foco, e p é o parâmetro da parábola. Em outras palavras, o vértice de uma parábola fica no meio do caminho entre seu foco e a diretriz.

- **Eixo de simetria:** é a reta perpendicular à **diretriz** que passa pelo vértice da parábola. Essa reta também contém o foco da parábola. Ela é assim chamada porque divide a **parábola** em duas partes simétricas.



- Foco: **F**
- Diretriz: reta **d**
- Vértice: **V**
- Parâmetro: **p**, distância do foco à diretriz
- Eixo de simetria: reta **VF**, perpendicular à diretriz

EQUAÇÃO DA PARÁBOLA

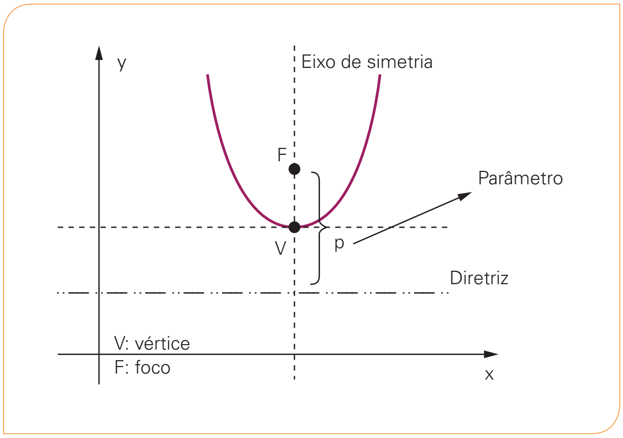
Equação com vértice na origem e focos no eixo das ordenadas

Consideram-se as condições:

- Vértice da parábola coincidindo com a origem do sistema de coordenadas cartesianas.
- Coordenadas dos focos iguais a

$$F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$$

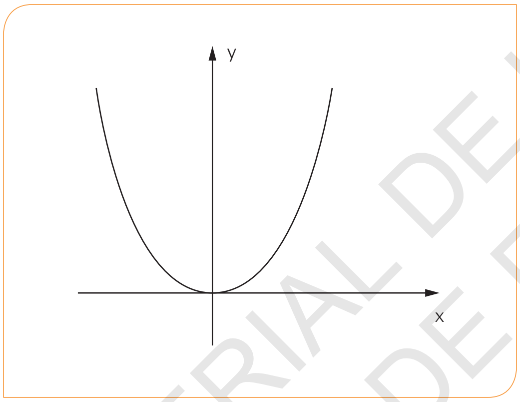
Pela definição de parábola, a distância do ponto genérico P(x, y) aos focos é igual à distância do ponto **P** à reta diretriz da parábola.

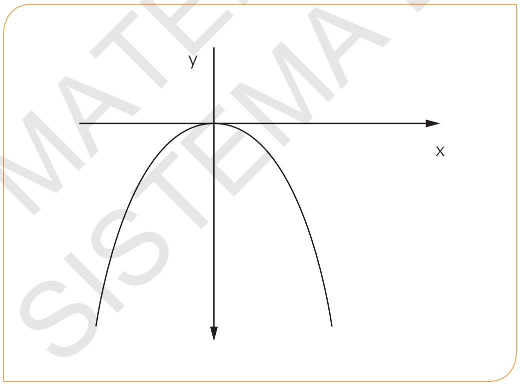


$$x^2 = 2py$$

Essa equação chama-se equação reduzida da parábola, e a concavidade da curva depende do sinal do parâmetro **p**:

- Quando p > 0, concavidade voltada para **cima**.
- Quando p < 0, concavidade voltada para **baixo**.





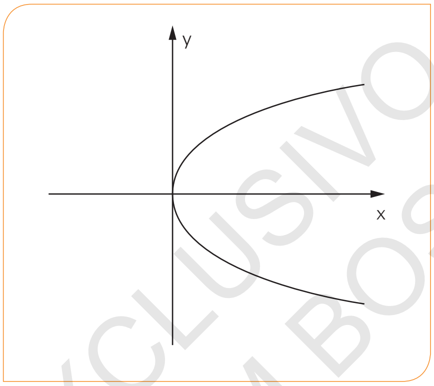
Equação com vértice na origem e focos no eixo das abscissas

Consideram-se as condições:

- Vértice da parábola coincidindo com a origem do sistema de coordenadas cartesianas.
- Coordenadas dos focos iguais a:

$$F = \left(0,\ \frac{p}{2}\right)$$

Pela definição de parábola, a distância do ponto genérico P(x, y) aos focos é igual à distância do P à reta diretriz da parábola.

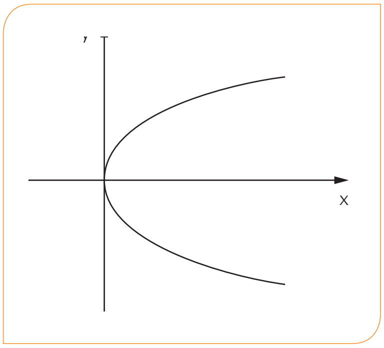


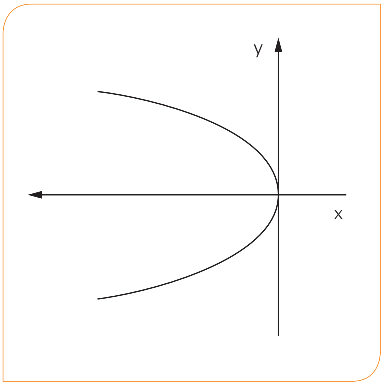
Demonstra-se que a equação obtida é representada por:

$$y^2 = 2px$$

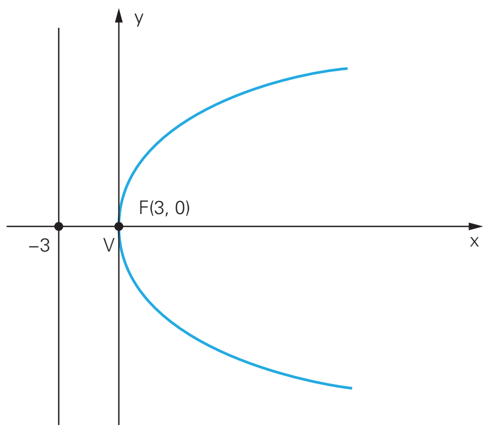
Essa equação chama-se equação reduzida da parábola, e a concavidade da curva depende do sinal do parâmetro p:

- Quando p > 0, concavidade voltada para a **direita**.
- Quando p < 0, concavidade voltada para a **esquerda**.





Exemplo:
Determinar equação da parábola indicada a seguir:



Equação: $y^2 = 2px$, sendo $p = 6$.
Então, $y^2 = 2 \cdot (6)x = 12x$
$y^2 = 12\,x$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

2. Sistema Dom Bosco – Determine a diretriz da parábola de equação $y^2 = -4x$.

Resolução

A parábola possui concavidade para a esquerda, e a diretriz é uma reta paralela ao eixo das ordenadas. Identificando os elementos, temos:

$$\text{I)}\ \begin{cases} y^2 = -4x \\ y^2 = -2px \end{cases} \rightarrow -2p = -4 \qquad p = 2$$

$$\text{II) Diretriz}: x = \frac{p}{2} \qquad x = \frac{2}{2} = 1$$

3. Sistema Dom Bosco – Determine o foco da parábola de equação $y^2 = 12x$.

Resolução

A parábola possui concavidade para a direita, e o foco está sobre o eixo das abscissas. Identificando os elementos, temos:

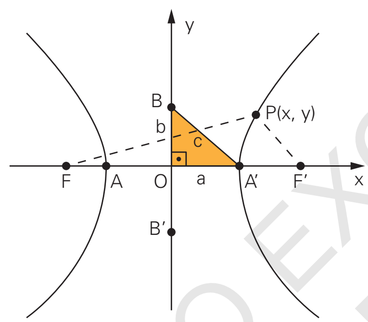
$$\text{I)}\ \begin{cases} y^2 = 12x \\ y^2 = 2px \end{cases} \rightarrow 2p = 12 \rightarrow p = 6$$

$$\text{II) Foco}: \left(\frac{p}{2}, 0\right) = (3, 0)$$

ROTEIRO DE AULA

CÔNICAS – HIPÉRBOLE

Hipérbole



Elementos:

Focos: F_1 e F_2

Distância focal: 2c

Vértices: A_1 e A_2

Eixo maior: 2a

Eixo menor: 2b

Centro: O

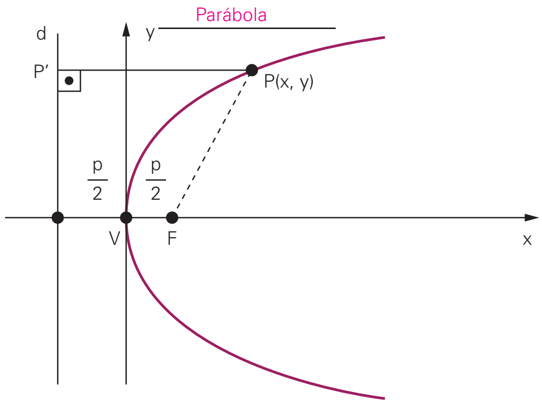
Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$

Equação da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ROTEIRO DE AULA

PARÁBOLA



Elementos:

Focos : F

Diretriz reta d

Vértices : V

Parâmetro : p, distância do foco à diretriz

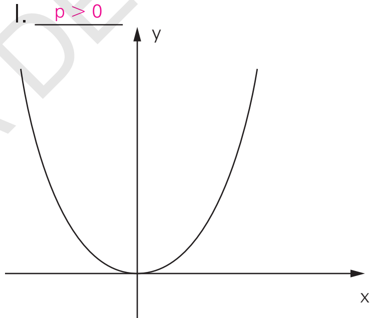
Eixo de simetria : reta VF, perpendicular à diretriz

Equação Reduzida da Parábola

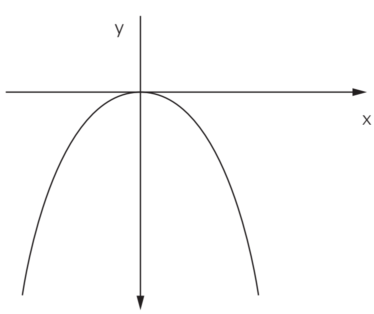
$y^2 =$ 2px

Equação com foco no eixo das ordenadas

I. $p > 0$

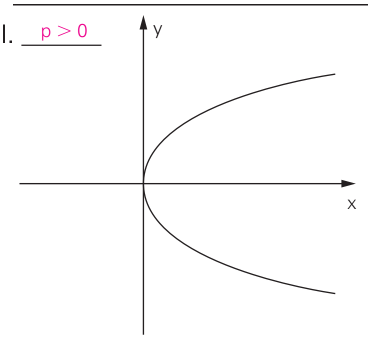


II. $p < 0$

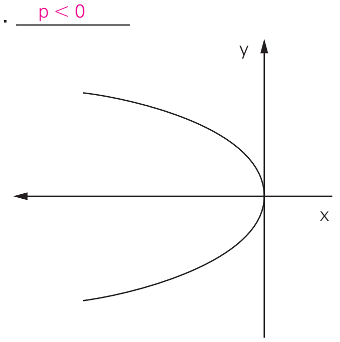


Equação com foco no eixo das abscissas

I. $p > 0$



II. $p < 0$



EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Esc. Naval-RJ – A equação $4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$, no plano xy, representa

a) duas retas
b) uma circunferência
c) uma elipse
d) uma hipérbole
e) uma parábola

Completando os quadrados na equação, obtemos:

$$4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$$
$$4x^2 - 32x + 64 - y^2 + 8y - 16 = -52 + 64 - 16$$
$$4x^2 - 32x + 64 - (y^2 - 8y + 16) = -4$$
$$4(x-4)^2 - (y-4)^2 = -4$$
$$-\frac{(x-4)^2}{1} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

Logo, uma hipérbole.

2. FGV-SP– No plano cartesiano, há dois pontos R e S pertencentes à parábola de equação $y = x^2$ e que estão alinhados com os pontos A(0, 3) e B(4, 0).

A soma das abscissas dos pontos R e S é:

a) – 0,45
b) – 0,55
c) – 0,65
d) – 0,75
e) – 0,85

Sendo r a reta que passa por A (0, 3) e B (4, 0), temos:

$$r: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3$$

As abscissas de R e S dizem respeito às abscissas dos pontos de interseção da reta r com a parábola $y = x^2$.

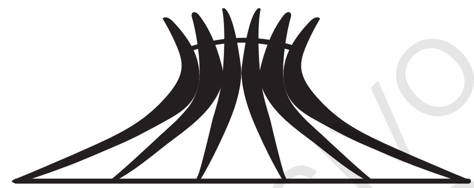
$$x^2 = -\frac{3}{4}x + 3 \leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x - 3 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, com $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$ e $c = -3$, temos que a soma das abscissas será:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$

3. Sistema Dom Bosco C2-H7

A catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida, em Brasília, projetada pelo arquiteto Oscar Niemeyer, possui uma estrutura que se destaca pela forma arrojada e pela beleza. Pode-se afirmar que essa estrutura, representada na figura a seguir, é denominada



a) Elipsoide
b) Esfera
c) Hiperboloide
d) Paraboloide
e) Cubo

Hiperboloide, um sólido de rotação obtido girando-se uma hipérbole ao redor de seu eixo transversal.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

4. Espcex-SP – O ponto $P\left(a, \frac{1}{3}\right)$ pertence à parábola $x = \frac{y^2 + 3}{3}$. A equação da reta perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares que passa por P é:

a) $27x + 27y - 37 = 0$
b) $37x + 27y - 27 = 0$
c) $27x + 37y - 27 = 0$
d) $27x + 27y - 9 = 0$
e) $27x + 37y - 9 = 0$

Como P pertence à parábola, teremos:

$$a = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3}{3} = \frac{1}{27} + 1 = \frac{28}{27}$$

Compreendendo que a bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta $y = x$, teremos que o coeficiente angular da reta procurada é –1, e, assim, sua equação é obtida por:

$$y - \frac{1}{3} = (-1)\cdot\left(x - \frac{28}{27}\right) \rightarrow x + y - \frac{1}{3} - \frac{28}{27} = 0 \rightarrow 27x + 27y - 37 = 0$$

5. Sistema Dom Bosco – Os vértices das hipérboles sempre estão na reta que contém os focos, e sua excentricidade é sempre maior que 1. Logo, pode-se afirmar que a hipérbole de equação $225x^2 - 25y^2 - 900 = 0$ é:

a) 2
b) 6
c) $2\sqrt{10}$
d) $\sqrt{10}$
e) $5\sqrt{2}$

Temos: $225x^2 - 25y^2 = 900$.
Observe que a equação da hipérbole não está na forma reduzida.
Vamos dividir ambos os membros por 900, obtendo:

$$\frac{225x^2}{900} - \frac{25y^2}{900} = \frac{900}{900} \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$$

Portanto, $a^2 = 4$ e $b^2 = 36$.
Daí, vem: $a = 2$ e $b = 6$. Assim,

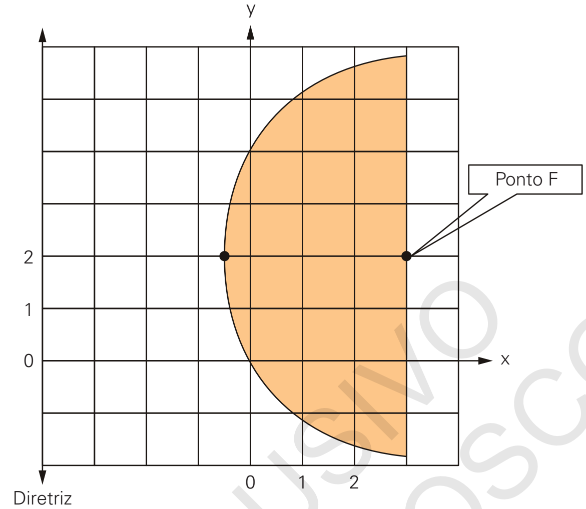
$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 2^2 + 6^2 \rightarrow c^2 = 4 + 36 \rightarrow c^2 = 40 \rightarrow c = \sqrt{40} \rightarrow c = 2\sqrt{10}$$

A excentricidade e será:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{10}}{2}$$

Logo, $e = \sqrt{10}$.

6. UEMA – Uma família da cidade de Cajapió-MA comprou uma antena parabólica e o técnico a instalou acima do telhado. A antena projetou uma sombra na parede do vizinho, que está reproduzida a seguir, coberta com uma folha quadriculada.



Note que a figura projetada na parede é uma cônica. Considerando as medidas mostradas e o sistema cartesiano contido na folha quadriculada, a equação que representa a cônica será

a) $(y - 2)^2 = 7(2x + 1)$
b) $(y + 2)^2 = 7(2x + 1)$
c) $(y - 3)^2 = 12(x + 1)$
d) $(y-2)^2 = -7\left(2x - \frac{1}{7}\right)$
e) $(y+3)^2 = \frac{12}{7}(x-1)$

Temos:
$F = (3, 2)$, e a diretriz da parábola é a reta $x = -4$.
$p = 3 - (-4) = 7$ e $V = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

A equação da parábola será:

$$(y-2)^2 = 2\cdot 7\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \rightarrow (y - 2)^2 = 7(2x + 1)$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. IFCE (adaptado) – A expressão $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ descreve a equação de um(a)

a) hipérbole.
b) parábola.
c) elipse.
d) circunferência.
e) reta.

8. Espcex-SP – Considere as afirmações:

I. Uma elipse tem como focos os pontos F1(− 3, 0) e F2(3, 0), e a medida do eixo maior é 8. Sua equação é $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

II. Os focos de uma hipérbole são $F_1(-10, 0)$ e $F_2(10, 0)$, e sua excentricidade é $\frac{5}{3}$. Sua equação é $16x^2 - 9y^2 = 576$.

III. A parábola $8x = -y^2 + 6y - 9$ tem como vértice o ponto V(3, 0).

Com base nessas afirmações, assinale a alternativa correta.

a) Todas as afirmações são falsas.

b) Apenas as afirmações I e III são falsas.

c) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.

d) Todas as afirmações são verdadeiras.

e) Apenas a afirmação III é verdadeira.

9. Espcex-SP – Uma reta t passa pelo ponto A (− 3, 0) e é tangente à parábola de equação $x = 3y^2$ no ponto P.

Assinale a alternativa que apresenta uma solução correta de acordo com essas informações.

a) t: $x - 10y + 3 = 0$ e P(27, 3)

b) t: $2x - 15y + 6 = 0$ e P(12, 2)

c) t: $2x - 15y + 6 = 0$ e P(12, − 2)

d) t: $y = 0$ e P(0, 0)

e) t: $x + 6y + 3 = 0$ e P(3, − 1)

10. Espcex-SP – A representação no sistema cartesiano ortogonal da equação $9x^2 - y^2 = 36x + 8y - 11$ é dada por

a) duas retas concorrentes.

b) uma circunferência.

c) uma elipse.

d) uma parábola.

e) uma hipérbole.

11. UFPE (adaptado) – Para cada número real a, analise as proposições a seguir, referentes à representação geométrica da equação $x^2 + ay^2 + 2x - 2ay = 0$ em um sistema de coordenadas cartesianas xOy.

a) Se $a = 1$, a equação representa uma circunferência?

b) Se $a = 0$, a equação representa uma reta?

c) Se $a = 3$, a equação representa uma hipérbole?

d) Se $a = -2$, a equação representa uma elipse?

e) Se $a = -1$, a equação representa a união de duas retas?

12. UDESC (adaptado) – Analise as afirmações dadas a seguir e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

( ) A elipse de equação $9x^2 + 4y^2 = 36$ intercepta a hipérbole de equação $x^2 - 4y^2 = 4$ em apenas dois pontos, que são os vértices da hipérbole.

( ) O semieixo maior da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ é paralelo ao eixo real da hipérbole $x^2 - 4y^2 = 4$.

Assinale a alternativa que contém a sequência correta, de cima para baixo.

a) V – V

b) V – F

c) F – V

d) F – F

13. IME-RJ – Determine o produto dos valores máximo e mínimo de y que satisfazem às inequações dadas para algum valor de x.

$2x^2 - 12x + 10 \leq 5y \leq 10 - 2x$

a) $-3, 2$

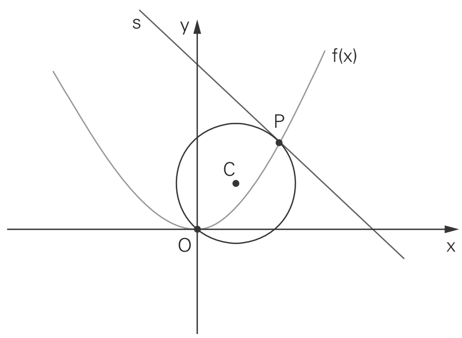
b) $-1,6$

c) 0

d) 1,6

e) 3,2

14. PUC-SP – A função $f(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^2$ e a circunferência de centro C e equação $(x-2)^2+(y-2)^2=8$ se intersectam nos pontos P e O, sendo O a origem do sistema cartesiano, conforme mostra o gráfico.



Fora de escala

A equação da reta s, tangente à circunferência no ponto P, pode ser dada por

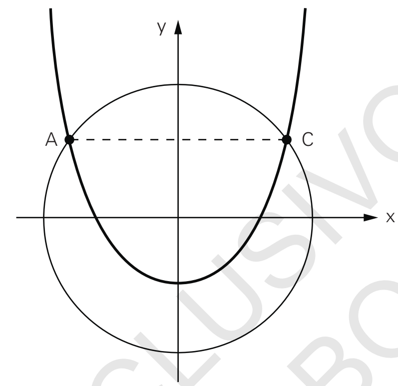
a) $y=-x$

b) $y=-x+8$

c) $y=-x+2$

d) $y=-\frac{x}{2}$

15. UNESP – Os pontos A e C são interseções de duas cônicas dadas pelas equações $x^2+y^2=7$ e $y=x^2-1$, como mostra a figura fora de escala. Sabendo que $\text{tg } 49° \cong \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$ e tomando o ponto $B(0, -\sqrt{7})$, determine a medida aproximada do ângulo $A\hat{B}C$, em graus.



16. Fuvest-SP – No plano cartesiano, um círculo de centro $P = (a, b)$ tangencia as retas de equações $y = x$ e $x = 0$. Se P pertence à parábola de equação $y = x^2$ e $a > 0$, a ordenada b do ponto P é igual a

a) $2+2\sqrt{2}$

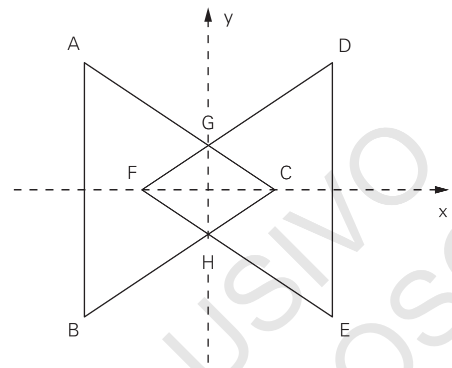
b) $3+2\sqrt{2}$

c) $4+2\sqrt{2}$

d) $5+2\sqrt{2}$

e) $6+2\sqrt{2}$

17. IME-RJ (adaptado) – Os triângulos ABC e DEF são equiláteros com lados iguais a m. A área da figura FHCG é igual à metade da área da figura ABHFG. Determine a equação da elipse de centro na origem e eixos formados pelos segmentos FC e GH.



ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H22

Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como segue:

I. é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;

II. é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1;

III. é o quadrado formado pelos vértices $(-2, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$ e $(-2, 2)$;

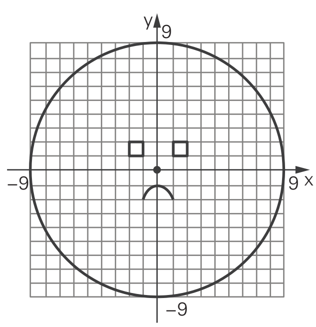
IV. é o quadrado formado pelos vértices $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 2)$;

V. é o ponto $(0, 0)$.

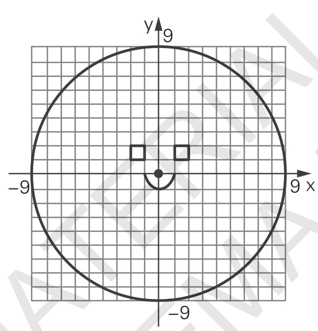
A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento cada um, obtendo uma figura.

Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?

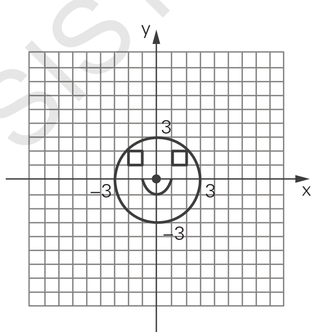
a)



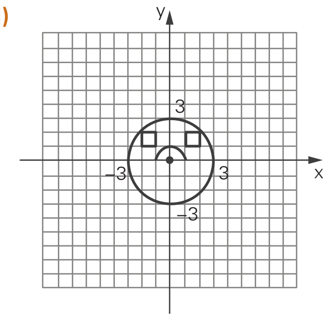
b)



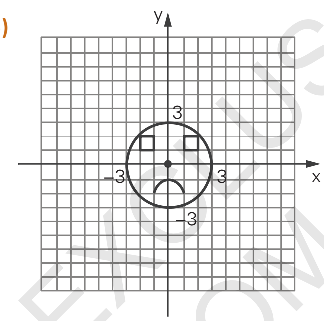
c)



d)



e)



19. UNESP C5-H23

A figura mostra a representação de algumas das ruas de nossas cidades. Essas ruas possuem calçadas de 1,5 m de largura, separadas por uma pista de 7 m de largura. Vamos admitir que:

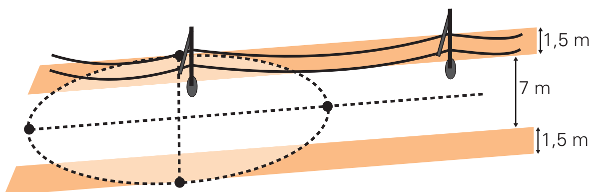
I. os postes de iluminação projetam sobre a rua uma área iluminada na forma de uma elipse de excentricidade 0,943;

II. o centro dessa elipse encontra-se verticalmente abaixo da lâmpada, no meio da rua;

III. o eixo menor da elipse, perpendicular à calçada, tem exatamente a largura da rua (calçadas e pista).

Se desejarmos que as elipses de luz se tangenciem nas extremidades dos eixos maiores, a distância, em metros, entre dois postes consecutivos deverá ser de aproximadamente:

Dados: $0{,}943^2 \approx 0{,}889$ e $\sqrt{0{,}111} \approx 0{,}333$.



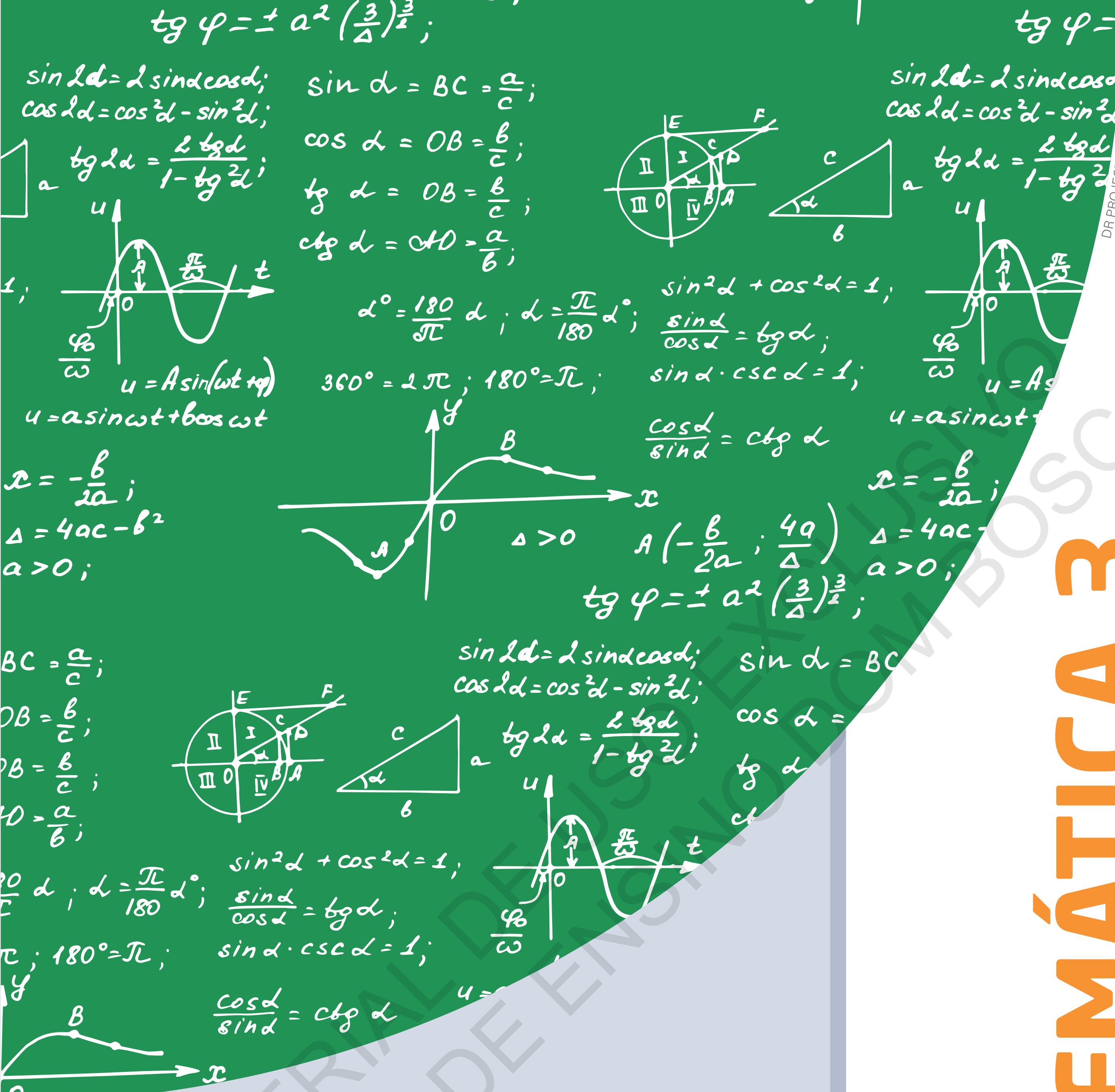
a) 35
b) 30
c) 25
d) 20
e) 15

20. Sistema Dom Bosco C6-H26

Planetas descrevem trajetórias elípticas, enquanto as torres de refrigeração em usinas nucleares possuem formato hiperbólico, que é originado da rotação de uma hipérbole.

Dentre os itens a seguir, qual possui a equação canônica de uma elipse e de uma hipérbole, respectivamente?

a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$
b) $x^2 - y^2 = 0$
c) $x + y - 1 = 0$
d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 ; \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ; \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



DR PROJECT/SHUTTERSTOCK

MATEMÁTICA 3

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

9

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

- Análise combinatória
- Fatorial de um número
- Princípio da contagem
- Diagrama de árvore
- Princípio da preferência (PP)

HABILIDADES

- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- Calcular o fatorial de número natural.
- Determinar o total de possibilidades de ocorrência de um evento usando o princípio fundamental da contagem (PFC) e o princípio da preferência (PP).

ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória é mais uma área da Matemática cujas aplicações podemos observar no cotidiano. Neste módulo, iniciaremos com os estudos sobre a quantidade de possibilidades de determinados eventos ocorrerem, para podermos, enfim, abordar as probabilidades de eles acontecerem.

FATORIAL DE UM NÚMERO

Sendo **n** um número natural maior que 1, o fatorial de **n**, representado por **n!**, é o produto de todos os números naturais de **n** até 1, reduzindo uma unidade por vez.

> **n!**: lê-se "n fatorial".
> Definição em particular: $0! = 1$ e $1! = 1$.
> Exemplos:
> $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
> $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
> $n! = n \cdot (n - 1)! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)!$
> $(n + 2)! = (n + 2) \cdot (n + 1)! = (n + 2) \cdot (n + 1) \cdot n!$

Um recurso muito utilizado para simplificar expressões com fatoriais é desenvolver o fatorial organizando os fatores (produto dos números naturais de n até 1) em ordem decrescente. Observe o exemplo:

$$\frac{50!}{48!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48!}{48!} = 50 \cdot 49 = 2\,450$$

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

A regra para determinar o número de possibilidades de ocorrência de um evento, sem a necessidade de escrita de todos os eventos possíveis, é denominada **princípio fundamental da contagem (PFC)** ou **princípio multiplicativo.**

Por exemplo, um professor licenciado em Geografia (G) e História (H) envia seu currículo para três colégios distintos (A, B e C). Supondo que ele só ministrará aula de uma única disciplina, quantas seriam as possibilidades de trabalho para o professor?

Pelo princípio multiplicativo, podemos obter as possibilidades de trabalho do professor da seguinte maneira:

1º Graduado em Geografia e História: **m** diplomas ($m = 2$).

2º Envio de currículo para os colégios: **n** colégios ($n = 3$).

3º Possibilidades: $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 2 \cdot 3 = 6$.

4º Portanto, há 6 possibilidades distintas de emprego para o professor.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Fuvest-SP – Maria deve criar uma senha de 4 dígitos para sua conta bancária. Nessa senha, somente os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 podem ser usados e um mesmo algarismo pode aparecer mais de uma vez. Contudo, supersticiosa, Maria não quer que sua senha contenha o número 13, isto é, o algarismo 1 seguido imediatamente do algarismo 3. De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?

a) 551
b) 552
c) 553
d) 554
e) 555

Resolução

Pelo princípio multiplicativo, calculamos todas as senhas possíveis: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ senhas.
Ao posicionar os algarismos 1 e 3, formando o número 13, temos as seguintes situações:

1	3	5 Algarismos	5 Algarismos	$5 \times 5 = 25$	75 possibilidades
5 Algarismos	1	3	5 Algarismos	$5 \times 5 = 25$	
5 Algarismos	5 Algarismos	1	3	$5 \times 5 = 25$	

Como a sequência a seguir foi contada duas vezes, temos:

1	3	1	3

$75 - 1 = 74$ possibilidades.

Logo, o número total de senhas possíveis será: $625 - 74 = 551$.

DIAGRAMA DE ÁRVORE

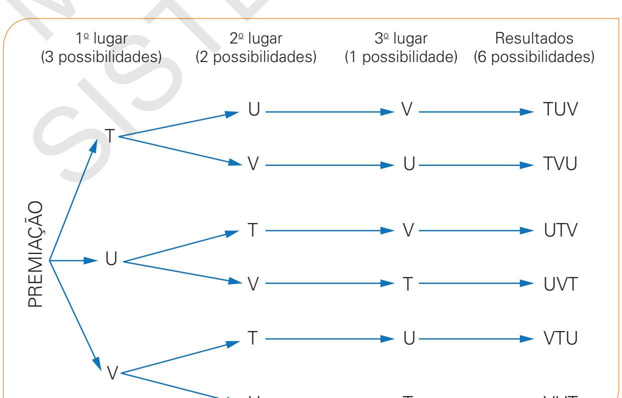
Também conhecida como **árvore de possibilidades**, esta é uma ferramenta usada em análise combinatória para auxiliar na descrição de todas as possibilidades de ocorrência de um evento.

Exemplo:

Anualmente, jornalistas, treinadores, esportistas e público em geral elegem o melhor atleta considerando as principais modalidades esportivas de determinada cidade. Neste ano, os três finalistas são os seguintes atletas:

1. Tadeu (natação): representado pela letra T.
2. Ulisses (futebol): representado pela letra U.
3. Vitor (vôlei): representado pela letra V.

Por meio da árvore de possibilidades, vamos analisar as possíveis situações de premiação desses atletas.



Pelo diagrama, notamos que há 6 maneiras distintas de premiação dos atletas.

O mesmo número seria obtido se aplicássemos o princípio fundamental da contagem.

Assim, as possibilidades de premiação são: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Atenção!

Se um acontecimento pode ser analisado em etapas sucessivas e independentes, de modo que:

- n_1 seja o número de possibilidades na primeira etapa;
- n_2 seja o número de possibilidades na segunda etapa;
- n_k seja o número de possibilidades na k-ésima etapa.

Então, o número de possibilidades de ocorrência do evento será $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

PRINCÍPIO DA PREFERÊNCIA

Em combinatória, podemos nos deparar com situações em que existem condições específicas que influenciam diretamente o número de possibilidades de um evento ocorrer.

Por exemplo: vamos analisar de quantas maneiras distintas 5 pessoas podem se posicionar nos 5 bancos de um veículo, supondo que apenas 2 pessoas dirigem.

Pelo princípio da preferência, o estudo do número de possibilidades deve começar sempre pelas etapas em que haja restrição, dando-se preferência às que tenham maior restrição.

Sejam **a**, **b**, **c**, **d** e **e** os lugares do carro, conforme a representação acima. Sabendo que o local **a** apresenta restrição (já que só pode ser ocupado pelas duas pessoas que dirigem), para sabermos de quantas maneiras distintas as pessoas podem se posicionar dentro do carro, realizamos as seguintes etapas:

a	b	c	d	e
2	4	3	2	1
1ª etapa	2ª etapa	3ª etapa	4ª etapa	5ª etapa

Na 1ª etapa, por haver restrição, apenas as duas pessoas que dirigem podem ocupar o lugar **a**.

Na 2ª etapa, como há uma pessoa dirigindo, restam quatro pessoas que podem ocupar o lugar **b**. O mesmo ocorre nas próximas etapas em relação à análise dos lugares **c**, **d** e **e**, havendo sempre uma possibilidade a menos por lugar, já que os outros lugares já foram ocupados por alguém.

Assim, aplicando o princípio da preferência (PP), obtemos:

$$2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$$

Portanto, os cinco passageiros podem se posicionar de 48 maneiras distintas dentro do carro.

Nos casos em que, mesmo com o uso do princípio da preferência, ocorrem impasses, usa-se o **princípio aditivo** da contagem, pelo qual é realizada a união de dois ou mais conjuntos que são gerados em virtude das restrições em cada situação.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. Sistema Dom Bosco – Quantos números pares de quatro algarismos distintos maiores que 2 999 existem no nosso sistema de numeração?

milhar	centena	dezena	unidade
restrições (0, 1 e 2)			restrições (1, 3, 5, 7 e 9)

Resolução

Utilizando o princípio da preferência, a 1ª etapa deve ser a de maior restrição, que, nesse caso, é a do algarismo das unidades. Nele observamos se o número é par ou ímpar, sendo possível utilizar 5 algarismos (0, 2, 4, 6 e 8). Já a 2ª etapa se refere ao algarismo do milhar, que também apresenta restrições. Como o número par deve ser maior que 2 999, restam apenas 7 algarismos a serem utilizados (3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9), caso seja escolhido o zero como unidade. Ou podem restar 6 algarismos distintos, caso a escolha não seja o zero.

Logo, para a solução do problema, nós o dividiremos em dois casos:

- Caso 1: números que terminam em zero.

milhar	centena	dezena	unidade
7	8	7	1
1ª etapa restrições (0, 1 e 2)			1ª etapa condição (apenas o zero)

Possibilidades do caso 1: $7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 392$.

- Caso 2: números que terminam em 2, 4, 6 ou 8.

milhar	centena	dezena	unidade
6	8	7	4
2ª etapa restrições (0, 1, 2 ou o algarismo da unidade)			1ª etapa condição (2, 4, 6 ou 8)

Possibilidades do caso 2: $6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 1\,344$.

Assim, pelo princípio aditivo, o total de números pares possíveis é $392 + 1\,344 = 1\,736$.

Logo, há 1 736 números pares maiores que 2 999 com quatro algarismos distintos.

ROTEIRO DE AULA

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Fatorial de um número

Sendo n um número natural maior que 1, o fatorial de n, representado por n!, é o produto de todos os números naturais menores ou iguais a n.

$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 1!$

Princípio fundamental da contagem

A regra que permite determinar o número de possibilidades de ocorrência de um evento, sem a necessidade de escrita de todos os eventos possíveis, é denominada

princípio fundamental da contagem (PFC)

ou

princípio multiplicativo.

A árvore de possibilidades é uma ferramenta usada em análise combinatória que auxilia na descrição de todas as possibilidades de ocorrência de um evento.

Pelo princípio da preferência, o estudo do número de possibilidades deve começar sempre pelas etapas em que haja restrição, dando-se preferência às que tenham maior restrição.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UPE (adaptado) – A prova final de Geografia de uma escola é composta de 5 itens com 4 alternativas do tipo a, b, c e d. De quantas maneiras diferentes um estudante poderá responder esta prova, de forma que ele só assinale apenas uma alternativa em cada questão?

Como existem 4 formas de responder a cada um dos 5 itens, pelo princípio multiplicativo, a resposta é $4^5 = 1\,204$.

2. Enem C7-H28

O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o *slogan* "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

JUNTOS NUM SÓ RITMO

Disponível em: <www.pt.fifal.com>. Acesso em: 19 nov. 2013. (Adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

a) 15
b) 30
c) 108
d) 360
e) 972

Considerando as regiões a serem pintadas:

Levando em conta que existe chance de as cores se repetirem e que não há obrigação de se usarem as 4 cores, pode-se calcular:

$D \cdot E \cdot F \cdot C \cdot B \cdot A \rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 972$ diferentes opções.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

3. Enem C7-H30

Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas.

Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por

a) 100
b) 90
c) 80
d) 25
e) 20

Deduzindo que serão empregadas apenas as vogais A, E, I, O e U, pelo princípio multiplicativo, a resposta será: $10 \cdot 10 = 100$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

4. Espcex-SP – Duas instituições financeiras fornecem senhas para seus clientes, construídas segundo os seguintes métodos:

1ª instituição: **5** caracteres distintos formados por elementos do conjunto **{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}**;

2ª instituição: **6** caracteres distintos formados por duas letras, dentre as vogais, na primeira e na segunda posições da senha, seguidas por **4** algarismos dentre os elementos do conjunto **{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}**.

Para comparar a eficiência entre os métodos de construção das senhas, medindo sua maior ou menor vulnerabilidade, foi definida a grandeza "força da senha", de forma que, quanto mais senhas puderem ser criadas pelo método, mais "forte" será a senha.

Com base nessas informações, pode-se dizer que, em relação à 2ª instituição, a senha da 1ª instituição é:

a) 10% mais fraca.
b) 10% mais forte.
c) De mesma força.
d) 20% mais fraca.
e) 20% mais forte.

Total de senhas da 1ª instituição: n.

Para definirmos n, precisamos escolher 5 números principais do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Então, $n = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

Total de senhas da 2ª instituição: m.

Para indicarmos, precisamos escolher 2 vogais principais do conjunto {A, E, I, O, U} e 4 números principais do conjunto {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Logo, $m = 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Elaborando $\frac{n}{m}$:

$$\frac{n}{m} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}$$

$$\frac{n}{m} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{n}{m} = 0{,}9$$

$n = 0{,}9m$

$n = (1 - 0{,}1)m$

Portanto, em relação à 2ª instituição, a senha da 1ª instituição é 10% mais fraca.

5. Unicamp-SP – O número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele há pelo menos três pessoas nascidas no mesmo dia da semana é igual a:

a) 21
b) 20
c) 15
d) 14

Como a semana tem 7 dias, para nos certificarmos de que haverá pelo menos 3 pessoas nascidas no mesmo dia da semana, é importante que haja pelo menos $2 \cdot 7 + 1 = 15$ pessoas no grupo.

6. UPF-RS (adaptado) – As portas de acesso de todos os quartos de certo hotel são identificadas por meio de números ímpares formados com 3 elementos do conjunto S = {3, 4, 5, 6, 7, 8}. Nessas condições, qual o número máximo de quartos desse hotel?

$6 \cdot 6 \cdot 3 \rightarrow$ número ímpar.

Final 3, 5 ou 7.

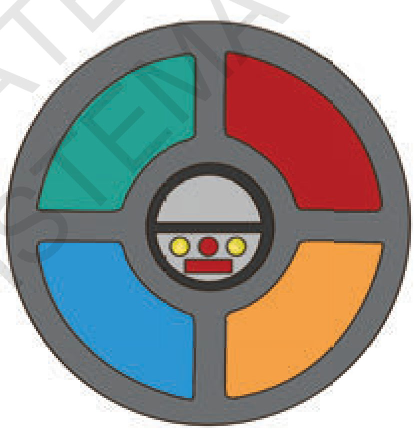
Total $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$ opções.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UEMG

"Genius era um brinquedo muito popular na década de 1980 (...). O brinquedo buscava estimular a memorização de cores e sons. Com formato semelhante a um OVNI, possuía 4 botões de cores distintas que emitiam sons harmônicos e se iluminavam em sequência. Cabia aos jogadores repetir o processo sem errar".

Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre. (Adaptado).



Considerando uma fase do jogo em que 3 luzes irão acender, de forma aleatória e em sequência, podendo cada cor acender mais de uma vez.

O número máximo de formas que essa sequência de 3 luzes poderá acender é:

a) 12
b) 24
c) 36
d) 64

8. UPE – Um palíndromo ou capicua é um número que se lê da mesma maneira nos dois sentidos, ou seja, da esquerda para a direita ou ao contrário, como 333, 1 661 e 28 482.

Assinale a alternativa correspondente à quantidade de palíndromos que são números pares de cinco algarismos do nosso sistema de numeração.

a) 300
b) 400
c) 500
d) 600
e) 800

9. PUC-SP – Uma pessoa dispõe das seguintes cores de tinta: amarela, azul, verde, vermelha e branca, e irá utilizá-las para pintar um pote. Nesse pote serão pintadas a tampa, a lateral e uma lista na lateral, de modo que a tampa e a lateral poderão ter a mesma cor ou cores diferentes. O número de maneiras distintas de pintar esse pote é:

a) 100
b) 80
c) 60
d) 40

10. Sistema Dom Bosco – Qual o valor de $\frac{10!}{8!}$?

11. Fatec-SP – Dispondo de cinco cores distintas, uma pessoa pretende pintar as letras da palavra FATEC de acordo com os seguintes critérios:

- na palavra, letras que são equidistantes da letra T terão a mesma cor;
- letras adjacentes serão pintadas de cores distintas, e
- cada letra será pintada com uma única cor.

O número de modos distintos de se realizar essa pintura é:

a) 120
b) 90
c) 80
d) 50
e) 40

12. UECE – A quantidade de números inteiros positivos com quatro algarismos distintos que são múltiplos de quatro é:

a) 1 136
b) 1 114
c) 1 126
d) 1 120

13. Unicamp-SP – Para acomodar a crescente quantidade de veículos, estuda-se mudar as placas, atualmente com três letras e quatro algarismos numéricos, para quatro letras e três algarismos numéricos, como está ilustrado abaixo.

ABC 1234	ABCD 123

Considere o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9. O aumento obtido com essa modificação em relação ao número máximo de placas em vigor seria:

a) inferior ao dobro.
b) superior ao dobro e inferior ao triplo.
c) superior ao triplo e inferior ao quádruplo.
d) mais que o quádruplo.

14. UFU-MG – Para realizar uma venda, uma loja virtual solicita de seus clientes o cadastramento de uma senha pessoal que permitirá acompanhar a entrega de sua compra. Essa senha anteriormente era composta por quatro algarismos e uma letra (minúscula), sem quaisquer restrições de posicionamentos entre letra e algarismos. Com o grande aumento no número de vendas, houve a necessidade de ampliação no número de senhas, as quais passaram a ser compostas por cinco algarismos e uma letra (minúscula). Sabe-se que existem 26 letras no alfabeto e 10 algarismos disponíveis.

Se denotarmos por N e M, respectivamente, o número total de senhas possíveis, antes e após a mudança, então, a relação entre N e M é dada por:

a) $M = 10 \cdot N$
b) $M = 5!N$
c) $M = 6!N$
d) $M = 12 \cdot N$

15. Enem C7-H30

Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta-corrente pela internet.

Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.

Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.

O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

a) $\dfrac{62^6}{10^6}$
b) $\dfrac{62!}{10!}$
c) $\dfrac{62!\,4!}{10!\,56!}$
d) $62! - 10!$
e) $62^6 - 10^6$

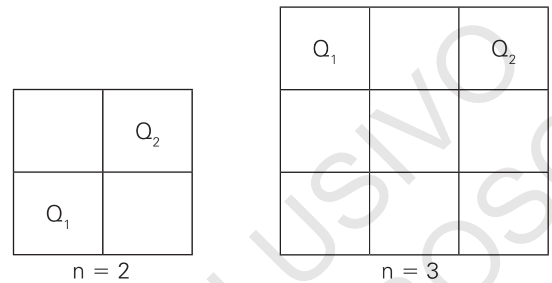
16. PUC-RJ – Mônica tem uma blusa de cada uma das seguintes cores: branca, vermelha, amarela, preta e verde. Ela também tem uma calça de cada uma das seguintes cores: preta, azul, cinza e branca.

a) De quantas maneiras Mônica pode escolher uma blusa e uma calça para sair?

b) De quantas maneiras Mônica pode escolher uma blusa e uma calça de cores diferentes uma da outra?

c) Na segunda-feira, Mônica usou calça azul e camisa preta. Na terça-feira, ela quer escolher uma calça e uma camisa de cores diferentes uma da outra. Sabendo que as roupas que ela usou na segunda-feira estão lavando (e apenas estas), de quantas maneiras ela pode escolher suas roupas?

17. Fuvest-SP – Um quadriculado é formado por n × n quadrados iguais, conforme ilustrado para n = **2** e n = **3**. Cada um desses quadrados será pintado de azul ou de branco. Dizemos que dois quadrados **Q1** e **Q2** do quadriculado estão conectados se ambos estiverem pintados de azul e se for possível, por meio de movimentos horizontais e verticais entre quadrados adjacentes, sair de **Q1** e chegar a **Q2** passando apenas por quadrados pintados de azul.



a) Se n = 2, de quantas maneiras distintas será possível pintar o quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto inferior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

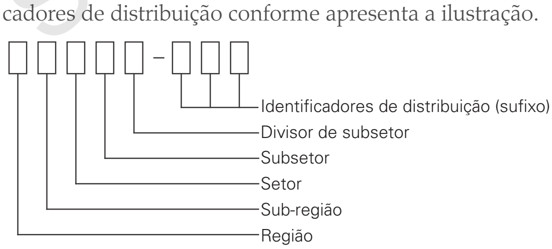
b) Suponha que n = 3 e que o quadrado central esteja pintado de branco. De quantas maneiras distintas será possível pintar o restante do quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto superior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

c) Suponha que n = 3. De quantas maneiras distintas será possível pintar o quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto superior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. Enem C7-H28

O Código de Endereçamento Postal (CEP) é um código numérico constituído por oito algarismos. Seu objetivo é orientar e acelerar o encaminhamento, o tratamento e a distribuição de objetos postados nos Correios. Ele está estruturado segundo o sistema métrico decimal, sendo que cada um dos algarismos que o compõe codifica região, sub-região, setor, subsetor, divisor de subsetor e identificadores de distribuição conforme apresenta a ilustração.



O Brasil encontra-se dividido em dez regiões postais para fins de codificação. Cada região foi dividida em dez sub-regiões. Cada uma dessas, por sua vez, foi dividida em dez setores. Cada setor, dividido em dez subsetores. Por fim, cada subsetor foi dividido em dez divisores de subsetor. Além disso, sabe-se que os três últimos algarismos após o hífen são denominados de sufixos e destinam-se à identificação individual de localidades, logradouros, códigos especiais e unidades dos Correios.

A faixa de sufixos utilizada para codificação dos logradouros brasileiros inicia em 000 e termina em 899.

Disponível em: <www.correios.com.br>.
Acesso em: 22 ago. 2017. (Adaptado).

Quantos CEPs podem ser formados para a codificação de logradouros no Brasil?

a) $5 \cdot 0 + 9 \cdot 10^2$
b) $10^5 + 9 \cdot 10^2$
c) $2 \cdot 9 \cdot 10^7$
d) $9 \cdot 10^2$
e) $9 \cdot 10^7$

19. Enem C7-H30

Desde 1999 houve uma significativa mudança nas placas dos carros particulares em todo o Brasil. As placas, que antes eram formadas apenas por seis caracteres alfanuméricos, foram acrescidas de uma letra, passando a ser formadas por sete caracteres, sendo que os três primeiros caracteres devem ser letras (dentre as 26 letras do alfabeto) e os quatro últimos devem ser algarismos (de 0 a 9) Essa mudança possibilitou a criação de um cadastro nacional unificado de todos os veículos licenciados e ainda aumentou significativamente a quantidade de combinações possíveis de placas. Não são utilizadas placas em que todos os algarismos sejam iguais a zero.

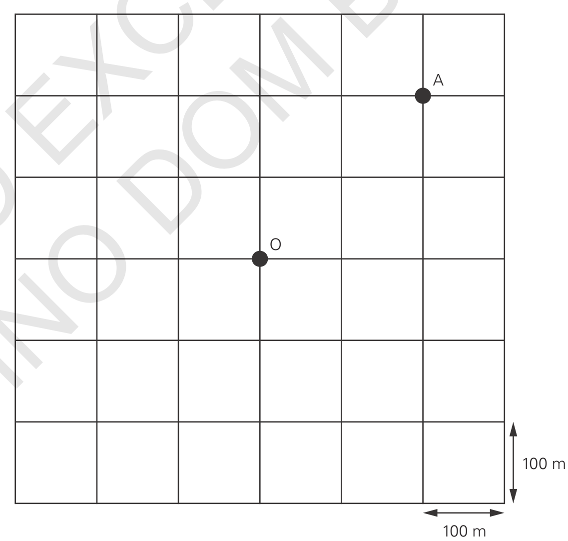
Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 14 jan. 2012. (Adaptado.)

Nessas condições, a quantidade de placas que podem ser utilizadas é igual a:

a) $26^3 + 9^4$
b) $26^3 \cdot 9^4$
c) $26^3(10^4 - 1)$
d) $(26^3 + 10^4) - 1$
e) $(26^3 \cdot 10^4) - 1$

20. Enem C7-H30

As ruas de uma cidade estão representadas por linhas horizontais e verticais na ilustração. Para um motorista trafegando nessa cidade, a menor distância entre dois pontos não pode ser calculada usando o segmento ligando esses pontos, mas sim pela contagem do menor número de quadras horizontais e verticais necessárias para sair de um ponto e chegar ao outro. Por exemplo, a menor distância entre o ponto de táxi localizado no ponto O e o cruzamento das ruas no ponto A, ambos ilustrados na figura, é de 400 metros.



Um indivíduo solicita um táxi e informa ao taxista que está a 300 metros do ponto O, segundo a regra de deslocamentos citada, em uma determinada esquina. Entretanto, o motorista ouviu apenas a informação da distância do cliente, pois a bateria de seu celular descarregou antes de ouvir a informação de qual era a esquina.

Quantas são as possíveis localizações desse cliente?

a) 4
b) 8
c) 12
d) 16
e) 20

10 PERMUTAÇÕES E ARRANJOS

- Permutação
- Permutação com repetição
- Arranjos

HABILIDADES

- Resolver problemas de contagem envolvendo permutações simples e com repetições.
- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- Resolver problemas de contagem envolvendo arranjos simples

PERMUTAÇÕES

Dado um conjunto com **n** elementos distintos, denomina-se **permutação** desses **n** elementos todo agrupamento ordenado formado pelos **n** elementos.

Vamos analisar a seguinte situação: em uma gôndola de supermercado, há tangerina, limão, maçã e kiwi. Supondo que as frutas não devem ser misturadas, de quantas maneiras distintas podemos organizá-las?

Observe que existem:

- 4 tipos de frutas para ocupar a primeira posição da prateleira;
- 3 tipos para a segunda posição;
- 2 tipos para a terceira posição;
- 1 tipo para a quarta e última posição.

Logo, há $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades de organização da prateleira.
Problemas de contagem envolvendo permutações podem ser resolvidos com o uso da fórmula:

$$P_n = n!$$

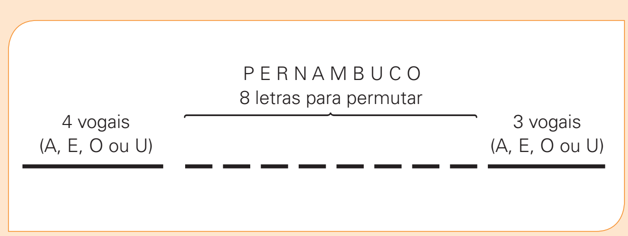
ANAGRAMA

A permutação das letras de uma palavra, tendo ou não significado em nossa língua, constitui um anagrama.

Por exemplo, considerando todas as letras da palavra PATO, obtemos alguns anagramas, como APTO, TAPO, TOPA, PTOA, OAPT...

Como PATO tem quatro letras distintas, o número total de anagramas é dado por $P_4 = 4! = 24$. Portanto, é possível obter 24 anagramas.

No entanto, algumas restrições podem ser impostas no cálculo dos anagramas de uma palavra. Exemplo: quantos anagramas que iniciam e terminam com vogais é possível obter com a palavra PERNAMBUCO? Observe.



A quantidade de anagramas nessa condição é $4 \cdot P_8 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 8! = 483\,840$.

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Agora, vamos analisar situações em que há repetição de elementos ou letras.

Por exemplo, quantos anagramas podemos formar com a palavra LEITE?

Nesse caso, a letra E aparece duas vezes, sem alterar o resultado final. Assim, LEIET, LEEIT e EITLE são alguns dos 20 anagramas possíveis.

De maneira geral, para determinarmos as permutações com elementos repetidos, aplicamos a seguinte fórmula:

$$P_n^{n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

Também é importante ter em mente que n_1, n_2, n_3, ..., n_r corresponde ao número de repetições de cada elemento, com $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Quantos anagramas é possível obter com a palavra BRASIL nos seguintes casos:

a) anagramas que iniciam com vogal;

b) anagramas que têm a sílaba BRA.

Resolução

a) Há 2 vogais (A e I) que podem iniciar os anagramas. Escolhida a vogal, restarão 5 letras para permutar. Assim:

$2 \cdot P_5 = 2 \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240$

Logo, há 240 anagramas possíveis.

b) A sílaba BRA representa uma posição, enquanto as outras letras representam as demais posições.

BRA ___ ___ ___

Resolvendo a permuta (P_4), temos:

$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Portanto, há 24 anagramas possíveis com a sílaba BRA.

2. Sistema Dom Bosco – Quantas permutações podemos obter com a palavra BANANA?

Resolução

Na palavra BANANA, há 3 vezes a letra A e 2 vezes a letra N. Assim, o total de anagramas será:

$n = 6$

$n_1 = 3$

$n_2 = 2$

$$P_6^{3,\ 2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{2} = 60$$

Portanto, há 60 anagramas possíveis.

ARRANJO SIMPLES

Dado um conjunto de n elementos distintos, denomina-se **arranjo de n elementos**, escolhidos **p** a **p** (com $p \leq n$), qualquer agrupamento ordenado de **p** elementos distintos escolhidos entre os **n** existentes.

Para tornar mais clara a definição teórica de arranjo, vamos imaginar a situação a seguir.

Quatro equipes (A, B, C e D) participarão de um torneio interescolar de handebol. Serão premiadas com medalhas apenas as duas primeiras colocadas do torneio. O resultado pode ocorrer de quantas maneiras distintas?

Como há um número pequeno de equipes participando do torneio, podemos agrupar todas as possibilidades de premiação. Obtemos, assim, a seguinte tabela:

1º lugar	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D
2º lugar	B	C	D	A	C	D	A	B	D	A	B	C

Notamos que há 12 maneiras diferentes de premiação.

A ordem em que a equipe aparece na tabela influencia no número de possibilidades de premiação. Com isso, concluímos que cada resultado da premiação se relaciona a um arranjo das quatro equipes participantes (**n**), posicionadas em primeiro ou segundo lugares (**p** a **p**).

Assim, os problemas de contagem envolvendo arranjos podem ser resolvidos por meio da fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Observação!

As permutas constituem um caso particular de arranjos. Assim, dados **n** elementos distintos, todo arranjo formado exatamente por esses **n** elementos corresponde a uma permutação desses elementos.

Fazendo p = n na fórmula do arranjo, temos:

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1!} = n! = P_n$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3. UFC-CE – Assinale a alternativa que consta a quantidade de números inteiros formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre 1, 3, 5, 7 e 9, e que são maiores que 200 e menores que 800.

a) 30

b) 36

c) 42

d) 48

e) 54

Resolução

Os números maiores que 200 e menores que 800 começam por 3, 5 ou 7. Como os algarismos são distintos, a posição de cada um deles altera o resultado (357 ≠ 753).

Começando por 3, restam os algarismos 1, 5, 7 e 9.

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$$

Iniciando por 5, sobram os algarismos 1, 3, 7 e 9.

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$$

Começando por 7, restam os algarismos 1, 3, 5 e 9.

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$$

Assim, temos: 12 + 12 + 12 = 36.

Portanto, há 36 números maiores que 200 e menores que 800 que podem ser formados com os algarismos distintos citados no enunciado.

4. Sistema Dom Bosco – Um campeonato de futebol amador conta com 10 equipes, porém apenas as 3 primeiras colocadas receberão medalhas. De quantas maneiras distintas pode ocorrer a premiação desse torneio?

Resolução

$n = 10$; $p = 3$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \rightarrow A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$$

Portanto, há 720 maneiras distintas de a premiação desse torneio acontecer.

Observação: como há um grande número de equipes participantes, é viável usar a fórmula do arranjo, em vez de se construir a árvore de possibilidades ou a tabela para agrupar todos os arranjos possíveis.

PERMUTAÇÃO SIMPLES E COM REPETIÇÃO

Permutação

$P_n = n!$

Permutação com repetição

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

ARRANJO SIMPLES

Arranjo simples

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UPE – Na comemoração de suas Bodas de Ouro, Sr. Manuel e D. Joaquina resolveram registrar o encontro com seus familiares através de fotos. Uma delas sugerida pela família foi dos avós com seus 8 netos. Por sugestão do fotógrafo, na organização para a foto, todos os netos deveriam ficar entre os seus avós.

De quantos modos distintos Sr. Manuel e D. Joaquina podem posar para essa foto com os seus netos?

a) 100
b) 800
c) 40 320
d) 80 640
e) 3 628 800

Acreditando que todos vão aparecer na foto lado a lado, teremos 2 opções para os avós e $P_8 = 8! = 40\,320$ opções para os netos. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, existem $2 \cdot 40\,320 = 80\,640$ formas distintas de se fazer a foto.

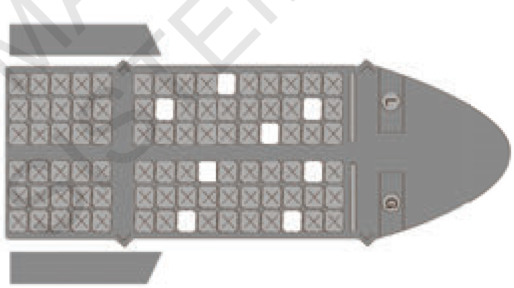
2. Unigranrio-RJ (adaptado) – Quantos são os anagramas da palavra VESTIBULAR, em que as consoantes aparecem juntas, mas em qualquer ordem?

VESTIBULAR → Há 6 consoantes

$P_6 \cdot P_5 = 6! \cdot 5! = 86\,400$

3. Enem C1-H2

Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X, e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: <gebh.net>. Acesso em 30 out. 2013. (Adaptado.)

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

a) $\dfrac{9!}{2!}$

b) $\dfrac{9!}{7! \cdot 2!}$

c) $7!$

d) $\dfrac{5!}{2!} \cdot 4!$

e) $\dfrac{5!}{4!} \cdot \dfrac{4!}{3!}$

A solução pedida se refere ao número de arranjos simples de 9 objetos ocupados 7 a 7.

Ou seja, $A_{9,7} = \dfrac{9!}{2!}$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

4. IMED-RS

Desenvolvido em 1835, pelo pintor e inventor Samuel Finley Breese Morse, o Código Morse é um sistema binário de representação a distância de números, letras e sinais gráficos, utilizando-se de sons curtos e longos, além de pontos e traços para transmitir mensagens. Esse sistema é composto por todas as letras do alfabeto e todos os números. Os caracteres são representados por uma combinação específica de pontos e traços [...]

Fonte: FRANCISCO, Wagner de Cerqueria e. Código Morse. *Brasil Escola*. Disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/geografia/codigo-morse.htm>. Acesso em: 3 out. 2017.

Considerando o exposto no texto e um conjunto de sinais composto de 2 traços e 3 pontos, quantas mensagens podem ser representadas usando todos os elementos do conjunto?

a) 120 mensagens
b) 10 mensagens
c) 20 mensagens
d) 200 mensagens
e) 30 mensagens

Uma solução é verificar quantas montagens gráficas seriam possíveis com 2 traços e 3 pontos. Assim, isso se refere a um problema de permutação com repetição. Logo:

$$p_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

5. UNESP – O conselho administrativo de um sindicato é constituído por doze pessoas, das quais uma é presidente deste conselho. A diretoria do sindicato tem quatro cargos a serem preenchidos por membros do conselho, sendo que o presidente da diretoria e do conselho não devem ser a mesma pessoa. De quantas maneiras diferentes esta diretoria poderá ser formada?

a) 40
b) 7 920
c) 10 890
d) 11!
e) 12!

Como são 12 cargos para o conselho, e o presidente do conselho não pode ser do conselho, temos para o presidente da diretoria somente $A_{11,1}$ possibilidades.

Então, sobram 3 cargos, dos quais o presidente do conselho faz parte.

Então: $A_{11,1} \cdot A_{11,3} = \dfrac{11!}{(11-1)!} \cdot \dfrac{11!}{(11-3)!} = 11 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 10\,890.$

6. PUC-MG (adaptado) – Um bufê produz 6 tipos de salgadinhos e 3 tipos de doces para oferecer em festas de aniversário. Se em certa festa devem ser servidos 3 tipos desses salgados e 2 tipos desses doces, o bufê tem x maneiras diferentes de organizar esse serviço. Calcule o valor de x.

Para o bufê, teremos de calcular quantos salgados e doces poderão ser servidos.

Salgados: $A_{6,3} = \dfrac{6!}{(6-3)!} = 120.$

Doces: $A_{3,2} = \dfrac{3!}{(3-2)!} = 6.$

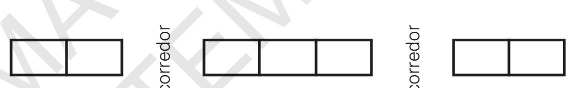
Logo, o total é dado por $120 \cdot 6 = 720$ maneiras.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UEG-GO (adaptado) – Uma comissão será composta pelo presidente, pelo tesoureiro e pelo secretário. Cinco candidatos se inscrevem para essa comissão, na qual o mais votado será o presidente, o segundo mais votado, o tesoureiro, e o menos votado, o secretário.

Dessa forma, de quantas maneiras possíveis essa comissão poderá ser formada?

8. Mackenzie-SP – Num avião, uma fila tem 7 poltronas dispostas como na figura abaixo.



Os modos de João e Maria ocuparem duas poltronas dessa fila, de modo que não haja um corredor entre eles, são em número de:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 10
e) 12

9. IFPE – Os alunos do curso de Computação Gráfica do *campus* Olinda estão desenvolvendo um vídeo com todos os anagramas da palavra CARNAVAL. Se cada anagrama é mostrado durante 0,5 s na tela, a animação completa dura:

a) menos de 1 minuto.
b) menos de 1 hora.
c) menos de meia hora.
d) menos de 10 minutos.
e) mais de 1 hora.

10. PUC-SP – No vestiário de uma academia de ginástica há exatamente 30 armários, cada qual para uso individual. Se, no instante em que dois alunos dessa academia entram no vestiário para mudar suas roupas, apenas 8 dos armários estão desocupados, quantas opções eles terão para escolher seus respectivos armários?

a) 14
b) 28
c) 48
d) 56
e) 112

11. UFES – Quantos são os números naturais de cinco algarismos, na base 10, que têm todos os algarismos distintos e nenhum deles igual a 8, 9 ou 0? Quantos deles são pares?

12. PUC-SP – A secretária de um médico precisa agendar quatro pacientes, A, B, C e D, para um mesmo dia. Os pacientes A e B não podem ser agendados no período da manhã e o paciente C não pode ser agendado no período da tarde.

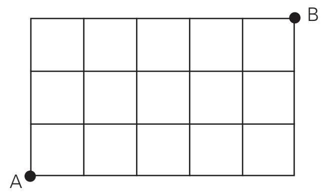
Sabendo que para esse dia estão disponíveis 3 horários no período da manhã e 4 no período da tarde, o número de maneiras distintas de a secretária agendar esses pacientes é:

a) 72
b) 126
c) 138
d) 144

13. EFOMM-RJ – Quantos anagramas é possível formar com a palavra CARAVELAS, não havendo duas vogais consecutivas e nem duas consoantes consecutivas?

a) 24
b) 120
c) 480
d) 1 920
e) 3 840

14. UPF-RS – Na figura a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B é:



a) 40 320
b) 6 720
c) 256
d) 120
e) 56

15. Espcex-SP – Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 3, 5, 7, 9 e, escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. A soma de todos os números assim formados é igual a:

a) 1 000 000
b) 1 111 100
c) 6 000 000
d) 6 666 000
e) 6 666 600

16. Mackenzie-SP – Cinco casais resolvem ir ao teatro e compram os ingressos para ocuparem todas as 10 poltronas de uma determinada fileira. O número de maneiras que essas 10 pessoas podem se acomodar nas 10 poltronas, se um dos casais brigou, e eles não podem se sentar lado a lado é:

a) $9 \cdot (9!)$
b) $8 \cdot (9!)$
c) $8 \cdot (8!)$
d) $\dfrac{10!}{2}$
e) $\dfrac{10!}{4}$

17. Mackenzie-SP – Uma prova de atletismo é disputada por 9 atletas, dos quais apenas 4 são brasileiros. Os resultados possíveis para a prova, de modo que pelo menos um brasileiro fique numa das três primeiras colocações, são em número de:

a) 426
b) 444
c) 468
d) 480
e) 504

18. Enem C1-H2

Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a) $20 \cdot 8! + (3!)^2$

b) $8! \cdot 5! \cdot 3!$

c) $\dfrac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^8}$

d) $\dfrac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^2}$

e) $\dfrac{16!}{2^8}$

19. Enem C1-H2

Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: <www.infowester.com>. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por:

a) $10^2 \cdot 26^2$

b) $10^2 \cdot 52^2$

c) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \dfrac{4!}{2!}$

d) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$

e) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$

20. Fuvest-SP C7-H28

Vinte times de futebol disputam a Série A do Campeonato Brasileiro, sendo seis deles paulistas. Cada time joga duas vezes contra cada um dos seus adversários. A porcentagem de jogos nos quais os dois oponentes são paulistas é:

a) menor que 7%.

b) maior que 7%, mas menor que 10%.

c) maior que 10%, mas menor que 13%.

d) maior que 13%, mas menor que 16%.

e) maior que 16%.

11 COMBINAÇÃO

- Combinação
- Números binomiais
- Triângulo de Pascal

HABILIDADES

- Resolver problemas de contagem envolvendo combinações.
- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

COMBINAÇÃO

Dados **n** elementos distintos, denomina-se **combinação dos n elementos**, escolhidos **p** a **p** (com p ≤ n), qualquer agrupamento não ordenado ou subconjunto formado por **p** elementos distintos escolhidos entre os **n** existentes.

Para entendermos melhor a definição teórica de combinação, vamos imaginar a situação a seguir.

Um casal vai organizar a festa de aniversário do filho. Entre tantas coisas para se preocuparem, a escolha do cardápio é algo relevante. Na festa serão servidos coxinha (C), kibe (K), risole (R) e esfiha (E). Por uma questão de organização de trabalho na cozinha de onde ocorrerá o evento, serão servidas pequenas porções com três variedades de salgados. Nesse contexto, quantas porções diferentes podem ser obtidas?

Na tabela a seguir, estão as combinações de todos os pratos possíveis com três salgados.

CKR	KCR	RCK	ECK
CKE	KCE	RCE	ECR
CRK	KRC	RKC	EKC
CRE	KRE	RKE	EKR
CEK	KEC	REK	ERC
CER	KER	REC	ERK

Podemos observar que há 24 maneiras de arranjar os pratos com três salgados. Porém, ao colocarmos em um prato coxinha, kibe e risole (CKR) e em outro kibe, risole e coxinha (KRC), temos a mesma combinação de salgados. Nesse caso, a ordem em que aparecem os produtos não influencia no resultado final, já que o convidado irá saborear os mesmos salgados do prato, independentemente de sua disposição.

Problemas de combinação de elementos que envolvem uma quantidade maior de variáveis são mais complicados de serem interpretados por meio de tabelas ou figuras. Então, para resolvermos problemas de contagem envolvendo combinações, utilizamos a fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – O novo conselho diretivo de uma empresa será composto de 4 homens e 3 mulheres. Foram inicialmente selecionados para as vagas 7 homens e 5 mulheres. De quantas maneiras diferentes o conselho diretivo pode ser formado?

Resolução

Para a escolha dos homens, há combinação de 7 homens, tomados de 4 em 4, ($C_{7,4}$).

$$C_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} = 35$$

Para a escolha das mulheres, há combinação de 5 mulheres, tomadas de 3 em 3, ($C_{5,\,3}$).

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!} = 10$$

Pelo princípio fundamental da contagem, o número de combinações possíveis é:

$$C_{7,4}\cdot C_{5,3} = 35\cdot 10 = 350$$

Portanto, há 350 maneiras de compor o novo corpo diretivo da empresa.

2. Fuvest-SP – Na primeira fase do campeonato de xadrez, cada jogador joga uma vez contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

Resolução

Houve 78 combinações entre os jogadores, o que corresponde ao número de jogos. Como no xadrez o jogo é de duplas, p = 2 e n corresponde ao número de jogadores.

$$C_{n,2} = 78 \rightarrow \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = 78 \rightarrow \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-2)!\cdot 2\cdot 1} = 78$$

$$n^2 - n = 156 \rightarrow n^2 - n - 156 = 0$$

$$n' = -12 \text{ e } n'' = 13$$

Como não é possível existir um número de jogadores negativo no torneio, havia 13 participantes.

NÚMEROS BINOMIAIS

Os números binomiais são representados por $\binom{n}{p}$, em que **n** $\in \mathbb{N}$ e **p** $\in \mathbb{N}$, sendo o binomial de **n** sobre **p** definido por:

$$\begin{cases} \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\cdot p!}, \text{ se } n \geq p \\ \binom{n}{p} = 0, \text{ se } n < p \end{cases}$$

TRIÂNGULO DE PASCAL

O triângulo de Pascal é uma construção de números infinitos formada por números binomiais $\binom{n}{p}$, em que **n** representa o número da linha e **p**, o número da coluna e o primeiro elemento $\binom{0}{0} = 1$.

$$\begin{array}{lcccccccc}
 & \text{coluna 0} & & & & & & & \\
\text{linha 0} & \binom{0}{0} & \text{coluna 1} & & & & & & \\
\text{linha 1} & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \text{coluna 2} & & & & & \\
\text{linha 2} & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \text{coluna 3} & & & & \\
\text{linha 3} & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \text{coluna 4} & & & \\
\text{linha 4} & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & \\
\vdots & & & & & & & & \\
\text{linha n} & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \cdots & \binom{n}{p} &
\end{array}$$

Calculando os números binomiais, resulta em:

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

PROPRIEDADES

1º) Relação de Stifel – A soma de dois números binominais consecutivos da mesma linha corresponde ao binomial que aparece na linha seguinte, sob o segundo número da soma efetuada.

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$$

$$\begin{array}{llll}
1 & & & \\
1 & 1 & & \\
1 & 2 & 1 & \\
1 & 3 & 3 & 1
\end{array}$$

2º) A soma de todos os binomiais na linha n é 2n.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

linha 0	1				$1 = 2^0$
linha 1	1	1			$2 = 2^1$
linha 2	1	2	1		$4 = 2^2$
linha 3	1	3	3	1	$8 = 2^3$

3º) A soma dos binomiais da coluna p é igual ao binomial que ocupa a próxima linha e a próxima coluna.

$$\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\binom{p+2}{p}+\ldots+\binom{n}{n}=\binom{n+1}{p+1}$$

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

4º) A soma dos números binomiais de uma diagonal, a partir do primeiro, é igual ao número binomial que está abaixo do último binomial analisado.

$$\binom{p}{0}+\binom{p+1}{1}+\binom{p+2}{2}+\ldots$$

$$+\binom{n}{n-p}=\binom{n+1}{n-p}$$

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

5º) A partir da segunda linha, dois binominais equidistantes dos extremos são complementares. Logo, são iguais.

$$\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$$

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

Tanto o número binomial quanto o triângulo de Pascal podem ser úteis para calcular as combinações de um evento.

A combinação de um evento é dada por:

$$C_{n,p}=\frac{n!}{(n-p)!\cdot p!}$$

Logo, passaremos a usar neste módulo o número binomial $\binom{n}{p}=\frac{n!}{(n-p)!\cdot p!}$ para representar as combinações que pretendemos encontrar.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3. Sistema Dom Bosco – Calcule os binominais a seguir:

a) $\binom{5}{2}$

b) $\binom{2}{6}$

Resolução

a) $\binom{5}{2}=\frac{5!}{(5-2)!2!}=\frac{5\cdot4\cdot3!}{3!2!}=10$

b) $\binom{2}{6}=0$, pois $n<p$

4. Sistema Dom Bosco – Com o auxílio do triângulo de Pascal, determine os seguintes binomiais:

	p = 0				
n = 0	1	p = 1			
n = 1	1	1	p = 2		
n = 2	1	2	1	p = 3	
n = 3	1	3	3	1	

a) $\binom{4}{3}$

b) $\binom{5}{2}$

Resolução

Continuando o triângulo de Pascal até n = 5, obtemos:

	p = 0						
n = 0	1	p = 1					
n = 1	1	1	p = 2				
n = 2	1	2	1	p = 3			
n = 3	1	3	3	1	p = 4		
n = 4	1	4	6	4	1	p = 5	
n = 5	1	5	10	10	5	1	

a) Observando o triângulo, para n = 4 e p = 3, obtemos $\binom{4}{3} = 4$.

b) Observando o triângulo, para n = 5 e p = 2, obtemos $\binom{5}{2} = 10$.

ROTEIRO DE AULA

COMBINAÇÃO

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Números binomiais

$$\begin{cases} \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}, \text{ se } n \geq p \\ \binom{n}{p} = 0, \text{ se } n < p \end{cases}$$

Triângulo de Pascal

	coluna 0	coluna 1	coluna 2	coluna 3	coluna 4		
linha 0	$\binom{0}{0}$						
linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
⋮							
linha n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	…	$\binom{n}{p}$

	p = 0	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	p = 5
n = 0	1					
n = 1	1	1				
n = 2	1	2	1			
n = 3	1	3	3	1		
n = 4	1	4	6	4	1	
n = 5	1	5	10	10	5	1

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. EEAr-SP (adaptado) – Em um campeonato de tênis estão inscritos 10 amigos. Para disputar o campeonato, esses amigos podem formar _____ duplas diferentes.

a) 34
b) 35
c) 44
d) 45

O resultado indica o número de combinações simples de 10 amigos agrupados 2 a 2.

$C_{10,2} = \dfrac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$

2. Famerp-SP (adaptado) – Lucas possui 6 livros diferentes, e Milton possui 8 revistas diferentes. Os dois pretendem fazer uma troca de 3 livros por 3 revistas. Qual o total de possibilidades distintas para que essa troca possa ser feita?

Calculando a quantidade de possibilidades, obtemos:

Total $= C_{6,3} \cdot C_{8,3}$

$C_{6,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

$C_{8,3} = \dfrac{8!}{3! \cdot 5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$

Portanto, o total de possibilidades é $20 \cdot 56 = 1\,120$.

3. Enem C1-H2

Como não são adepto da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogame. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

a) 64
b) 56
c) 49
d) 36
e) 28

Como não há repetição e a ordem não influencia no resultado, trata-se de um problema de combinação simples de 8 jogadores agrupados de 2 em 2.

$C_{8,2} = \dfrac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2} = 28$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

4. FGV-SP – Em um departamento de uma universidade, trabalham 4 professoras e 4 professores, e, entre eles, estão Astreia e Gastão, que são casados. Um grupo de 3 desses professores(as) deverá ir a um congresso, sendo, pelo menos, um homem. Obrigatoriamente, um dos elementos do casal deverá estar no grupo, mas não ambos.

De quantas maneiras diferentes esse grupo poderá ser organizado?

• Grupos com Gastão:

Observando que um dos lugares é de Gastão, restam 2 lugares para acomodarmos 6 pessoas, já que Astreia não pode participar.

$C_{6,2} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$

• Grupos com Astreia:

Como Astreia faz parte do grupo, Gastão não vai participar. Assim serão 6 pessoas para 2 lugares, mas não vamos esquecer que o grupo não deverá ser formado apenas por mulheres. Para isso, vamos retirar a quantidade de grupos formados apenas por mulheres.

$C_{6,2} - C_{3,2} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} - \dfrac{3!}{2! \cdot 1!} = 15 - 3 = 12$

Portanto, o total de grupos é 15 + 12 = 27.

5. Sistema Dom Bosco – Lucas levou sua namorada à sorveteria. Os dois decidiram dividir uma casquinha provando o máximo de sabores possíveis. Se o número máximo de bolas de sorvete por casquinha é 3, e a sorveteria vende 6 sabores diferentes, qual o número de formas diferentes de sabores que eles poderão pedir para uma casquinha?

a) 20
b) 41
c) 120
d) 35

Uma casquinha vai ter, no máximo, 3 bolas com sabores diferentes. Portanto, o resultado solicitado é dado por:

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 6 + \frac{6!}{2! \cdot 4!} + \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 6 + 15 + 20 = 41$$

6. PUC-PR – Dado o conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, quantos subconjuntos com 3 elementos podem ser formados de maneira que a soma dos três elementos seja um número par?

a) 60
b) 120
c) 10
d) 40
e) 125

Os subconjuntos apontados no enunciado podem ser elaborados de duas formas diferentes:

• Primeira forma (3 elementos pares):

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10.$$

• Segunda forma (2 elementos ímpares e um par):

$$\binom{4}{2} \cdot 5 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot 5 = 30.$$

Assim, a quantidade de subconjuntos com 3 elementos com soma par será obtida por 10 + 30 = 40.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. PUC-RS – Uma família mudou-se da zona rural para uma cidade grande, onde os pais e seus 10 filhos deverão morar numa casa de três quartos. Os dez filhos deverão ocupar dois quartos, sendo 6 filhos num quarto e 4 filhos em outro quarto.

De quantos modos os filhos poderão ser separados dessa forma?

a) 6! + 4!
b) 6!4!
c) $\frac{10!}{6!4!}$
d) $\frac{10!}{6!}$

8. UNESP – Está previsto que, a partir de 1º de janeiro de 2017, entrará em vigor um sistema único de emplacamento de veículos para todo o Mercosul, o que inclui o Brasil. As novas placas serão compostas por 4 letras e 3 algarismos.

Admita que no novo sistema possam ser usadas todas as 26 letras do alfabeto, incluindo repetições, e os 10 algarismos, também incluindo repetições. Admita ainda que, no novo sistema, cada carro do Mercosul tenha uma sequência diferente de letras e algarismos em qualquer ordem. Veja alguns exemplos das novas placas.

No novo sistema descrito, calcule o total de placas possíveis com o formato "Letra-Letra-Algarismo-Algarismo-Algarismo-Letra-Letra", nessa ordem. Em seguida, calcule o total geral de possibilidades de placas com 4 letras (incluindo repetição) e 3 algarismos (incluindo repetição) em qualquer ordem na placa. Deixe suas respostas finais em notação de produto ou de fatorial.

9. PUCCamp-SP – Admita que certa cidade brasileira tenha oito canais de TV aberta, todos com transmissões diárias. Se uma pessoa pretende assistir três dos oito canais em um mesmo dia, ela pode fazer isso de x maneiras diferentes sem levar em consideração a ordem em que assiste os canais, e pode fazer de y maneiras diferentes levando em consideração a ordem em que assiste os canais. Sendo assim, y – x é igual a:

a) 112
b) 280
c) 224
d) 56
e) 140

10. UPE – A turma de espanhol de uma escola é composta por 20 estudantes. Serão formados grupos de três estudantes para uma apresentação cultural. De quantas maneiras se podem formar esses grupos, sabendo-se que dois dos estudantes não podem pertencer a um mesmo grupo?

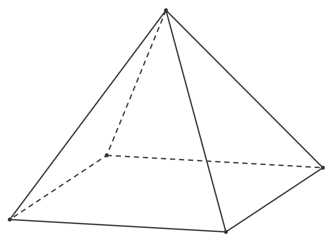
a) 6 840
b) 6 732
c) 4 896
d) 1 836
e) 1 122

11. EBMSP-BA – Cada uma das 12 pessoas inscritas para participar de um trabalho voluntário recebeu um crachá com um número de identificação distinto – de 1 a 12 – de acordo com a ordem de inscrição.

Desejando-se organizar grupos formados por três pessoas que não estejam identificadas por três números consecutivos, o número máximo possível de grupos distintos que se pode formar é:

a) 230
b) 225
c) 220
d) 215
e) 210

12. FGV-SP – As cinco faces de uma pirâmide quadrangular regular serão pintadas e cada face terá uma só cor. Tintas de 5 cores diferentes estão disponíveis e duas faces vizinhas da pirâmide não poderão ter a mesma cor.



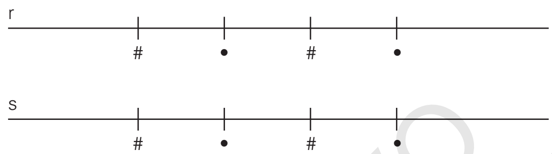
De quantas maneiras diferentes a pirâmide poderá ser pintada?

Obs.: pinturas que coincidem por rotação da pirâmide são consideradas iguais.

13. UECE – Uma urna contém 50 cartelas das quais 20 são azuis, numeradas de 1 a 20, e 30 são vermelhas, numeradas de 21 a 50. De quantas formas diferentes é possível retirar três cartelas (por exemplo, duas vermelhas e uma azul, três azuis,...) dessa urna?

a) 19 600
b) 19 060
c) 16 900
d) 16 090

14. PUC-RS – Em cada uma das retas paralelas r e s, são marcados 4 pontos representados pelos sinais # e •, como na figura. Na escolha de 3 desses pontos como vértices de um triângulo, sendo um deles representado por um sinal diferente, o número de triângulos que podem ser determinados é:



a) 48
b) 46
c) 44
d) 42
e) 40

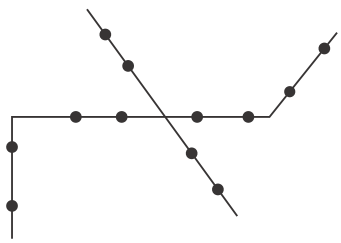
15. UERN – Considere a seguinte equação:

$$\binom{x+2}{2} = \binom{3x+1}{1}$$

A partir dessa equação, conclui-se que o número binomial $\binom{2x-1}{2}$ equivale a:

a) 3
b) 10
c) 21
d) 60

16. Fuvest-SP – Doze pontos são assinalados sobre quatro segmentos de reta, de forma que três pontos sobre três segmentos distintos nunca são colineares, como na figura:



O número de triângulos distintos que podem ser desenhados com os vértices nos pontos assinalados é:

a) 200
b) 204
c) 208
d) 212
e) 220

17. UFJF-MG – Considere no plano cartesiano o seguinte conjunto de 13 pontos:

$A = \{(-3, 0), (-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, -3), (0, -2), (0, -1), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$.

a) Quantos são os triângulos cujos vértices pertencem ao conjunto A?
b) Quantos são os triângulos com vértices em A e dois de seus vértices sobre o eixo das ordenadas?

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. Enem C1-H2

Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

Museus nacionais	Museus internacionais
Masp — São Paulo	Louvre — Paris
MAM — São Paulo	Prado — Madri
Ipiranga — São Paulo	British Museum — Londres
Imperial — Petrópolis	Metropolitan — Nova York

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

a) 6
b) 8
c) 20
d) 24
e) 36

19. Enem C1-H2

O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre 2 desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\dfrac{10!}{2! \cdot 8!} - \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$

b) $\dfrac{10!}{8!} - \dfrac{4!}{2!}$

c) $\dfrac{10!}{2! \cdot 8!} - 2$

d) $\dfrac{6!}{4!} + 4 \cdot 4$

e) $\dfrac{6!}{4!} + 6 \cdot 4$

20. UNESP C1-H2

Um professor, ao elaborar uma prova composta de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas cada um e apenas uma correta, deseja que haja um equilíbrio no número de alternativas corretas, a serem assinaladas com X na folha de respostas. Isto é, ele deseja que duas questões sejam assinaladas com a alternativa A, duas com a B, e assim por diante, como mostra o modelo.

Modelo de folha de resposta (gabarito)

	A	B	C	D	E
01	X				
02			X		
03		X			
04				X	
05	X				
06					X
07				X	
08					X
09		X			
10			X		

Nessas condições, a quantidade de folhas de respostas diferentes, com a letra X disposta nas alternativas corretas, será:

a) 302 400
b) 113 400
c) 226 800
d) 181 440
e) 604 800

12 INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

- Probabilidades estatística e teórica
- Propriedades das probabilidades

HABILIDADES

- Reconhecer um experimento aleatório para determinar o espaço amostral.
- Definir a probabilidade de um evento ocorrer.
- Aplicar conhecimentos de probabilidade de um evento acontecer.
- Usar conhecimentos de probabilidade para resolver situações-problema e elaborar argumentos.

PROBABILIDADE

O cotidiano é permeado de incertezas. Isso se reflete em diversos exemplos, como na tentativa de os pais adivinharem o sexo de um bebê durante a gestação, a previsão do tempo feita por meteorologistas, a ponderação sobre as probabilidades de um candidato vencer uma eleição...

EXPERIMENTOS DETERMINÍSTICOS E ALEATÓRIOS

Experimentos determinísticos são aqueles cujos resultados podem ser previstos, isto é, podem ser determinados antes de sua realização.

Alguns experimentos, contudo, não são previsíveis, ainda que sejam mantidas as mesmas condições. São os chamados **experimentos aleatórios** (termo do latim *alea* = sorte).

A teoria das probabilidades estuda a forma de se estabelecerem as possibilidades de um experimento aleatório ocorrer.

ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTO

Experimentos aleatórios são estudados com resultados equiprováveis (mesma chance de ocorrência) e em número determinado, isto é, finito. Nessas análises, há dois conceitos fundamentais:

- **Espaço amostral** – Conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Indica-se o espaço amostral por **U**.
- **Evento** – Qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

Observação:
Os números de elementos do espaço amostral e dos eventos de um experimento aleatório podem ser calculados com o auxílio da **análise combinatória.**

TIPOS DE EVENTO

Considere como experimento aleatório o lançamento de um dado comum. Observe o número representado na face voltada para cima.


MICHAL4R/SHUTTERSTOCK

Espaço amostral:
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Analisam-se os diversos tipos de evento definidos nesse experimento.

Evento elementar:
Qualquer subconjunto unitário de **U**.
Exemplo: **A** = ocorrência de um número múltiplo de 3.
$A = \{3, 6\} \rightarrow n(A) = 2$

Evento certo:
Próprio espaço amostral **U**.
Exemplo: **B** = ocorrência de um número natural.
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(B) = n(U) = 6$, pois $U = B$

Evento impossível:
Conjunto vazio (Ø).
Exemplo: **C** = ocorrência de um número com 2 dígitos.
C = Ø ou C = { } e n(C) = 0

Evento união:
Aproveitando a teoria dos conjuntos e sua simbologia, base para o estudo, temos:
- Evento **A**: ocorrência de um número par → A = {2, 4, 6}.
- Evento **B**: ocorrência de números primos → B = {2, 3, 5}.
- Evento **A ∪ B**: ocorrência de um número par ou primo → A ∪ B = {2, 3, 4, 5, 6}.

Evento interseção:
Interseção de dois eventos.
- Evento **A**: ocorrência de números pares → A = {2, 4, 6}.
- Evento **B**: ocorrência de números primos → B = {2, 3, 5}.
- Evento **A ∩ B**: ocorrência de um número par e primo → A ∩ B = {2}.

Eventos mutuamente exclusivos:
Dois eventos **A** e **B**, de um espaço amostral **U**, são considerados mutuamente exclusivos (ou excludentes) quando A ∩ B = Ø.
- Evento **A**: ocorrência de um número ímpar → → A = {1, 3, 5}.
- Evento **B**: ocorrência de um número múltiplo de 2 → B = {2, 4, 6}.
- **A** e **B** são eventos mutuamente exclusivos, pois A ∩ B = Ø.

Eventos complementares:
Considerando **U** o espaço amostral e **A** um evento qualquer, define-se o evento complementar $\bar{A}$ como igual ao conjunto diferença entre **U** e **A**. Assim, $\bar{A}$ = U – A.
- Evento **A**: ocorrência de um número ímpar → A = {1, 3, 5}.
- Evento $\bar{A}$: ocorrência de um número não ímpar → $\bar{\mathbf{A}}$ = U – A = {2, 4, 6}.
- Note que $\bar{A}$ = U – A = {2, 4, 6}.

Observação:
No caso do exemplo de **eventos complementares**, podemos dizer que o evento é **a não ocorrência** de um número primo.

PROBABILIDADES ESTATÍSTICA E TEÓRICA

A teoria das probabilidades é a maneira matemática de lidar com a incerteza. O cálculo da chance de um evento acontecer, muitas vezes, é feito experimentalmente. Essa probabilidade é chamada **experimental** ou **estatística**.

Por outro lado, no lançamento de dois dados, não é necessário realizarmos um experimento para calcular a probabilidade de obtermos dois números iguais nas faces voltadas para cima. O resultado pode ser alcançado por meio de análise teórica do espaço amostral e do evento. Nesse caso, temos a chamada **probabilidade teórica**.

PROBABILIDADE TEÓRICA DE UM EVENTO

Se, em um fenômeno aleatório, o número de elementos do espaço amostral for denotado por n(B) e o número de elementos do evento **A** for simbolizado por n(A), então a probabilidade de o evento **A** ocorrer é o número P(A), tal que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(B)}$$

Outra forma de definirmos a probabilidade de o evento A ocorrer é:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a A}}{\text{número de casos possíveis}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Em uma urna com 40 bolas (sendo 10 brancas, 10 pretas, 10 azuis e 10 amarelas), qual a probabilidade de sortearmos uma bola azul?

Resolução

O espaço amostral (U) terá 40 elementos. O evento "sair bola azul" tem 10 elementos. Assim:

$$P\ (A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a A}}{\text{número de casos possíveis}}$$

$$P\ (A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

2. Sistema Dom Bosco – Em um lançamento de dois dados, um vermelho e um preto, qual a probabilidade de os números obtidos serem iguais?

Resolução

Lançamento de dois dados diferentes:

U = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

n(U) = 36 (pares ordenados, pois os dados são diferentes).

A: obter as faces iguais voltadas para cima

A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

n(A) = 6

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Observações importantes

I. De acordo com a teoria, no lançamento de um dado "não viciado", a probabilidade de se obter o número 2 é $\frac{1}{6}$. Isso não significa que, sempre que forem feitos seis lançamentos de um dado, certamente ocorrerá, em um deles ou apenas em um, o resultado 2. Na prática, o que se verifica é que, em um grande número de lançamentos, a razão entre o número de vezes em que ocorre o resultado 2 e o número de lançamentos efetuados se aproxima de $\frac{1}{6}$.

II. No lançamento de dois dados idênticos, o espaço amostral (U) terá 21 pares ordenados, pois (1, 2) = (2, 1), ..., (3, 4) = (4, 3), ..., o que diminui a quantidade de possibilidades iniciais quando os dados são iguais (o que resulta 36 pares).

PROPRIEDADES DAS PROBABILIDADES

Observe algumas propriedades da teoria de probabilidades.

- **Propriedade 1:** a probabilidade do evento impossível é 0.

$$P(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(U)} \rightarrow P(\varnothing) = \frac{0}{n(U)} \rightarrow P(\varnothing) = 0$$

- **Propriedade 2:** a probabilidade do evento certo é 1.

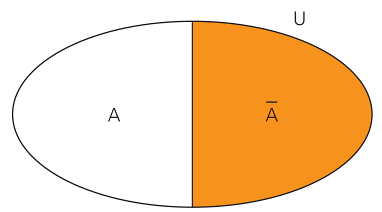
$$P(U) = \frac{n(U)}{n(U)} \rightarrow P(U) = 1$$

- **Propriedade 3:** sendo A um evento de espaço amostral U, a probabilidade de A é um número racional pertencente ao intervalo entre 0 e 1, números que ocupam as extremidades. Isto é: $0 \leq P(A) \leq 1$.

$$0 \le n(A) \le n(U) \rightarrow \frac{0}{n(U)} \le \frac{n(A)}{n(U)} \le \frac{n(U)}{n(U)} \rightarrow 0 \le P(A) \le 1$$

- **Propriedade 4:** sendo A um evento e $\bar{A}$ seu complementar, então:

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$



$$n(U)=n(A)+n(\bar{A}) \rightarrow \frac{n(U)}{n(U)}=\frac{n(A)}{n(U)}+\frac{n(\bar{A})}{n(U)}$$

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Observação:
É comum expressar a probabilidade de um evento por meio de porcentagem. Assim, se P(A) = 0,82, por exemplo, é possível dizer que P(A) = 82%.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

3. Fuvest-SP – Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores positivos de 60, a probabilidade de que ele seja primo é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{6}$

Resolução

A decomposição em fatores primos de 60 é (2 · 2 · · 3 · 5) = 22 · 31 · 51.

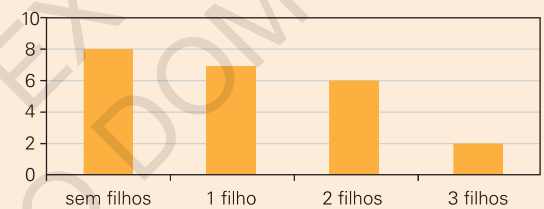
O número de divisores é calculado pelo produto (2 + 1) · (1 + 1) · (1 + 1) = 12.

Os únicos divisores primos são 2, 3 e 5, em um total de três elementos entre os 12 divisores.

Logo, $P(\text{Div. Primo}) = \frac{3}{12} = \frac{3}{4}$.

4. Enem C7-H28

As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico. Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:



a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{7}{15}$ **d)** $\frac{7}{23}$ **e)** $\frac{7}{25}$

Resolução

De acordo com o gráfico, há:

- 8 mulheres sem filhos;
- 7 mulheres com 1 filho;
- 6 mulheres com 2 filhos;
- 2 mulheres com 3 filhos.

O total de crianças é: 8(0) + 7(1) + 6(2) + 2(3) = = 7 + 12 + 6 = 25.

O número de mulheres com filho único é 7.

Logo, P(Filho Único) = $\frac{7}{25}$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

ROTEIRO DE AULA

INTRODUÇÃO A PROBABILIDADE

Espaço amostral

Conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Indica-se o espaço amostral por U.

Evento

Qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(B)}$

Experimentação

Experimento determinístico

Experimento aleatório

ROTEIRO DE AULA

PROPRIEDADES DAS PROBABILIDADES

Propriedade 1

A probabilidade do evento impossível

é zero.

$P(\varnothing) = 0$

Propriedade 2

A probabilidade do evento certo é 1.

$P(U) = 1$

Propriedade 3

A probabilidade de um evento A em um espaço amostral U é um número

entre 0 e 1.

$0 \leq P(A) \leq 1$

Propriedade 4

A probabilidade de um evento mais o seu complementar é igual a 1.

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Enem C7-H28

Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a) $\frac{1}{100}$

b) $\frac{19}{100}$

c) $\frac{20}{100}$

d) $\frac{21}{100}$

e) $\frac{80}{100}$

A chance de ser um número de 1 a 20 nesse caso é $\frac{20}{100}$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

2. Unicamp-SP – Um dado não tendencioso de seis faces será lançado duas vezes. A probabilidade de que o maior valor obtido nos lançamentos seja menor do que 3 é igual a

a) $\frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{5}$.

c) $\frac{1}{7}$.

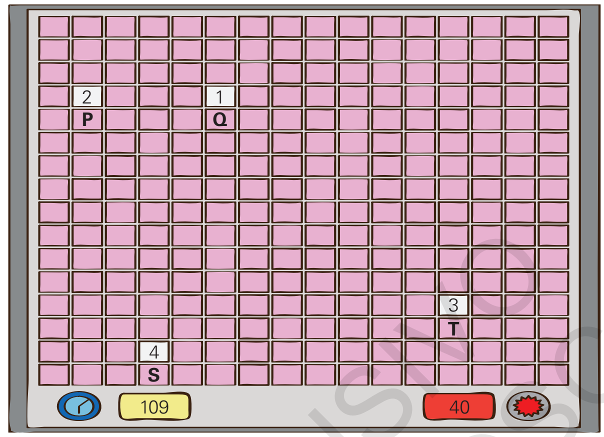
d) $\frac{1}{9}$.

Ao se jogar um dado duas vezes, haverá 36 possíveis respostas. Delas apenas 4 podem ter como maior valor um número menor que 3, sendo (1 e 1), (1 e 2), (2 e 1) e (2 e 2).

Assim, a probabilidade é igual a $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

3. Enem C7-H28

A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16 x 16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contêm minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.



Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras P, Q, R, S e T um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina.

O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra

a) P.

b) Q.

c) R.

d) S.

e) T.

De acordo com o enunciado:

$P \rightarrow P(x) = \frac{2}{8} = 0{,}25$

$Q \rightarrow P(x) = \frac{1}{8} = 0{,}125$

$R \rightarrow P(x) = \left(\frac{40}{16^2 - 4}\right) = \frac{40}{252} = 0{,}1587$

$S \rightarrow P(x) = \frac{4}{8} = 0{,}50$

$T \rightarrow P(x) = \frac{3}{8} = 0{,}375$

Portanto, o jogador terá de abrir o quadrado Q.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

4. FGV-SP – Uma fração, definida como a razão entre dois inteiros, chama-se imprópria quando o numerador é maior ou igual ao denominador e chama-se decimal quando o denominador é uma potência de dez.

Dois dados convencionais, de seis faces equiprováveis, possuem cores diferentes: um deles é branco, e o outro, preto. Em um lançamento aleatório desses dois dados, o número obtido no dado branco será o numerador de uma fração, e o obtido no dado preto será o denominador.

A probabilidade de que a fração formada seja imprópria e equivalente a uma fração decimal é igual a

a) $\frac{17}{36}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{19}{36}$

d) $\frac{5}{9}$

e) $\frac{7}{12}$

É subentendido que existem $6 \cdot 6 = 36$ resultados possíveis. Entre esses resultados, não são adequados: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3) (4, 5), (4, 6), (5, 3) e (5, 6).

Portanto, a resposta é $1 - \frac{17}{36} = \frac{19}{36}$.

5. UPF-RS – Um pescador pescou 10 peixes, dos quais 3 tinham um tamanho inferior ao permitido pela lei. Esse pescador foi abordado por um fiscal que, dentre os 10 peixes, resolveu inspecionar apenas 2, escolhendo-os aleatoriamente. A probabilidade de o pescador não ser flagrado infringindo a lei é de:

a) $\frac{7}{10}$

b) $\frac{7}{15}$

c) $\frac{3}{100}$

d) $\frac{13}{45}$

e) $\frac{9}{100}$

A probabilidade solicitada é obtida por:

$$\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{7!}{2! \cdot 5!}}{\frac{10!}{2! \cdot 8!}} = \frac{7}{15}.$$

6. UNESP – Em um condomínio residencial, há 120 casas e 230 terrenos sem edificações. Em um determinado mês, entre as casas, 20% dos proprietários associados a cada casa estão com as taxas de condomínio atrasadas, enquanto, entre os proprietários associados a cada terreno, esse percentual é de 10%. De posse de todos os boletos individuais de cobrança das taxas em atraso do mês, o administrador do empreendimento escolhe um boleto ao acaso. Qual a probabilidade de que o boleto escolhido seja de um proprietário de terreno sem edificação?

P = probabilidade solicitada

20% de 120 = 24

10% de 230 = 23

Assim, $P = \frac{23}{23+24} = \frac{23}{47}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UFRGS-RS – Considere os números naturais de 1 até 100. Escolhido ao acaso um desses números, a probabilidade de ele ser um quadrado perfeito é

a) $\frac{1}{10}$.

b) $\frac{4}{25}$.

c) $\frac{3}{10}$.

d) $\frac{1}{2}$.

e) $\frac{9}{10}$.

8. Enem C7-H28

O número de frutos de uma determinada espécie de planta se distribui de acordo com as probabilidades apresentadas no quadro.

Número de frutos	Probabilidade
0	0,65
1	0,15
2	0,13
3	0,03
4	0,03
5 ou mais	0,01

A probabilidade de que, em tal planta, existam, pelo menos, dois frutos é igual a

a) 3%

b) 7%

c) 13%

d) 16%

e) 20%

9. UEMG – Em uma empresa, foi feita uma pré-seleção para sorteio de uma viagem. Esta pré-seleção se iniciou com a distribuição, entre os funcionários, de fichas numeradas de 1 a 23. Em seguida, foram selecionados os funcionários com as fichas numeradas, com as seguintes regras:

- Fichas com um algarismo: o algarismo tem que ser primo;
- Fichas com dois algarismos: a soma dos algarismos deverá ser um número primo.

Após essa pré-seleção, Glorinha foi classificada para o sorteio.

A probabilidade de Glorinha ganhar essa viagem no sorteio é de, aproximadamente,

a) 7%

b) 8%

c) 9%

d) 10%

10. Unicamp-SP – Uma loteria sorteia três números distintos entre doze números possíveis.

a) Para uma aposta em três números, qual é a probabilidade de acerto?

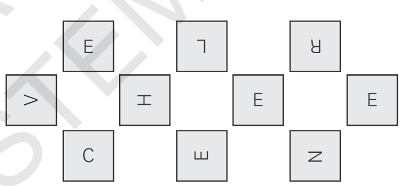
b) Se a aposta em três números custa R$ 2,00, quanto deveria custar uma aposta em cinco números?

11. Acafe-SC – Em um determinado jogo de futebol do Campeonato Brasileiro, o resultado final da partida foi 32.

A probabilidade de que o time perdedor tenha marcado os dois primeiros gols é:

a) 10%
b) 30%
c) 50%
d) 90%

12. UERJ – Dez cartões com as letras da palavra “envelhecer” foram colocados sobre uma mesa com as letras viradas para cima, conforme indicado abaixo.



Em seguida, fizeram-se os seguintes procedimentos com os cartões:

1º) foram virados para baixo, ocultando-se as letras;

2º) foram embaralhados;

3º) foram alinhados ao acaso;

4º) foram desvirados, formando um anagrama.

Observe um exemplo de anagrama:

V	E	E	E	R	C	N	H	L	E

A probabilidade de o anagrama formado conter as quatro vogais juntas (EEEE) equivale a:

a) $\frac{1}{20}$
b) $\frac{1}{30}$
c) $\frac{1}{210}$
d) $\frac{1}{720}$

13. UDESC – Em uma associação serão eleitos um presidente, um tesoureiro e dois revisores. Cada membro vota em um candidato para presidente, um para tesoureiro e um para revisor. Supondo que haja 4 candidatos para presidente, 3 para tesoureiro e 6 para revisor, então a probabilidade de todos os candidatos de um eleitor qualquer, que não anulou nem votou em branco, serem eleitos é de:

a) $\frac{1}{36}$
b) $\frac{1}{360}$
c) $\frac{1}{180}$
d) $\frac{1}{90}$
e) $\frac{1}{72}$

14. UPE – Algumas diagonais do decágono regular passam pelo seu centro e outras não. Sendo assim, escolhendo-se ao acaso uma diagonal desse polígono, qual é a probabilidade de ela não passar pelo centro do decágono?

a) $\frac{6}{7}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{3}{5}$
e) $\frac{1}{7}$

15. Unicamp-SP – Um caixa eletrônico de certo banco dispõe apenas de cédulas de 20 e 50 reais. No caso de um saque de 400 reais, a probabilidade do número de cédulas entregues ser ímpar é igual a

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{2}{5}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{3}{5}$

16. Fuvest-SP (adaptado) – O gamão é um jogo de tabuleiro muito antigo, para dois oponentes, que combina a sorte, em lances de dados, com estratégia, no movimento das peças. Pelas regras adotadas, atualmente, no Brasil, o número total de casas que as peças de um jogador podem avançar, numa dada jogada, é determinado pelo resultado do lançamento de dois dados. Esse número é igual à soma dos valores obtidos nos dois dados, se esses valores forem diferentes entre si; e é igual ao dobro da soma, se os valores obtidos nos dois dados forem iguais. Supondo que os dados não sejam viciados, qual a probabilidade de um jogador poder fazer suas peças andarem pelo menos oito casas em uma jogada?

17. Fuvest-SP – Em uma urna, há bolas amarelas, brancas e vermelhas. Sabe-se que:

I. A probabilidade de retirar uma bola vermelha dessa urna é o dobro da probabilidade de retirar uma bola amarela.

II. Se forem retiradas 4 bolas amarelas dessa urna, a probabilidade de retirar uma bola vermelha passa a ser $\frac{1}{2}$.

III. Se forem retiradas 12 bolas vermelhas dessa urna, a probabilidade de retirar uma bola branca passa a ser $\frac{1}{2}$.

A quantidade de bolas brancas na urna é

a) 8.
b) 10.
c) 12.
d) 14.
e) 16.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C7-H28

José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

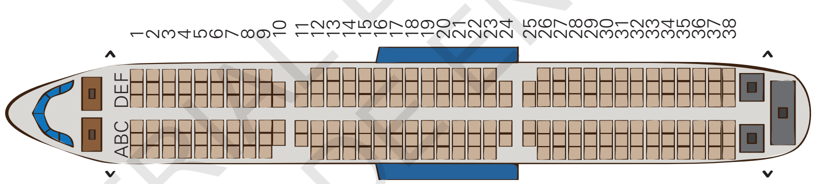
c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

19. Enem C7-H29

Uma empresa aérea lança uma promoção de final de semana para um voo comercial. Por esse motivo, o cliente não pode fazer reservas e as poltronas serão sorteadas aleatoriamente. A figura mostra a posição dos assentos no avião:



Avião com 38 fileiras de poltronas.

Por ter pavor de sentar entre duas pessoas, um passageiro decide que só viajará se a chance de pegar uma dessas poltronas for inferior a 30%.

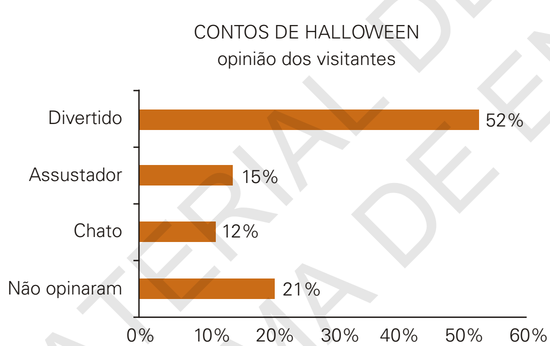
Avaliando a figura, o passageiro desiste da viagem, porque a chance de ele ser sorteado com uma poltrona entre duas pessoas é mais aproximada de

a) 31% **b)** 33% **c)** 35% **d)** 68% **e)** 69%

20. Enem C7-H30

Em um *blog* de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados "Contos de Halloween". Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em "Divertido", "Assustador" ou "Chato". Ao final de uma semana, o *blog* registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do *blog* irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem "Contos de Halloween".

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto "Contos de Halloween" é "Chato" é mais aproximada por

a) 0,09
b) 0,12
c) 0,14
d) 0,15
e) 0,18

PROBABILIDADE CONDICIONAL E DA INTERSECÇÃO DE EVENTOS

13

- Probabilidade do evento união
- Probabilidade de um espaço amostral não equiprovável
- Probabilidade condicional
- Probabilidade do evento interseção

HABILIDADES

- Reconhecer diferentes tipos de evento para determinar as respectivas probabilidades de ocorrência.
- Aplicar os conhecimentos de probabilidade para resolver situações-problema e elaborar argumentos.

PROBABILIDADE DO EVENTO UNIÃO

Dados dois eventos **A** e **B** de um espaço amostral **U**, o evento união $A \cup B$ é a probabilidade de acontecer, pelo menos, um dos eventos **A** ou **B**.

Pela definição de probabilidade: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Podemos dizer, então, que a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B é dada pela soma das probabilidades de acontecer A ou B menos a probabilidade de os dois eventos (A e B) ocorrerem simultaneamente.

Caso particular

Vamos considerar que os eventos A e B sejam mutuamente exclusivos. Isto é:

$$A \cap B = \emptyset,\ P(A \cap B) = 0$$

Nesse caso, a fórmula anterior se reduz a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

PROBABILIDADE DE UM ESPAÇO AMOSTRAL NÃO EQUIPROVÁVEL

No espaço amostral equiprovável, todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrência. Por isso, em problemas envolvendo dados e moedas, por exemplo, precisamos **sempre** tomar o cuidado de especificar que os dados e as moedas são "honestos" ou "não viciados".

Moedas ou dados "viciados" passam por um processo de manipulação em que uma de suas faces fica mais pesada, de modo a gerar maior ocorrência de um resultado.

No entanto, como estudar as probabilidades com moedas ou dados "viciados"? Nesses casos, a seguinte fórmula **não é válida**:

$$P(E) = \frac{\text{número de resultados favoráveis de E}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Sistema Dom Bosco – De um baralho comum de 52 cartas, uma carta é retirada aleatoriamente. Qual a probabilidade de sair um rei ou uma carta de ouros?

Resolução

Evento **A** (a carta é um rei):

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

Evento **B** (a carta é de ouros):

$$P(B) = \frac{13}{52}$$

Evento **A** $\cap$ **B** (a carta é um rei de ouros):

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

Evento **A** $\cup$ **B** (a carta ou é um rei ou é de ouros):

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

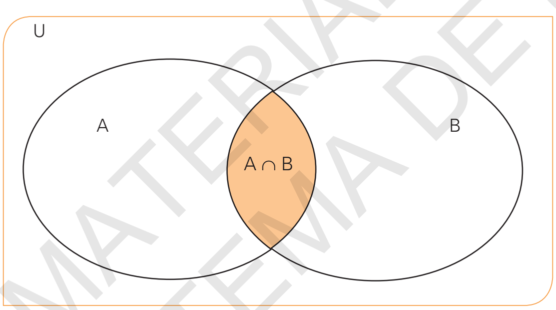
Logo:

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{16}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{13}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Vamos considerar, em um experimento aleatório de espaço amostral U, os eventos **A** e **B**, com $A \cap B \neq \varnothing$, conforme o diagrama.



Na medida em que sabemos da ocorrência do evento **B**, este passa a ser o espaço amostral do experimento, pois todos os resultados possíveis pertencem a **B**. Assim, a probabilidade de ocorrer o evento **A**, dado que o evento **B** já ocorreu, é:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. Sistema Dom Bosco – Uma excursão para uma cidade histórica era formada por um grupo de 200 pessoas, sendo 60 homens e 140 mulheres. Sabe-se que 40 homens e 60 mulheres já tinham visitado essa cidade anteriormente. Uma pessoa é sorteada ao acaso. Nessas condições, qual a probabilidade de ela

a) ser mulher, uma vez já ter visitado essa cidade antes?

b) ter visitado a cidade antes e ser homem?

Resolução

a) Os dados do enunciado podem ser organizados em uma tabela:

	Já visitou a cidade antes	Visitava a cidade pela 1ª vez	Total
Homem	40	20	60
Mulher	60	80	140
Total	100	100	200

Evento A: a pessoa sorteada já visitou a cidade antes.

Evento B: a pessoa sorteada é mulher.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \rightarrow P(A|B) = \frac{60}{100} \rightarrow P(A|B) = \frac{3}{5}$$

Logo, a probabilidade de ser mulher e já ter visitado essa cidade antes é $\frac{3}{5}$.

b) Por meio dos dados do item **a** da tabela, temos:

Evento A: a pessoa sorteada já visitou a cidade.

Evento C: a pessoa sorteada é homem.

$$P(A|C) = \frac{n(A \cap C)}{n(C)} \rightarrow P(A|C) = \frac{40}{60} \rightarrow P(A|C) = \frac{2}{3}$$

Logo, a probabilidade de ter visitado a cidade antes e ser homem é $\frac{2}{3}$.

PROBABILIDADE DO EVENTO INTERSECÇÃO

Dados dois eventos **A** e **B** de espaço amostral **U**, dizer que ocorreu o evento **A** $\cap$ **B** (evento interseção) significa que os eventos **A** e **B** aconteceram simultaneamente.

Para calcular a probabilidade de ocorrer $A \cap B$, usamos a fórmula da probabilidade condicional:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(U)}}{\frac{n(B)}{n(U)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Então:

$$P(A \mid B) = P(B) \cdot P(B \mid A) \qquad \{II\}$$

Com as fórmulas {I} e {II}, concluímos que:

Dados dois eventos **A** e **B** de espaço amostral **U**, a probabilidade de eles ocorrerem simultaneamente é dada pelo produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, dado que ocorreu o primeiro.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3. Sistema Dom Bosco – Duas bolas vão ser retiradas de uma urna que contém 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 verdes. Qual a probabilidade de ambas:

a) serem verdes?

b) serem da mesma cor?

Resolução

Temos:

U = {B1, B2, P1, P2, P3, V1, V2, V3, V4}

n(U) = 9

B: bola branca

P: bola preta

V: bola verde

a) Para que as duas bolas sejam verdes, na medida em que a primeira seja extraída, deixaremos de ter 9 bolas no espaço amostral. Isso acarretará 3 bolas verdes, e não mais 4. Assim, de acordo com o teorema:

$$P(V \cap V) = P(V) \cdot P(V|V) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$$

b) P(Mesma Cor) = $P(B \cap B) + P(P \cap P) + P(V \cap V)$: teremos duas bolas brancas ou duas bolas pretas ou as duas bolas verdes. Assim, devemos somar todas as possibilidades:

$$P(\text{Mesma Cor}) = P(B \cap B) + P(P \cap P) + P(V \cap V)$$

$$P(\text{Mesma Cor}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$$

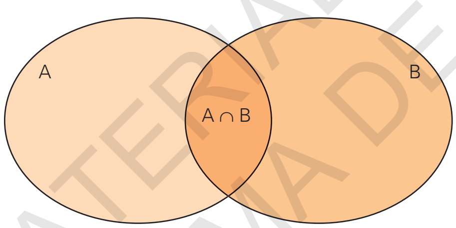
$$P(\text{Mesma Cor}) = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

ROTEIRO DE AULA

PROBABILIDADE

Probabilidade do evento união

$P(A \cup B) =$ P(A) + P(B)



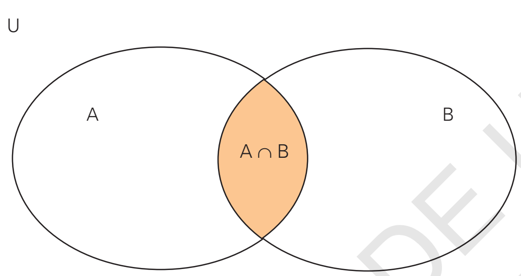
Probabilidade de um espaço amostral não equiprovável

$P(A) =$ $P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_m)$

ROTEIRO DE AULA

PROBABILIDADE CONDICIONAL E DA INTERSECÇÃO DE EVENTOS

Probabilidade do evento intersecção



Probabilidade do evento intersecção

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A \mid B)$

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(B \mid A)$

$P(B \mid A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)}$

$P(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UPF-RS – Duas bolsas de estudo serão sorteadas entre 9 pessoas, sendo 7 mulheres e 2 homens. Considerando-se que uma pessoa desse grupo não pode ganhar as duas bolsas, qual a probabilidade de duas mulheres serem sorteadas?

a) $\frac{7}{12}$
b) $\frac{7}{9}$
c) $\frac{2}{7}$
d) $\frac{1}{21}$
e) $\frac{7}{36}$

Total de sorteios: $C_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!2!} = 36.$

Total de sorteios em que os ganhadores são mulheres:

$C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!2!} = 21.$

Logo, $P = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$

2. Famema-SP – Um professor colocou em uma pasta 36 trabalhos de alunos, sendo 21 deles de alunos do 1º ano e os demais de alunos do 2º ano. Retirando-se aleatoriamente 2 trabalhos dessa pasta, um após o outro, a probabilidade de os dois serem de alunos de um mesmo ano é

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{1}{6}$

Há chance de serem selecionados dois trabalhos do 1º ano ou dois trabalhos de 2º ano. Assim, a probabilidade (P) solicitada será dada por:

$P = \frac{21}{36} \cdot \frac{20}{35} + \frac{15}{36} \cdot \frac{14}{35} \rightarrow P = \frac{630}{1\,260}$

Logo, $P = \frac{1}{2}.$

3. Enem C7-H28

Uma caixa contém uma cédula de R$ 5,00, uma de R$ 20,00 e duas de R$ 50,00 de modelos diferentes. Retira-se aleatoriamente uma cédula dessa caixa, anota-se o seu valor e devolve-se a cédula à caixa. Em seguida, repete-se o procedimento anterior.

A probabilidade de que a soma dos valores anotados seja pelo menos igual a R$ 55,00 é

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{2}{9}$
e) $\frac{5}{9}$

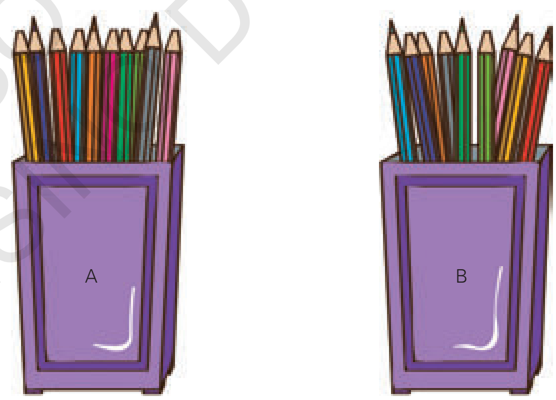
Resultados possíveis: $n(U) = 4 \cdot 4 = 16$.
Soma inferior a R$ 55,00: A (5, 5), (5, 20), (20, 5) e (20, 20).
Logo, $n(A) = 4$.
Assim, $P = 1 - P(A)$

$P = 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

4. UERJ – Em um escritório, há dois porta-lápis: o porta-lápis A, com 10 lápis, dentre os quais 3 estão apontados, e o porta-lápis B, com 9 lápis, dentre os quais 4 estão apontados.



Um funcionário retira um lápis qualquer ao acaso do porta-lápis A e o coloca no porta-lápis B. Novamente ao acaso, ele retira um lápis qualquer do porta-lápis B.

A probabilidade de que este último lápis retirado não tenha ponta é igual a:

a) 0,64
b) 0,57
c) 0,52
d) 0,42

Resolvemos por etapas:

Etapa 1

Probabilidade de o lápis removido do porta-lápis A ser apontado e de o lápis removido do porta-lápis B não ter ponta:

$P1 = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{15}{100}$

Etapa 2

Probabilidade de o lápis removido do porta-lápis A não ter ponta e de o lápis removido do porta-lápis B não ter ponta:

$P2 = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{42}{100}$

Contudo, a probabilidade de o último lápis removido do porta-lápis não ter ponta será:

$P = P1 + P2 = \frac{15}{100} + \frac{42}{100} = \frac{57}{100} = 0{,}57.$

5. UFRGS-RS – Escolhe-se aleatoriamente um número formado somente por algarismos pares distintos, maior do que 200 e menor do que 500.

Assinale a alternativa que indica a melhor aproximação para a probabilidade de que esse número seja divisível por 6.

a) 20%
b) 24%
c) 30%
d) 34%
e) 50%

Do enunciado, obtemos:

- 1º algarismo: 2 possibilidades (2 ou 4).
- 2º algarismo: 4 possibilidades.
- 3º algarismo: 3 possibilidades.
- Quantidade de números possíveis: $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

Dos números apontados, temos:

- Número divisíveis por 6 que começam por 2: 204, 240, 246, 264.
- Números divisíveis por 6 que começam por 4: 402, 420, 426, 462, 408, 480, 468, 486.
- Quantidade de números divisíveis por 6: $4 + 8 = 12$.

Logo:

$P = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0{,}5$, ou seja, 50%.

6. Unisinos-RS – Em uma gaveta, há 12 meias brancas e 8 meias cinzas. Retiram-se duas meias, sem reposição.

Qual a probabilidade de as duas meias que foram retiradas serem de cores diferentes?

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{24}{95}$
c) $\frac{10}{17}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{48}{95}$

Temos que:

$n(U) = C_{20,2}$
$n(U) = C_{20,2}$
$n(U) = C_{20,2}$

Assim:

$$P = \frac{\binom{12}{1} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{12 \cdot 8}{\frac{20!}{2! \cdot 18!}} = \frac{48}{95}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Sistema Dom Bosco – De um baralho comum de 52 cartas, uma delas é retirada aleatoriamente. Qual a probabilidade de ser uma dama ou uma carta de copas?

8. Unicamp-SP – Uma moeda balanceada é lançada quatro vezes, obtendo-se cara exatamente três vezes. A probabilidade de que as caras tenham saído consecutivamente é igual a

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{3}{8}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{4}$

9. FGV-SP – Uma loteria consiste no sorteio de três números distintos entre os 20 números inteiros de 1 a 20 – a ordem deles não é levada em consideração. Ganha um prêmio de R$ 100.000,00 o apostador que comprou o bilhete com os números sorteados. Não existem bilhetes com a mesma trinca de números. O ganho esperado do apostador que comprou um determinado bilhete é igual ao prêmio multiplicado pela probabilidade de ganho.

Quem apostou na trinca {4, 7, 18} tem um ganho esperado de aproximadamente

a) R$ 88,00
b) R$ 89,00
c) R$ 90,00
d) R$ 91,00
e) R$ 92,00

10. Mackenzie-SP – Um professor de Matemática entrega aos seus alunos uma lista contendo 10 problemas e avisa que 5 deles serão escolhidos ao acaso para compor a prova final. Se um aluno conseguiu resolver, corretamente, apenas 7 dos 10 problemas, a probabilidade de que ele acerte todos os problemas da prova é

a) $\frac{7}{84}$
b) $\frac{21}{84}$
c) $\frac{59}{84}$
d) $\frac{77}{84}$
e) 1

11. PUC-RJ – Sejam os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {6, 7, 8, 9, 10}. Escolhendo-se ao acaso um elemento de A e um elemento de B, a probabilidade de que a soma dos dois números escolhidos seja um número par é:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{5}$
c) $\frac{12}{25}$
d) $\frac{6}{25}$
e) $\frac{7}{10}$

12. UEG-GO – Renata está grávida e realizará um exame que detecta o sexo do bebê. Se o exame detectar que é um menino, a probabilidade de ela pintar o quarto do bebê de azul é de 70%, ao passo que de branco é de 30%. Mas, se o exame detectar que é uma menina, a probabilidade de ela pintar o quarto do bebê de rosa é de 60%, contra 40% de pintar de branco. Sabendo-se que a probabilidade de o exame detectar um menino é de 50%, a probabilidade de Renata pintar o quarto do bebê de branco é de

a) 70%
b) 50%
c) 35%
d) 30%
e) 20%

13. UPE – Numa aula de Matemática, o professor pediu que seus alunos construíssem argumentos, envolvendo conhecimentos sobre probabilidade, a partir do seguinte enunciado: "Um saco contém fichas idênticas, mas com cores diferentes, sendo 2 vermelhas, 4 verdes, 6 amarelas e 3 pretas". Foram apresentados três argumentos, presentes nas afirmativas a seguir:

I. Mariana falou que, se uma ficha fosse retirada ao acaso, a probabilidade de ela ser preta seria $\frac{1}{3}$.

II. Antônia afirmou que, se forem retiradas duas fichas do saco ao acaso, a probabilidade de elas serem vermelhas ou verdes seria de $\frac{4}{15}$.

III. Bruna disse: "Caso sejam retiradas 3 fichas ao acaso, uma a uma, sem reposição, a probabilidade de sair uma amarela, uma verde e uma vermelha, nessa ordem, será de $\frac{48}{225}$".

Analisando as afirmativas das três alunas, é CORRETO afirmar que

a) apenas I é verdadeira.
b) apenas I e II são verdadeiras.
c) apenas II e III são verdadeiras.
d) I, II e III são verdadeiras.
e) I, II e III são falsas.

14. Fuvest-SP (adaptado)

DINCER.AGIN/SHUTTERSTOCK

João e Maria jogam dados em uma mesa. São cinco dados em forma de poliedros regulares: um tetraedro, um cubo, um octaedro, um dodecaedro e um icosaedro. As faces são numeradas de 1 a 4 no tetraedro, de 1 a 6 no cubo etc. Os dados são honestos, ou seja, para cada um deles, a probabilidade de qualquer uma das faces ficar em contato com a mesa, após o repouso do dado, é a mesma.

Em um primeiro jogo, Maria sorteia, ao acaso, um dos cinco dados, João o lança e verifica o número da face que ficou em contato com a mesa.

a) Qual é a probabilidade de que esse número seja maior do que 12?

b) Qual é a probabilidade de que esse número seja menor do que 5?

Em um segundo jogo, João sorteia, ao acaso, dois dos cinco dados. Maria os lança e anota o valor da soma dos números das duas faces que ficaram em contato com a mesa, após o repouso dos dados.

c) Qual é a probabilidade de que esse valor seja maior do que 30?

Poliedros regulares	
Tetraedro	4 faces
Cubo	6 faces
Octaedro	8 faces
Dodecaedro	12 faces
Icosaedro	20 faces

15. Esc. Naval-RJ – Um exame de laboratório tem eficiência de 90% para detectar uma doença quando essa doença existe de fato. Entretanto, o teste aponta um resultado "falso-positivo" (o resultado indica doença, mas ela não existe) para 1% das pessoas sadias testadas. Se 1,5% da população tem a doença, qual a probabilidade de uma pessoa ter a doença, dado que seu exame foi positivo?

a) $\frac{95}{294}$

b) $\frac{160}{433}$

c) $\frac{270}{467}$

d) $\frac{75}{204}$

e) $\frac{73}{255}$

16. Fuvest-SP – Em um experimento probabilístico, Joana retirará aleatoriamente 2 bolas de uma caixa contendo bolas azuis e bolas vermelhas. Ao montar-se o experimento, colocam-se 6 bolas azuis na caixa.

Quantas bolas vermelhas devem ser acrescentadas para que a probabilidade de Joana obter 2 azuis seja $\frac{1}{3}$?

a) 2 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 8 **e)** 10

17. UNESP (adaptado) – Renato e Alice fazem parte de um grupo de 8 pessoas que serão colocadas, ao acaso, em fila. Calcule a probabilidade de haver exatamente 4 pessoas entre Renato e Alice na fila que será formada. Generalize uma fórmula para o cálculo da probabilidade do problema descrito acima com o mesmo grupo de "8 pessoas", trocando "4 pessoas" por "m pessoas", em que $1 \leqslant m \leqslant 6$. A probabilidade deverá ser dada em função de m.

a) $\frac{5}{28}$

b) $\frac{3}{28}$

c) $\frac{1}{28}$

d) $\frac{7}{33}$

e) $\frac{13}{33}$

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. Enem C7-H28

Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{5}{8}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{5}{6}$ **e)** $\frac{5}{14}$

19. Enem C7-H29

Em um jogo há duas urnas com 10 bolas de mesmo tamanho em cada uma. A tabela a seguir indica as quantidades de bolas de cada cor em cada urna.

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

Uma jogada consiste em:

1º) o jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;

2º) ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;

3º) em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2;

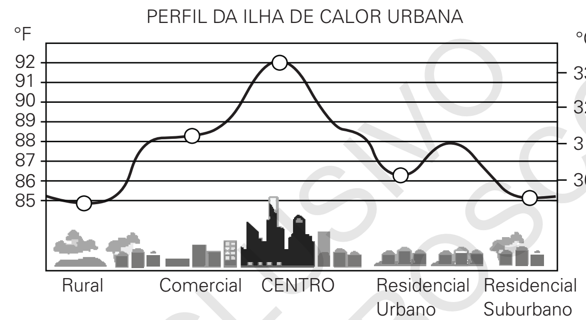
4º) se a cor da última bolsa retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo.

Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar?

a) Azul
b) Amarela
c) Branca
d) Verde
e) Vermelha

20. Enem C7-H30

Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31 °C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Fonte: EPA

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{3}{5}$ **e)** $\frac{3}{4}$

14 PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPENDENTES E BINÔMIO DE NEWTON

- Eventos independentes
- Binômio de Newton

HABILIDADES

- Reconhecer diferentes tipos de evento para determinar as respectivas probabilidades de ocorrência.
- Aplicar os conhecimentos de probabilidade para resolver situações-problema e elaborar argumentos.
- Compreender os conceitos e as fórmulas do binômio de Newton para resolver situações-problemas.
- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- Resolver situações-problemas envolvendo conhecimentos numéricos.

EVENTOS INDEPENDENTES

Dados dois eventos A e B de espaço amostral U, dizemos que eles são independentes se a ocorrência de um deles não modificar a probabilidade de ocorrência do outro.

$$\text{A e B independentes} \leftrightarrow P(B|A) = P(B) \text{ e } P(A|B) = P(A)$$

Quando A e B são eventos independentes:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Então, quando $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, os eventos são dependentes.

Se n eventos são independentes: $P(A \cap B \cap C \cap ...) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)...$

Eventos independentes – Exemplo

No lançamento simultâneo de dois dados, o resultado de um deles não influencia no resultado do outro.

Eventos dependentes – Exemplo

Na extração de duas bolas, uma azul e outra vermelha, em uma urna com 6 bolas de cores distintas, se antes de extrair a segunda bola não for feita a reposição da primeira, o resultado da primeira influencia no resultado da segunda, pois o espaço amostral passa a ter 5 elementos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Uma urna tem 30 bolas, sendo 10 vermelhas e 20 azuis. Se sortearmos 2 bolas, 1 de cada vez, e repormos a sorteada na urna, qual a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser azul?

Resolução

Como os eventos são independentes, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada e azul na segunda retirada é igual ao produto das probabilidades de cada condição, ou seja, P(A e B) = P(A) · P(B). Ora, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada é $\frac{10}{30}$. Já a probabilidade de sair azul na segunda retirada é $\frac{20}{30}$.

Então, usando a regra do produto, temos: $\frac{10}{30} \cdot \frac{20}{30} = \frac{2}{9}$.

Observe que na segunda retirada foram consideradas todas as bolas, pois houve a reposição. Assim, $P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)$, porque o fato de sair bola vermelha na primeira retirada não influenciou a segunda retirada, já que ela foi reposta na urna.

2. Sistema Dom Bosco – Em uma festa beneficente, foram vendidos 20 números. Serão sorteados dois prêmios. Qual a probabilidade de uma pessoa que tenha adquirido quatro números ganhe os dois prêmios?

Resolução

Pelo enunciado, temos:

– A: sair um dos bilhetes comprados $P(A) = \frac{4}{20}$.

– B: ganhar os dois prêmios (o segundo, uma vez já ter sido inicialmente sorteado):

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} = \frac{12}{380} = \frac{3}{95} = 3{,}16\%$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} = \frac{12}{380} = \frac{3}{95} =$$

$= 0{,}0316 = 3{,}16\%$

Portanto, a probabilidade de uma pessoa que tenha adquirido quatro números ganhar os dois prêmios é de 3,16%.

BINÔMIO DE NEWTON

Os produtos notáveis são vistos desde o Ensino Fundamental. Deles sabemos que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Caso o expoente do binômio seja 3, temos:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Mantendo-se essa relação, é possível calcular as demais potências e obter o desenvolvimento do binômio $(a + b)^n$. Porém, para um elevado valor de n, o desenvolvimento do binômio se torna extremamente complexo e pouco funcional.

Há um método para o desenvolvimento da enésima potência de um binômio, conhecido como **binômio de Newton**.

Produto de Stevin

Podemos determinar a lei de formação do produto **n** binômios do primeiro grau da forma $(x + a_1)$, $(x + a_2)$, ..., $(x + a_n)$, os quais diferem entre si somente pelos segundos termos.

De modo geral, no produto de **n** fatores, chamamos de:

- $S_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n$ (combinações de **n** segundos termos 1 a 1);
- $S_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_{n-1}a_n$ (combinações de **n** segundos termos 2 a 2);
- $S_3 = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + ...$ (combinações dos **n** segundos termos 3 a 3);
- $S_n = a_1a_2a_3 ... a_n$ (combinações dos **n** segundos termos **n** a **n**).

Assim, obtemos o **produto de Stevin**:

$$(x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdot ... \cdot (x + a_n) = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + ... + S_n$$

Observação:

- O número de parcelas de S_1 é $C_{n,1} = \binom{n}{1}$.
- O número de parcelas de S_2 é $C_{n,2} = \binom{n}{2}$.
- O número de parcelas de S_3 é $C_{n,3} = \binom{n}{3}$.
- O número de parcelas de S_n é $C_{n,n} = \binom{n}{n}$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3. Sistema Dom Bosco – Encontre o produto $(x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 4)$

Resolução

$S_1 = 2 + 3 + 4 = 9$

$S_2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 26$

$S_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Logo, $(x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 4) =$

$= x^3 + 9x^2 + 26x + 24$

Desenvolvimento de $(x + a)^n$

Por meio do produto de Stevin, fazendo $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = a$, obtemos:

- $S_1 = a + a + a + ... + a = C_{n,1} \cdot a = \binom{n}{1} \cdot a$
- $S_2 = a^2 + a^2 + a^2 + ... + a^2 = C_{n,2} \cdot a^2 = \binom{n}{2} \cdot a^2$
- $S_3 = a^3 + a^3 + a^3 + ... + a^3 = C_{n,3} \cdot a^3 = \binom{n}{3} \cdot a^3$
- $S_n = a^n$

Assim:

$$(x + a)^n = x^n + \binom{n}{1} ax^{n-1} + \binom{n}{2} a^2x^{n-2} + \binom{n}{3} a^3x^{n-3} + ... + \binom{n}{n} a^n$$

Como $\binom{n}{0} = 1$, obtemos o **binômio de Newton**:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot ax^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot a^2x^{n-2} + \binom{n}{3} \cdot a^3x^{n-3} + ... + \binom{n}{n} \cdot a^n$$

Ele também pode ser escrito da seguinte forma:

$$(x + a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

Observações:

- O desenvolvimento de um binômio de grau **n** tem **n + 1** termos.
- A soma dos expoentes, em qualquer termo, é o grau **n** do binômio.
- O expoente de **x** no 1º termo é **n** e vai decrescendo de 1 em 1 até atingir 0, no último termo.
- O expoente de **a** no 1º termo é o 0 e vai decrescendo de 1 em 1 até atingir **n**, no último termo.
- Os coeficientes dos termos extremos são iguais a um $\left\{\binom{n}{0} \text{ e } \binom{n}{n}\right\}$.
- O coeficiente de qualquer termo é um número binomial de numerador **n** e denominador igual ao número de termos precedentes. Assim, por exemplo, o coeficiente do 6º termo é $\binom{n}{5}$.
- Os coeficientes do desenvolvimento de (x + a)n são os elementos da linha **n** do triângulo de Pascal.
- A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^n$ é 2^n.

Termo geral do binômio de Newton

Observando o binômio de Newton a seguir, podemos notar que ele é segmentado em muitas partes, denominadas **termos**.

$$(x+a)^n = \underbrace{\binom{n}{0}x^n}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1}ax^{n-1}}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2}a^2x^{n-2}}_{T_3} + \underbrace{\binom{n}{3}a^3x^{n-3}}_{T_4} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}a^n}_{T_{n+1}}$$

Supondo que um termo tenha **p** termos precedentes, para o termo de ordem **p + 1**, chegamos à fórmula do termo geral do binômio de Newton.

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

4. Sistema Dom Bosco – Qual o quarto termo do binômio $(x^2 + y)^5$?

Resolução

Para encontrar o quarto termo do binômio de Newton, p = 3 e n = 5.

Assim, aplicando a fórmula do termo geral, obtemos:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p} \rightarrow T_{3+1} = \binom{5}{3} y^3 (x^2)^{5-3}$$

Portanto, $T_4 = 10y^3x^4$.

5. Sistema Dom Bosco – Dado o binômio $(x^2 + y)^7$, calcule o coeficiente do termo em x^8.

Resolução

Devemos, primeiramente, determinar o termo geral do desenvolvimento:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p} \rightarrow T_{p+1} = \binom{7}{p} y^p (x^2)^{7-p} \rightarrow$$

$$\rightarrow T_{p+1} = \binom{7}{p} y^p x^{14-2p}$$

O expoente de **x** no termo geral é igual a 6. Logo:

$14 - 2p = 8 \rightarrow 2p = 6 \rightarrow p = 3$

Assim, o termo em x^8 é:

$$T_{3+1} = \binom{7}{3} y^3 x^{14-2\cdot3} \rightarrow T_4 = 35y^3x^8$$

Logo, o número 35 é o coeficiente do termo que tem x^8.

PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPENDENTES

Eventos independentes

$P(A \cap B) =$ $P(A) \cdot P(B)$

ROTEIRO DE AULA

BINÔMIO DE NEWTON

Produto de Stevin

$(x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdot \ldots$ $x\,(x + a_n) = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \cdots + S_n$

$(x + a_1)^n =$ $\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \binom{n}{3}a^3x^{n-3} + \ldots + \binom{n}{n}a^n$

Binômio de Newton

$(x + a)^n =$ $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^px^{n-p}$

Termo geral

$T_{p+1} =$ $\binom{n}{p}a^px^{n-p}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RJ – Ao lançar um dado 3 vezes sucessivas, qual é a probabilidade de obter ao menos um número ímpar?

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{7}{8}$

Com um dado não viciado de seis faces, numeradas de 1 a 6, temos:
P (Par): a probabilidade de se conseguirem três números pares em três lançamentos sucessivos.

$P(\text{Par}) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} \to P(\text{Par}) = \frac{1}{8}$

$\overline{P}$: probabilidade de se conseguir ao menos um número ímpar no lançamento de tal dado, três vezes sucessivas.

$P + \overline{P} = 1$

Logo:

$\frac{1}{8} + \overline{P} = 1 \to \overline{P} = 1 - \frac{1}{8} \to \overline{P} = \frac{7}{8}$

2. FGV-SP (adaptado) – Qual o termo independente de x do desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{12}$?

Termo geral:

$T_{p+1} = \binom{12}{p}\left(\frac{1}{x^3}\right)^p (x)^{12-p} \to T_{p+1} = \binom{12}{p} x^{-3p}x^{12-p} \to$

$\to T_{p+1} = \binom{12}{p} x^{12-4p}$

Para que o termo de **x** seja independente, o expoente de **x** deve ser igual a zero.
Assim, temos:
$12 - 4p = 0 \quad \to \quad 4p = 12 \quad \to \quad p = 3$
Logo:

$T_{3+1} = \binom{12}{3} x^{12-4\cdot 3} = \binom{12}{3} x^0$

Portanto, $T_4 = 220$.

3. Sistema Dom Bosco C7-H28

Um caso de vazamento de informações estava sendo investigado pela prefeitura de uma cidade do interior de São Paulo. A probabilidade de um delegado resolver um problema é de $\frac{2}{3}$ e a do investigador é de $\frac{3}{7}$. Qual é a probabilidade de que seja resolvido o problema?

a) $\frac{17}{42}$

b) $\frac{19}{23}$

c) $\frac{13}{19}$

d) $\frac{17}{19}$

e) $\frac{17}{21}$

$P_{del \cup inv} = P_{del} + P_{inv} - P_{dep \cap inv}$

$P_{del \cup inv} = \frac{2}{3} + \frac{3}{7} - \frac{6}{21}$

$P_{del \cup inv} = \frac{14+9-6}{21}$

$P_{del \cup inv} = \frac{17}{21}$

A chance de o caso ser resolvido é $\frac{17}{21} \cong 80\%$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

4. IFAL (adaptado) – Dando um desafio sobre o conteúdo novo aos seus alunos, o professor passa o seguinte exercício:

A expressão $(x + y)^n$, com n natural, é conhecida como binômio de Newton. Seu desenvolvimento é dado assim:

$(x + y)^n = C_{n,0}\, x^n y^0 + C_{n,1}\, x^{n-p} y^p + C_{n,n}\, x^{n-n} y^n$

Por exemplo:

$(x + y)^3 = C_{3,0}\, x^3y^0 + C_{3,1}\, x^{3-1}y^1 + C_{3,2}\, x^{3-2}y^2 + C_{3,3}\, x^{3-3}y^3 =$
$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Assim, a expressão $4x^2 + 4xy + y^2$ corresponde a

a) $C_{2,0}\,(2x)^2\, y^0 + C_{2,1}\,(4x)^1\, y^1 + C_{2,2}\,(2x)^0\, y^2$
b) $C_{2,0}\,(2x)^2\, y^0 + C_{2,1}\,(2x)^1\, y^1 + C_{2,2}\,(4x)^0\, y^2$
c) $C_{2,0}\,(4x)^2\, y^0 + C_{2,1}\,(2x)^1\, y^1 + C_{2,2}\,(2x)^0\, y^2$

d) $C_{2,0}\,(4x)^2\,y^0 + C_{2,1}\,(4x)^1\,y^1 + C_{2,2}\,(4x)^0\,y^2$
e) $C_{2,0}\,(2x)^2\,y^0 + C_{2,1}\,(2x)^1\,y^1 + C_{2,2}\,(2x)^0\,y^2$

$C_{2,0}(2x)^2y^0 = 4x^2$
$C_{2,1}(2x)^1y^1 = 4xy$
$C_{2,2}(2x)^0y^2 = y^2$
$4x^2 + 4xy + y^2 = C_{2,0}(2x)^2y^0 + C_{2,1}(2x)^1y^1 + C_{2,2}(2x)^0y^2$

5. Unioeste-PR – O valor da expressão $153^4 - 4 \cdot 153^3 \cdot 3 + 6 \cdot 153^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 153 \cdot 3^3 + 3^4$ é igual a

a) $153\,(153 - 3)^3 + 3$
b) 147^4
c) $15^4 \cdot 3^4$
d) 153^4
e) $15^4 \cdot 10^4$

Substituindo 153 por x e 3 por y, obtemos:
$153^4 - 4 \cdot 153^3 \cdot 3 + 6 \cdot 153^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 153 \cdot 3^3 + 3^4$
$x^4y^0 - 4 \cdot x^3y^1 + 6x^2y^2 - 4 \cdot x^1y^3 + x^0y^4 = (x - y)^4$
$(x - y)^4 = (153 - 3)^4 = 150^4 = 15^4 \cdot 10^4$

6. Enem C7-H28

Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$.
Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que essa pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

a) $\frac{10 \cdot 2}{3^{10}}$

b) $\frac{10 \cdot 2^9}{3^{10}}$

c) $\frac{2^{10}}{3^{100}}$

d) $\frac{2^{90}}{3^{100}}$

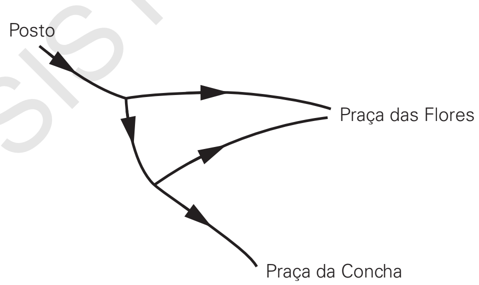
e) $\frac{2}{3^{10}}$

Calculando, temos:
$P(x) = C_{10,1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^9} = \frac{10 \cdot 2}{3^{10}}$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.
Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. PUC-MG – Dois ciclistas partem do posto onde estão, em direção à Praça das Flores e à Praça da Concha, localizadas na cidade, seguindo a ciclovia indicada no esquema:



Em cada bifurcação encontrada na ciclovia, eles escolhem, com igual probabilidade, qualquer um dos caminhos e seguem adiante. Nessas condições, a probabilidade de eles chegarem à Praça das Flores é:

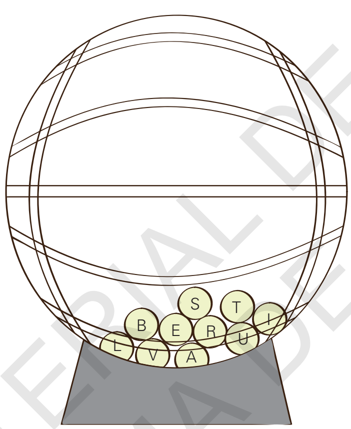
a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{4}{5}$

8. **PUC-RJ** – Mônica inventou um jogo de bingo onde as bolas que são sorteadas contêm letras ao invés de números. Em uma das rodadas, usamos as letras da palavra VESTIBULAR, conforme figura abaixo.



a) Ao sortear uma bola, qual é a probabilidade de que seja a letra V?

b) Ao sortear uma bola, qual é a probabilidade de que ela seja uma vogal?

c) Ao sortear 3 bolas sem reposição, qual é a probabilidade de que nenhuma delas seja consoante?

9. **FGV-SP** – Desenvolvendo-se o binômio $P(x) = (x + 1)^5$, podemos dizer que a soma de seus coeficientes é

a) 16 **b)** 24 **c)** 32 **d)** 40 **e)** 48

10. **Enem** C7-H28

Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

a) 0,075
b) 0,150
c) 0,325
d) 0,600
e) 0,800

11. PUC-RJ – Jogamos dois dados comuns, com faces numeradas de 1 a 6. Um dado é azul; o outro, vermelho.

a) Qual é a probabilidade de que os dois dados mostrem o mesmo número?

b) Qual é a probabilidade de que o dado azul mostre um número maior do que o do dado vermelho?

12. UERN – A soma dos algarismos do termo independente de x no desenvolvimento do binômio de Newton $\left(\frac{2}{x}+x\right)^8$ é

a) 3 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 7

13. UECE – No desenvolvimento de $x(2x + 1)^{10}$, o coeficiente de x^3 é

a) 480 **b)** 320 **c)** 260 **d)** 180

14. FGV-SP – Uma seguradora vende um tipo de seguro empresarial contra certo evento raro. A probabilidade de ocorrência do referido evento em cada empresa, no prazo de um ano, é p; a ocorrência do evento em uma empresa é independente da ocorrência do mesmo evento em outra. Há 10 empresas seguradas pagando cada uma R$ 90.000,00 pelo seguro anual. Caso ocorra o evento raro em uma empresa em um ano, a seguradora deve pagar a ela R$ 1.000.000,00.

A probabilidade da seguradora ter prejuízo nessa modalidade de seguro em um ano é:

a) p^{10}

b) $(1 - p)^{10}$

c) $1 - (1 - p)^{10}$

d) $1 - p^{10}$

e) $p^5 (1 - p)^5$

15. UECE – As soluções, em $\mathbb{R}$, da equação $\cos^4x - 4\cos^3x + 6\cos^2x - 4\cos x + 1 = 0$ são

Sugestão: use o desenvolvimento do binômio $(p - q)^4$.

a) $x = 2k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

b) $x = (2k + 1)\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

c) $x = k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

d) $x = (4k + 1)\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

16. Enem C7-H30

Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida.

Os organizadores, então, decidiram fazer um exame *antidoping*. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que P(I), P(II) e P(III) sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III.

Comparando-se essas probabilidades, obtém-se

a) $P(I) < P(III) < P(II)$
b) $P(I) < P(II) = P(III)$
c) $P(I) < P(III) < P(II)$
d) $P(I) = P(II) < P(III)$
e) $P(I) = P(II) = P(III)$

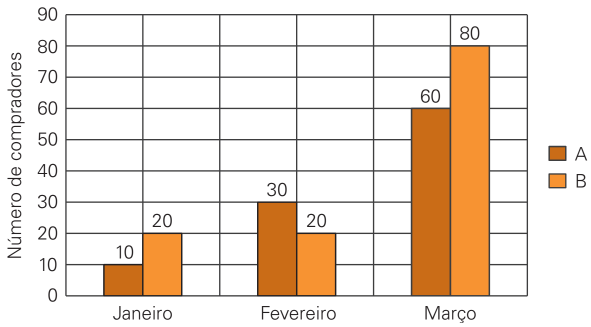
17. UECE – O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de

$$\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^3 \text{ é}$$

a) 18 **b)** 24 **c)** 34 **d)** 30

18. Enem C6-H24

Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B.

Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

a) $\frac{1}{20}$ **c)** $\frac{5}{22}$ **e)** $\frac{7}{15}$

b) $\frac{3}{242}$ **d)** $\frac{6}{25}$

19. Enem C7-H30

O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

a) 0,02048 **c)** 0,24000 **e)** 0,49152

b) 0,08192 **d)** 0,40960

20. FGV-SP C1-H3

Uma aplicação financeira de C reais à taxa mensal de juros compostos de x% é resgatada depois de 8 meses no montante igual a C_8 reais. Sendo assim, $\frac{C_8}{C}$ é um polinômio P(x) de grau 8 cujo coeficiente do termo em x^5 será

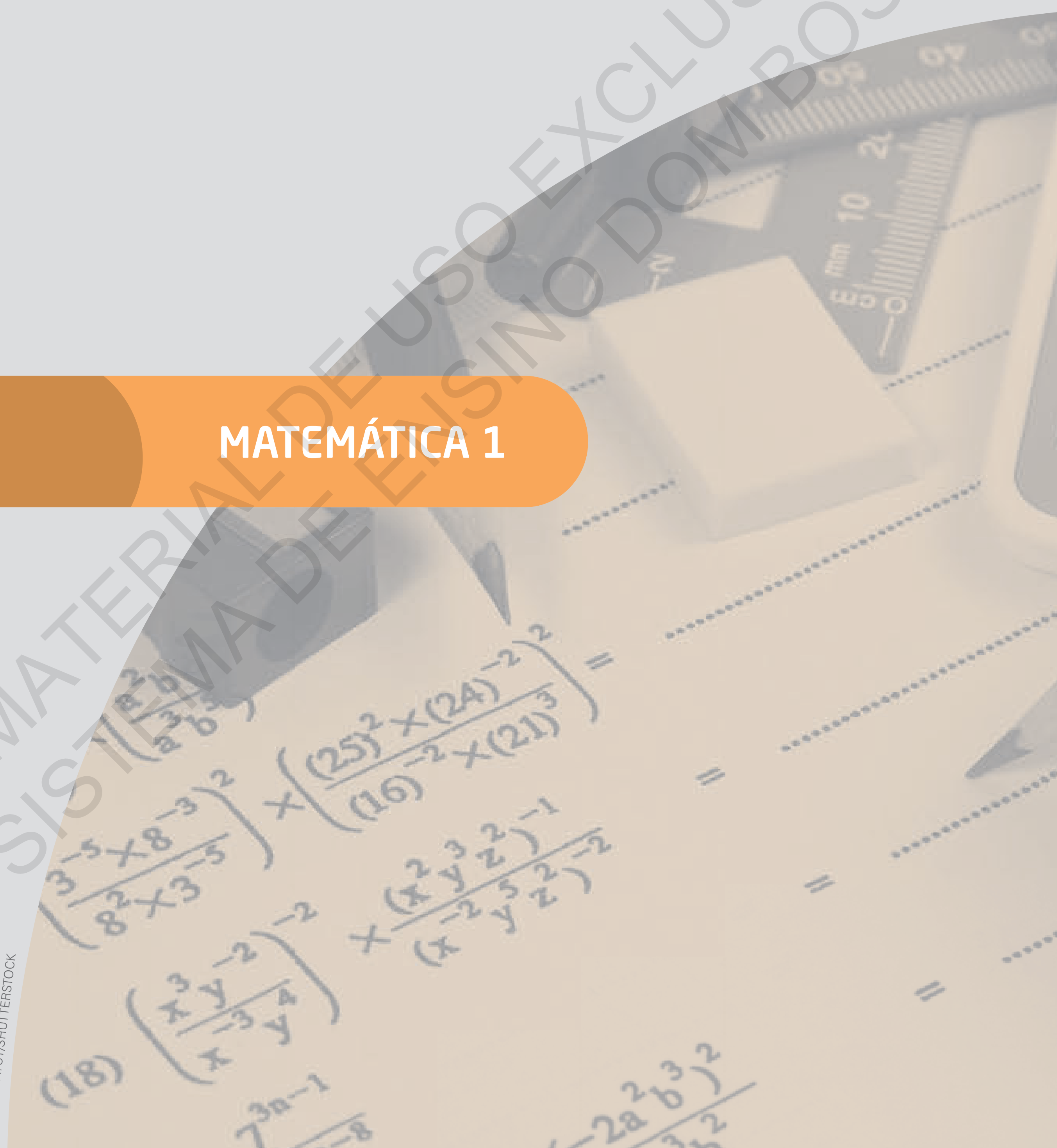
a) $70 \cdot 10^{-8}$ **c)** $56 \cdot 10^{-10}$ **e)** $21 \cdot 10^{-10}$

b) $35 \cdot 10^{-8}$ **d)** $35 \cdot 10^{-10}$

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 1



WITTAYAYUT/SHUTTERSTOCK

APRESENTAÇÃO

A disciplina de Matemática é uma ciência de características específicas, que se organiza por **meio de definições**, **teoremas** e **demonstrações**. Os alunos do ensino pré-vestibular devem demonstrar teoremas, justificar definições e, principalmente, usar a Matemática para **resolver problemas do cotidiano** e compreender fenômenos de outras áreas do conhecimento. Para tanto, precisam valorizar o raciocínio matemático, nos aspectos de formular questões, indagar a existência de solução, estabelecer hipóteses e conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos e argumentar de maneira lógico-dedutiva.

Esse material respalda-se na qualidade dos conhecimentos e na prática de sala de aula, abrangendo as áreas de conhecimento do Ensino Médio, cujos conteúdos conceituais são exigidos nos principais vestibulares do Brasil e no novo Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), e contempla uma **ampla coletânea de questões** extraídas de tais provas, com respectivos gabaritos e resoluções comentadas.

Por critério de organização didática, os conteúdos conceituais estão separados da sequência de exercícios e distribuídos para atender à demanda das diversas formatações de cursos, considerando as prioridades dos principais vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Com base nisso, o material didático produzido para essa etapa de ensino contempla e destaca inúmeras competências da nova Matriz de Referências para o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e, consequentemente, habilidades a elas relacionadas.

CONTEÚDO

MATEMÁTICA 1

Volume	Módulo	Conteúdo
2	17	Sequências, Progressão Aritmética e Progressão Geométrica
	18	Operações Entre Termos de Progressões e Números Complexos
	19	Forma Algébrica e Forma Trigonométrica Dos Números Complexos I
	20	Forma Trigonométrica dos Números Complexos II e Polinômios I
	21	Polinômios II
	22	Equações Algébricas
	23	Introdução a matrizes e operações com matrizes
	24	Matriz inversa, equação matricial e determinantes
	25	Determinante de matriz de ordem n e propriedades do determinante
	26	Introdução a sistemas lineares, método da substituição e método da igualdade
	27	Sistemas lineares – método da redução e escalonamento
	28	Sistemas lineares – gráfico, matriz associada e regra de Cramer

MATEMÁTICA 2

Volume	Módulo	Conteúdo
2	17	Geometria Espacial de Posição
	18	Prismas
	19	Pirâmides e Cilindros
	20	Cones e Esferas
	21	Estaística – Análise De Dados
	22	Estatística – Medidas De Tendência Central
	23	Introdução à geometria analítica – área de polígonos
	24	Estudo da reta – equação fundamental da reta e outras equações
	25	Posição relativa entre retas e distância entre ponto e reta
	26	Equações da circunferência – equação reduzida e equação geral
	27	Circunferência – posição relativas e cônicas – elipse
	28	Cônicas – hipérbole e parábola

MATEMÁTICA 3

Volume	Módulo	Conteúdo
2	9	Princípio fundamental da contagem
	10	Permutações e Arranjos
	11	Combinação
	12	Introdução à probabilidade
	13	Probabilidade condicional e da intersecção de eventos
	14	Probabilidade de eventos independentes e binômio de Newton

17 SEQUÊNCIAS, PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Comentários sobre o módulo

Instigue os alunos a reconhecerem sequências numéricas em seu dia a dia. Além disso, fomente a busca de representação matemática de tais sequências.

Com base em exemplos trazidos pelos alunos, ajude-os a determinar quando uma sequência numérica é crescente, decrescente ou constante.

Quando possível, traga o conceito de progressão aritmética usando exemplos práticos e de aplicação cotidiana.

Traga também exemplos práticos de aplicações de progressões geométricas afim de contextualizar e mostrar aos alunos o uso desse conhecimento matemático na realidade.

Para ir além

Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, foi um matemático italiano da Idade Média. Sua principal obra foi *Liber Abaci*, responsável por introduzir os números indo-arábicos na Europa. Ficou famoso pela **sequência de Fibonacci**, que inicia com os termos 0 e 1, em que os próximos termos correspondem à soma dos dois anteriores.

Depois de muito tempo, pode-se perceber que a sequência de Fibonacci tem aplicação em diversos campos no nosso cotidiano. Pesquise mais sobre a sequência de Fibonacci e em quais contextos ela pode ser aplicada na atualidade.

Exercícios propostos

7. D

Da relação dada, temos:

$a_3 = a_2 - a_1 = 3 - 2 = 1$

$a_4 = a_3 - a_2 = 1 - 3 = -2$

$a_5 = a_4 - a_3 = -2 - 1 = -3$

$a_6 = a_5 - a_4 = -3 - (-2) = -1$

$a_7 = a_6 - a_5 = -1 - (-3) = 2$

$a_8 = a_7 - a_6 = 2 - (-1) = 3$

$a_9 = a_3$

$a_{10} = a_4$

Assim, o ciclo se repete a cada 6 números. Logo, o último termo será:

$70 : 6 = 11$, resto $4 \rightarrow a_{70} = a_4 = -2$.

8. B

Do enunciado, temos que a primeira cadeira tem $h_1 = 48 + 44 = 92$ cm.

A segunda cadeira tem a mesma altura, acrescida de 3 cm. Logo, $h_2 = 92 + 3 = 95$ cm.

Para as demais alturas, teremos sempre um acréscimo de 3 cm.

Logo, temos uma PA (92, 95, 98, ...) de razão 3.

Sabemos que a altura para **n** cadeiras é de 1,4 m = 140 cm

Para calcularmos **n**, utilizaremos a relação $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, em que $a_n = 140$ cm e $a_1 = 92$ cm.

Assim: $140 = 92 + (n - 1) \cdot 3 \rightarrow 140 - 92 = 3n - 3 \rightarrow$

$\rightarrow 3n = 51 \rightarrow n = \dfrac{51}{3} = 17.$

9. A

Os valores irão compor uma PG de razão q, a qual será a taxa de decrescimento.

Assim, temos:

- Valor há 2 anos = $a_1 = 50\,000$;
- Valor hoje = $a_3 = 32\,000$, pois o valor que o carro valia há 1 ano não foi informado.

Assim, a PG será $(50\,000, a_2, 32\,000, ...)$

Da relação $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

A taxa de decrescimento será $a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} \rightarrow$
$\rightarrow 32\,000 = 50\,000 \cdot q^2$.

Assim, $q^2 = \dfrac{32\,000}{50\,000} = \dfrac{16}{25} \rightarrow q = \dfrac{4}{5}$.

Assim, daqui a 1 ano o valor será o 4º termo da PG.

Portanto, $a_4 = 50\,000 \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^3 = 50\,000 \cdot \dfrac{64}{125} =$

$=$ R\$ 25.600,00

Ou seja, valor menor que o do ano atual.

10. D

Como se trata de uma PA, com $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, temos:

$$\sec x = \frac{\text{tg } x + 2}{2} \rightarrow 2\sec x = \text{tg } x + 2$$

Substituindo-se sec x por $\dfrac{1}{\cos x}$ e tg x por $\dfrac{\text{sen} x}{\cos x}$, temos:

$$\frac{2}{\cos x} = \frac{\text{sen } x}{\cos x} + 2 \rightarrow 2 = \text{sen } x + 2\cos x$$

Elevando os termos ao quadrado, temos:

$2^2 = (\text{sen } x + 2\cos x)^2 \rightarrow 4 = \text{sen}^2 x + 4\text{sen } x \cos x + 4\cos^2 x$

Substituindo $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2 x$, temos:

$4 = \text{sen}^2 x + 4\text{sen } x \cos x + 4(1 - \text{sen}^2 x) \rightarrow$

$\rightarrow 4 = \text{sen}^2 x + 4\text{sen } x \cos x + 4 - 4\text{sen}^2 x$

$3\text{sen}^2 x - 4\text{sen } x \cos x = 0 \rightarrow$

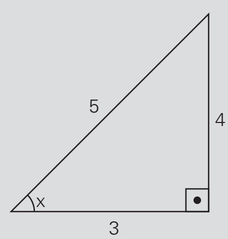
$\rightarrow \text{sen } x(3\text{sen } x - 4\cos x) = 0$

Assim, temos $\text{sen } x = 0$ ou $3\text{sen } x - 4\cos x = 0$.

$\text{sen } x = 0$ (não convém)

Portanto, $3\text{sen } x = 4\cos x \rightarrow \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \dfrac{4}{3} = \text{tg}\,x$.

Assim, podemos escrever o triângulo abaixo para encontrar sen x e cos x:



Portanto, $\text{sen}\,x = \dfrac{4}{5}$ e $\cos x = \dfrac{3}{5}$.

Logo, a PA $(\tan x, \sec x, 2) = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}, 2\right)$. A razão será $r = a_2 - a_1 \rightarrow r = \dfrac{5}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}$.

11. A

Do enunciado, temos que $a_2 = b_3$, $a_{10} = b_5$ e $a_{42} = b_7$.

Como a sequência de a é uma PA e a sequência de b é uma PG, temos:

$a_2 = a_1 + (2 - 1) \cdot 3 = b_3 = b_1 \cdot q^2 \rightarrow$
$\rightarrow a_1 + 1 \cdot 3 = b_1 \cdot q^2$ (I)

$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot 3 = b_5 = b_1 \cdot q^4 \rightarrow$
$\rightarrow a_1 + 9 \cdot 3 = b_1 \cdot q^4$ (II)

$a_{42} = a_1 + (42 - 1) \cdot 3 = b_7 = b_1 \cdot q^6 \rightarrow$
$\rightarrow a_1 + 41 \cdot 3 = b_1 \cdot q^6$ (III)

Fazendo II – I e III – II, temos respectivamente:

$24 = b_1 \cdot (q^4 - q^2)$ e $96 = b_1 \cdot (q^6 - q^4)$

$96 = b_1 \cdot (q^6 - q^4) = [b_1 \cdot (q^4 - q^2)] \cdot q^2 \rightarrow$

$\rightarrow 96 = 24 \cdot q^2 \rightarrow q^2 = \dfrac{96}{24} = 4$

Portanto: $q = \sqrt{4} = 2$.

Logo, $24 = b_1 \cdot (q^4 - q^2) \rightarrow b_1 = \dfrac{24}{(2^4 - 2^2)} = 2$.

Substituindo os valores em $a_1 + 1 \cdot 3 = b_1 \cdot q^2$, temos $a_1 = 2 \cdot 2^2 - 3 = 5$.

Encontrando a_4 e b_4, temos:

$a_4 = a_1 + 3r \rightarrow a_4 = 5 + 3 \cdot 3 = 14$

$b_4 = b_1 \cdot q^3 \rightarrow b_4 = 2 \cdot 2^3 = 16$

Logo, $b_4 - a_4 = 16 - 14 = 2$.

12. Do enunciado, temos que $a_7 = 20$ e $a_{13} = 11$. Para uma PG, temos $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$20 = a_1 \cdot q^6 \rightarrow a_1 = \dfrac{20}{q^6} \rightarrow a_1 = \dfrac{a_7}{q^6}$ e $11 = a_1 \cdot q^{12}$

$\rightarrow a_1 = \dfrac{a_{13}}{q^{12}}$

$a_{10} = \dfrac{20}{q^6} \cdot q^9 \rightarrow a_{10} = a_7 \cdot q^3$ (I)

$a_{10} = \dfrac{a_{13}}{q^{12}} \cdot q^9 \rightarrow a_{10} = a_{13} \cdot q^{-3} = \dfrac{a_{13}}{q^3}$ (II)

Multiplicando I e II, temos:

$a_{10} \cdot a_{10} = a_7 \cdot q^3 \cdot \dfrac{a_{13}}{q^3} \rightarrow a_{10}^{\ 2} = 20 \cdot 11 \rightarrow$

Assim, $a_{10} = \sqrt{20 \cdot 11} = 2\sqrt{55}$.

13. E

I) $a_1 = 1^2 + (4 \cdot 1) + 4 \rightarrow a_1 = 9$

$a_2 = 2^2 + (4 \cdot 2) + 4 \rightarrow a_2 = 16$

$a_3 = 3^2 + (4 \cdot 3) + 4 \rightarrow a_1 = 23$

Da relação $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos que a razão

$\dfrac{a_3}{a_2} \neq \dfrac{a_2}{a_1}$ (portanto, é falso).

II) $b_1 = 2^{1^2} = 2$

$b_2 = 2^{2^2} = 16$

$b_3 = 2^{3^2} = 512$ (seguindo o mesmo raciocínio do item I, é falso)

Portanto, os itens III e IV são verdadeiros.

14. Do enunciado, temos que a PA = $(2x, x + 1, 3x)$.

Da relação $a_n - a_{n-1} = r$, temos:

$x + 1 - 2x = r = 3x - (x + 1) \rightarrow x + 1 + (x + 1) =$

$= 3x + 2x \rightarrow 2x + 2 = 5x \rightarrow x = \frac{2}{3}$

Assim, $a_1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

$a_2 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$

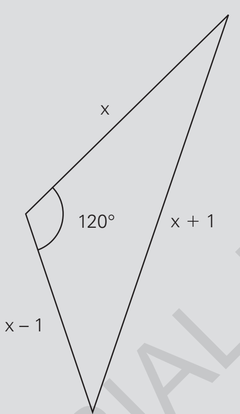
$a_3 = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{3}$

O perímetro será, portanto, $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{6}{3} = \frac{15}{3} = 5$.

15. C

Os lados do triângulo formam uma PA de razão 1. Logo, $(x - 1, x, x + 1)$.

Sabemos que o maior lado de um triângulo é oposto ao seu maior ângulo. Podemos então aplicar o teorema dos cossenos no triângulo considerado no enunciado:



$(x + 1)^2 = x^2 + (x - 1)^2 - 2 \cdot x \cdot (x - 1) \cdot \cos 120°$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1 - 2 \cdot x \cdot (x - 1) \cdot$

$\cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - x \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 - 5x = 0 \rightarrow x' = 0$ ou $x'' = \frac{5}{2}$

$x = 0$ (não convém)

Portanto, o perímetro P do triângulo será dado por:

$P = x + x - 1 + x + 1 \rightarrow P = 3x = 3 \cdot \frac{5}{2} = 7{,}5$

16. B

MMC (3, 4) = 12

Múltiplos de 12 são múltiplos de 3 e de 4 ao mesmo tempo.

Múltiplos de 12 entre 50 e 100 (60, 72, ..., 84, 96).

Temos, assim, uma PA de razão 12.

Utilizando a fórmula do termo geral da PA, temos:

$96 = 60 + (n - 1) \cdot 12$, em que **n** é o número de múltiplos de 12 entre 50 e 100.

$36 = (n - 1) \cdot 12$

$n - 1 = 3$

$n = 4$

17. Do enunciado, temos que (a_1, a_2, a_3) é uma PG e (a_3, a_4, a_5) é uma PA, em que $q = r = w$.

a) Para $a_3 = 3$ e $w = 2$

$PA \rightarrow a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$PG \rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Para a_3, temos:

Da $PG \rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} \rightarrow a_1 - 3 = \frac{3}{4}$.

Portanto, $a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} \rightarrow a_2 = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Assim, a PG é $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3\right)$.

Da PA, o primeiro termo é a_3. Portanto, o segundo termo $a_4 = a_3 + (2 - 1) \cdot 2 \rightarrow a_4 = 3 + 2 = 5$

Já o terceiro termo $a_5 = a_3 + (3 - 1) \cdot 2 \rightarrow a_5 =$
$= 3 + 4 = 7$.

Assim, a PA é (3, 5, 7).

A sequência é dada por $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, 5, 7\right)$.

b) Dado $a_1 = 1$ e $a_5 = 8$. Sabendo que $q = r = w$, temos:

Da $PG \rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} \rightarrow a_3 = 1 \cdot q^2$ (I)

$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} \rightarrow a_2 = 1 \cdot q$ (II)

Da $PA \rightarrow a_5 = a_3 + (3 - 1) \cdot r \rightarrow 8 = a_3 + 2r \rightarrow$
$\rightarrow a_3 = 8 - 2r$ (III)

$a_4 = a_3 + (2 - 1) \cdot r \rightarrow a_4 = 8 - 2r + r = 8 - r$ (IV)

Relacionando I e III, já que $q = r = w$, temos:

$8 - 2w = 1 \cdot w^2 \rightarrow w^2 + 2w - 8 = 0 \rightarrow w =$
$= -4$ ou $w = 2$

Para w = –4, temos:

$a_2 = -4$

$a_3 = (-4)^2 = 16$

$a_4 = 8 - r = 8 - (-4) = 12$

Assim, a sequência seria (1, –4, 16, 12, 8).

Para w = 2, temos:

$a_2 = 2$

$a_3 = (2)^2 = 4$

$a_4 = 8 - 2 = 6$

Assim, a sequência seria (1, 2, 4, 6, 8).

Estudo para o Enem

18. A

No início do ciclo, os anos formam uma PA (1 755, 1 766, 1 777, ...).

Como $a_1 = 1\,755$, da relação $a_n - a_{n-1} = r$, obtemos a razão da PA:

$a_2 - a_1 = r = 1\,766 - 1\,755 = 11$

Para determinar em que ciclo de atividade magnética o sol estará em 2 101, calculamos o **n**:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$2\,101 = 1\,755 + (n - 1) \cdot 11$

$2\,101 = 1\,755 + 11n - 11$

$11n = 357$

$n = 32,45$

Logo, o ano de 2 101 está compreendido no 32º ciclo.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

19. A

Podemos verificar que a sequência de quadrados tem sua medida aumentada em 1 unidade a cada novo termo. Temos assim uma progressão aritmética de razão 1.

Para um quadrado de medida **n**, a área será $A_n = n^2$.

Dessa forma, $A_{n-1} = (n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1$.

Logo, para $A_n - A_{n-1} = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. E

Do enunciado, temos que, no primeiro ano, foram produzidas 8 000 peças. No segundo, 8 000 + + 8 000 · 0,5.

Colocando o 8 000 em evidência, temos: 8 000 (1 + 0,5) = 8 000 · 1,5 = 12 000. No terceiro 12 000 · 1,5 = 18 000.

Com isso, podemos descrever a produção como uma PG de razão 1,5:

Ano 1 $\rightarrow 8\,000 \rightarrow 8\,000 \cdot 1,5^0 = 8\,000 \cdot 1 = 8\,000$

Ano 2 $\rightarrow 12\,000 \rightarrow 8\,000 \cdot 1,5^1 = 8\,000 \cdot 1,5 = 12\,000$

Ano 3 $\rightarrow 18\,000 \rightarrow 8\,000 \cdot 1,5^2 = 8\,000 \cdot 2,25 = 18\,000$

Assim, da relação $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos que, para $t \geq 1$, o número de unidades produzidas P será dado por $P = 8\,000 \cdot (1,5)^{t-1}$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

18 OPERAÇÕES ENTRE TERMOS DE PROGRESSÕES, NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Comentários sobre o módulo

Traga situações concretas de aplicação da soma dos termos de uma PA e de uma PG, além do produto dos termos de uma PG.

Utilize a soma dos termos de uma PG para concluir que, quando 0 < |q| < 1, a sequência apresenta um limite, mesmo ela sendo infinita. Por fim, busque obter a fórmula:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q},\ 0<|q|<1$$

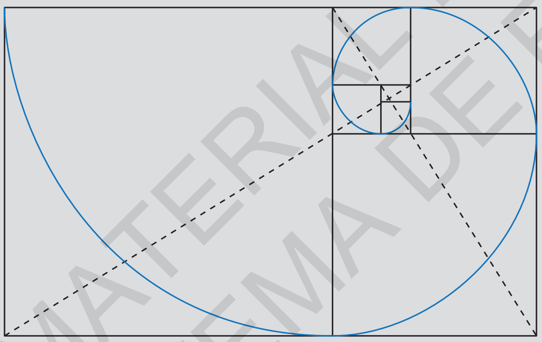
Busque trazer situações do dia a dia do aluno para que possam compreender a utilidade dos números complexos e sua aplicação.

Para ir além

O **número de ouro** (ou razão áurea) é uma constante matemática denotada pela letra grega Φ (phi).

Em Geometria, no **retângulo de ouro** também é possível obter o número Φ. Em cada quadrado está contido parte de uma espiral, sendo que o comprimento dessas partes constitui uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{\phi}$.

Pesquise mais sobre o número de ouro e discuta com seus colegas se o comprimento dessa espiral é finito ou infinito.



Exercícios propostos

7. C

Com base no enunciado, podemos concluir que o programa de treinos corresponde a uma PA, em que a_1 = 6 km, com razão r = 2 km e sendo que a última distância percorrida é a_n = 42 km. Para calcularmos o total percorrido pelo atleta, devemos utilizar a soma dos termos $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Porém, ainda é preciso determinar o valor de n, que no problema se refere à quantidade de dias de treinamento. Assim:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r \rightarrow 42 = 6 + (n-1)\cdot 2 \rightarrow$$
$$\rightarrow n-1 = \frac{36}{2} = 18 \rightarrow n = 18+1 = 19$$

Assim, foram 19 dias de treino ao todo.

O total percorrido pelo atleta é:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} \rightarrow S_n = \frac{(6+42)19}{2} = \frac{48\cdot 19}{2} = 24\cdot 19 \rightarrow$$
$$\rightarrow S_n = 456 \text{ km}.$$

8. E

Com base no enunciado, as parcelas crescem segundo uma progressão geométrica de razão 1,1 – sendo o primeiro termo igual a 2 000.

Dessa forma, o montante pago será a soma da PG finita, já que número de parcelas é 5. Assim:

$$S = 2000\cdot\frac{(1,1)^5-1}{1,1-1} = 2000\cdot 6,1051 = R\$\ 12.210,20$$

Assim, os juros cobrados correspondem a 12.210,20 – 10.000 = R$ 2.210,20.

Portanto, a taxa de juros na transação é:

$$\frac{2.210,2}{10.000\cdot 5}\cdot 100\% = 0,044204 \cong 4,42\%.$$

9. C

Sabemos pelo enunciado que a quantidade de visitantes descreve uma PA, com a_1 = 4 200. Como há uma diminuição de visitantes a cada mês, a razão dessa PA é < 0.

Sabemos também que soma para o 2º ano é 35 700.

Assim, V_1 = (4 200, 4 200 – x, 4 200 – 2x, 4 200 – 3x,..., 4 200 – 11x).

No segundo ano, temos V_2 = (4 200 – 12x, 4 200 – 13x,..., 4 200 – 23x).

Logo, a soma dos termos da PA será:

$$S_2 = \frac{[4200-12x+4200-12x+(12-1)(-x)]\cdot 12}{2} =$$
$$= 35700 \rightarrow \frac{[8400-24x-11x]\cdot 12}{2} = 35700 \rightarrow$$
$$\rightarrow [8400-35x]\cdot 6 = 35700 \rightarrow$$
$$8400-35x = 5950 \rightarrow 35x = 2450 \rightarrow x = 70$$

Portanto, o número de visitantes no 24º mês foi 4 200 – 23 · 70 = 2 590.

O número de visitantes no mês 1 do terceiro ano foi 2 590 – 70 = 2 520.

Já no 12º foi de 2 520 – 70 · 11 = 1 750.

Assim, o total de visitantes no terceiro ano foi de:

$$\frac{(2520+1750)\cdot 12}{2}=4270\ \cdot 6=25620.$$

10. Como o número de chegadas em 2014 é uma PA, temos:

(Jan, Fev, Mar, Abr, Mai, Jun, Jul, Ago, Set, Out, Nov, Dez) = (3 300, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, 45 375)

Para calcular a razão da PA, utilizamos $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$.

Assim:

$$a_{12}=a_1+(12-1)\cdot r \rightarrow 45375=3300+11r\rightarrow$$

$$11r=42075\ \rightarrow r=\frac{42075}{11}=3825$$

a) Sabendo que a_1 = 3 300 e r = 3 825, calculamos a_5, que representa as chegadas em maio.

Logo:

$a_5 = 3300 + (5 - 1) \cdot 3825 = 3300 + 15300 \rightarrow$
$\rightarrow a_5 = 18600$

b) Para calcular o total de chegadas em 2014, basta utilizarmos a equação da soma dos termos da PA $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Assim:

$$S=\frac{(3\ 300+45\ 375)12}{2}=48\ 675\cdot 6\rightarrow S=292\ 050$$

11. C

O primeiro candidato leu o livro seguindo uma progressão aritmética de razão 2. Então, r = 2.

Logo, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2n$.

O segundo candidato leu o livro seguindo uma progressão geométrica de razão 2. Então,

q = 2.

Logo, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

Como sabemos o total de páginas, podemos calcular a quantidade de dias que o primeiro candidato levou para ler o livro com base na soma dos termos da PA:

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(2+2n)}{2}=182$$

Isso resulta em n = 13. Ou seja, se d é o dia de início da leitura, então:

$26 - d + 1 = 13 \rightarrow d = 14$

Assim, os candidatos iniciaram a leitura no dia 14 de outubro.

Para o segundo candidato, com base na soma dos termos da PG, temos:

$$S_n=182=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=1\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1\rightarrow 2^n=183$$

$\log 2^n = \log 183 \rightarrow n \cdot \log 2 = \log 183$

$n = \log_2 183 = 7{,}6$

Então, o segundo candidato levou 8 dias para ler o livro (aproximando o valor 7,6).

Portanto, o segundo candidato terminou a leitura no dia 21 de outubro.

12. C

Substituindo z_1 e z_2 em $z_1 \cdot z_2 = -4 + 7i$, temos:

$(-3 + pi) \cdot (p - i) = -4 + 7i$

$-3p + 3i + p^2i - pi^2 = -4 + 7i$

$-3p + 3i + p^2i + p = -4 + 7i$

$-2p + (3 + p^2)i = -4 + 7i$

Então: $-2p = -4$ e $3 + p^2 = 7$.

Portanto, p = 2.

Utilizando o valor de p = 2 em z_1 e z_2 e fazendo a adição, obtemos:

$z_1 + z_2 = (-3 + 2i) + (2 - i) = -1 + i$

13. E

Calculando o produto de z_1 e z_2, obtemos o resultado:

$z_1 \cdot z_2 = (9 + 3i) \cdot (-2 + i) = -18 + 9i - 6i + 3i^2 =$
$= -18 + 3i + 3(-1) = -21 + 3i$

14. Do enunciado, temos que z_1 e z_2 são conjugados do tipo a + bi. Substituindo os valores de a e b dados, chegamos a $z_1 = 2 - i$ e $z_2 = 2 - (-1)i = 2 + i$.

a) $z_1 \cdot z_2 = (2 - i) \cdot (2 + i) = 4 + 2i - 2i - i^2$

$z_1 \cdot z_2 = 4 + 1 = 5$

b) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2=\left(\frac{2-i}{2+i}\right)^2$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{4-2i-2i+i^2}{4-2i+2i-i^2}=\frac{4-4i-1}{4+1}=\frac{3-4i}{5}$$

Logo,

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2=\left(\frac{3-4i}{5}\right)^2=\frac{(3-4i)^2}{5^2}=\frac{9-24i+16i^2}{25}=$$

$$=\frac{9-24i-16}{25}\rightarrow\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2=\frac{(-7-24i)}{25}=-\frac{7}{25}-\frac{24i}{25}$$

15. C

Do enunciado, temos:

$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^7 = -6 - 3i$ (I)

$z^8 = 16$ (II)

Fazendo I + II, temos:

$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^7 + z^8 = 16 - 6 - 3i$

$z + z^2 + z^3 + \ldots + z^7 + z^8 = 9 - 3i \rightarrow z(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^7) = 9 - 3i$

Como $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^7 = -6 - 3i$, temos:

$z \cdot (-6 - 3i) = 9 - 3i$

$$z = \frac{9-3i}{-6-3i} \cdot \frac{-6+3i}{-6+3i} = \frac{-54+27i+18i-9i^2}{36-18i+18i-9i^2} = -\frac{45+45i}{45}$$

$z = -1 + 1i$

16. A

$$\frac{2+i}{\beta+2i} = \frac{2+i}{\beta+2i} \cdot \frac{\beta-2i}{\beta-2i} = \frac{2\,\beta-4i+\beta i-2i2}{\beta^2-2i\,\beta+2i\,\beta-4i^2} =$$

$$= \frac{2\,\beta-4i+\beta i+2}{\beta^2+4} = \frac{2\,\beta+2}{\beta^2+4} + \frac{\beta-4}{\beta^2+4} \cdot i$$

Do enunciado, temos que a parte imaginária é zero. Assim:

$$\frac{\beta-4}{\beta^2+4} = 0 \rightarrow \beta-4 = 0 \rightarrow \beta = 4$$

17. D

Dado x + yi =, elevando ambos os lados da equação ao quadrado, temos:

$(x + yi)^2 = (\sqrt{3+4i})^2 \rightarrow x^2 + 2xyi + (yi)^2 = 3 + 4i$

Como $i^2 = -1$, temos então:

$x^2 + 2xyi - y^2 = 3 + 4i$

Separando a parte real da parte imaginária, temos:

$x^2 - y^2 = 3$

$2xy = 4$

Da equação $2xy = 4$, temos que $xy = \dfrac{4}{2} = 2$.

Estudo para o Enem

18. C

O valor de U e Z são:

$U = 110(\cos 0° + i\operatorname{sen} 0°) = 110(1 + i \cdot 0) = 110$

$Z = 5 + 5i = 5 \cdot (1+i)$

Da relação para a tensão, obtemos o valor j:

$$U = Zj \rightarrow j = \frac{U}{Z} = \frac{110}{5(1+i)}$$

Multiplicando e dividindo essa expressão por $(1 - i)$:

$$j = \frac{110}{5(1+i)} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{22(1-i)}{1^2-i^2} = \frac{22(1-i)}{1+1} =$$

$$= \frac{22(1-i)}{2} = 11(1-i)$$

Do enunciado, $j = a + bi$, então $a = 11$ e $b = -11$.

Portanto, $2a + b = 2 \cdot 11 - 11 = 11$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. C

Como a cada dia o número de visitantes é triplicado, temos:

Dia 1 = 345	Dia 3 = 3 · 3 · 345
Dia 2 = 3 · 345	Dia 4 = 3 · 3 · 3 · 345

Assim, o número de visitantes descreve uma sequência cujo quarto termo se refere ao último dia de evento. Então, o número de visitantes será $3^3 \cdot 345$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. C

A relação é uma PA. A distância r a ser calculada será a razão dela.
Segundo o enunciado, a soma dos percursos é 1 560. O primeiro termo da PA é 60, e enésimo termo é 180. Da relação $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, temos:

$$1\,560 = \frac{(60+180) \cdot n}{2} \rightarrow n = \frac{1\,560}{120} = 13$$

Para calcularmos a razão, temos
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \rightarrow 180 = 60 + (13 - 1) \cdot r$.
Então, $120 = 12r \rightarrow r = 10$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19 FORMA ALGÉBRICA E TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS I

Comentários sobre o módulo

Apresente situações reais de aplicabilidade de números complexos. Além disso, instigue os alunos a buscarem informações de tal aplicação em seu dia a dia.

Ressalte a importância do uso da forma trigonométrica dos números complexos no desenvolvimento da ciência e como isso contribuiu para a evolução da tecnologia de ponta.

Para ir além

Rafael Bombelli foi o mais importante matemático italiano. Também foi contemporâneo de diversos outros estudiosos da área, como Del Ferro, Fior, Tartaglia, Cardano e Lodovico Ferrari, os quais vivenciaram todos os esforços voltados para a solução das equações cúbicas e quadráticas.

Exercícios propostos

7. A

Desenvolvendo $z = x(2x - i) \cdot (3+2i)$, temos:

$z = 6x^2 + 4x^2i - 3xi - 2xi^2 \rightarrow 6x^2 + 4x^2i - 3xi - 2x(-1) \rightarrow z = x(6x + 2) + (4x^2 - 3x)i$

Para que z seja imaginário puro, $x(6x + 2) = 0$.

Como x não pode ser zero, pois isso zeraria também a parte imaginária, temos que:

$$6x+2=0 \rightarrow x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

Substituindo x, temos:

$$z=-\frac{1}{3}\cdot\left(6\left(-\frac{1}{3}\right)+2\right)+\left(4\left(-\frac{1}{3}\right)^2-3\left(-\frac{1}{3}\right)\right)i \rightarrow$$

$$\rightarrow z=0+\frac{13}{9}i$$

8. Chamando de v o vértice do quadrado a ser determinado $Z=\frac{w+v}{2}$.

Então, $v = 2z - w$.

Segue que $v = 2 \cdot (3 - 2i) - (4 - 3i) = 6 - 4i - 4 + 3i = 2 - i$.

O vértice não consecutivo a w é o número $2 - i$.

9. B

Considerando que o centro do quadrado ABCD seja o ponto P, temos que:

$$P=\left(\frac{x_B+x_D}{2},\frac{y_B+y_D}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

O número $Z_n = a + bi$, que será multiplicado por $Z_0 = -1+i$, corresponde aos afixos do ponto P. Então:

$$Z_0\cdot Z_n=(-1+i)\cdot(a+bi)=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\rightarrow$$

$$\rightarrow -a-b+(a-b)i=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$$

Resolvendo o sistema, temos:

$a = 0$ e $b=\frac{3}{2}$,

Portanto, o número Z_n é o número Z_2.

10. A

Do enunciado, temos $z+\bar{z}=4$ e $z-\bar{z}=-4i$. Assim:

$(a + bi) + (a - bi) = 4 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2$

$(a + bi) - (a - bi) = -4i \rightarrow 2bi = 4i \rightarrow b = 2$

Assim, temos que $z = 2 + 2i$.

A forma trigonométrica é dada por $\rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$.

Assim, $\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Já o argumento será:

$$\text{sen}\theta=\frac{b}{\rho}\rightarrow \text{sen}\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta=\frac{a}{\rho}\rightarrow\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Então, a forma trigonométrica será

$$z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

11. Os números complexos de módulo igual a 4, com **a** e **b** reais, são tais que:

$\sqrt{a^2+b^2}=4$

Do enunciado, temos:

$f(z)=\bar{z}$

$iz=\bar{z}$

$i(a + bi) = a - bi$

$-b + ai = a - bi$

Portanto, $a = -b$.

Assim, utilizando a condição acima para o módulo ser igual a 4:

$\sqrt{a^2+b^2} = 4$

$a^2 + b^2 = 16$

$(-b)^2 + b^2 = 2b^2 = 16$

$b^2 = 8$

$b = \pm 2\sqrt{2}$

Então, os números complexos que satisfazem as condições impostas são $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ e $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$.

12. B

Do enunciado, temos que $z = a + bi$ é raiz de $x^2 + bx + a = 0$. Portanto:

$(a + bi)^2 + b(a + bi) + a = 0 \rightarrow a^2 + 2abi - b^2 + ab + b^2i + a = 0$

$(a^2 - b^2 + ab + a) + b(2a + b)i = 0$

Temos então:

$a^2 - b^2 + ab + a = 0$

$b(2a + b)i = 0 \rightarrow 2a + b = 0$ (já que **b** deve ser não nulo)

$b = -2a$

Substituindo o valor de **b** na primeira equação, temos:

$a^2 - (-2a)^2 + a(-2a) + a = 0 \rightarrow a^2 - 4a^2 - 2a^2 + a = 0$

$-5a^2 + a = 0 \rightarrow a(1 - 5a) = 0$ (como **a** deve ser não nulo)

$1 - 5a = 0 \rightarrow a = 15$

Com isso, temos que $b = -2(15) = -25$. Então:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

13. A

Simplificando a expressão, temos:

$$\frac{(1+i)^p}{(1-i)^{p-2}} = \frac{\left((1+i)^p \cdot (1-i)^2\right)}{(1-i)^p} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^p \cdot (1-i)^2 =$$

$$= \left(\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right)^p \cdot (1-2i+i^2) = \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^p \cdot (-2i) =$$

$$= \left(\frac{2i}{2}\right)^p \cdot (-2i)$$

Substituindo o valor de p, temos:

$i^p \cdot (-2i) = i^{4n} \cdot (-2i) = (i^4)^n \cdot (-2i) = 1^n \cdot (-2i) = -2i$, já que n é um número inteiro e diferente de zero.

14. A

$$u = 4(\cos 120^\circ + i\,\text{sen}\,120^\circ) = 4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$$

Assim, $u = -2 + 2\sqrt{3}i$.

Como $v = \frac{u}{i} \rightarrow v = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = 2\sqrt{3}+2i$.

Então, $|u+v| = \sqrt{(2\sqrt{3}-2)^2+(2\sqrt{3}+2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

15. D

Temos que $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + ... = 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + ... = 0 + 0 + ...$

Ou seja, a partir da potência i^4, as demais se repetem de 4 em 4. O resultado da soma de cada 4 parcelas é zero.

Como a soma $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + ... + i^{2013}$ tem 2014 parcelas, dividindo 2014 por 4, encontramos $2014 = 503 \cdot 4 + 2$.

O resto 2 significa que temos 503 parcelas que somam zero e mais 2 que não somam zero.

Assim:

$i^{2012} = (i^2)^{1006} = (-1)^{1006} = 1$

$i^{2013} = i(i)^{2012} = i(i^2)^{1006} = i(-1)^{1006} = i$

Dessa forma, as duas parcelas que não somam zero são $1 + i$.

Portanto, a soma $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + ... + i^{2013} = 0 + 1 + i = 1 + i$.

16. D

Do enunciado, temos $z = i^{87} \cdot (i^{105} + \sqrt{3})$.

Dividindo 87 e 105 por 4, obtemos 3 e 1 como restos, respectivamente.

Assim, $z = i^3 \cdot (i + \sqrt{3}) \rightarrow z = 1 - \sqrt{3}i$.

Como $v = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $v = \frac{1}{2}z$. Concluímos então que **z** e **v** têm o mesmo argumento.

17. $i^{200} \cdot i^{201} \cdot i^{202} \cdot i^{203} \dots i^{247} \cdot i^{248} = i^{200+201+202+203+\dots+247+248}$

Temos que os expoentes formam uma PA de razão 1, sendo 49 termos.

Assim, $S_{49} = \frac{(200+248)\,49}{2} \to S_{49} = 10\,976.$

Logo, temos i^{10976}.

Para calcular potências de i, dividimos o expoente de i por 4 e consideramos apenas i elevado ao resto dessa divisão. Assim:

$i^{10\,976} \to \frac{10\,976}{4}$, cujo resto é 0 → $i^0 = 1$

Estudo para o Enem

18. A

Do enunciado, temos que $x + yi = z$ representa o alcance máximo.

Do gráfico, sabemos que $z_0 = 10 + 5i$. Assim:

$|z - z_0| = 30 \to |(x - 10) + (y - 5i)| = 30 \to$

$\to \sqrt{(x-10)^2 + (y-5i)^2} = 30 \to (x-10)^2 + (y-5i)^2 =$

$= 900 \to x^2 - 20x + 100 + y^2 - 10y + 25 - 900 =$
$= 0 \to x^2 + y^2 - 20x - 10y - 775 = 0$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. C

Do enunciado, temos que $z_1 = 2 - 4i$ e $z_2 = 3 - 6i$. Assim:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-4i}{3-6i} = \frac{2(1-2i)}{3(1-2i)} = \frac{2}{3}.$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. E

A composição de rotação entre pontos, como mencionado no texto, é dada pelo produto entre eles.

Calculando o produto de $z = -3 + 4i$ por $w = 2 - 3i$, obtemos:

$z \cdot w = (-3 + 4i)(2 - 3i)$

$z \cdot w = -6 + 9i + 8i + 12$

$z \cdot w = 6 + 17i$

Portanto, a composição de rotação é igual a $6 + 17i$.

Competência: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

20 FOMA TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS II E POLINÔMIOS I

Comentários sobre o módulo

Embora os temas abordados sejam mais técnicos, encaminhe tais assuntos para o lado mais lúdico possível. Para isso, mostre os resultados das operações no plano de Argand-Gauss e instigue os alunos a buscarem relações geométricas, mesmo se tratando de relações algébricas.

Mostre aos alunos situações nas quais os polinômios são utilizados. Se possível, traga casos de modelagem matemática e sua aplicação nas diversas áreas do conhecimento.

Para ir além

A palavra **fractal** tem origem no latin *fractus*, que significa irregular. O matemático francês Benoît Mandelbrot (1924-2010) apresentou a ideia de fractal e foi o principal estudioso desse campo da Matemática.

Fractais são formas geométricas abstratas com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo sendo limitadas a uma área finita.

Elas apresentam relações com diversos objetos da natureza e têm sido utilizadas em diversos campos de estudo por auxiliar na modelagem matemática.

Exercícios propostos

7. C

Sendo $z = \rho(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$, da figura temos que $\rho > 1$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Assim, para

Como $\rho > 1$, temos que $\rho^{-1} < 1$. Portanto, o afixo de z^{-1} é interior à circunferência.

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, temos que $-\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0$. Portanto, o afixo de z^{-1} pertence ao 4º quadrante,

sendo este representado por III.

8. D

Com base no gráfico, sabemos que w_0 é:

$w_0 = 2(\cos 12° + i\operatorname{sen} 12°)$.

Uma vez que w_0 é raiz da equação, $w^5 = z$.

Calculamos z pela fórmula de Moivre e pela igualdade:

$$z = w_0^5 = 2^5\left(\cos(5.12°) + i\operatorname{sen}(5.12°)\right)$$

$$z = 32\left(\cos(60°) + i\operatorname{sen}(60°)\right)$$

$$z = 32\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z = 16 + 16\sqrt{3}i$$

9. D

Do enunciado, temos que $P(1) = -2 \rightarrow 2 \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 = -2 \rightarrow b + c = -4$ (I)

$P(2) = 6 \rightarrow 2 \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 = 6 \rightarrow 2b + c = -5$ (II)

Fazendo II – I, temos $b = -1$.

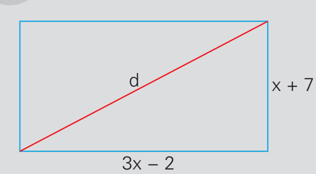
Logo, $c = -3$.

10. E

Do enunciado, o polinômio $3x^2 + 19x - 14$ representa a área do triângulo. Fatorando-o, temos:

$3x^2 + 19x - 14 = 3x^2 + 21x - 2x - 14 = 3x(x+7) - 2(x+7) = (x + 7)(3x - 2)$

Assim:



Sendo d a diagonal desse retângulo:

$d^2 = (x + 7)^2 + (3x - 2)^2 = x^2 + 14x + 49 + 9x^2 - 12x + 4 \rightarrow$

$\rightarrow d^2 = 10x^2 + 2x + 53$

11. E

Inicialmente vamos determinar as 3 raízes do número $z = -1$.

A parte imaginária do número é zero $z = -1 = -1 + 0i$.

Logo, o módulo é $|z| = \sqrt{1^2 + 0} = 1$.

Então:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{1} = -1$$

Portanto, $\theta = \pi$.

Calculando as raízes pela segunda fórmula de Moivre, obtemos:

n = 3 (raiz cúbica)

$$z_k = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\frac{\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2k\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Para k = 0:

$$z_0 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\cdot0\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2\cdot0\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_0 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_0 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para k = 1:

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\cdot1\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2\cdot1\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1 = (\cos(\pi)+i\,\text{sen}(\pi))$$

$$z_1 = -1$$

Para k = 2:

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\cdot2\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2\cdot2\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Fazendo a multiplicação das raízes, obtemos:

$$z_0\cdot z_1\cdot z_2 = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow z_0\cdot z_1\cdot z_2 = (-1)\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}i^2\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow z_0\cdot z_1\cdot z_2 = (-1)\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) = -1$$

12. Como **a**, **b**, **c** e **d** é uma PG de razão $q \neq 0$:

$$b = a\cdot q \rightarrow a = \frac{b}{q}$$

$$c = a\cdot q^2 \rightarrow a = \frac{c}{q^2}$$

$$d = a\cdot q^3 \rightarrow a = \frac{d}{q^3}$$

Assim, $p\left(-\frac{1}{q}\right) = a + a\cdot q\left(-\frac{1}{q}\right) + a\cdot q^2\left(-\frac{1}{q^2}\right)^2 +$

$$+ a\cdot q^3\left(-\frac{1}{q^3}\right)^3 =$$

$$= a - a + a - a = 0$$

Logo, $x = -\frac{1}{q}$ é raiz do polinômio.

13. D

Analisando as alternativas, temos:

a) Se b = 0, $P(x) = x^2 + 3$. Portanto, P(x) não tem nenhuma raiz real para b = 0. Assim, a alternativa é incorreta.

b) Se b = 12, $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 > 0$. Portanto, nesse caso P(x) possuirá 2 raízes reais distintas. Ou seja, a alternativa é incorreta.

c) Como visto no item a, essa alternativa é incorreta.

d) Se $b = 1+\frac{1}{\sqrt{3}}$, como $1+\frac{1}{\sqrt{3}} < 2 \rightarrow \Delta < 0$. Logo, não haverá raiz real. Dessa forma, a alternativa é correta.

e) Se o polinômio é de grau 2, ele só terá 2 raízes. Portanto, não poderá ter 3 raízes independentemente do valor de b.

14. Do enunciado $\frac{a}{3}-\frac{bi}{5} = \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)^4$, temos pela fórmula de Moivre:

$$\frac{a}{3}-\frac{bi}{5} = 1^4\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{6}+i\cdot\text{sen}\frac{4\pi}{6}\right) =$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\text{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, $\frac{a}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{3}{2}$ e $-\frac{b}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow b = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Assim, $\frac{a}{b} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{5\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

15. B

Para o polinômio p(x), temos que o grau deste é dado pela soma dos expoentes i de $(x - i)^i$. Podemos perceber que esses expoentes estão em uma P.A. de razão 1, sendo $a_1 = 1$, em que a soma da P.A. é 210.

Dessa forma:

$$S_n = (a_1 + a_n)\cdot\frac{n}{2} \rightarrow 210 =$$

$$=\left[a_1+a_1+(n-1)\cdot r\right]\cdot\frac{n}{2}\rightarrow 420=$$

$$=\left[1+1+(n-1)\cdot 1\right]\cdot n\rightarrow 420=$$

$$=2n+n^2-n\rightarrow n^2+n-420=0$$

Da equação de 2º grau, obtemos as raízes n = –21 e n = 20.

Como a raiz negativa não convém, ficamos com n = 20, como 20 é divisível por 5.

16. E

Seja z = cos (α) +isen (α), com 0 < α < 2π.

Para que as imagens dos números complexos **z**, **w** e **zw** correspondam aos vértices de um triângulo equilátero, devemos ter $w=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e $zw=\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$.

Por outro lado, sabemos que

$$zw=\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right),$$

Logo, α deve ser $\frac{2\pi}{3}$. Assim, $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$, $w=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$ e $zw=1$.

Portanto, z e w são complexos conjugados.

17. a) p(x) = (x² + ax + 1)(x² + bx + 2) →
→ p(x) = x⁴ + bx³ + 2x² + ax³ + abx² + 2ax + + x² + bx + 2 =

= x⁴ + (a + b)x³ + (ab + 3)x² + (2a + b)x + 2

Assim:

$a + b = -1 - 2\sqrt{3}$

$ab + 3 = 3 + 2\sqrt{3}$

$2a + b = -1 - 4\sqrt{3}$

Resolvendo, temos b = –1 e $a = -2\sqrt{3}$.

b) Para encontrarmos as raízes, fazemos $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + bx + 2 = 0$

Para $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$:

$$\Delta=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4\cdot1\cdot1\rightarrow\Delta=12-4=8$$

$$x_1=\frac{-\left(-2\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{8}}{2\cdot1}=\frac{2\sqrt{3}\pm2\sqrt{2}}{2}\rightarrow x_1=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$$

Para $x^2 - x + 2 = 0$:

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 \rightarrow \Delta = 1 - 8 = -7$

$$x_2=\frac{-(-1)\pm\sqrt{7i^2}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}\rightarrow x_2=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}i}{2}$$

Estudo para o Enem

18. B

Do enunciado, temos $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$ e $w=1\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$. Para calcularmos as horas e minutos, temos:

Horas: $$\frac{z}{w}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)}{1\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)}$$

Das fórmulas de Moivre, temos:

$$\frac{z}{w}=\frac{2}{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$\frac{z}{w}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$, como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ temos:

$$\frac{z}{w}=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=\sqrt{3}+i,$$

Os afixos, portanto, são ($\sqrt{3}$, 1).

Já $z\cdot w=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right).1\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

$z\cdot w=2\cdot1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=$, sendo os

$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)=2i$ afixos (0,2).

Assim, se projetarmos no relógio os pontos dos afixos, concluímos que o horário da reunião é 14h.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. E

Queremos calcular o seguinte:

d² = b² + h², em que:

d é a diagonal do retângulo;

b = x + 7 é a base do retângulo;

h é a altura do retângulo.

Logo, $3x^2 + 19x - 14 = (x + 7)\,h \leftrightarrow h = 3x - 2$.

Portanto, podemos então dizer que o quadrado da diagonal será:

$d^2 = (x + 7)^2 + (3x - 2)^2 = 10x^2 + 2x + 53$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. D

Com base na figura, $|z| = 2$, $|w| = 4$. Como foram dados os ângulos, podemos escrever **z** e **w** na forma trigonométrica:

$z = 2 \cdot (\cos 30° + i \cdot \operatorname{sen} 30°)$

$w = 4.(\cos 240° + i \cdot \operatorname{sen} 240°)$

Para encontrarmos t, temos $t = \dfrac{w}{z}$.

Assim, $t = \dfrac{4(\cos 240° + i \cdot \operatorname{sen} 240°)}{2(\cos 30° + i \cdot \operatorname{sen} 30°)}$.

Pela fórmula de Moivre, temos:

$$t = \frac{4}{2} \cdot (\cos(240° - 30°) + i \cdot \operatorname{sen}(240° - 30°))$$

$$t = 2 \cdot (\cos 210° + i \cdot \operatorname{sen} 210°)$$

Como $\cos 210° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen} 210° = -\dfrac{1}{2}$:

$$t = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\sqrt{3} - i.$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

21 POLINÔMIOS II

Comentários sobre o módulo

Por se tratar de uma aula mais técnica, comente sobre Paolo Ruffini ao explorar o método tema deste módulo. Além disso, dê exemplos de contextos em que se utiliza esse tipo de operação, como no cálculo do índice de massa corpórea (IMC).

Exercícios propostos

7. B

Sabendo que p(x) é divisível por $x^2 + 1$, usamos o método das chaves:

$$\begin{array}{l|l}
ax^3 + bx^2 + cx + d & x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-ax^2 - ax & ax + b \\ \cline{1-1}
0 + bx^2 + (c - a)x + d & \\
-bx^2 - b & \\ \cline{1-1}
\quad 0 + (c - a)x + (d - b) &
\end{array}$$

Então, o quociente é $ax + b$, e o resto é $(c - a)x + (d - b)$.

Como o polinômio é divisível por $x^2 + 1$, o resto deve ser zero. Assim:

$(c - a)x + (d - b) = 0 \rightarrow (c - a) = 0$ e $(d - b) = 0$ (independente do valor de x).

Logo, $c = a$ e $d = b$.

8. A

Pelo método das chaves, temos:

$$\begin{array}{l|l}
x^5 - x^3 + x^2 + 1 & x^3 - 3x + 2 \\ \cline{2-2}
-x^5 + 3x^3 - 2x^2 & x^2 + 2 \\ \cline{1-1}
\quad 2x^3 - x^2 + 1 & \\
\quad -2x^3 + 6x - 3 &
\end{array}$$

Dessa forma, $r(x) = -x^2 + 6x - 3$ e $r(-1) =$

$= -(-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 3 = -10.$

9. C

Utilizando o método das chaves, temos:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 0x^2 + ax + b & x^2 + x + 2 \\ \cline{2-2}
-x^3 - x^2 - 2x & x - 1 \\ \cline{1-1}
0 - x^2 + (a - 2)x + b & \\
\quad x^2 + x + 2 & \\ \cline{1-1}
\quad (a - 1)x + (b + 2) &
\end{array}$$

Como o resto da divisão é igual a 4, $(a - 1)$ deve ser zero.

Logo, $a = 1$. Consequentemente, $b + 2 = 4$. Então, $b = 2$.

Dessa forma, $a + b = 1 + 2 = 3$.

10. C

Como $x = 1$ é raiz de P(x), aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini, reduzimos a ordem para um polinômio de grau 2. Assim:

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & -1 & a & -a \\ \hline
 & 1 & 0 & a & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

Logo, $Q(x) = x^2 + a$.

Como $x = 1$ é a única raiz real, as outras duas serão complexas. Portanto, o Δ de Q(x) será menor que 0:

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$\Delta = 0 - 4(1)(a) < 0$

$\Delta = -4a < 0$

$a > 0$

11. A

Como a soma dos coeficientes de P(x) é zero, então $x = 1$ é raiz. Dessa forma, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & -3 & 7 & -5 \\ \hline
 & 1 & -2 & 5 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

Logo, $Q(x) = x^2 - 2x + 5$. Assim, as outras duas raízes de P(x) são raízes da equação $x^2 - 2x + 5 = 0 \rightarrow x = 1 \pm 2i$.

Como a parte imaginária de ξ é positiva, então $\xi = 1 + 2i$ e $\xi^3 = (1 + 2i)^3 = -11 - 2i$, cuja parte real é -11.

12. B

Do enunciado, P(x) admite 1 como raiz. Assim, P(x) é divisível por $(x - 1)$.

Fazendo essa divisão, temos:

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ \hline
 & 1 & -2 & 5 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

Assim, $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 2)$.

Para $P(x) = 0$, temos:

$x - 1 = 0$ ou $\rightarrow x = 1$ (que vem do enunciado)

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = 1 \pm i.$$

13. B

Como o polinômio é divisível por $(x + 1) \cdot (x - 2)$, temos que $R(x) = 0$.

Nesse caso, podemos aplicar a divisão de $(x - a)$ $(x - b)$. Assim:

$P(x) = (x + 1) . (x - 2) \cdot Q(x) + 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot Q(x)$

Como $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1) \cdot (x - 2)$ $(x + 1) \cdot (x - 2)(x + 3) \rightarrow$

$\rightarrow (x + 1)(x - 2)(x + 3) = (x + 1)(x - 2) \cdot Q(x) \rightarrow$

$$\rightarrow Q(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)}$$

Logo, $Q(x) = (x + 3)$.

14. Utilizando o método das chaves:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3 - x^2 + 2^k + 2 & x - 3 \\ \cline{3-3}
 & -x^3 + 3x^2 & x^2 + 2x + 6 \\ \cline{2-2}
 & 2x^2 + 0x + 2^k + 2 & \\
 & -2x^2 + 6x & \\ \cline{2-2}
 & +6x + 2^k + 2 & \\
 & -6x + 18 & \\ \cline{2-2}
 & 2^k + 20 &
\end{array}$$

Assim, o resto é $2^k + 20 = 4^k - 220 \rightarrow 2^{2k} - 2^k = 240$.

Chamando $2^k = y$, temos $y^2 - y - 240 = 0$. Então:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-240) = 1 + 960$

$y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+960}}{2} \rightarrow y = \dfrac{1 \pm 31}{2}$, $2k = y$, $y > 0$, temos:

$y = \dfrac{1 \pm 31}{2} = 16 \rightarrow 2k = 16 \rightarrow 2k = 24 \rightarrow k = 4$

15. Como $x = 2$ é raiz, pelo método de Briot-Ruffini, temos:

2	1	−3	6	−8
	1	−1	4	0

Assim, $P(x) = (x + 2) \cdot (x^2 - x + 4)$.

Com base no enunciado, as duas outras raízes são complexas. Assim, $z_1 = ax + bi$ e $z_2 = ax - bi$. Calculando as raízes de $x^2 - x + 4 = 0$, temos:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4) = 1 - 16 = -15 = 15i^2$.

$$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{15i^2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2} \rightarrow z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}i}{2} \text{ e } z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}i}{2}$$

Desse modo, $z_1 + z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}i}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{15}i}{2}$.

Somando as partes reais e imaginárias, temos:

$$z_1 + z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}i}{2} - \frac{\sqrt{15}i}{2} \rightarrow z_1 + z_2 = 1$$

16. C

Do enunciado, temos que:

$$\begin{array}{l|l}
p(x) & q(x) \\ \cline{2-2}
x^2 + 1 & x^2 + 1
\end{array}$$

Assim, $p(x) = q(x) \cdot (x^2 + 1) + (x^2 + 1)$

Fatorando $p(x)$, tem-se:

$P(x) = (x^2 + 1) . [q(x) + 1]$

As raízes de $p(x)$ serão:

$(x^2 + 1) = 0$ ou $q(x) + 1 = 0$

De $x^2 + 1 = 0$, temos $x^2 = -1 \rightarrow x = i$ ou $x = -i$ (que são raízes imaginárias).

Assim, independentemente das raízes de $p(x)$ serem reais ou imaginárias, elas certamente são complexas.

17. O número 2 é raiz, pois $p(2) = 0$. Assim, dividindo $p(x)$ por $(x - 2)$, temos:

2	2	−6	3	2
	2	−2	−1	0

Dessa forma, $P(x) = (x - 2) \cdot (2x^2 - 2x - 1)$.

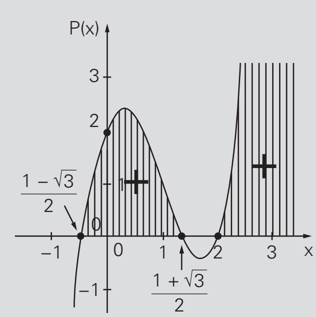
Assim, as outras raízes são obtidas por $2x^2 - 2x - 1 = 0$. Então:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 4 + 8 = 12$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} \rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Concluímos que as raízes são $x = 2$ e $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Resolvendo agora a inequação $P(x) > 0$ por meio do gráfico do polinômio $P(x)$:



Portanto, a solução da inequação será dada por

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x \geq 2 \right\}.$$

Estudo para o Enem

18. C

Dados os polinômios, podemos fazer a divisão pelo método das chaves:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -x^3 & -9x^2 & -3x & +7 & 2x^2+x+1 \\
\cline{6-6}
-6x^4 & -3x^3 & -3x^2 & & & 3x^2-2x-5 \\
\cline{1-3}
 & -4x^3 & -12x^2 & -3x & +7 & \\
 & 4x^3 & +2x^2 & +2x & & \\
\cline{2-4}
 & & -10x^2 & -x & +7 & \\
 & & 10x^2 & +5x & +5 & \\
\cline{3-5}
 & & & 4x & +12 &
\end{array}
$$

Assim, o resto é $4x + 12$. Logo:

Filho mais velho: $4 \cdot 17 + 12 = 80$.

Filho mais novo: $4 \cdot 15 + 12 = 72$.

Dessa forma, os aumentos do filho mais velho e do mais novo são, respectivamente, 80 e 72.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. D

Como a operação obtida foi de divisão, pelo método das chaves, temos:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -2x^2 & & -1 & x^2+x+2 \\
\cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & -2x & & x+1 \\
\cline{1-4}
 & x^2 & -2x & -1 & \\
 & -x^2 & -x & -2 & \\
\cline{2-4}
 & & -3x & -3 &
\end{array}
$$

Assim, o quociente obtido foi $x + 1$, e o resto é $-3x - 3$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

20. B

Para $t^3 - 21t^2 + 126t + 304 = 480$, temos:

$t^3 - 21t^2 + 126t - 176 = 0$

Sabendo que $t = 2$ é raiz da equação:

2	1	–21	126	–176
	1	–19	88	0

Assim, $t^3 - 21t^2 + 126t - 176 = (x - 12)(x^2 - 19x + 88) = 0$.

Podemos então concluir que as raízes da equação $(x - 12)(x - 19x + 88) = 0$ são 2, 8 e 11, correspondendo a fevereiro, agosto e novembro.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

22 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Comentários sobre o módulo

Use temas transversais para embasar o estudo sobre equações algébricas. Traga exemplos de aplicações nos campos da Engenharia, Arquitetura e Biotecnologia para que os alunos possam ter uma visão mais contextualizada e histórica do tema.

Relacione os estudos dos módulos sobre polinômios com as equações algébricas e enfatize suas diferenças.

Exercícios propostos

7. B

Para calcular o volume do paralelepípedo, basta multiplicar comprimento, largura e altura. Assim:

$x \cdot (x + 4) \cdot (x - 1) = 12$

$(x^2 + 4x) \cdot (x - 1) = 12 \rightarrow x^3 + 4x^2 - x^2 - 4x =$
$= 12 \rightarrow x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0 \rightarrow$

$x^2 \cdot (x + 3) - 4(x + 3) = 0$

Se dividirmos o polinômio por (x + 3), obtemos uma equação do 2º grau:

$$\frac{x^2(x+3)-4(x+3)}{x+3} = 0$$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \sqrt{4} \rightarrow x = 2$

Portanto, as dimensões da caixa são 2, 6 e 1.

8. A

Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes do polinômio $ax^3 + bx^2 + cx + d$, pelas relações de Girard, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

Logo, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1 \cdot x_2 + x \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} =$

$$= \frac{\frac{c}{a}}{-\frac{d}{a}} = -\frac{c}{d}.$$

Como queremos $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^{-1} \rightarrow \left(-\frac{c}{d}\right)^{-1} = -\frac{d}{c}$.

9. C

Como 1 é uma raiz de multiplicidade 3, se $\{1, 1, 1, x_1, x_2\}$ for o conjunto-verdade da equação $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$, pelas relações de Girard, temos:

$$1 + 1 + 1 + x_1 + x_2 = \frac{3}{1} \rightarrow x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_2 = -x_1 \quad (I)$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{1} \rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \ (II)$$

Substituindo I em II:

$-(x_1)^2 = 1 \rightarrow = \pm i$

Assim, $x_1 = i$ e $x_2 = -i$ ou $x_1 = -i$ e $x_2 = i$.

10. Do enunciado, temos que 1 é raiz de multiplicidade 2. Assim, utilizaremos o método de Briot-Ruffini duas vezes, reduzindo a equação de grau 4 para grau 2.

1	0	−2	−3	a	b
1	1	−1	−4	a − 4	a + b − 4
	1	0	−4	a − 8	

Assim, temos $a + b - 4 = 0$ e $a - 8 = 0$.

Resolvendo o sistema, temos:

$a = 8$

$b = -4$

Dessa forma, o produto $a \cdot b$ será:

$a \cdot b = 8 \cdot (-4) = -32$

11. D

$P(r) = r^3 + r^2 - ar - 3 = 0$, (já que **r** é raiz)

$p(-r) = (-r)^3 + (-r)^2 - a(-r) - 3 = -r^3 + r^2 + ar - 3 = 0$, (já que **−r** é raiz)

Fazendo $p(r) + p(-r)$, temos:

$$r^3 + r^2 - ar - 3 + (-r^3 + r^2 + ar - 3) \rightarrow 2r - 6 = 0$$

$$r^2 = \frac{6}{2} = 3$$

Logo, $r = \sqrt{3}$ e $-r = -\sqrt{3}$.

Assim:

$$p(r) = (\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 - a(\sqrt{3}) - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3}a - 3 = 0$$

$\sqrt{3}a = 3\sqrt{3} \to a = 3$

Portanto, $p(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 2 - 6 = -4$.

12. D

Para $p(x) = q(x) \to x^3 = x^2 + x \to x^3 - x^2 - x = 0$

$x(x^2 - x - 1) = 0$

Assim, temos que $x_1 = 0$ e que

$x^2 - x - 1 = 0 \to$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \to x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e}$$

$$x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

As raízes são $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Portanto, o número de soluções da equação é 3.

13. B

Por Briot-Ruffini, temos:

1	1	0	−3	2
1	1	1	−2	0
1	1	2	0	
	1	$3 \neq 0$		

Portanto, 1 é raiz de multiplicidade 2.

14. Dado o polinômio $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, temos que:

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - 2i)(x + 2i)[x - (2 + i)][x - (2 - i)] \to$

$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 1.(x - 2i)(x + 2i)(x - 2 - i)(x - 2 + i)$

$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 16x + 20$

Como são polinômios idênticos, temos:

$a = -4$, $b = 9$, $c = -16$ e $d = 20$

Assim, $a + b + c + d = -4 + 9 - 16 + 20 = 9$.

15. C

Se q é a razão da progressão geométrica, os graus são $(16, 16q, 16q^2, 2)$.

Então, $16q^3 = 2 \to q = \frac{1}{2}$.

Em consequência, os graus de q e de f são, respectivamente, iguais a 8 e 4.

Portanto, $8 + 4 = 12$.

16. E

Considerando que a circunferência unitária está centrada na origem, as n raízes complexas de $P(x)$ têm módulo igual a 1.

Chamando as n raízes de $z_1, z_2, \ldots, z_n$, temos, pelas relações de Girard, que seu produto será:

$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = (-1)^n \cdot a_0$

Aplicando o módulo a ambos os membros e sabendo que o módulo do produto é igual ao produto dos módulos, temos:

$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |(-1)^n| \cdot |a_0| \to$

$\to |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| = 1 \cdot |a_0| \to$

$\to 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = |a_0|$

Como $a_0 = 1$ não convém, $a_0 = -1$.

Assim, o produto das raízes é igual a $(-1)^n \cdot (-1) = (-1)^{n+1}$.

17. C

Primeiro aplicamos o dispositivo de Briot-Ruffini no polinômio. Logo:

1	1	0	1	a	b
1	1	1	2	a + 2	a + 2 + b
	1	2	4	a + 6	

Podemos montar agora o seguinte sistema:

$\begin{cases} a + 2 + b = 0 \\ a + 6 = 0 \end{cases}$, (resolvendo o sistema temos $a = -6$ e $b = 4$)

Logo, $a^2 - b^3 = (-6)^2 - 4^3 = -28$.

Estudo para o Enem

18. E

Analisando as alternativas, temos:

a) Para P(2), temos $2^3 - 13 \cdot 2^2 + 52 \cdot 2 - 60 = 0$.

Portanto, $T = 0$ para $t = 2$. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

2	1	−13	52	−60
	1	−11	30	0

Obtemos, assim, $P(t) = (t - 2) \cdot (t^2 - 11t + 30)$. Dessa forma, como as raízes de $t^2 - 11t + 30$ são $t = 5$ e $t = 6$, concluímos que $T = 0$ para $t \in \{2, 5, 6\}$. Portanto, alternativa incorreta.

b) Há diversos fatores que limitam o crescimento de uma população, sendo a predação apenas um deles. Logo, alternativa incorreta.

c) Do teorema de D'Alembert e de acordo com o item **a**, P(2) = 0. Ou seja, alternativa incorreta.

d) Do item **a**, já sabemos que T = 0 para t = 5 e t = 6. Sendo P uma função polinomial, é possível afirmar que o gráfico é decrescente em ao menos algum intervalo entre 2 e 9. Portanto, alternativa incorreta.

e) Conforme o item **a**, alternativa correta.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. A

Considerando **n** o número de caminhões e **c** a capacidade máxima de cada caminhão:

$n \cdot c = 90$ (I)

$$(n+6)\cdot\left(c-\frac{1}{2}\right)=90 \text{ (II)}$$

De (I), temos $c=\dfrac{90}{n}$.

Substituindo c em (II), temos:

$$90-\frac{n}{2}+\frac{540}{n}-3=90 \rightarrow -n^2+1\,080-6n=0 \rightarrow$$

$$-n^2-6n+1\,080=0$$

Encontrando as raízes, temos:

$$\Delta=(-6)^2-4\cdot(-1)\cdot 1\,080=36+4\,320=4\,356$$

$$n=\frac{-(-6)\pm\sqrt{4356}}{2\cdot(-1)} \rightarrow n=\frac{6\pm 666}{-2} \rightarrow n_1=-36$$

(não convém) e $n_2 = 30$

Portanto, o número de caminhões será $30 + 6 = 36$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. C

Do enunciado, temos que cada raiz representa uma medida do paralelepípedo.

Sabemos que o volume de um paralelepípedo retângulo é largura x altura x comprimento. A área é dada por 2 · (soma das áreas de cada par de faces opostas). Assim, das relações de Girard, temos:

$$\text{Volume} \rightarrow x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{d}{a}=-\frac{-30}{3}=10 \text{ cm}^3$$

$$x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=\frac{c}{a}\rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Área}=2\cdot\frac{c}{a}=2\cdot\frac{36}{3}=2\cdot 12=24 \text{ cm}^2 .$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

23 INTRODUÇÃO A MATRIZES E OPERAÇÕES COM MATRIZES

Comentários sobre o módulo

O tema deste módulo são as matrizes e sua representação. Além disso, são abordadas as matrizes especiais e transpostas e a igualdade entre matrizes.

Também estudamos as operações com matrizes. Vimos a adição, a subtração e a multiplicação entre matrizes e suas propriedades, bem como a multiplicação de um número real por uma matriz.

Discutir situações concretas com a aplicação desses conhecimentos no cotidiano faz que os alunos possam compreender melhor o conteúdo; para isso, é possível aprofundar o que foi discutido na abertura da aula, por exemplo.

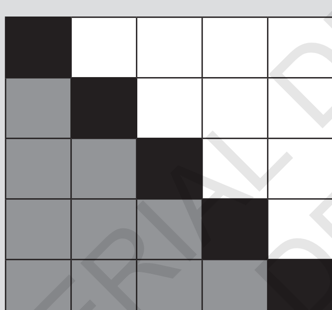
Exercícios propostos

7. A

Do enunciado, temos que a matriz M será:

$$\begin{bmatrix} 0 & 255 & 255 & 255 & 255 \\ 127 & 0 & 255 & 255 & 255 \\ 127 & 127 & 0 & 255 & 255 \\ 127 & 127 & 127 & 0 & 255 \\ 127 & 127 & 127 & 127 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, utilizando as cores, obtemos:



Assim, haverá o mesmo número de *pixels* brancos e cinzas.

8. A

Para determinar o quanto o amigo A_j deve, é preciso somar tudo o que ele pegou emprestado e subtrair daquilo que ele emprestou. Ou seja, é necessário somar todos os elementos da coluna j_4 e, então, subtrair do valor obtido na soma de todos os elementos da linha i_4 das duas matrizes.

Assim, temos:

Valor pego = 10 + 1 + 4 + 2 + 2 + 7 + 11 + 4 = = 41 → R$ 41,00.

Valor emprestado = 5 + 2 + 10 + 4 + 5 + 5 = = 31 → R$ 31,00.

Saldo devido = 41 – 31 = 10 → R$ 10,00.

Portanto, A_4 ainda deve R$ 10,00.

9. A

Para obtermos miligramas do nutriente 2 presente em um quilograma da mistura de rações, calculamos o produto das matrizes. Logo:

$$\begin{bmatrix} 340 & 520 & 305 & 485 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 35\% \\ 25\% \\ 30\% \\ 10\% \end{bmatrix} =$$

$$= 340 \cdot 0{,}35 + 520 \cdot 0{,}25 + 305 \cdot 0{,}30 + 485 \cdot 0{,}10 = \\ = 389 \text{ mg}.$$

10. a) Do enunciado, temos que $c_{ij} = (2i - 3j)^2$ e $b_{ij} = i + j$. Logo:

$$C = \begin{bmatrix} (2-3)^2 & (2-6)^2 & (2-9)^2 & (2-12)^2 \\ (4-3)^2 & (4-6)^2 & (4-9)^2 & (4-12)^2 \\ (6-3)^2 & (6-6)^2 & (6-9)^2 & (6-12)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 16 & 49 & 100 \\ 1 & 4 & 25 & 64 \\ 9 & 0 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & 2+4 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Assim, $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

b) Do enunciado, temos que $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$. Do item anterior, temos que B é $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$. Logo, X é:

$$X=\begin{bmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+3+4+5\\3+4+5+6\\4+5+6+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\18\\22\end{bmatrix}$$

O número total, em milhares de unidades, de produtos transportados da fábrica 1 a todas as quatro lojas é dado por todo x_{ij}.

A matriz Y é:

$$Y=\left([1\quad 0\quad 0]\cdot\begin{bmatrix}1&16&49&100\\1&4&25&64\\9&0&9&36\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&6\\5&6&7\end{bmatrix}=$$

$$=[1\quad 16\quad 49\quad 100]\cdot\begin{bmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&6\\5&6&7\end{bmatrix}=[746\quad 912\quad 1078]$$

O custo total com transporte da fábrica 1 até as quatro lojas é indicado por y_{11}. Já y_{1k}, com $2 \le k \le 3$, refere-se ao custo total que a fábrica 1 teria para transportar a produção das fábricas 2 e 3 até as quatro lojas.

11. C

Para que a matriz seja simétrica, é preciso que:

$x + y + z = 4$ (I)

$3y - z + 2 = y - 2z + 3 \rightarrow 2y = 1 - z$ (II)

$z = -5$ (III)

Substituindo III em II, temos:

$2y = 1 - (-5) \rightarrow y = \frac{6}{2} \rightarrow y = 3$

Substituindo os valores de y e z em I, temos:

$x + 3 + (-5) = 4 \rightarrow x = 4 + 2 \rightarrow x = 6.$

12. A

Do enunciado, temos:

$$A^2=aA+bI\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b&2a\\0&a+b\end{bmatrix}$$

Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases}a+b=1\\2a=4\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$$

Logo, $a\cdot b=2\cdot(-1)=-2$.

13. B

Temos que $A^2=\begin{pmatrix}1&a\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&a\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Como $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$:

$$A^4=A^2\cdot A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^6=A^4\cdot A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

...

$$A^{2016}=A^{2014}\cdot A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{2017}=A^{2016}\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&a\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a\\0&-1\end{pmatrix}$$

Portanto, $A^{2017}=\begin{pmatrix}1&a\\0&-1\end{pmatrix}$.

14. B

Do enunciado, temos que $AB = I_2$, e A é do tipo 2×3. Portanto, B deve ser do tipo 3×2.

Sabendo que $b_{ij} = i - 2j$, temos que $B=\begin{pmatrix}-1&-3\\0&-2\\1&-1\end{pmatrix}$.

Assim:

$$A\cdot B=I_2\rightarrow\begin{pmatrix}0&a&b\\0&c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-3\\0&-2\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}b&-2a-b\\d&-2c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\c=-\frac{1}{2}\\d=0\end{cases}$$

Logo, como $b = 1$, este é o maior elemento de A.

15. A

Fazendo A^2, temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Já A^3 será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, é possível observar que, quando A é elevado a um expoente par, obtemos uma matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quando o expoente é ímpar, obtemos $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Logo, a soma pode ser representada por:

$$A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{39} + A^{40} =$$

$$= 20\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 20\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 20 \end{pmatrix}.$$

16. C

Analisando os itens, temos:

$$\text{I)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sim, pois todos os elementos acima da diagonal principal serão nulos. Logo, correta.

II) A matriz diagonal é aquela cujos elementos são nulos, exceto os da diagonal principal. Portanto, incorreta.

III) A matriz identidade deve ser sempre quadrada (mesmo número de linhas e colunas). Logo, incorreta.

IV) Não é possível somar matrizes com diferentes números de linhas e colunas. Portanto, incorreta.

V) A matriz transposta será do tipo $n \times m$. Logo a multiplicação de A por sua transposta A^t será uma matriz $m \times m$. Portanto, correta.

17. Em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas, há $6 \cdot 5 = 30$ elementos.

As primeiras e últimas linhas e colunas têm, juntas, $2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 10 + 12 = 22$ elementos. Como 4 são repetidos, há 18 elementos não internos ao todo. Logo, temos $30 - 18 = 12$ elementos internos.

Estudo para o Enem

18. B

Do enunciado, temos que a mensagem final M é dada por $A + B = M$. Logo:

$$M = \begin{bmatrix} 12 & 20 & 13 & 8 & 50 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 34 & 32 & 3 & 4 & 0 \\ 45 & 26 & 13 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 45 & 16 & 20 & 11 & 17 & 0 \\ 1 & 50 & 21 & 3 & 35 & 42 & 11 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 10 & 11 & 10 & 15 & -8 & 30 & -1 \\ 14 & 31 & 19 & 19 & -3 & -4 & 0 \\ 6 & -4 & 8 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & 16 & 32 & 20 & -17 & 0 \\ 44 & -8 & 13 & 30 & 20 & 10 & 20 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 31 & 23 & 23 & 42 & 55 & 0 \\ 14 & 31 & 53 & 51 & 0 & 0 & 0 \\ 51 & 22 & 21 & 55 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 51 & 32 & 52 & 31 & 0 & 0 \\ 45 & 42 & 34 & 33 & 55 & 52 & 31 \end{bmatrix}.$$

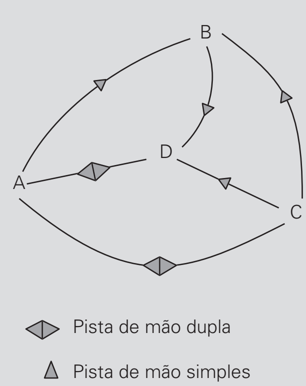
Portanto, a mensagem enviada pela chefia a José foi: "Sorria, você está sendo filmado".

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. B

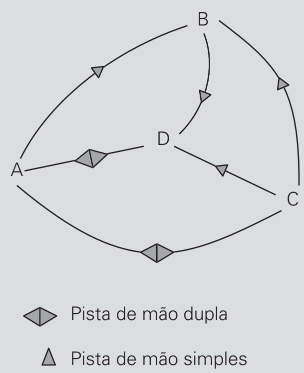
Do enunciado, temos:



$$\begin{array}{c|c} & \text{destino} \\ & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \hline \text{origem} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Logo, as linhas representam as cidades de origem e as colunas, as cidades de destino.

Após as mudanças nas vias, a nova matriz obtida é:



destino

$$\text{origem}\quad \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 0 & 3 & 3 & 3 \\ B & 1 & 0 & 1 & 1 \\ C & 1 & 2 & 0 & 3 \\ D & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Assim, 6 elementos mudarão.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. E

Para calcular a média aritmética de quatro notas, somamos todas elas e as dividimos por 4. A matriz 4 × 4 obtida pelas notas deve ser multiplicada por uma matriz coluna 4 × 1. Assim:

$$\begin{bmatrix} 5{,}9 & 6{,}2 & 4{,}5 & 5{,}5 \\ 6{,}6 & 7{,}1 & 6{,}5 & 8{,}4 \\ 8{,}6 & 6{,}8 & 7{,}8 & 9{,}0 \\ 6{,}2 & 5{,}6 & 6{,}9 & 7{,}7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5{,}9+6{,}2+4{,}5+5{,}5}{4} \\ \frac{6{,}6+7{,}1+6{,}5+8{,}4}{4} \\ \frac{8{,}6+6{,}8+7{,}8+9}{4} \\ \frac{6{,}2+5{,}6+5{,}9+7{,}7}{4} \end{bmatrix}$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

24 MATRIZ INVERSA, EQUAÇÃO MATRICIAL E DETERMINANTES

Comentários sobre o módulo

Os temas deste módulo são as matrizes inversas e as equações matriciais e determinantes.

Para os estudos desses conteúdos, é importante que as operações entre matrizes tenham sido compreendidas pelos alunos. Buscar situações relacionadas à tecnologia e que envolvam matrizes pode motivá-los nesse sentido.

No estudo dos determinantes, abordamos como calcular os de ordens 1 e 2.

É importante que os alunos compreendam que o determinante não é simplesmente um número, e sim uma ferramenta facilitadora no cálculo e na solução de problemas. Por isso, instigar a busca por outras aplicações do uso de determinantes valoriza ainda mais os estudos do tema.

Exercícios propostos

7. A

Sabendo que $A \cdot A^{-1} = I$, sendo I a matriz identidade de ordem 2, temos que:

$$X \cdot A = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X \cdot I = B \cdot A^{-1}$$

$$X = [8\ \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow X = [24 - 15 - 8 + 6] =$$

$$= [9\ -2]$$

Logo, a soma dos elementos de X será $9 + (-2) = 7$.

8. C

Do enunciado, sabemos que a matriz B é igual à transposta da inversa da matriz A. Ou seja:

$$B = (A^{-1})^T$$

Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix}$, sua transposta será $A^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{x}{3x-5} & -\dfrac{5}{3x-5} \\ -\dfrac{1}{3x-5} & \dfrac{3}{3x-5} \end{bmatrix}.$$

Assim, a transposta da inversa da matriz A será:

$$(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{3x-5} & -\dfrac{1}{3x-5} \\ -\dfrac{5}{3x-5} & \dfrac{3}{3x-5} \end{bmatrix}$$

Ou seja, $\begin{bmatrix} x & y+4 \\ y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{3x-5} & -\dfrac{1}{3x-5} \\ -\dfrac{5}{3x-5} & \dfrac{3}{3x-5} \end{bmatrix}.$

Dessa forma, podemos afirmar que:

$$3 = \frac{3}{3x-5} \rightarrow 3x - 5 = 1 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

Como $x = 2$, então:

$$y = -\frac{5}{3x-5} \rightarrow y = -\frac{5}{3 \cdot 2 - 5}$$

$$y = -\frac{5}{1}$$

$$y = -5$$

Assim:

$$x + y = 2 - 5$$

$$x + y = -3$$

9. A

Do enunciado, temos que

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 4 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = x \cdot (x-2) - ((-1) \cdot 4) = .$$

$$= x^2 - 2x + 4.$$

Como $\Delta = 0$:

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

Assim, resolvendo a equação:

$$x = -\frac{(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}.$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Como $x \in \mathbb{R}$, há 0 elemento no conjunto A.

10. Sabendo que B^t é a transposta de B:

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo, $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (1 \cdot 2) + (0 \cdot 1) & (1 \cdot 0) + (0 \cdot 2) \\ (2 \cdot 2) + (1 \cdot 1) & (2 \cdot 0) + (1 \cdot 2) \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculando a inversa da matriz:

$\det M = 2 \cdot 2 - 5 \cdot 0 = 4$

Para encontrarmos a matriz inversa de M, dividimos a matriz pelo determinante.

Assim, $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Assim, $\det M^{-1} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2}\cdot 0\right)$.

Logo, $\det M^{-1} = \frac{1}{4}$.

11. C

$$\det\begin{vmatrix} \text{sen } 2x & 2\cos^2 x \\ -\cos x & \text{sen } x \end{vmatrix} = \text{sen } 2x \cdot \text{sen } x - 2\cos x \cdot \cos x$$

Como $\text{sen } 2x = 2\text{sen}^2\ x\cos^2 x$ e $\text{sen } x + \cos x = 1$:

$\text{sen } 2x \cdot \text{sen } x - 2\cos^2 x \cdot \cos x =$

$= 2\ \text{sen } x \cos x \cdot \text{sen } x + 2\cos^3 x =$

$= 2\cos x \cdot \text{sen}^2\ x + 2\cos^2 x =$

$= 2\cos x(1 - \cos x) + 2\cos^3 x =$

$= 2\cos x - 2\cos^3 x + 2\cos^3 x = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

12. B

Realizando o produto dado no enunciado, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{tg}\,\alpha \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$3\text{tg}\,\alpha + 6\cos\beta = 0 \rightarrow 3\text{tg}\,\alpha = -6\cos\beta$ (I)

$6\text{tg}\,\alpha + 8\cos\beta = -2\sqrt{3} \rightarrow -3\text{tg}\,\alpha - 4\cos\beta = \sqrt{3}$ (II)

Substituindo I em II:

$-(-6\cos\beta) - 4\cos\beta = \sqrt{3} \rightarrow 2\cos\beta = \sqrt{3} \rightarrow$

$\rightarrow \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\beta = \frac{\pi}{6}$ rad

Logo, $3\text{tg}\,\alpha + 6\cos\frac{\pi}{6} = 0 \rightarrow \text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3} \rightarrow$

$\rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}$ rad

Assim, $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$ rad.

13. C

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$,

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}$, temos:

$$A \cdot Y + B \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3y \\ 8x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x^2 + 3y \\ y^2 + 8x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ y^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 \\ x(x^3 + 8) = 0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$$

Logo, $x \cdot y = (-2) \cdot (-4) = 8$.

14. D

Temos que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sabe-se que $A \cdot I = A$. Logo:

$A^2 = I$

$A^3 = A$

$A^4 = I$

$A^5 = A$

...

$A^9 = A$

$A^{10} = I$

$A^{11} = A$

Dessa forma, pode-se notar que há 5 matrizes identidade e 6 matrizes A.

Para somarmos as matrizes identidade, basta multiplicar o número de matrizes pela matriz identidade:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A soma das 6 matrizes A será:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, somando os dois termos:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$$

Finalmente, o det $S = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot 5 - 12 \cdot 3 =$

$= 25 - 36 = -11$

15. A

De acordo com a lei de formação apresentada:

$$A = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^2 \\ 1^2 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Considerando B a matriz identidade de ordem 2,

temos que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Assim:

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Logo, det $(A^t + B)$ será:

$$\det(A^t + B) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 15 - 4 = 11$$

16. D

Do enunciado, temos $A + BX = X + 2C$

$\to BX = X + 2C - A \to$

$\to BX - X = 2C - A \to$

$\to X(B - I) = 2C - A$, em que I é a matriz identidade de ordem n.

Logo, $(B - I)^{-1} (B - I)X = (B - I)^{-1} (2C - A)$.

Assim, $X = (2C - A) \cdot (B - I)^{-1}$.

Portanto, para que a equação tenha solução, será necessário que $B - I$ seja invertível, em que I é a matriz identidade de ordem n.

17.

a) $A_\alpha + A_{2\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ -\frac{1}{2\alpha} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix}$

Logo, $(A_\alpha + A_{2\alpha})^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

b) Dado $A_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + \alpha y \\ -\frac{x}{\alpha} - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Logo:

$x + \alpha y = -6$ (I)

$-\frac{x}{\alpha} - y = 2$ (II)

Multiplicando II por α e somando I, temos $0 = 2\alpha - 6$.

Portanto, $\alpha = 3$.

Estudo para o Enem

18. C

Para a mensagem EU ESTUDEI NO INSPER, a matriz-mensagem é:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 19 & 20 & 21 & 4 & 5 & 9 \\ 14 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 14 & 19 & 16 & 5 & 18 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como M e M_C são matrizes 4×7, para que $M_C = C \cdot M$ seja possível, C deve necessariamente ser da ordem 4×4.

Além disso:

$D \cdot M_C = D \cdot C \cdot M = M \rightarrow D \cdot C \cdot M - M = 0 \rightarrow$
$\rightarrow (D \cdot C - I) \cdot M = 0 \rightarrow D \cdot C = I \rightarrow D = C^{-1}$

Logo, a matriz C é invertível.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. E

Do enunciado, temos que p(x) = det A. Então:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -x \\ 4 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot \frac{2}{3} - (4 \cdot (-x)) = 2 + 4x$$

p(7) = 4 · 7 + 2 = 26 kg.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

20. D

Devemos primeiro encontrar a matriz inversa de A:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{21}a & \frac{1}{21}b & \frac{1}{21}c & \frac{1}{21}d \\ \frac{1}{11}e & \frac{1}{11}f & \frac{1}{11}g & \frac{1}{11}h \\ \frac{3}{5}i & \frac{3}{5}j & \frac{3}{5}k & \frac{3}{5}l \\ \frac{1}{4}m & \frac{1}{4}n & \frac{1}{4}o & \frac{1}{4}p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 21 \\ f = 11 \\ k = \frac{5}{3} \\ p = 4 \end{cases}$$

Fora essas letras, as outras são nulas. A matriz inversa A^{-1} é dada por:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Agora, basta determinar o código C:

$A^{-1} \cdot B = C$

$$\begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] =$$

$$= \begin{bmatrix} 21 \\ 22 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Logo, o código será 21, 22, 5 e 16, o que corresponde à palavra TUDO.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

25 DETERMINANTE E PROPRIEDADES DO DETERMINANTE

Comentários sobre o módulo

Neste módulo estudamos alguns métodos para calcular o determinante de matrizes de ordem maior ou igual a 3. Abordamos a utilização da regra de Sarrus e do teorema de Laplace, e qual deles é mais bem aplicado de acordo com a ordem da matriz.

Também estudamos as propriedades dos determinantes e o teorema de Binet e o de Jacobi.

Apresentamos também a regra de Chió, uma aplicação direta do teorema de Jacobi que pode ser explorada mais detalhadamente, de modo a oferecer aos alunos mais recursos no momento da resolução de exercícios sobre determinantes.

Exercícios propostos

7. A

Supondo que o det M = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k$.

$$\det N = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2i & 2c \\ 0 & 0 & 2j & 0 \\ 2d & 2e & 2a & 2f \\ 2g & 2h & 2c & 2i \end{vmatrix}$$

Dos cofatores, temos então que $\det N = (-1)^{2+3} \cdot$

$$\cdot\, 2j \cdot \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot 2j \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Logo, $-16j \cdot k$.

8. A

Sabendo que $\det(A^n) = (\det A)^n$ e que $\det(kA) = k^n \cdot \det A$, com A sendo uma matriz quadrada de ordem n e sendo k um número real, temos que:

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9}\det(3M) \rightarrow$$

$$\det(\sqrt[3]{2})^3 \cdot (\det M)^3 - 2^3 \cdot (\det M)^2 + \frac{2}{9} \cdot 3^3 \cdot$$

$$\cdot \det M = 0$$

$$2 \cdot \det M \cdot ((\det M)^2 - 4 \cdot \det M + 3) = 0$$

$$2 \cdot \det M \cdot (\det M - 3) \cdot (\det M - 1) = 0$$

$$\det M = 0 \text{ ou } \det M = 3 \text{ ou } \det M = 1$$

Como M é invertível, det M = 0 não é possível.

Assim, para $\det M = 3 \rightarrow \det M^{-1} = \frac{1}{3}$, ou

$\det M = 1 \rightarrow \det M^{-1} = 1$.

9. D

Do enunciado, temos que $V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Logo, $\det V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.

Pela regra de Sarrus:

$$\det V = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right|$$

$$\det V = [1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 \cdot 1 + 4 \cdot 1\,(-2)] - [4 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 9 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 4]$$

$$\det V = 22 - 2 = 20$$

10. Supondo que o determinante de $\begin{bmatrix} 3 & x \\ 4 & x+1 \end{bmatrix}$ seja y e sabendo que $\det(k \cdot A_{n \times n}) = k^n \cdot \det A$, com k sendo um número real e sendo n a ordem da matriz quadrada, temos:

$$49 \cdot y = y^2 \cdot y$$

$$y(y^2 - 49) = 0$$

$$y = 0 \text{ ou } y = 7 \text{ ou } y = -7$$

Assim, para y = 0:

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ 4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

Logo, $3 \cdot (x + 1) - 4x = 0 \rightarrow 3x + 3 - 4x = 0 \rightarrow$ $\rightarrow -x + 3 = 0 \rightarrow x = 3$.

Para y = 7:

$-x + 3 = 7 \rightarrow x = -4$.

Para y = −7:

$-x + 3 = -7 \rightarrow x = 10$.

Assim, os possíveis valores de x são −4, 3 e 10.

11. E

Desenvolvendo o determinante pela regra de Sarrus, temos:

$$-3x^3-5xy+3x\left(x^2+y^2\right)+2x^2y=0$$

$$-3x^3-5xy+3x^3+3xy^2+2x^2y=0$$

$$5xy+3xy^2+2x^2y=0$$

$$xy\left(-5+3y+2x\right)=0$$

Como $x \cdot y$ não é nulo:

$$-5+3y+2x=0$$

$$2x+3y=5$$

12. C

Utilizando a regra de Sarrus, o determinante é: det M=

$$\begin{vmatrix} a & a^3-b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3^a4+5ab-2^{a3}b-3^a4+3ab^3 = ab\left(5-2a^2+3b^2\right)=0$$

Logo, $a = 0$ ou $b = 0$ ou $5-2a+3b=0$.

Como **a** e **b** não são nulos, devemos considerar:

$$5-2a^2+3b^2=0$$

$$2a^2-3b^2=5$$

Assim:

$14a^2 - 21b^2$

$7(2a^2 - 3b^2)$

$7 \cdot 5 = 35$

13. B

Dado $M = \begin{bmatrix} \cos 17° & 0 & \text{sen}\,17° \\ 1 & 1 & 1 \\ \text{sen}\,28° & 0 & \cos 28° \end{bmatrix}$, temos que: $\det M = \begin{bmatrix} \cos 17° & 0 & \text{sen}\,17° \\ 1 & 1 & 1 \\ \text{sen}\,28° & 0 & \cos 28° \end{bmatrix}$

Pela regra de Sarrus:

$$\det M=\left(\cos 17°\cdot 1\cdot \cos 28°+0\cdot 1\cdot \text{sen}\,28°+\text{sen}\,17°\cdot 1\cdot 0\right)-$$
$$-\left(\text{sen}\,17°\cdot 1\cdot \text{sen}\,28°+\cos 17°\cdot 1\cdot 0+0\cdot 1\cdot \cos 28°\right)$$

$$\det M=\cos 17°\cdot\cos 28°-\text{sen}\,17°\cdot\text{sen}\,28°$$

$$\det M = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\det M^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} = \det M = \frac{1}{32}$$

14. Temos que $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}$. Então:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Já a transposta de N é $N^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim, $MN^T - M^{-1}N =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

15. A

Analisando os itens, temos:

I) $A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 15° - \text{sen } 15° & -\cos 15° \cdot \text{sen} 15° - \cos 15° \cdot \text{sen} 15° \\ \cos 15° \cdot \text{sen} 15° + \cos 15° \cdot \text{sen} 15° & -\cos^2 15° + \text{sen } 15° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\text{sen} 30° \\ \text{sen } 30° & -\cos 30° \end{pmatrix}$.

Portanto, verdadeira.

II) $\det(A) = \cos^2 15 + \text{sen}^2 15 = 1$. Portanto, verdadeira.

III) $A + A^t = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos 15° & 0 \\ 0 & 2 \cdot \cos 15° \end{pmatrix}$. Logo, falsa.

IV) $\det(2A) = 2^2 \cdot \det(A) = 4 \cdot 1 = 4$. Portanto, falsa.

V) $\det A^2 = (\det A)^2 = 1^2 = 1$. Logo, falsa.

16. E

Analisando os itens, temos:

I) Pelo teorema de Binet, $\det(M \cdot N) = \det M \cdot \det N =$
$= \det N \cdot \det M = \det(N \cdot M)$. Portanto, verdadeira.

II) Temos que $\det M^t = \det M$, para qualquer matriz quadrada. Portanto, falsa.

III) Calculando o det C pelo teorema de Laplace, temos:

$$\det C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}.$$

Para isso, é necessário calcular apenas o cofator A_{12}:

$$A_{12} = (-1)^{112} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - (3 + 0 + 0) = (-1)^3 \cdot 1 = -1$$

Logo, $\det C = -1$. Portanto, falsa.

IV) $A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = D_{2\times2}$. Ou seja, tem duas linhas e duas colunas. Portanto, falsa.

V) Fazendo $A \cdot B$, temos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Logo, det $(A \cdot B) = 14 \cdot 14 - 10 \cdot 10 = 196 - 100 = 96$. Portanto, verdadeira.

17. Do enunciado, temos que $S_n = 2n^2 + 5n$.

Logo:

$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 7$

$S_2 = a_1 + a_2$

Porém, $S_2 = 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 18$.

Assim, $18 = 7 + a_2 \to a_2 = 11$.

Calculando a razão da progressão, $r = a_2 - a_1 = 11 - 7 = 4$.

Dessa forma:

$a_3 = 11 + 4 = 15$

$a_4 = a_3 + 4 = 15 + 4 = 19$

$a_5 = a_4 + 4 = 19 + 4 = 23$

$a_6 = a_5 + 4 = 23 + 4 = 27$

$a_7 = a_6 + 4 = 27 + 4 = 31$

$a_8 = a_7 + 4 = 31 + 4 = 35$

$a_9 = a_8 + 4 = 35 + 4 = 39$

Obtemos assim os valores da matriz. E o determinante é:

$$x = \begin{vmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 19 & 23 & 27 \\ 33 & 35 & 39 \end{vmatrix}$$

Multiplicando a coluna 1 por (–1) e somando as colunas 2 e 3, temos:

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 19 & 23 & 27 \\ 33 & 35 & 39 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 19 & 4 & 8 \\ 33 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 19 & 2 & 4 \\ 33 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

No determinante $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 19 & 2 & 4 \\ 33 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, multiplicamos a coluna 2 por (–2). Somando à coluna 3, temos:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 19 & 2 & 4 \\ 33 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 19 & 2 & 0 \\ 33 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 19 & 2 & 0 \\ 33 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 19 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 19 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 19 \cdot 2 = -24$$

Portanto, $x = 2 \cdot 2 \cdot (-24) = -96$.

Estudo para o Enem

18. B

Dada a matriz, o determinante é:

$(8 + 75 + 12p) - (10p + 40 + 18) = 2p + 25$

Como o determinante é igual a 50:

$2p + 25 = 50 \to 2p = 25 \to p = 2{,}5$ kg.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. D

Pelo enunciado, sabemos que:

$2 + a = a + b + 1 = b + 4$

Logo, $a = 3$ e $b = 1$.

Calculando o determinante e aplicando a regra de Chió, temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 10.$$

Portanto, a prova vale 10 pontos.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

20. E

Dada a matriz M, temos que:

$$M - \lambda \cdot I = \begin{vmatrix} 0 & 17 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 17 & 2 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Então, det $(M - \lambda I) = 0$ implica em:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 17 & 2 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Assim:

$$-\lambda^3 + 2\lambda + 34\lambda = 0 \leftrightarrow -\lambda \cdot (\lambda^2 - 36) = 0$$

Os valores possíveis para λ são:

$\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -6$; $\lambda_3 = 6$

Portanto, o valor positivo de λ é 6.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

26 INTRODUÇÃO A SISTEMAS LINEARES, MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO E MÉTODO DA IGUALDADE

Comentários sobre o módulo

Neste módulo estudamos os sistemas lineares. Abordamos, além das equações lineares, os sistemas os métodos equivalentes, a classificação de sistemas e da substituição e da igualdade para resolver sistemas lineares.

Discutir situações cotidianas nas quais o sistema linear pode ser útil para solucioná-las leva os alunos a perceberem a importância do estudo desse tema. É possível aprofundar o assunto da abertura do módulo para iniciar essas discussões.

Exercícios propostos

7. E

Pelo enunciado, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{k+b+z}{2} = 30 \\ \dfrac{b+z}{2} = 20 \rightarrow z = 40 - b \\ k = b + 30 \end{cases}$$

As variáveis aqui são representadas pelas iniciais de cada nome.

Pelo método da substituição, obtemos:

$$\frac{k+b+z}{3} = 30 \rightarrow \frac{b+30+b+40-b}{3} = 30$$

$b + 70 = 90 \rightarrow b = 20$

$k = b + 30 \rightarrow k = 20 + 30 \rightarrow k = 50$

$z = 40 - b \rightarrow z = 40 - 20 \rightarrow z = 20.$

8. E

Sendo V o peso do recipiente de vidro; M, o peso do recipiente de metal; P, o peso do recipiente de plástico; K, o peso do recipiente de papel.

Pelo enunciado, temos o sistema:

$$\begin{cases} V = 3 \\ M + P = K \\ M = 1{,}2 + P \\ V + M + P + K = 8 \end{cases}$$

Pelo método da substituição:

$V + M + P + K = 8 \rightarrow 3 + K + K = 8 \rightarrow 2K = 5 \rightarrow K = 2{,}5$ kg

$M + P = K \rightarrow 1{,}2 + P + P = 2{,}5 \rightarrow 2P = 1{,}3 \rightarrow P = 0{,}65$ kg

$M = 1{,}2 + P \rightarrow M = 1{,}2 + 0{,}65 \rightarrow M = 1{,}85$ kg

Logo, $K - P = 2{,}5 - 1{,}85 = 0{,}65$ kg.

Ou seja, 650 gramas.

9. D

Sendo y a distância entre A e B e z a distância entre C e D, temos o sistema:

$$\begin{cases} y + 5 = 3z \\ 5 + z = \dfrac{y}{2} \end{cases}$$

$y = 3z - 5$ e $y = 2z + 10$

Pelo método da igualdade:

$3z - 5 = 2z + 10 \rightarrow z = 15$ km

Logo, $y + 5 = 3z \rightarrow y = 3z - 5$

$= 3 \cdot (15) - 5 \rightarrow y = 40$ km

Portanto, $\dfrac{15}{40} \cdot 100\% = 37{,}5\%$.

10. a) Se considerarmos cada carro que chega e sai do cruzamento:

Em A $\rightarrow x + y = 500 + 800 \rightarrow x + y = 1\,300$

Em B $\rightarrow y + z = 400 + 1\,400 \rightarrow y + z = 1\,800$

Em C $\rightarrow z + 500 = 700 + 1\,300 \rightarrow z = 1\,500$

Em D $\rightarrow x + 500 = 300 + 1\,200 \rightarrow x = 1\,000$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1300 \\ y + z = 1800 \\ z = 1500 \\ x = 1000 \end{cases}$$

Por substituição, temos:

$x + y = 1\,300 \rightarrow 1\,000 + y = 1\,300 \rightarrow y = 300$

Logo, $x = 1\,000$, $y = 300$ e $z = 1\,500$.

b) Temos:

Em A $\rightarrow x + y = 500 + 800 \rightarrow x + y = 1\,300$

Em B $\rightarrow y + z = 400 + 1400 \rightarrow y + z = 1800$

Em C $\rightarrow z + t = 700 + 1300 \rightarrow z + t = 2000$

Em D $\rightarrow x + t = 300 + 1200 \rightarrow x + t = 1500$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} x+y=1300 \\ y+z=1800 \\ z+t=2000 \\ x+t=1500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1300 \\ y+z=1800 \\ z=2000-t \\ x=1500-t \end{cases}$$

Por substituição:

$y + z = 1800 \rightarrow y + (2000 - t) = 1800 \rightarrow y = t - 200$

Assim, como $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ e $t \geq 0$:

$1500 - t \geq 0 \rightarrow t \leq 1500$

$t - 200 \geq 0 \rightarrow t \geq 0$

$2000 - t \geq 0 \rightarrow t \leq 2000$

Logo, $200 \leq t \leq 1500 \rightarrow 1301$ (valores inteiros possíveis).

11. B

Da última equação, encontramos o valor de d (positivo):

$d = \sqrt{144} = 12$

Substituímos na segunda equação e isolamos o valor de x:

$5y = 12x + 12 \rightarrow x = \dfrac{5y - 12}{12}$

Ao isolarmos x na primeira equação e isolarmos com o resultado acima, obtemos:

$x = \dfrac{y}{4} \rightarrow \dfrac{y}{4} = \dfrac{5y - 12}{12} \rightarrow y = \dfrac{5y - 12}{3}$

$3y = 5y - 12 \rightarrow 2y = 12 \rightarrow y = 6$

12. E

Faremos as seguintes considerações:

$x \rightarrow$ 1 colher de arroz

$y \rightarrow$ 1 colher de azeite

$z \rightarrow$ 1 fatia de queijo branco

$w \rightarrow$ 1 bife de 100 g

Do enunciado, é possível estabelecer as seguintes relações entre as variáveis e a pontuação de cada alimento, obtendo o sistema linear:

$$\begin{cases} 4x+2y+z=85 \\ x+2z+w=85 \\ 4x+y+2z=85 \\ 4x+w=85 \end{cases}$$

Igualando a primeira e a terceira equações, temos:

$4x + 2y + z = 4x + y + 2z \rightarrow y = z$

Isolamos z na primeira equação e substituímos o resultado anterior:

$z = 85 - 4x - 2y = 85 - 4x - 2y \rightarrow y = \dfrac{85 - 4x}{3}$

Da segunda e da quarta equações, obtemos:

$x + 2z + w = 4x + w \rightarrow 3x = 2z$

Substituímos $y = z$ e isolamos y, o que resulta $y = \dfrac{3x}{2}$.

Agora, podemos igualar y e encontrar o valor de x:

$\dfrac{3x}{2} = \dfrac{85 - 4x}{3} \rightarrow 9x = 2 \cdot 85 - 8x \rightarrow 17x = 170 \rightarrow$

$\rightarrow x = 10$

Das relações anteriores:

$y = \dfrac{3x}{2} \rightarrow y = 3 \cdot \dfrac{10}{2} \rightarrow y = 15$

$z = y \rightarrow z = 15$

$w = 85 - 5x \rightarrow w = 45$

Assim, $x = 10$, $y = 15$, $z = 15$ e $w = 45$.

I. Como 1 bife de 100 g corresponde a $w = 45$ pontos, a afirmação está correta.

II. Como o arroz é constituído majoritariamente por amido, um tipo de carboidrato, a alternativa está correta.

III. Calculando a mesma quantidade para ambos, temos:

25% de 20 g de arroz (1 colher) $\rightarrow$ 10 pontos

100% de 5 g de azeite (1 colher) $\rightarrow$ 15 pontos

Portanto, $\dfrac{\text{número de pontos do lipídeo}}{\text{número de pontos do carboidrato}} = \dfrac{15}{10} = 1{,}5$. A afirmação está correta.

Todas as afirmações são corretas.

13. E

Adotando as idades de Ana, Bia e Carla como a, b e e, respectivamente, temos que:

$$\begin{cases} b = c + 6 \\ b - 2 = 3(a - 2) \\ b + 1 = (a + 1) + (c + 1) \end{cases}$$

Reescrevemos o sistema e mantemos as igualdades para b:

I) $b = c + 6$

II) $b = 3a - 4$

III) $b = a + c + 1$

Igualamos a equação I e a equação II:

$c + 6 = 3a - 4 \rightarrow c = 3a - 10$

Igualamos a equação II e a equação III:

$a + c + 1 = 3a - 4 \rightarrow c = 2a - 5$

Assim, obtemos o valor de a ao igualar as expressões de c:

$3a - 10 = 2a - 5 \rightarrow a = 5$

Substituímos na equação II:

$b = 3 \cdot 5 - 4 = 15 - 4 \rightarrow b = 11$

O valor de c, pela equação I, é:

$c = b - 6 \rightarrow c = 11 - 6 \rightarrow c = 5$

14. Utilizando a 1ª linha e a 1ª coluna:

$A + 17 + B = A + 13 + 14 \rightarrow B = 10$

Pela 2ª coluna e pelas diagonais:

$17 + C + E = A + C + 15 = B + C + 14$

Substituindo B = 10 e simplificando o termo C, temos:

$17 + E = A + 15 = 10 + 14$

$A = 9$

$E = 7$

Da 2ª linha e da 2ª coluna:

$13 + C + D = 17 + C + E \rightarrow D = 17 + E - 13 \rightarrow$
$\rightarrow D = 11$

Portanto:

$D + E = 11 + 7 = 18$

O valor de D + E é igual a 18.

15. B

Verificamos que a soma apresentada é uma PG de razão $-\frac{1}{3}$. Logo:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{x-y}{2}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3x-3y}{8} \rightarrow \frac{3x-3y}{8} = -1$$

Reescrevendo o sistema, temos:

$3x - 3y = -8 \rightarrow 3x = 3y - 8$

$3x - y = -2 \rightarrow 3x = y - 2$

Por igualdade:

$3y - 8 = y - 2 \rightarrow 2y = 6 \rightarrow y = 3$

Logo, $3x = y - 2 \rightarrow 3x = 3 - 2 \rightarrow x = \frac{1}{3}$.

Assim, $x + y = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$.

16. A

Considerando que:

x = número de moedas de R$ 1,00;

y = número de moedas de R$ 0,50;

z = número de moedas de R$ 0,25;

t = número de moedas de R$ 0,10.

Podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} x + 0{,}5y + 0{,}25z = 6{,}75 \\ 0{,}5y + 0{,}25z + 0{,}1t = 4{,}45 \\ 0{,}25z + 0{,}1t = 2{,}95 \end{cases}$$

Por substituição da equação III em II, temos:

$0{,}5y + 2{,}95 = 4{,}45 \rightarrow y = 3$

Da equação III, temos que $t = \frac{295 - 25z}{10}$.

Assim, como y = 3, para que t seja um número inteiro, devemos considerar z um número ímpar.

Logo:

Para z = 1, t = 27 e x = 5. Logo x + y + z +

$+ t = 36$.

Para $z = 3$, $t = 22$ e $x = 4,5$ (não convém).

Para $z = 5$, $t = 17$ e $x = 4$. Logo, $x + y + z + t = 29$.

Para $z = 7$, $t = 12$ e $x = 3,5$ (não convém).

Para $z = 9$, $t = 7$ e $x = 3$. Logo, $x + y + z + t = 22$.

Para $z = 11$, $t = 2$ e $x = 2,5$ (não convém).

Para $z = 13$ e $x = -3$ (não convém).

17. a) Do enunciado, sabemos que os círculos são tangentes dois a dois. Logo, podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a+c=6 \\ b+c=9 \rightarrow c=9-b \end{cases}$$

Por substituição:

$a + (9 - b) = 6 \rightarrow a - b = -3 \rightarrow a = b - 3$

Logo, $(b - 3) + b = 5 \rightarrow 2b = 8 \rightarrow b = 4$.

Portanto, $a = 1$, $b = 4$ e $c = 5$.

b) Se $c > b$, a hipotenusa do triângulo ABC é BC.

Pelo teorema de Pitágoras temos:

$(c + 3)^2 = (c + 2)^2 + 5^2$

$(c + 3 + c + 2) \cdot (c + 3 - c - 2) = 25$

$2c + 5 = 25 \rightarrow c = \frac{20}{2} = 10$ cm

Estudo para o Enem

18. C

Chamando de x a memória ocupada por um minuto de vídeo e denominando y a memória ocupada por uma foto, temos:

$10x + 190y = 15x + 150y \rightarrow x = 8y$

Assim, a capacidade total do disco é:

$10 \cdot 8y + 190y = 270y$. Ou seja, o resultado é 270.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. A

Do enunciado, sabemos que $P(t) = A + B\cos(kt)$.

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} A + B\cos(kt) = 120 \\ A - B\cos(kt) = 78 \end{cases} \rightarrow B\cos(kt) = A - 78$$

Pelo método da substituição:

$A + (A - 78) = 120$

$2A = 120 + 78 = 198 \rightarrow A = 99$

$P_{máx}$ será quando $\cos(kt) = 1$. Logo:

$99 + B = 120 \rightarrow B = 21$

Fazendo $\frac{90 \text{ batimentos}}{60 \text{ segundos}} = \frac{1}{T} \rightarrow T = \frac{6}{9}\text{ s} = \frac{2}{3}\text{ s}$

$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi$

Assim, $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

20. B

Em cada ciclo Y temos:

Luz vermelha acesa = V segundos

Luz verde acesa = X segundos e $\frac{2}{3}$ de V

Luz amarela acesa = 5 segundos

Logo:

$X = \frac{2}{3} \cdot V \rightarrow V = \frac{3X}{2}$

$Y = 5 + X + V$

Do sistema, podemos escrever:

$V = Y - 5 - X$

Por igualdade:

$\frac{3X}{2} = Y - 5 - X \rightarrow 3X = 2Y - 10 - 2X$

$5X - 2Y + 10 = 0$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

27 SISTEMAS LINEARES - MÉTODO DA REDUÇÃO E ESCALONAMENTO

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos o método da redução para solucionar sistemas lineares. Assim como o método da igualdade, o da redução requer alguns passos para se obter a solução do sistema.

Também estudamos o sistema escalonado e o método do escalonamento.

É possível trazer exemplos de sistemas lineares para os quais o método do escalonamento não é recomendado.

Geralmente sistema possíveis e indeterminados ou sistemas impossíveis são exemplos, pois não será possível encontrar uma incógnita isolada ou haverá equações contraditórias.

Permita que os alunos experimentem essas situações e reconheçam em quais delas o método torna o processo mais árduo.

Exercícios propostos

7. A

Consideramos b (valor do bombom) e t (valor da trufa) e escrevemos o sistema:

$$\begin{cases} 25b + 15t = 107{,}5 \\ 20b + 45t = 185 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por –3:

$$\begin{cases} -75b - 45t = -322{,}5 \\ 20b + 45t = 185 \end{cases}$$

Somamos as equações:

$-55b = -137{,}5 \rightarrow b = 2{,}5$

Assim, o valor das trufas é:

$20b + 45t = 185 \rightarrow 20(2{,}5) + 45 \cdot t = 185 \rightarrow$
$\rightarrow 45t = 185 - 50 \rightarrow t = 3$

Logo, o aluno gastou $4 \cdot 2{,}5 + 3 \cdot 3 = 10 + 9 =$ $= 19$, ou seja, R$ 19,00.

8. D

Considerando que

$x \rightarrow$ preço unitário das margaridas

$y \rightarrow$ preço unitário dos lírios

$z \rightarrow$ preço unitário das rosas

Pelas informações do enunciado, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 42 \\ x + 2y + z = 20 \\ 2x + 4y + z = 32 \end{cases}$$

Trocando a ordem da primeira e da segunda equação

$$\begin{cases} x + 2y + z = 20 \\ 4x + 2y + 3z = 42 \\ 2x + 4y + z = 32 \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação pelo resultado da multiplicação da primeira equação por –4 somado à segunda equação

$$\begin{cases} x + 2y + z = 20 \\ -6y - z = -38 \\ 2x + 4y + z = 32 \end{cases}$$

Trocamos a terceira equação pelo resultado da multiplicação da primeira equação por –2 somado à terceira equação

$$\begin{cases} x + 2y + z = 20 \\ -6y - z = -38 \\ -z = -8 \end{cases}$$

Assim, $z = 8$.

Fazendo a substituição na segunda equação

$$y = \frac{-z + 38}{6} \rightarrow y = \frac{-8 + 38}{6} \rightarrow y = 5$$

Substituindo y e z na primeira equação resulta

$x = 20 - 2y - z \rightarrow x = 20 - 2 \cdot 5 - 8 \rightarrow x = 2$

Portanto, um arranjo simples, com uma margarida, um lírio e uma rosa custará

$x + y + z = 2 + 5 + 8 = 15$, ou seja, R$ 15,00.

9. C

Vamos representar as massas de Tales, Platão e Fermat por t, p e f, respectivamente:

$$\begin{cases} t + p = 159 \\ p + f = 147 \\ t + f = 134 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por –1 e somamos todas as equações:

$2\,t = 146$

Então, $t = \dfrac{146}{2} \rightarrow t = 73$.

Pela primeira equação:

$p = 159 - t \rightarrow p = 159 - 73 \rightarrow p = 86$

Pela última equação:

$f = 134 - t \rightarrow f = 134 - 73 \rightarrow f = 61$

Somamos todos os pesos:

$t + p + f = 73 + 86 + 61 = 220$ kg

10. Consideramos x (o número de notas de R\$ 5,00) e y (número de notas de R\$ 20,00). Obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 5x + 20y = 580 \\ x + y = 47 \end{cases}$$

Simplificamos a primeira equação:

$$\begin{cases} x + 4y = 116 \\ x + y = 47 \end{cases}$$

Subtraímos a segunda equação da primeira:

$3y = 69$

Assim, $y = \frac{69}{3} \rightarrow y = 23$.

Substituímos o valor de y:

$x + y = 47 \rightarrow x = 47 - y \rightarrow x = 24$.

Portanto, a pessoa recebeu 24 notas de R\$ 5,00 e 23 notas de R\$ 20,00.

11. D

Calculando o determinante dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & b \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 192 + 16b$$

O sistema linear terá solução única se:

$192 + 16b \neq 0 \rightarrow b \neq -12$

Assim, verificando o que acontece com o sistema quando $b = -12$, temos:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 6z = -3 \\ 16y + 12z = a \\ x - 4y + 2z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 4y + 2z = 3 \\ 3x + 4y - 6z = -3 \\ 16y - 12z = a \end{cases}$$

Fazendo o escalonamento do sistema, multiplicamos a primeira equação por –1 e a somamos com a segunda, trocando a segunda equação pela equação obtida.

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 3 \\ 0 + 16y - 12z = -12 \\ 0 + 16y - 12z = a \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por –1 e a somando com a terceira, temos:

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 3 \\ 0 + 16y - 12z = -12 \\ 0 + 0 + 0 = a + 12 \end{cases}$$

O sistema terá infinitas soluções se $b = a = -12$ e será impossível se $b = -12$ e $a \neq -12$.

Portanto, somente as afirmativas [I] e [III] são corretas.

12. E

Vamos considerar as seguintes associações:

□ → x ○ → y ● → z

A partir do esquema das balanças, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} 2x = 2y + z \\ x + 2 = 2y + 3z \\ x + 1 + 2z = 4y \end{cases}$$

Rearranjando os termos, resulta o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ x - 2y - 3z = -2 \\ x - 4y + 2z = -1 \end{cases}$$

Invertendo a ordem das equações, temos que

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -2 \\ x - 4y + 2z = -1 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Assim, a matriz aumentada dos coeficientes é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por –1 e a somando com a segunda linha

Multiplicando a primeira linha por –2 e a somando com a terceira linha

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Somando a segunda linha com a terceira linha,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Reescrevendo o sistema, temos

$$\begin{cases} x-2y-3z=-2 \\ -2y+5z=1 \\ 10z=5 \end{cases}$$

Então,

$$z = \frac{10}{5} = 0,5$$

$$y = \frac{5z-1}{2} = \frac{5\cdot 0\cdot 5 - 1}{2} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$x = -2 + 2y + 3z = -2 + 2\cdot 0,75 + 3\cdot 0,5 = 1$$

Portanto, $x + y + z = 1 + 0,75 + 0,5 = 2,25$

ou seja, a soma dos pesos dos objetos é 2,25 kg. Então é um número maior que 2 kg e menor que 2,5 kg.

13. B

Como o sistema deve ser possível e indeterminado, o determinante da matriz do sistema deve se anular, assim

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -6 + 5a + 2 - 4a - 5 + 3 = 0$$
$$\rightarrow a = 6$$

Substituindo o valor de $a = 6$ no sistema, resulta

$$\begin{cases} x+y+6z=1 \\ x+2y+z=2 \\ 2x+5y-3z=b \end{cases}$$

Fazemos, então:

linha 2 → linha 1 – linha 2

linha 3 → linha 3 – 2 · linha 1

Temos:

$$\begin{cases} x+y+6z=1 \\ 0+y-5z=1 \\ 0+3y-15z=b-2 \end{cases}$$

Fazemos, então:

linha 3 → –3 · linha 2 + linha 3 obtemos

$$\begin{cases} x+y+6z=1 \\ 0+y-5z=1 \\ 0+0+0=b-5 \end{cases}$$

Então, $b = 5$. Assim, $a + b = 6 + 5 = 11$.

14. Do enunciado, resolvemos a igualdade:

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+C}{x^2+4} \rightarrow$$

$$\rightarrow Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Dx^3 + 2Dx^2 + 2Dx +$$
$$+ Cx^2 + 2Cx + 2C = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow (A + D)x^3 + (B + C + 2D)x^2 + 2(2A + C + D)x +$$
$$+ (4B + 2C) = 1$$

Logo:

$$\begin{cases} A+D=0 \\ B+C+2D=0 \\ 2A+C+D=0 \\ 4B+2C=1 \end{cases}$$

b) Resolvemos o sistema do item anterior:

$$\begin{cases} A+D=0 \\ B+C+2D=0 \\ 2A+C+D=0 \\ 4B+2C=1 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por –2 e a somamos com a equação 3:

$$C - D = 0$$

Logo:

$$\begin{cases} A+D=0 \\ B+C+2D=0 \\ C-D=0 \\ 4B+2C=1 \end{cases}$$

Multiplicamos agora a segunda equação por –4 e a somamos com a equação 4:

$$-2C - 8D = 1$$

Logo:

$$\begin{cases} A+D=0 \\ B+C+2D=0 \\ C-D=0 \\ -2C-8D=1 \end{cases}$$

Multiplicamos a equação 3 por 2 e a somamos com a equação 4:

$-10D = 1 \rightarrow D = -\dfrac{1}{10}$

Assim, da equação 3 temos que $C = D = -\dfrac{1}{10}$.

Logo:

$A + D = 0 \rightarrow A = -D \rightarrow A = \dfrac{1}{10}$

$B + C + 2D = 0 \rightarrow B = -C - 2D$

$B = -\left(-\dfrac{1}{10}\right) - 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{10} = \dfrac{3}{10}$

15. C

Chamamos de x, y e z os preços da bola, da raquete e do boné, respectivamente:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 100 \\ 3x + 7y + 11z = 320 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por –3 e a somamos com a segunda:

$y + 2z = 20$

Somamos a primeira equação e o último resultado, multiplicado por –1:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & x & + 2y & + 3z & = & 100 \\ + & & -y & - 2z & = & -20 \\ \hline & x & + y & + z & = & 80 \end{array}$$

A última equação é a soma dos valores da bola, da raquete e do boné.

16. D

Consideramos as seguintes associações:

$x \rightarrow$ preço do brigadeiro

$y \rightarrow$ preço do beijinho

$z \rightarrow$ preço do cajuzinho

Utilizamos a tabela e obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + 3y + 6z = 12 \\ 2x + 5y + 4z = 11 \\ 5x + 3y + 2z = 14 \end{cases}$$

A primeira equação pode ser simplificada dividindo-se todos os termos por 3:

$x + y + 2z = 4$

Multiplicamos essa equação por –2 e a somamos com a segunda.

Dessa operação temos o novo sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 0 + 3y + 0 = 3 \\ 5x + 3y + 2z = 14 \end{cases}$$

Então, $3y = 3 \rightarrow y = 1$.

Multiplicamos a primeira equação por –5 e a somamos com a terceira:

$0 - 2y - 8z = -6$

Substituímos $y = 1$:

$8z = 6 - 2y \rightarrow 8z = 6 - 2 \rightarrow z = \dfrac{4}{8} \rightarrow z = \dfrac{1}{2}$

Pela primeira equação:

$x = 4 - y - 2z \rightarrow x = 4 - 1 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} \rightarrow x = 2.$

Portanto:

$x = 2$ (brigadeiro)

$y = 1$ (beijinho)

$z = 0,5$ (cajuzinho)

Avaliamos, então, as afirmações:

I) O brigadeiro é o mais caro. (Falsa)

II) O cajuzinho é o mais barato. (Falsa)

III) 25% de 2 é 0,5. (Verdadeira)

IV) O dobro do preço do beijinho resulta $2 \cdot 1 = 2$. (Verdadeira)

V) O preço do beijinho é 1. (Falsa)

Portanto, são verdadeiras as afirmações III e IV.

17. D

Considerando que as quantidades de carros, motos e ônibus sejam x, y e z, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 20x + 10y + 40z = 1900 \\ x - 2y - z = 6 \end{cases}$$

Simplificamos a segunda equação, a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 2 & 1 & 4 & 190 \\ 1 & -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

2ª linha → $-2 \cdot$ 1ª linha + 2ª linha

3ª linha → $-1 \cdot$ 1ª linha + 3ª linha

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & -3 & -2 & -94 \end{bmatrix}$$

3ª linha → $-3 \cdot$ 2ª linha + 3ª linha

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & -8 & -64 \end{bmatrix}$$

Assim,

$z = \dfrac{-64}{-8} \rightarrow z = 8$

Substituimos z na segunda equação

$y = 2z + 10 = 2 \cdot 8 + 10 \rightarrow y = 26.$

E, pela primeira equação,

$x = 100 - y - z = 100 - 26 - 8 \rightarrow x = 66.$

Portanto, foram 66 carros, 26 motos e 8 ônibus.

Estudo para o Enem

18. D

Fazendo as seguintes associações:

$x \rightarrow$ número de alunos que compraram 3 bilhetes

$y \rightarrow$ número de alunos que compraram 1 bilhete

$z \rightarrow$ número total de bilhetes que foram vendidos

A partir do enunciado, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + y - z = 158 \\ 10y - 2z = 0 \\ 3x + y - z = -90 \end{cases}$$

Escalonando a matriz aumentada, temos

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -90 \\ 0 & 10 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -158 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \\ (\mathrm{III}) \end{array} \end{array}$$

Fazemos, então:

$(\mathrm{II}) \rightarrow -3 \cdot (\mathrm{I}) + (\mathrm{II})$

Desse, modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 158 \\ 0 & 10 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 384 \end{pmatrix}$$

Substituindo (III) por (II) + (III),

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 158 \\ 0 & 10 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 384 \end{pmatrix}$$

Assim,

$y = \dfrac{384}{8} \rightarrow y = 48$

Portanto, 48 alunos compraram apenas 1 bilhete.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. D

Do enunciado, temos o sistema:

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}5y = 921 \\ x + y = 2\,438 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por 10 e a segunda por -3:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 9\,210 \\ -3x - 3y = -7\,314 \end{cases}$$

Somamos as equações:

$2y = 1\,896 \rightarrow y = 948$

Logo,

$x + y = 2\,438 \rightarrow x = 2\,438 - 948 \rightarrow$
$\rightarrow x = 1\,490.$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. E

Consideramos x (o número de pontos correspondentes a cada pessoa inscrita), y (o número de pontos correspondentes a cada atualização) e z (o número de pontos correspondentes a cada visualização). Então:

$$\begin{cases} 100x + 100y + 300z = 2000 \\ 300x + 600y + 300z = 6300 \\ 600x + 600y + 800z = 9000 \end{cases}$$

Simplificando, temos:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 20 \\ x + 2y + z = 21 \\ 3x + 3y + 4z = 45 \end{cases}$$

Calculamos II – I:

$y - 2z = 1$

Multiplicamos a primeira equação por 3 e subtraímos a equação III:

$5z = 15 \rightarrow z = 3$

Logo:

$y - 2z = 1 \rightarrow y = 1 + 2 \cdot 3 \rightarrow y = 7.$

$x + y + 3z = 20 \rightarrow x = 20 - 7 - 3 \cdot 3 \rightarrow x = 4$

Dessa forma, $900 \cdot 4 + 450 \cdot 7 + 700 \cdot 3 = 8\,850$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

28 SISTEMAS LINEARES - GRÁFICO, MATRIZ ASSOCIADA E REGRA DE CRAMER

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos os métodos gráfico, de matriz associada e a regra de Cramer para a a resolução de sistemas lineares.

É importante utilizar as discussões realizadas em aulas anteriores para aplicar o conceito de resolução gráfica de sistemas. Permita que os alunos experimentem solucionar sistemas por meio de gráficos.

Aproveite para recapitular o conceito de equações matriciais quando estiver apresentando o método de resolução por matriz associada.

Exercícios propostos

7. A

Podemos escrever um sistema 3 x 3 nas incógnitas x, y e z, como

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \ (\alpha) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \ (\beta) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \ (\gamma) \end{cases}.$$

Esse sistema possui infinitas soluções quando a intersecção dos planos dados por α, β e γ ocorrem em uma reta ou em um plano.

figura 5: três planos distintos, tal que a interceptação entre eles é uma única reta. Então, no sistema, duas variáveis são livres e uma variável é nula;

figura 7: um plano interceptando outros dois planos coincidentes, resultando em uma única reta. Assim, o sistema tem duas variáveis livres e uma variável nula;

figura 8: três planos coincidentes. Assim, o sistema tem três variáveis livres.

8. A

Para o casal, o excesso de bagagem foi x, então,

$x + 2z = 60$.

Para o senhor, o excesso de bagagem foi y. Assim:

$y + z = 60$.

Como o valor pago pelo senhor corresponde a 3,5 vezes o valor pago pelo casal, resulta $y = 3{,}5x$.

Essas equações resultam no sistema linear

$$\begin{cases} x + 0 \cdot y + 2z = 60 \\ 0 \cdot x + y + z = 60 \\ 3{,}5x - y + 0 \cdot z = 0 \end{cases}$$

Reescrevendo na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3{,}5 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9. D

Chamando os elementos de M de A_{ij}, pela relação apresentada, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_{11}\ x + a_{12}\ y + a_{13}\ z = 10\,000 \\ a_{21}\ x + a_{22}\ y + a_{23}\ z = 8000 \\ a_{31}\ x + a_{32}\ y + a_{33}\ z = 12\,000 \end{cases}$$

Notamos que os coeficientes que multiplicam as quantidades de cada alimento devem corresponder à quantidade em unidades por grama de cada vitamina. Ao observamos a tabela, essas quantidades aparecem em cada uma das colunas. Assim, a matriz M é dada pela matriz transposta daquela correspondente à tabela, ou seja

$$M=\begin{bmatrix} 15 & 30 & 35 \\ 50 & 45 & 20 \\ 30 & 25 & 50 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 15 & 50 & 30 \\ 30 & 45 & 25 \\ 35 & 25 & 50 \end{bmatrix}$$

10. A

Calculamos o determinante pela matriz dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$$

Então, $a - 1 \neq 0 \rightarrow a \neq 1$.

Ou seja, se $a \neq 1$, o sistema tem solução única.

Consideramos o caso em que $a = 1$ e obtemos a matriz aumentada:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & m \end{vmatrix}$$

Fazemos, então, o escalonamento:

3ª linha → (–1) · 1ª linha + 3ª linha

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & m-1 \end{array}\right|$$

3ª linha → (–1) · 2ª linha + 3ª linha

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-2 \end{array}\right|$$

Então, se $m - 2 = 0 \rightarrow m = 2$, o sistema tem infinitas soluções.

Caso $m - 2 \neq 0 \rightarrow m \neq 2$, o sistema não tem soluções.

Resumindo, temos:

$a \neq 1$ e $m \in \mathbb{R}$: solução única

$a = 1$ e $m = 2$: infinitas soluções

$a = 1$ e $m \neq 2$: não possui soluções

11. D

A tabela 1 pode ser representada pela matriz A_{2x3}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

e a tabela 2, pela matriz B_{3x2}

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Assim, a quantidade de puxadores que foram utilizados em cada modelo é dada pela multiplicação $C = B \cdot A$. Obtendo essa matriz, temos

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & 86 & 100 \\ 56 & 64 & 72 \\ 36 & 38 & 46 \end{pmatrix}$$

Então, para cada modelo e para cada tipo,

	Puxadores por modelo		
Tipo	Lisa	Nita	Bia
Acinzentado	78	86	100
Ouro-velho	56	64	72
Prateado	36	38	46

Portanto, no modelo Bia foram utilizados 100 + + 72 + 46 = 218 puxadores.

12. D

Resolvemos o sistema S_1:

$x = 3$ e $y = -1$

Para que o sistema S_2 seja possível e determinado, é necessário que:

$$\frac{m}{3} \neq \frac{4}{-1} \rightarrow m \neq -12$$

Caso $m = -12$:

$$\frac{4}{-1} = \frac{5}{k} \rightarrow k = -\frac{5}{4}$$

Nesse caso, o sistema é possível e indeterminado.

Se $k \neq -\frac{5}{4}$, o sistema é impossível.

Assim:

I) É falsa, pois nesse caso o sistema é possível e indeterminado.

II) É verdadeira, como analisado acima.

III) É verdadeira, pois, substituindo $x = 3$ e $y -1$ no sistema S_2, temos:

$m \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = 5$

$3 \cdot 3 - (-1) = k$

Assim, $m = 3$ e $k = 10$. Ou seja, $m + k = 13$.

IV) É falsa, de acordo com a análise acima.

V) É falsa, pois $x = 3$ e $y -1$. Portanto, $x + y = = 3 - 1 = 2$.

Desse modo, são verdadeiras II e III.

13. A

Pelo enunciado, como $a < b < c$ são números inteiros e consecutivos:

$b = a + 1$

$c = b + 1 = a + 2$

Com base na primeira equação do sistema, substituímos os valores de b e c, em função de a:

$a + 2 \cdot (a + 1) + 3 \cdot (a + 2) = 20 \rightarrow a = 2$

Então, como $(x, y, z) = (a, b, c)$:

$x = 2$

$y = 3$

$z = 4$

Desse modo, pela segunda equação:

$7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 - m \cdot 4 = 26 \rightarrow m = 3$

14. Consideramos que x, y e z representam o número de questões de 1, 2 e 3 pontos, respectivamente, respondidas corretamente. Então, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ -x + y = 5 \\ x + 2y + 3z = 55 \end{cases}$$

A matriz aumentada associada ao sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 30 \end{pmatrix}$$

Substituímos a segunda linha pela soma da primeira linha e da segunda linha.

Substituímos a terceira linha pela soma da primeira linha e da terceira linha multiplicada por –1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 2 & 1 & 35 \\ 0 & 1 & 2 & 25 \end{pmatrix}$$

Substituímos a terceira linha pela soma da segunda linha e da terceira linha multiplicada por –2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 2 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

Assim, obtemos

$$z = \frac{-15}{-3} \rightarrow z = 5$$

Portanto, o número de questões de 3 pontos respondidas corretamente foi 5.

15. D

Dado que o sistema é indeterminado e $abcd \neq 0$, os determinantes Dx e Dy devem ser nulos. Então:

$$D_x = \begin{vmatrix} a & c \\ p & d \end{vmatrix} = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} c & b \\ d & q \end{vmatrix} = 0$$

Assim:

$$ad - pc = cq - bd \rightarrow ad + bd = cq + pc$$

$$d \cdot (a + b) = c \cdot (p + q)$$

$$n \cdot c \cdot m = c \cdot (p + q) \rightarrow p + q = m \cdot n$$

16. B

Como o sistema admite infinitas soluções, o determinante da matriz dos coeficientes se anula. Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2a & 2a^4 - a \\ 1 & a & a^3 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Então:

$$2a^2 \cdot (a^3 - 1) + 2a^4 - a - 2a^2 - a \cdot (2a^4 - a) = 0$$

$$2a^4 - 3a^2 - a = 0 \rightarrow a \cdot (2a^3 - 3a - 1) = 0$$

Desse modo, $a = 0$ ou $2a^3 - 3a - 1 = 0$.

Por inspeção, –1 é raiz da equação $2a^3 - 3a - 1 = 0$. Então, por Briot-Ruffini:

–1	2	0	–3	–1
	2	–2	–1	0

Temos desse modo a equação $2a^2 - 2a - 1 = 0$, cujas raízes também são raízes da equação anterior.

Resolvendo $2a^2 - 2a - 1 = 0$, obtemos:

$$a = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } a = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, os valores de a para que o sistema tenha infinitas soluções são 0, –1, $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

17. a) Do enunciado, temos que

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix}, \text{ logo}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} m^2+4 & 0 & 4m \\ m+1 & 1 & m+1 \\ 4m & 0 & m^2+4 \end{pmatrix} \text{ e, portanto,}$$

$$2m^2 + 8 + 3 = 2m^2 + 8 + 2m + 2 + 8m + 1 \rightarrow$$
$$\rightarrow 10m = 0 \rightarrow m = 0$$

b) Para $m = 2$ temos:

$$2x + 2z = 4 \rightarrow x + z = 2$$

$$x - y + z = 3 \rightarrow x + z = 3 + y$$

Por igualdade temos:

$2 = 3 + y \rightarrow y = -1$

$x + z = 2 \rightarrow z = 2 - z$

O produto $xyz = x(-1)(2 - x) = x^2 - 2x$ representa uma parábola de concavidade para cima. Assim o produto é mínimo para $x = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$. Logo, a solução é $x = 1$, $y = -1$ e $z = 2 - 1 = 1$. Ou seja, $V = \{(1; -1; 1)\}$.

Estudo para o Enem

18. D

Por tratar-se de uma representação de plano cartesiano, o sistema possui duas incógnitas. O número de equações é dado pelo número de retas que aparecem no gráfico. Uma vez que a solução gráfica de um sistema linear é dada pelo ponto de interseção entre as retas, o sistema teria solução apenas se houvesse um ponto que fosse determinado pela interseção de todas as retas. No gráfico, não existe um ponto que satisfaça a essa condição.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

19. D

Determinando a equação matricial, temos

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \end{pmatrix}$$

A matriz inversa é

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Portanto, $x + y = -1 + 3 = 2$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

20. C

Pelo enunciado, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \dfrac{NV}{NF} + \dfrac{NA}{NV} = 1{,}2 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{NV}{NF} + \dfrac{NA}{NV} = 1 \end{cases}$$

Chamando $x = \dfrac{NV}{NF}$ e $y = \dfrac{NA}{NV}$, temos:

$$\begin{cases} x + y = 1{,}2 \\ \dfrac{1}{2}x + y = 1 \end{cases}$$

O determinante da matriz dos coeficientes do sistema é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1{,}2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1{,}2 - 1 \rightarrow D_x = 0{,}2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1{,}2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1{,}2}{2} \rightarrow D_y = 0{,}4$$

Assim:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{0{,}2}{\frac{1}{2}} \rightarrow D_x = 0{,}4$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{0{,}4}{\frac{1}{2}} \rightarrow D_y = 0{,}8$$

Então, $\dfrac{NV}{NF} = 0{,}4$ e $\dfrac{NA}{NV} = 0{,}8$. Como $NA + NV = 3\,600$, temos:

$NA + NV = 0{,}8\,NV + NV = 3\,600 \rightarrow NV = 2\,000$

Assim:

$$NF = \frac{NV}{0,4} = \frac{2\,000}{0,4} \rightarrow NF = 5\,000$$

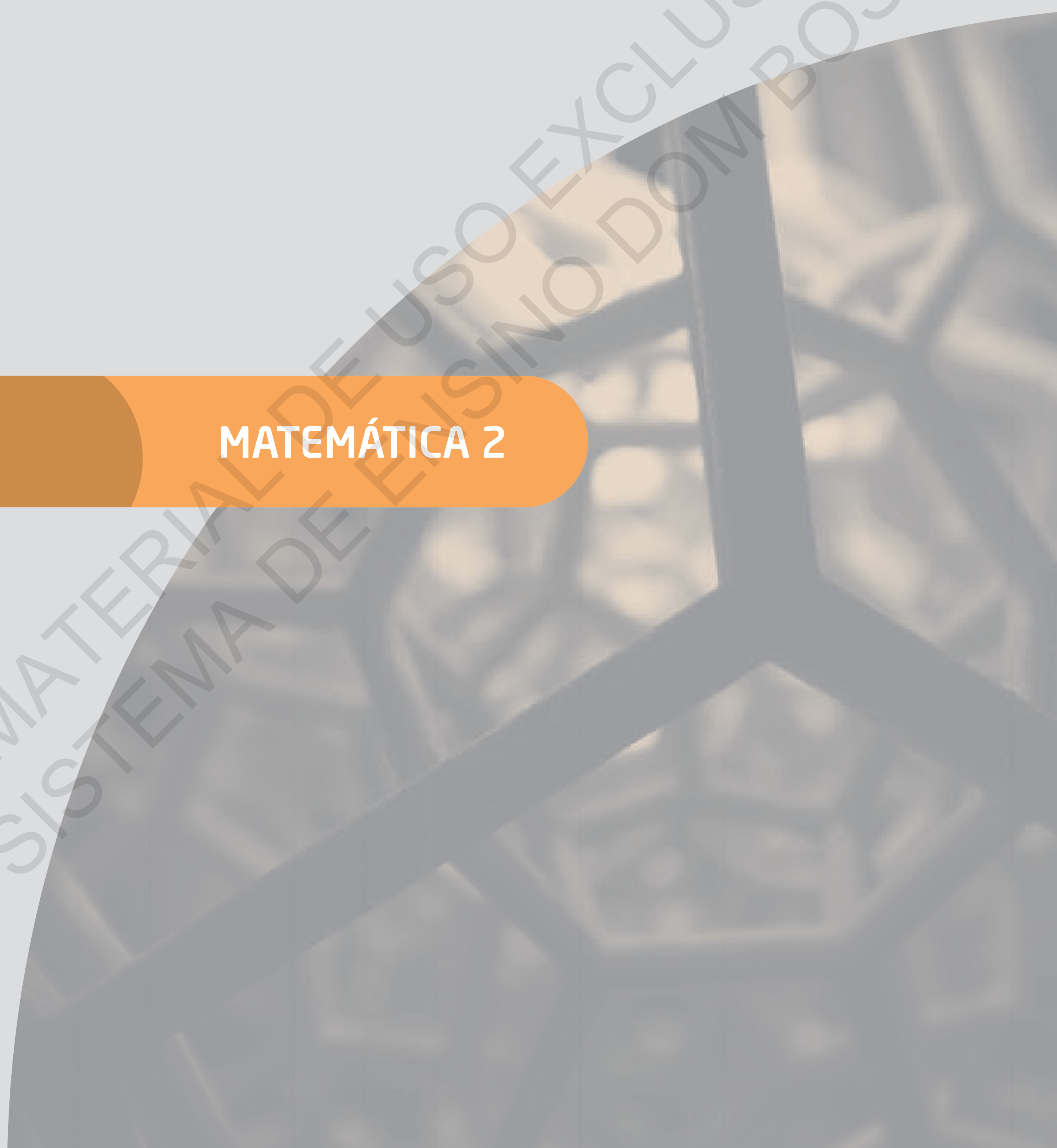
Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 2



17 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo abordamos os conceitos relativos à Geometria espacial de posição. Para tanto, o ponto, a reta e o plano são trabalhados por meio dos muitos postulados da Geometria euclidiana. Também são analisadas as posições relativas de pontos, retas e planos e as respectivas classificações, inclusive as projeções ortogonais de objetos.

Abordamos também as relações de Euler para superfícies poliédricas aberta e fechada e estudamos os cinco poliedros de Platão.

Para ir além

A dissertação *Geometria espacial de posição: do concreto ao raciocínio dedutivo com uma passagem pela tecnologia* é um excelente material sobre o tema do módulo, com abordagem completa sobre Geometria espacial de posição. Disponível em:

<https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/10953/OLIVEIRA%2c%20RAFAEL%20GOMES%20DE.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Acesso em: fev. 2019.

O artigo "Aplicação da geometria espacial em ambientes diversos" aborda as aplicações dos conhecimentos relativos a essa área, tornando-a mais palpável ao entendimento do aluno. Disponível em:

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2455-8.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. A

Como CDEF é um paralelogramo, segue-se que CD II EF.

8. C

Sabendo que o poliedro tem 32 vértices, concluímos que V = 32. Por conseguinte, sendo F e A, respectivamente, o número de faces e o número de arestas, pelo teorema de Euler temos:

$V + F = A + 2$

$32 + F = A + 2$

$F = A - 30$

Então, como o poliedro tem apenas faces triangulares, $3F = 2A$. Portanto:

$3 \cdot (A - 30) = 2A$

$A = 90$

9. Os itens A, B, C e D são verdadeiros.

a) O item é verdadeiro. De fato, se t é uma reta contida em um dos planos e $t \perp r$, então não existe um plano que contenha t e s.

b) O item é verdadeiro, pois a reta r é perpendicular a todas as retas contidas em π. Como P pertence a π, qualquer reta perpendicular a r passando por P está contida em π.

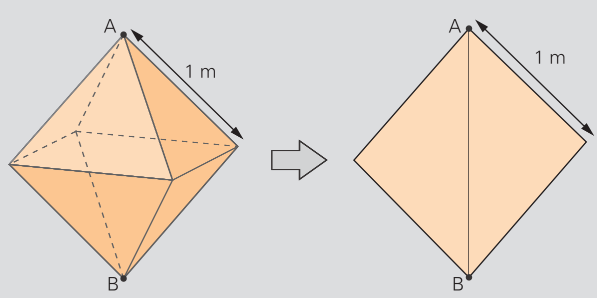
c) O item é verdadeiro. Como uma aresta qualquer é comum a duas faces do tetraedro, segue que essa aresta e as outras duas arestas de cada uma das faces a que ela pertence são coplanares. Portanto, segue o resultado.

d) O item é verdadeiro. Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos. Logo, tomando uma reta que tenha a propriedade anterior, basta considerar um plano com todas as retas paralelas a essa reta. A região definida pela interseção do plano com as faces do poliedro é, portanto, convexa.

10. A

A alternativa A é a única que apresenta a propriedade dos poliedros regulares que justifica o fato de a cavidade no interior da esfera ser octaédrica. As alternativas C e D apresentam assertivas corretas, porém não justificam esse fato.

11. Se o poliedro dado é regular e suas arestas medem 1 metro, então a distância entre o ponto A e B é igual à diagonal do quadrado imaginário interno ao octaedro de lado igual a 1 formado na divisão vertical deste ao meio. Assim, se tal quadrado tem lado igual a 1, sua diagonal será igual a $\sqrt{2}$.



12. 05 (01 + 04).

01) Correto, se t é perpendicular a r e paralela a s, então s também é perpendicular a r.

02) Incorretas, pois podem existir retas reversas a r.

04) Correta, porque é possível ter retas paralelas contidas em planos que não sejam paralelos (ex.: retas paralelas em faces de planos secantes em um cubo).

08) Incorreta, pois os planos β e γ podem ser secantes entre si.

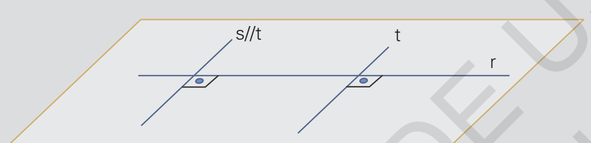
16) Incorreta, porque as retas podem ser concorrentes.

13. C

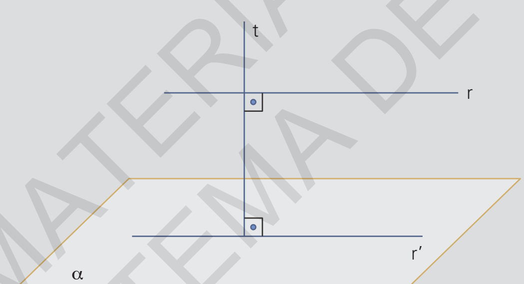
O octaedro tem 6 vértices. Ao retirarmos uma pirâmide regular de base quadrangular de cada vértice do octaedro, obtemos um octaedro truncado com $6 \cdot 4 = 24$ vértices. Portanto, a resposta será $360° \cdot (24 - 2) = 7920°$.

14. D

A. Falsa. Ela poderá ser perpendicular a duas retas concorrentes desse plano e, neste caso, estar contida no plano.



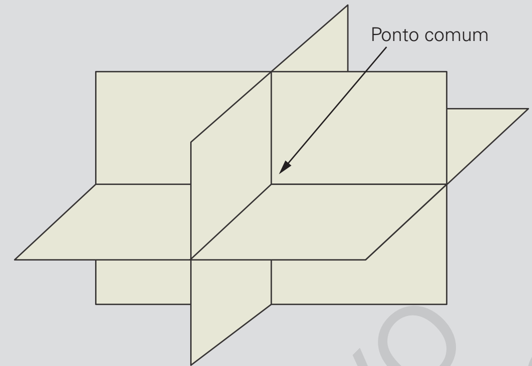
B. Verdadeira. Toda reta é paralela à sua projeção ortogonal em um plano qualquer.



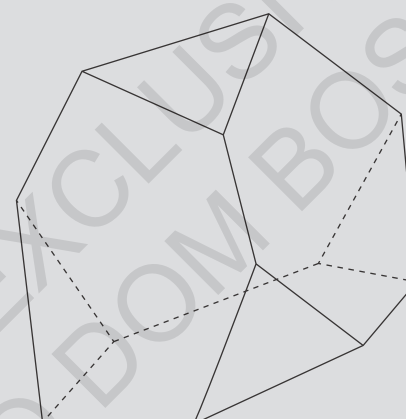
C. Verdadeira, pois formam o mesmo ângulo com o plano.

D. Verdadeira. Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelos entre si, pois formam o mesmo ângulo com esse terceiro plano.

E. Verdadeiro. Os três planos dividem o espaço em oito octantes, com apenas um ponto em comum. Cada dois planos tem em comum um única reta, as quais se encontram num único ponto.



15. D



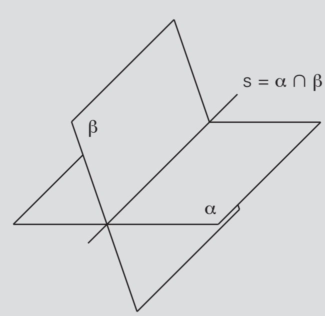
O sólido resultante da divisão proposta pelo problema será formado por 4 faces hexagonais e 4 faces triangulares. Sabendo que cada aresta mede 2 cm, o número de arestas será dado por:

$$A = \frac{4 \cdot 6 + 4 \cdot 3}{2} = 18$$

A soma das medidas de todas as arestas será $18 \cdot 2 = 36$ cm.

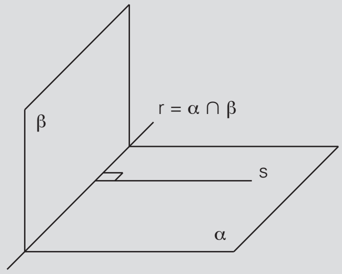
16. 11 (01 + 02 + 08)

01) Verdadeira. Considere a figura:

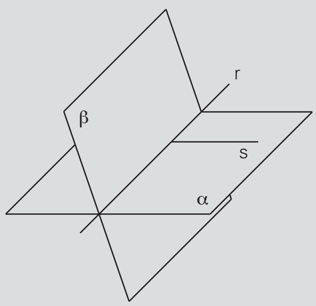


Qualquer reta paralela à reta s que não esteja contida nem em α nem em β será paralela a esses planos.

02) Verdadeira. Considere a figura, em que a reta **s** é perpendicular ao plano β.



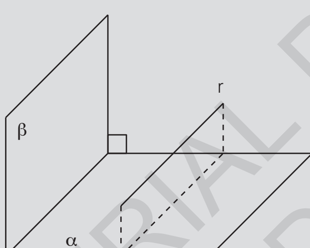
04) Falsa. Considere a figura:



Basta que o ângulo entre os planos α e β não seja reto.

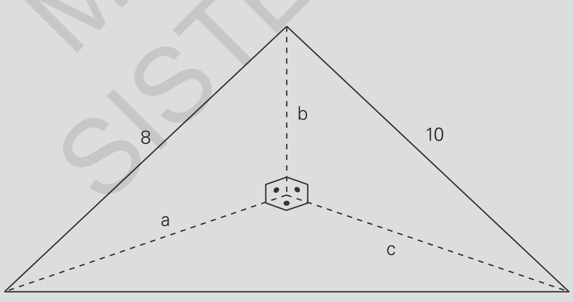
08) Verdadeira. De fato, o resultado é imediato.

16. Falsa. Considere a figura, em que α e β são perpendiculares:



17. A

Pode-se desenhar o tetraedro do enunciado conforme a figura:



Pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever as seguintes equações:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ c^2 + b^2 = 10^2 \\ a^2 + c^2 = 12^2 \end{cases}$$

Isolando **a** na primeira equação, temos $a^2 = 64 - b^2$. Substituindo essa expressão na terceira equação e fazendo um sistema com a segunda equação:

$144 = 64 - b^2 + c^2$

$80 = c^2 - b^2$

$$\begin{cases} 80 = c^2 - b^2 \\ 100 = c^2 + b^2 \end{cases}$$

$2c^2 = 180$

$c^2 = 90$

$c = \sqrt{90}$

$c = 3\sqrt{10}$

Substituindo o valor de c^2 na equação $80 = c^2 - b^2$, podemos encontrar o valor de **b**:

$80 = c^2 - b^2$

$80 = 90 - b^2$

$b^2 = 10$

$b = \sqrt{10}$

Analogamente, substituindo o valor de a^2 na equação $a^2 = 64 - b^2$, encontramos o valor de b:

$a^2 = 64 - b^2$

$a^2 = 64 - 10$

$a^2 = 54$

$a = \sqrt{54}$

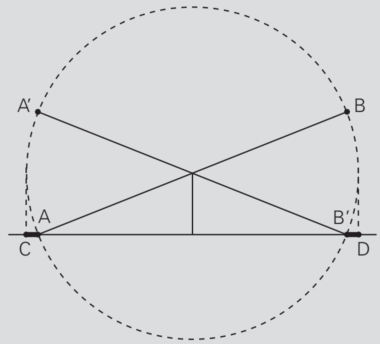
$a = 3\sqrt{6}$

Assim, os valores das arestas que chegam em V serão $3\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$.

Estudo para o Enem

18. B

Considere a figura:



De acordo com a figura, a projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B sobre o plano do chão da gangorra corresponde aos segmentos AC e B'D.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

19. A

Uma pirâmide quadrangular tem 5 faces, 8 arestas e 5 vértices. Após os cortes, tais quantidades serão acrescidas em 4, 12 e 8 unidades, respectivamente.

Portanto, a joia ficará com 9 faces, 20 arestas e 13 vértices.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

20. C

A projeção ortogonal sobre o piso da casa, do caminho percorrido pela mão da pessoa, do ponto A até o ponto E, será uma circunferência. Como a projeção desejada é a do ponto A ao ponto D, teremos então aproximadamente $\frac{3}{4}$ da circunferência.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

18 PRISMAS

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo continuamos os estudos sobre os sólidos geométricos. Desta vez abordamos os prismas e as respectivas nomenclaturas e classificações. Calculamos a medida da diagonal, da área e do volume de um paralelepípedo e finalizamos o módulo com a análise de um tipo específico de prisma: o cubo.

Para ir além

Este é um bom material que apresenta de maneira dinâmica os sólidos geométricos, citando vários exemplos de como construí-los. Disponível em:

<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/16565/solidosgeometricos%20-%20home.htm?sequence=33>

Acesso em: fev. 2019.

Este material aborda o ensino de Geometria espacial de maneira lúdica, usando jogos como ferramenta para o estudo do tema. Disponível em:

<http://porteiras.s.unipampa.edu.br/pibid/files/2016/11/Jogos-como-ferramentas-no-ensino-da-geometria-espacial-1.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. O volume que será escoado é de:

$V = 7 \cdot 4 \cdot 0,1 = 2,8\ m^3 = 2\,800\ dm^3 = 2\,800$ litros.

Logo, a vazão pelo ralo será $\frac{2800}{20} = 140$ min $=$ $= 2h20min$.

8. C

Volume da embalagem:

$V = a \cdot b \cdot c = 10 \cdot 20 \cdot 10 = 2\,000\ cm^3$

O volume da mistura sabor morango (v) que será acondicionada na embalagem será:

$1,25 \cdot (1\,000 + v) \leq 2\,000$

$1\,250 + 1,25v \leq 2\,000$

$1,25v \leq 750$

$v \leq 600\ cm^3$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos

9. A

Do proposto, $a^3 = 24$.

Sendo V o volume de um cubo de aresta $\frac{a}{3}$, obtemos:

$$V = \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}$$

Como $a^3 = 24$ e $V = \frac{a^3}{27}$, obtemos:

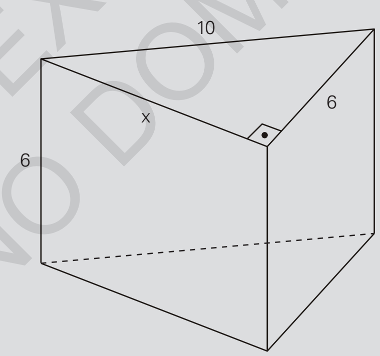
$$V = \frac{24}{27} \rightarrow V = \frac{8}{9}$$

10. E

Sabendo que $(12 - 2x) \cdot x = 18\ m^2$, temos:

$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$ m

11. A



O sólido formado será um prisma de base triangular.

Indicando o valor de x, temos:

$x^2 + 62 = 102$

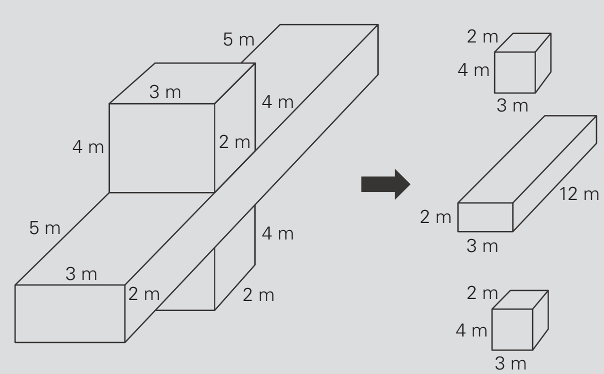
$x = 8$

Portanto, o volume V do sólido será dado por:

$$V = B \cdot h = \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot 6 = 144$$

12.

Sólido que será retirado.



O volume V do sólido excedente será fornecido pelos volumes do sólido inicial $V_{(i)}$ e do sólido retirado $V_{(r)}$:

$V = V_{(i)} - V_{(r)}$

$V = 8 \cdot 10 \cdot 12 - 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 12 - 2 \cdot 3 \cdot 4$

$V = 960 - 24 - 72 - 24$

$V = 960 - 120$

$V = 840\ m^3$

Para calcular a área total, consideramos algumas etapas:

- Extensão das faces externas paralelas à face A: $A_1 = 2 \cdot (8 \cdot 10 - 2 \cdot 3) = 148\ m^2$.
- Extensão das faces internas paralelas à face A: $A_2 = 4 \cdot (4 \cdot 3) = 48\ m^2$.
- Extensão das faces externas paralelas à face B: $A_3 = 2 \cdot (12 \cdot 8 - 2 \cdot 3) = 180\ m^2$.
- Extensão das faces internas paralelas à face B: $A_4 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60\ m^2$.
- Extensão das faces externas paralelas à face C: $A_5 = 2 \cdot 12 \cdot 10 = 240\ m^2$.
- Extensão das faces internas paralelas à face C: $A_6 = 2 \cdot (2 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \cdot 5) = 80\ m^2$.

Assim, a área total será obtida por:

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 148 + 48 + 180 + 60 + 240 + 80$

$\therefore A = 756\ m^2$.

13. C

A dimensão da aresta de cada cubinho, em centímetros, equivale ao máximo divisor comum das dimensões do bloco.

Portanto, MDC (18; 24; 30) = MDC $(2 \cdot 3^2; 2^3 \cdot 3; 2 \cdot 3 \cdot 5) = 2 \cdot 3 = 6$.

Logo, $6^3 = 216\ cm^3$.

14. B

$V = a \cdot b \cdot c$

$ab = 2$

$bc = 3$

$ac = 4$

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \rightarrow (a \cdot b \cdot c)^2 = 24$

$V = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\ cm^3$

15. D

Obteremos o volume total da peça por:

$V_{peça} = B \cdot h$

A área da base B corresponde a:

$B = B_{hex.maior} - B_{hex.menor}$

Podemos calcular a área de cada hexágono regular, maior e menor:

$$B_{hex.reg} = \frac{6 \cdot L^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$B_{hex.maior} = \frac{6 \cdot 8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \rightarrow B_{hex.maior} = \frac{6 \cdot 64 \cdot \sqrt{3}}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow B_{hex.maior} = 96\sqrt{3}$$

$$B_{hex.menor} = \frac{6 \cdot 6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \rightarrow B_{hex.menor} = \frac{6 \cdot 36 \cdot \sqrt{3}}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow B_{hex.menor} = 54\sqrt{3}$$

Portanto, a área B da base se apresenta:

$$B_{base} = B_{hex.menor} - B_{hex.maior}$$

$$B_{base} = 96\sqrt{3} - 54\sqrt{3}$$

$$B_{base} = 42\sqrt{3}$$

Assim, podemos calcular o volume total da peça, em cm^3:

$V_{peça} = B_{base} \cdot h$

$V_{peça} = 42\sqrt{3} \cdot 35$

$V_{peça} = 2\,499\ cm^3$

16. D

A área total do paralelepípedo é obtida por:

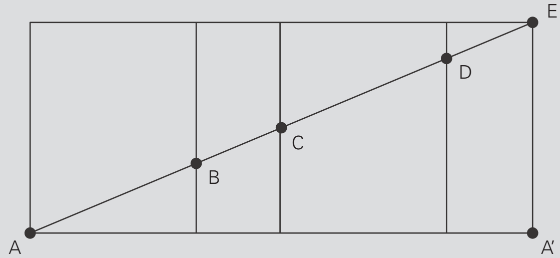
$2 \cdot (4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 38\ m^2$

Após o reparte, foram inseridas duas faces retangulares de dimensões 5 m e 1 m. Assim, a adição na área externa foi de $2 \cdot 5 \cdot 1 = 10\ m^2$.

Logo, temos: $\frac{10}{38} \cdot 100\% \cong 26\%$.

17. B

Analisando a planificação da superfície lateral do paralelepípedo, em que está indicado o comprimento mínimo AE da corda, temos:



$\overline{AA'} = 12$ e $\overline{A'E} = 5$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$\overline{AE}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{A'E}^2 \rightarrow \overline{AE}^2 = 12^2 + 5^2 \rightarrow \overline{AE} = 13$

Estudo para o Enem

18. C

Somadas as diferenças de cada uma das dimensões das caixas, temos:

Caixa 1 $\rightarrow$ (86 – 80) + (86 – 80) + (86 – 80) = 18

Caixa 2 $\rightarrow$ não cabe $\rightarrow$ 75 < 80

Caixa 3 $\rightarrow$ (85 – 80) + (82 – 80) + (90 – 80) = 17

Caixa 4 $\rightarrow$ (82 – 80) + (95 – 80) + (82 – 80) = 19

Caixa 5 $\rightarrow$ (80 – 80) + (95 – 80) + (85 – 80) = 20

Logo, concluímos que a caixa selecionada será a de número 3.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

19. A

Como h = 2 m, segue-se que $b = 6 - 2 \cdot 0{,}5 = 5$ m.

Logo, o volume total do silo é de $2 \cdot \left(\frac{6+5}{2}\right) \cdot 20 = 220\ m^3$.

Assim, sabendo que 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3, concluímos que o valor solicitado será $\frac{220}{2} = 110$ toneladas.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. B

Se L for a medida da aresta da parte cúbica do topo, a medida da aresta da parte cúbica inferior é 2L. Podemos, então, calcular o volume total do depósito:

$V = (2L)^3 + (L)^3 = 8L^3 + L^3 = 9L^3$

A parte inferior mede $8L^3$. Levam 8 min para que metade desse volume ($4L^3$) seja preenchido.

O volume que falta ser preenchido corresponde a $9L^3 - 4L^3 = 5L^3$.

Logo, fazendo a proporção, temos:

$\text{Tempo} = 8 \cdot \frac{5L^3}{4L^3} = 10 \therefore$ Levará 10 min.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19 PIRÂMIDES E CILINDROS

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo estudamos um novo poliedro: a pirâmide, com os respectivos elementos, nomenclatura e classificação. Além disso, estudamos de que forma calcular a área total, a área lateral e o volume. Também abordamos alguns sólidos especiais como o tetraedro regular, o octaedro regular e o tetraedro trirretangular.

E ainda, neste módulo, estudamos os cilindros. Além de abordar os elementos desses sólidos, vimos as classificações e os procedimentos para calcular a área lateral, a área total e o volume de cilindros. O cilindro equilátero e suas particularidades também são analisados, em seção à parte.

Para ir além

O artigo "Estudo de sólidos geométricos com o uso de recursos digitais e concretos" é um bom material que aborda maneiras diversificadas de ensinar Geometria espacial e mostra um trabalho de pesquisa aplicado sobre o tema. Disponível em:

<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/134158/000984802.pdf?sequence=1>
Acesso em: fev. 2019.

O artigo "A geometria trabalhada a partir da construção de figuras e sólidos geométricos" apresenta a Geometria espacial com base na investigação, construção e análise dos sólidos propostos. Disponível em:

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/832-4.pdf>
Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. B

Desde que a medida da altura de um triângulo retângulo isósceles corresponda à metade da medida da hipotenusa, o resultado é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 10 = 30 \text{ m}^3$$

8. B

Sendo h a medida da altura do tetraedro regular, temos:

$$h = \frac{3\sqrt{6}}{3} \text{ m}$$

$$h = \sqrt{6} \text{ m}$$

9. E

A resposta é obtida por:

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 7 \cong 3{,}14 \cdot 63 \cong 198 \text{ cm}^3$$

10. D

O volume do tanque é obtido por:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{0{,}6}{2}\right)^2 \cdot 1{,}5 \cong 0{,}405 \text{ m}^3 = 405 \text{ L}.$$

Consequentemente, como o caminhão consumiu $\frac{3}{5} \cdot 405 = 243$ L, ele percorreu $243 \cdot 3 = 729$ km.

11. a) Calculando:

Efetivo → 100 000 litros → 15 000 etanol + 85 000 gasolina

$$\frac{85\,000}{x} = \frac{80\,\%}{100\,\%} \rightarrow x = 106\,250 \text{ litros} \rightarrow 85\,000$$

de gasolina + 21 250 de etanol

Considerando os 15 000 litros já existentes no tanque:

$21\,250 - 15\,000 = 6\,250$ litros

É necessário adicionar 6 250 litros de etanol.

b) Calculando, temos:

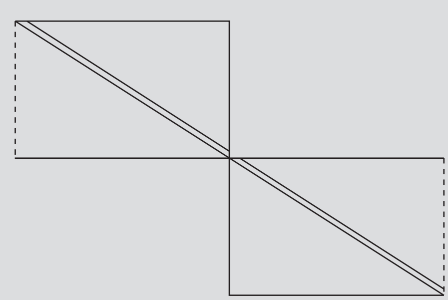
$1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ litros} \rightarrow 6\,250 = 6{,}25 \text{ m}^3$

$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$

$6{,}25 = 3{,}125 \cdot 2^2 \cdot h \quad \rightarrow \quad h = 0{,}5 \text{ m}$

12. A

Analise a seguinte planificação da superfície lateral do cilindro:



A área da faixa equivale, aproximadamente, à área de um paralelogramo de base 3,14 cm e altura 80 cm. Obtemos assim:

$$\frac{3{,}14 \cdot 80}{20\pi \cdot 80} \cdot 100\% \cong 5\%$$

13. Sendo x a medida de uma das arestas do tetraedro regular, temos:

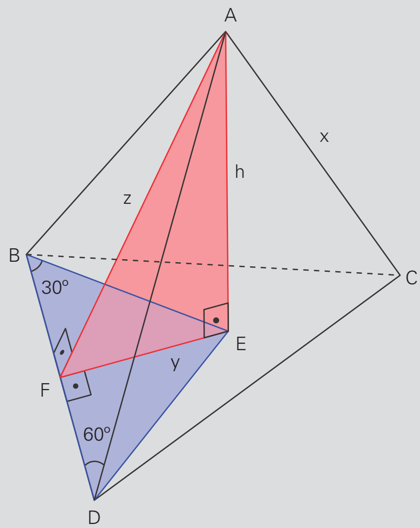
$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \text{sen } 60° = 48\sqrt{3}$$

$$2x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$$

$x^2 = 48$

Como $x > 0$, $x = 4\sqrt{3}$ cm.

Observe este tetraedro regular:



No triângulo EBF:

$$\text{tg}\, 30° = \frac{y}{BF}$$

Mas $BF = 2\sqrt{3}$. Logo:

$$y = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$y = 2$

No triângulo AFD:

$$\text{sen}\, 60° = \frac{z}{AD}$$

Mas $AD = 4\sqrt{3}$. Logo:

$$z = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$z = 6$

No triângulo AFE:

$z^2 = y^2 + h^2$

$6^2 = 2^2 + h^2$

$h^2 = 32$

Como $h > 0$:

$h = 4\sqrt{2}$ cm

14. A

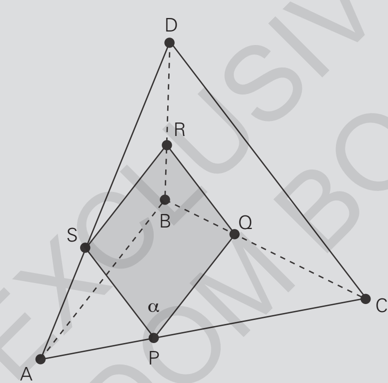
Sejam V, r e h, respectivamente, o volume, o raio da base e a altura do cilindro. Assim, $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Portanto, a variação percentual pedida é dada por:

$$\frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right) \cdot 2h - \pi \cdot r^2 \cdot h}{\pi \cdot r^2 \cdot h} \cdot 100\% = -50\%$$

Logo, houve redução de 50% no volume do cilindro.

15. A



Sejam Q, R e S, respectivamente, as interseções de α com as arestas BC, BD e AD. Desde que α seja paralelo à aresta AB, temos SR e PQ paralelos a AB. Analogamente, concluímos que PS e QR são paralelos a CD. Ademais, sabendo que arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais, o quadrilátero PQRS é um retângulo.

Sendo ABCD regular, os triângulos APS e CQP são equiláteros. Portanto, a área pedida é igual a $3 \cdot 7 = 21$ m^2.

16. E

Sabendo que ABCDEFGH é paralelepípedo reto, $\overline{EF} = \overline{AB}$ e $\overline{EH} = \overline{AD}$.

Portanto, o resultado pedido é dado por:

$$[SABCD] + [ABCDHEFG] = \frac{4}{3} \cdot [SEFGHI] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \overline{SA} + \overline{AE} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}\left(\overline{AE} + \overline{SA}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 3 \cdot \overline{SA} + 9 \cdot 2 = 4 \cdot \left(2 + \overline{SA}\right) \leftrightarrow \overline{SA} = 10 \text{ cm.}$$

17. C

Vamos obter o volume de grafite por:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h \cong 3{,}14 \cdot \left(\frac{0{,}2}{2}\right)^2 \cdot 15 \cong 0{,}47 \text{ cm}^3$$

Assim, sabendo que a densidade do grafite é de 2,2 g/cm^3, obtemos sua massa:

$m = 2{,}2 \cdot 0{,}47 \cong 1{,}03$ g

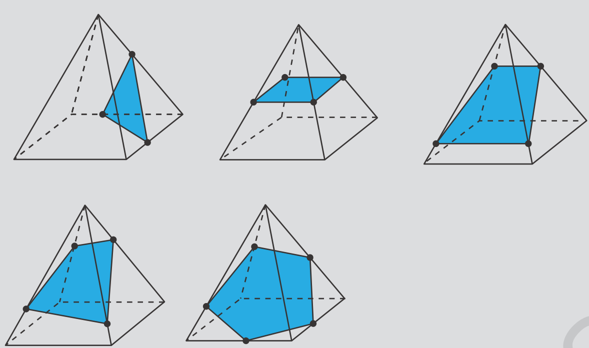
Ciente de que n é o número de átomos de carbono presentes nesse grafite, temos:

$$n \cdot \frac{12}{6 \cdot 10^{23}} = 1{,}03 \rightarrow \quad n \cong 5 \cdot 10^{22}$$

Estudo para o Enem

18. E

Supondo que quadriláteros irregulares e trapézios sejam polígonos distintos, as possibilidades são: triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, conforme as figuras.



Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. A

Calcularemos r de forma que $12 - \pi \cdot r^2 \cdot 1 \geqslant 4$. Assim, temos 3 como o valor aproximado de π.

$$12 - 3r^2 \geqslant 4 \leftrightarrow r^2 \leqslant \frac{8}{3} \rightarrow 0 < r \leqslant \sqrt{\frac{8}{3}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 < r \leqslant 1{,}63$$

Portanto, o diâmetro do raio máximo da ilha de lazer, em metros, é aproximadamente 1,6.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

20. C

Imaginando que o volume de açúcar e o volume de água se misturam ao volume do copo e de acordo com o texto, temos:

- Volume de água = 5x.
- Volume de açúcar = x.
- Volume do copo $= \pi \cdot 2^2 \cdot 10 = 3 \cdot 2^2 \cdot 10 =$ $= 120$ cm^3.

Então, $x + 5x = 120 \leftrightarrow 6x = 120 \leftrightarrow x = 20$ cm^3.

Assim, o volume de água deverá ser $5 \cdot 20 =$ $= 100$ cm^3 = 100 mL.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20 CONES E ESFERAS

Para ir além

O artigo "Usando o Geogebra para o ensino dos sólidos de revolução" é um interessante material, com explicações pertinentes sobre o uso desse conhecido *software*. Disponível em:

<http://www.redalyc.org/pdf/4675/467553545016.pdf>
Acesso em: fev. 2019.

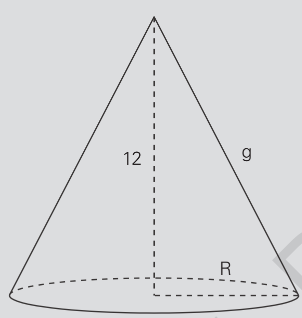
O artigo "Criando, vendo e entendendo sólidos de revolução" aborda a construção dos sólidos de revolução. Disponível em:

<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000011903.pdf>
Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. C

Sendo R a medida do raio da base do cone e g, a medida de sua geratriz, obtemos:



$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot 12 = 64\cdot\pi \rightarrow R^2 = 16 \rightarrow R = 4\text{ cm}$$

$$g^2 = 12^2 + 4^2 \rightarrow g = \sqrt{160} \rightarrow g = 4\sqrt{10}\text{ cm}$$

8. E

Para que o novo frasco tenha a mesma capacidade do primeiro, devemos igualar as equações dos volumes da esfera (V_E) e do cilindro (V_C).

$$\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\cdot h = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3 \rightarrow \frac{h}{9} = \frac{4}{3}\cdot R \therefore h = 12R$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

9. C

$$V_c = \pi\cdot r^2\cdot h = 8\cdot\pi\cdot r^2$$

$$V_e = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 4^3 = \frac{256}{3}\cdot\pi$$

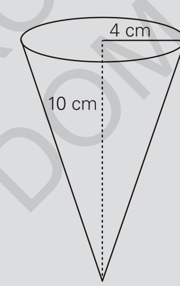
Como o volume do cilindro corresponde a 75% do volume da esfera, obtemos:

$$V_c = 0{,}75\cdot V_e \rightarrow \quad 8\cdot\pi\cdot r^2 = 0{,}75\cdot\frac{256}{3}\cdot\pi \rightarrow$$
$$\rightarrow r^2 = 8 \quad \therefore \quad r = 2\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$A_L = 2\pi r\cdot h = 2\pi\cdot 2\sqrt{2}\cdot 8 = 32\sqrt{2}\,\pi \quad \therefore A_L =$$
$$= 32\sqrt{2}\,\pi\text{ cm}^2$$

10. D

O volume do cone (recheio) é dado por:



Tomando $\pi = 3$, o volume do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4^2\cdot 10 = 160\text{ cm}^3$$

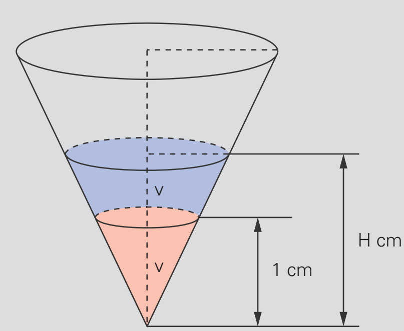
Considerando que o peixe representa 90% do volume do recheio, temos:

$0{,}9\cdot 60 = 144\text{ cm}^3$ (volume do salmão)

Portanto, a massa do salmão é dada por $0{,}35\cdot 144 = 50{,}4$ g.

11. A

Do enunciado e da figura, temos:



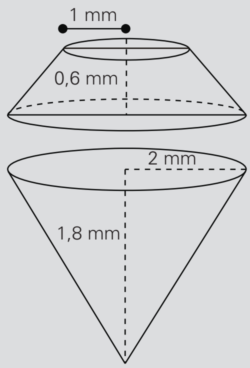
$$\frac{2V}{V} = \left(\frac{H}{1}\right)^3$$

$2 = H^3$

$H = \sqrt[3]{2}$

12. a) $V = \dfrac{0,7 \cdot 0,2}{3,5} = 0,04$

b)



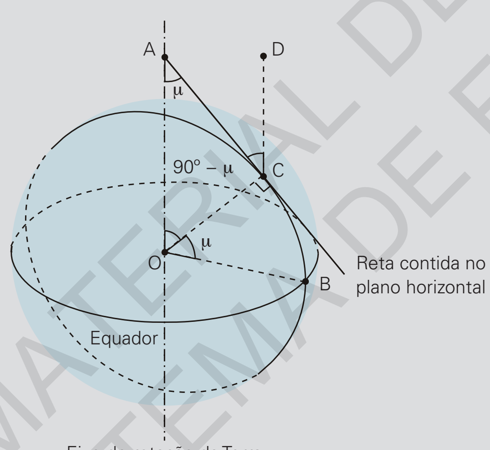
Volume do tronco: $V_T = \dfrac{\pi}{3} \cdot 0,6 \cdot (1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2) = 1,4\,\pi$.

Volume do cone: $V_c = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 1,8}{3} = 2,4\,\pi$.

Volume total: $1,4\pi + 2,4\pi = 3,8\,\pi$.

13. B

Na figura a seguir, **O** é o centro da Terra, $B\hat{O}C = \mu$ é a latitude do ponto **C**, e **CD** é a linha inclinada do relógio solar.



$A\hat{O}B = A\hat{C}O = 90°$

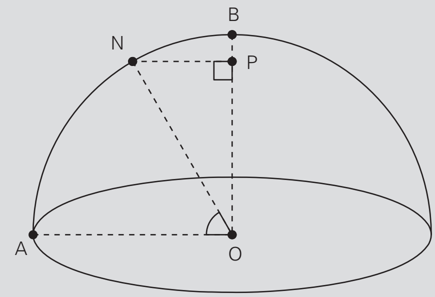
Então: $A\hat{O}C = 90° - \mu$

Logo, $A\hat{O}C = \mu$

Como CD || OA, temos que $A\hat{C}D = \mu$.

14. B

Observe na figura que **O** é o centro da Terra e **P** é a projeção ortogonal de **N** sobre o segmento **OB**.



Sabendo que $A\hat{O}N = 60°$, o ângulo $N\hat{O}P$ é igual a 30°. Portanto:

$\text{sen}\, N\hat{O}P = \dfrac{\overline{NP}}{\overline{ON}} \rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{\overline{NP}}{6400} \rightarrow \overline{NP} = 3200$ km

Como $M\hat{P}N = 2 \cdot 15° = 30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad, obtemos:

$\widehat{MN} = M\hat{P}N \cdot \overline{NP} = \dfrac{\pi}{6} \cdot 3200 \cong 1600$ km.

15. O segmento **AC** corresponde ao raio do cilindro **r**, sendo obtido pela seguinte relação:

$r^2 + 5^2 = 13^2 \rightarrow r^2 = 169 - 25 = 144 \rightarrow r = 12$ cm

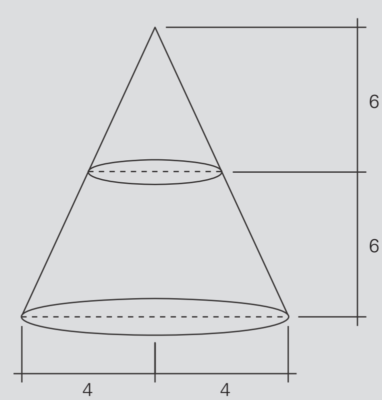
$V_{bola} = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \dfrac{4}{3} \cdot 13^3 \cong 2\,929\pi$ cm³

$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 12^2 \cdot 20 = 2\,880\pi$ cm³

Logo, $V_{bola} > V_{cilindro}$.

16. C

De acordo com o enunciado:



Vamos considerar:

- V = volume total do cone
- V′ = volume cheio (tronco)
- V″ = volume vazio (topo)
- H = 12 = altura total
- h = 6 = altura topo/altura tronco

Podemos calcular:

$\dfrac{V}{V''} = \left(\dfrac{H}{h}\right)^3 \rightarrow \left(\dfrac{12}{6}\right)^3 = \dfrac{V}{V''} \rightarrow V = 8V''$

$$V' + V'' = V \rightarrow V' + \frac{V}{8} = V \rightarrow V' = \frac{7}{8}V$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 12 \rightarrow V = 200{,}96$$

$$V' = \frac{7}{8}V = \frac{7}{8} \cdot 200{,}96 \rightarrow V' = 175{,}85 \text{ m}^3$$

Tempo: 500 L / min = 0,5 m^3 / min

1 min ____________ 0,5 m^3

T ____________ 175,85 m^3

t = 35,17 min ≈ 5h50 min

17. C

Aresta da base: l

Altura do prisma: h

Diagonal do prisma: $l\sqrt{2}$

Logo, tg 60° é dada por:

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{l\sqrt{2}} \rightarrow h = l\sqrt{6}$$

$$A_L = 36\sqrt{6}$$

Então:

$$4l \cdot h = 36\sqrt{6}$$

$$4l \cdot l\sqrt{6} = 36\sqrt{6}$$

l = 3

$V_{prisma} = B \cdot h$

$V_{prisma} = l^2 \cdot 3\sqrt{6} = 27\sqrt{6}$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(24^{\frac{1}{6}}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 24^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{6}$$

Logo, a razão pedida é:

$$\frac{V_{esfera}}{V_{prisma}} = \frac{\frac{8}{3}\pi\sqrt{6}}{27\sqrt{6}} = \frac{8\pi}{81}$$

Estudo para o Enem

18. E

Quantidade de madeira descartada: V_{desc} = $= V_{cilindro} - (V_{semiesfera} + V_{cone})$.

Logo, substituindo as fórmulas e os valores dados no exercícios:

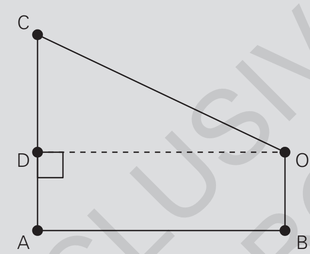
$$V_{dest} = \pi \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 7 - \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (7-4)^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{6}{3}\right)^2 \cdot 4\right]$$

$V_{dest} = 189 - [54 + 36] \cong 99 \therefore V_{dest} \cong 99 \text{ cm}^3$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

19. E



Seja D a projeção ortogonal do ponto C:

CD = 3 cm

CO = 7 cm

$7^2 = d^2 + 3^2 \rightarrow d^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40 \therefore$
$\therefore d = 2\sqrt{10}$ cm

Como o raio do bolim é de 2 cm, a razão pedida é:
$$\frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}.$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. D

O volume do silo é dado por:

$$\pi \cdot 3^2 \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 \cong 324 + 27 \cong 351 \text{ m}^3$$

Portanto, se n é o número de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo, então:

$$n \geq \frac{351}{20} = 17{,}55$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

21 ESTATÍSTICA – ANÁLISE DE DADOS

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo estudamos a análise de dados estatísticos. Abordamos primeiro o conceito de variáveis para o aprofundamento sobre tabelas de frequência. Em seguida, analisamos os tipos de representação gráficas.

Para concluir, aprofundamos nos tipos diferentes de representação gráficas que possibilitam compor dois ou mais gráficos em um só.

Para ir além

O artigo "Estatística no ensino médio: uma abordagem por meio de uma sequência didática a respeito da dengue" demonstra a importância da Estatística para analisar situações cotidianas referentes à saúde pública. Disponível em:

<http://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/viewFile/8335/6092>

Acesso em: fev. 2019.

O artigo "Presença da estatística no ensino fundamental e médio" aborda de maneira objetiva a presença da Estatística nos ensino Fundamental e Médio, com análises de dados e gráficos. Disponível em:

<https://www.ime.usp.br/arquivos/4congresso/33%20Bruno%20Henrique%20dos%20Santos_N.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

O artigo "Contribuições do ensino de estatística na formação cidadã do aluno da educação básica" trata da importância da aprendizagem dessa área da Matemática nas séries iniciais. Disponível em:

<http://www.uniedu.sed.sc.gov.br/wp content/uploads/2014/04/juliana_schneider.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

Indique o *site* do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), que contém informações diversas sobre o Brasil. Disponível em:

<https://www.ibge.gov.br/institucional/o-ibge.html>

Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. B

Internet e correios, respectivamente, por terem o maior percentual em cada classe.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

8. D

O valor mais alto entre os itens analisados entre as 214 cidades pesquisadas é representado pela figura totalmente colorida. Em Tóquio, a figura que representa o cafezinho não está totalmente preenchida, logo não corresponde ao café mais caro do mundo.

9. A

A variação de preço entre duas linhas horizontais é de 0,02. Com isso, analisando cada intervalo do gráfico, temos:

- entre 1 e 2: $-0{,}02$.
- entre 2 e 3: $+0{,}04$.
- entre 3 e 4: $+0{,}02$.
- entre 4 e 5: $+0{,}02$.
- entre 5 e 6: entre $-0{,}02$ e $-0{,}04$.

Portanto, a maior variação ocorreu entre as semanas 2 e 3.

10. a) Excluindo o estado de São Paulo, obtemos:

$100\% - 53\% = 47\%$

$$\frac{47}{100} \cdot 1{,}5 \cdot 10^6 = 705\,000 \text{ pizzas}$$

b) Pizza de mozarela: 35% das pizzas em São Paulo.

Pizza de calabresa: 25% das pizzas de São Paulo.

Logo, $35\% + 25\% = 60\%$ do total de pizzas consumidas em São Paulo.

$$\frac{53}{100} \cdot \frac{60}{100} \cdot 1{,}5 \cdot 10^6 = 477\ 000 \text{ pizzas}$$

11. Por regra de três simples, obtemos:

220,7 —— 1 000 000

x —— 320 137

$\therefore x = 70{,}65$

Em relação ao continente europeu, obtemos:

$$\frac{70{,}65}{15\,469} \cong 0{,}00457 \cong 0{,}457\%$$

12. E

a) Falsa. Houve decrescimento entre 2008 e 2009.

b) Falsa, pois 22,3 − 19,3 não representa 30% de 19,3.

c) Falsa. A maior emissão ocorreu em 2013.

d) Falsa, pois 36,3 − 24,6 = 11,7 (aproximadamente 50%).

e) Verdadeira, pois 36,3 − 24,6 = 11,7 (aproximadamente 50% de 24,6).

13. C

Porcentagem do total de PET reciclado para uso final têxtil: 37,8%.

Tecidos e malhas entre os de uso final têxtil: 30%.

Logo:

$$30\% \text{ de } 37{,}8\% = \frac{30}{100} \cdot \frac{37{,}8}{100} = \frac{1134}{10\,000} =$$

$$= 0{,}1134 = 11{,}34\%$$

Como 282 kton correspondem a 100%, obtemos:

$$\frac{11{,}34}{100} \cdot 282 \cong 32 \text{ kton}$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

14. D

a) Falsa, pois 50% de 56 = 0,50 · 56 = 28.

b) Falsa.

Taxa de crescimento dos homens $= \frac{58-52}{52} =$ $= 0{,}12 = 12\%$.

Taxa de crescimento das mulheres: $\frac{47-37}{37} =$ $= 0{,}27 = 27\%$.

c) Falsa. A população economicamente ativa de mulheres cresceu: $\frac{45-40}{40} = 0{,}125 = 12{,}5\%$.

d) Verdadeira.

e) Falsa. A população economicamente ativa de homens cresceu: $\frac{58-54}{54} = 0{,}08 = 8\%$.

15. D

a) Falsa. O aumento de 100% corresponde a 600 · (1 + 1) = 1 200, maior que 1 000.

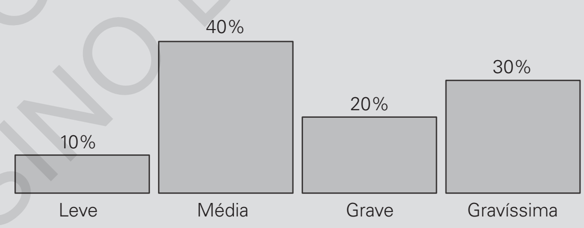
b) Falsa. O aumento de 600% corresponde a 600 · (1 + 6) = 4 200, maior que 4 000.

c) Falsa. O aumento de 66,6% corresponde a 4 000 · (1 + 0,666) = 6 665, maior que 6 000.

d) Verdadeira. O aumento de 900% corresponde a 600 · (1 + 9) = 6 000, o valor indicado no gráfico.

e) Falsa. O aumento de 1 000% corresponde a 600 · (1 + 10) = 6 600, maior que 6 000.

16.



a) Para que os condutores atinjam 13 pontos, consideramos a, b, c e d, respectivamente, como o número de multas leves, médias, graves e gravíssimas. Considerando as soluções inteiras não negativas, obtemos:

$3a + 4b + 5c + 7d = 13$

Observando que $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, obtemos:

$(a, b, c, d) \in \{(0, 2, 1, 0), (1, 0, 2, 0), (2, 0, 0, 1), (3, 1, 0, 0)\}$

b) O valor obtido com a soma das multas aplicadas é:

Leves: 0,1 · 1 000 · 53 = 5 300

Média: 0,4 · 1 000 · 86 = 34 400

Grave: 0,2 · 1 000 · 128 = 25 600

Gravíssima: 0,3 · 1 000 · 192 = 57 600

Total: R$ 122.900,00

17. B

Primeiro calculamos os custos com cada funcionário em 2013:

- Ensino fundamental:

$$\frac{\left(\frac{12,5}{100}\cdot 400\,000\right)}{50} = \text{R\$ }1.000,00$$

- Ensino médio:

$$\frac{\left(\frac{75}{100}\cdot 400\,000\right)}{150} = \text{R\$ }2.000,00$$

- Ensino superior:

$$\frac{\left(\frac{12,5}{100}\cdot 400\,000\right)}{10} = \text{R\$ }5.000,00$$

Com o aumento no número de funcionários e a manutenção do salário, os custos serão:

- Ensino fundamental: $70 \cdot 1000 =$ R$ 70.000,00
- Ensino médio: $180 \cdot 2000 =$ R$ 360.000,00
- Ensino fundamental: $20 \cdot 5000 =$ R$ 100.000,00
- Custo total 2014: R$ 530.000,00
- Custo total 2013: R$ 400.000,00

Logo, para que o lucro seja o mesmo, a empresa deve aumentar sua receita em:

R$ 530.000,00 − R$ 400.000,00 = R$ 130.000,00

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

Estudo para o Enem

18. A

A máxima quantidade de bactérias no ambiente corresponde à soma das quantidades de bactérias das espécies I e II. Logo, na terça-feira a soma tem o maior valor: 1 100 + 800 = 1 900 bactérias.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. C

Músicas (10%) e espaço livre (30%) correspondem a 40% do espaço total do cartão de 16 GB. Logo, 60% do espaço utilizado será transferido para o novo cartão.

$$\frac{60}{100}\cdot 16 = 9,6\ \text{GB}$$

Com isso, o cartão de 32 GB tem disponível:

32GB – 9,6GB = 22,4 GB

$$\frac{22,4}{32}\cdot 100\% = 70\%$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

20. A

Como de fevereiro para março e de novembro para dezembro a temperatura máxima reduziu e como de agosto para setembro e de dezembro para janeiro a variação da pluviosidade foi maior que 50 mm, o mês que satisfaz todas as condições é janeiro.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

22 ESTATÍSTICA - MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo damos continuidade ao estudo sobre os conceitos da Estatística, com o conhecimento das medidas de tendência central. Nesta primeira etapa, abordamos a média aritmética simples e a média aritmética ponderada.

Para ir além

O artigo "O uso do jogo digital educativo na aprendizagem da Média Aritmética" aborda um modo lúdico de ensinar o tema. Disponível em:

<http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd6_patricia_boletini.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

A dissertação *Uma abordagem sobre média e suas aplicações no ensino médio* é um bom material com abordagem mais completa sobre o conceito de média. Disponível em:

<http://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/UMA-ABORDAGEM-SOBRE-M%C3%89DIAS-E-SUAS-APLICA%C3%87%C3%95ES-NO-ENSINO-M%C3%89DIO.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. D

Analisando as entradas e saídas de usuários do elevador, teremos os seguintes resultados: 4, 5, 5, 5, 7 e 3. Portanto, a moda é 5.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

8. D

Transcrevendo os tempos em ordem crescente, obtemos:

20,50; 20,60; 20,60; 20,80; 20,90; 20,90; 20,90; 20,96

Assim, o tempo mediano é dado por:

$$\frac{20,8 + 20,9}{2} = 20,85$$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

9. a) $5 + 3 + 1 + 1 = 10$

b) $\frac{5+3+5+3+1+1}{25} = \frac{18}{25} = 0,72 = 72\%$

c) Classificando as notas de forma crescente, a mediana é a nota que ocupa a 13ª posição.

0 – 0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 4 – 5 – 5 – 5 – 5 – 5 – 6 – 6 – 6 – 7 – 7 – 7 – 7 – 7 – 8 – 8 – 8 – 9 – 10

Assim, a mediana será a nota de número 6.

10. B

Classificando em ordem crescente os dados:

13,5 / 13,5 / 13,5 / 13,5 / 14 / 15,5 / 16 / 18 / 18 / 18,5 / 19,5 / 20 / 20 / 20 / 21,5

A média é 17 °C, pois as alternativas mostram esse valor como resposta.

A mediana é o termo central de distribuição em ordem crescente. Assim, a mediana é o oitavo termo, ou seja, 18.

A moda é 13,5, pois é o termo que aparece com maior frequência (4 vezes).

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

11. A

A nota final do candidato é de tal forma que:

$$\frac{8x+6(x+1)+5(x-1)}{x+x+1+x-1} = 6,5 \rightarrow 19x+1 = 19,5x \rightarrow$$
$$\rightarrow 1 = 0,5x \quad \therefore \quad x = 2$$

Em decorrência, o número de provas que o candidato executou foi:

$x + (x + 1) + (x - 1) = 3x = 3 \cdot 2 = 6.$

12. D

O nível médio nos 10 primeiros dias é obtido por

$\dfrac{300 + 500}{2} = 400$ cm.

O nível médio entre os dias 10 e 15 foi $\dfrac{500 + 200}{2} =$

$= 350$ cm.

Assim, o nível médio entre os dias 15 e 20 foi 200 cm.

O nível médio entre os dias 20 e 25 foi $\dfrac{200 + 300}{2} =$

$= 250$ cm.

O nível médio entre os dias 25 e 30 foi $\dfrac{300 + 100}{2} =$

$= 200$ cm.

Sendo assim, o nível médio no período de 30 dias é obtido por:

$$\frac{10 \cdot 400 + 5 \cdot 350 + 5 \cdot 200 + 5 \cdot 250 + 5 \cdot 200}{30} =$$

$= 300$ cm

13. D

x: cartas de Pedro

y: cartas de Luiza

z: cartas que Luiza passou para Pedro

Sendo z o número de cartas que Luiza passou para Pedro, podemos equacionar:

$$\text{Média de Pedro} = \frac{x}{5} = 6 \rightarrow x = 30$$

$$\text{Média de Luiza} = \frac{y}{5} = 4 \rightarrow y = 20$$

Após a troca de cartas:

$$\frac{x + 1 - z}{5} = 4{,}8 \rightarrow \frac{30 + 1 - z}{5} = 4{,}8 \rightarrow z = 7$$

14. C

O peso mais frequente é o de 45 kg. E a moda é 45 kg.

Vamos considerar a tabela:

Número de alunos	Pesos (kg)	$X_i \cdot f_i$
1	50	50
2	40	80
3	80	240
4	60	240
5	65	325
6	55	330
7	75	525
8	45	360
$\sum f_i = 36$		$\sum x_i \cdot f_i = 2150$

A média é obtida por:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{2150}{36} = 59{,}72 \text{ kg}$$

15. C

Sejam S_h e S_m, devidamente nesta ordem, a soma das notas dos homens e a soma das notas das mulheres. Compreendendo que $S_m = 2 \cdot S_h$, obtemos:

$$\frac{S_m}{8} = \frac{S_h + S_m}{14} + 1 \leftrightarrow \frac{S_h}{4} = \frac{3 \cdot S_h}{14} + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow S_h = 28$$

Assim, a resposta solicitada é:

$$\text{Média homens} = \frac{28}{6} \cong 4{,}7$$

16. Calculando, obtemos:

$$a + \frac{b + c + d}{3} = 48 \rightarrow \frac{3a + b + c + d}{3} = 48 \rightarrow$$
$$\rightarrow 3a + b + c + d = 144$$

$$b + \frac{a + c + d}{3} = 42 \rightarrow \frac{a + 3b + c + d}{3} = 42 \rightarrow$$
$$\rightarrow a + 3b + c + d = 126$$

$$c + \frac{a + b + d}{3} = 32 \rightarrow \frac{a + b + 3c + d}{3} = 32 \rightarrow$$
$$\rightarrow a + b + 3c + d = 96$$

$$d + \frac{a + b + c}{3} = 34 \rightarrow \frac{a + b + c + 3d}{3} = 34 \rightarrow$$
$$\rightarrow a + b + c + 3d = 103$$

$$\begin{cases} 3a + b + c + d = 144 \\ a + 3b + c + d = 126 \\ a + b + 3c + d = 96 \\ a + b + c + 3d = 102 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 33 \\ b = 24 \\ c = 9 \\ d = 12 \end{cases}$$

17. D

Na alternativa A:

$\overline{x}_1 = \dfrac{5+5+7+8+9+10}{6} \cong 7{,}3 < 7{,}5 = \dfrac{7+8}{2} = M_{d1}$

Na alternativa B:

$\overline{x}_2 = \dfrac{4+5+6+7+8+8}{6} \cong 6{,}3 < 6{,}5 = \dfrac{6+7}{2} = M_{d2}$

Na alternativa C:

$\overline{x}_3 = \dfrac{4+5+6+7+8+9}{6} = 6{,}5 = \dfrac{6+7}{2} = M_{d3}$

Na alternativa D:

$\overline{x}_4 = \dfrac{5+5+5+7+7+9}{6} \cong 6{,}3 > 6 = \dfrac{5+7}{2} = M_{d4}$

Na alternativa E:

$\overline{x}_5 = \dfrac{5+5+10+10+10+10}{6} \cong 8{,}3 < 10 = \dfrac{10+10}{2} = M_{d5}$

Concluímos que a única lista na qual a média das notas é maior que a mediana é a da alternativa D.

Estudo para o Enem

18. D

Analisando os valores, obtemos a média:

$$\frac{37+33+35+22+30+35+25}{7} = 3{,}1$$

Deve comprar a mesma quantidade de matéria-prima do mês V.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

19. E

Desvio-padrão $= \sigma$

$$\sigma = \frac{90\text{Kg}}{30\,000\text{ m}^2} = \frac{30\text{ Kg}}{10\,000\text{ m}^2} = \frac{0{,}5\text{ saca}}{\text{hectare}}$$

Assim, a variância (σ^2) solicitada será obtida por:

$\sigma^2 = 0{,}5^2 = 0{,}25\ (\text{saca/hect})^2$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

20. D

Calculando, obtemos:

Bom ou excelente $\rightarrow 7 \le M \le 10 \rightarrow M_{mín} = 7$

$$7 = \frac{12x+8\cdot 4+6\cdot 8+5\cdot 8+7{,}5\cdot 10}{12+4+8+8+10} \rightarrow$$

$$\rightarrow 7 = \frac{12x+195}{42} \quad \therefore \quad x = 8{,}25$$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

23 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA - ÁREA DE POLÍGONOS

Comentários sobre o módulo

Neste módulo iniciamos os estudos de mais uma importante área da Matemática, a Geometria analítica. São apresentados os conceitos de localização unidimensional, bidimensional e eixo. Além disso, abordamos o sistema cartesiano e deduzimos as fórmulas da distância entre dois pontos em um plano, ponto médio de uma segmento, área de um triângulo com base nas coordenadas de seus vértices e aprendemos a relação para o cálculo de área de um polígono qualquer.

Exercícios propostos

7. C

A(−2, 1) e B(4, 2)

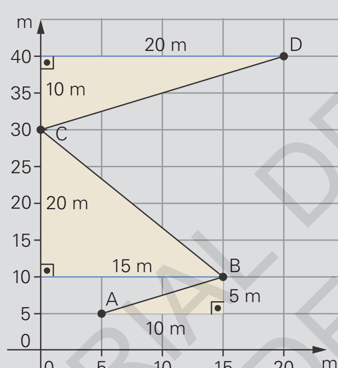
$$d=\sqrt{(4-(-2))^2+(2-1)^2}=\sqrt{37}\approx 6{,}08\text{ km}$$

8. A distância d entre os pontos A e B será dada por:

$$d=\sqrt{(2-8)^2+(8-0)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

9. A

Considerando os triângulos retângulos destacados na figura, temos:



$AB^2=10^2+5^2\rightarrow AB=\sqrt{125}\rightarrow AB=5\sqrt{5}$ m

$BC^2=20^2+15^2\rightarrow BC=\sqrt{625}\rightarrow BC=25$ m

$CD^2=10^2+20^2\rightarrow CD=\sqrt{500}\rightarrow CD=10\sqrt{5}$

Portanto, o deslocamento d da pessoa será dado por:

$d = AB + BC + CD$

$d=5\sqrt{5}+25+10\sqrt{5}$

$d=15\sqrt{5}+25$

$d=5\left(3\sqrt{5}+5\right)$ m

10. Utilizando a regra de Sarrus para calcular o determinante, temos:

$$\Delta=\left|\begin{matrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-1 & 2\\ 1 & 4\\ 3 & -1\end{matrix}$$

$$\Delta=-4+6-1-12-1-2=-14\rightarrow\Delta=-14$$

Logo, a área do triângulo é dada por:

$$A=\frac{1}{2}\cdot|-14|=7\text{ u.a.}$$

11. D

Determinando o ponto M (ponto médio do segmento AB), temos:

$$x_M=\frac{0+2}{2}=1$$

$$y_M=\frac{10+12}{2}=11$$

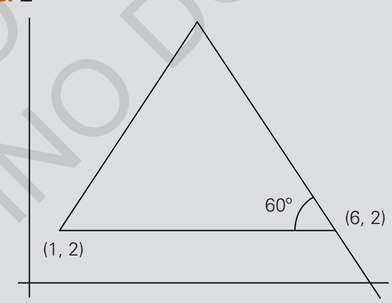
Estabelecendo, agora, o ponto N (ponto médio do segmento CD), temos:

$$x_N=\frac{-2+4}{2}=1$$

$$y_N=\frac{3+3}{2}=3$$

Os pontos pedidos são M(1, 11) e N(1, 3).

12. E



$$\text{sen } 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

13. C

Do enunciado, temos:

A(14, 4); B(6, −2); C(16, −2)

$$\left|\begin{matrix}14 & 4 & 1\\ 6 & -2 & 1\\ 16 & -2 & 1\end{matrix}\right|=-28+64-12+32+28-24=60$$

Logo, a área do triângulo ABC é dada por:

$$A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|60|$$

$$A_{ABC}=30$$

14. E

Do enunciado e do gráfico, temos:

$A(x_A,\ 2)$, $B(1,\ y_B)$ e $C(x_A,\ y_B)$

Como $A(x_A,\ 2)$ é um ponto da função $f(x)=2^{-x}-2$:

$2=2^{-x_A}-2$

$4 = 2^{-x_A}$

$2^2 = 2^{-x_A}$

$x_A = -2$

Como $B(1, y_B)$ é um ponto da função $f(x) = 2^{-x} - 2$:

$y_B = 2^{-1} - 2$

$y_B = -\dfrac{3}{2}$

Assim, os pontos $A(-2, 2)$, $B\left(1, -\dfrac{3}{2}\right)$ e $C\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$ formam o triângulo ABC retângulo no vértice C.

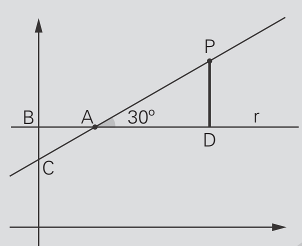
A área do triângulo ABC é dada por:

$$A_{ABC} = (1+2)\cdot\left(2+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$A_{ABC} = \frac{21}{4}$$

15. D

Calculando, temos:



$\Delta ABC \approx \Delta APD \rightarrow$ triângulos 30 / 60 / 90 $\rightarrow$

$\rightarrow$ lados x / $2x$ / $x\sqrt{3}$

$BC = 1 \rightarrow AC = 2 \rightarrow AB = \sqrt{3}$

$AP = 4 \rightarrow PD = 2 \rightarrow AD = 2\sqrt{3}$

$A\left(\sqrt{3}, 3\right)$

$D\left((\sqrt{3}+2\sqrt{3}), 3\right) = D\left(3\sqrt{3}, 3\right)$

$P\left(3\sqrt{3}, (3+2)\right) = P\left(3\sqrt{3}, 5\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 5^2 = 27 + 25 = 52$

16. A

$S_\Delta = \dfrac{4\cdot 2}{2} = 4 \rightarrow$ metade de S_Δ será 2.

Reta r $\rightarrow a = \dfrac{0-4}{2-0} = -2 \rightarrow y = -2x+4$

Ponto $D = (x_0, y) \rightarrow y = 2_{x0} + 4$ com $x_0 < 2$

$$S_{\text{trapézio}} = \frac{(4-2x_0+4)\cdot x_0}{2} = 2 \rightarrow -2x_0^2 + 8x_0 - 4 = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow x_0^2 - 4x_0 + 2 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 \rightarrow \Delta = 8$

$$x_0 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$\rightarrow x_0 = 2+\sqrt{2} \rightarrow 2+\sqrt{2} > 2$ (não convém)

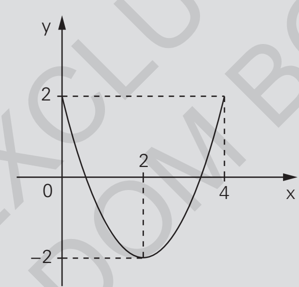
$x_0 = 2-\sqrt{2}$

17. a) Sendo $-\dfrac{-4}{2\cdot 1} = 2$ a abscissa do vértice, a ordenada deve ser igual a -2.

Logo, temos:

$-2 = 2^2 - 4\cdot 2 + c \rightarrow c = -2 + 4 - 8 \rightarrow c = 2$

Portanto, segue o gráfico de f.



b) Desde que a < b, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 1 \\ \dfrac{a^2-4a+c+b^2-4b+c}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2-a \\ a^2-4a+(2-a)^2-4(2-a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2-a \\ a^2-2a-2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1-\sqrt{3} \\ b = 1+\sqrt{3} \end{cases}$$

Estudo para o Enem

18. A

Após 2 horas, a formiga que caminhou horizontalmente para o lado direito percorreu 8 km (velocidade de 4 km/h). Assim, sua coordenada será (8; 0).

Após 2 horas, a formiga que caminhou verticalmente para cima percorreu 6 km (velocidade de 3 km/h). Assim, sua coordenada será (0; 6).

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

19. E

A distância entre os pontos P e Q no percurso indicado é igual a:

$(550 - 30) + (320 - 20) = 820$

Logo, a distância entre T e os pontos P e Q deverá ser de $\frac{820}{2} = 410$.

Portanto, como $30 + 410 = 440 < 550$, segue que T= (440, 20).

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

20. B

Temos:

$y_A = f(0) = 1 \leftrightarrow A = (0,\ 1),\ y_B = g(1) = 2 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow B = (1,\ 2),\ y_C = g(2) = 4$

$\leftrightarrow C = (2,\ 4)$ e $y_D = f(2) = 5 \leftrightarrow D = (2,\ 5)$.

Portanto, a área do quadrilátero ABCD é dada por:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \text{ e}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |4 + 10 + 2 - 1 - 4 - 8| = 1{,}5$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

24 EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA E OUTRAS EQUAÇÕES DA RETA

Comentários sobre o módulo

Neste módulo iniciamos os estudos sobre as retas. Trabalhamos as diferentes inclinações que as retas podem ter em um plano cartesiano. Além disso, deduzimos a fórmula para o cálculo da medida do coeficiente angular de uma reta e analisamos as condições em que esse coeficiente é positivo, negativo, nulo ou inexistente.

Apresentamos a equação fundamental da reta, deduzimos a equação geral e trabalhamos as equações reduzida e segmentária da reta. Além disso, abordamos a equação paramétrica da reta.

Exercícios propostos

7. C

Calculando o coeficiente angular, temos:

$\Delta y = y_B - y_A = 8 - 1 = 7$

$\Delta x = x_B - x_A = 6 - 0 = 6$

Assim,

$\Delta tg = m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow m = \dfrac{7}{6}$

Através da equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

I. Pelo ponto A(0, 1)

$y - 1 = \frac{7}{6}(x - 0) \rightarrow y - 1 = \frac{7}{6}x \rightarrow y - \frac{7}{6}x - 1 = 0$

ou

II. Pelo ponto B(6, 8)

$y - 8 = \frac{7}{6}(x - 6) \rightarrow y - 8 = \frac{7}{6}x \rightarrow y - \frac{7}{6}x - \frac{7}{6}\cdot 6 \rightarrow$

$\rightarrow y - 8 = \frac{7}{6}x - 7 \rightarrow y - \frac{7}{6}x - 8 + 7 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow y - \frac{7}{6}x - 1 = 0$

Logo, a equação fundamental da reta é $y - \frac{7}{6}x - 1 = 0$.

8. C

É fácil observar que a declividade da reta u é negativa. Além disso, é evidente que se tem $a_r < a_t < a_s$. Em decorrência, podemos constatar que $a_u < a_r < a_t < a_s$.

9. D

Podemos definir o ponto de interseção entre as duas retas pela solução do sistema formado por elas:

$$\begin{cases} x - 2y - 10 = 0 \\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

Sendo assim, o ponto de interseção é P(4, –3), cuja abscissa é x = 4.

10. C

Como a reta r passa pelo ponto (1, 5), temos:

$r: y = m_r x + 4 \rightarrow r: 5 = m_r \cdot 1 + 4 \rightarrow m_r = 1$

Logo, $y = x + 5$ ou $-x + y = 4$.

Já a reta s passa pelo ponto (1, 5). Logo, temos:

$s: y = m_s x + 6$

Assim, $5 = m_s + 6 \rightarrow m_s = -1$.

$y = -x + 6$ ou $x + y = 6$.

Contudo, o sistema que representa as equações r e s corresponde a:

$$\begin{cases} -x + y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

11. D

Para analisar a função modular, vamos supor $x, y \in \mathbb{R}$.

Devemos lembrar que:

Para $x - y \geq 0 \rightarrow |x - y| = x - y$

Para $x - y \leq 0 \rightarrow |x - y| = -x + y$

Para $x + y \geq 0 \rightarrow |x + y| = x + y$

Para $x + y \leq 0 \rightarrow |x + y| = -x - y$

Assim, temos:

$|x - y| = |x + y| \rightarrow x - y = x + y$ ou $x - y = -x - y$

$\rightarrow x \in \mathbb{R}$ e $y = 0$ ou $x = 0$ e $y \in \mathbb{R}$.

Logo, a equação corresponde aos eixos cartesianos, cuja interseção é a origem.

12. a) A reta passa pelos pontos A(0, 6) e B(12, 0). Sendo assim, seu coeficiente angular será obtido por:

$m = \dfrac{0 - 6}{12 - 0} = -\dfrac{1}{2}$

Então, a equação da reta será obtida por:

$y - 6 = -\frac{1}{2}\cdot(x - 0) \rightarrow 2y - 12 = -x$

Portanto, $x + 2y - 12 = 0$.

b) Constatando o valor de y na equação da reta, temos:

$$y = \frac{-x + 12}{2}$$

Calculando a área do retângulo, temos:

$$A = x \cdot y \rightarrow A(x) = \frac{x \cdot (-x + 12)}{2} \rightarrow A(x) = -\frac{x^2}{2} + 6x$$

c) O valor maior para a área do retângulo será obtido pela ordenada do vértice da parábola de equação:

$$A(x) = -\frac{x^2}{2} + 6x$$

Logo:

$$A_{max} = -\frac{\Delta}{4 \cdot a} = -\frac{36}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 18$$

13. C

Calculando, temos:

$$\text{Reta } r \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = 5x - 4$$

Interseção da reta r e eixos $\rightarrow A(0, -4)$ e $B\left(\frac{4}{5}, 0\right)$.

Com as coordenadas dos vértices, calculamos a área do triângulo AOB:

$$A_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} = \frac{16}{10}$$

Portanto, $A_{OAB} = 1{,}6$.

Verificando as opções dadas, temos:

a) Falsa, pois a reta (r) intercepta o eixo das ordenadas no ponto de corte -4.

b) Falsa, pois o coeficiente angular da reta (r) é 5.

c) Verdadeira, pois a reta (r) estabelece com os eixos cartesianos um triângulo de área 1,6.

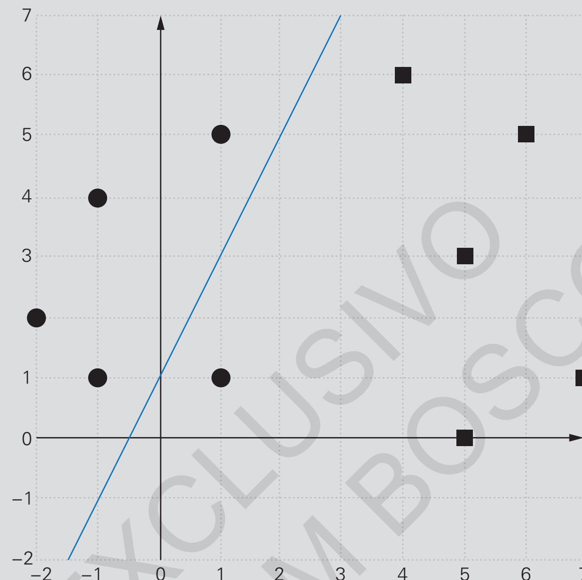
d) Falsa, pois, se $x = -\frac{1}{2} > -\frac{4}{5} \rightarrow$

$\rightarrow y = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 \rightarrow y = -\frac{13}{2}$.

e) Falsa, pois a reta (r) intercepta o eixo das ordenadas no ponto de corte $\frac{4}{5}$.

14. a) A equação da reta $y = 2x + 1$, conforme representada no gráfico, não separa os pontos C e Q, pois o ponto (1, 1) está à direita da reta, com os demais pontos do conjunto Q.

Gráfico



b) Para garantir que os pontos dos conjuntos P e Q estejam separados, a reta deve passar pelos pontos (4, 6) e (1, 1). Assim, obtemos:

$y = ax - 3$

Para o ponto (1, 1), temos:

$$1 = 1a - 3 \rightarrow 1a = 1 + 3 \rightarrow a = 4$$

Para o ponto (4, 6), temos:

$$6 = 4a - 3 \rightarrow 4a = 6 + 3 \rightarrow a = \frac{9}{4}$$

Portanto, o coeficiente angular da reta pode variar entre:

$$V = \{a \leq \mathbb{R} \mid \frac{9}{4} \leq a \leq 4\}$$

15. C

A reta com inclinação $\frac{1}{2}$ passa pelo ponto (0, 2).

Logo, sua equação é:

$$y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Quando $y = 0$, temos: $0 = \frac{1}{2}x + 2 \rightarrow x = 4$.

Logo, os vértices do triângulo maior são (0, 0), (0, 2) e (–4, 0).

Sua área será:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |8| \cdot = 4$$

Já a reta com inclinação –3 passa pelo ponto (1, 0). Logo, sua equação é $y = -3x + 3$.

Quando $x = 0$, temos: $y = -3 \cdot 0 + 3 \rightarrow y = 3$. Logo, esse é o ponto (0, 3).

O último ponto do triângulo menor é obtido pela interseção das duas retas:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -3x + 3 \end{cases} \rightarrow x = \frac{2}{7} \text{ e } y = \frac{15}{7}$$. Logo, esse é o ponto $\left(\frac{2}{7}, \frac{15}{7}\right)$.

Sua área será:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 2 & 3 & \frac{15}{7} & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{7} - \frac{6}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{2}{7}\right| = \frac{1}{7}$$

Por fim, a área total hachurada será:

$$A = 4 + \frac{1}{7} = \frac{29}{7} \text{ u.a.}$$

16. D

Tanto $y = \frac{1}{2}x$ quanto $y = ax$ passam pela origem.

Logo, a interseção entre essas duas retas corresponde ao ponto A = (0, 0).

Fazendo a interseção das retas $y = \frac{1}{2}x$ e $y = -x + 3$, obtemos o ponto B:

$\frac{1}{2}x = -x + 3 \qquad 1{,}5x = 3 \rightarrow x = 2$

$y = -x + 3 = -2 + 3 \rightarrow y = 1$

Assim, B = (2, 1).

Finalmente, com a interseção das retas $y = -x + 3$ e $y = ax$, com $a \neq 0$ e com o cálculo da área do triângulo, obtemos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & x & 0 \\ 0 & 1 & 3-x & 0 \end{vmatrix} = 6 - 3x$$

$\frac{1}{2} \cdot |D| \cdot 8 = 12 \rightarrow |6 - 3x| = 3$

Logo:

$6 - 3x = 3 \rightarrow x = 1$

Ou:

$-6 + 3x = 3 \rightarrow x = 3$

Sendo $x = 1$, a abscissa de C é:

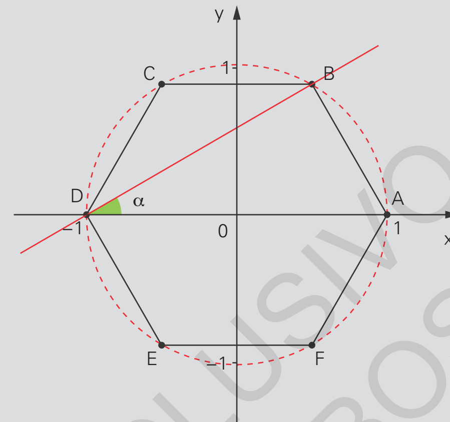
$y = -x + 3 = -1 + 3 = 2$

Assim, C = (1, 2).

Portanto, a soma das abscissas dos vértices do triângulo ABC corresponde a:

$0 + 2 + 1 = 3$

17. B



Observando a circunferência circunscrita no hexágono regular, vamos escrever que a medida α do ângulo ADB será obtida por:

$\alpha = \frac{60°}{2} = 30°$

Sendo assim, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos B e D será obtido por:

$m = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

A reta solicitada passa pelo ponto D(− 1, 0) e tem coeficiente angular $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Logo, sua equação será obtida por:

$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - (-1))$

Portanto, $y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Estudo para o Enem

18. B

Os pares ordenados atendem às condições $0 \leq x \leq 10$, $y \geq 0$ e $y \leq x$.

Ou seja, $0 \leq y \leq x \leq 10$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

19. C

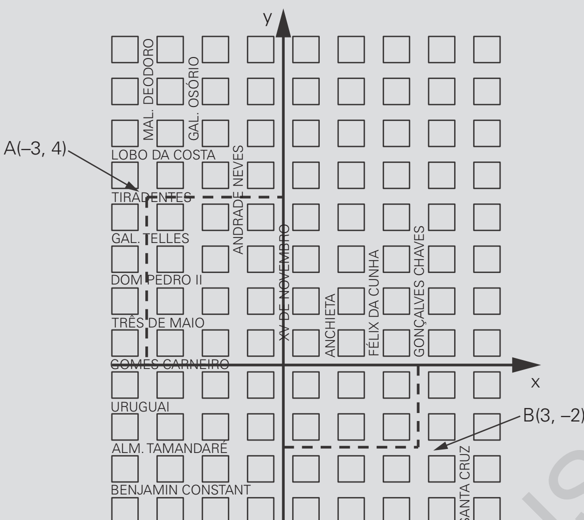
O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (0, 0) e (6, 12) é $\frac{12}{6} = 2$. Logo, sendo $\frac{16}{4} = 4$ o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (0, 0) e (4, 16), concluiremos que o coeficiente angular deverá aumentar em $4 - 2 = 2$ unidades.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. B

Descrevendo os eixos conforme descrito no texto, temos:



O ponto A tem coordenadas (–3, 4) e o ponto B, coordenadas (3, –2).

O coeficiente angular m da reta é:

$$m = \frac{-2-4}{3-(-3)} = -1$$

Com o coeficiente angular e apenas um ponto, podemos obter a equação fundamental da reta:

$$y - 4 = -1[x - (-3)] \rightarrow y - 4 = -x + 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow x + y - 1 = 0$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

25 POSIÇÃO RELATIVA ENTRE RETAS E DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

Comentários sobre o módulo

Neste módulo continuamos os estudos sobre as retas, sendo deduzidas as posições relativas entre duas delas: quando são retas paralelas distintas, retas paralelas coincidentes, retas concorrentes e retas perpendiculares entre si.

Abordamos também, distância do ponto à reta e as inequações do 1º grau no plano cartesiano.

Apresentamos a fórmula que relaciona a distância do ponto à reta, o caso geral e os casos particulares dos estudos das inequações no plano, com a análise dos semiplanos aberto e fechado.

Para ir além

O material "Geometria analítica" é um guia completo sobre o tema para professores de Matemática. Disponível em:

http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/geometria-analitica-ufma.pdf

http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uepg_mat_artigo_glaucia_marise_scortegagna.pdf

Acessos em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. D

$$m_r \cdot m_s = -1 \rightarrow m_r \cdot \frac{2}{3} = -1 \rightarrow m_r = -\frac{3}{2}$$

P(1, 6)

Logo:

$$y - 6 = -\frac{3}{2} \cdot (x - 1) \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + 6$$

Portanto, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$.

8. A

Interseção com o eixo x (y = 0):

$$4x - 3\cdot 0 + 12 = 0 \rightarrow 4x = -12 \rightarrow x = -3 \therefore A(-3,\ 0)$$

Interseção com o eixo y (x = 0):

$$4\cdot 0 - 3y + 12 = 0 \rightarrow 3y = -12 \rightarrow y = 4 \ \therefore\ B(0,\ 4)$$

Logo, a distância entre os pontos A e B será dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{[0-(-3)]^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} \rightarrow d_{AB} = 5$$

9. E

As retas têm coeficientes angulares diferentes. Logo, não são paralelas.

Igualando as equações, temos:

$$\begin{cases} y = 5x + 8 \\ y = -5x + 8 \end{cases}$$

$$5x + 8 = -5x + 8 \rightarrow 10x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$y = 5 \cdot 0 + 8 \rightarrow y = 8$$

Logo, no ponto (0, 8), as retas se intersectam, tendo um único ponto em comum.

10. r: $2y = x - 3 \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Logo, $m_r = \frac{1}{2}$.

$$m_r \cdot m_t = -1 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_t = -1 \rightarrow m_t = -2$$

As retas r e t se intersectam no ponto A, cujas coordenadas são:

$$y = 0 \rightarrow 2y = x - 3 \rightarrow 2 \cdot 0 = x - 3 \rightarrow x = 3$$

Assim, A = (3, 0).

Logo, a equação da reta t será:

$$y - 0 = -2 \cdot (x - 3)$$

Portanto, $y = -2x + 6$.

11. E

Os vértices (2, 2) e (3, 3) pertencem à reta y = x, que é paralela à família de retas y = x + m.

As retas dessa família devem estar acima do ponto (2, 3), isto é, $3 < 2 + m$, implicando em $m > 1$ ou abaixo do ponto (3, 2), ou seja, $2 > 3 + m$, implicando em $m < -1$.

12. A

r: $3x + my = n \rightarrow my = n - 3x$

$$y = -\frac{3x}{m} + \frac{n}{m} \rightarrow m_r = -\frac{3}{m} \ \text{ e } \ q_r = \frac{n}{m}$$

s: $x + 2y = 1 \rightarrow 2y = 1 - x$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow m_s = -\frac{1}{2} \ \text{ e } \ q_s = +\frac{1}{2}$$

Para as retas serem concorrentes:

$$m_r \neq m_s \rightarrow -\frac{3}{m} \neq -\frac{1}{2} \rightarrow m \neq 6$$

Para as retas serem paralelas:

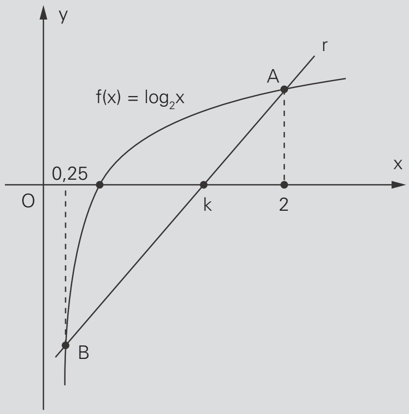
$$q_r \neq q_s \rightarrow \frac{n}{m} \neq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{n}{6} \neq \frac{1}{2} \rightarrow n \neq 3$$

Para as retas serem coincidentes:

$$m_r = m_s \rightarrow m = 6$$

$$q_r = q_s \rightarrow n = 3$$

13.



$x = 2 \rightarrow f(2) = \log_2 2 = 1 \rightarrow A(2;1)$

$x = 0{,}25 \rightarrow f(0{,}25) = \log_2 0{,}25 =$
$= -2 \rightarrow B(0{,}25; -2)$

$$\begin{bmatrix} 2 & k & 0{,}25 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$-k + 4 + 0 - 0 + 0{,}25 - 2k = 0$

$-3k + 4{,}25 = 0 \rightarrow k = \dfrac{4{,}25}{3}$

Portanto, $k = \dfrac{17}{3}$.

14. A

$x^2 - 5x + 4 = 0$

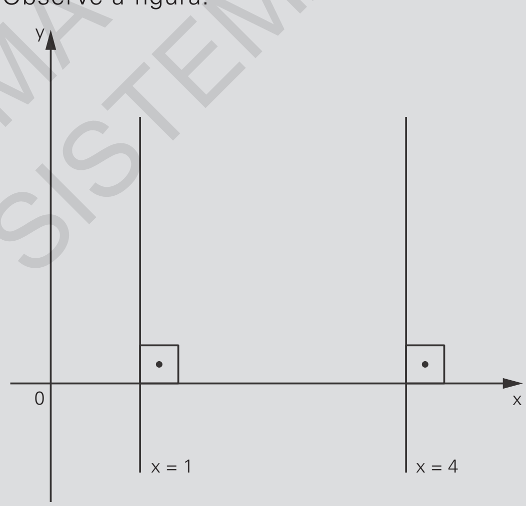
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$x = 1$ ou $x = 4$

Note que $x = 1$ e $x = 4$ são duas retas paralelas, pois o exercício pede quais pontos satisfazem à equação, e não à função f(x), como estamos acostumados a resolver. Neste caso, os valores de y no plano cartesiano são variáveis, enquanto os de x são fixos.

Observe a figura:



15. B

A distância do segmento $\overline{PQ}$ será:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-6)^2} =$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \rightarrow d = 5$$

Para encontrar a equação da reta a qual pertence o segmento $\overline{PQ}$, sabemos que variações de x e y serão iguais (pois pertencem à mesma reta, com o mesmo coeficiente angular). Logo:

$$\frac{y - y_Q}{x - x_Q} = \frac{y_p - y_Q}{x_p - x_Q} \rightarrow \frac{y-6}{x-4} = \frac{2-6}{1-4} \rightarrow$$
$$\rightarrow 3 \cdot (y-6) = -4 \cdot (x-4)$$

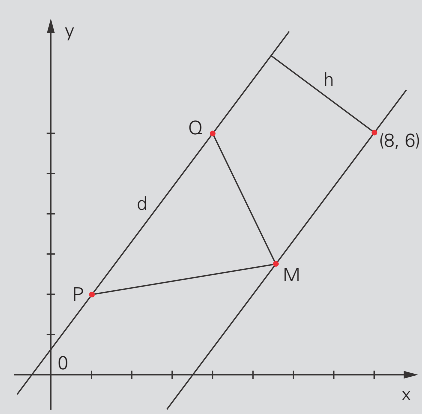
$r: 4x - 3y = 2$

Assim, para calcular a área do triângulo formado pelos pontos PQM, é preciso saber a distância da base do triângulo, ou seja, d = 5, e a altura h do triângulo. Nesse caso, a altura h será igual à distância perpendicular entre um ponto qualquer da reta r_1 e o ponto dado (8, 6). Logo:

$$h = \left| \frac{4 \cdot 8 - 3 \cdot 6 + 2}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} \right| = \frac{16}{5}$$

Assim, a área do triângulo PQM será:

$$A_\Delta = \frac{d \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot \frac{16}{5}}{2} = \frac{16}{2} \rightarrow A_\Delta = 8 \text{ u.a.}$$



16. D

Determinamos o ponto de interseção das retas resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = ax \\ y = -x + b \end{cases} \rightarrow ax = -x + b$$

Considerando que $x < 0$ e $y < 0$, podemos escrever:

$$\frac{y}{x} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{a \cdot b}{a+1}}{\frac{b}{a+1}} > 0 \quad \rightarrow \quad a > 0$$

Se $a > 0$ e $x = \frac{b}{a+1} < 0$ concluímos que $b < 0$.

Portanto, a opção correta é $a > 0$ e $b < 0$.

17. a) Se a abscissa do ponto P é igual a 1, $f(1) = \frac{1}{1} = 1$.

Logo, P terá coordenadas (1, 1).

Se $a = 2$, então pela função $f(a) = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$.

Logo, Q terá coordenadas $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Assim, a área do quadrilátero T será:

$$A_T = \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)}{2} \cdot (2-1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \rightarrow A_T = \frac{5}{4}$$

Calculando o quadrado da distância entre P e Q, temos:

$$d_{PQ} = \sqrt{(2-1)^2 + \left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

Portanto, $(d_{PQ})^2 = \frac{5}{4}$.

b) Sendo A o ponto de interseção entre a reta r e a função f(x).

Para a coordenada y do ponto A igual a $\frac{a}{2}$, a coordenada x será $\frac{2}{a}$.

Logo, $A = \left(\frac{2}{a}, \frac{a}{2}\right)$.

$P = (1, 1)$ e $Q = \left(a, \frac{1}{a}\right)$. Assim, o coeficiente angular da reta s que passa pelos pontos P e Q será:

$$m_s = \frac{\frac{1}{a}-1}{a-1} = -\frac{1}{a}$$

Logo:

$$m_r \cdot m_s = -1 \rightarrow m_r = -\frac{1}{-\frac{1}{a}} \rightarrow m_r = a$$

Assim, a equação da reta r pode ser escrita como:

r: $y - 0 = a \cdot (x - 0)$

r: $y = ax$

Como $A = \left(\frac{2}{a}, \frac{a}{2}\right)$ e pertence à reta r, temos:

$$y = ax \rightarrow \frac{a}{2} = a \cdot \frac{2}{a}$$

Portanto, $a = 4$.

Estudo para o Enem

18. C

Apenas na alternativa C a região do plano é definida por:

$x \geq 0,9$, $y \geq 0,8$ e $x + y \geq 2 \leftrightarrow y \geq -x + 2$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

19. B

Apenas a alternativa B apresenta dois pontos que pertencem à reta.

Calculando a distância entre cada um dos pontos ao ponto T, sabemos que a única opção que tem os dois pontos pertencentes à reta é a [B].

Calculando a distância de cada um desses pontos ao ponto T, obtemos 200 m:

$$d' = \sqrt{(160-0)^2 + (115+(-5))^2} = \sqrt{160^2 + 120^2} =$$
$$= \sqrt{25\,600 + 14\,400} = \sqrt{40\,000} = 200 \text{ m}$$
$$d'' = \sqrt{(320-160)^2 + (235-115)^2} = \sqrt{160^2 + 120^2} =$$
$$= \sqrt{25\,600 + 14\,400} = \sqrt{40\,000} = 200 \text{ m}$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. E

A equação da reta que passa pelos pontos (0, 0) e (4, 9) é:

$$y = \frac{9}{4}x \leftrightarrow 9x - 4y = 0$$

Já a equação da reta que passa pelos pontos (0, 0) e (8, 3) é:

$$y = \frac{3}{8}x \leftrightarrow 3x - 8y = 0$$

Portanto, a região S é limitada pelas seguintes desigualdades:

$9x - 4y \geq 0$, $3x - 8y \leq 0$, $x \leq 8$ e $y \leq 9$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

26 EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA - EQUAÇÃO REDUZIDA E EQUAÇÃO GERAL

Comentários sobre o módulo

Neste módulo iniciamos os estudos das circunferências em Geometria analítica. Demonstramos a equação reduzida e geral da circunferência e trabalhamos exercícios diversos que envolvem a equação reduzida e geral com outros conceitos já vistos em módulos anteriores.

Exercícios propostos

7. A

Apenas o ponto da alternativa A, quando tem suas coordenadas substituídas na equação da circunferência, faz a sentença ser verdadeira:

$$\beta : (5-3)^2 + (6-6)^2 = 4$$

8. A

A distância de A até B corresponde ao diâmetro da circunferência. Logo:

$$d_{AB} = \sqrt{[3-(-1)]^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

raio: $r = \dfrac{\sqrt{80}}{2}$

Dessa forma, o centro é obtido pela metade da soma das entradas das coordenadas:

$$C = \left(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-1+3}{2};\ \frac{3-5}{2}\right) = (1;\ -1)$$

Empregando a equação das circunferências ao ponto do centro, temos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + [y-(-1)]^2 = \left(\frac{\sqrt{80}}{2}\right)^2$$

Logo, a equação da circunferência é dada por

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20.$$

9. A

Sendo A e B, respectivamente, os centros de λ_1 e λ_2, temos:

$$A = (-2, -1) \text{ e } B = (4, 3)$$

Calculando o determinante, obtemos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & 3 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = -6 + 10 + 5 + 4 = 13$$

Assim, a área do triângulo ABP é obtida por:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |13| = \frac{1}{2} \cdot 13 = \frac{13}{2}$$

Portanto, $A_\Delta = \dfrac{13}{2}$.

10. a) Calculando o determinante, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 - 12 = -28$$

O resultado da área é obtido por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |-28| = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14$$

Logo, a área do triângulo é 14 cm².

b) Sendo C = (a, b) o centro do prato. Contando que as distâncias dos pontos dados ao centro do prato são idênticas, temos:

$$(0-a)^2 + (0-b)^2 = (-4-a)^2 + (2-b)^2 =$$
$$= (6-a)^2 + (4-b)^2$$

Logo,

$$\begin{cases} 4a - 2b = -10 \\ 3a + 2b = 13 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} 4a - 2b = -10 \\ 3a + 2b = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{7} \\ b = \dfrac{41}{7} \end{cases}$$

Sendo assim, $C = \left(\dfrac{3}{7}, \dfrac{41}{7}\right)$.

11. B

Estabelecendo o centro C da circunferência fornecida e o raio, obtemos:

d = 4; f = 10; g = 25

$$a = -\frac{d}{2} \rightarrow a = -\frac{4}{2} \rightarrow a = -2$$

$$b = -\frac{f}{2} \rightarrow b = -\frac{10}{2} \rightarrow b = -5$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - g} \rightarrow r = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 - 25} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \sqrt{4} \rightarrow r = 2$$

Logo, C(– 2, –5) e r = 2.

O ponto P simétrico do ponto (–1, 1) em relação ao eixo x é P(–1, –1).

Portanto, o raio R da circunferência solicitada será a distância entre os pontos P e C. Temos, então:

$$R^2 = [-1-(-2)]^2 + [-1-(-5)]^2 = 17$$

Portanto, a equação da circunferência solicitada será obtida por:

$$(x+2)^2 + (y+5)^2 = 17$$

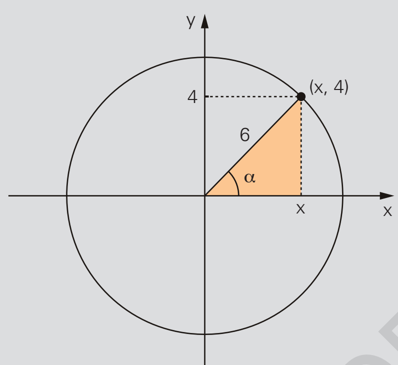
Desenvolvendo-a, obtemos:

$$x^2+y^2 2+4x+10y+29-17=0$$

$$x^2+y^2+4x+10y+12=0$$

12. E

De acordo com o enunciado, temos a seguinte circunferência:



Executando y = 4, obtemos a seguinte equação:

$$x^2+4^2 = 36 \rightarrow x^2 = 20 \rightarrow x = \pm 2\sqrt{5}$$

Estando P no primeiro quadrante, temos:

$$x = 2\sqrt{5}$$

Logo:

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ e } \cos(180° - \alpha) =$$

$$= -\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

13. E

Temos:

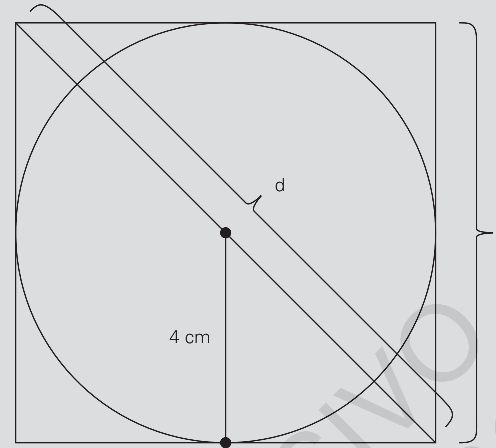
$$x^2+y^2-6x+2y = 6 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2-6x+9+y^2+2y+1 = 6+1+9 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$$

Logo: C (3, – 1) e $r = \sqrt{16} = 4$.

Observando o quadrado a seguir, circunscrito na circunferência de raio 4 cm, temos:



$$l = 2 \cdot 4 = 8 \rightarrow l = 8 \text{ cm}$$

A diagonal d do quadrado é obtida por:

$$d = a \cdot \sqrt{2} \rightarrow d = 8\sqrt{2}$$

Logo, a medida da diagonal desse quadrado é $8\sqrt{2}$.

14. D

A equação reduzida de C é:

$$x^2+y^2+6x-2y = -6 \leftrightarrow (x+3)^2 - 9 +$$

$$+ (y-1)^2 - 1 = -6 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 - 1 = -6$$

Em consequência, a equação de C é:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 22 \rightarrow x^2+y^2-6x+2y = -6$$

15. a) Sendo P = (a, b), com a > 0. Assim a equação da órbita é:

$$\lambda: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 5$$

Portanto, como A = (0, 1) e B = (1, 2) pertencem a λ, temos:

$$\begin{cases} a^2+(1-b)^2 = 5 \\ (1-a)^2+(2-b)^2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2+b^2-2b+1 = 5 \\ a^2+b^2-2a-4b+5 = 5 \end{cases}$$

Consequentemente, a = 2 – b.

Logo:

$$(2-b)^2 + b^2 - 2b + 1 = 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow b^2 - 3b = 0 \rightarrow b = 0$$

Em decorrência, a resposta será $(x-2)^2 + y^2 = 5$.

b) Calculando o determinante, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2-1-4 = -3$$

O resultado da área é obtido por:

$$A\Delta_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |-3| = \frac{3}{2}\,(\text{u.a.})^2$$

Como 1 u.a. = $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, obtemos:

$$A = \frac{3}{2} \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11})^2 \rightarrow A = 3{,}375 \cdot 10^{22}\ m^2$$

Logo, a área é igual a $3{,}375 \cdot 10^{22}$ m².

16. D

Compreendendo que (4, 0) faz parte da circunferência, temos:

$$4^2 + 0^2 + m \cdot 0 + n = 0 \rightarrow n = -16$$

Considerando o ponto (0, 8), temos:

$$0^2 + 8^2\ m \cdot 8 - 16 = 0 \rightarrow m = 6$$

Sendo assim, a resposta é $6^2 + (-16) = 36 - 16 = 20$.

17. A

Concluindo os quadrados, temos:

$$x^2 + 2x + y^2 + my = n \rightarrow (x+1)^2 + \left(y + \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + n + 1$$

Portanto, o centro $C = \left(-1, -\frac{m}{2}\right)$ pertence à reta $y = -x + 1$.

No entanto, $-\frac{m}{2} = -(-1) + 1 \rightarrow m = -4$.

Consequentemente, como a reta intersecta a circunferência em (–3, 4), obtemos:

$$n = x^2 + 2x + y^2 + my \rightarrow n = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 42 + + (-4) \cdot 4 \rightarrow n = 3.$$

Estudo para o Enem

18. B

Adotando-se as coordenadas de A e B com A = (0, 0) e B = (30, 0), e P = (x, y) sendo a posição de um bombeiro, temos:

$$d_{A,P} = 2 \cdot d_{B,P} \leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x - 30)^2 + y^2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x^2 + y^2 = 4(x - 30)^2 + 4y^2 \leftrightarrow (x - 40)^2 + y^2 = 20^2$$

Logo, um bombeiro aleatório tem de estar sobre uma circunferência de centro em (40, 0) e raio 20 m.

A maior distância entre dois bombeiros acontece na situação em que ambos se encontram em extremidades distintas do mesmo diâmetro. Sendo assim, 40 m.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. D

A trajetória especificada pelo assento do balanço é parte da circunferência:

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

Assim, sabendo que $y < 0$, temos:

$$x^2 + y^2 = 2^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4 \rightarrow y = -\sqrt{4 - x^2}.$$

Logo, $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$, com $-2 < x < 2$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. D

Analisando o gráfico, as coordenadas dos estabelecimentos são:

A(5, 4)

B(–3, 1)

C(4, 2)

D(–4, –3)

Logo, para determinar se o estabelecimento está dentro da área de cobertura do sinal, basta trocarmos suas coordenadas na equação:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leq 0$$

A: $5^2 + 42 - 2 \cdot 5 - 4 \cdot 4 - 31 \leq 0 \rightarrow -16 \leq 0$
(Adequado)

B: $(-3)^2 + 12 - 2 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 - 31 \leq 0 \rightarrow -19 \leq 0$
(Adequado)

C: $4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 31 \leq 0 \rightarrow -27 \leq 0$
(Adequado)

D: $(-4)^2 + (-3)^2 - 2 \cdot (-4) - 4 \cdot (-3) - 31 \leq 0 \rightarrow 14 \leq 0$
(Falso. Inadequado)

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

27 CIRCUNFERÊNCIA - POSIÇÕES RELATIVAS E CÔNICAS - ELIPSE

Comentários sobre o módulo

Neste módulo continuamos os estudos sobre as circunferências em Geometria analítica. Vimos as classificações de um ponto em relação à circunferência (interno, externo ou pertencente à circunferência), as classificações de uma reta em relação à circunferência (tangente, secante ou externa) e, por fim, as denominações de uma circunferência em relação a outra (externa, interna, secante ou concêntrica).

Além disso, iniciamos os estudos das cônicas, sendo a elipse a primeira das três a ser trabalhada. Abordamos os elementos constituintes de uma elipse e apresentamos a demonstração matemática da equação dela. Analisamos também a relação fundamental e o significado da excentricidade de uma elipse.

Exercícios propostos

7. A

λ_1: $a = 0$; $b = 0$; $r_1 = 2$

λ_2: $a = -\frac{d}{2} = -\frac{-2}{2} = 1$; $b = -\frac{2}{2} = -1$; $g = -12$

$r_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - g} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 - (-12)} = \sqrt{14} \cong 3,74$

$|r_1 - r_2| \cong |2 - 3,74| \cong 1,74$

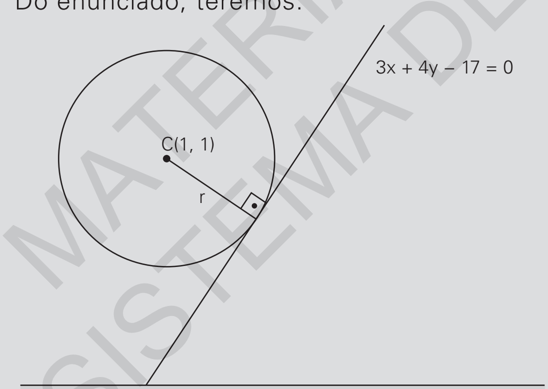
$d = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2} \cong 1,41$

Como:

$d < |r_1 - r_2| \cong 1,74$, a circunferência menor é interna à circunferência maior.

8. B

Do enunciado, teremos:



$$r = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 17|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \to r = \frac{|-10|}{\sqrt{25}} \to r = \frac{10}{5} \to r = 2$$

Logo, a equação da circunferência será:

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 4$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

9. Inicialmente é necessário determinar os eixos. O eixo maior (2a) está localizado no eixo das abscissas; o menor, no eixo das ordenadas (2b). Identificando os elementos, temos:

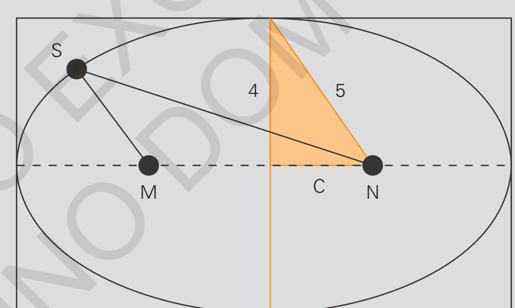
$$\begin{cases} 2a = 4 - (-4) = 8 \to a = 4 \\ 2b = 2 - (-2) = 4 \to b = 2 \end{cases}$$

Substituindo os valores de a e b na equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

10. D

A figura a seguir representa uma elipse com semieixo maior medindo 5 m e semieixo menor medindo 4 m.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo assinalado, temos:

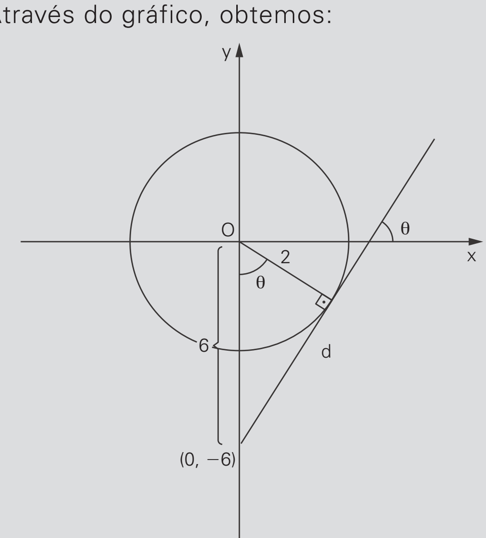
$c^2 + 4^2 = 5^2 \to c^2 = 25 - 16 \to c^2 = 9 \to c = 3$

Como MN é o dobro de c, concluímos que:

MN = 2 c = → MN = 2 3 → MN = 6 m

11. B

Através do gráfico, obtemos:



$d^2 + 2^2 = 6^2 \rightarrow d = \sqrt{32} \rightarrow d = 4\sqrt{2}$

$\text{tg}\ \theta = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{tg}\ \theta = 2\sqrt{2}$ (inclinação da reta)

Sendo assim, a equação da reta tangente à circunferência será:

$y - (-6) = 2\sqrt{2} \cdot (x - 0)$

Portanto, $y = 2\sqrt{2} \cdot x - 6$.

12. a) $O(0, 0) \rightarrow x^2 + y^2 = 2^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$

Para $x = 1$:

$1^2 + y^2 = 4 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

Para $x = -1$:

$(-1)^2 + y^2 = 4 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

Logo, os pontos A, B, C e D possuem as seguintes coordenadas:

$A(1, \sqrt{3})$; $B(1, -\sqrt{3})$; $C(-1, \sqrt{3})$; $D(-1, -\sqrt{3})$

b) Calculando:

Área do setor AOD = Área do setor COB =

$= \pi \cdot 2^2 \cdot \dfrac{60}{360} = \dfrac{2\pi}{3}$

Área do triângulo AOB = área do triângulo DOC =

$= \dfrac{1 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\text{Área}_{\text{total}} = 2 \cdot \dfrac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3} = \dfrac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

13. B

Sendo a curva λ uma elipse com eixo maior paralelo ao eixo das abscissas, com o centro em O (1, –2) e semieixos de dimensões a = 5 e b = 3, a distância do centro aos focos será:

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$

Em decorrência, temos:

$F_1 = (1 - 4, -2) = (-3, -2)$ e $F_2 = (1 + 4, -2) = (5, -2)$

A. Verdadeira, pois $d_{P,F_1} + d_{P,F_2} = 2 \cdot a = 2 \cdot 5 = 10$.

B. Falsa, pois, fechando os quadrados, temos:

$x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0 \leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$

Assim, como essa curva é uma circunferência centrada em (–3, 2), constatamos que a afirmação é falsa.

C. Verdadeira, pois a distância de F_2 ao centro de $x^2 + y^2 = 25$ é:

$\sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$ (esta é maior que o raio da circunferência)

D. Verdadeira, pois o ponto de abscissa máxima de λ é:

$A_2 = (1 + 5, -2) = (6, -2)$ e $-2 = 6 - 8$

14. C

Fechando os quadrados das duas elipses descritas, teremos:

$25x^2 + 16y^2 + 150x + 256y - 351 = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 25(x+3)^2 + 16(y+8)^2 = 1600 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \dfrac{(x+3)^2}{64} + \dfrac{(y+8)^2}{100} = 1$

$16x^2 + 25y^2 - 96x - 200y + 144 = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 16(x+3)^2 + 25(y-4)^2 = 400 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \dfrac{(x+3)^2}{25} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$

Contudo, concluímos que:

A. Falsa. Os centros das elipses vão ser os pontos (–3, –8) e (–3, 4).

B. Falsa. Analisando a elipse $\dfrac{(x+3)^2}{64} + \dfrac{(y+8)^2}{100} = 1$, observamos que a = 10 e b = 8. Assim, pela relação fundamental, c = 6. Desse modo, 2c = 12.

Já a elipse terá a′ = 5 e b′ = 4. Portanto, c′ = 3. Finalizando, temos 2c′ = 6.

C. Verdadeira, pois $e = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = e'$.

D. Falsa, pois apenas compreendendo que o eixo maior da elipse $\dfrac{(x+3)^2}{64} + \dfrac{(y+8)^2}{100} = 1$ é paralelo ao eixo das ordenadas.

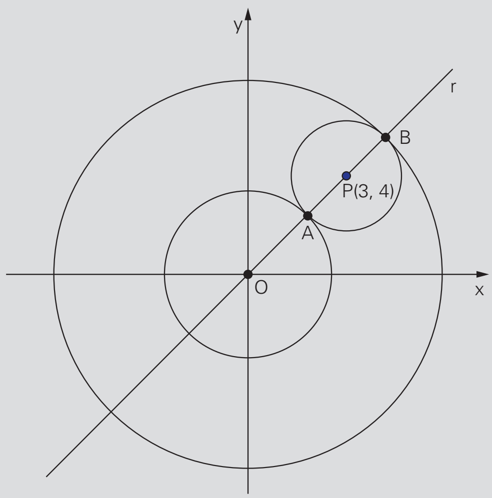
E. Falsa. O eixo maior da elipse $\dfrac{(x+3)^2}{64} + \dfrac{(y+8)^2}{100} = 1$ mede 2a′ = 20, ao passo que o eixo menor da elipse mede 2b′ = 8

15. a) Sabendo o raio e o centro da circunferência, temos:

C(3, 4); r = 2.

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2 \rightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$

b) O menor valor de ρ será obtido pelo raio $\overline{OA}$ da menor circunferência centrada no início, e o maior valor de ρ será fornecido pelo raio $\overline{OB}$ da circunferência maior centrada no início.



$OA = OP - 2 = \sqrt{3^2 + 4^2} - 2 = 3$

$OB = OP + 2 = 5 + 2 = 7$

Logo,

$3 \leq p \leq 7.$

16. C

Isolando x^2 e reescrevendo as equações, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 = \dfrac{y+2}{4} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (y+2)(4y-7) = 0 \\ x^2 = \dfrac{y+2}{4} \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} (y+2)(4y-7) = 0 \\ x^2 = \dfrac{y+2}{4} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \text{ ou } y = \dfrac{7}{4} \\ x^2 = \dfrac{y+2}{4} \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ e } y = -2 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4} \text{ e } y = \dfrac{7}{4} \\ x = \dfrac{\sqrt{15}}{4} \text{ e } y = \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Portanto, a resposta será $\dfrac{\sqrt{15}}{4} - \left(-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

17. C

Se as circunferências que tangenciam os dois eixos coordenados se encontram no primeiro quadrante, as coordenadas de seus centros são idênticas ao comprimento de seu raio. Logo, podemos equacionar:

$\lambda_1 \rightarrow r_1 = 1;\ C_1(1, 1)$

$\lambda_2 \rightarrow r_2 = 2;\ C_2(2, 2)$

$$\begin{cases} \lambda_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ \lambda_2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Subtraindo as equações de λ_1 e λ_2, teremos a equação de uma reta r que corresponde àquela que passa pelos pontos de encontro das circunferências. Como os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) fazem parte dessa reta, teremos:

$\lambda_1 - \lambda_2 = r \rightarrow r : 2x + 2y - 3 = 0 \rightarrow x + y = \dfrac{3}{2}$

$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \dfrac{3}{2}$

$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{18}{4} = \dfrac{9}{2}$

Estudo para o Enem

18. C

Sendo:

Perímetro = 300 m

Área = 5 000 m²

Temos:

$2(x + y) = 300 \rightarrow x + y = 150$

$x \cdot y = 5\,000$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$x = 50$ e $y = 100$

ou

$x = 100$ e $y = 50$

No entanto, sendo $x > y$. Logo, $x = 100$ e $y = 50$.

Assim, utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 + (OF_2)^2 \rightarrow 50^2 = 25^2 + (OF_2)^2 \rightarrow$

$\rightarrow OF_2 = \sqrt{25^2 \cdot 3} = 25\sqrt{3}$

Logo, seu resultado será $2OF_2 = 2 \cdot 25\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

19. B

$x^2 + y^2 + dx + fy + g = 0$

$M(-3,3) \rightarrow 9 + 9 - 3d + 3f + g = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -3d + 3f + g = -18$

$N(2, 8) \rightarrow 4 + 64 + 2d + 8f + g = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2d + 8f + g = -68$

$O(6, 0) \rightarrow 36 + d + g = 0 \rightarrow g = -36 - 6d$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} -9d+3f=18 \\ -4d+8f=-32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 72d-24f=-144 \\ -12d+24f=-96 \end{cases} \rightarrow 60d = -240 \rightarrow d = -4$$

$\rightarrow g = -12 \rightarrow f = -6$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

$$a = -\frac{d}{2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$b = -\frac{f}{2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

C (2, 3)

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2 - (-12)}$$

Portanto, r = 5.

Assim, o perímetro procurado será:

Perímetro $= 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$ cm.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. C

Verificando que $a > b$, constatamos que o eixo maior da elipse está sobre o eixo x.

Como a excentricidade da elipse é igual 0,96, temos:

$$0{,}96 = \frac{c}{a} \leftrightarrow c = 0{,}96 \cdot a.$$

c = distância focal

A distância mínima desse cometa ao Sol corresponde a 0,58 u.a.

Logo:

$a - c = 0{,}58.$

$a - 0{,}96a = 0{,}58 \rightarrow 0{,}04\,a = 0{,}58$ u.a. $\rightarrow$
$\rightarrow a = 14{,}5$ u.a.

Portanto, a distância máxima do cometa ao Sol é obtida por:

$a + c = 1{,}96\,a = 1{,}96 \cdot 14{,}5 \cdot 150 \cdot 10^6$ km $=$
$= 4\,263 \cdot 10^6$ km

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

28 CÔNICAS - HIPÉRBOLE E PARÁBOLA

Comentários sobre o módulo

Neste módulo continuamos os estudos das cônicas, trabalhando com hipérbole e parábola. Vimos os elementos constituintes de uma hipérbole e de uma parábola. Além disso, foi apresentada a equação da hipérbole e da parábola, sendo abordados a relação fundamental e o significado da excentricidade de uma hipérbole e o significado de cada elemento de uma parábola.

Exercícios propostos

7. D

Completando os quadrados da equação a seguir, obtemos:

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

Logo, trata-se de uma circunferência com centro (1, 2).

8. C

Analisando cada alternativa, temos:

I. Verdadeira, pois $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Considerando os focos (c, 0) e (− c, 0), vamos ter:

$a = 4$ e $c = 3$

$b^2+3^2=42^2 \rightarrow b^2=16-9=7 \rightarrow b=\sqrt{7}$

Sendo assim, a equação da elipse será:

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

II. Verdadeira, pois $c=10 \rightarrow \frac{5}{3}=\frac{10}{a} \rightarrow a=6$

$10^2 = 6^2 + b^2 \rightarrow b = 8$

Logo, a equação da hipérbole será obtida por:

$\frac{x^2}{6^2}-\frac{y^2}{8^2}=1 \rightarrow 16x^2-9y^2=576$

III. Falsa, pois $8x = -y^2 + 6y - 9$

$x=-\frac{(y-3)^2}{8}$

Assim, o vértice corresponde ao ponto (0, 3).

9. E

Sendo t a reta tangente à parábola de equação $x = 3y^2$.

t: $y = mx + n$, sendo o ponto A(−3, 0) parte da reta t. Entendemos que:

$n = 3m$ é a equação da reta t, que passa a ser representada por $y = mx + 3m$

Trocando $y = mx + 3m$ na equação da parábola, teremos:

$x = 3 \cdot (mx + 3m)^2$

$x = 3 \cdot (m^2x^2 + 6m^2x + 9m^2)$

$x = 3m^2x^2 + 18m^2 + 27m^2$

$3m^2x^2 + 18m^2x - x + 27m^2 = 0$

$3m^2x^2 + (18m^2 - 1)x + 27m^2 = 0$

Para que a reta seja tangente à parábola, o discriminante (Δ) deve ser igual a zero.

$\Delta = 0$

$(18m^2-1)^2-4\cdot(3m^2)\cdot(27m^2)=0$

$324m^4-36m^2+1-324m^4=0$

$-36m^2+1=0 \rightarrow m=\frac{1}{6}$ ou $m=-\frac{1}{6}.$

Se $m=\frac{1}{6}$, teremos: $x-6y+3=0$

Se $m=-\frac{1}{6}$, teremos: $x+6y+3=0$

Com $m=-\frac{1}{6}$, teremos:

$x^2-6x-9=0, x=3$ e $y=-1$

Logo, P(3, −1).

10. E

Completando os quadrados, obtemos

$9x^2 - y^2 = 36x + 8y - 11$

$9x^2 - 36x + 36 - y^2 - 8y - 16 = +36 - 16 - 11$

$9(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 8y + 16) = 9$

$9(x - 2)^2 - (y + 4)^2 = 9$

$\frac{9(x-2)^2}{9}-\frac{(y+4)^2}{9}=1$

$\frac{(x-2)^2}{1}-\frac{(y+4)^2}{3}=1$

Logo, trata-se de uma hipérbole.

11. a) Sim, pois, completando os quadrados, obtemos:

$x^2 + ay^2 + 2x - 2ay = 0$

$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1 + 1 \rightarrow$

$\rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

Logo, para a = 1, a equação representa uma circunferência.

b) Para a = 0, temos:

$x^2 + ay^2 + 2x - 2ay = 0$

$x^2 + 0 \cdot y^2 + 2x - 2 \cdot 0 \cdot y = 0 \rightarrow x^2 + 2x = 0$ ($x = 0$ e $x = -2$), assim a equação representa duas retas.

c) Para a = 3, temos:

$x^2 + ay^2 + 2x - 2ay = 0$

$x^2 + 3y^2 + 2x - 2 \cdot 3y = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 3y^2 - 6y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{\frac{4}{3}} = 1$ representa uma elipse, não uma hipérbole.

d) Para a = –2, temos:

$\frac{(y-1)^2}{\frac{1}{2}} - \frac{(x+1)^2}{1} = 1$, logo, uma hipérbole.

e) Para a = –1, temos:

$x^2 + ay^2 + 2x - 2ay = 0$

$x^2 + (-1y^2) + 2x - 2(-1y) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 2x - y^2 + 2y = 0$

Completando os quadrados, obtemos:

$x^2 + 2x + 1 - y^2 + 2y - 1 = 1 - 1 \rightarrow$

$\rightarrow (x + 1)^2 - (y - 1)^2 = 0$

Logo, duas retas ($y = -x$ e $y = x + 2$).

12. B

I. Verdadeira, pois, resolvendo o sistema, obtemos:

$\begin{cases} 9x^2 + 4x = 36 \\ x - 4y = 4 \end{cases} \rightarrow (-2, 0)$ e $(2, 0)$

$x^2 - 4y = 4 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{4y^2}{4} = \frac{4}{4} \rightarrow \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = 2.$

Logo, os pontos são $A_1(-2, 0)$ e $A_2(2, 0)$.

II. Falsa

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow a^2 = 9$ e $b^2 = 4 \rightarrow A_1A_2$ está contido no seguimento Oy e B_1B_2 está contido no seguimento Ox.

$\frac{x^2}{4} - y = 1 \rightarrow a^2 = 4$ e $b^2 = 1 \rightarrow A'_1A'_2$ está contido no seguimento Ox.

Portanto, A_1A_2 e $A'_1A'_2$ são perpendiculares entre si.

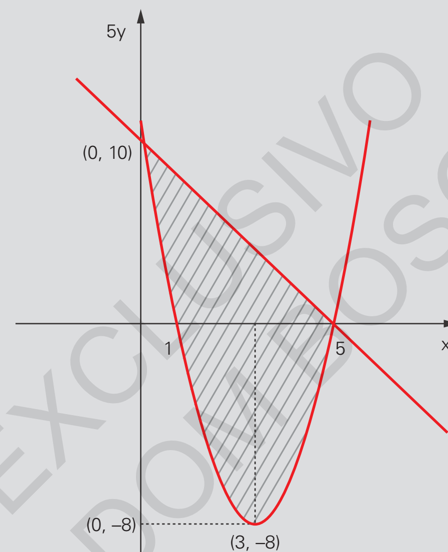
13. A

Vamos ter duas regiões para considerar.

$5y \geq 2x^2 - 12x + 10$ (parábola)

$5y \leq 10 - 2x$ (reta)

A região que atende as duas inequações ao mesmo tempo está demonstrada no gráfico a seguir.



Sendo assim, $-8 \leq 5x \leq 10 \rightarrow -1{,}6 \leq y \leq 2.$

Já o resultado do produto entre os valores máximo e mínimo de y será: $(-1{,}6) \cdot (2) = -3{,}2.$

14. B

Resolvendo um sistema com as equações da parábola e da circunferência, obtemos

$\begin{cases} y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ x^2 - 4x + y^2 - 4y = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \left\{ x^2 - 4x + \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{x^2}{4}\right) \right. \rightarrow x^2 - 64x = 0$

Com a equação anterior, por fatoração, temos:

$x^4 - 64x = 0 \rightarrow x \cdot (x^3 - 64) = 0$

Logo, suas soluções reais são x = 0 e x = 4.

Sendo assim, seus resultados reais serão: x = 0 ou x = 4.

$x^2 = 0 \rightarrow y = \frac{0^2}{4} \rightarrow y = 0$

$X^2 = 4 \rightarrow y = \frac{4^2}{4} \rightarrow y = 4$

Sendo assim, o ponto P será P(4, 4).

Encontrando, agora, o coeficiente angular da reta PC, teremos:

$$m_{PC} = \frac{4-2}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

Como a reta s é perpendicular a PC, concluímos que $m_s = -1$.

Portanto, a equação da reta s será obtida por:

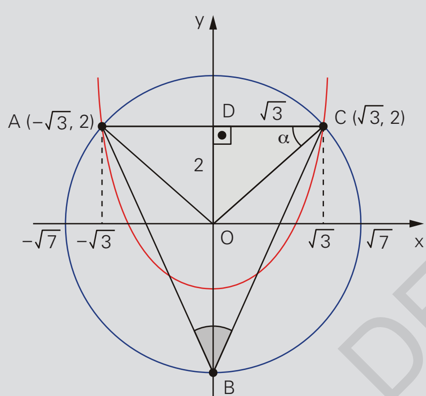
$$y - 4 = -1 \cdot (x - 4) \rightarrow y = -x + 8$$

15. Os pontos A e C são obtidos através da resolução do sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \text{ e } y = 2 \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{3} \text{ e } y = 2 \end{cases}$$

Logo, os pontos A e C são:

$A(\sqrt{3}, 2)$ e $C(-\sqrt{3}, 2)$, representados na figura a seguir.



Observando o triângulo CDO:

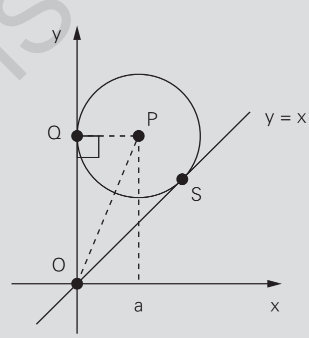
$$\text{tg } \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 49° \rightarrow C\hat{O}D = 41° \rightarrow$$

$A\hat{O}C = 82°$

$$A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{82°}{2} = 41° \text{ (ângulo inscrito)}$$

16. B

Observando a ilustração, em que $PQ = a$ e $OQ = b = a^2$:



Compreendendo que $y = x$ é bissetriz dos quadrantes ímpares e OP é bissetriz de $S\hat{O}Q$, teremos $P\hat{O}Q = 22°30'$. Ainda do triângulo OPQ, obtemos:

$$\text{tg } P\hat{O}Q = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{a^2}{a} = a \rightarrow a = \text{cotg } 22°30'.$$

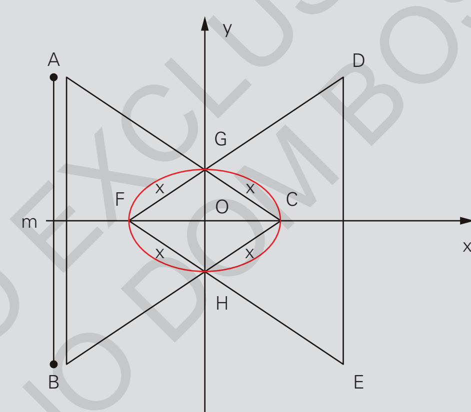
Desenvolvendo a cotangente do ângulo, obtemos:

$$\text{cotg } 22°30' = \sqrt{\frac{1 + \cos 45°}{1 - \cos 45°}} = \sqrt{2} + 1$$

Contudo, $a = \sqrt{2} + 1$.

Assim, $b = a^2 = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$.

17. Conforme o gráfico, temos:



$$A_{\Delta GFH} + A_{POLIG \cdot ABHFG} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$$

Logo:

$$\frac{2x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{4x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow 6x^2\sqrt{3} = m^2\sqrt{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{m}{\sqrt{6}}$$

$$\text{Logo, } GO = \frac{m}{2\sqrt{6}} \text{ e } FO = \frac{m}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{2\sqrt{2}}$$

Assim, temos:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{m}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{m}{2\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

Desenvolvendo a equação, obtemos:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{m}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{m}{2\sqrt{6}}\right)^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{m^2}{8}} + \frac{y^2}{\frac{m^2}{24}} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{8x^2}{m^2} + \frac{24y^2}{m^2} = 1 \rightarrow 8x^2 + 24y^2 = m^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8x^2 + 24y^2 - m^2 = 0$$

Estudo para o Enem

18. E

Temos:

Circunferência: $x^2 + y^2 = 9$, com centro no ponto (0, 0) e raio 3.

Parábola: $y = -x^2 - 1$, com x mudando de -1 a 1, concavidade definida para baixo e vértice no ponto (0, -1).

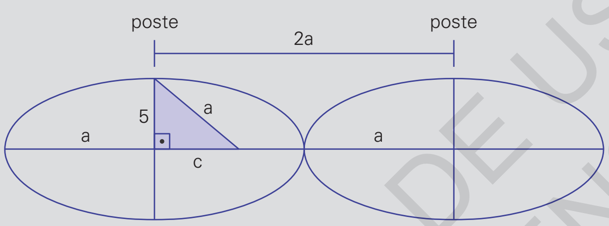
Sendo assim, as funções correspondem à alternativa E.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. B

Observando a figura do enunciado, temos:



Sendo e = 0,943, temos:

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow 0{,}943 = \frac{c}{a} \rightarrow c = 0{,}943 \cdot a$$

Substituindo o valor de c e usando o teorema de Pitágoras, obteremos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 5^2 + c^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow a^2 = 25 + (0{,}943a)^2 \rightarrow a^2 = 25 + 0{,}889a^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}111a^2 = 25 \rightarrow \sqrt{0{,}111}a = \sqrt{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}333a = 5 \rightarrow \frac{1}{3}a = 5 \rightarrow a = 15.$$

A distância será $2 \cdot a$, logo:

$2 \cdot a = 2 \cdot 15 = 30$ m.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

20. E

A alternativa E demonstra a equação canônica da elipse e da hipérbole, respectivamente.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 3

9 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Comentário sobre o módulo

Neste módulo abordamos os conceitos de análise combinatória. No primeiro momento, estudamos o número fatorial e sua forma prática de simplificação. Depois apresentamos o princípio fundamental da contagem (princípio multiplicativo).

Para ir além

O trabalho "Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática" é um bom material para abordar o ensino da análise combinatória de forma bem completa. Disponível em:

<https://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/livreto_Adriana_Luzie.pdf>

Acesso em: 15 nov. 2018.

O artigo "Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica" trata das origens da análise combinatória. Disponível em:

<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>

Acesso em: 15 nov. 2018.

Exercícios propostos

7. D

Pelo princípio multiplicativo, o resultado será $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

8. B

Uma vez que o algarismo das unidades deve ser par e diferente de zero, existem 4 formas de selecioná-lo. Sendo assim, como há 10 possibilidades para o algarismo das dezenas e 10 formas de selecionar o algarismo das centenas, pelo princípio multiplicativo, obtemos $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$.

9. A

Pelo enunciado, entende-se que as cores da listra e da lateral precisam ser diferentes para que a listra seja visível. Assim, a listra só precisa ser de uma cor específica, diferente da cor da lateral. Logo, as alternativas são: 5 possibilidades de cor na tampa; 5 possibilidades de cor na lateral e 4 possibilidades de cor na listra. Pelo princípio fundamental da contagem, obtemos $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ alternativas.

10. $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$

11. C

Haverá 5 formas para escolher a cor da letra T e 4 modos de selecionar a cor das letras A e E. Também existem 4 jeitos de escolher a cor das letras F e C. Pelo princípio multiplicativo, temos $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$.

12. D

Primeiro, temos os números que são múltiplos de 4 e que têm o algarismo 0 na ordem das dezenas ou na das unidades. Esses números terminam em 04, 08, 20, 40, 60 e 80. Assim, como existem 8 escolhas possíveis para a ordem dos milhares e 7 possibilidades para a ordem das centenas, pelo princípio multiplicativo, temos $6 \cdot 8 \cdot 7 = 336$ números.

De outra forma, os números múltiplos de 4 e que não expressam o algarismo 0 na ordem das dezenas nem na ordem das unidades terminam em 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92 e 96. Desse modo, como há 7 escolhas possíveis para a ordem dos milhares e 7 possibilidades para a ordem das centenas, pelo princípio multiplicativo, temos $16 \cdot 7 \cdot 7 = 784$ números.

Em decorrência, pelo princípio aditivo, a resposta é $336 + 784 = 1\,120$.

13. A

Montante de placas executáveis no modelo em estudo: $26^4 \cdot 10^3$.

Montante de placas executáveis no modelo atual: $26^3 \cdot 10^4$.

Razão entre os dois valores: $\frac{24^4 \cdot 10^3}{26^3 \cdot 10^4} = 2{,}6$.

Sendo assim, o aumento será de $2{,}6 - 1 = 1{,}6$ (160%). Ou seja, inferior ao dobro.

14. D

Do enunciado, antes da mudança, temos:

___ A ___ A ___ A ___ A ___

(A) indica um algarismo aleatório.

Há 5 possibilidades para se colocar a letra minúscula. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, $N = 5 \cdot 26 \cdot 10^4$.

Similarmente:

$M = 6 \cdot 26 \cdot 10^5$

Então:

$M = 6 \cdot 26 \cdot 10^5$

$$\frac{M}{N} = \frac{6 \cdot 26 \cdot 10^5}{5 \cdot 26 \cdot 10^4}$$

$$\frac{M}{N} = 12$$

$$M = 12 \cdot N$$

15. A

Sabendo-se que cada letra maiúscula é diferente da sua correspondente minúscula, há $2 \cdot 26 + 10 =$ $= 62$ opções para cada dígito da senha. Sendo assim, pelo princípio fundamental da contagem, existem 62^6 senhas elegíveis de 6 dígitos.

Igualmente, no sistema anterior existiam 10^6 senhas elegíveis de 6 dígitos.

Portanto, a razão solicitada é $\frac{62^6}{10^6}$.

16. a) Como Mônica tem 5 blusas e 4 calças distintas, o total de formas de escolher uma blusa e uma calça para sair é dado pelo princípio fundamental da contagem.

Seja x o total de formas, temos:

$x = 5 \cdot 4$

$x = 20$

b) Se Mônica:

- escolher a blusa branca, há 3 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa vermelha, há 4 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa amarela, há 4 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa preta, há 3 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa verde, há 4 opções para a seleção da calça.

Então, há $3 + 4 + 4 + 3 + 4 = 18$ formas de Mônica escolher suas roupas.

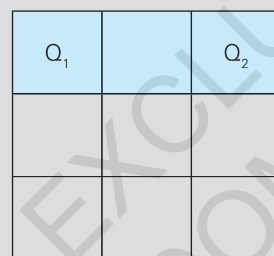
c) Se Mônica:

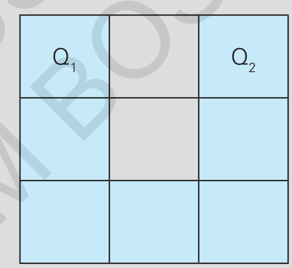
- escolher a blusa branca, há 2 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa vermelha, há 3 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa amarela, há 3 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa verde, há 3 opções para a seleção da calça;

Então, há $2 + 3 + 3 + 3 = 11$ formas de Mônica escolher suas roupas.

17. a) Ficando Q_1 e Q_2 preenchidos de azul, há $2 \cdot 2 =$ $= 4$ maneiras de colorir os outros dois quadrados do quadriculado. Assim, Q_1 e Q_2 só não estarão conectados quando os outros dois quadrados estiverem pintados de branco. Sendo assim, a resposta é $4 - 1 = 3$.

b) Pintando de branco o quadrado central, há apenas duas formas de conectar Q_1 e Q_2, conforme as figuras.

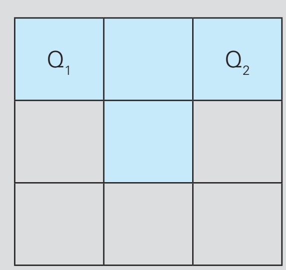




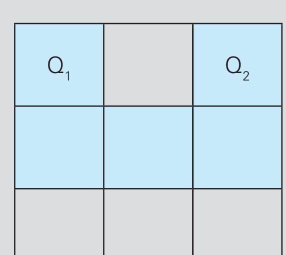
Na primeira, temos $2^5 = 32$ formas de pintar os 5 quadrados que sobram. Já na segunda, há apenas 1 forma de pintar o quadrado restante. Se pintarmos o quadrado entre Q_1 e Q_2 de azul, cairemos na figura da esquerda.

Então, a resposta é $32 + 1 = 33$.

c) Pintando de azul os quadrados apresentados, temos $2^5 = 32$ formas de pintar os 5 quadrados restantes.



Além do mais, pintando de azul os quadrados apresentados e de branco o quadrado entre Q_1 e Q_2, temos $2^3 = 8$ formas de pintar os 3 quadrados da última linha.



Desse modo, o resultado encontrado em (b) é $33 + 32 + 8 = 73$.

Estudo para o Enem

18. E

Pelo princípio multiplicativo, o resultado será $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 900 = 9 \cdot 10^7$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

19. C

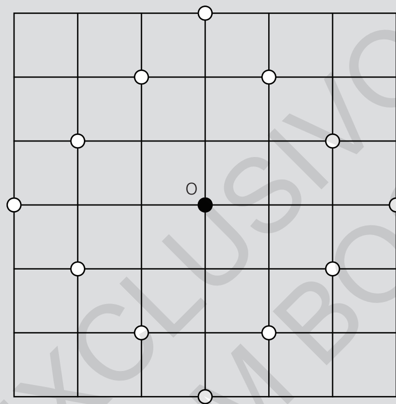
Como $26^3 \cdot 10^4$ é o número total de placas, e 26^3 é o número de placas em que os números são todos iguais a zero, podemos utilizar $26^3 \cdot 10^4 - 26^3 = 26^3 (10^4 - 1)$ placas.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

20. C

Avaliando a figura, em que estão as possíveis localizações do cliente, concluímos que a resposta é 12.



Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

10 PERMUTAÇÕES E ARRANJOS

Comentários sobre o módulo

Neste módulo continuamos o trabalho com os conceitos de análise combinatória. No primeiro momento, foram abordados a permutação simples e o estudo de anagramas. Depois nos aprofundamos na análise sobre permutação em casos com repetições de objetos, letras ou números.

Após o estudo de permutação simples e com repetição, estudamos o arranjo simples, demonstrando que a disposição das variáveis altera o resultado final.

Para ir além

O texto "Mas afinal para que serve o Código Morse?" desvenda os mistérios dessa ferramenta de comunicação. Disponível em:

<https://www.hipercultura.com/codigo-morse/>

Acesso em: 16 nov. 2018.

O artigo "Atividades experimentais de análise combinatória no ensino médio em uma escola estadual" mostra as diferentes maneiras de ensinar análise combinatória nessa fase escolar. Disponível em:

<http://www.enrede.ufscar.br/participantes_arquivos/E5_Vazquez_TA.pdf>

Acesso em: 16 nov. 2018.

Exercícios propostos

7. O resultado condiz com o número de métodos simples de 5 objetos preenchidos 3 a 3. Ou seja: $A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 60$.

8. D

Eles sentarão com as seguintes combinações:

- Nas primeiras duas fileiras: $2! = 2$.
- Nas do meio: $A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$.
- Nas duas últimas: $2! = 2$.

Portanto, o total é de $2 + 6 + 2 = 10$ possibilidades.

9. B

O número de anagramas da palavra CARNAVAL é calculado por: $P_8^3 = \frac{8!}{3!} = 6\,720$ anagramas.

Para cada anagrama, vamos levar 0,5 s.

O tempo total será $6\,720 \cdot 0{,}5 = 3\,360$ s.

Ou seja, pouco menos de 1 hora, o que equivale a 3 600 s.

Portanto, a resposta é menos de 1 hora.

10. D

O total de opções que eles terão para apontar seus armários será igual ao arranjo de 8 armários 2 a 2. Assim:

$$A_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56$$

11. Para a primeira parte, temos, de acordo com as restrições do exercício, que $n = 7$ algarismos e $p = 5$ espaços.

Logo: $A_{7,5} = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 2\,520$ números diferentes.

Para os números pares, o final deverá ser {2, 4, 6}.

Basta, então, calcularmos $A_{6,4} \cdot 3$.

Logo, teremos: $\frac{6!}{(6-4)!} \cdot 3 = \frac{720}{2} \cdot 3 = 1\,080$ números pares possíveis.

12. D

- Cuidando do paciente D pela manhã: $A_{3,2} \cdot A_{4,2} = 6 \cdot 12 = 72$.
- Cuidando do paciente D pela tarde: $A_{3,1} \cdot A_{4,3} = 3 \cdot 24 = 72$.

Portanto, a quantidade de maneiras diferentes de a secretária conseguir agendar esses pacientes é $72 + 72 = 144$.

13. C

A palavra CARAVELAS contém 5 consoantes e 4 vogais. Existe uma única configuração possível dos anagramas que apresentam vogais e consoantes alternadas, em que CO é uma consoante e VO, uma vogal.

CO	VO	CO	VO	CO	VO	CO	VO	CO

Obtemos então 5 consoantes diferentes e 4 vogais, com 3 repetidas. Sendo assim, o número N de anagramas solicitado é dado por:

$$N = P_5 \cdot P_4^3 = 5! \cdot \frac{4!}{3!} = 480.$$

14. E

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

15. E

Escrevendo os números, teremos $4! = 24$ vezes em cada ordem decimal.

O somatório dos números é 25.

Assim, a soma dos algarismos em cada ordem decimal é:

$24 \cdot 25 = 600$.

Podemos verificar então que a soma S é dada por:

$S = 24 \cdot 25 \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 600 \cdot$
$\cdot\ 11\,111 = 6\,666\,600$.

16. B

As 10 pessoas podem se sentar de $P_{10} = 10!$ maneiras. De outra forma, o casal que está brigado pode se sentar lado a lado de $P_9 \cdot P_2 = 2 \cdot 9!$ maneiras.

Concluímos que o resultado solicitado é:

$10! - 2 \cdot 9! = 10 \cdot 9! - 2 \cdot 9! = 8 \cdot 9!$.

17. B

Para que haja pelo menos um brasileiro entre as três primeiras colocações, basta calcularmos o total de possibilidades e subtrairmos as possibilidades de não haver nenhum brasileiro.

Logo: $A_{9,3} - A_{5,3} = \dfrac{9!}{(9-3)!} - \dfrac{5!}{(5-3)!} = 504 - 60 =$

$= 444$ possibilidades.

Estudo para o Enem

18. B

Há 16 posições seguidas de uma fila, em que as de mando ímpar serão preenchidas pelos 8 filmes de ação, as 5 primeiras de mando par serão preenchidas pelos filmes de comédia e as 3 últimas de mando par serão preenchidas pelos filmes de drama.

Então, os filmes:

- de ação serão colocados de $P_8 = 8!$ maneiras;
- de comédia, de $P_5 = 5!$ maneiras;
- de drama, de $P_3 = 3!$ maneiras.

Portanto, pelo princípio multiplicativo, o resultado é $8! \cdot 5! \cdot 3!$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

19. E

Há $10 \cdot 10 = 10^2$ formas de escolher os dois algarismos e $52 \cdot 52 = 52^2$ formas de selecionar as letras. Definidos os caracteres da senha, podemos dispô-los de $P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$ maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo, a resposta é $10^2 \cdot 52^2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. B

A quantidade de jogos disputados será:

$A_{20,2} = \dfrac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380$.

Sendo os oponentes paulistas, o número total de jogos será:

$A_{6,2} = \dfrac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$.

Sendo assim, a porcentagem solicitada será igual a:

$\dfrac{30}{380} \cdot 100\% \cong 7{,}9\%$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

11 COMBINAÇÃO

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, continuamos o estudo da análise combinatória. Foram estudadas as combinações e as mais diversas maneiras de se observar o agrupamento de números, objetos ou pessoas por meio de combinações simples.

Para ir além

A dissertação *O ensino da análise combinatória através de situações-problema* é um ótimo material que aborda de modo completo a análise combinatória. Disponível em:

<http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/325395/1/Garcia_HeitorAmaral_M.pdf>

Acesso em: 17 nov. 2018.

O artigo "Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica" trata da importância da análise combinatória no ensino. Disponível em:

<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>

Acesso em: 17 nov. 2018.

O texto "Como funciona o sistema Braille" mostra o funcionamento desse método de comunicação. Disponível em:

<https://novaescola.org.br/conteudo/397/como-funciona-sistema-braille>

Acesso em: 17 nov. 2018.

Exercícios propostos

7. C

Vamos considerar o número de formas de se colocarem 6 filhos no primeiro quarto. Para isso, precisamos combinar 10 elementos tomados 6 a 6.

$C_{10,6} = \dfrac{10!}{6! \cdot 4!}$

8. Adotando L como letra e A como algarismo, pelas possibilidades de emplacamento, obtemos:

L – L – A – A – A – L – L

$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4 \cdot 10^3$.

Para calcular o total de possibilidades de placas com 4 letras (incluindo repetição) e 3 algarismos (incluindo repetição) em qualquer ordem na placa, devemos primeiro considerar a posição das letras.

Ou seja, $C_{7,4} = \dfrac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = 35$.

Assim, há 35 possíveis combinações de 4 letras e 3 algarismos. Logo, o total de possibilidades de placas com 4 letras (incluindo repetição) e 3 algarismos (incluindo repetição) pode ser obtido pelo princípio fundamental da contagem:

$35 \cdot 26^4 \cdot 10^3$

9. B

Calculando, obtemos:

$C_{8,3} = \dfrac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

$A_{8,3} = \dfrac{8!}{5!} = 336$

Logo, $y - x = 336 - 56 = 280$.

10. E

A e B são os estudantes que não podem se vincular a um mesmo grupo.

Supondo que queiramos calcular quantas são as possibilidades para formar precisamente um grupo teremos $C_{20,3} = \dfrac{20!}{3! \cdot 17!} = 1\,140$ opções (entre essas, A e B estão presentes em 18).

Portanto, a solução é $1\,140 - 18 = 1\,122$.

11. E

De 1 até 12 temos 10 algarismos decorrentes, pois o primeiro deles não pode ser o 11 nem o 12.

Calcula-se a quantidade de grupos formados por 3 pessoas:

$C_{12,3} = \dfrac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$.

Assim, a quantidade máxima de grupos que se podem elaborar de modo que os crachás não sejam identificados por 3 números consecutivos é:

$220 - 10 = 210$.

12. Utilizando 3 cores:

Base = 5 opções

Faces laterais opostas $= C_{4,2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ opções

Total $= 5 \cdot 6 = 30$

- Utilizando 4 cores:

Base = 5 opções

2 faces laterais opostas = 4 opções

2 faces laterais opostas = 3 opções

Total = 5 · 4 · 3 = 60

- Utilizando 5 cores:

Base = 5 opções

Faces laterais = 3! = 6 opções

Base = 5 · 6 = 30

Total de opções = 30 + 60 + 30 = 120

13. A

Considerando (a) cartela azul e (v) cartela vermelha, as possibilidades são: {a, a, a}, {a, a, v}, {a, v, v} e {v, v, v}.

Portanto, é provável retirar:

- 3 cartelas azuis de $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1\,140$ maneiras;
- 2 cartelas azuis e 1 vermelha de $\binom{20}{2} \cdot \binom{30}{1} =$ $= \frac{20!}{2! \cdot 18!} \cdot 30 = 5\,700$ maneiras;
- 1 cartela azul e 2 vermelhas de $\binom{20}{1} \cdot \binom{30}{2} =$ $= 20 \cdot \frac{30!}{2! \cdot 28!} = 8\,700$ maneiras;
- 3 cartelas vermelhas de $\binom{30}{3} = \frac{30!}{3! \cdot 27!} = 4\,060$ maneiras.

Logo, pelo princípio aditivo, a resposta é: 1 140 + + 5 700 + 8 700 + 4 060 = 19 600

14. E

- Número de opções possíveis de 3 pontos: $C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56.$
- Número de opções com 3 pontos alinhados: $2 \cdot C_{4,3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 8.$
- Número de opções com 3 símbolos iguais: $2 \cdot C_{4,3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 8.$

Assim, a quantidade de triângulos criados com símbolos únicos é dada por: 56 – 8 – 8 = 40.

15. B

Calculando a equação solicitada, obtemos:

$$\binom{x+2}{2} = \binom{3x+1}{1}$$

$$\frac{(x+2)!}{2! \cdot ((x+2)-2)!} = \frac{(3x+1)!}{1! \cdot ((3x+1)-1)!}$$

$$\frac{(x+2) \cdot (x+1) \cdot x!}{2! \cdot x!} = \frac{(3x+1) \cdot (3x)!}{1! \cdot (3x)!}$$

$(x + 2) \cdot (x + 1) = 2 \cdot (3x + 1)$

$x^2 + 3x + 2 = 6x + 2$

$x^2 - 3x = 0$

$x \cdot (x - 3) = 0$

$\therefore x = 3$ ou $x = 0$

Calculando o número binomial fornecido, obtemos:

$$\binom{2x-1}{2} = \frac{(2x-1)!}{2! \cdot ((2x-1)-2)!} =$$

$$= \frac{(2x-1) \cdot (2x-2) \cdot (2x-3)!}{2! \cdot (2x-3)!} =$$

$$= \frac{(2x-1) \cdot (2x-2)}{2}$$

Portanto, se x = 0, o número dado também é igual a zero, o que não é abrangido pelas alternativas.

Se x = 3, vamos ter: $\frac{(2 \cdot 3 - 1) \cdot (2 \cdot 3 - 2)}{2} =$ $= \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10.$

16. D

Existem $C_{12,\,3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$ maneiras de selecionar 3 pontos aleatórios. Entre as possibilidades, temos de descontar aquelas em que não se pode formar um triângulo. Há 2 segmentos de reta que evidenciam 4 pontos cada um, resultando $2 \cdot C_{4,3} =$ $= 2 \cdot 4 = 8$ possibilidades.

Portanto, a resposta é 220 – 8 = 212.

17. a) O total de triângulos será obtido por meio do número total de combinações possíveis de pontos 3 a 3, menos o número de combinações de pontos colineares.

Assim, podemos escrever:

número total $\rightarrow C_{13,3} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 286.$

Pontos colineares sobre o eixo y:

y = {(0, –3), (0, –2), (0, –1), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 0)} $\rightarrow C_{7,3}$

Pontos colineares sobre o eixo x:

$x = \{(-3, 0), (-2, 0), (-1, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 0)\} \rightarrow C_{7,3}$

Pontos colineares $\rightarrow 2 \cdot C_{7,3} = 2 \cdot \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} =$

$= 2 \cdot \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 70$

Portanto, o total de triângulos é $286 - 70 = 216$.

b) Observamos que os pontos reunidos estão sobre um dos eixos do plano cartesiano. Assim, se 2 vértices se encontram sobre o eixo y, o terceiro vértice está obrigatoriamente sobre o eixo x (considerando os pontos reunidos). O total de opções de 2 pontos sobre o eixo y é:

$C_{7,2} = \dfrac{7!}{2! \cdot 5!} = \dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21.$

Para o terceiro vértice, há 6 opções de seleções (pontos sobre o eixo x). Sendo assim, o número de triângulos que possivelmente vamos encontrar é $21 \cdot 6 = 126$.

Estudo para o Enem

18. D

O professor pode ir a 3 museus dos 4 disponíveis no Brasil ($C_{4,3}$).

$C_{4,3} = \dfrac{4!}{(4-3)!-3!} = \dfrac{4 \cdot 3!}{3!} = 4$

Também pode ir em 2 dos 4 museus disponíveis no exterior ($C_{4,2}$).

$C_{4,2} = \dfrac{4!}{(4-2)!-2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = 6$

Pelo princípio fundamental da contagem, obtemos:

$4 \cdot 6 = 24$ maneiras diferentes de visitar os museus.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

19. A

A quantidade de maneiras de selecionar dois tenistas quaisquer é $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{10!}{2! \cdot 8!}$.

O número de formas de selecionar dois tenistas canhotos é $\dfrac{4}{2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$.

Assim, o resultado é dado por $\dfrac{10!}{2! \cdot 8!} - \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. B

$C_{10,2} \cdot C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2} = 45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 113\,400$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

12 INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

Comentário sobre o módulo

Professor, neste módulo, abordamos os conceitos de probabilidade e os significados de evento aleatório, espaço amostral e evento. Também trabalhamos a diferença entre probabilidade estatística e probabilidade teórica, além de calcularmos a probabilidade de um evento simples.

Além disso, abordamos as propriedades das probabilidades, com o estudo de eventos impossível e certo. E ainda, analisamos a probabilidade de determinado evento ocorrer e o cálculo da probabilidade de ocorrência de uma situação, com base na análise dos eventos que não podem acontecer na situação estudada, ou seja, por meio do evento complementar.

Para ir além

O artigo "O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e na formação de professores" trata da relevância e dos objetivos para se ensinar e aprender estatística e probabilidade na Educação Básica. Disponível em:

http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v28n74/v28n74a05.pdf

Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. A

No conjunto {1, 2, 3, 4, ..., 98, 99, 100}, existem os quadrados perfeitos 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

Portanto, sendo P a probabilidade pedida, temos:

$$P = \frac{10}{100}$$

$$P = \frac{1}{10}.$$

8. E

O resultado solicitado é idêntico a 1,00 – (0,65 + + 0,15) = 0,20.

Portanto, P = 20%.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

9. C

Glorinha tem uma ficha cujo número pertence ao conjunto:

$$U = \{2, 3, 5, 7, 11, 12, 14, 16, 20, 21, 23\}$$

Logo, a probabilidade solicitada é:

$$\frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{11} \cdot 100\%$$

Portanto, $P \cong 9\%$.

10. a) Temos:

$$n(U) = C_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)!3!} = 220$$

$$n(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{220}$$

Logo, a probabilidade de acerto é $\frac{1}{220}$.

b) Haverá combinação de 5 números de 3 em 3:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

Logo, serão 10 apostas de 3 números. Em decorrência, uma aposta em 5 números custaria 2 · 10 = R$ 20,00.

11. A

Sejam p (gols do time perdedor) e g (gols do time vencedor). O número de casos prováveis representa o número de permutações de cinco objetos, nem todos distintos, com duas e três repetições. Isto é:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Desse modo, como há apenas um caso favorável, a resposta é:

$$\frac{1}{10} \cdot 100\% = 10\%$$

12. B

$n(U) = P_{10}^4 = \frac{10!}{4!}$ corresponde ao número de anagramas possíveis. Assim:

$$n(EEEE) = P_7 = 7!$$

Logo, a probabilidade solicitada é:

$$P(EEEE) = \frac{n(U)}{n(E)} = \frac{7!}{\frac{10!}{4!}} = \frac{7! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!} = \frac{1}{30}$$

13. A

Há 4 formas de escolher um presidente, 3 de selecionar um tesoureiro e $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ de escolher 2 revisores. Assim, pelo princípio multiplicativo, a eleição terá:

$n(\cup) = 4 \cdot 3 \cdot 15 = 180$ resultados possíveis.

Vamos considerar P_1, P_2, P_3, P_4 os candidatos a presidente; T_1, T_2, T_3 os candidatos a tesoureiro; R_1, R_2,..., R_6 os candidatos a revisor. Acreditando que, sem perda de generalidade, o voto de determinado eleitor tenha sido (P_1, T_3, R_4), é fácil perceber que o número de casos favoráveis para esse voto é igual a 5, pois existem 6 revisores. Assim, a probabilidade solicitada é igual a $\frac{5}{180} = \frac{1}{36}$.

14. A

Diagonais que passam pelo centro do decágono:

$d = \frac{10}{2} = 5.$

Diagonais do dodecágono: $D = \frac{10 \cdot (10-3)}{2} = 35.$

Portanto, a probabilidade P(d) é:

$P(d) = \frac{35-5}{35} = \frac{6}{7}$

15. B

Sejam x (a quantidade de cédulas de 20 reais), y (a quantidade de cédulas de 50 reais) e n (o número total de cédulas), isto é, $n = x + y$. Assim, para um saque de 400 reais, temos:

$$\left| \begin{array}{l} 20x + 50y = 400 \\ n = x + y \\ 0 \le x \le 20 \\ 0 \le y \le 8 \end{array} \right. \leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 5n = 40 + 3x \\ 0 \le x \le 20 \\ 0 \le y \le 8 \end{array} \right.$$

Sendo $40 + 3x$ um múltiplo de 5, por análise vamos encontrar:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathbb{R}^2; (0, 8), (5, 6), \\ (10, 4), (15, 2), (20, 0) \end{array} \right\}$$

Portanto, os únicos casos adequados são (5, 6) e (15, 2). Logo, a probabilidade solicitada é igual a $\frac{2}{5}$.

16. O número de elementos do espaço amostral é $n(U) = 6 \cdot 6 = 36$.

Representando as situações em que o jogador fará oito ou mais pontos, temos:

(2, 2), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5) e (6, 6)

Logo, o número de elementos de o evento resultar em 8 ou mais pontos (A) é:

$n(A) = 17$

Com isso, podemos calcular a probabilidade pedida:

$P(A) = \frac{17}{36}.$

17. C

Sendo a (a quantidade de bolas amarelas), b (a quantidade de bolas brancas) e v (a quantidade de bolas vermelhas), do item I concluímos que $v = 2^a$.

No item II, observamos que a urna, que antes tinha um total de $(v + b + a)$ bolas, passou a ter $(v + b + a - 4)$ bolas. Assim, montamos a relação:

$$\frac{v}{a-4+b+v} = \frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{2a}{3a+b-4} = \frac{1}{2} \rightarrow a = b - 4$$

No item III, se forem retiradas as 12 bolas vermelhas, a urna ficará com:

$(a + b + v - 12)$ bolas

Com isso, temos:

$$\frac{b}{a+b+v-12} = \frac{1}{2}$$

Substituindo $a = b - 4$ e $v = 2a$, temos:

$$\frac{b}{b-4+b+2(b-4)-12} = \frac{1}{2} \rightarrow b = 12$$

Estudo para o Enem

18. D

Possibilidades que concedem a vitória a José: {(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)}.

Possibilidades que concedem a vitória a Paulo: {(1, 3), (2, 2), (3, 1)}.

Possibilidades que concedem a vitória a Antônio: {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)}.

A resposta é José, já que há 6 possibilidades para criar sua soma. Antônio tem 5 possibilidades para criar sua soma. Paulo tem apenas 3 possibilidades para criar sua soma.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

19. A

O número total de assentos é igual a $(9 + 12 + 13) \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 220$. Contudo, o número de assentos em que o passageiro se sente desconfortável é:

$$(9 + 12 + 13) \cdot 2 = 68$$

Assim, a probabilidade de o passageiro ser sorteado com uma poltrona entre duas pessoas é equivalente a $\frac{68}{220} \cdot 100\% \cong 31\%$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

20. D

Não opinaram: 21%.

Opinaram: 100% – 21% = 79%.

Entrevistados que classificaram o livro como chato: 12% dos 79% que opinaram. Assim, temos:

$$P(\text{Chato}) = \frac{12\%}{79\%} = 0{,}152$$

Portanto, $P(\text{Chato}) \cong 0{,}15$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

13 PROBABILIDADE CONDICIONAL E DA INTERSECÇÃO DE EVENTOS

Comentário sobre o módulo

Neste módulo, continuamos os estudos sobre probabilidades. Abordamos o cálculo da probabilidade do evento união e a probabilidade de um espaço amostral não equiprovável, analisando as probabilidades isoladas de cada evento ocorrer.

Além disso, analisamos problemas com maior grau de dificuldade, uma vez que vimos probabilidade condicional e probabilidade da intersecção.

Exercícios propostos

7. Evento A (a carta é uma dama):

$P(A)=\frac{4}{52}$

Evento B (a carta é de copas): $P(B)=\frac{13}{52}$

Evento $A \cap B$ (a carta é uma dama de copas):

$P(A\cap B)=\frac{1}{52}$

Evento $A \cup B$ (a carta ou é um rei ou é de ouros):

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Logo:

$P(A\cup B)=\frac{4}{52}+\frac{13}{52}-\frac{1}{52}\rightarrow P(A\cup B)=\frac{16}{52}$

$P(A\cup B)=\frac{4}{13}$

8. C

Há $P_4^3=P_{4,3}=\frac{4!}{3}=4$ maneiras de se conseguir exatamente 3 caras em 4 lançamentos.

No entanto, há somente duas maneiras de se obter 3 caras sucessivamente: CCCK e KCCC.

Assim, $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

9. A

O número de combinações possíveis é:

$C_{20,3}=\frac{20!}{3!\cdot 17!}=1140$

Logo, a probabilidade de ocorrer a trinca apostada é:

$P(4, 7, 18) = \frac{1}{1140}$

Assim, o ganho é de

$100\,000 \cdot \frac{1}{1\,140} = 87{,}72 \approx 88$ reais.

10. A

Número de provas possíveis: $n(U) = C_{10,5} = \frac{10!}{5!\cdot 5!}$.

Número de provas possíveis com as 7 questões corretas: $C_{7,5} = \frac{7!}{5!\cdot 2!}$.

Logo, a probabilidade é:

$$P = \frac{C_{7,5}}{C_{10,5}} = \frac{\frac{7!}{5!\cdot 2!}}{\frac{10!}{5!\cdot 5!}} = \frac{7!}{5!\cdot 2!}\cdot\frac{5!\cdot 5!}{10!} = \frac{1}{12} = \frac{7}{84}$$

11. C

Para que a soma seja par, é necessário pegarmos um número ímpar de A e um número ímpar de B, ou um número par de A e um número par de B.

- Probabilidade de escolher um número ímpar de A: $\frac{3}{5}$.
- Probabilidade de escolher um número ímpar de B: $\frac{2}{5}$.
- Probabilidade de escolher um número par de A: $\frac{2}{5}$.
- Probabilidade de escolher um número par de B: $\frac{3}{5}$.

Logo, a soma dos 2 números escolhidos que resulte em número par é dada por:

$P = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{12}{25}$

12. C

De acordo com o enunciado, temos:

- P(X/B): Probabilidade de nascer menino e o quarto ser branco.
- P(Y/B): Probabilidade de nascer menina e o quarto ser branco.

$P(X/B) = \frac{50}{100}\cdot\frac{30}{100} = \frac{15}{100}$

$P(Y/B) = \frac{50}{100}\cdot\frac{40}{100} = \frac{20}{100}$

Logo, a probabilidade de Renata pintar o quarto do bebê de branco é dada por:

$P = \frac{15}{100} + \frac{20}{100} = \frac{35}{100} = 35\%$

13. E

I. Falsa, pois a probabilidade informada é obtida por $P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

II. Falsa, pois a probabilidade informada é $P = \dfrac{C_{4,2}+C_{2,2}}{C_{15,2}} = \dfrac{6+1}{105} = \dfrac{1}{15}$.

III. Falsa, pois a probabilidade solicitada será obtida por $P = \dfrac{6}{15}\cdot\dfrac{4}{14}\cdot\dfrac{2}{13} = \dfrac{8}{455}$.

Sendo assim, todas as afirmações são falsas.

14. a) Maria deve lançar o icosaedro, pois é o único sólido com valores superiores a 12, já que tem 20 faces. Ela, então, lançará apenas uma vez o dado. Portanto, a probabilidade de o número lançado ser superior a 12 é:

$$P(\text{número} > 12) = \frac{1}{5}\cdot\frac{8}{20} = \frac{8}{100} = 8\%$$

b) Já para obter um número inferior a 5, Maria pode sortear qualquer um dos dados.

- Tetraedro: $P(\text{número} < 5) = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{4}=\dfrac{1}{5}$.
- Cubo: $P(\text{número} < 5) = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{6}=\dfrac{4}{30}=\dfrac{2}{15}$.
- Octaedro: $P(\text{número} < 5)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{40}=\dfrac{4}{40}=\dfrac{1}{10}$.
- Dodecaedro: $P(\text{número} < 5)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{12}=\dfrac{4}{60}=\dfrac{1}{15}$.
- Icosaedro: $P(\text{número} < 5) = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{20}=\dfrac{4}{100}=\dfrac{1}{25}$.

Logo, a probabilidade solicitada será:

$$P_{\text{Total}}(\text{número} < 5) = \frac{3}{15} + \frac{3}{10} + \frac{1}{25} =$$

$$= \frac{30 + 45 + 6}{150} = \frac{81}{150} = 54\%$$

c) João deve sortear o dodecaedro e o icosaedro, pois apenas com esses dois dados a soma dos números das faces seria maior que 30.

As somas possíveis do dodecaedro e do icosaedro superiores a 30 serão:

(11 + 20 = 31); (12 + 19 = 31); e (12 + 20 = 32).

Logo, n(A) = 3.

Assim, a probabilidade será:

- Escolha de dados:

$$P(x) = 2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

- Soma de faces:

$$P(\text{número}) = 3\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{20} = \frac{3}{240} = \frac{1}{80}.$$

$$P(\text{número} > 30) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{80} = \frac{1}{800} = 0{,}125\%$$

15. C

Se N é o total de pessoas da população, teremos:

- Pessoas saudáveis consideradas doentes:

$$\frac{1}{100}\cdot\frac{98{,}5}{100}\cdot N.$$

- Pessoas doentes consideradas doentes:

$$\frac{90}{100}\cdot\frac{1{,}5}{100}\cdot N.$$

Portanto, a probabilidade de uma pessoa ter a doença, dado que o exame indicou positivo, é:

$$P(\text{Positivo}) = \frac{\dfrac{90}{100}\cdot\dfrac{1{,}5}{100}\cdot N}{\dfrac{1}{100}\cdot\dfrac{98{,}5}{100}\cdot N + \dfrac{90}{100}\cdot\dfrac{1{,}5}{100}\cdot P} =$$

$$= \frac{270}{467}$$

16. B

Temos que:

- x: número de bolas vermelhas;
- $C_{6,\,2}$: casos pertinentes;
- $C_{n\,+\,6,\,2}$: casos executáveis.

Assim:

$$\frac{1}{3} = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{n+6}{2}} \rightarrow \frac{1}{3}\frac{\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}}{\dfrac{(n+6)!}{2!\cdot(n+4)!}} \rightarrow n^2 + 11n - 60 = 0$$

Calculando a função do 2º grau, n = 4.

17. B

Há 2 formas de posicionar Renato e Alice.

Conseguimos dispor (m) pessoas entre os dois de $A_{6,m} = \dfrac{6!}{(6-m)!}$ formas.

Ainda, considerando agora as 8 − (m + 2) = 6 outras pessoas, temos:

$P_{(6-m)+1} = P_{7-m} = (7-m)!$ possibilidades.

Contudo, podemos organizar o grupo em fila de P8 = 8! maneiras, sem qualquer redução.

Sendo assim, a probabilidade solicitada é obtida por:

$$P(m) = \frac{2\cdot\dfrac{6!}{(6-m)}\cdot(7-m)!}{8!} = \frac{7-m}{28}$$

Assim, se m = 4, teremos:

$$P(4) = \frac{7-4}{28} = \frac{3}{28}$$

Estudo para o Enem

18. A

Do enunciado, temos:

- U (conjunto universo);
- I (conjunto dos alunos que falam inglês);
- E (conjunto dos alunos que falam espanhol).

Assim:

P (E | $\bar{I}$): probabilidade dos alunos que falam espanhol e não falam inglês.

n(U) = 1 200

n(I) = 600

n(E) = 500

$n(\bar{I} \cup \bar{E}) = 300$

$n(I \cup E) = n(U) - n(\bar{I} \cup \bar{E}) = 1\,200 - 300 = 900$

Logo:

$n(I \cup E) = n(I) + n(E) - n(I \cap E) \rightarrow 900 = 600 + 500 - n(I \cap E)$

Assim, $n(I \cap E) = 200$.

Portanto:

$$P(E|\bar{I}) = \frac{n(E \cap \bar{I})}{n(\bar{I})} =$$

$$\frac{n(E - I)}{n(E - I) + n(\bar{I} \cup \bar{E})} = \frac{300}{300 + 300} = \frac{1}{2}$$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

19. E

Verde (3 ou 4) e vermelha (4) são as cores com chance de ficar com o maior número de bolas, após o procedimento de retirada e depósito.

Portanto, a probabilidade de retirar uma bola verde da urna 2 é:

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{3}{11} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{11} = \frac{31}{110}$$

E a probabilidade de retirar uma bola vermelha da urna 2 é:

$$\frac{10}{10} \cdot \frac{4}{11} = \frac{40}{110}$$

Desse modo, o jogador deve selecionar a cor vermelha.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

20. E

Regiões possíveis: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano.

Logo, n(U) = 4.

Regiões com temperaturas inferiores a 31 °C: Rural, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano.

Assim, n(A) = 3.

Portanto, $P = \frac{3}{4}$.

Logo, a probabilidade de ele escolher uma região adequada às recomendações médicas é de $\frac{3}{4}$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

14 PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPENDENTES E BINÔMIO DE NEWTON

Comentário sobre o módulo

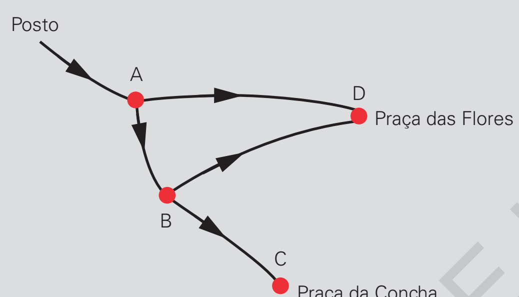
Neste último módulo dedicado aos estudos das probabilidades, estudamos a probabilidade de eventos independentes, com a comparação entre eles e os eventos dependentes. Além disso, tivemos a oportunidade de reforçar os conceitos vistos em probabilidades nos exercícios propostos.

Finalizamos o material com o estudo do binômio de Newton. Abordamos, antes, o produto de Stevin, com a dedução teórica. Pôde-se fazer uma breve revisão do número binomial e do triângulo de Pascal, pois são dois requisitos fundamentais para a compreensão e o desenvolvimento do conteúdo.

Exercícios propostos

7. C

Observando a imagem, temos:



Temos:

$$\left.\begin{array}{l} P(AD) = \frac{1}{2} = 50\% \quad (\text{Posto – Praça das Flores}) \\ P(ABD) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\% \rightarrow \left(\begin{array}{l}\text{Posto – Praça} \\ \text{das Flores}\end{array}\right) \end{array}\right\} P =$$

$$= 75\% = \frac{3}{4}$$

$P(ABC) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 25\% \rightarrow$ Não chega à Praça das Flores

8. Teremos, portanto, 4 bolas com vogais e 6 bolas com consoantes.

a) $P = \frac{1}{10}$

b) $P = \frac{4}{10}$

c) $P = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{1}{30}$

9. C

A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^n$ é 2^n.

Logo, a soma dos coeficientes de $(x + 1)^5 = 2^5 = 32$.

10. C

De acordo com o enunciado, temos a probabilidade de atraso com e sem chuva:

P(chuva) = 30% · 50% = 0,3 · 0,5 = 0,150

P(sem chuva) = 70% · 25% = 0,7 · 0,25 = 0,175

Assim:

P(atraso) = P(chuva) + P(sem chuva)

P(atraso) = 0,15 + 0,175 = 0,325

Logo, P(atraso) = 0,325.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

11. a) Temos $P = 6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Logo, a probabilidade de que os dois dados mostrem o mesmo número é de $\frac{1}{6}$.

b) Verificando as possibilidades, temos:

$1 + (2, 3, 4, 5 \text{ ou } 6) \rightarrow \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

$2 + (3, 4, 5 \text{ ou } 6) \rightarrow \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{4}{36}$

$3 + (4, 5 \text{ ou } 6) \rightarrow \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{36}$

$4 + (5 \text{ ou } 6) \rightarrow \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{36}$

$5 + (6) \rightarrow \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Somando todas as probabilidades possíveis, temos:

$$P = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Logo, a probabilidade de que o dado azul mostre um número maior que o dado vermelho é de $\frac{5}{12}$.

12. B

Termo geral:

$$T_{p+1} = \binom{8}{p}(2x^{-1})^p\,(x)^{8-p} \rightarrow T_{p+1} = \binom{8}{p} 2^p x^{-p} x^{8-p}$$

$$\rightarrow T_{p+1} = \binom{8}{p} 2^p x^{8-2p}$$

Para que o termo de **x** seja independente, o expoente de **x** deve ser igual a zero.

Assim, temos:

$$8 - 2p = 0 \rightarrow 2p = 8 \rightarrow p = 4$$

Logo:

$$T_{4+1} = \binom{8}{4} 2^4 x^{8-2\cdot 4} \rightarrow T_5 = 70 \cdot 16 \rightarrow$$

$$\rightarrow T_5 = 1\,120$$

Portanto, a soma dos algarismos do termo independente será:

$$1 + 1 + 2 + 0 = 4$$

13. D

O termo geral será:

$$T_{p+1} = x \cdot \binom{10}{p} \cdot (2x)^p \cdot 1^{10-p} = \binom{10}{p} \cdot 2^p \cdot x^{p+1}$$

Para se ter x^3, **p** corresponde a:

$$p + 1 = 3 \rightarrow p = 2$$

Assim, temos:

$$\binom{10}{2} \cdot 2^2 \cdot x^{2+1} = 45 \cdot 4 \cdot x^3 = 180x^3$$

14. C

O gasto anual é de R$ 900.000,00. A cada evento deve pagar R$ 1.000.000,00. Logo, nenhum evento pode ocorrer.

P(X): corresponde à probabilidade de não ocorrer o evento em 10 empresas.

$P(X) = (1 - p)^{10}$.

$P(\overline{X})$: probabilidade de ocorrer em ao menos 1.

Logo, a probabilidade de a seguradora ter prejuízo nessa modalidade de seguro em um ano é $P(\overline{X}) = 1 - (1-p)^{10}$.

15. A

Fazendo cos x = y, obtemos:

$$y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 = 0$$

Encontramos, assim, o desenvolvimento do polinômio $(y - 1)^4$.

Como $(y - 1)^4 = (y - 1) \cdot (y - 1) \cdot (y - 1) \cdot (y - 1) = 0$.

A raiz do polinômio é igual a 1. Ou seja:

$\cos x = 1$

Logo, $x = 360° = 2\pi$

Sendo a função cosseno periódica, a cada 360°, obtemos uma nova raiz da função. Ou seja, a cada $2k\pi$, em que k é um número inteiro qualquer.

16. E

Além do atleta que fez uso da substância, precisamos escolher 2 atletas entre os 199 que não fizeram uso. Logo, temos:

$$P(I) = \frac{C_{199,2}}{C_{200,3}} = \frac{\frac{199!}{2!\cdot 197!}}{\frac{200!}{3!\cdot 197!}} = \frac{3}{200}$$

No segundo modo, sorteada a equipe, precisamos escolher 2 atletas entre os 9 que não a utilizaram. Assim:

$$P(II) = \frac{1}{20}\cdot\frac{C_{9,2}}{C_{10,3}} = \frac{1}{20}\cdot\frac{\frac{9!}{2!\cdot 7!}}{\frac{10!}{3!\cdot 7!}} = \frac{3}{200}$$

Já no terceiro modo, precisamos escolher 2 equipes em que não atua o jogador dopado e só então sortear o jogador. Sendo assim:

$$P(III) = \frac{C_{19,2}}{C_{20,3}}\cdot\frac{1}{10} = \frac{\frac{19!}{2!\cdot 17!}}{\frac{20!}{3!\cdot 17!}}\cdot\frac{1}{10} = \frac{3}{200}$$

Portanto, existe a mesma probabilidade nos três modos distintos.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

17. B

O termo geral de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3$ será:

$$T_{p+1} = \left[\binom{3}{p} \cdot (2x)^{3-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p\right]$$

$$T_{p+1} = \binom{3}{p} \cdot 2^{3-p} \cdot x^{3-3p}$$

O termo geral de $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^3$ será:

$$T_{q+1} = \left[\binom{3}{q} \cdot (x)^{3-q} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^q\right]$$

$$T_{q+1} = \binom{3}{q} \cdot x^{6-3p} \cdot 2^{-q}$$

$$T_{p+1} \cdot T_{q+1} = \binom{3}{q} \binom{3}{q} \cdot 2^{3-(p+q)} \cdot x^{9-3(p+q)}$$

Para ter x^6, $p + q = 1$, o que implica em $(p, q) =$ $= (0, 1)$ ou $(1, 0)$.

$$\binom{3}{0} \cdot \binom{3}{1} \cdot 2^{3-(0+1)} \cdot x^{9-3(0+1)} + \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{0} \cdot$$
$$\cdot\ 2^{3-(1+0)} \cdot x^{9-3(1+0)}$$

$$1 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot x^6 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 \cdot x^6$$

$$12x^6 + 12x^6 = 24x^6$$

Portanto, o coeficiente procurado corresponde ao número 24.

Estudo para o Enem

18. A

Analisando o gráfico, obtemos:

- Compradores do produto A: $n(A) = 10 + 30 +$ $+ 60 = 100$.
- Compradores do produto B: $n(B) = 20 + 20 +$ $+ 80 = 120$.
- Consumidores do produto A em fevereiro: $n(A|Fev) = 30$.
- Consumidores do produto B em fevereiro: $n(B|Fev) = 20$.

Logo:

$$P = \frac{n(A|Fev)}{n(A)} \cdot \frac{n(B|Fev)}{n(B)} = \frac{30}{100} \cdot \frac{20}{120} = \frac{1}{20}$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

19. B

De acordo com o texto, sabemos que, para o teste terminar na quinta questão, o candidato precisa errar exatamente uma pergunta entre as quatro primeiras e errar a quinta. Então:

$$P = C_{4,1} \cdot (1 - 0{,}2)^3 \cdot 0{,}2 = 4 \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}04$$

Logo, $P = 0{,}08192$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

20. C

$$C_8 = C \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^8 \quad \rightarrow \quad \frac{C_8}{C} = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^8$$

Para o termo x^5, obtemos:

$$\binom{8}{3} \cdot \left(\frac{x}{100}\right)^{8-3} \cdot 1^8 = 56 \cdot \frac{x^5}{10^{10}} = 56 \cdot 10^{-10} \cdot x^5$$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

PRÉ-VESTIBULAR
SEMIEXTENSIVO 2

Pearson

www.dombosco.com.br

701625366