

Equação Modular e Inequação Modular

Equação Modular

O módulo de um número real é definido por:

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Assim

$$|6| = 6, \quad 6 \geq 0$$

$$|-6| = -(-6) = 6, \quad -6 < 0.$$

Uma equação modular é uma sentença aberta equivalente a

$$|x - a| = b.$$

Onde $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Resolva:

a) $|x| = 5$

1º Solução:

Da definição

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Logo

1º caso

$$x \geq 0 \Rightarrow x = 5$$

2º caso

$$x < 0 \Rightarrow -x = 5 \Leftrightarrow x = -5$$

$$S = \{-5, 5\}$$

2º Solução:

Podemos pensar na equação da seguinte forma

$$|x| = 5 \Leftrightarrow |x - 0| = 5$$

Assim associando ao módulo a palavra distância, a solução da equação são os números reais tais que distam de 5 unidades da origem, ou seja, $x = 5$ ou $x = -5 \Leftrightarrow S = \{-5, 5\}$.

$$b) |x-1|=5$$

1° Solução:

Da definição

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$$

Logo

1° caso

$$x \geq 1 \Rightarrow x-1=5 \Leftrightarrow x=6$$

2° caso

$$x < 1 \Rightarrow 1-x=5 \Leftrightarrow x=-4$$

$$S = \{-4, 6\}$$

2° Solução:

Associando ao módulo a palavra distância, a solução da equação são os números reais tais que distam de 5 unidades do número 1, ou seja, $x=6$ ou $x=-4 \Leftrightarrow S = \{-4, 6\}$.

3° Solução:Fazendo $x-1=y$ temos

$$|y|=5 \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \Leftrightarrow x-1=5 \Leftrightarrow x=6 \\ \text{ou} \\ y=-5 \Leftrightarrow x-1=-5 \Leftrightarrow x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow S = \{-4, 6\}$$

Inequação Modular

Uma inequação modular é uma sentença aberta equivalente a

$$|x-a| \leq b$$

$$|x-a| < b$$

$$|x-a| \geq b$$

$$|x-a| > b$$

Onde $a, b \in \mathbb{R}$.**2. Resolva:**

$$a) |x| \leq 8$$

1° Solução

$$x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8$$

ou

$$x < 0 \Rightarrow -x \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq x$$

$$\Rightarrow S =]-8, 8[$$



2° Solução

Podemos pensar na equação da seguinte forma

$$|x| \leq 8 \Leftrightarrow |x-0| \leq 8$$

Assim associando ao módulo a palavra distância, a solução da equação são os números reais tais que distam no máximo 8 unidades da origem, ou seja, $-8 \leq x \leq 8 \Rightarrow S =]-8, 8[$.

b) $|x-2| < 3$

1° Solução:

Da definição

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x-1 \geq 0 \\ -(x-2) & x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}$$

Logo

1° caso

$$x \geq 2 \Rightarrow x-2 < 3 \Leftrightarrow x < 5$$

2° caso

$$x < 2 \Rightarrow 2-x < 3 \Leftrightarrow -1 < x$$

$$\Rightarrow S =]-1, 5[$$

2° Solução

Associando ao módulo a palavra distância, a solução da equação são os números reais tais que distam no máximo de 3 unidades, exclusive, do número 2, ou seja, $-1 \leq x \leq 5 \Rightarrow S =]-1, 5[$.

c) $|x-7| \geq 1$

1° Solução:

Da definição

$$|x-7| = \begin{cases} x-7, & x-7 \geq 0 \\ -(x-7) & x-7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x-7| = \begin{cases} x-7, & x \geq 7 \\ 7-x & x < 7 \end{cases}$$

Logo

1° caso

$$x \geq 7 \Rightarrow x-7 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 8$$

2° caso

$$x < 7 \Rightarrow 7-x \leq 1 \Leftrightarrow 6 \leq x$$

$$\Rightarrow S =]-\infty, 6] \cup [8, +\infty[$$

2° Solução

Associando ao módulo a palavra distância, a solução da equação são os números reais tais que distam no mínimo de 1 unidade, inclusive, do número 7, ou seja, $6 \leq x$ ou $x \geq 8 \Rightarrow S =]-\infty, 6] \cup [8, +\infty[$.

d) $|x+1| > 3$

1° Solução:

Da definição

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$

Logo

1° caso

$x \geq -1 \Rightarrow x+1 \geq 3 \Leftrightarrow x > 2$

2° caso

$x < -1 \Rightarrow -x-1 > 3 \Leftrightarrow x < -4$

$\Rightarrow S =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$

2° Solução

Associando ao módulo a palavra distância, a solução da equação são os números reais tais que distam no mínimo de 3 unidades, exclusive, do número -1, ou seja, $-4 > x$ ou $x > 2$

$\Rightarrow S =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[.$

1. Resolva:

a) $|x-1| = 3$

b) $|x+2| = -1$

c) $|x-3| = x-3$

d) $|x-3| = 3-x$

e) $|x-3| = x$

f) $|2x-1| = |x+3|$

g) $|x-4| + |x+4| = 9$

h) $|x-4| + |x+4| = 8$

2. Determine os valores de a para que a equação

$|2x+3| + |2x-3| = ax+6$

Tenha infinitas soluções.

3. Resolva:

a) $|x-1| > 1$

b) $|x-1| > -1$

c) $|x+2| < 2$

d) $|x+2| \leq -2$

e) $|2x+1| > x$

f) $|x+2| + |x-3| > 5$

Gabarito**1.**

a) $S = \{-2, 4\}$

b) $S = \{\}$

c) $S = \mathbb{R}$

d) $S =]-\infty, 3]$

e) $S = \{1, 5\}$

f) $S = \left\{-\frac{2}{3}, 4\right\}$

g) $S = \left\{-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right\}$

h) $S = [-4, 4]$

2.

a) $a = 0$

3.

a) $S =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

b) $S = \{\}$

c) $S =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

d) $S = \{\}$

e) $S = \mathbb{R}$

f) $S =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$