CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

ÍNDICE

Matrizes

Operações com matrizes

> **Igualdade de matrizes:** duas matrizes são iguais quando possuem o mesmo número de linhas e colunas (mesma ordem), e os elementos correspondentes são iguais.

$X_{2\,x\,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ e $Y_{2\,x\,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

> **Soma de matrizes:** só é possível somar matrizes de mesma ordem, e basta somar-se os elementos correspondentes.

$A_{3x2} = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 18 & 25 \\ 23 & 9 \end{bmatrix}$ e $B_{3x2} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \\ 6 & 30 \end{bmatrix}$;

S = A + B; S = matriz soma de A e B

$$S = \begin{bmatrix} 10+4 & 13+1 \\ 18+2 & 25+7 \\ 23+6 & 9+30 \end{bmatrix}$$

$$S_{3x2} = \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 20 & 32 \\ 29 & 39 \end{bmatrix}$$

> **Produto de uma constante por uma matriz:** basta multiplicar a constante por todos os elementos da matriz.

$Z_{2\,x\,2} = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$

$P = 2 \cdot Z$; matriz do produto de 2 pela matriz Z

$$P = \begin{pmatrix} 2x13 & 2x18 \\ 2x10 & 2x25 \end{pmatrix}$$

$$P_{2\,x\,2} = \begin{pmatrix} 26 & 36 \\ 20 & 50 \end{pmatrix}$$

> **Produto de matrizes:** para multiplicar duas matrizes existe uma exigência que deve ser seguida – uma vez que se não for satisfeita essa exigência se torna impossível o produto das matrizes. Após verificar a exigência basta realizar a operação conforme demonstração adiante.

> **Exigência:** o número de colunas da primeira matriz tem que ser igual ao número de linhas da segunda: A_{3x2} x B_{2x3} → (3 x 2) x (2 x 3); e a nova matriz terá a ordem das linhas da primeira matriz pelas colunas da segunda: $A_{2\,x\,3}$ x $B_{3\,x\,2}$ → (3 x 2) x (2 x 3), portanto a matriz P (produto de A por B) será de ordem 3 x 3 → P_{3x3}.

$A_{3x2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ e $B_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

$P = A_{3\,x\,2} \text{ x } B_{2\,x\,3}$

$$P_{3x3} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$P_{3x3} = \begin{bmatrix} p_{11} = (2\,x\,1 + 3\,x\,9) & p_{12} = (2\,x\,4 + 3\,x\,7) & p_{13} = (2\,x\,5 + 3\,x\,2) \\ p_{21} = (5\,x\,1 + 4\,x\,9) & p_{22} = (5\,x\,4 + 4\,x\,7) & p_{23} = (5\,x\,5 + 4\,x\,2) \\ p_{31} = (6\,x\,1 + 8\,x\,9) & p_{32} = (6\,x\,4 + 8\,x\,7) & p_{33} = (6\,x\,5 + 8\,x\,2) \end{bmatrix}$$

$$P_{3x3} = \begin{bmatrix} p_{11} = 29 & p_{12} = 29 & p_{13} = 16 \\ p_{21} = 41 & p_{22} = 48 & p_{23} = 45 \\ p_{31} = 78 & p_{32} = 80 & p_{33} = 46 \end{bmatrix}$$

$$P_{3x3} = \begin{bmatrix} 29 & 29 & 16 \\ 41 & 48 & 45 \\ 78 & 80 & 46 \end{bmatrix}$$

Obs.: $\mathbf{p_{ij}}$ = produto dos elementos da **linha "i" da primeira matriz** pelos elementos da **coluna "j" da segunda matriz**, *ordenadamente*. Exemplo: $\mathbf{p_{11}}$ = produto dos elementos da **primeira linha da primeira matriz** pelos elementos da **primeira coluna da segunda matriz** = $(2\,x\,1 + 3\,x\,9)$ = 29

> **Matriz Inversa (A-1):** Outro tipo de **matriz quadrada** que será obtida multiplicando-se a matriz "A" pela sua matriz inversa "$\mathbf{A^{-1}}$" e o resultado (produto) será a matriz identidade.

$A_{2\,x\,2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $A^{-1}_{2\,x\,2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A \text{ x } A^{-1} = In$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a - c & 2b - d \\ -a + 5c & -b + 5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a - c = 1 \\ 2b - d = 0 \\ -a + 5c = 0 \\ -b + 5d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I \begin{cases} 2a - c = 1 \\ -a + 5c = 0 \end{cases} \\ II \begin{cases} 2b - d = 0 \\ -b + 5d = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas I e II:

$$I \begin{cases} 2a - c = 1 \\ -a + 5c = 0\,(*\,2) \end{cases}$$

$$I \begin{cases} 2a - c = 1 \\ -2a + 10c = 0 \end{cases} +$$

$$9c = 1$$

$$c = \frac{1}{9}$$

Substituindo "c" em uma das duas equações temos:

$$-a + 5\left(\frac{1}{9}\right) = 0$$

$$-a = -\frac{5}{9}\,(*\,-1)$$

$$a = \frac{5}{9}$$

$$II \begin{cases} 2b - d = 0 \\ -b + 5d = 1\,(*\,2) \end{cases}$$

$$II \begin{cases} 2b - d = 0 \\ -2b + 10d = 2 \end{cases} +$$

$$9d = 2$$

$$d = \frac{2}{9}$$

Substituindo "d" em uma das duas equações temos:

$$2b - \left(\frac{2}{9}\right) = 0$$

$$2b = \frac{2}{9}$$

$$b = \frac{\frac{2}{9}}{2}$$

$$b = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{9}$$

a = 5/9; b = 1/9; c = 1/9; d = 2/9

$$A^{-1}_{2\,x\,2} = \begin{pmatrix} 5/9 & 1/9 \\ 1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

Prova Real:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 5/9 & 1/9 \\ 1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2x5}{9} + \frac{-1x1}{9} & \frac{2x1}{9} + \frac{-1x2}{9} \\ \frac{-1x5}{9} + \frac{5x1}{9} & \frac{-1x1}{9} + \frac{5x2}{9} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9/9 & 0/9 \\ 0/9 & 9/9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS

01. Seja A uma matriz 2 x 3 e B uma matriz 3 x 2. A matriz C resultante do produto da matriz A pela B nesta ordem é uma matriz de ordem

a) 2x2.
b) 2x3.
c) 3x2.
d) 3x3.
e) Não é possível fazer o produto.

02. Considere as três matrizes abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se afirmar que:

a) Não é possível somar as matrizes B e C.

b) A matriz B é simétrica.

c) A matriz C é uma matriz identidade.

d) A matriz C é a inversa de B.

e) O produto de matrizes BA é igual a $\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$.

GABARITO

01 - A

02 - E