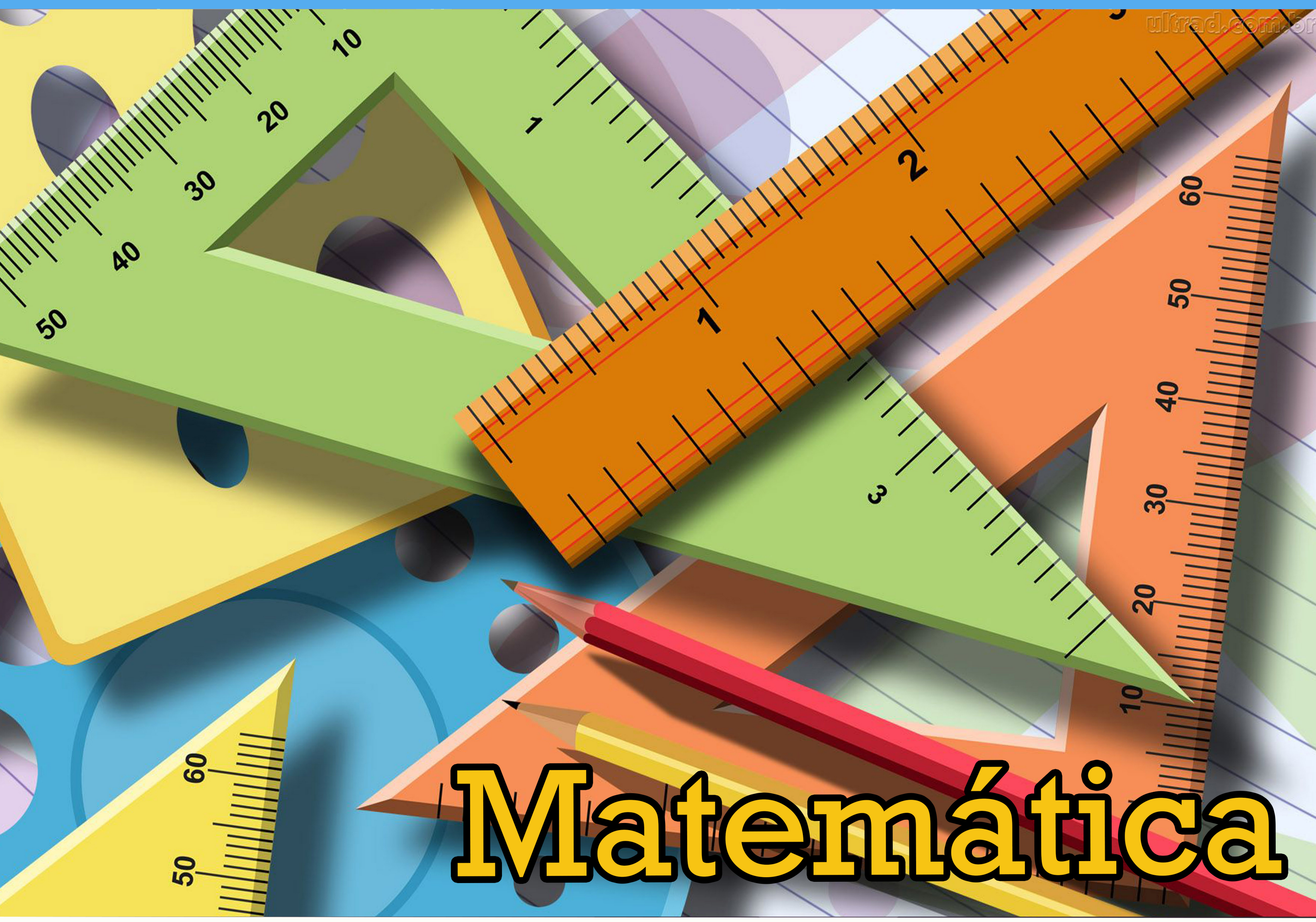
CURSO PREPARATÓRIO
CIDADE
www.cursocidade.com.br
SCLN 113, Bloco "C" - Salas 207 a 210 - Telefones: (61) 3340-0433 / 8175-4509 / 9975-4464 - E-mail: cursocidade@iic.pro.br

Escola de Sargentos das Armas



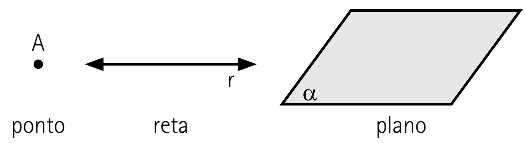
Matemática

Matemática

M15 GEOMETRIA PLANA: SEGMENTOS E ÂNGULOS

CONCEITOS PRIMITIVOS

Assim como as noções de conjunto, elemento e a relação de pertinência são aceitas sem definição na Teoria dos Conjuntos, os conceitos de ponto, reta e plano também são aceitos sem definição na Geometria.



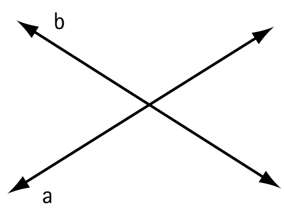
Ponto: letras maiúsculas do nosso alfabeto. A,B,C,...

Reta: letras minúsculas do nosso alfabeto. a,b,c,...

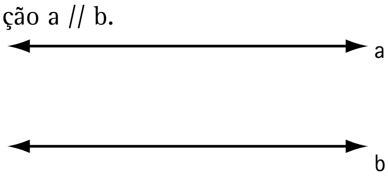
Plano: letras minúsculas do alfabeto grego. α, β, π...

Posição de duas retas distintas em um plano

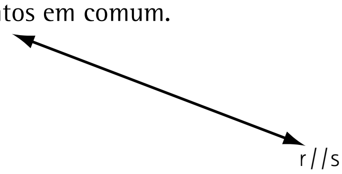
- **Concorrentes:** Possuem um único ponto comum.



- **Paralelas**: Não possuem ponto comum. Notação a // b.

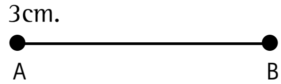


- **Coincidentes:** Retas que possuem infinitos pontos em comum.



Subconjuntos de reta

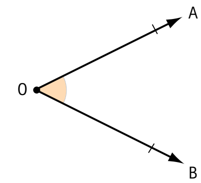
A medida $\overline{AB}$ será denotada por AB. Desse modo, se $\overline{AB}$ é um segmento de reta de 3 cm, escrevemos AB = 3cm.



Dois segmentos que possuem medidas iguais são chamados congruentes, ou seja, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes se, e somente se, $\overline{AB} = \overline{CD}$. Denota-se por $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

ÂNGULOS

A medida de um ângulo AOB será denotada por $A\hat{O}B$. Assim, se $A\hat{O}B$ é um ângulo de 60º, escrevemos: $A\hat{O}B = 60º$.

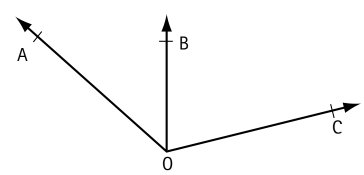


Ângulos congrue ntes

Dois ângulos de medidas iguais são denominados congruentes, ou seja, ABC ≡ DEF se, e somente se, $A\hat{B}C = D\hat{E}F$.

Ângulos adjacentes

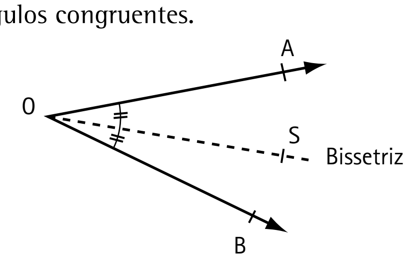
São ângulos que possuem um lado e vértice em comum, porém nenhum ponto interno em comum.



Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são congruentes.

Bissetriz de um ângulo

A bissetriz de um ângulo é a semi-reta de origem no vértice de um ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.



A semi-reta $\overline{OS}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

Medidas de alguns ângulos notáveis

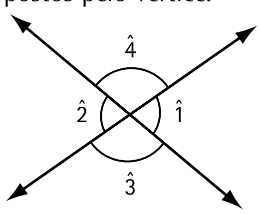
- Ângulo de volta inteira: 360º.
- Ângulo de meia-volta: 180º.
- Ângulo reto: 90º.

Dois ângulos são chamados complementares se a soma de suas medidas é igual a 90º. Cada um é chamado complemento do outro.

Dois ângulos são chamados suplementares se a soma de suas medidas é igual a 180º. Cada um é chamado suplemento do outro.

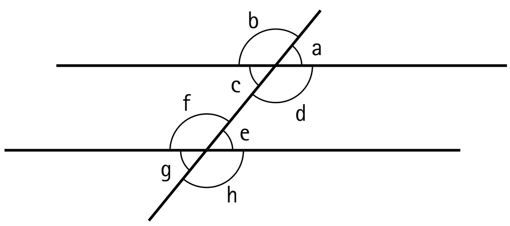
Ângulos opostos pelo vértice

Duas retas concorrentes formam quatro ângulos que são congruentes, dois a dois. Esses ângulos são chamados opostos pelo vértice.



Os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são opostos pelo vértice.

Ângulos de duas paralelas cortadas por uma transversal



Nomenclaturas especiais,

- Alternos Internos: $\hat{c} = \hat{e}$ ou $\hat{d} = \hat{f}$
- Alternos Externos: $\hat{a} = \hat{g}$ ou $\hat{b} = \hat{h}$
- Ângulos Correspondentes: $\hat{a} = \hat{e}$, $\hat{b} = \hat{f}$, $\hat{c} = \hat{g}$, $\hat{d} = \hat{h}$
- Colaterais Internos: $\hat{c} = \hat{f}$, $\hat{d} = \hat{e}$
- Colaterais Externos: $\hat{a} = \hat{h}$, $\hat{b} = \hat{g}$

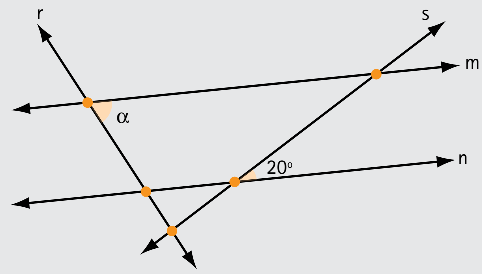
Dica:

Ao resolver problemas que envolvem retas paralelas cortadas por uma transversal, pode ser útil você imaginar que uma das paralelas se desloque, paralelamente à sua posição original, até coincidir com a outra.

A partir desse deslocamento imaginário de uma das retas, você pode perceber, por exemplo, que ângulos correspondentes são congruentes, pois ficam sobrepostos quando as retas coincidem.

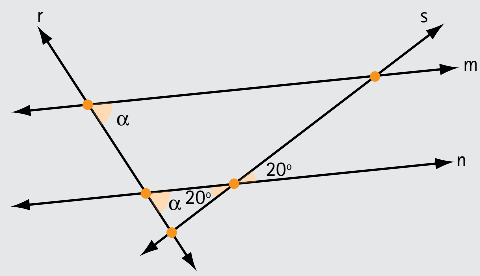
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. (UFJF-MG) Na figura a seguir, as retas r e s são perpendiculares e as retas m e n são paralelas. Então, a medida do ângulo α, em graus, é igual a:



a) 70 b) 60 c) 45
d) 40 e) 30

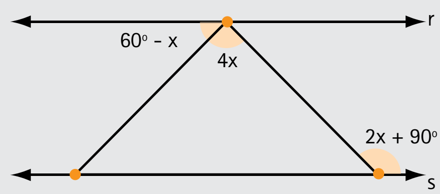
Resposta:



$\alpha + 20° = 90° \Rightarrow \alpha = 70°$

Opção correta: a

2. (EPCAR) Na figura, considere que r//s. Com relação ao número que expressa a medida do ângulo x, pode-se afirmar que é um:



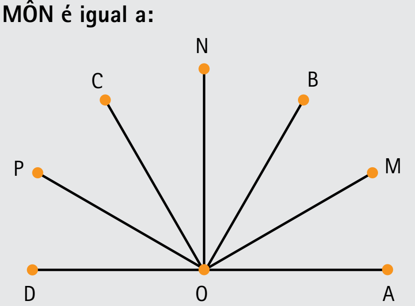
a) Número ímpar.
b) Divisor de 30.
c) Múltiplo de 7.
d) Múltiplo comum de 4 e 6.
e) Número primo maior que 18.

Solução:

$60° - x + 4x = 2x + 90° \Rightarrow x = 30°$

Opção correta: b

3. (EPCAR) Na figura abaixo, OM é a bissetriz do ângulo AÔB, ON é a bissetriz do ângulo BÔC e OP é a bissetriz do ângulo CÔD. A soma PÔD + MÔN é igual a:



a) 90° b) 60°
c) 45° d) 30°

Solução:

Podemos notar pela figura que AÔB + BÔC + CÔD = 180º.

Sabemos que "bissetriz" é o segmento de reta que divide um ângulo ao meio, logo:

$$P\hat{O}D = \frac{C\hat{O}D}{2},\ M\hat{O}A = M\hat{O}B = \frac{A\hat{O}B}{2} \text{ e } B\hat{O}N = N\hat{O}C = \frac{B\hat{O}C}{2}$$

$$\text{daí que } M\hat{O}N = M\hat{O}B + B\hat{O}N = \frac{A\hat{O}B}{2} + \frac{B\hat{O}C}{2}.$$

Pede-se a soma PÔD + MÔN = MÔN + PÔD =

$$\frac{A\hat{O}B}{2} + \frac{B\hat{O}C}{2} + \frac{C\hat{O}D}{2} = \frac{A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}D}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Opção correta: A

PRATICANDO

1. **(EsSA) A soma de dois ângulos vale 125° e um deles é a metade do suplemento do outro. O complemento do menor deles vale:**

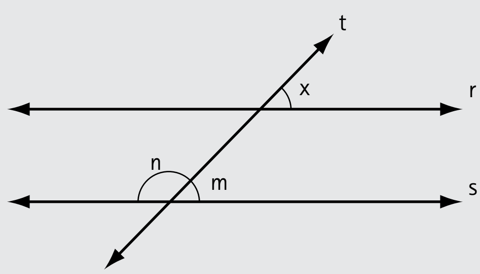
   a) 35° b) 45°
   c) 55° d) 25°
   e) 15°

2. **(EsSA) O ângulo do vértice de um triângulo isósceles mede 67°18'. O ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos da base do triângulo vale:**

   a) 123°39' b) 132°39'
   c) 139°23' d) 139°32'
   e) 123°32'

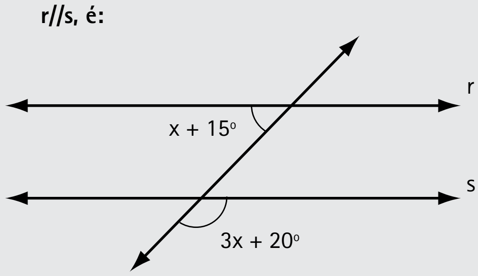
3. **(EsSA) Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas e a reta t é transversal às duas. O ângulo m é a quarta parte do ângulo n.**

   O valor de x é:



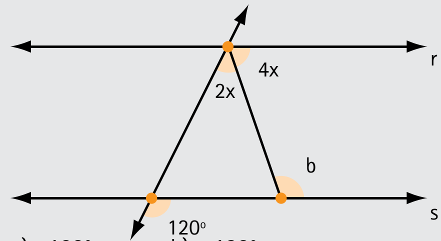
   a) 36° b) 45°
   c) 60° d) 120°
   e) 150°

4. **(EsSA) O valor de x na figura abaixo, onde r//s, é:**



   a) 36'15° b) 2°30'
   c) 34°15' d) 36°15'
   e) 36°

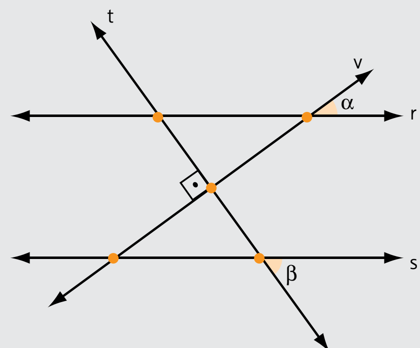
5. **(UFGO) Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas. A medida do ângulo b é:**



   a) 100° b) 120°
   c) 110° d) 140°
   e) 130°

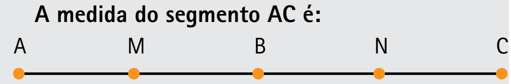
6. **(CESESP) Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas e as retas t e v são perpendiculares.**

   Assinale, então, dentre as alternativas a seguir, a única que completa corretamente a sentença: "Os ângulos distintos α e β são...



   a) opostos pelo vértice".
   b) adjacente".
   c) suplementares".
   d) complementares".
   e) sempre congruentes".

7. **(EsSA) Na figura abaixo, o segmento AB mede 14cm e o segmento MN mede 12cm, M é o ponto médio de AB e N o ponto médio de BC. A medida do segmento AC é:**



   a) 28 b) 20
   c) 12 d) 19
   e) 24

8. **(EsSA) Considere os pontos colineares A, B, O e C na ordem OABC, se AO = 3cm, OB = 5cm e 4AB + AC – 2BC = 6cm, então a distância, em cm, entre os pontos O e C é igual a:**

   a) 5 b) 6
   c) 7 d) 8
   e) 9

9. **(CEFET) Sejam A, B e C respectivamente as medidas do complemento, suplemento e replemento do ângulo de 40°, têm-se:**

   a) A = 30°; B = 60°; C = 90°
   b) A = 30°; B = 45°; C = 60°
   c) A = 320°; B = 50° ; C = 140°
   d) A = 50°; B = 140°; C = 320°
   e) A = 140°; B = 50°; C = 320°

10. **(EsSA) A transformação de 9° em segundos:**

    a) 540'' b) 22400''
    c) 32400'' d) 3600''
    e) 100''

11. **(EsSA) Efetuando 42°15'29'' – 20°42'20'' encontramos:**

a) 20°33'9''
b) 21°33'9''
c) 22°28'7''
d) 22°28'17''
e) 23°15'29''

12. **(EsSA) O complemento de $\frac{3}{4}$ de 79°35'48'' mede:**

a) 7°48'9''
b) 16°7'44''
c) 30°18'9''
d) 30°48'52''
e) 73°52'16''

13. **(EsSA) Dois ângulos x e y (x > y) são complementares. Um deles é o quádruplo do outro. A diferença x – y vale:**

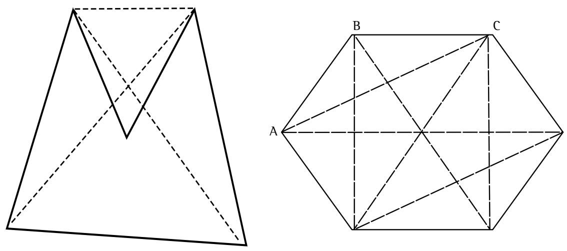
a) 75°
b) 80°
c) 54°
d) 15°
e) 70°

Anotações

M16 GEOMETRIA PLANA: POLÍGONOS

Definição

Um polígono é convexo se, quaisquer que sejam os pontos X e Y do seu interior, o segmento de reta XY está inteiramente contido em seu interior. Caso contrário, o polígono é chamado de côncavo.



Côncavo Convexo

Observação: No polígono convexo, se traçarmos as diagonais veremos que todas elas estarão inteiramente contidas na região interna do polígono.

O polígono é nomeado a partir do seu número de lados, por exemplo,

LADOS	NOME
3	Triângulo
4	Quadrado
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Diagonais a partir de um vértice de um polígono

O número de diagonais traçadas a partir de um vértice de um polígono é definido por

$$d_v = n - 3$$

Diagonais totais de um polígono

O número das diagonais diferentes traçadas a partir de todos os vértices é definido por

$$D = \frac{n\,(n-3)}{2}$$

Soma dos ângulos internos de um polígono

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados é dada por:

$$S_i = 180^o\,(n - 2)$$

Soma dos ângulos externos de um polígono

Em todo polígono convexo, a soma das medidas dos ângulos externos é constante e igual a 360º,

$$S_e = 360^o$$

Observação: é importante reforçar que a soma dos ângulos externos é constante, qualquer que seja o número de lados do polígono convexo.

Polígonos regulares

Um polígono é regular se, e somente se:

- todos os seus lados são congruentes;
- todos os seus ângulos internos são congruentes.

Da definição decorre que os ângulos externos de um polígono regular também são congruentes. Desse modo, como a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono é igual a 360º, a medida de um ângulo externo de um polígono regular de n lados é igual a:

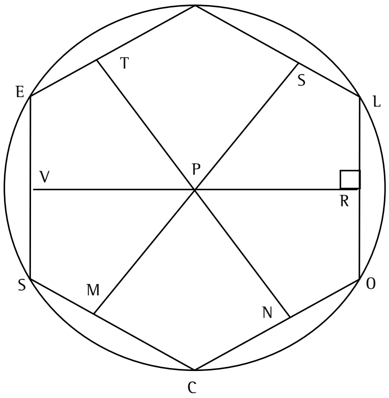
$$a = \frac{360^o}{n}$$

O perímetro dos polígonos é definido como somatório da medida de todos os lados do polígono, ou seja,

$$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{AN}$$

Apótema

É o segmento com extremidades no centro da circunferência que circunscreve um polígono regular e no ponto médio dos seus lados.



A figura acima apresenta um hexágono inscrito em uma circunferência, onde o segmento $\overline{PR}$ representa seu apótema.

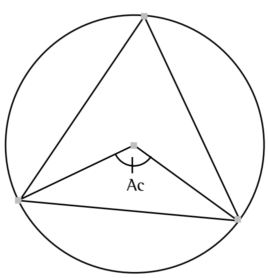
Ângulo central de um polígono

É o ângulo que representa como vértice, o centro da circunferência que circunscreve um polígono e como lado o raio da mesma. Sua abertura compreende ao arco que tem como corda o lado do polígono regular.

Sua medida varia com o número de lados do polígono, e é definida por

$$A_{central} = \frac{360^o}{n}$$

A figura abaixo representa o ângulo central de um triângulo inscrito em uma circunferência.



Propriedades de polígonos inscritos em circunferências

Considere r o raio da circunferência circunscrita ao polígono.

Triângulo

Ângulo central = 120^o

Lado = $r\sqrt[2]{3}$

Apótema = $\frac{r}{2}$

Quadrado

Ângulo central = 90^o

Lado = $r\sqrt[2]{2}$

Apótema = $\frac{r\sqrt[2]{2}}{2}$

Hexágono

Ângulo central = 60^o

Lado = r

Apótema = $\frac{r\sqrt[2]{3}}{2}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **(Epcar) Um polígono regular possui, a partir de cada um dos seus vértices, tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono. Cada ângulo interno desse polígono mede, em graus:**

a) 140

b) 150

c) 155

d) 160

Resposta: B

$$D_6 = \frac{6(3)}{2} = 9$$

$$D_v = m - 3 \Rightarrow m = 12$$

$$A_i = \frac{180^o(12-2)}{12} = 150$$

2. **(Cefet) A soma de seis ângulos internos de um octógono convexo é 880º. Se a diferença entre os outros dois ângulos é de 200º, eles valem, respectivamente:**

a) 80º e 100º

b) 90º e 110º

c) 110º e 130º

d) 420º e 440º

e) 430º e 450º

Resposta: B

$$S_{ai} = 180^o(8-2) = 1080^o$$

Sejam a e b os dois ângulos procurados. Assim:

$$\begin{cases} a+b=200 \\ a-b=20 \end{cases}$$

$$2a = 220$$

$$a = 110°$$

$$110 + b = 200$$

$$b = 90°$$

3. **(CN) Um polígono regular possui 70 diagonais que não passam pelo seu centro. O valor da medida do ângulo interno do referido polígono está, em graus, compreendido entre:**

a) 70º e 80º

b) 100º e 120º

c) 120º e 130º

d) 140º e 150º

e) 150º e 160º

Resposta: E

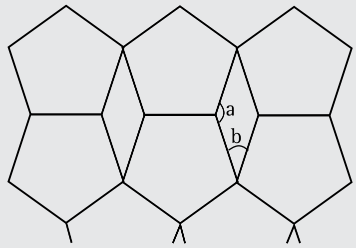
$$D_t - D_c = \frac{n(n-3)}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n-4)}{2} \Rightarrow \frac{n(n-4)}{2} = 70 \Rightarrow$$

$$n^2 - 4n - 140 = 0 \begin{cases} n' = 14 \\ n'' = -10, \text{ não serve} \end{cases}$$

$$a_i = \frac{180^o(n-2)}{n} = \frac{1080^o}{7} = 154{,}28°$$

PRATICANDO

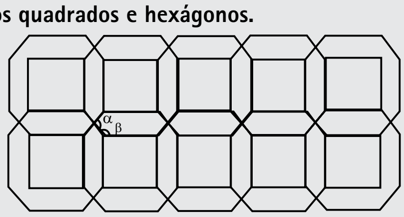
1. **(CMRJ) Observe o mosaico abaixo, que é formado por pentágonos regulares e losangos:**



Nesse mosaico, a diferença entre a medida do ângulo â e a metade do ângulo $\hat{b}$ é:

a) 144º b) 126º c) 108º
d) 72º e) 36º

2. **(Cefeteq) A partir de elementos da natureza como o favo de mel, a casca do abacaxi e o casco da tartaruga, o homem cria arranjos com a repetição das formas geométricas desses elementos, aos quais chama de mosaico. No mosaico ilustrado abaixo, foram combinados quadrados e hexágonos.**

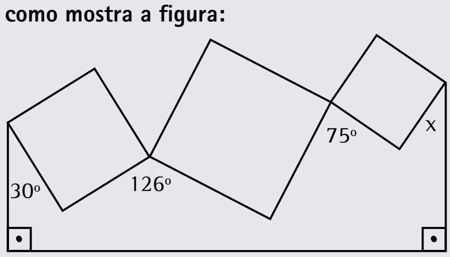


Sabendo que os hexágonos são iguais entre si e não são regulares, determine, em graus, a soma das medidas dos ângulos α e β.

3. **(OBM) Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. 12 delas são pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos também regulares. Os lados dos pentágonos são iguais aos dos hexágonos de forma que possam ser costurados. Cada costura une dois lados de duas dessas peças. Quantas são as costuras feitas na fabricação de uma bola de futebol?**

a) 60 b) 64 c) 90
d) 120 e) 180

4. **(OBM) Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura:**



A medida do ângulo x é:

a) 39º b) 41º c) 43º
d) 44º e) 46º

5. **(CN) Um polígono regular tem vinte diagonais. A medida em graus, de um de seus ângulos internos é:**

a) 201º b) 167º c) 162º
d) 150º e) 135º

6. **A medida do ângulo externo de um polígono regular é 45º. Calcule o total de diagonais do polígono.**

a) 10 b) 20 c) 30
d) 35 e) 50

7. **(EsSA) Considere um polígono regular ABCDEF... Sabe-se que as mediatrizes dos lados AB e CD formam um ângulo de 20º e sua região correspondente contém os vértices "B" e "C" do polígono. Assim sendo, quantas diagonais deste polígono passam pelo centro, dado que o seu número de vértices é maior que seis?**

a) 17 b) 15 c) 16
d) 18 e) 14

8. **(EsSA) Se um polígono regular é tal que a medida de um ângulo interno é o triplo da medida do ângulo externo, o número de lados desse polígono é:**

a) 12 b) 9 c) 6
d) 4 e) 8

9. **(EsSA) No polígono regular ABCDE..., o número de diagonais é o triplo do número de lados. Nesse polígono, o ângulo formado pela bissetriz do ângulo interno Â com a mediatriz do lado $\overline{BC}$ mede:**

a) 10º b) 20º c) 40º
d) 60º e) 80º

10. **(ITA-SP) A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 2160º. Então, o número de diagonais deste polígono, que não passam pelo centro da circunferência que o circunscreve, é:**

a) 50 b) 60 c) 70
d) 80 e) 90

Observação: Números de diagonais que passam pelo centro de um polígono regular = $\frac{n}{2}$; quando n é par.

Anotações

GEOMETRIA PLANA: TRIÂNGULOS

Definição

É um polígono regular com três lados. A soma das medidas dos seus ângulos internos é igual a 180º.

Classificação dos triângulos

Em função dos ângulos

Acutângulo

Seus três ângulos são agudos, ou seja, menores do que 90º.

Retângulo

Um de seus ângulos é reto, ou seja, igual a 90º.

O lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa e os lados adjacentes são os catetos.

Obtusângulo

Um dos seus ângulos é obtuso, ou seja, maior do que 90º.

Em função dos lados

Escaleno

Seus três lados e os três ângulos internos têm medidas diferentes.

Isósceles

Possui dois lados congruentes.

O ângulo formado pelos lados congruentes é denominado ângulo do vértice.

O lado oposto ao ângulo do vértice é denominado base.

Os ângulos da base são congruentes.

Eqüilátero

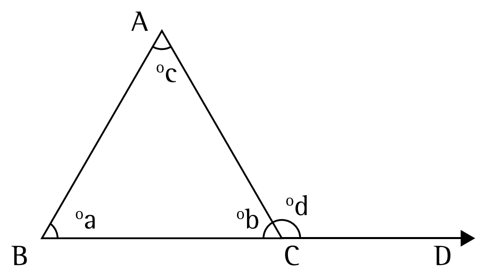
Seus três lados e os três ângulos internos são congruentes.

Cada um dos ângulos internos mede 60º, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Teorema do ângulo externo

Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo qualquer é igual a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Observação: em um triângulo, o prolongamento de um lado qualquer determina com outro lado um ângulo denominado externo.



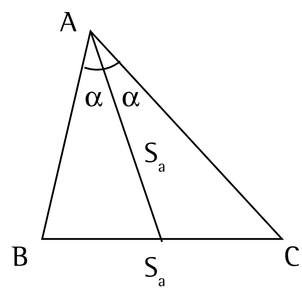
O ângulo $\hat{d}$ é o ângulo externo do vértice C, e $\hat{b} + \hat{d} = 180º$.

Cevianas de um triângulo

É qualquer segmento de reta que tem uma extremidade nem vértice de um triângulo e a outra num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto a esse vértice.

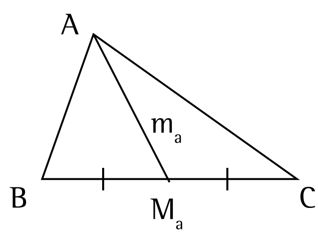
Bissetriz interna

É qualquer ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos congruentes.



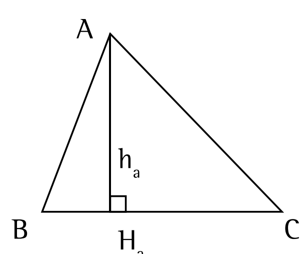
Mediana

É qualquer ceviana que tem como pé o ponto médio de um lado.



Altura

É qualquer ceviana perpendicular a um lado.



Observação:

De um modo geral, bissetriz interna, mediana e altura são cevianas distintas, mas no caso do Triângulo Isósceles, as três coincidem em um único segmento se forem relacionadas à base desse triângulo.

Mediatriz

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento conduzida pelo seu ponto médio.

Pontos notáveis do triângulo

Incentro

É o ponto de encontro das bissetrizes internas. Além disso, é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Baricentro

É o ponto de encontro das medianas. Além disso, divide cada mediana em dois segmentos que estão na razão de 2 para 1.

Ortocentro

É o ponto de encontro das alturas.

Circuncentro

É o ponto de encontro das mediatrizes dos lados. Além disso, é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Observação:

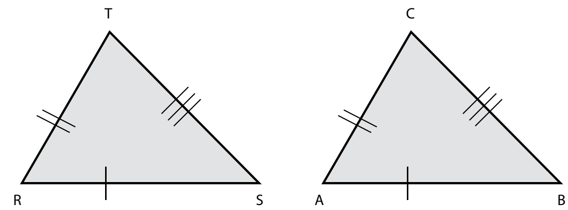
No triângulo eqüilátero, o incentro, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro coincidem num único ponto O, chamado centro do triângulo eqüilátero. Como O é também o baricentro do triângulo, esse ponto divide a altura h em segmentos proporcionais a 2 e 1. Assim, se r e R são os raios das circunferências inscrita e circunscrita, e h é a altura, é imediato que $r = h/3$ e $R = 2h/3$.

Congruência de triângulos

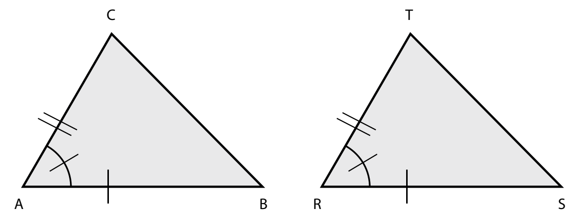
Dois triângulos são congruentes se os seus lados e ângulos forem ordenadamente congruentes.

Critérios de congruência de triângulos

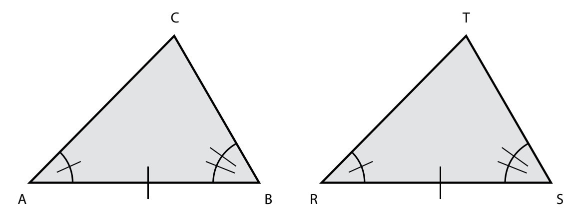
L.L.L (Lado, Lado, Lado) – dois triângulos são congruentes se os lados de um são respectivamente congruentes aos lados do outro.



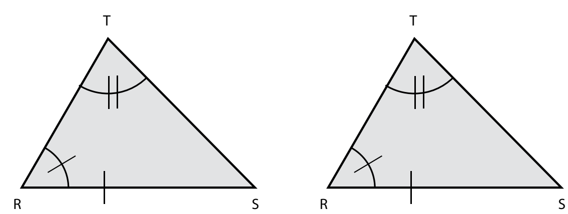
L.A.L. (Lado, Ângulo, Lado) – dois triângulos são congruentes, se dois lados de um são congruentes a dois lados do outro e os ângulos compreendidos entre esses lados são também congruentes.



A.L.A. (Ângulo, Lado, Ângulo) – dois triângulos são congruentes se dois ângulos de um são congruentes a dois ângulos do outro e os lados adjacentes a esses ângulos são também congruentes.



L.A.Ao (Lado, Ângulo, Ângulo Oposto) – dois triângulos são congruentes se um lado e um ângulo adjacente são congruentes a um lado e um ângulo adjacente do outro e os ângulos opostos a esses lados são também congruentes.



Atanção:

Quando escrevermos, por exemplo, $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, a ordem das letras A, B, C e D, E, F, indica que, se pudéssemos deslocar um desses triângulos até fazê-lo coincidir perfeitamente com o outro, os vértices que ficariam sobrepostos seriam A e D, B e E, C e F.

Assim, a linguagem escrita já informa quais lados e quais ângulos são congruentes, ou seja,

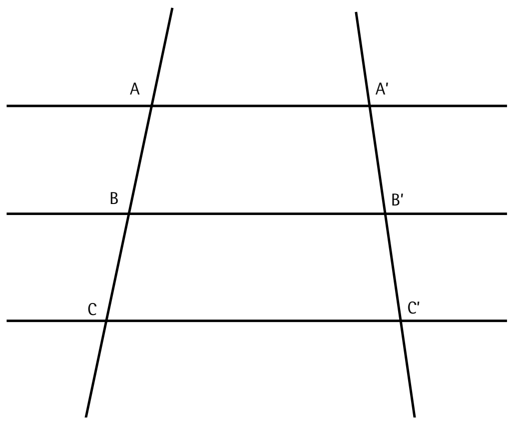
$$\hat{A} = \hat{D}\ ,\ \hat{B} = \hat{E}\ ,\ \hat{C} = \hat{F}$$

$$AB = DE\ ,\ BC = EF\ ,\ AC = DF$$

Teorema de Tales

Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então esse feixe determina segmentos congruentes sobre qualquer transversal.

Teorema de Tales: Um feixe de paralelas separa, sobre duas transversais quaisquer, segmentos de uma proporcionais aos segmentos correspondentes na outra.



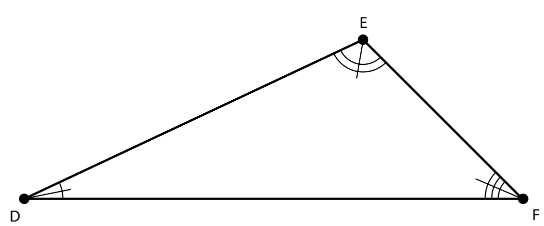
A reta que passa pelo ponto médio de um lado de um triângulo e é paralela a um outro lado intercepta o terceiro lado em seu ponto médio.

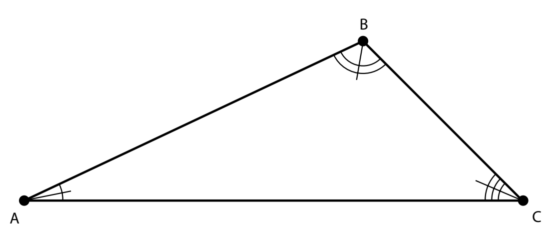
Propriedade: O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e sua medida é a metade da medida do terceiro lado.

Se M e N são pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, então, $\overline{MN}$ // $\overline{BC}$ e $\overline{MN} = BC/2$

Triângulos semelhantes

São triângulos que têm ângulos respectivamente congruentes e lados respectivamente proporcionais, ou seja,



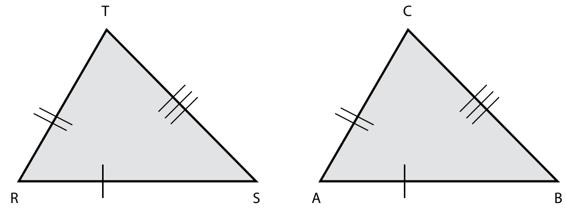


$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = K \text{ (Razão de semelhança)}$$

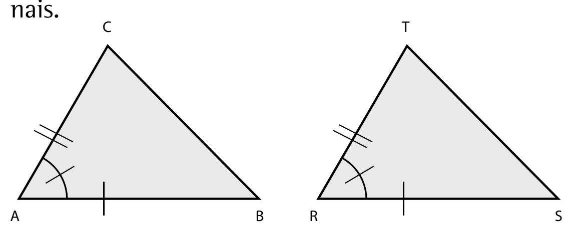
Critérios de semelhança de triângulos

A.A. (Ângulo, Ângulo) – dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois ângulos do outro.

L.L.L. (Lado, Lado, Lado) – dois triângulos são semelhantes se os lados de um são proporcionais aos lados do outro.

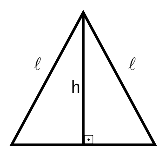


L.A.L. (Lado, Ângulo, Lado) – dois triângulos são semelhantes se possuem um par de ângulos congruentes compreendidos entre lados proporcionais.



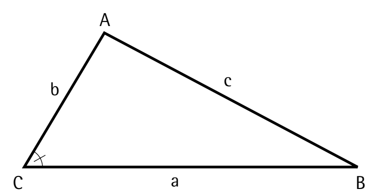
Fórmulas especiais para o cálculo da Área de um triângulo

Triângulo equilátero:



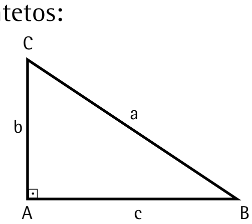
$$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Área de um Triângulo em função de um ângulo x e dois de seus lados:



$$S = \frac{1}{2} \,.\, ab\ \text{sen}(x)$$

Área de um Triângulo retângulo em função dos catetos:



$$S = \frac{bc}{2}$$

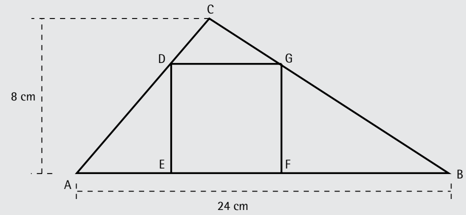
Área de um Triângulo em função dos lados (Fórmula de Heron):

$$P = \frac{a + b + c}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. (Epcar) Sendo DEFG um quadrado inscrito no triângulo ABC, conforme se apresenta na figura abaixo, pode-se afirmar que a área do pentágono CDEFG, em cm², mede:



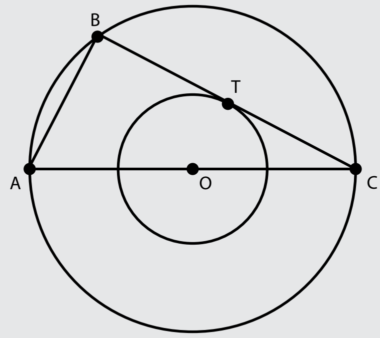
a) 24 b) 36
c) 38 d) 42

Resposta: D

$$\frac{8}{8-x}=\frac{24}{x}$$
$$x=6$$

$$S_{DEFG}=6^2=36$$
$$S_{CDG}=\frac{6\cdot 2}{2}=6$$
$$S_{CDEFG}=42$$

2. (Cefet) Na figura abaixo, os dois círculos têm centro O. Se AC é um diâmetro, BC é uma corda da circunferência maior tangente à circunferência menor em T e AB = 12 cm, a distância de O a T é:

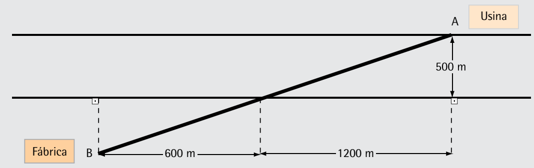


a) 6 cm b) 2π cm
c) $\frac{19}{3}$ cm d) 8cm
e) $\sqrt{67}$ cm

Resposta: A

$$AC=2\pi$$
$$OC=2\pi$$
$$\frac{2\pi}{\pi}=\frac{12}{x}$$
$$x=6$$

3. (Cefeteq) Às margens do rio Cotovia, construiu-se a usina hidrelétrica Luz do Mundo, conectada a uma fábrica junto à margem oposta. Essa conexão foi realizada por intermédio de um cabo elétrico representado, na figura abaixo, pelo segmento AB. Calcule a distância da fábrica ao rio, de acordo com os dados desta figura:



Resposta:

$$\frac{x}{500+x}=\frac{600}{1800}$$
$$x=250$$

PRATICANDO

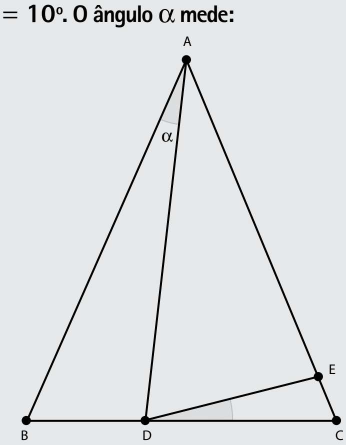
1. (EsSA) Num triângulo, um dos ângulos mede 25° e o outro 100°. O valor do terceiro ângulo é:

a) 55° b) 65°
c) 75° d) 80°
e) 125°

2. (EsSA) Os lados de um triângulo medem 5cm, 12cm e 13cm. A natureza desse triângulo é:

a) retângulo. b) obtusângulo.
c) acutângulo. d) isósceles.
e) equilátero.

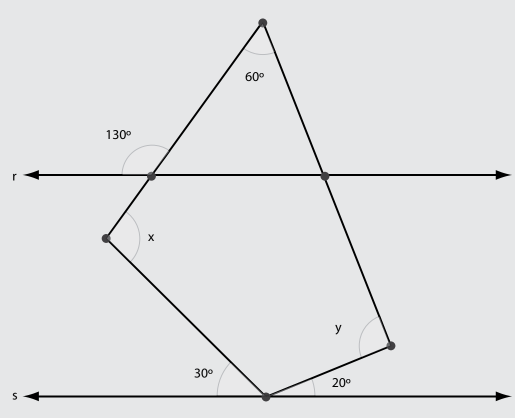
3. (MACK – SP) Na figura, $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{AD}=\overline{AB}$ e $C\hat{D}E=10^{o}$. O ângulo α mede:



a) 10° b) 15°
c) 20° d) 25°
e) 30°

4. (UEL-PR) Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas:

A medida y é igual a:

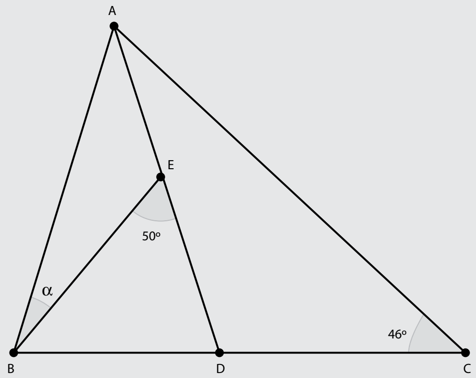


a) 70°   b) 80°

c) 90°   d) 100°

e) 110°

5. (UFMG) Na figura abaixo, DB = DE e AD é bissetriz interna no triângulo ABC. O ângulo α mede:

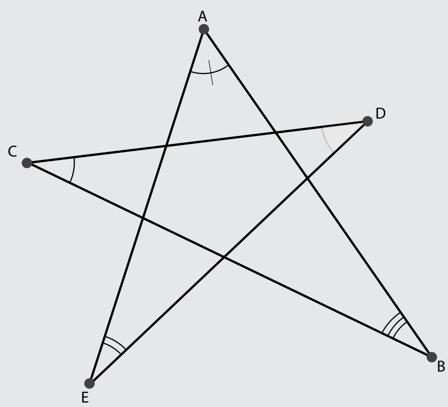


a) 10°   b) 14°

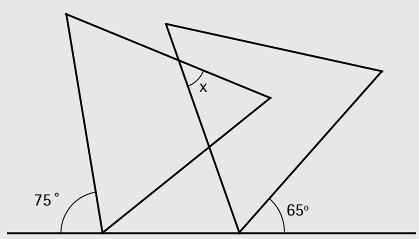
c) 16°   d) 18°

e) 20°

6. (UFF-RJ-Adaptada) Calcular a soma dos ângulos internos do pentágono ABCDE:



7. (OBM) Na figura, os dois triângulos são equiláteros. Qual é o valor do ângulo x?

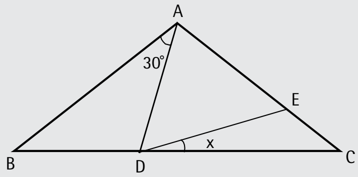


a) 30º   b) 40º

c) 50º   d) 60º

e) 70º

8. (OBM) Na figura, AB = AC, AE = AD e o ângulo BAD mede 30º. Então o ângulo x mede:

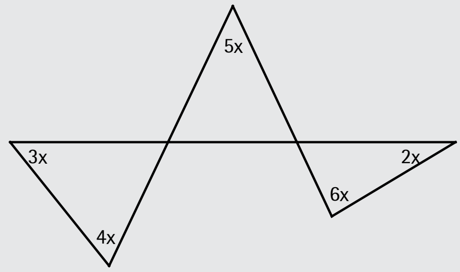


a) 10º   b) 20º

c) 15º   d) 30º

e) 5º

9. (OBM) Na figura, quanto vale x?

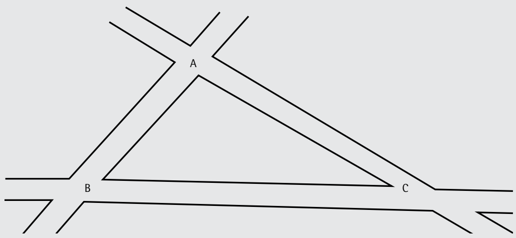


a) 6º   b) 12º

c) 18º   d) 20º

e) 24º

10. (Cefet) Um poste deverá ser fixado equidistante das três esquinas A, B e C, conforme a figura a seguir, para que as ilumine igualmente. O poste deverá ser fixado no:



a) incentro, que é a interseção das mediatrizes do triângulo formado pelas três ruas;

b) ortocentro, que é a interseção das mediatrizes do triângulo formado pelas três ruas;

c) circuncentro, que é a interseção das medianas do triângulo formado pelas três ruas;

d) ortocentro, que é a interseção das alturas do triângulo formado pelas três ruas;

e) circuncentro, que é a interseção das mediatrizes do triângulo formado pelas três ruas.

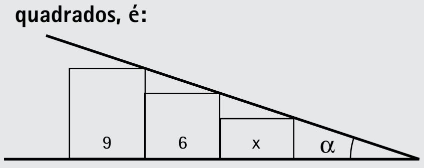
11. (CMRJ) Uma rampa, de inclinação constante, tem 4m de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que após caminhar 12,3m sobre a rampa está a 1,5m de altura em relação ao solo. Quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa?

a) 32,8m   b) 29,7m

c) 22,7m   d) 20,5m

e) 19,5m

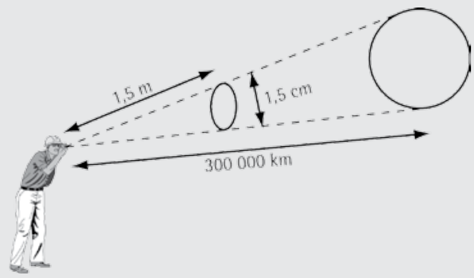
12. (Epcar) Na figura abaixo, o valor da tangente de α, sabendo-se que os quadriláteros são quadrados, é:



a) 0,3   b) 0,5

c) 0,6   d) 0,7

13. (Fiocruz) Olhando para o céu, e com a ajuda de um colaborador, uma pessoa coloca uma moeda de 1,5cm de diâmetro a uma distância de 1,5m de seus olhos, de modo que ela recobra completamente a Lua cheia. Qual é o diâmetro da Lua considerando que ela está a 300.000km da Terra?



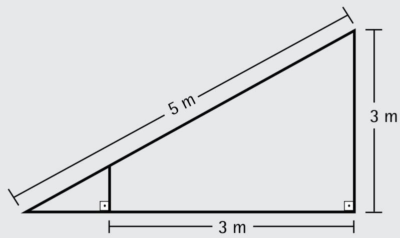
a) 1500km b) 3000km

c) 4500km d) 15000km

e) 30000km

14. (Faetec) O acesso a um terreno mais alto foi destruído e uma nova rampa foi construída. O comprimento dessa rampa é de 5 metros e a distância do início da rampa até o paredão é de 4 metros. Para melhor sustentar a rampa será colocada uma estaca a 3 metros do paredão, conforme figura abaixo:

A altura dessa estaca será, em metros, de:



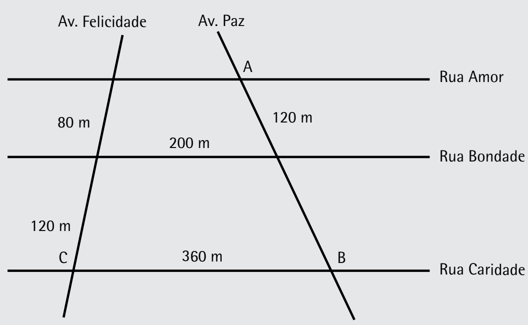
a) 1,5

b) 1,0

c) 0,75

d) 0,50

15. (Pedro II) As ruas Amor, Bondade e Caridade são paralelas e as avenidas Paz e Felicidade são transversais a essas ruas.



Arthur mora na esquina da Rua Amor com a Avenida Paz indicada na figura pelo ponto A. Para ir à vídeo locadora situada na esquina da Rua Caridade com a Avenida Paz, indicada pelo ponto B, quantos metros, no mínimo, Arthur percorre?

Anotações

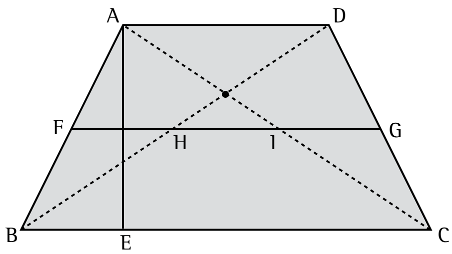
GEOMETRIA PLANA: QUADRILÁTEROS

Definição

É um polígono regular com quatro lados. A soma das medidas dos seus ângulos internos é igual a 360º.

Trapézios

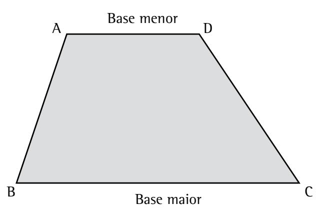
É todo quadrilátero que possui um par e somente um par, de lados opostos paralelos.



$$\text{Área: } S = \frac{(BASE_{maior} + BASE_{menor}) \;.\; altura}{2}$$

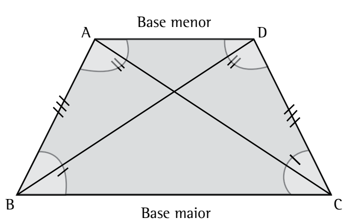
Trapézio escaleno

Os lados têm medidas diferentes, conseqüentemente não possui ângulos congruentes.



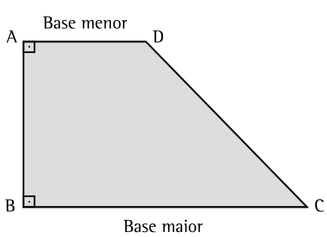
Trapézio isósceles

Os lados transversos têm medidas iguais. Os ângulos de uma mesma base de um trapézio isósceles são congruentes.



Trapézio retângulo

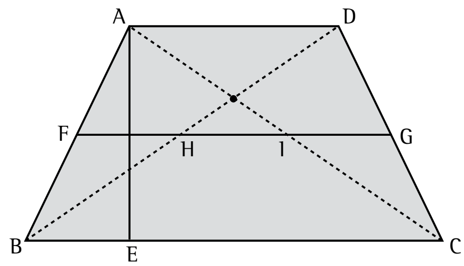
Um dos lados transversos é perpendicular às bases.



Base média do trapézio

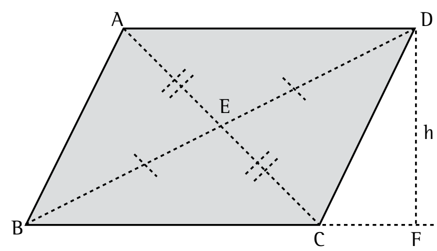
É o segmento paralelo às bases e que une os pontos médios dos lados não paralelos, e é definida por

$$B_{média} = \frac{B_{maior} + B_{menor}}{2}$$



Paralelogramos

É todo quadrilátero que possui os lados opostos respectivamente paralelos.



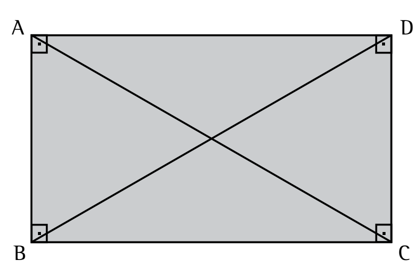
Área: S = Base . altura

Propriedades

- Os ângulos opostos são congruentes.
- Quaisquer dois ângulos adjacentes a um mesmo lado são suplementares.
- Os lados opostos são congruentes.
- As diagonais dividem-se ao meio pelo seu ponto de interseção.

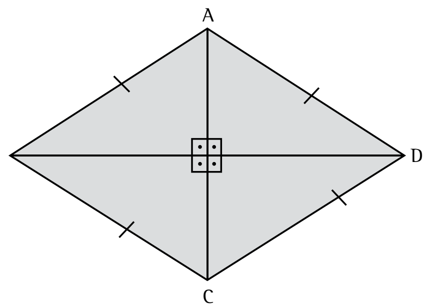
Tipos de paralelogramos

Retângulo – é todo paralelogramo que possui seus quatro ângulos retos. As diagonais são congruentes.



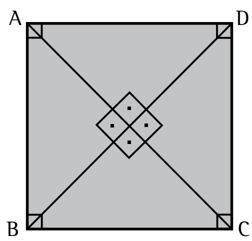
Área: S = Base . altura

Losango – é todo paralelogramo que possui quatro lados congruentes. As diagonais são perpendiculares e são bissetrizes dos ângulos internos.



$$\text{Área: } S = \frac{(\text{diagonal}_{\text{maior}} + \text{diagonal}_{\text{menor}})}{2}$$

Quadrado – é todo paralelogramo que é retângulo e losango simultaneamente, isto é, seus ângulos são retos e seus lados são congruentes. As diagonais são congruentes, perpendiculares e seus lados são bissetrizes dos ângulos internos.



$$\text{Área: } S = \text{Base} \cdot \text{altura}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **(EsSA) Seja um paralelogramo, cujo perímetro é 80cm e o lado menor é 3/5 da medida do lado maior. Os lados do paralelogramo são:**

   a) 25 e 15 b) 28 e 12
   c) 24 e 16 d) 30 e 10
   e) 22 e 18

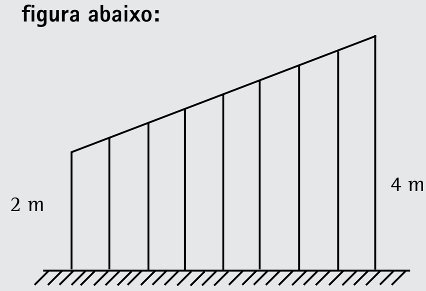
   Resposta: A

   $2x + 2y = 80 \Rightarrow x + y = 40 \Rightarrow$

   $x + \frac{3}{5}x = 40 \Rightarrow 5x + 3x = 200 \Rightarrow$

   $8x = 200 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow \frac{2}{3}x = 15$

2. **(Cefet- 1ª fase) Para ter seus dois extremos apoiados sobre duas colunas, uma viga necessitará, segundo cálculos do engenheiro responsável, de mais sete colunas intermediárias. A coluna mais à esquerda mede 2m e, a que sustenta a outra extremidade, 4m, conforme figura abaixo:**



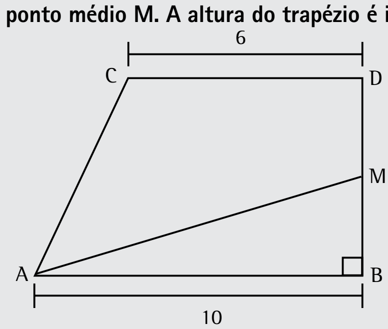
Sabendo que os intervalos entre as nove colunas serão exatamente iguais, podemos afirmar que a menor coluna intermediária deverá medir:

a) 3m b) 2,25m c) 3,20m
d) 3,25m e) 3,75m

Resposta: A

$B_{Media} = \frac{4+2}{2} = 3m$

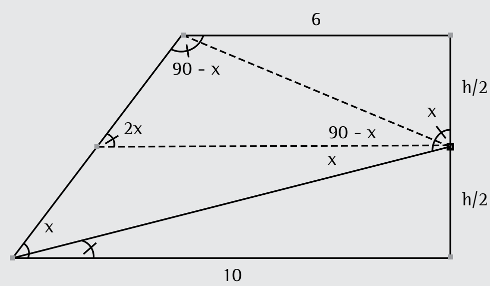
3. **(CN) O trapézio ABCD da figura é retângulo. A bissetriz do ângulo $\hat{A}$ intercepta $\overline{BC}$ no seu ponto médio M. A altura do trapézio é igual a:**



a) $2\sqrt{15}$ b) $8\sqrt{15}$
c) $6\sqrt{15}$ d) $4\sqrt{15}$
e) $5\sqrt{15}$

Resposta: D

Traçando $\overline{MN}$ paralela a $\overline{AB}$ temos que: $\overline{MN}$ será base média e $\overline{AN} = \overline{MN} = \overline{ND}$, logo o triângulo AMD é retângulo.



$$\Delta MDC \cong \Delta AMB \Rightarrow \frac{6}{\frac{h}{2}} = \frac{\frac{h}{2}}{10} \rightarrow h = 4\sqrt{15}$$

PRATICANDO

1. **(UNIFESP) Em um paralelogramo, as medidas de dois ângulos internos consecutivos estão na razão 1 : 3. O menor ângulo desse paralelogramo mede:**

   a) 45° b) 50° c) 55°
   d) 60° e) 65°

2. **(UFES) Seja ABCD um trapézio retângulo. O ângulo formado pelas bissetrizes do seu ângulo reto e do ângulo consecutivo da base maior mede 92°. Os ângulos agudo e obtuso deste trapézio medem, respectivamente:**

   a) 88° e 92° b) 86° e 94°
   c) 84° e 96° d) 82° e 98°
   e) 79° e 101°

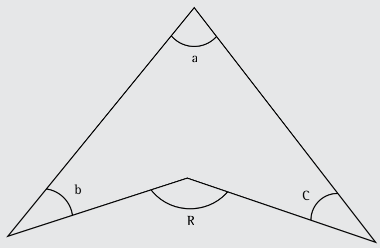
3. **(MAA) Seja ABCD um paralelogramo, em que M é o ponto médio de AB e N é o ponto médio de BC. As bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ cortam-se no ponto I, e as bissetrizes de $\hat{B}$ e $\hat{C}$ cortam-se no ponto P. Se IM = 2cm e PN = 6cm, calcule o perímetro do paralelogramo:**

a) 8cm b) 16cm c) 24cm
d) 32cm e) 40cm

4. **(CMRJ) Um trapézio circunscrito a um círculo possui base média de medida 5m. O seu perímetro é:**

a) 10m b) 15m c) 20m
d) 25m e) 30m

5. **(Cefet- 2ª fase) Considere o quadrilátero da figura abaixo e calcule a medida do ângulo R em função das medidas de a b e c.**



a) $R = a - (b + c)$ b) $R = a + b + c$
c) $R = a \cdot b \cdot c$ d) $R = 180 + a + b - c$
e) $R = 180$

6. **(CN) Considere as quatro afirmações abaixo. A seguir coloque (V) ou (F) nos parênteses. Conforme sejam verdadeiras ou falsas e assinale a alternativa correta.**

I. ( ) Em qualquer trapézio circunscrito a uma circunferência, a medida da base média é a quarta parte do seu perímetro;
II. ( ) As diagonais de um trapézio podem se interceptar no seu ponto médio;
III. ( ) Todo quadrilátero que tem as diagonais perpendiculares é um losango ou um quadrado;
IV. ( ) Existe um quadrilátero plano cujos segmentos das diagonais não se interceptam.

a) Apenas II é verdadeira;
b) Apenas III é verdadeira;
c) apenas III e IV são verdadeiras;
d) II, II e IV são verdadeiras;
e) I e IV são verdadeiras.

7. **(CN) Um retângulo é obtido unindo-se os pontos médios de um trapézio retângulo ABCD, de bases AB = 32 e CD = 8. A altura BC é igual a:**

a) 8 b) 10 c) 12
d) 16 e) 20

8. **Se uma diagonal de um losango forma um ângulo de 22º com um dos lados, um dos ângulos desse losango mede:**

a) 66º b) 68º
c) 136º d) 148º

9. **Considere as seguintes proposições:**

- todo quadrado é um losango;
- todo quadrado é um retângulo;
- todo retângulo é um paralelogramo;
- todo triângulo equilátero é isósceles.

Pode-se afirmar que:

a) Só uma é verdadeira.
b) Todas são verdadeiras.
c) Só uma é falsa.
d) Duas são verdadeiras e duas são falsas.

10. **A afirmação falsa é:**

a) Todo quadrado é um losango.
b) Existem retângulos que não são losangos.
c) Todo quadrado é um retângulo.
d) Um losango pode não ser um paralelogramo.

11. **Num trapézio isósceles de bases diferentes, uma diagonal é também bissetriz de um ângulo adjacente à base maior. Isto significa que:**

a) Os ângulos adjacentes à base menor não são congruentes.
b) A base menor tem medida igual à dos lados oblíquos.
c) As diagonais se interceptam formando ângulo reto.
d) A base maior tem medida igual à dos lados oblíquos.

12. **Considere um quadrilátero ABCD cujas diagonais AC e BD medem, respectivamente, 5cm e 6cm. Se R, S, T e U são os pontos médios dos lados do quadrilátero dado, então o perímetro do quadrilátero RSTU vale:**

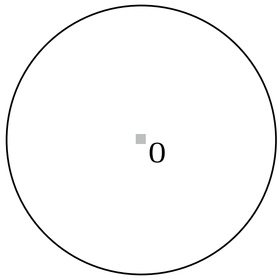
a) 22cm b) 5,5cm
c) 8,5cm d) 11cm

Anotações

M19 GEOMETRIA PLANA: CIRCUNFERÊNCIA

Circunferência

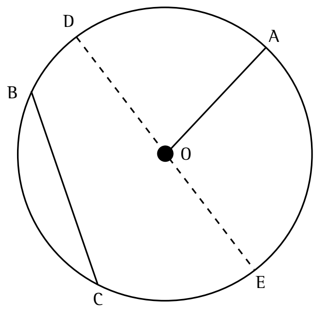
É o Lugar geométrico dos pontos equidistantes a um único ponto, chamado Centro da circunferência.



Círculo

Compreende a região interna da circunferência, inclusive a própria.

Elementos



Raio(r): Segmento que une o centro a quaisquer pontos da circunferência. Como vimos pela definição, essa distância é sempre a mesma.

Exemplo: $\overline{OA}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OE}$

Corda: Segmento que tem como extremidade dois pontos da circunferência.

Exemplo: $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$

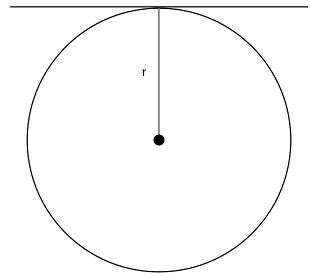
Observação:

- A maior corda de um círculo é denominada diâmetro. Exemplo: $\overline{DE}$
- Diâmetro = 2r, ou seja, a medida do diâmetro é duas vezes a medida do raio.

Posições Relativas entre Reta e Circunferência

Estudaremos essas posições para que possamos estabelecer relações entre o raio e a distância do centro até a reta(d).

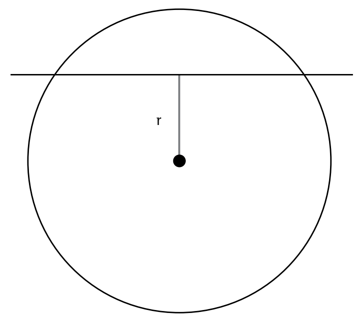
Reta Tangente:



$d = r$

A reta que tangencia a circunferência tem com ela um ponto em comum.

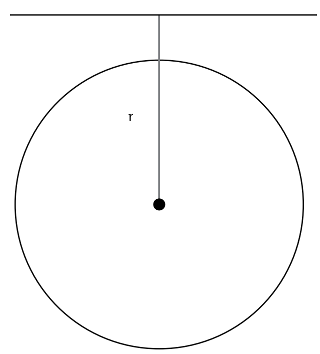
Reta Secante:



$d < r$

A reta secante, corta a circunferência deixando assim dois pontos em comum, como podemos observar na figura acima.

Reta Externa:



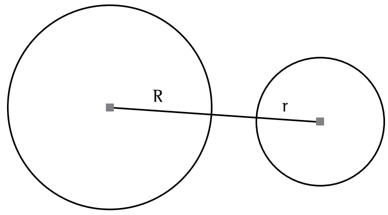
$d > r$

Não há pontos de contato entre as retas exteriores e a circunferência.

Posições Relativas entre Duas Circunferências

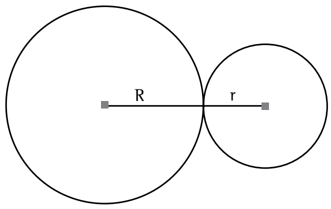
Outras posições, só que agora relacionando duas circunferências.

Circunferências exteriores:



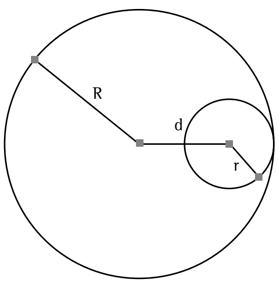
$d > R + r$

Circunferências tangentes exteriores:



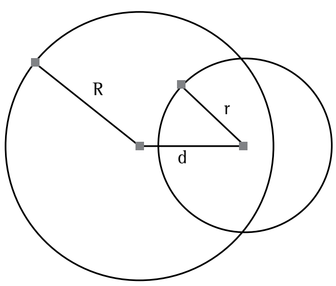
$d = R + r$

Circunferências tangentes interiores:



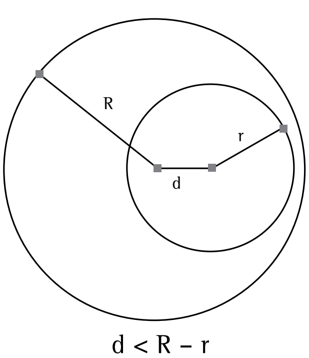
$d = R - r$

Circunferências secantes:



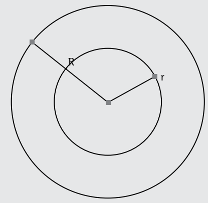
$|R - r| < d < R + r$

Circunferências interiores:

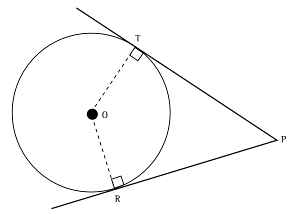


$d < R - r$

Observação: Caso particular das circunferências interiores são as circunferências concêntricas, onde a distância entre os centros d é igual a zero. Veja:



Propriedades das tangentes



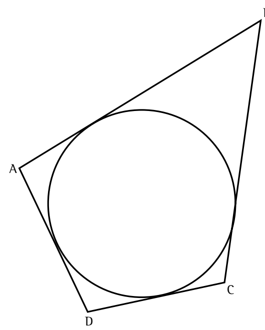
(I) O raio que passa pelo ponto de tangência é perpendicular em relação à tangente, ou seja, forma um ângulo reto com ela.

(II) Se de um ponto P externo a circunferência, traçarmos os segmentos tangentes $\overline{PT}$ e $\overline{PR}$, sendo T e R pontos de tangência, então diremos que:

$$\overline{PT} = \overline{PR}$$

Teorema de Pitot

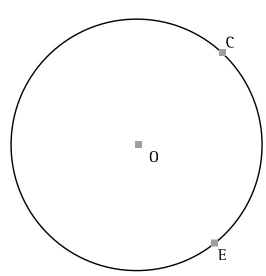
Na figura, temos um quadrilátero circunscrito a uma circunferência. Sempre que isso acontecer, poderemos dizer que a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois lados.



$$\boxed{\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{BC} + \overline{AD}}$$

Arco: Um pedaço da circunferência que tem como extremos dois pontos pertencentes à mesma é o que chamamos de arco.

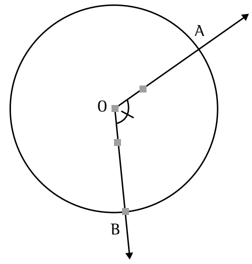
Exemplo: $\overset{\frown}{CE}$ (essa notação se refere ao menor dos arcos)



Tipos de Ângulos

Ângulo Central

É o ângulo que possui como vértice o centro de uma circunferência.

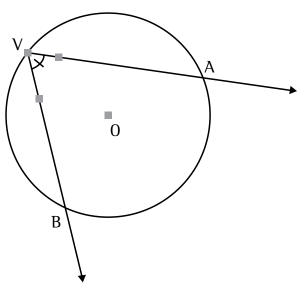


A medida do ângulo central é sempre igual à medida do arco correspondente, ou seja,

$$A\hat{O}C = \text{Arco}(\overset{\frown}{AB})$$

Ângulo Inscrito

É o ângulo que possui como vértice qualquer ponto pertencente à circunferência.

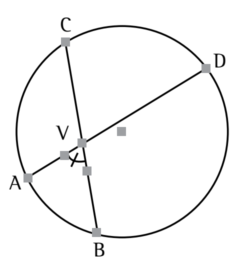


A medida do ângulo inscrito é sempre a metade da medida do arco correspondente, ou seja,

$$A\hat{V}B = \frac{\text{Arco}(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

Ângulo Excêntrico Interno

O vértice deste ângulo não está nem no centro nem na circunferência; sua posição é em quaisquer pontos do círculo excluindo as ditas anteriormente, pois ele é formado pelo cruzamento de duas cordas.

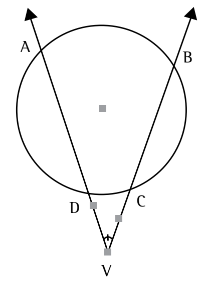


A medida de um ângulo excêntrico interno é encontrada a partir da semi-soma das medidas dos arcos determinados pelos seus lados, veja como:

$$\hat{V} = \frac{\text{Arco}(\overset{\frown}{AB}) + \text{Arco}(\overset{\frown}{CD})}{2}$$

Ângulo Excêntrico Externo

O vértice deste ângulo não está nem no centro nem na circunferência, sua posição é externa ao círculo.



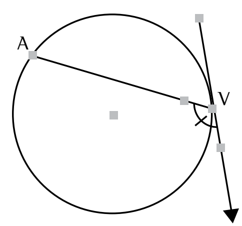
A medida de um ângulo excêntrico interno é encontrada a partir da semidiferença das medidas dos arcos determinados pelos seus lados. Veja como:

$$\hat{V} = \frac{\text{Arco}(\overset{\frown}{AB}) - \text{Arco}(\overset{\frown}{CD})}{2}$$

Observação: O ângulo excêntrico exterior pode ser formado por duas retas secantes que se cruzam num ponto externo à circunferência, ou poderá também ser formado a partir de uma reta secante e outra tangente ou ainda por duas retas tangentes sempre com intersecção fora da circunferência.

Ângulos de segmento

Ângulo formado por uma secante e uma tangente à circunferência.



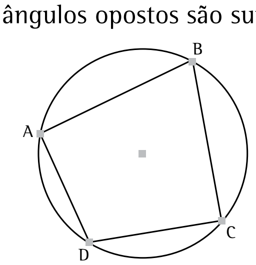
A medida de um ângulo de segmento é a metade do arco por ele determinado, ou seja,

$$a = \frac{\text{Arco}(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

Quadrilátero inscrito em circunferência

Propriedade dos quadriláteros inscritos

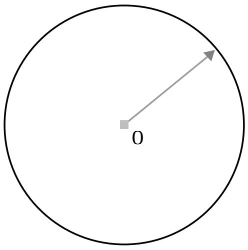
Se um quadrilátero convexo está inscrito em uma circunferência então podemos dizer que os ângulos opostos são suplementares.



$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^{o}$$

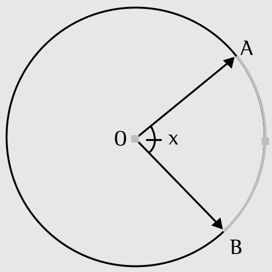
Perímetro da circunferência

Perímetro (comprimento) da Circunferência



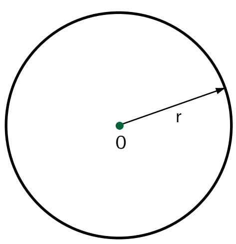
$C = 2\pi r$

Observação: Para determinar o comprimento de apenas um arco da circunferência e não dela inteira você poderá usar uma regra de três entre a parte que você quer encontrar e a circunferência total ou utilizar a seguinte relação:



$\overset{\frown}{AB} = \dfrac{X}{360}.(2\pi r)$, sendo x o ângulo central medido em graus.

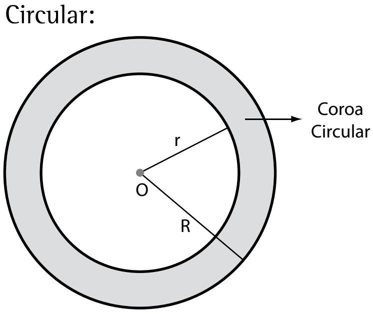
Cálculo da Área de uma circunferência



$S = \pi r^2$

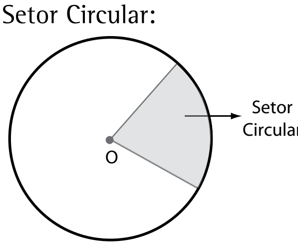
Fórmulas especiais para o cálculo da Área de uma circunferência:

Coroa Circular:



$S = \pi(R^2 - r^2)$

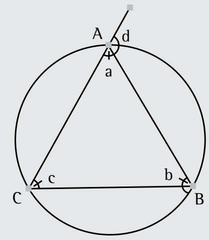
Setor Circular:



$S = \dfrac{x}{360}\pi r^2$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considere a seguinte figura. Assinale a alternativa correta:



a) A medida do ângulo d é igual à metade da soma das medidas dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$.

b) A medida do ângulo d é igual ao dobro da medida do arco $\overset{\frown}{CD}$.

c) A medida do ângulo d é igual à soma das medidas dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$.

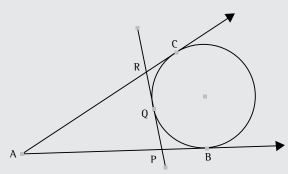
d) A medida do ângulo d é igual à medida do arco $\overset{\frown}{CB}$.

Resposta: A

d = c + b, como, arco $\overset{\frown}{AC} = 2b$ e arco $\overset{\frown}{AB} = 2c$, teremos:

$$d = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB}}{2}$$

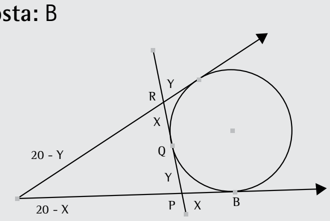
2. Duas tangentes a um círculo são traçadas de um ponto exterior A e tocam o círculo nos pontos B e C, respectivamente. Uma terceira tangente intercepta o segmento AB em P e AC em R e toca o círculo em Q. Se AB = 20cm, então o perímetro do triângulo APR, em cm, é igual a:



a) 39,5 b) 40

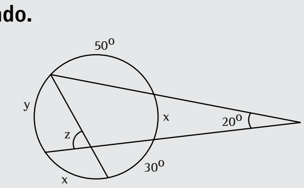
c) 40,5 d) 41

Resposta: B



$$2_p = 20 - y + 20 - x + x + y \rightarrow 2_p = 40cm$$

3. (CN) Considere a figura, na qual x e y são medidas de arcos e z é a medida do ângulo assinalado.



Pode-se afirmar que x + y + z é igual a:

a) 225º b) 265º

c) 275º d) 285º

e) 295º

Resposta: C

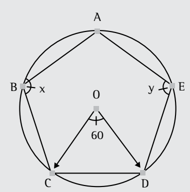
$\frac{y-x}{2}=20 \Rightarrow y-x=40$ também podemos dizer que $\frac{y+30}{2}=z \Rightarrow y+30=2z$

$2x+y+30+50=360 \Rightarrow 2x+y=280$

Formaremos então o sistema $\begin{cases} 2x+y=280 \\ y-x=40 \end{cases}$, que resolvendo, encontraremos x = 80°; y = 120°; x = 75°, logo x + y + z = 275°

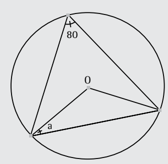
PRATICANDO

1. **O pentágono ABCDE está inscrito em um círculo de centro O. O ângulo central CÔD mede 60°. Então, x + y é igual a:**



a) 180° b) 185°
c) 190° d) 210°

2. **Na figura, O é o centro da circunferência. Determine a medida do ângulo â.**



a) 5° b) 10° c) 15°
d) 20° e) 25°

3. **(Faetec)**

SOLIDARIEDADE – UM ATO DE AMOR A VIDA

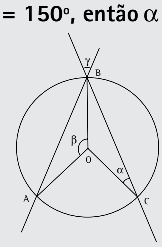
O grêmio de um colégio de uma das cidades atingidas por um terremoto se organizou para ajudar as vítimas. Para isso, foram montadas equipes com alunos e alunas, ao todo 640 adolescentes. O número de alunas é sete vezes maior que o de alunos.

Todos os dias às 8h, eles se reúnem na praça da cidade para decidirem o que fazer durante o dia. Essa praça é circular e o seu diâmetro é igual a 60 metros.

O comprimento da circunferência dessa praça, em metros, é:

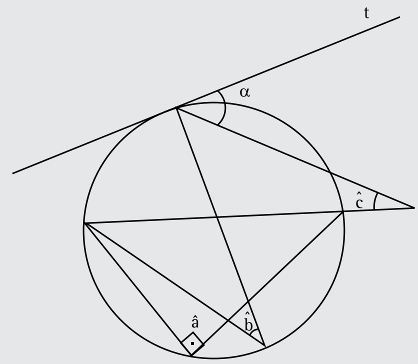
a) 900π b) 314π
c) 120π d) 60π

4. **(Epcar) Na figura abaixo, os pontos A, B e C pertencem à circunferência de centro O. Se γ =50° e β = 150°, então α é:**



a) 15° b) 30°
c) 35° d) 45°

5. **(Epcar) O valor do suplementar do ângulo α na figura abaixo, sabendo-se que â = 90°, $\hat{b}$ = 40° e $\hat{c}$ = 15°, é:**



a) 160° b) 168°
c) 155° d) 135°

6. **(Epcar) O diâmetro dos pneus das rodas de um carro mede, aproximadamente, 50cm. O número de voltas dadas pelas rodas desse carro, ao percorrer uma estrada de 300km, está mais próximo de (considere π = 3,14):**

a) $2 \cdot 10^3$ b) $2 \cdot 10^5$
c) $2 \cdot 10^7$ d) $2 \cdot 10^9$

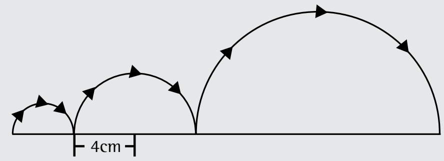
7. **(Cefet) Um quadrilátero ABCD está inscrito numa circunferência de diâmetro AC = 5cm. Sabendo que BC = 4cm e que AD = 3cm, determine o perímetro de ABCD.**

a) 5 b) 10 c) 12
d) 14 e) 17

08. **(CN) Os raios das rodas dos carros A, B e C, inscritos em uma corrida, são, respectivamente, iguais a x, 2x e 3x. Quantos quilômetros, respectivamente, percorrerão os carros se desenvolverem uma velocidade de 80km/h, durante 4 horas?**

a) 320, 640 e 960;
b) 240, 640 e 960;
c) 320, 160 e 80;
d) 320, 320 e 320;
e) 640, 320 e 160.

9. **(Cap-UFRJ) Uma pulguinha pula descrevendo uma trajetória em forma de semicircunferência. Em certo dia, deu três pulos (como mostra a figura abaixo). Em cada pulo, a partir do 2°, o raio da semicircunferência descrita foi o dobro do raio da semicircunferência descrita no pulo anterior. Qual o comprimento total da trajetória percorrida pela pulguinha nesse dia?**



a) 2π b) 4π c) 14π
d) 16π e) 25π

10. **(EsSA) O comprimento de um arco de 12° numa circunferência de diâmetro D é aproximadamente: (observe $\pi \cong 3$)**

a) D/4 b) D/6 c) D/8
d) D/10 e) D/12

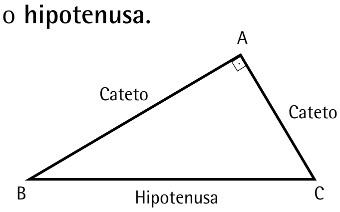
TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Não se pode afirmar quando tudo começou, porém podemos falar o motivo de ter se desenvolvido. Os estudos de Astronomia foram os grandes responsáveis pelo desenvolvimento da trigonometria. Desde então, essa área do conhecimento evolui até as navegações. Neste capítulo, estamos dando início ao estudo dessa matéria que por muito tempo e muitas mãos foi construída para relacionar os lados dos triângulos com seus ângulos.

Papiro de Hind (Museu de Londres). Essa peça histórica conteria cálculos envolvendo a cotangente.

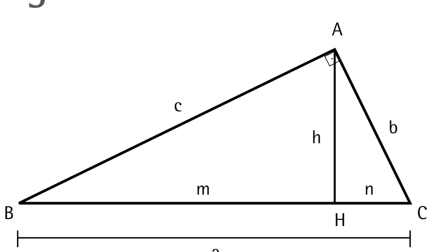
Elementos de um triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo, os lados perpendiculares entre si e formadores do ângulo reto entre si denomina-se **catetos.** O lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa.**



Considere um triângulo ABC, reto em Â.

Relações métricas no triângulo retângulo



- A projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$ é o segmento $\overline{BH}$.
- A projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$ é o segmento $\overline{HC}$.
- $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa $\overline{BC}$.

Relação 1

$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c^2 = am$ (Cateto ao quadrado é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção)

Relação 2

$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b^2 = an$ (Cateto ao quadrado é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção)

Relação 3

$ah = bc$ (O produto da hipotenusa pela altura é igual ao produto dos catetos)

Relação 4

$h^2 = m \cdot n$ (A altura ao quadrado é igual ao produto das projeções)

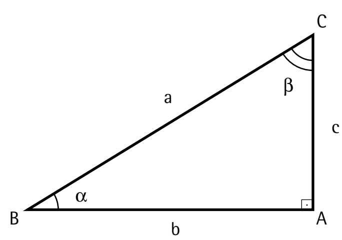
Relação 5

Teorema de Pitágoras:

$b^2 + c^2 = a^2$ (Hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos)

Razões trigonométricas

No triângulo retângulo abaixo, definimos as razões trigonométricas:



$$\text{seno}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto a }\alpha}{\text{hipotunesa}} : \text{sen}\,\alpha = \frac{c}{a} \rightarrow$$

$$\text{sen}\,\beta = \frac{b}{a}$$

$$\text{coseno}\,\alpha = \frac{\text{cateto adjacente a }\alpha}{\text{hipotunesa}} = \frac{b}{a} \rightarrow$$

$$\cos\,\beta = \frac{c}{a}$$

$$\text{tangente } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{c}{b} \rightarrow$$

$$\text{tg } \beta = \frac{b}{c}$$

Observação:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \text{tg } \alpha$$

Relações entre as razões trigonométricas dos ângulos complementares

Observe que α e β são ângulos complementares, ou seja, $\alpha + \beta = 90^o$. Então temos: $\alpha = 90^o - \beta$ e $\beta = 90^o - \alpha$, portanto α e β são ângulos agudos. Podemos notar também que:

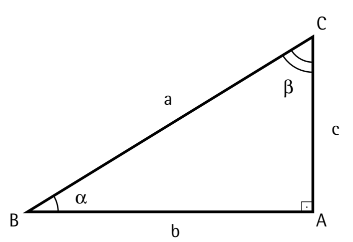
sen $\beta = \cos\alpha \rightarrow$ sen $\beta = \cos(90^o - \beta)$ e

cos $\beta = \text{sen}\,\alpha \rightarrow$ cos $\beta = \text{sen}\,(90^o - \beta)$

Ou seja: o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complemento e o cosseno de um ângulo é igual ao seno do seu complemento.

Relação fundamental entre seno e cosseno de um ângulo agudo

Essa relação é representada por $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e pode ser demonstrada em um triângulo retângulo usando o teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$.



$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \rightarrow$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 + b^2}{a^2} \rightarrow \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º

Os ângulos que aparecem com maior frequência nos exercícios e problemas são os de 30º, 45º e 60º, por isso, é importante conhecermos a seguinte tabela:

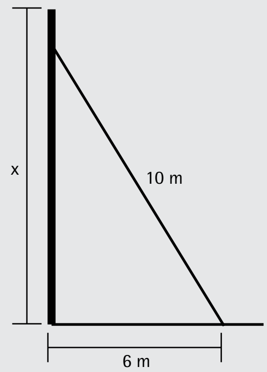
Ângulo	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **(UFSC) Uma escada com 10m de comprimento foi apoiada em uma parede que é perpendicular ao solo. Sabendo-se que o pé da escada está afastado 6m da base da parede, determine a altura, em metros, alcançada pela escada.**

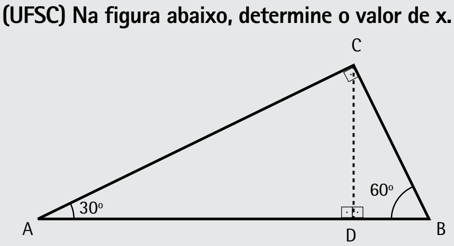
Resposta:

O desenho a seguir ilustra o problema.



Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo ao lado, obteremos a relação: $10^2 = 6^2 + x^2$, ou seja, x = 8. Logo: 8m é a altura alcançada pela escada.

2. **(UFSC) Na figura abaixo, determine o valor de x.**



$$\overline{AD} = x$$

$$\overline{DC} = x - 38$$

$$\overline{BD} = y$$

Resposta:

Os triângulos ABD, ABD e BDC são triângulos retângulos. Temos as seguintes relações:

I) Para o triângulo BDC:

$$\text{tg } 60^o = \frac{y}{x-38} \Rightarrow y = (x-38) \times \text{tg } 60^o$$

II) Para o triângulo ABD:

$$\text{tg } 30^o = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \times \text{tg } 30^o$$

Comparando estas duas equações e substituindo tg 60º = $\sqrt{3}$ e tg 30º = $\frac{\sqrt{3}}{3}$, obteremos:

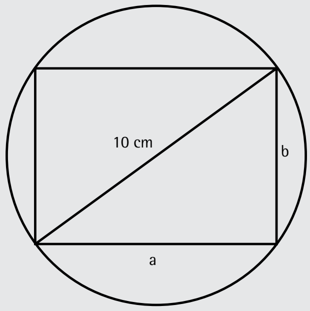
$$(x-38) \times \sqrt{3} = x \times \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow (x-38) = \frac{x}{3}$$

A partir desta última equação, finalmente, encontraremos x = 57.

3. **(UFSC) Um retângulo está inscrito num círculo de 5cm de raio e o perímetro do retângulo é de 28cm. Calcular, em centímetros quadrados, a área do retângulo.**

Resposta:

A figura a seguir ilustra a situação dada no problema:



Temos:

I) Aplicando o teorema de Pitágoras:

$a^2 + b^2 = 10^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 100$

II) O perímetro do retângulo é de 28 cm:

$2a + 2b = 28 \Rightarrow a + b = 14$

Resolvendo, para $a > 0$ e $b > 0$, o sistema:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ a + b = 14 \end{cases}$$

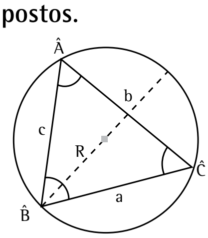
Encontramos a = 8cm e b = 6cm (ou a = 6cm e b = 8cm), o que dá, para o retângulo considerado, uma área igual a 48 cm².

LEIS DO SENO E DO COSSENO

O que fazer quando estamos trabalhando com um triângulo qualquer e queremos encontrar um de seus lados a partir de outros lados ou de seus ângulos? Vejamos abaixo as relações que utilizamos nesses casos.

Lei dos senos

Em um triângulo qualquer as medidas dos lados são proporcionais aos **senos** dos ângulos **opostos.**

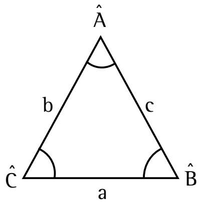


$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2R$$

Observação: O "**2R**" que vemos acima corresponde ao diâmetro da circunferência circunscrita que é igual a constante de proporcionalidade.

Lei Cossenos

Em um triângulo qualquer o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

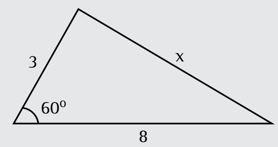


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C}$$

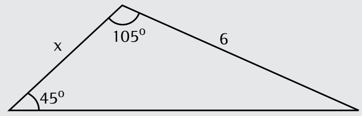
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine o valor de x nos triângulos.

a)



b)



Resposta:

a) $x^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \rightarrow$

$x^2 = 9 + 64 - 48 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow$

$x^2 = 73 - 24 \rightarrow x^2 = 49 \rightarrow x = 7$

b) $\frac{x}{\text{sen}30^\circ} = \frac{6}{\text{sen}45^\circ} \rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow$

$x = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

2. Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 5cm e 10cm, formando entre si um ângulo de 120º. Calcule as medidas das diagonais desse polígono.

Resposta:

$d_1^2 = 5^2 + 10^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow$

$d_1^2 = 25 + 100 + 50 \rightarrow d_1^2 = 175 \rightarrow$

$d_1 = \sqrt{175} \rightarrow d_1 = 5\sqrt{7}$

$d_2^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow$

$d_2^2 = 25 + 100 - 50 \rightarrow d_2^2 = 75 \rightarrow$

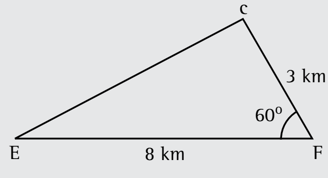
$d_2 = \sqrt{75} \rightarrow d_2 = 5\sqrt{3}$

3. (CMRJ) Uma fábrica será instalada a 8km da única estação de tratamento de água da cidade. A cisterna (reservatório de água) da fábrica será construída a 3km da fábrica. Na figura abaixo, as letras E, F e C representam, respectivamente, a localização da estação de tratamento de água, a fábrica e a cisterna. A quantidade de quilômetros de encanamento que levará a água da estação de tratamento para a cisterna da fábrica é dada por um número que pertence ao intervalo real:

a) $]0,3[$ b) $[3,5[$

c) $[5,7[$ d) $[7,10[$

e) $[10,\infty[$



Resposta: D

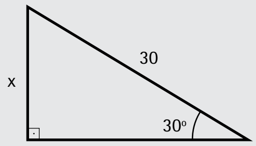
$x = \overline{EC} \Rightarrow \quad x^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ$

$x^2 = 49$

$x = 7$

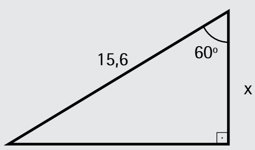
PRATICANDO

1. **No triângulo retângulo abaixo determine quanto vale x:**



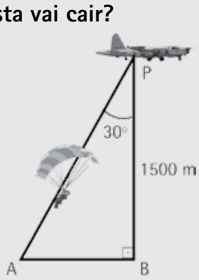
a) 10m b) 12m
c) 13,6m d) 15m
e) 18m

2. **No triângulo retângulo abaixo determine quanto vale x:**



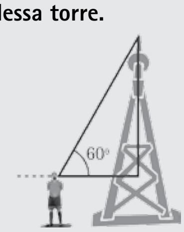
a) 7,8m b) 12m
c) 13m d) 13,90m
e) 15,1m

3. **Um paraquedista salta de um avião quando este se encontra a 1.500m de altura. Devido à velocidade do avião e a ação do vento, o paraquedista cai conforme indica o segmento $\overline{PA}$, inclinando em 30º em relação à $\overline{PB}$ (conforme a figura abaixo). A que distância do ponto B o paraquedista vai cair?**



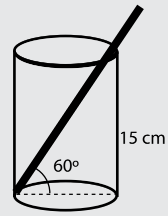
a) $100\sqrt{3}$ m b) $200\sqrt{3}$ m
c) $300\sqrt{3}$ m d) $400\sqrt{3}$ m
e) $500\sqrt{3}$ m

4. **Um observador, com 1,64m de altura, vê uma luz no alto de uma torre de televisão, sob um ângulo de 60º. Esse observador se encontra a 20m da base da torre. Determine a altura aproximada dessa torre.**



a) 34,6m b) 36,24m
c) 37m d) 37,5m
e) 38m

5. **A figura abaixo representa um copo de 15cm de altura com um canudinho dentro. Qual o comprimento aproximado desse canudinho sabendo que 8cm dele estão para fora do copo?**

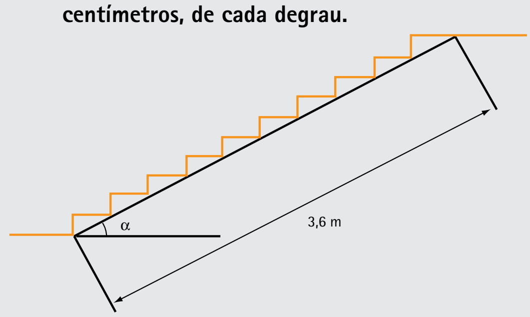


a) 32,6cm b) 31cm
c) 25,34cm d) 20,23cm
e) 12cm

6. **No momento em que raios solares incidem sobre o solo formando um ângulo de 45º, um prédio projeta uma sombra de 32,6m. Qual a altura desse prédio?**

a) 32,6m b) 31 m
c) 25,34m d) 20,23m
e) 10m

7. **(UFPE) Dois pavimentos de uma construção devem ser ligados por uma escada com 10 degraus de mesma altura, construída sobre uma rampa de 3,6m como ilustrado na figura abaixo. Se sen $\alpha = \frac{1}{2}$, indique a altura, em centímetros, de cada degrau.**



a) 9cm b) 11cm
c) 15cm d) 18cm
e) 21cm

8. **(Cesgranrio-RJ) Uma rampa plana de 36m de comprimento faz ângulo de 30º com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira eleva-se verticalmente de:**

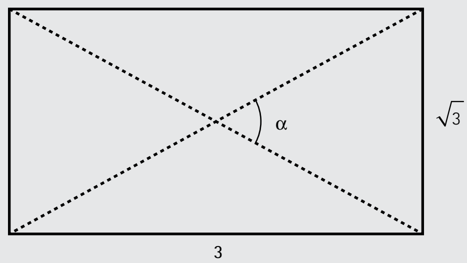
a) $6\sqrt{3}$ b) 12m
c) 13,6m d) $9\sqrt{3}$
e) 18m

9. **(Unic-MT) Uma escada de 5 metros de comprimento está encostada num muro vertical formando com ele um ângulo de 30º. Um homem ao subir nessa escada, observa que, devido a problemas de aderência com o piso horizontal, esta escorrega sem se afastar do muro e pára no ponto em que o ângulo formado entre ela e o piso horizontal é de 30º. Nessas condições, o deslocamento efetuado pela escada junto ao muro foi de:**

Dados: sen 30º = 0,5 e cos 30º = 0,87

a) 1,85m b) 0,85m
c) 2,50 d) 4,35m
e) 5,00

10. **(Mackenzie-SP) No retângulo da figura, cos α vale:**

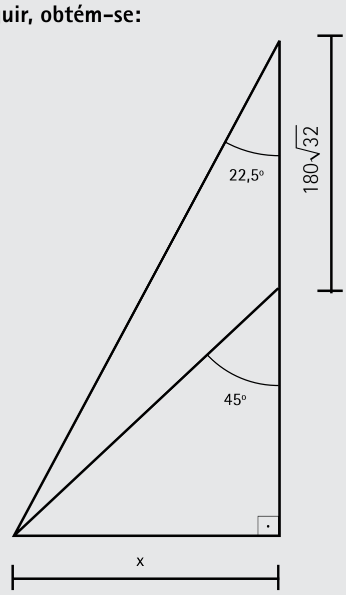


a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{4}$

11. (Cefet-PR) Calculando o valor de x na figura a seguir, obtém-se:

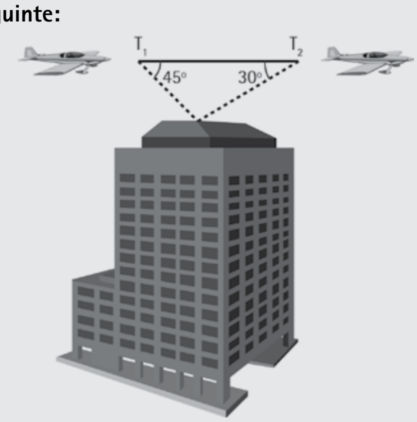


a) $720\sqrt{2}$ b) 720

c) $360\sqrt{2}$ d) 360

e) $180\sqrt{2}$

12. (Epcar) Um piloto de avião, a uma altura de 3.100m em relação ao solo, avista o ponto mais alto de um edifício de 100m de altura nos instantes T_1 e T_2, sob os ângulos de 45° e 30°, respectivamente, conforme a figura seguinte:



A distância percorrida pelo avião entre T_1 e T_2, é, em m, igual a:

a) $3000(1+\sqrt{3})$ b) $3000\sqrt{3}$

c) $2190\sqrt{3}$ d) $3000(\sqrt{3}-1)$

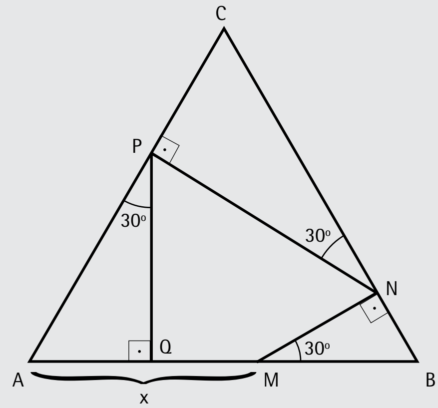
13. (CMRJ) Um observador, cujos olhos estão a $\sqrt{3}$m do solo, vê o topo de um edifício, construído em uma região plana, sob um ângulo de 60º com a horizontal. Se ele se afastar mais 80m do ponto em que estava, passará a ver o topo do edifício sob um ângulo de 45º com a horizontal. A altura do edifício é:

a) $80\sqrt{3}$m b) $\left(80+\sqrt{3}\right)$m

c) $\left(120+41\sqrt{3}\right)$m d) $\left(40\sqrt{3}\right)$m

e) $40\left(\sqrt{3}+1\right)$m

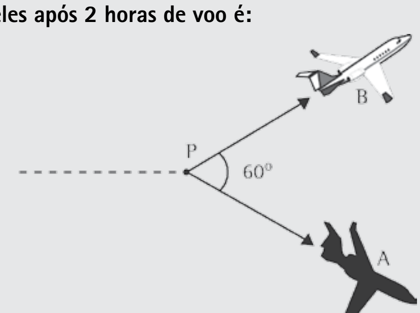
14. (Epcar) Se o triângulo ABC da figura abaixo é equilátero de lado a, então a medida de $\overline{QM}$ em função de a e x é:



a) $\frac{3a-x}{4}$ b) $\frac{3a-x}{8}$

c) $\frac{8x+3a}{8}$ d) $\frac{9x-3a}{8}$

15. (Epcar) O reabastecimento em voo é um procedimento que permite abastecer aviões de caça em pleno voo a partir de uma mangueira distendida de uma aeronave tanque. Um avião A (tanque) e outro B (caça) ao término do procedimento descrito antes, em determinado ponto P, tomam rumos que diferem de um ângulo de 60º. A partir de P, as velocidades dos aviões são constantes e iguais a VA = 400 km/h e VB = 500 km/h. Considerando que mantiveram os respectivos rumos, a distância, em km, entre eles após 2 horas de voo é:



a) $5200\sqrt{21}$ b) $300\sqrt{21}$

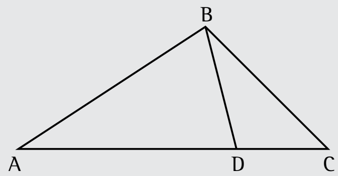
c) $200\sqrt{21}$ d) $100\sqrt{21}$

16. (CMRJ) Dois barcos partem do mesmo ponto, navegando em linha reta, em trajetórias que formam entre si um ângulo de 60º. Eles viajam a uma velocidade constante de, respectivamente, 5km/h e 8km/h. Após uma hora de viagem, a distância entre eles será de:

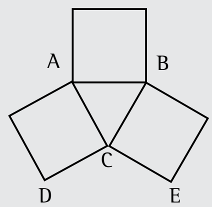
a) 7km b) $\sqrt{61}$ km c) $\sqrt{129}$ km

d) 9km e) 10,2km

17. **(Fuvest – SP) Na figura a seguir, AD = 2cm, AB = $\sqrt{3}$ cm, a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é 30º e BD = DC, sendo D ponto do lado $\overline{AC}$. A medida do lado $\overline{BC}$ em cm, é:**



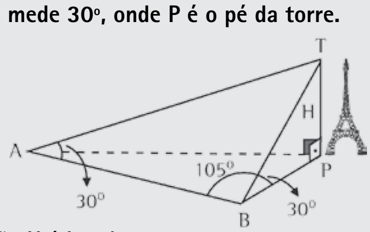
18. **(Ucsal-BA) Na figura tem-se um triângulo equilátero ABC sobre cujos lados foram construídos quadrados de lados iguais a 10cm. Determine a medida de $\overline{DE}$:**



a) $10\sqrt{3}$ b) $50\sqrt{2}$

c) $50\sqrt{3}$ d) $100\sqrt{3}$

19. **(UFG) Uma pessoa se encontra numa planície às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo T de uma torre de telefone. Com o objetivo de determinar a altura H da torre, ela marca dois pontos A e B na planície e calcula AB = 200m, $T\hat{A}B$ mede 30º, $T\hat{B}A$ mede 105º e $T\hat{B}P$ mede 30º, onde P é o pé da torre.**



Então H é igual a:

a) $\frac{100\sqrt{3}}{3}m$ b) $50\sqrt{2}m$ c) $50\sqrt{3}m$

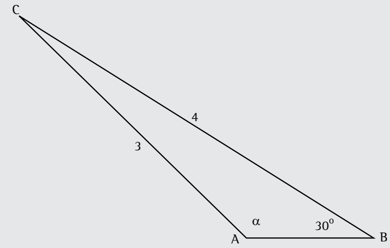
d) $100\sqrt{2}m$ e) 100m

20. **(UFS) Num triângulo qualquer ABC, tem-se que a medida do ângulo de vértice A é 60º, AB = 4 e BC = 2 $\sqrt{6}$. Então, AC é igual a:**

a) $2+2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}-2$ c) $\sqrt{3}+1$

d) $\sqrt{3}$ e) 2

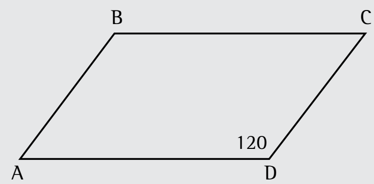
21. **(UFRS) No triângulo ABC da figura abaixo, o cosseno do ângulo obtuso α é igual a:**



a) $\frac{1}{9}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

22. **(Unisinos-RS) O paralelogramo da figura tem área 20,758m². O comprimento do lado $\overleftrightarrow{AD}$ é 6m. Então, o comprimento do lado $\overleftrightarrow{AB}$ será, em metros, aproximadamente igual a:**

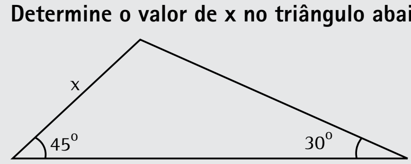


Dados:
sen 60º = sen 120º = 0,866
cos 60º = - cos 120º = 0,5

a) 3 b) 4 c) 5

d) 6 e) 7

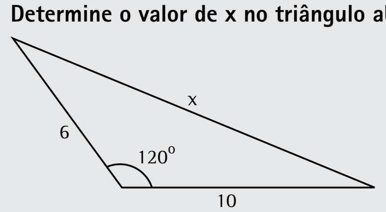
23. **Determine o valor de x no triângulo abaixo.**



a) 3 b) 4 c) 5

d) 6 e) 7

24. **Determine o valor de x no triângulo abaixo.**



a) 13 b) 14 c) 15

d) 16 e) 23

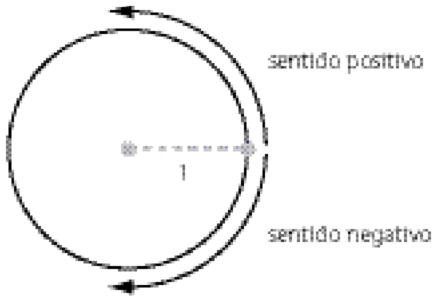
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: SENO, COSSENO E TANGENTE

M21

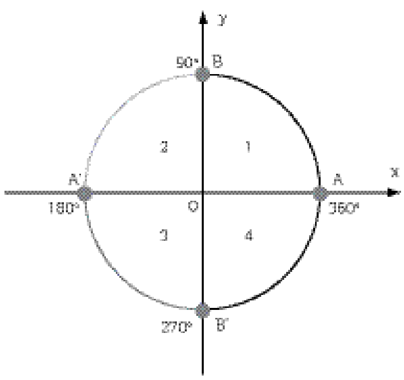
CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

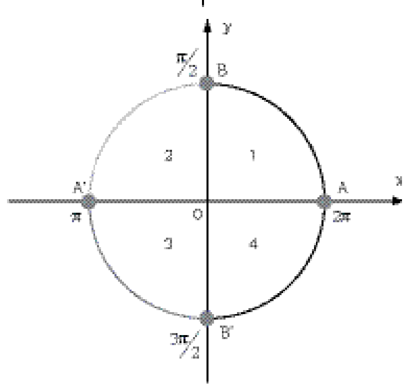
Definição

A circunferência trigonométrica, também chamada de ciclo trigonométrico, possui raio unitário e centro na origem do plano cartesiano. Sobre a circunferência serão fixados arcos com origem no ponto (1,0). Nesses arcos o sentido positivo é o anti-horário.



Observe abaixo os ciclos trigonométricos e os eixos x e y, veja que o círculo foi dividido em quatro partes iguais (cada uma com 90º). A essas partes damos o nome de quadrantes.





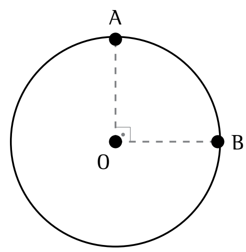
O arco AB é o primeiro quadrante; o arco BA', o segundo; o arco A'B', o terceiro e o arco B'A, o quarto quadrante.

Observação: A numeração do quadrante é feita no sentido positivo a partir do ponto **A**, como descrito nas figuras acima.

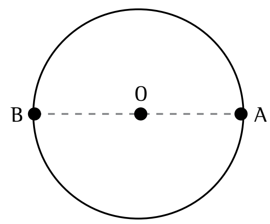
Unidades de medidas de arcos de circunferência (ou ângulos)

1) Grau (Símbolo º)

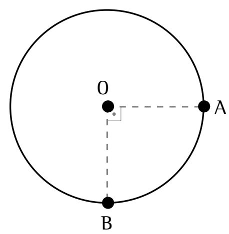
Um grau equivale a $\frac{1}{360^\circ}$ da circunferência e a circunferência possui 360º, o que torna este ângulo o representante de uma volta completa. Veja nos desenhos abaixo alguns arcos que têm grande aplicação:



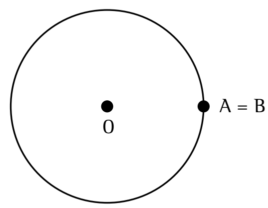
Arco $\widehat{AB}$ de 90º
(um quarto de volta)



Arco $\widehat{AB}$ de 180º
(meia volta)



Arco $\widehat{AB}$ de 270º
(três quartos de volta)



Arco $\widehat{AB}$ de 360º ou 0º
(uma volta ou nulo)

2) Radiano (Símbolo rad)

Um radiano é a medida do arco que possui comprimento igual ao raio da circunferência, a qual este mesmo arco pertence.

Comprimento de $\widehat{AB} = r \Rightarrow m(\widehat{AB}) = 1$ rad

Relação entre unidades

O comprimento C de uma circunferência de raio r é $C = 2\pi r$, então, o arco que corresponde à circunferência inteira mede 2π rad. Podemos estabelecer a correspondência entre graus e radianos. Vejamos:

Radianos	2π rad	π rad	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
Graus	360º	180º	90º	60º	30º

Exemplos:

a) Transforme um arco de 60º em radianos.

Solução: para fazer essa transformação usamos a regra de três simples.

$\frac{\pi \text{ rad}}{x} = \frac{180^\circ}{60^\circ}$. Então:

$$x = \frac{60^\circ . \pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \text{rad}$$

b) Transforme um arco de $\frac{\pi}{4}$ rad em graus.

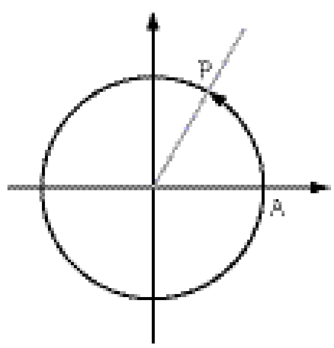
Solução: utilizaremos o mesmo processo aplicado acima.

$\frac{\pi \text{ rad}}{\frac{\pi \text{ rad}}{4}} = \frac{180^\circ}{x}$. Então:

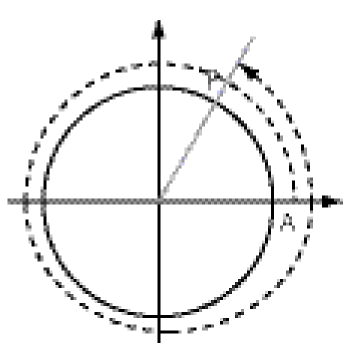
$$x = \frac{180^\circ . \frac{\pi}{4} \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} = 45^\circ$$

Arcos côngruos

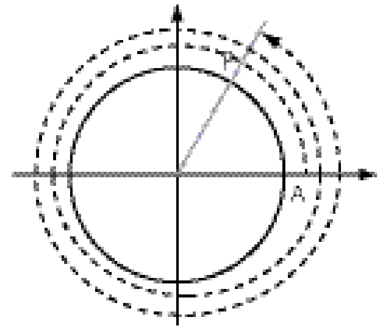
Até agora só consideramos arcos de, no máximo, uma volta inteira (360º), podendo os mesmos ser orientados nos sentidos anti-horário ou horário. Vamos agora generalizar o conceito de arco, admitindo que este possa dar mais de uma volta completa na circunferência. Esses ângulos maiores que uma volta terá extremidades que coincidem com as extremidades dos ângulos de um volta. Aos arcos com a mesma extremidade denominamos côngruos. Assim, podemos definir que dois arcos serão côngruos quando a diferença entre as suas medidas forem múltiplos de 2π ou de 360º.



m (AP) = x_0



m (AP) = x_0 + 360º



m (AP) = x_0 + 720º **ou m (AP)** = x_0 + 2 · 360º

A partir da análise feita no esquema acima, percebemos que se marcamos um ângulo x_0 (sendo $0 \le x_0 \le 2\pi$) e acrescentarmos a ele 360º ou quaisquer um dos múltiplos de 360º, nós iremos cair no mesmo ponto inicial. Com isso, podemos determinar uma expressão geral, que nos dá todos os arcos que são côngruos a x_0.

Assim: seja x_0, a medida de um arco AP da circunferência trigonométrica, com $0 \le x_0 \le 2\pi$, a expressão geral dos arcos com extremidade em **P** será o conjunto de todos os valores de x definidos por:

$x = x_0 + k2\pi$ **ou** $x = x_0 + k.360^\circ$, sendo $k \in \mathbb{R}$.

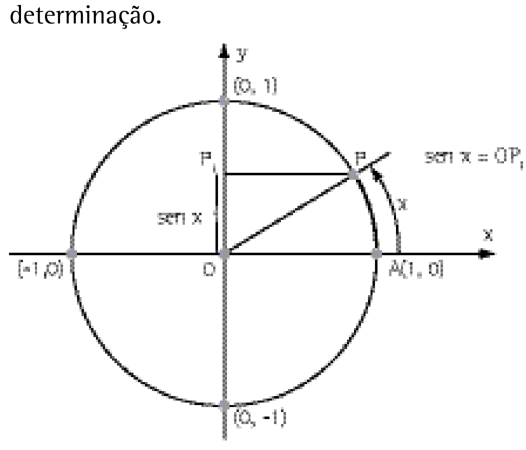
Primeiras determinações de um arco

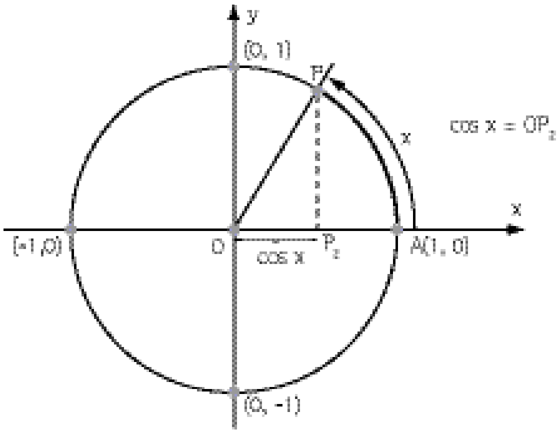
Substituindo o valor de **k** por zero na expressão $\alpha = \alpha_0 + k2\pi$, obtemos $\alpha = \alpha_0$, como $0 \le \alpha_0 < 2\pi$, esse valor é denominado primeira determinação positiva do arco. Já substituindo o valor de **k** por –1, encontramos a primeira determinação negativa do arco.

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

Seno e cosseno

Como vimos anteriormente, o ponto **P** assinalado no ciclo ou circunferência trigonométrica, representa uma família de arcos côngruos, que geralmente aparece demonstrada pela sua menor determinação.





O ponto **P** ainda determina, no sistema cartesiano, coordenadas que serão objetos de estudo nesse capítulo. Estas coordenadas são habitualmente chamadas por abscissa (projeção do ponto **P** em relação ao eixo **x**) e ordenada (projeção do ponto **P** em relação ao eixo **y**). Diante dessas informações, é possível definir que:

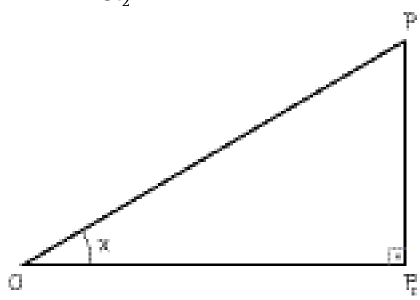
1º) A abscissa do ponto **P** é o cosseno do arco $\widehat{AP}$ (o que verificamos facilmente pela demonstração a seguir):

$\widehat{AP} = x$

$\overline{OP}$ = (raio do ciclo) = 1

$$\cos \widehat{AP} = \cos x = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP}} \rightarrow \cos \widehat{AP}$$

$\cos x = \overline{OP_2}$



Assim, comprovamos que o cosseno de $\widehat{AP}$ é igual à abscissa de **P**.

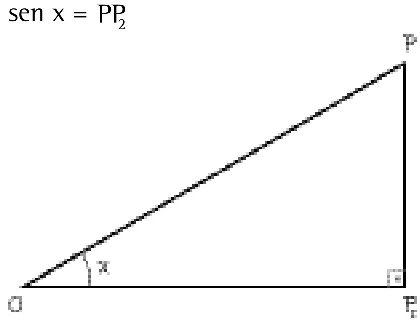
2º) A ordenada do ponto P é o seno do arco $\widehat{AP}$ (da mesma maneira que o cosseno, vamos demonstrar também o seno):

$\widehat{AP} = x$

$\overline{OP}$ = (raio do ciclo) = 1

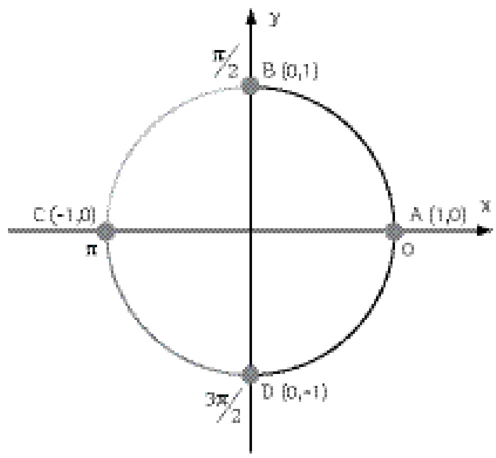
$$\text{sen } \widehat{AP} = \text{sen } x = \frac{\overline{PP_2}}{\overline{OP}} \rightarrow \text{sen } \widehat{AP}$$

$\text{sen } x = \overline{PP_2}$



Portanto, confirmamos que o seno $\widehat{AP}$ é igual à ordenada do ponto **P**.

Observe alguns valores de seno e cosseno retirados a partir das definições do ciclo trigonométrico:



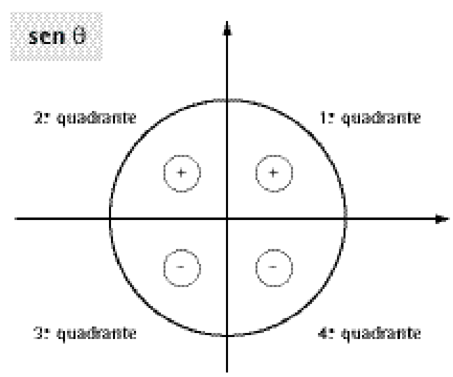
Ponto	Arco	Sen (arco) (coordenada x)	Cos (arco) (coordenada y)
A	0º	0	1
B	90º	1	0
C	180º	0	-1
D	270º	-1	0

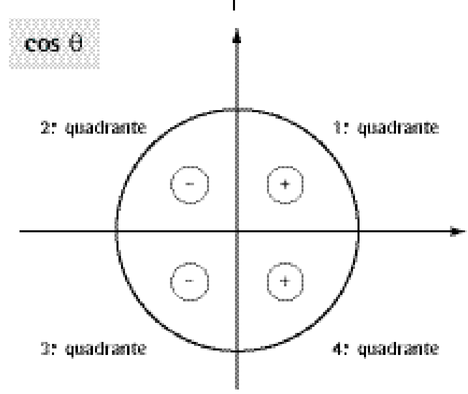
Nesta representação, podemos ver que existe um valor máximo e um mínimo para as funções seno e cosseno.

Assim: $-1 \leq \text{sen } \theta \leq 1$ e $-1 \leq \cos \theta \leq 1$.

1) Sinais do seno e cosseno

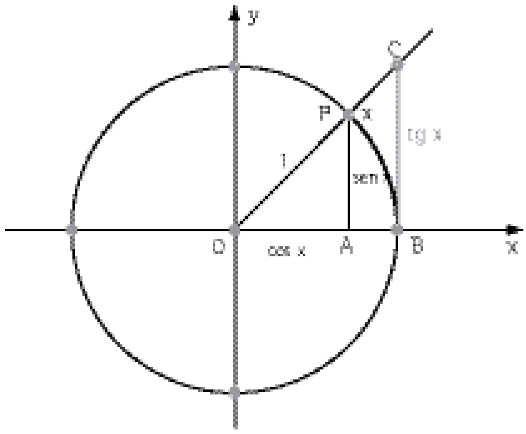
Na tabela observamos que há valores positivos e negativos para sen θ e cos θ, isso acontece porque eles são, como vimos anteriormente, as coordenadas do ponto **P**. Sendo assim, o sinal irá depender do quadrante em que se fixará o ponto **P**. Observe na figura abaixo as possíveis variações para os sinais de sen θ e cos θ.



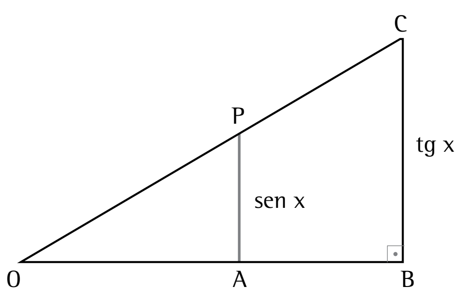


Tangente

Voltaremos novamente ao ciclo trigonométrico, desta vez para estudarmos a tangente de um ângulo. Para isso, além do ciclo, precisaremos de uma reta auxiliar que será paralela ao eixo **y** e tangente a circunferência no ponto **B**. Chamaremos essa reta de eixo das tangentes. O próximo passo é marcar o ponto **P**, que determina no ciclo um arco $\overset{\frown}{BP}$. Para encontrar a tangente de $\overset{\frown}{BP}$, basta prolongar o segmento $\overline{OP}$ até que o mesmo encontre o eixo das tangentes. Na figura temos isso representado pelo ponto **C**. Logo a tangente do arco $\overset{\frown}{BP} = \overline{BC}$.



Podemos comprovar essa afirmativa de outro modo: observe que os ΔOAP e ΔOBC são semelhantes, sendo $\overline{OB}$ = raio do ciclo =1.

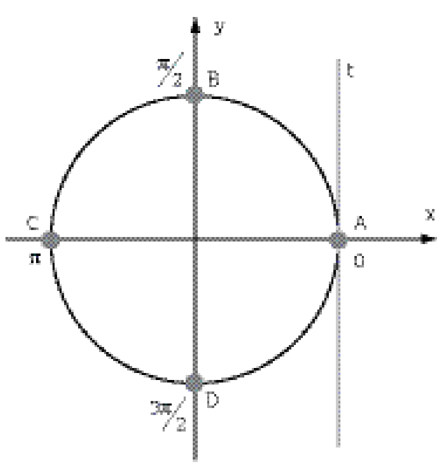


Pela proporcionalidade, temos:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \Rightarrow \text{alternando os meios}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BC}}{1} \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \overline{BC} \Rightarrow \quad \text{tg } x = \overline{BC}$$

Vejamos os valores da tangente de alguns ângulos:

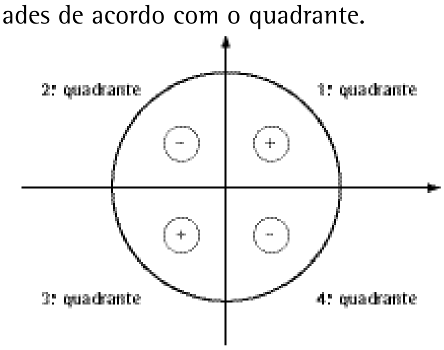


Ponto	Arco	tg
A	0	0
B	$90^\circ\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\nexists$
C	$180^\circ\ (\pi)$	0
D	$270^\circ\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$\nexists$

Analisando o ciclo e logo após a tabela, vemos que a tangente dos ângulos de 90º e 270º não existem. O mesmo aconteceria para as respectivas famílias de ângulos, representados por $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, já que por mais que prolonguemos a reta y, ela não encontrará o eixo das tangentes, pois as mesmas são paralelas. Quanto aos valores, podemos dizer que a tangente tem condições de assumir qualquer valor real.

1) Sinais da tangente

Se a tangente for marcada acima do eixo x, ela será positiva. Caso seja marcada abaixo, ela será negativa. Assim teremos, então, as seguintes possibilidades de acordo com o quadrante.



Outras funções trigonométricas

1) **Cossecante**

   É o inverso do seno.

   Ou seja: $\text{cossec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\alpha}$, se $\text{sen}\alpha \neq 0$.

2) **Secante**

   É o inverso do cosseno.

   Portanto: $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, se $\cos\alpha \neq 0$.

3) **Cotangente**

   É o inverso da tangente.

   Assim: $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$, se $\text{sen}\alpha \neq 0$.

Observação:
Se analisarmos atentamente, perceberemos que, de acordo com as definições de cotangente, cossecante e secante, estudadas acima, essas funções trigonométricas admitem os mesmos sinais das funções que lhes dão origem. Portanto, quando a tangente é positiva, a cotangente também será. Sendo o mesmo raciocínio aplicado para outras funções, ou seja, se o cosseno for negativo, a secante será negativa e assim por diante.

FUNÇÕES PERIÓDICAS

Definição

Neste capítulo iremos estudar algumas funções periódicas. Estas funções são assim denominadas devido à repetição de períodos que o gráfico apresenta de intervalos em intervalos do domínio.

Desse modo, uma função *f* de domínio A é periódica caso exista um número **p**, não-nulo, que satisfaça a seguinte condição:

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in A$$

O menor valor de **p** que satisfaça essa condição é o período da função *f*.

Teorema para cálculo de período

O teorema que explicaremos a seguir pode ser aplicado nas funções que possuem a seguinte forma:

$$y = m + n \cdot f(ax + b)$$

Se uma função y = f(x) é periódica de período **p**, então a função $g(x) = m + n \cdot f(ax + b)$, com m, n, a e $b \in \mathbb{R}$ e a, $n \neq 0$, é também periódica e seu período é dado por:

$$P = \frac{p}{|a|}$$

Exemplos:

a) Calcule o período da função y = sen 2x.

Solução:

P = período que queremos encontrar;

p = período de sen (x), ou seja, 2π;

a = coeficiente da variável (x), ou seja, 2.

Teremos, então:

$$P = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow P = \pi$$

b) Qual o período da função $f(x) = 2.\cos\frac{x}{2}$?

Solução:

P = ?;

p = período de cos (x), ou seja, 2π;

a = coeficiente da variável (x).

$$P = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \Rightarrow P = 4\pi$$

Observação: Saber calcular o período nos auxilia na hora de traçarmos o gráfico, pois como vimos, após construir o período, basta apenas repeti-lo e variar o domínio que obteremos o gráfico.

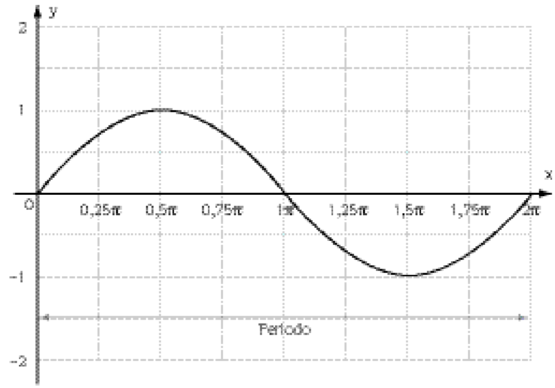
FUNÇÃO SENO

Definição

É a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei f(x) = sen x. Abaixo temos uma tabela para os valores do seno de alguns ângulos, isso nos auxiliará a traçar o gráfico. Veja:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Marcando os pontos da tabela no eixo de coordenadas, obteremos então:



Propriedades da função seno

1) Domínio: $D = \mathbb{R}$;
2) Imagem é o intervalo [-1, 1], ou seja, $Im = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$ e
3) Período: 2π.

A tabela abaixo nos informa onde a função seno cresce ou decresce.

x	sen x
0	0
↕	cresce
$\frac{\pi}{2}$	1
↕	decresce
π	0
↕	decresce
$\frac{3\pi}{2}$	−1
↕	cresce
2π	0

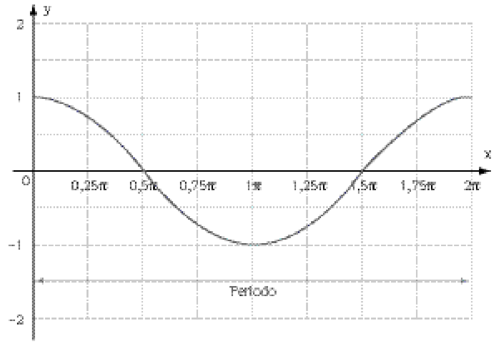
FUNÇÃO COSSENO

Definição

É a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei (x) = cos x. Abaixo temos uma tabela para os valores do cosseno de alguns ângulos, isso nos auxiliará a traçar o gráfico. Veja:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Marcando os pontos da tabela no eixo de coordenadas, obteremos então:



Propriedades da função cosseno

1) Domínio: $D = \mathbb{R}$;
2) Imagem é o intervalo [-1, 1], ou seja, $Im = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$ e
3) Período: 2π.

A tabela abaixo nos informa onde a função cosseno cresce ou decresce.

x	**cos x**
0	1
$\updownarrow$	decresce
$\frac{\pi}{2}$	0
$\updownarrow$	decresce
π	−1
$\updownarrow$	cresce
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\updownarrow$	cresce
2π	1

FUNÇÃO TANGENTE

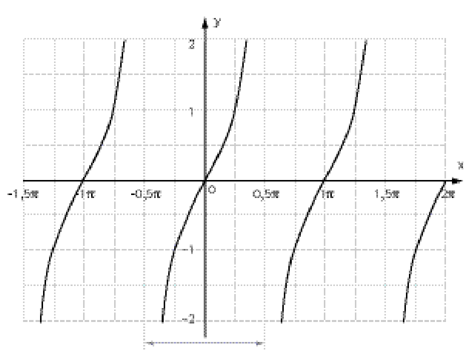
Definição

É a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = tg\ x$, onde $A = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Abaixo temos uma tabela para os valores da tangente de alguns ângulos, isso nos auxiliará a traçar o gráfico. Veja:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	$\nexists$	−1	0	1	$\nexists$

Marcando os pontos da tabela no eixo de coordenadas, obteremos então:



Propriedades da função tangente

1) Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}\}$;
2) Imagem: $Im = \mathbb{R}$ e
3) Período: π.

A tabela abaixo nos informa onde a função tangente cresce ou decresce.

x	**tg x**
0	0
$\updownarrow$	cresce
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$\updownarrow$	cresce
π	0
$\updownarrow$	cresce
$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$
$\updownarrow$	cresce
2π	0

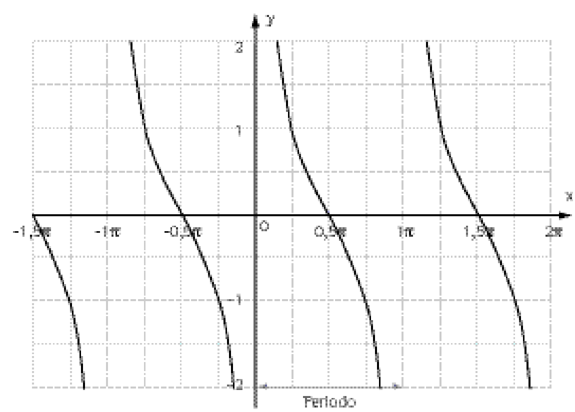
FUNÇÃO COTANGENTE

Definição

É a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = cotg\ x$, onde $A = \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{R}\}$. Abaixo temos uma tabela para os valores da cotangente de alguns ângulos, isso nos auxiliará a traçar o gráfico. Veja:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	$\nexists$	1	0	−1	$\nexists$

Marcando os pontos da tabela no eixo de coordenadas, obteremos então:



Propriedades da função cotangente

1) Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{R}\}$;
2) Imagem: $Im = \mathbb{R}$ e
3) Período: π.

Nesse caso, não será necessária a montagem de tabela, pois a função cotangente é sempre decrescente.

FUNÇÃO SECANTE

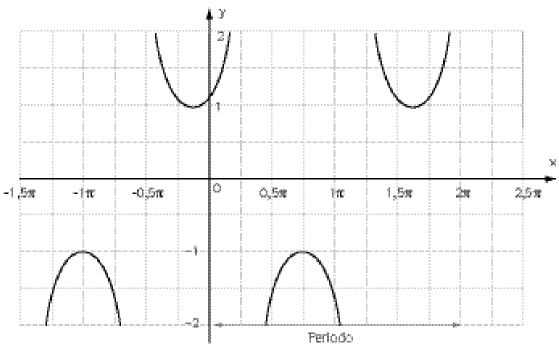
Definição

É a função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = \sec x$, onde $A = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}\}$.

Abaixo temos uma tabela para os valores da secante de alguns ângulos, isso nos auxiliará a traçar o gráfico. Veja:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	1	$\sqrt{2}$	$\nexists$	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\nexists$	$\sqrt{2}$	1

Marcando os pontos da tabela no eixo de coordenadas, obteremos então:



Propriedades da função secante

1) Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}\}$;
2) Imagem: $Im = \{y \in \mathbb{R} / y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ e
3) Período: 2π.

Nesse caso, f(x) é crescente para os valores de x pertencentes ao primeiro ou segundo quadrantes e f(x) é decrescente para os valores de x pertencentes ao terceiro ou quarto quadrantes.

FUNÇÃO COSSECANTE

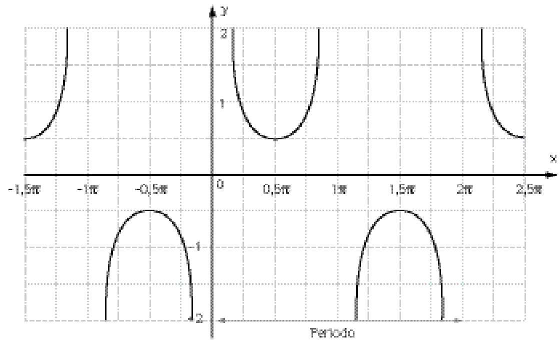
Definição

É a função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = \text{cossec } x$, onde $A = \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi\}$.

Abaixo temos uma tabela para os valores da cossecante de alguns ângulos, isso nos auxiliará a traçar o gráfico. Veja:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	$\nexists$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\nexists$	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\nexists$

Marcando os pontos da tabela no eixo de coordenadas, obteremos então:



Propriedades da função cossecante

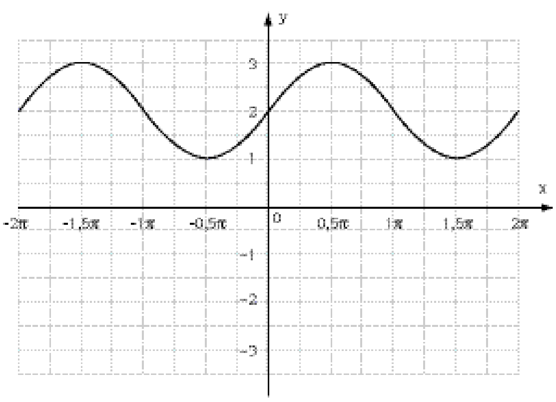
1) Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{R}\}$;
2) Imagem: $Im = \{y \in \mathbb{R} / y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ e
3) Período: 2π.

Nesse caso, f(x) é crescente para os valores de x pertencentes ao segundo ou terceiro quadrantes e f(x) é decrescente para os valores de x pertencentes ao primeiro ou quarto quadrantes.

Construção de gráficos

Abaixo veremos alguns exemplos de construção de gráficos:

a) Construa o gráfico da função $f(x) = 2 + \text{sen } x$.

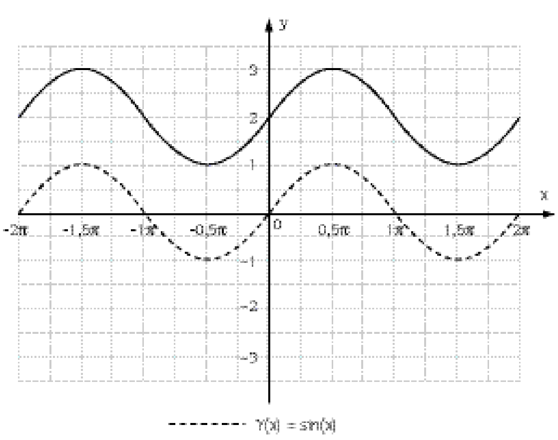


Domínio de f(x): $D = \mathbb{R}$;

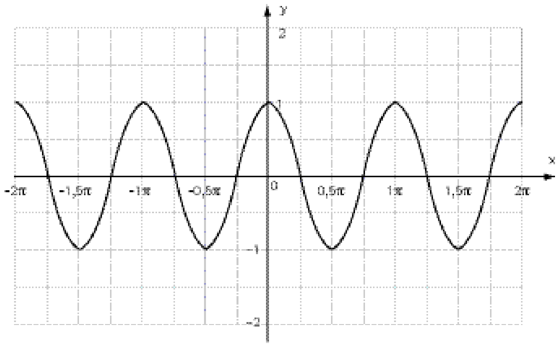
Imagem de f(x): $Im = [1,3]$ e

Período: 2π.

Observação: Repare que o gráfico de f(x) "moveu-se" para cima duas unidades em relação à função g(x) = sen x.



b) Construa o gráfico da função $f(x) = \cos 2x$.

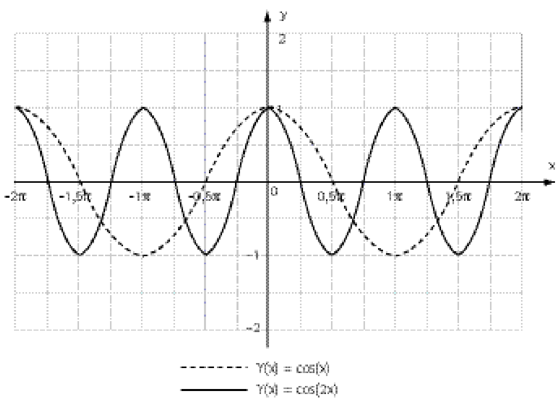


Domínio de $f(x)$: $D = \mathbb{R}$;

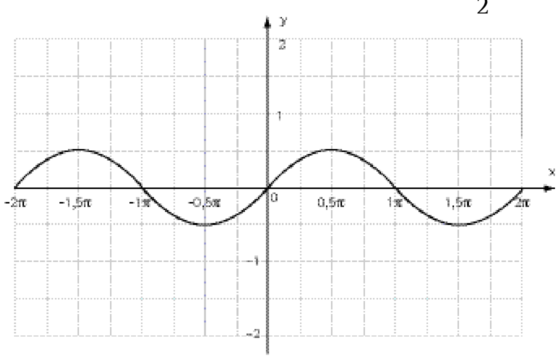
Imagem de $f(x)$: $Im = [-1,1]$ e

Período: π.

Observação: Ao comparamos as funções $f(x) = \cos 2x$ e $g(x) = \cos x$, podemos perceber que o período encolheu da primeira função para a segunda.



c) Construa o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{2}$ sen x.

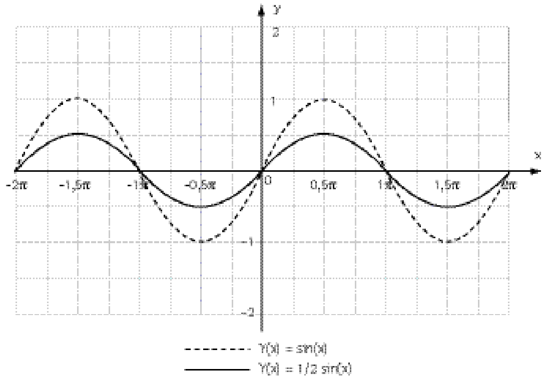


Domínio de $f(x)$: $D = \mathbb{R}$;

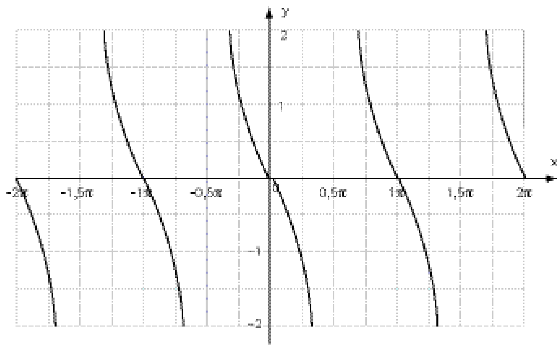
Imagem de $f(x)$: $Im = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e

Período: 2π.

Observação: Repare que novamente alteramos a imagem da função. A causa disso é o fato de estarmos multiplicando o seno de x pelo fator $\frac{1}{2}$.



d) Construa o gráfico da função $f(x) = -tg\,(x)$.

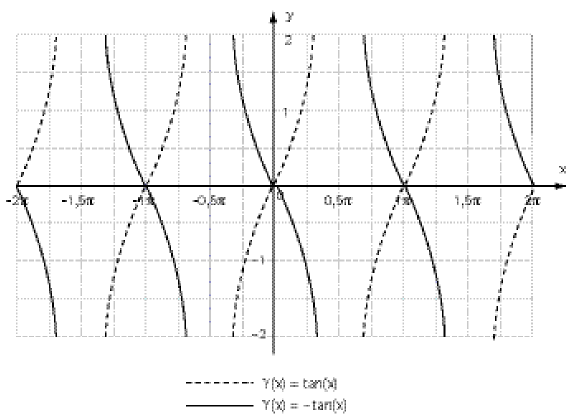


Domínio de $f(x)$: $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$;

Imagem de $f(x)$: $Im = \mathbb{R}$ e

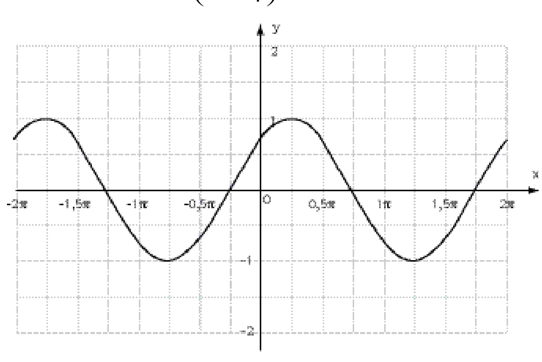
Período: π

Observação: O gráfico de $f(x) = -\,tg(x)$ é uma reflexão da função tg de x em relação ao eixo x.



e) Construa o gráfico da função

$f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

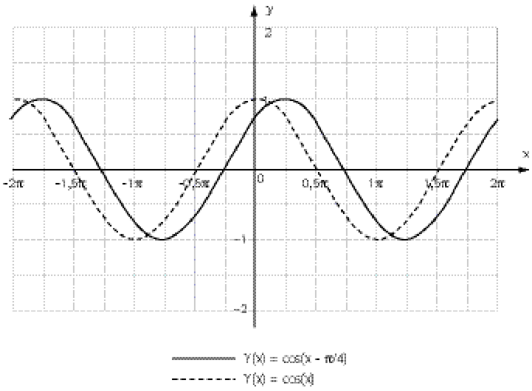


Domínio de f(x): D = $\mathbb{R}$;

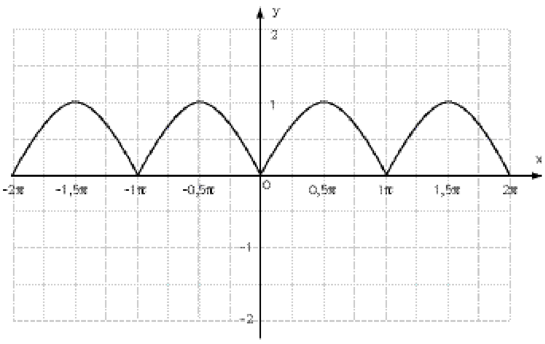
Imagem de f(x): Im = [-1, 1] e

Período: 2π.

Observação: Repare que a subtração de $\frac{\pi}{4}$ faz com que o gráfico se "mova" para a direita $\frac{\pi}{4}$ unidades.



f) Construa o gráfico de f(x) = |sen x|.

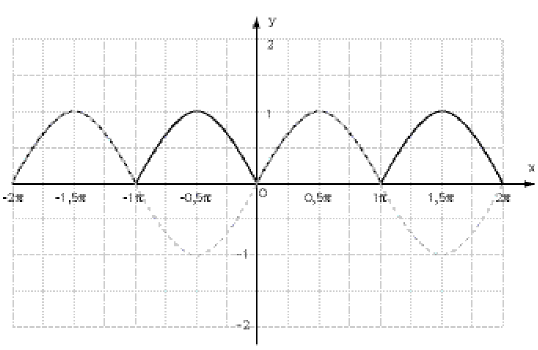


Domínio de f(x): D = $\mathbb{R}$;

Imagem de f(x): Im = [0, 1] e

Período: π.

Observação: Repare que a parte negativa sofre uma reflexão em relação ao eixo x. Isso acontece devido ao módulo.



FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR

Definição

Uma função é par se para todos os elementos de seu domínio temos:

$$f(x) = f(-x), \forall x \in D$$

Uma função é ímpar se para todos os elementos de seu domínio temos:

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in D$$

Com base na definição acima podemos dizer que:

1) As funções cosseno e secante são pares;
2) As funções seno, cossecante, tangente e cotangente são ímpares.

O exemplo a seguir mostra o que acontece com as funções seno e cosseno, ilustrando, assim, a explicação dada anteriormente.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} f(x) = f(-x), \forall x \in A.$$

Logo a função cosseno é **par**.

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} f(-x) = -f(x), \forall x \in D.$$

Logo, a função seno é **ímpar**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **Qual é o menor arco não-negativo côngruo ao arco de 1500°?**

Solução:

Devemos obter o menor valor não-negativo de α, tal que α + k.360° = 1500° , com $k \in \mathbb{Z}$. Então:

$$\begin{array}{r|l} 1500^\circ & 360^\circ \\ \hline 60 & 4 \end{array}$$

Sendo o resto igual a α (60 = α) e o quociente igual a k (4 = k): 1500° = 60° + 4 . 360°. Logo, o arco pedido mede 60°.

2. **Determine em que quadrante está a extremidade do arco de 5200° e em seguida informe qual o sinal do seno, cosseno e tangente para este quadrante.**

Solução:

Divida 5200 por 360. Essa operação vai dizer quantas voltas completas tem o ângulo e qual o resto, o que representa a menor determinação do mesmo.

$$\begin{array}{r|l} 5200 & 360 \\ \hline 160 & 14 \end{array}$$

São 14 voltas completas e mais 160° a percorrer, portanto, o ângulo está no segundo quadrante, o qual determina os seguintes sinais: seno (+), cosseno (-) e tangente (-).

3. **(UFSC-PR) Dado sen x = $\frac{1}{2}$, com 0 < x < $\frac{\pi}{2}$, qual o valor da expressão $\sqrt{27}\left(\frac{\sec x+\text{cossec}\,x}{1+\text{cotg}\,x}\right)$?**

Solução:

Usando algumas relações trigonométricas, podemos escrever:

$$\sqrt{27}\left(\frac{\sec x+\text{cossec}\,x}{1+\text{cotg}\,x}\right)=\sqrt{27}\left(\frac{\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\text{sen}\,x}}{1+\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}}\right)=$$

$$\sqrt{27}\left(\frac{\frac{\text{sen}\,x+\cos x}{\cos x\cdot\text{sen}\,x}}{\frac{\text{sen}\,x+\cos x}{\text{sen}\,x}}\right)=\sqrt{27}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

Calculamos cos x, substituindo sen x = $\frac{1}{2}$ na relação $\text{sen}^2x+\cos^2x=1$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2 x=1 \text{ ou } \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para 0 < x < $\frac{\pi}{2}$, cos x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e, finalmente:

$$\sqrt{27}\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\sqrt{27}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=6.$$

O que mostra que $\sqrt{27}\left(\frac{\sec x+\text{cossec}\,x}{1+\text{cotg}\,x}\right)=6$.

4. **Sendo y = 2 – 3. sen a, determine os valores máximo e mínimo de y.**

Solução:

Sabemos que $-1 \leq \text{sen}\,(x) \leq 1$, assim para determinar os valores máximos e mínimos utilizaremos os valores extremos:

$y_{min} = 2 - 3.(1) \rightarrow y_{min} = -1$

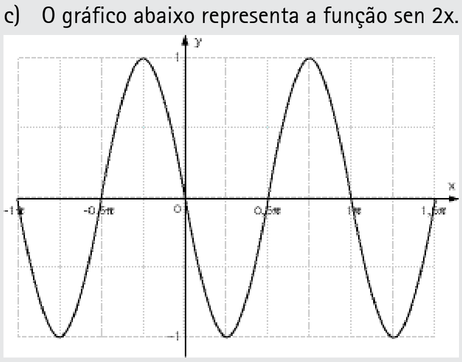
$y_{máx} = 2 - 3.(-1) \rightarrow y_{máx} = 5$

5. **Verifique quais das afirmações abaixo são verdadeiras.**

a) O domínio da função f(x) = tg $\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ é D = $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq\frac{2\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

b) O período da função g (x) = 2 sen 3x é $\frac{2\pi}{3}$.

c) O gráfico abaixo representa a função sen 2x.



Solução:

a) V. O domínio da função f(x) = tg (x) é: D = $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Portanto, o domínio de f(x) = tg $\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, será:

$x-\frac{\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{2\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b) V. A função trigonométrica do tipo f(x) = sen (ax) tem período P = $\frac{2\pi}{a}$

Logo o período da função g (x) = 3 sen (3x) será: $\frac{2\pi}{3}$.

c) F. Considere no gráfico o valor de x = $\frac{\pi}{4}$.

O valor de sen (2x) = sen (2. $\frac{\pi}{4}$) ⇔ sen (2x) = sen $\frac{\pi}{2}$ =1.

O que não confere com o gráfico que indica sen $\frac{\pi}{2}$ = 0.

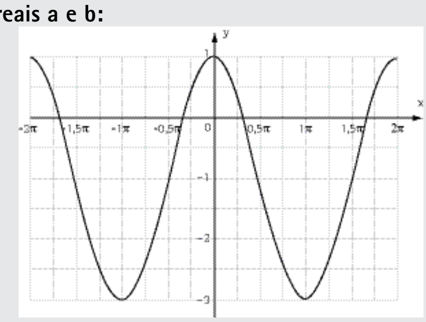
6. **Determine o domínio da função cotg 2x.**

Solução:

O domínio da função cotg (x) é D = $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq k\pi\}$ então, fazendo 2x $\neq k\pi$, temos x $\neq k\frac{\pi}{2}$.

Logo, D (f) = $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq k\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})\}$.

7. **(UFSE) Na figura abaixo se tem um esboço do gráfico da função f, de ℝ em ℝ, definida por f(x) = a + b • cos x. Determine os números reais a e b:**



Solução:

f(x) = a + b • cos x

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1\Rightarrow a+b\cdot\cos 0=1\Rightarrow a+b=1 \\ f(\pi)=-3\Rightarrow a+b\cdot\cos\pi=-3\Rightarrow a-b=-3 \end{array}\right\}$$

a = –1 e b = 2.

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo iremos conhecer duas relações trigonométricas derivadas da relação fundamental $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$. Precisamos conhecê-las para aplicarmos nas simplificações de expressões e também para relacionarmos as funções trigonométricas.

A relação $\text{tg}^2\,x + 1 = \sec^2 x$

Seja a relação fundamental: $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$. Ao dividi-la por $\cos^2x$, temos:

$$\frac{\text{sen}^2x}{\cos^2x}+\frac{\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow\boxed{\text{tg}^2x+1=\sec^2x}$$

A relação $\text{cotg}^2\,x + 1 = \text{cossec}^2 x$

Seja a relação fundamental: $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$. Ao dividi-la por sen^2x, temos:

$$\frac{sen^2x}{sen^2x}+\frac{cos^2x}{sen^2x}=\frac{1}{sen^2x}\Rightarrow\boxed{cotg^2x+1=cossec^2x}$$

Veja os exemplos:

a) Simplifique a expressão

$y = (1-sen^2x)(1+cotg^2x)$.

Solução:

Vamos lembrar que: $\begin{cases}1-sen^2x=cos^2x\\1+cotg^2x=cossec^2x\end{cases}$

Vamos então substituir na expressão:

$y = cossec^2x\cdot cos^2x \Rightarrow$

$$\frac{cos^2x}{sen^2x}=cotg^2x\Rightarrow y=cotg^2x$$

Identidade

Dados as funções f(x) e g(x), com seus respectivos domínios, D (f) e D (g), dizemos que f (x) e g(x) são funções idênticas se, e somente se, f (x) = g(x), $\forall\ x\in D(f)\cap D(g)$. A igualdade formada pelas funções é que chamamos de identidade. Observe alguns exemplos:

a) $sen^2x + cos^2x = 1$

b) $sec\,x=\dfrac{1}{cos\,x}$

c) $cos^2x=\dfrac{1}{1+tg^2x}$

d) $sen^2x=\dfrac{tg^2x}{1+tg^2x}$

Como demonstrar uma identidade

Podemos agir de três maneiras diferentes para conseguir verificar a identidade. A seguir, mostramos três exemplos, um para cada maneira:

a) Tentaremos transformar um dos membros no outro:

$$cos^2x=\underbrace{\frac{1}{1+tg^2x}}_{2^o\ membro}$$

$$\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{sec^2x}=\frac{1}{\frac{1}{cos^2x}}=cos^2x$$

Verificamos assim que o segundo membro após as transformações utilizadas é igual ao outro, logo a igualdade foi verificada.

Observação: Geralmente "mexemos" no membro mais complicado.

b) Tentaremos transformar os dois membros em uma expressão comum aos mesmos.

$$cos\,x\cdot tgx=\frac{1}{cossec\,x}$$

1º membro (cos x · tgx): $\cancel{cos\,x}\cdot\dfrac{senx}{\cancel{cos\,x}}=senx$

2º membro : $\left(\dfrac{1}{cossec\,x}\right)\ \dfrac{1}{\frac{1}{senx}}=senx$

Verificamos assim que as transformações ocorridas nos dois membros fazem com que eles cheguem a mesma expressão, no caso sen x.

c) Subtraímos um membro do outro, pois se eles forem iguais o resultado desta operação é zero.

$$sen^2x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}$$

$$sen^2x-\frac{tg^2x}{sec^2x}=0\Rightarrow sen^2x-\frac{\frac{sen^2x}{cos^2x}}{\frac{1}{cos^2x}}=0\Rightarrow$$

$$sen^2x-\frac{sen^2x}{\cancel{cos^2x}}\cdot\frac{\cancel{cos^2x}}{1}=0\Rightarrow$$

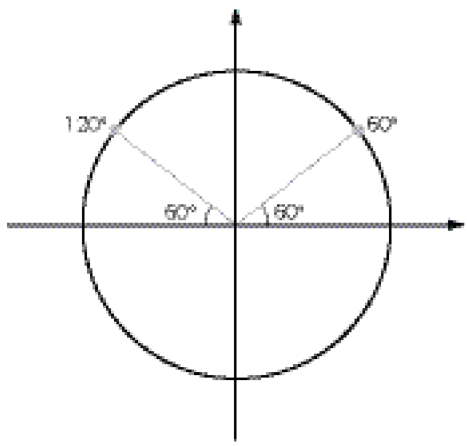
$$sen^2x-sen^2x=0\Rightarrow 0=0$$

REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE

Definição

É um método utilizado para determinar as medidas de seno, cosseno e tangente de um ângulo, que compara, através da simetria, as extremidades de ângulos do 1º quadrante com as extremidades de ângulos do 2º, 3º e 4º quadrantes. Vejamos no exemplo abaixo como isso acontece:

a) Como você faria para encontrar o sen θ, cos θ, tg θ, sendo θ =120º?



Solução:

1º) Localize o quadrante em que o ângulo de 120º está e marque o ângulo.

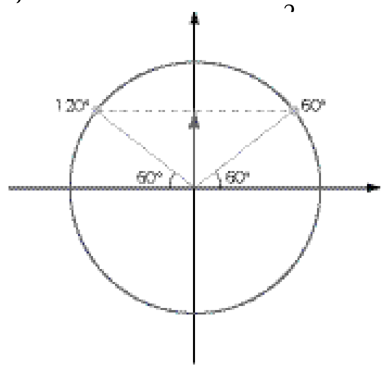
2º) Verifique o sinal da relação trigonométrica naquele quadrante.

2º quadrante		
seno	**cosseno**	**tangente**
+	–	–

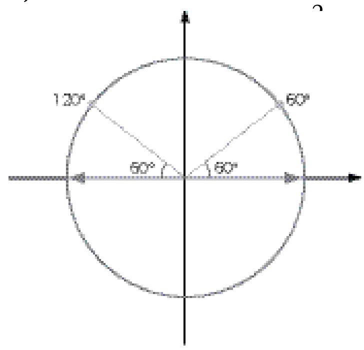
3º) Veja que as medidas das razões trigonométricas do ângulo de 120º são iguais, em módulo, às razões do ângulo de 60º, uma vez que este é o correspondente do ângulo de 120º no 1º quadrante.

Agora, após esta análise, podemos responder tranquilamente qual é o sen 120º, o cos 120º e a tg 120º. Observe:

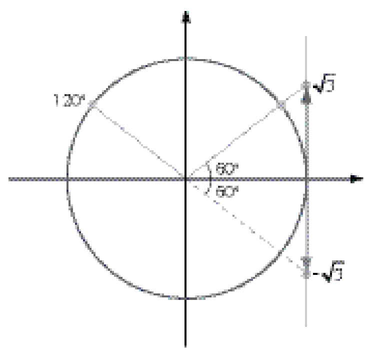
I) sen 120º = sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



II) cos 120º = –cos 60º = $-\frac{1}{2}$.

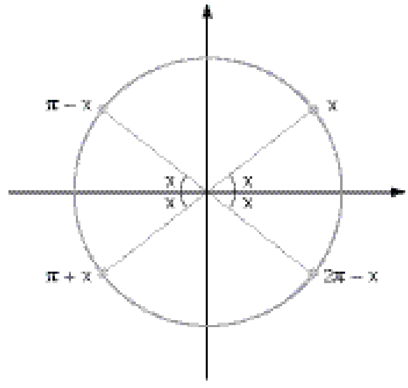


III) tg 120º = $\frac{\text{sen } 120º}{\cos 120º}$ = – $\sqrt{3}$



Regra geral

Dado um arco qualquer pertencente ao 2º, 3º ou 4º quadrante, sempre haverá um ângulo x que pertencerá ao primeiro quadrante e será simétrico ao ângulo dado. Por isso, eles possuirão o mesmo valor (em módulo) para as suas razões trigonométricas.



Sendo assim:

1) Para (π – x)

$$\begin{cases} \text{sen } (\pi - x) = +\text{sen } x & \text{cossec}(\pi + x) = +\text{cossec}\,\pi \\ \cos(\pi - x) = -\cos x & \sec(\pi - x) = -\sec x \\ \text{tg } (\pi - x) = -\text{tg } x & \text{cotg}(\pi - x) = -\text{cotg } x \end{cases}$$

2) Para (π + x)

$$\begin{cases} \text{sen } (\pi + x) = -\text{sen } x & \text{cossec}(\pi + x) = -\text{cossec}\,\pi \\ \cos(\pi + x) = -\cos x & \sec(\pi + x) = -\sec x \\ \text{tg } (\pi + x) = +\text{tg } x & \text{cotg}(\pi + x) = +\text{cotg } x \end{cases}$$

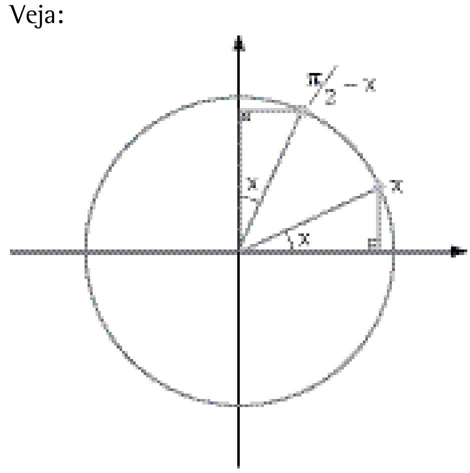
3) Para (2π – x) ou (–x)

$$\begin{cases} \text{sen } (2\pi - x) = -\text{sen } x & \text{cossec}(2\pi - x) = -\text{cossec}\,\pi \\ \cos(2\pi - x) = +\cos x & \sec(2\pi - x) = +\sec x \\ \text{tg } (2\pi - x) = -\text{tg } x & \text{cotg}(2\pi - x) = -\text{cotg } x \end{cases}$$

Observação: Repare que nesta redução as funções não mudam, só o que muda são os sinais.

Outro tipo de redução

Veja:



Pela semelhança entre os triângulos, concluímos que:

1) sen $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ = cos x

2) cos $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ = sen x

3) tg $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ = cotg x

4) cotg $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ = tg x

5) sec $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ = cossec x

6) cossec $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ = sec x

Observe que neste caso todas as funções trigonométricas passam para as suas co-funções, quanto ao sinal isso será definido pelo quadrante, como já vínhamos fazendo.

Veja alguns exemplos:

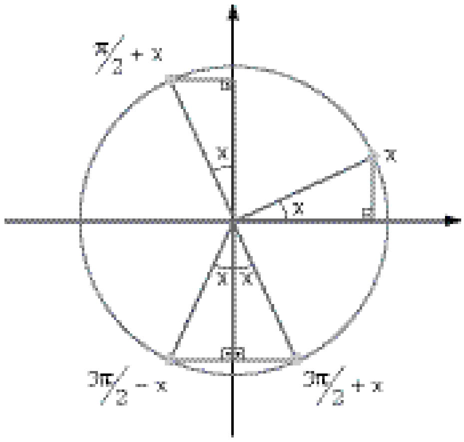
a) sen $\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ = + cos x

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\text{sen}\,x$

c) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\text{sen}\,x$

d) $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$

Abaixo temos um esquema que pode ajudar-nos a fazer a redução para o primeiro quadrante com mais facilidade:



Por exemplo:

a) $\frac{\pi}{2}+x\rightarrow$

co-função

2º quadrante $\rightarrow$ $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=+\rightarrow\cos x$

$\text{sen}\,\theta\rightarrow +$
$\cos\theta\rightarrow -$
$\text{tg}\,\theta\rightarrow -$

b) $\frac{3\pi}{2}-x\rightarrow$

co-função

3º quadrante $\rightarrow$ $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\rightarrow\cos x$

$\text{sen}\,\theta\rightarrow +$
$\cos\theta\rightarrow -$
$\text{tg}\,\theta\rightarrow -$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine o valor de x para que se tenha: tg x = 3m + 3 e sec x = m +2.

Solução:

Da relação $\sec^2x = 1 + \text{tg}^2x$, segue que:

$$(m+2)^2=1+(3m+3)^2\Rightarrow$$

$$m^2+4m+4=1+9m^2+18m+9\Rightarrow$$

$$8m^2+14m+6=0$$

$$m=\frac{-14\pm\sqrt{4}}{16}\quad\begin{cases}\boxed{m''=\frac{-14+2}{16}=\frac{-3}{4}}\\[2ex]\boxed{m''=\frac{-14-2}{16}=-1}\end{cases}$$

Logo m = –1 ou m = $\frac{-3}{4}$.

2. Demonstre a identidade:
$(1\text{-cotg}\,x)^2 + (1\text{-tg}\,x) = (\sec x\text{-cossec}\,x)^2$

Solução:

$$\underbrace{1-2\text{cotg}\,x+\text{cotg}^2x}_{\text{cossec}^2x}+\underbrace{1-2\text{tg}x+\text{tg}^2x}_{\sec^2x}=$$

$$\sec^2x-2\sec x\cdot\text{cossec}\,x+\text{cossec}^2x$$

$$\cancel{\text{cossec}^2x}-2\,\text{cotg}\,x+\cancel{\sec^2x}-2\text{tg}x=$$

$$\cancel{\sec^2x}-2\sec x\cdot\text{cossec}\,x+\cancel{\text{cossec}^2x}$$

$$-2(\text{cotg}\,x+\text{tg}x)=-2\sec x\cdot\text{cossec}\,x$$

$$\Rightarrow\frac{\cos x}{\text{sen}x}+\frac{\text{sen}x}{\cos x}=\sec x\cdot\text{cossec}\,x$$

$$\frac{\cos^2x+\text{sen}^2x}{\text{sen}x\cdot\cos x}=\frac{1}{\text{sen}x\cdot\cos x}\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\text{sen}x\cdot\cos x}=\frac{1}{\text{sen}x\cdot\cos x}}$$

3. (UFSC) Conhecendo o valor de sen x = $\frac{3}{5}$ e $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, calcule o valor numérico da expressão:

$$\left(\frac{\sec^2x\cdot\text{cotg}\,x-\text{cossec}\,x\cdot\text{tg}x}{6\cdot\text{sen}x\cdot\text{cossec}^2x}\right)^{-1}$$

Solução:

$$\left(\frac{\sec^2x\cdot\text{cotg}\,x-\text{cossec}\,x\cdot\text{tg}x}{6\cdot\text{sen}x\cdot\text{cossec}^2x}\right)^{-1}=$$

$$\frac{6\cdot\cancel{\text{sen}x}\cdot\frac{1}{\text{sen}^{\cancel{2}}x}}{\frac{1}{\cos^{\cancel{2}}x}\cdot\frac{\cancel{\cos x}}{\text{sen}x}-\frac{1}{\cancel{\text{sen}x}}\cdot\frac{\cancel{\text{sen}x}}{\cos x}}=$$

$$\frac{6}{\text{sen}x}:\left(\frac{1}{\text{sen}x\cdot\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{6}{\text{sen}x}:\frac{1-\text{sen}x}{\text{sen}x\cdot\cos x}=\frac{6}{\cancel{\text{sen}x}}\cdot\frac{\cancel{\text{sen}x}\cdot\cos x}{1-\text{sen}x}=\frac{6\cdot\cos x}{1-\text{sen}x}$$

$$\text{sen}^2x+\cos^2x=1\Rightarrow\frac{9}{25}+\cos^2x=1\Rightarrow$$

$$\cos^2x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{4}{5}$$

Como $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, cos x > 0, então: cos x = $\frac{4}{5}$.

Assim, temos:

$$\frac{6\cdot\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\left(6\cdot\frac{4}{5}\right):\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{24}{5}:\frac{2}{5}=\frac{24}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{2}=\frac{24}{2}=12$$

4. Determine a medida do seno, cosseno e tangente para o ângulo que mede $\frac{3\pi}{4}$ rad.

Solução:

$\frac{3\pi}{4}$ é arco do segundo quadrante, então:

2º quadrante		
seno	cosseno	tangente
+	–	–

$x=\pi-\frac{3\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\rightarrow$

Arco correspondente do primeiro quadrante.

Portanto, diremos que:

$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Ao simplificar a expressão $\frac{\operatorname{sen} 2460^\circ\cdot\cos 1110^\circ}{\operatorname{tg} 2205^\circ}$ encontramos:

Solução:

I) $\operatorname{sen} 2460^\circ = \operatorname{sen}(6 \cdot 360^\circ + 300^\circ) = \operatorname{sen} 300^\circ$
$= -\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

II) $\cos 1110^\circ = \cos(3 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ =$
$\frac{\sqrt{3}}{2}.$

III) $\operatorname{tg} 2205^\circ = \operatorname{tg}(6 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

Assim: $\frac{\operatorname{sen} 2460^\circ\cdot\cos 1110^\circ}{\operatorname{tg} 2205^\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}.$

6. Calcule o valor numérico da expressão:

$$\frac{(\operatorname{sen} 30^\circ-\cos 120^\circ)\cdot(\operatorname{cossec} 150^\circ-\operatorname{cotg} 330^\circ)}{\sec 300^\circ+\operatorname{tg} 60^\circ\cdot\operatorname{cotg} 225^\circ}$$

Solução:

$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\operatorname{cossec} 150^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 150^\circ}=\frac{1}{\operatorname{sen} 30^\circ}=2$

$\operatorname{cotg} 330^\circ = \frac{\cos 330^\circ}{\cos 330^\circ}=-\frac{\cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ}=-\sqrt{3}$

$\cos 120^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$

$\sec 300^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$

$\operatorname{cotg} 225^\circ = \frac{\cos 225^\circ}{\cos 225^\circ}=\frac{\cos 45^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ}=1$

Substituindo estes valores na expressão dada, obtemos:

$$\frac{(\operatorname{sen} 30^\circ-\cos 120^\circ)\cdot(\operatorname{cossec} 150^\circ-\operatorname{cotg} 330^\circ)}{\sec 300^\circ+\operatorname{tg} 60^\circ\cdot\operatorname{cotg} 225^\circ}=$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}\cdot 1}$$

Portanto, o valor numérico da expressão dada é 1.

PRATICANDO

1. Convertendo $\frac{7\pi}{4}$rad em graus, obtemos:

a) 225º b) 245º c) 305º
d) 315º e) 350º

2. O menor arco não negativo côngruo ao arco 2650º mede:

a) 330º b) 230º c) 130º
d) 30º e) 150º

3. (Cefet – MG) Assinale a alternativa falsa:

a) $\sec x = \frac{1}{3}$ b) $\operatorname{tg} x = 50.000$
c) $\cos x = \frac{3}{4}$ d) $\operatorname{sen} x = 1$
e) $\operatorname{cossec} x = 50$

4. (UFPA-PA) Sendo $x = \frac{\pi}{2}$, calcule o valor da expressão $\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\operatorname{sen} x}$:

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1
d) 0 e) ∞

5. (Fuvest-SP) O menor valor de $\frac{1}{(3-\cos x)}$, com x real, é:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$
d) 1 e) 3

6. (Unifor-CE) A sentença cos x = 2m - 1 é verdadeira para todo número real x se, e somente se, m pertence ao conjunto:

a) $[0,+\infty]$ b) [0,1] c) $\mathbb{R}$
d) $\mathbb{R}_+$ e) [-1,1]

7. (UFPB) No estudo da trigonometria, Maria e João se deparam com as seguintes desigualdades:

I) $\cos(-20^\circ) < \cos 35^\circ$
II) $\operatorname{sen} 20^\circ < \operatorname{sen} 35^\circ$
III) $\cos(-20^\circ) < \operatorname{sen}(-35^\circ)$

Está(ão) correta(s) apenas:

a) I b) II c) III
d) I e II e) I e III

8. (UFPI) O menor valor de $\frac{3}{5+\operatorname{sen} x}$, para x real, é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{5}$
d) 1 e) $\frac{2}{7}$

9. (UFF-RJ) Para $\theta = 89^\circ$, conclui-se que:

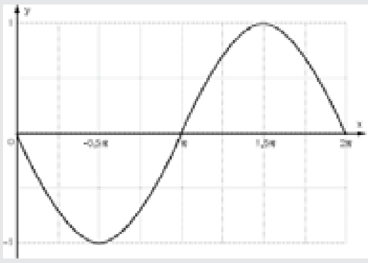
a) $\operatorname{tg}\theta < \operatorname{sen}\theta < \cos\theta$
b) $\cos\theta < \operatorname{sen}\theta < \operatorname{tg}\theta$
c) $\operatorname{sen}\theta < \cos\theta < \operatorname{tg}\theta$
d) $\cos\theta < \operatorname{tg}\theta < \operatorname{sen}\theta$
e) $\operatorname{sen}\theta < \operatorname{tg}\theta < \cos\theta$

10. (Uneb-BA) Se x pertence ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e tg x = 2, então cos x vale:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

11. (UFPA) O gráfico abaixo representa um esboço, no intervalo $[0, 2\pi]$, da função:



a) y = 2 sen x b) y = sen 2x

c) y = sen (-x) d) $y = \cos\dfrac{x}{2}$

e) y = - cos x

12. (Cefet-PR) Sejam as funções f(x) = 2.sen (x) e g(x) = sen (2x). A respeito delas, pode-se afirmar que:

a) o período de f(x) é o dobro do período de g(x);

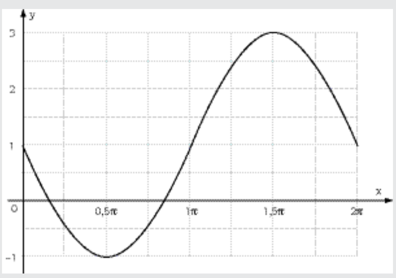
b) as funções f(x) e g(x) possuem os mesmos zeros;

c) o máximo de f(x) é igual ao máximo de g(x);

d) o máximo de (g)x é o dobro do máximo de f(x);

e) o período de g(x) é o dobro do período de f(x).

13. (UFRS) Se f(x) = a + b sen x tem como gráfico:



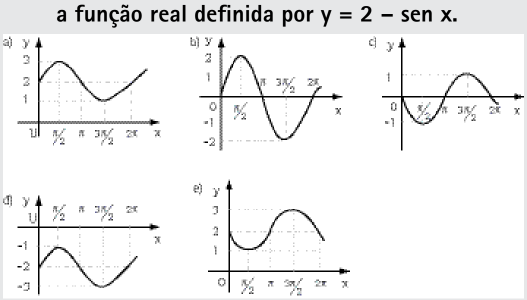
Então:

a) a = -2 e b = 1 b) a = -1 e b = 2

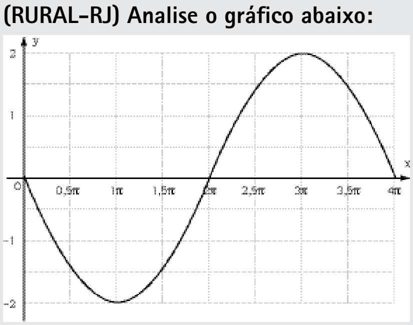
c) a = 1 e b = -1 d) a = 1 e b = -2

e) a = 2 e b = -1

14. (Unificado) Assinale o gráfico que representa a função real definida por y = 2 – sen x.



15. (RURAL-RJ) Analise o gráfico abaixo:



A função f: $[0,4\pi] \to \mathbb{R}$ que pode ter como gráfico o desenho acima é f(x) igual a:

a) –2 sen (2x) b) 4 sen (3x)

c) –3 sen (2x) d) $-2\ \text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

e) $2\ \text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

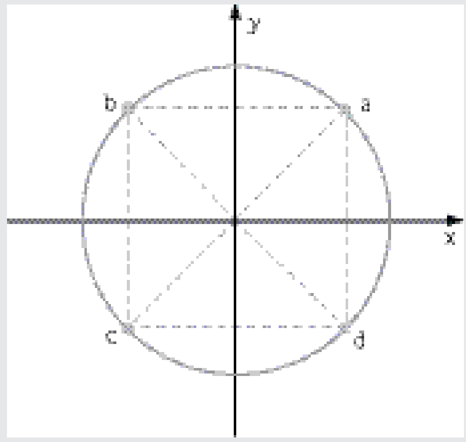
16. (F.M. Santa Casa-SP) Seja a função f, de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = 1 + 4 sen x. O conjunto imagem dessa função é o intervalo:

a) [-3,5] b) [3,5]

c) [-3,4] d) [3,4]

e) [-1,1]

17. Considere a figura e as afirmações abaixo:



I) sen a = sen b II) cos b = cos c

III) tg d = tg b IV) cos a = cos d

V) sen c = sen d VI) tg a = tg b

Dessas afirmações:

a) todas são verdadeiras

b) todas são falsas

c) somente uma é verdadeira

d) somente uma é falsa

e) três são verdadeiras e três são falsas

18. (FGV–SP) A expressão $\dfrac{\sec x - \cos x}{\text{cossec}x - \text{sen}x}$ é equivalente a:

a) $\sec^3 x$ b) $\text{sen}^2 x$

c) $\text{tg}^3 x$ d) $\dfrac{1}{\text{tg}x}$

e) $\dfrac{1}{1 - \text{tg}^2 x}$

19. Qual o valor da expressão sen 20º (tg 10º + cotg 10º)?

a) 1 b) 2 c) 3

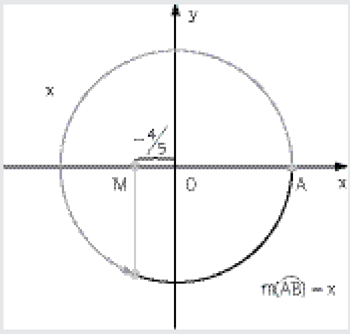
d) $\dfrac{1}{2}$ e) 5

20. Dado cos x = $\dfrac{1}{2}$ e sabendo-se que x é um ângulo do 4º quadrante, calcule senx:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) 1

21. Com os dados da figura abaixo, calcule cossec x:



a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{5}{3}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) 1

22. (UGF–RJ) Determine a de forma que se tenha simultaneamente sen x = $\frac{1}{a}$ e cos x = $\frac{\sqrt{a+1}}{a}$.

a) $a = -1$ ou $a = 2$

b) $a = 1$ ou $a = -2$

c) $a = -2$ ou $a = 2$

d) $a = -1$ ou $a = 1$

d) $a = 3$ ou $a = 2$

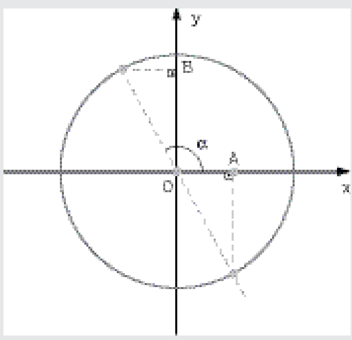
23. (UFPA) Qual das expressões abaixo é idêntica a $\frac{1-\text{sen}^2 x}{\text{cotg } x \cdot \text{sen } x}$?

a) $\sec^3 x$ b) $\text{sen}^2\, x$

c) $\text{tg}^3\, x$ d) $\frac{1}{\text{tg} x}$

e) cos x

24. (UFRS–RS) No círculo trigonométrico abaixo tem-se α =120º. O valor de AO . OB é:



a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

25. (U.E. Londrina – PR) Seja x a medida de um arco em radianos. O número real a, que satisfaz as sentenças sen x = $\sqrt{3-a}$ e cos x = $\frac{a-2}{2}$ é tal que:

a) $a \geq 7$ b) $5 \leq a < 7$

c) $3 \leq a < 5$ d) $0 \leq a < 3$

e) $a < 0$

26. (UA-AM) Para todo x $\in \mathbb{R}$, tal que sen x $\neq$ cos x, a expressão $\frac{\text{sen}^3 x - \cos^3 x}{\text{sen } x - \cos x}$ é idêntica a:

a) tg x b) $\text{sen}^2 x - \cos^2 x$

c) 1 d) 1 + sen x cos x

e) $(\text{sen } x + \cos x)^2$

27. Se sen a = $\frac{1}{3}$, então o valor de sen (25π + a) – sen (88π – a) é:

a) 0 b) –1

c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{p}{2}$

e) $\frac{2}{3}$

28. Se tg x = m, então tg (π – x) é:

a) $\frac{m}{2}$ b) $-m$

c) m d) $-\frac{m}{2}$

e) 2m

29. (Unificado)

Sendo A = $\frac{7\cos(5\pi - x) - 3\cos(3\pi + x)}{8\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$, com x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $k \in Z$, então:

a) A = –1

b) 2A = 1

c) 2A + 1 = 0

d) 4A + 5 = 0

e) 5A – 4 =0

TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

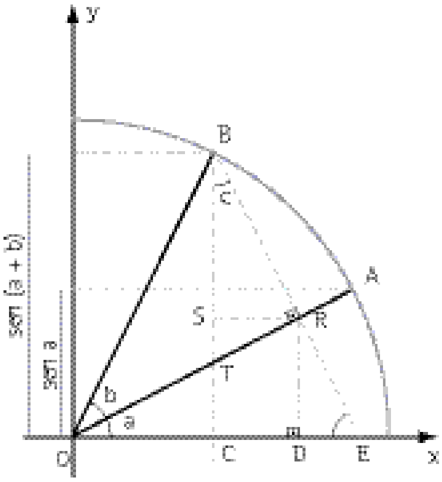
M22

FÓRMULAS PARA ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

O nosso objetivo agora é encontrar os valores das razões trigonométricas para os arcos que podem ser obtidos pela adição ou subtração de outros dois, isso desde que sejam conhecidas as razões destes últimos.

1) sen (a + b)

Em um primeiro momento, veremos como encontrar o seno de um arco resultante de uma adição. Para chegar a fórmula, analisaremos a figura abaixo, tentando determinar o sen (a + b).



Observe que:

sen (a +b) = $\overline{CB}$

$\overline{CB} = \overline{CS} + \overline{SB}$

Tem-se que $\overline{CS} = \overline{DR}$, então:

sen (a + b) = $\overline{DR} + \overline{SB}$

No triângulo ODR, temos:

$$\text{sen (a)} = \frac{\overline{DR}}{\overline{OR}} \Rightarrow \overline{DR} = \overline{OR} \text{ . sen (c)}$$

No triângulo BSR, temos:

$$\cos\text{(c)} = \frac{\overline{SB}}{\overline{BR}} \Rightarrow \overline{SB} = \overline{BR} \text{ . cos (c)}$$

Os triângulos OCT e TBR são semelhantes, sendo assim, temos:

$\hat{a} = \hat{d} \Rightarrow \overline{SB} = \overline{BR}$. cos (a)

No triângulo OBR, temos:

cos b = $\overline{OR}$ e sen b = $\overline{BR}$

Então vejamos, como sen (a + b) = $\overline{DR} + \overline{SB}$ substituindo $\overline{DR}$ e $\overline{SB}$, teremos:

sen (a + b) = $\overline{OR}$. sen (a) + $\overline{BR}$. cos (a)

Substituindo dessa vez $\overline{OR}$ e $\overline{BR}$, finalmente, teremos:

sen (a+b) = cos (b) . sen (a) + sen (b) . cos (a)

Veja o exemplo:

a) Calcule o sen 75º.

Solução:

$\text{sen}(75^o) = \text{sen}(45^o + 30^o) = \text{sen } 45^o . \cos 30^o + \text{sen } 30^o . \cos 45^o \Rightarrow \text{sen}(75^o) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \text{sen}(75^o) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$

$\text{sen}(75^o) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) sen (a - b)

Agora, veremos como encontrar o seno de um arco resultante de uma subtração, usando como referência o sen (a - b).

sen (a – b) = sen (a + (-b)) = sen a . cos (-b) + sen (-b) . cos (a)

Como:

$$\begin{cases} \cos(-b) = \cos(b) \rightarrow \text{função par} \\ \text{sen}(-b) = -\text{sen}(b) \rightarrow \text{função ímpar} \end{cases}$$

Logo, temos:

sen (a–b) = sen (a) . cos (b) – sen (b) . cos (a)

Veja o exemplo:

b) Calcule o seno de 15º.

Solução:

$\text{sen}(15^o) = \text{sen}(45^o - 30^o) = \text{sen } 45^o . \cos 30^o - \text{sen } 30^o . \cos 45^o \Rightarrow \text{sen}(45^o) =$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}(45^o) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3) cos (a + b)

Nosso próximo passo é aplicar a mesma ideia estudada acima para determinar o cosseno dos arcos resultantes de adições ou subtrações. O primeiro caso será o de adição, o que faremos analisando o cos (a + b).

Sejam x e y dois arcos complementares, ou seja, x + y = 90º, então é correto afirmar que sen (x) = cos (y) ou sen (y) = cos (x). Para entendermos melhor, vamos restringir o estudo a dois ângulos em particular, os de 30º e 60º, que obviamente são complementares, já que 30º + 60º = 90º.

$\text{sen}(30^o) = \frac{1}{2}$ e $\cos(60^o) = \frac{1}{2}$, temos, então:

sen (30º) = cos (60º)

Agora que sabemos isso podemos dizer que então:

$\cos x = \text{sen}\,(90^o - x)$ e $\text{sen}\,x = \cos\,(90^o - x)$

Assim, se $x = a + b$, temos:

$\cos(a + b) = \text{sen}\,(90 - (a + b)) = \text{sen}\,(90 - a - b) \Rightarrow \text{sen}\,((90 - a) - b) \Rightarrow \text{sen}\,(90 - a) \cdot \cos(b) - \text{sen}\,(b) \cdot \cos(90 - a) \Rightarrow$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \text{sen}\,(a) \cdot \text{sen}\,(b)$$

Veja o exemplo:

c) Calcule o cos 105º.

Solução:

$\cos(105^o) = \cos(60^o + 45^o) = \cos 60^o \cdot \cos 45^o - \text{sen}\,60^o \cdot \text{sen}\,45^o \Rightarrow \cos(105^o) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\cos(105^o) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

4) cos (a - b)

Agora, aprenderemos a determinar o cosseno dos arcos resultantes de subtrações, analisando o cos (a – b).

$\cos(a - b) = \cos(a + (-b)) = \cos a \cdot \cos(-b) - \text{sen}\,(a) \cdot \text{sen}\,(-b)$

Como:

$$\begin{cases}\cos(-b) = \cos(b) & \rightarrow \text{função par}\\ \text{sen}\,(-b) = -\,\text{sen}\,(b) & \rightarrow \text{função ímpar}\end{cases}$$

Logo, temos:

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}\,(a) \cdot \text{sen}\,(b)$$

Veja o exemplo:

d) Calcule o cos 15º.

Solução:

$\cos(15^o) = \cos(45^o - 30^o) = \cos 45^o \cdot \cos 30^o + \text{sen}\,45^o \cdot \text{sen}\,30^o \Rightarrow \cos(15^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\cos(15^o) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Observação:

Os exemplos **d** e **a** utilizaram ângulos complementares, veja o que aconteceu:

$\text{sen}\,(75^o) = \cos(15^o) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Essa constatação ratifica o que foi dito anteriormente sobre os ângulos complementares.

5) tg (a + b)

Chegamos a última razão trigonométrica. Nesse item, assim como nos anteriores, trabalharemos primeiramente com a adição, analisando, para tanto, a tg (a + b).

$$tg(a+b) = \frac{\text{sen}\,(a+b)}{\cos\,(a+b)} = \frac{\text{sen}\,a\cdot\cos b + \text{sen}\,b\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b - \text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b}$$

Dividiremos numerador e denominador desta fração por $\cos a \cdot \cos b$ e assim teremos:

$$tg\,(a + b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,a\cdot\cos b + \text{sen}\,b\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b}}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b - \text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b}{\cos a\cdot\cos b}} \Rightarrow$$

$$tg\,(a + b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,a\cdot\cancel{\cos b}}{\cos a\cdot\cancel{\cos b}} + \dfrac{\text{sen}\,b\cdot\cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a}\cdot\cos b}}{\dfrac{\cancel{\cos a}\cdot\cancel{\cos b}}{\cancel{\cos a}\cdot\cancel{\cos b}} - \dfrac{\text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b}{\cos a\cdot\cos b}}$$

$$tg\,(a + b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,(a)}{\cos\,(a)} + \dfrac{\text{sen}\,(b)}{\cos\,(b)}}{1 - \dfrac{\text{sen}\,(a)}{\cos\,(a)}\cdot\dfrac{\text{sen}\,(b)}{\cos\,(b)}}$$

Logo, temos:

$$tg(a + b) = \frac{tg\,(a) + tg\,(b)}{1 - tg\,(a)\cdot tg\,(b)}$$

Veja o exemplo:

e) Calcule a tg (75º).

Solução:

$tg\,(75^o) = tg\,(45^o + 30^o) = \frac{tg\,(45^o) + tg\,(30^o)}{1 - tg\,(45^o)\cdot tg\,(30^o)} \Rightarrow tg\,(75^o) =$

$$\frac{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}} =$$

$$tg\,(75^o) = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

6) tg (a - b)

Aprenderemos agora a determinar a tangente dos arcos resultantes de subtrações, tendo como base a tg (a – b).

$$tg\,(a - b) = tg\,(a + (-b)) = \frac{tg\,(a) + tg\,(-b)}{1 - tg\,(a)\cdot tg\,(-b)}$$

Como $tg\,(-b) = -tg\,(b) \Rightarrow$ tg é função ímpar

$$tg(a - b) = \frac{tg\,(a) - tg\,(b)}{1 + tg\,(a)\cdot tg\,(b)}$$

Veja o exemplo:

f) Calcule a tg 135º.

Solução:

$tg\,(135^o) = tg\,(180^o - 45^o) = \frac{tg\,(180^o) - tg\,(45^o)}{1 + tg\,(180^o)\cdot tg\,(45^o)} \Rightarrow$

$$tg\,(135^o) = \frac{0-1}{1+0} = -1.$$

FÓRMULAS PARA ARCOS DUPLOS

Depois dos arcos resultantes de adições e subtrações, estudaremos os arcos provenientes da multiplicação pelo algarismo dois.

1) cos (2a)

O primeiro caso estudo será o do cosseno, para o qual utilizaremos o cos (2a) como referência.

cos (2a) = cos (a + a) = cos a . cos a – sen a . sen a ⇒ $\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

Se aplicarmos a relação fundamental a esta, obteremos uma terceira relação. Veja:

Relação fundamental: $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$

Substituindo: $\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = \cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - 1$$

Ou ainda:

$$\cos(2a) = 1 - 2\,\text{sen}^2 a$$

2) sen (2a)

O próximo caso analisado será o do seno, para esse estudo utilizaremos como base o sen (2a).

sen (2a) = sen (a + a) = sen a . cos a + sen a . cos a ⇒ $\text{sen}(2a) = 2\,\text{sen}\,a \cdot \cos a$

3) tg (2a)

O último caso se refere a tangente, para essa análise utilizaremos como parâmetro a tg (2a).

$$\text{tg}(2a) = \text{tg}(a + a) = \frac{\text{tg}(a) + \text{tg}(a)}{1 - \text{tg}(a)\cdot\text{tg}(a)} \Rightarrow$$

$$\text{tg}(2a) = \frac{2\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

Veja o exemplo:

a) Determine o seno, o cosseno e a tangente de 120º.

$\text{sen}(120^\circ) = \text{sen}(2 \cdot 60^\circ) = 2\,\text{sen}\,60^\circ \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow \text{sen}(120^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\text{sen}(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(120^\circ) = \cos(2 \cdot 60^\circ) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \Rightarrow$

$\cos(120^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 \Rightarrow \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$

$\text{tg}(120^\circ) = \text{tg}(2 \cdot 60^\circ) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{-2}$

$\Rightarrow \text{tg}(120^\circ) = -\sqrt{3}$

FÓRMULAS PARA ARCO METADE

Nosso próximo estudo se deterá sobre os arcos resultantes da divisão pelo algarismo 2.

1) cos $\left(\frac{x}{2}\right)$

Inicialmente aprenderemos a determinar o cosseno. Sabemos que o cos (2a) = 2 cos²a -1, assim, diremos que 2a = x e ao substituir encontraremos: $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$.

Agora, só precisamos isolar $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, veja:

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos(x) + 1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cos(x) + 1}{2}}$$

2) sen $\left(\frac{x}{2}\right)$

Agora estudaremos o seno. Sabemos que o cos (2a) = 1 - 2 sen²a, assim, diremos que 2a = x e ao substituir encontraremos: $\cos(x) = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Agora, só precisamos isolar $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, veja:

$$\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$$

3) tg $\left(\frac{x}{2}\right)$

O último caso estudado será o da tangente, para isso utilizaremos como referência a simbologia $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \pm\frac{\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}} \Rightarrow$$

$$\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}$$

Veja o exemplo:

a) Calcular o seno, o cosseno e a tangente de 22º e 30’:

Solução:

O arco de 22º30’ é o arco metade de 45º, então iremos aplicar as fórmulas para arco metade.

$$\text{sen}(22^\circ 30') = \text{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \Rightarrow$$

$$\text{sen}(22^\circ 30') = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \Rightarrow$$

$$\text{sen}(22^\circ 30') = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos(22^\circ 30') = \cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2}} \Rightarrow$$

$$\cos(22^o30') = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} \Rightarrow$$

$$\cos(22^o+30') = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$tg(22^o30') = \cos\left(\frac{45^o}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} \Rightarrow$$

$$tg(22^o30') = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} \Rightarrow$$

$$tg(22^o+30') = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{2})}} \Rightarrow$$

$$tg(22^o+30') = \sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow$$

$$tg(22^o30') = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

FÓRMULAS PARA FATORAÇÃO

Como já sabemos, fatorar é transformar soma em produto e é exatamente isso que queremos neste momento. Para estudarmos esse item, vamos primeiro obter as fórmulas de Werner:

1) sen (a + b) + sen (a – b) = 2 . sen (a) . cos (b)

2) sen (a + b) - sen (a – b) = 2 . sen (b) . cos (a)

3) cos (a + b) + cos (a – b) = 2 . cos (a) . cos (b)

4) cos (a + b) - cos (a – b) = -2 . sen (a) . sen (b)

Agora diremos que: $\begin{cases} a+b=x \\ a-b=y \end{cases}$

Assim, ao resolver este sistema chegamos às seguintes respostas:

$a = \frac{x+y}{2}$ e $b = \frac{x-y}{2}$

Substituindo **a** e **b** nas fórmulas de Werner, encontraremos as fórmulas para fatoração, veja:

1) $\text{sen}(x)+\text{sen}(y) = 2\ .\ \text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\ .\ \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

2) $\text{sen}(x)-\text{sen}(y) = 2\ .\ \text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\ .\ \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

3) $\cos(x)+\cos(y) = 2\ .\ \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\ .\ \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

4) $\cos(x)-\cos(y) = -2\ .\ \text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\ .\ \text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Dessa maneira, conseguimos fatorar expressões como sen x ± sen y, cos x ± cos y.

Para as tangentes utilizaremos o seguinte:

1) $tg\ x + tg\ y = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} + \frac{\text{sen}(y)}{\cos(y)} =$

$$\frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(y)+\text{sen}(y)\cdot\cos(x)}{\cos(x)\cdot\cos(y)} =$$

$$= \frac{\text{sen}(x+y)}{\cos(x)\cdot\cos(y)}$$

$$tg\,x + tg\,y = \frac{\text{sen}(x+y)}{\cos(x)\cdot\cos(y)}$$

2) $tg(x) - tg(y) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} - \frac{\text{sen}(y)}{\cos(y)} =$

$$\frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(y)-\text{sen}(y)\cdot\cos(x)}{\cos(x)\cdot\cos(y)} =$$

$$= \frac{\text{sen}(x-y)}{\cos(x)\cdot\cos(y)}$$

$$tg\,x - tg\,y = \frac{\text{sen}(x-y)}{\cos(x)\cdot\cos(y)}$$

Dessa maneira conseguiremos fatorar as expressões tg (x)± tg (y).

Veja o exemplo:

a) Fatore a soma sen 5x + cos x.

Solução:

Sabemos que $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, assim substituindo na expressão temos:

$$\text{sen}\,5x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) =$$

$$2\cdot\text{sen}\left(\frac{5x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{5x-\frac{\pi}{2}+x}{2}\right) =$$

$$2\cdot\text{sen}\left(\frac{4x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{6x-\frac{\pi}{2}}{2}\right) =$$

$$2\cdot\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$$

b) Simplifique a expressão $y = \frac{\cos 3x + \cos x}{\text{sen}\,3x - \text{sen}\,x}$

Solução:

Fatorando o numerador e o denominador, temos:

cos 3x + cos x = 2· cos 2x · cos x

sen 3x – sen x = 2 · sen x · cos 2x

Então:

$$y = \frac{\cos 3x + \cos x}{\text{sen}\,3x - \text{sen}\,x} \Rightarrow$$

$$y = \frac{2\cdot\cancel{\cos 2x}\cdot\cos x}{2\cdot\text{sen}\,x\cdot\cancel{\cos 2x}} \Rightarrow$$

$$y = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} \Rightarrow$$

y = cotg x

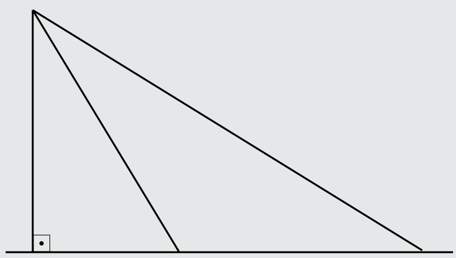
c) Fatore a expressão y = 1 + cos x.

$y = 1 + \cos x = \cos 0 + \cos x = 2\cos\frac{x}{2}\cdot$

$\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = 2\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}\cdot$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

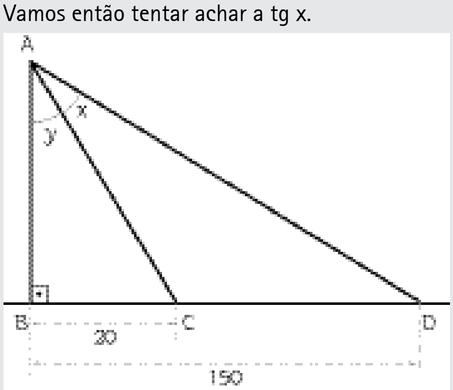
1. **(Uerj) Um holofote está situado no ponto A, a 30 metros de altura, no alto de uma torre perpendicular ao plano do chão. Ele ilumina, em movimento de vaivém, uma parte desse chão, do ponto C ao ponto D, alinhados à base B, conforme demonstra a figura abaixo:**



Se o ponto dista 20 metros de C e 150 metros de D, qual a medida do ângulo $C\hat{A}D$?

Solução:

Vamos então tentar achar a tg x.



$\text{tg}\,(x + y) = \dfrac{150}{30} = 5$

$\text{tg}\,(y) = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$

$\text{tg}\,(x + y) = 5 = \dfrac{\text{tg}\,(x) + \text{tg}\,(y)}{1 - \text{tg}\,(x) \cdot \text{tg}\,(y)} \Rightarrow$

$5 = \dfrac{\text{tg}\,(x) + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \text{tg}\,(x)} \Rightarrow 5 - \dfrac{10}{3}\text{tg}\,(x) = \text{tg}\,(x) + \dfrac{2}{3}\ \ x\,(+3)$

$\Rightarrow 15 - 10\ \text{tg}\,(x) = 3\ \text{tg}\,(x) + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -13\ \text{tg}\,(x) = -13\ \ \text{tg}\,(x) = 1$

$\text{tg}\,(x) = 1 \Rightarrow$ O ângulo cuja tangente é 1 mede 45^o.

2. **Sendo sen a = $\dfrac{5}{13}, 0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, calcule seno, cosseno e tangente de 2a, utilizando as fórmulas de arco dobro.**

Solução:

Calculamos inicialmente, cos a e tg a:

$\cos^2 a = 1 - \text{sen}^2 a = 1 - \dfrac{25}{169} = \dfrac{144}{169}$, como a é do 1º quadrante, $\cos a = \dfrac{12}{13}$; $\text{tg}\ a = \dfrac{\text{sen}\ a}{\cos a} = \dfrac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \dfrac{5}{12}$

Agora, temos:

$\text{sen}\ 2a = 2\ \text{sen}\ a \,.\, \cos a = 2 \,.\, \left(\dfrac{5}{13}\right) \cdot \left(\dfrac{12}{13}\right) = \dfrac{120}{169}$

$\cos\ ^2 a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = \dfrac{144}{169} - \dfrac{25}{169} = \dfrac{119}{169}$

$\text{tg}\ 2a = \dfrac{2\ \text{tg}\ a}{1 + \text{tg}^2 a} = \dfrac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \dfrac{120}{119}$

3. **Calcule sen 2x sabendo que sen x + cos x = 1.**

Solução:

Faremos então:

$(\text{sen}\ x + \cos x)^2 = (1)^2 \Rightarrow$

$\underbrace{\text{sen}^2 x + 2\ \text{sen}\ x \cdot \cos x + \cos^2 x}_{\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1} = 1 \Rightarrow 2\ \ \text{sen}\ \ x\ \ .$

$\cos = 1 - 1 \Rightarrow \underbrace{2\ \text{sen}\ x \cdot \cos x}_{\text{sen}\ 2x} = 0 \Rightarrow \text{sen}\ 2x = 0$

PRATICANDO

1. **Qual a opção que indica o valor da sec (15º)**

a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ b) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

c) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ d) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

2. **(UFPA) Sendo a e b dois ângulos que de tal forma tg (a) = $\dfrac{1}{2}$ e tg b = $\dfrac{1}{3}$, em graus, o valor do ângulo a + b pode ser.**

a) 45º b) 60º

c) 75º d) 120º

3. **Simplificando x = $\dfrac{\cos 75^o + \cos 15^o}{\text{sen}\ 75^o + \text{sen}\ 15^o}$ encontraremos:**

a) 0 b) 1

c) 2 d) tg 60º

4. **(UFRN) Um observador, situado no ponto P de um prédio, vê três pontos, Q, R e S, numa mesma vertical, em um prédio vizinho, conforme esquematizado na figura abaixo. P e Q estão num mesmo plano horizontal, R está a 6 metros acima de Q e S está 24 metros acima de Q. Verifica-se que o ângulo α do triângulo QPR é igual ao ângulo β do triângulo RPS.**

O valor, em metros, que mais se aproxima da distância entre P e Q é:

a) 8,5 b) 8,8

c) 9,4 d) 10,2

5. **(UFF) O valor de (sen 22,5º + cos 22,5º)² é:**

a) $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

e) 1

6. **(Unificado) Considerando sen x = $\frac{1}{2}$, o valor de cos 2x será:**

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{1}{2}$

7. **(Mackenzie-SP) Se** $\text{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=k$, **então um possível valor de k é:**

a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{1}{5}$

c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{5}$

e) $-\frac{7}{10}$

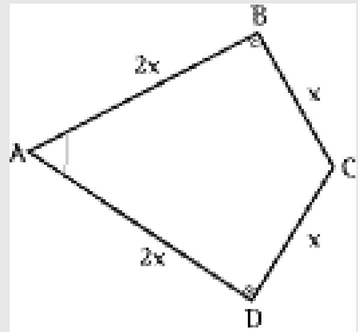
8. **(UFF) Sendo** $x\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*$ e $x\in\mathbb{R}$, **a expressão** $[(\text{sen}\,x+\cos x)^2-\text{sen}\,(2x)]^n$ **é equivalente a:**

a) $[\text{sen}\,(2k\pi)]^n$ b) $[\cos(2k\pi+\pi)]^n$

c) $\cos\,(nk\pi)$ d) $[\text{sen}\,(2k\pi+\frac{\pi}{2})]^n$

e) $\text{sen}\,(nk\pi)$

9. **(Fuvest) No quadrilátero ABCD onde os ângulos B e D são retos e os lados têm as medidas indicadas, o valor de sen $\hat{A}$ é:**



a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{1}{2}$

10. **(Vunesp-SP) O seno do ângulo da base de um triângulo isósceles é igual a $\frac{1}{4}$. Então, a tangente do ângulo do vértice desse triângulo é igual a:**

a) $\frac{-\sqrt{13}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{13}}{5}$

c) $\frac{-\sqrt{15}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{14}}{7}$

e) $\frac{-\sqrt{15}}{7}$

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Definição

São equações, ou seja, igualdades que apresentam a incógnita vinculada às funções trigonométricas, como:

$$\text{sen } x = 0; \quad \text{sen } x + \cos x = \frac{1}{2}$$

Resolução de equações trigonométricas

Resolver uma equação é determinar o valor da incógnita que torna verdadeira a sentença.

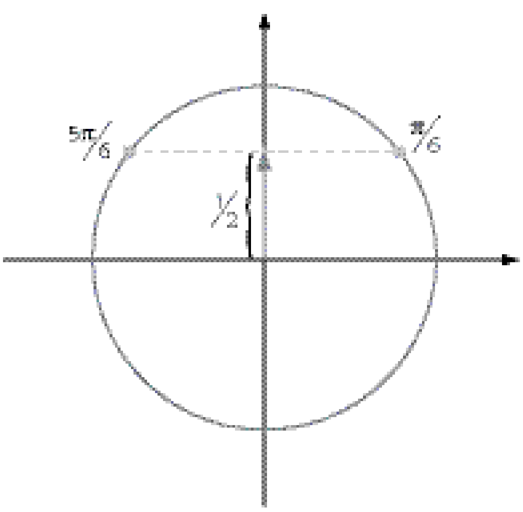
Tipos de equações trigonométricas

Vamos agora através da resolução de exemplos, achar o conjunto-solução para diferentes tipos de equações trigonométricas. Teremos sempre a preocupação de simplificá-las ao máximo antes de tentar resolvê-las.

a) Resolva a equação sen $x = \frac{1}{2}$.

Solução:

Analisemos o ciclo trigonométrico, procurando os ângulos (incógnitas) que tenham o seno igual a $\frac{1}{2}$.

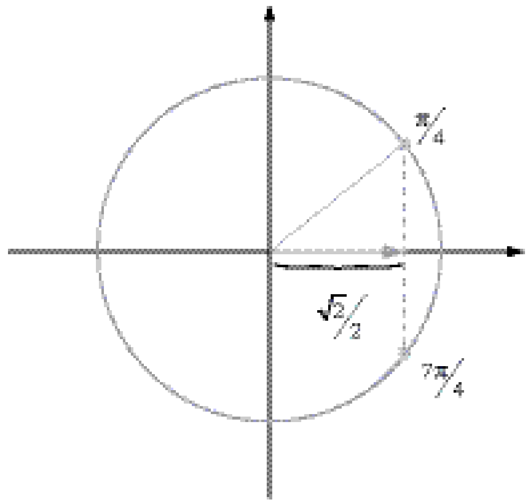


Como vemos na primeira volta, teríamos duas respostas, ou seja, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$. Porém, o enunciado do problema não indica que a nossa resposta deva se limitar a uma volta. Assim, incluiremos na solução toda a família de arcos côngruos a $\frac{\pi}{6}$ e a $\frac{5\pi}{6}$. Portanto o conjunto-solução será definido como:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / \ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Resolva a equação $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

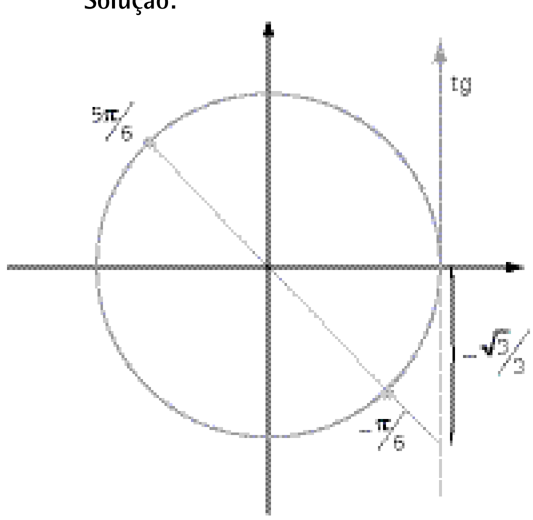
Solução:



Identificamos os dois ângulos que na primeira volta produzem o valor de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ para o cosseno de x, o importante agora é montar o conjunto-solução desta equação. Assim, sem esquecer dos arcos côngruos: $S = \{x \in \mathbb{R} / \ x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Resolva a equação tg $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$.

Solução:



Como vemos no ciclo da figura, o valor de x procurado na primeira volta corresponde a $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$, dessa forma o conjunto-solução será definido da seguinte forma: $S=\{x \in \mathbb{R} / \ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Observação:

Alguns dos conjuntos-soluções utilizados até agora possuem mais de uma maneira de serem escritos. Vejamos abaixo que o conjunto-solução do último exemplo pode ser simbolizado também como:

$S=\{\mathbf{x \in \mathbb{R} / \ x=\frac{5\pi}{6}+k\pi; k \in \mathbb{Z}}\}$, ou ainda,

$S=\{\mathbf{x \in \mathbb{R} / \ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi; k \in \mathbb{Z}}\}$.

d) Resolva a equação sen 5x = sen 2x.

Solução:

Primeiro transformaremos a equação em produto através da fatoração. Veja:

$\operatorname{sen} 5x-\operatorname{sen} 2x=0 \Rightarrow$

$2\operatorname{sen} \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{7x}{2}=0 \Rightarrow$

$\operatorname{sen} \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{7x}{2}=0$

Como sabemos, se o produto de dois fatores é zero, então:

$\operatorname{sen} \frac{3x}{2}=0$ ou $\cos=\frac{7x}{2}=0$

Assim, precisaremos analisar os dois casos:

$\operatorname{sen} \frac{3x}{2}=0 \Rightarrow \frac{3x}{2}=k\pi \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}$

ou

$\cos=\frac{7x}{2}=0 \Rightarrow \frac{7x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow$

$x=\frac{\pi}{7}+\frac{2k\pi}{7}$

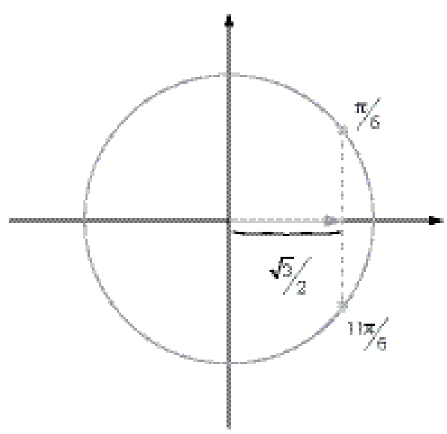
Logo, o conjunto-solução será:

$S=\{x \in \mathbb{R} / \ x=\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{\pi}{7}+\frac{2k\pi}{7}; k \in \mathbb{Z}\}$

e) Resolva a equação $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solução:

O arco $x-\frac{\pi}{3}$ tem cosseno igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, então procuremos no ciclo trigonométrico onde este arco pode estar localizado.



Então temos duas opções, observe:

$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ou

$x-\frac{\pi}{3}=\frac{11\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{13\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow$

$x=\frac{12\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\underbrace{2\pi+\frac{\pi}{6}}_{**}+2k\pi \Rightarrow$

$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

** $2\pi+\frac{\pi}{6}$ será substituído por $\frac{\pi}{6}$, pois é arco côngruo e essa seria a sua menor determinação.

Logo:

$S=\{x \in \mathbb{R} / \ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\}$.

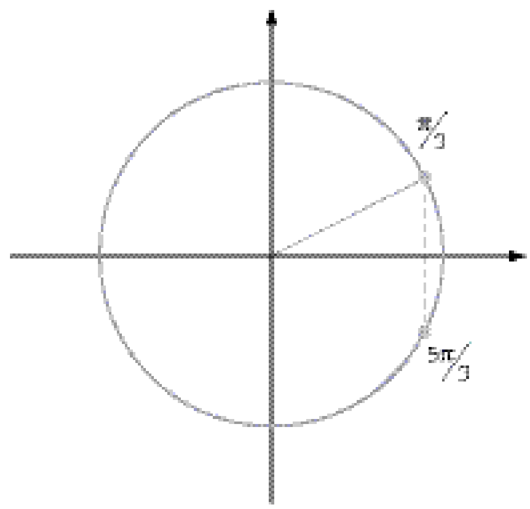
f) Resolva a equação: sen x . cotg x = $\cos\frac{\pi}{3}$.

Solução:

$\operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{cotg} x=\cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$\operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x}}=\cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x=\cos \frac{\pi}{3}$

Agora, analisemos o ciclo trigonométrico:



Então se $\cos x=\cos \frac{\pi}{3}$, podemos dizer que: $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$.

Logo:

$S=\{x \in \mathbb{R} / \ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi\}$

g) Resolva a equação sen x + cos x = -1.

Solução:

Chamemos cos x = a e sen x = b. Assim, teremos: a + b = -1. Sabemos que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, com a mudança de variável, obteremos: $a^2+b^2=1$. Montando o sistema:

$$\begin{cases} a+b=-1 \Rightarrow b=-(1+a) \\ a^2+b^2=1 \end{cases}$$

$a^2+(-1-a)^2 \Rightarrow a^2+1+2a+a^2=1 \Rightarrow$

$$2a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a^2 + a = 0 \Rightarrow$$

$$a(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = -1$$

Se a = 0, então b = -1 e se a = -1, então b = 0.

Assim, podemos saber quem é sen (x) e cos (x).

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x) = 0\\ \operatorname{sen}(x) = -1\end{array}\right\} x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x) = -1\\ \operatorname{sen}(x) = 0\end{array}\right\} x = \pi + 2k\pi$$

Logo:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / \ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

h) Resolva a equação $(\sec x - 2)^2 = -2(\sec x - 2)$.

Solução:

Iniciaremos a resolução, igualando sec (x) a y. Assim:

$(\sec x - 2)^2 = -2(\sec x - 2) \quad \sec(x) = y$

$y^2 = -2y \Rightarrow y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y(y+2) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = -2$.

Se $y = 0 \Rightarrow$

$$\sec x - 2 = 0 \Rightarrow \sec x = 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = 2 \Rightarrow$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Se $y = -2 \Rightarrow \sec x - 2 = -2 \Rightarrow \sec x = 0$

Como secante de x igual a zero não pode:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / \ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Inequações trigonométricas

Definição

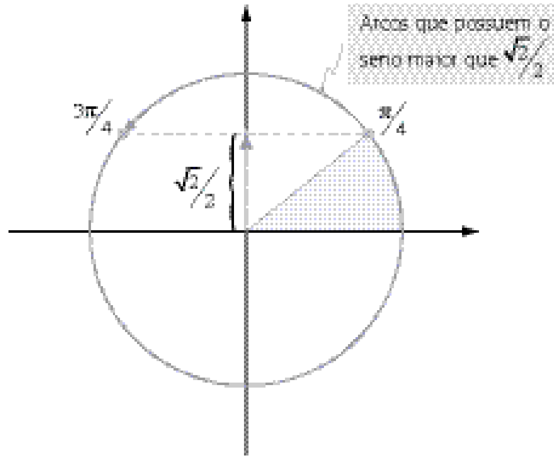
É uma desigualdade, onde a variável está vinculada a uma função trigonométrica.

Resolução de equações trigonométricas

Para resolver estas inequações simplificaremos ao máximo, procurando tê-las na sua forma mais simples para depois resolvê-las. Vejamos os exemplos:

a) Resolva a inequação $\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

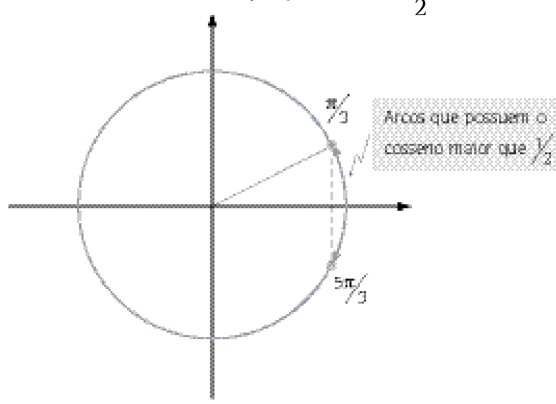
Solução:



Logo:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / \ \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Resolva a inequação $\cos x > \frac{1}{2}$.



Observe que as setas indicam como deve ser orientada a resposta, então, vamos lá:

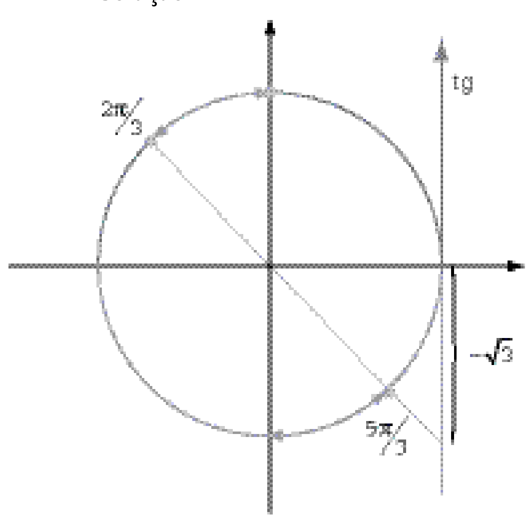
$$2k\pi \le x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{3} + 2k\pi < x \le 2k\pi$$

Logo:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / \ 2k\pi \le x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{3} + 2k\pi < x \le 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

c) Resolva a inequação $\operatorname{tg} \le -\sqrt{3}$.

Solução:



Pelo ciclo trigonométrico, teremos:

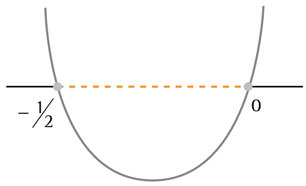
$$S = \{x \in \mathbb{R} / \ \frac{\pi}{2} < x \le \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \le \frac{5\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\}$$

d) Resolva a inequação cos 2x + cos x ≤ -1.

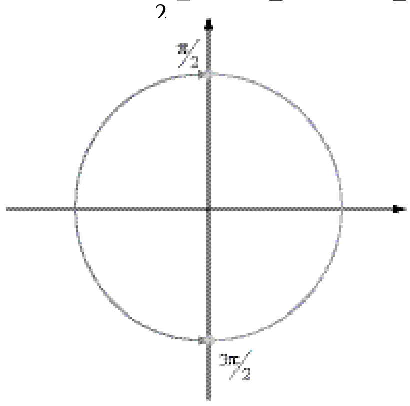
Solução:

Sabemos que: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x \le -1 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x \le 0$.

Fazendo cos x = y, obtemos: $2y^2 + y \le 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le y \le 0$.

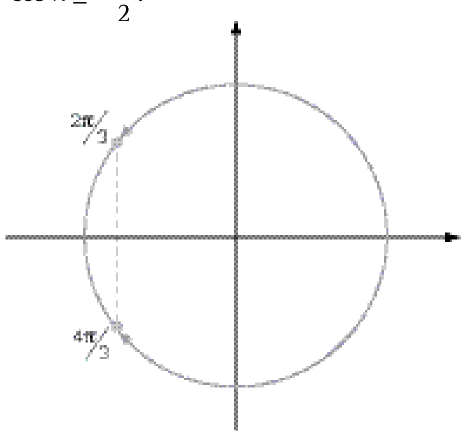


Substituindo: $-\frac{1}{2} \le \cos x \le 0 \Rightarrow \cos \le 0$.



Assim, temos: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$

$\cos x \ge -\frac{1}{2}$.



Com isso: $2k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} \le x \le 2k\pi$

Portanto, fazendo a intersecção:

$S = \{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

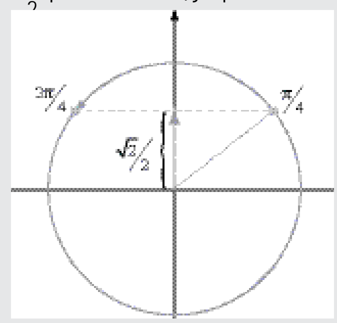
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolva a seguinte equação: $2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$.

Solução:

$$2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vejamos agora no ciclo trigonométrico quais os valores $x - \frac{\pi}{2}$ podem assumir, já que o seno é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Então, podemos dizer que:

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Ou

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

Logo: $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\}$.

2. (Unifor-CE) Para todo número inteiro k, qual o conjunto-solução de $(\cos x + \text{sen}x)^4$ = 0?

Solução:

$$(\cos x + \text{sen}x)^4 = 0 \Rightarrow ((\cos x + \text{sen}x)^2)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(\underbrace{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}_{1} + 2\text{sen}x\cos x)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(1 + \text{sen}2a)^2 = 0 \Rightarrow 1 + 2\text{sen}2a + \text{sen}^2(2a) = 0$$

Chamando sen (2a) de y, obteremos:

$$y^2 + 2y + 1 = 0 \begin{cases} y' = -1 \\ y'' = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}2a = -1$$

$$\text{sen}2a = -1 \Rightarrow 2a = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow a = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

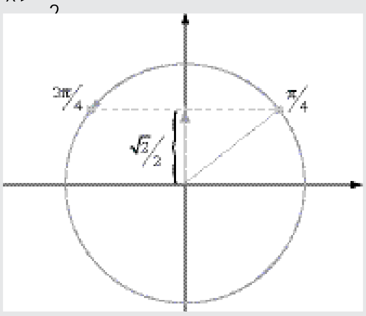
3. Resolva a inequação |sen x| > $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solução:

$$|\text{sen}\,x| > \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} \text{sen}\,x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ \text{sen}\,x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Assim sendo, analisemos as duas inequações:

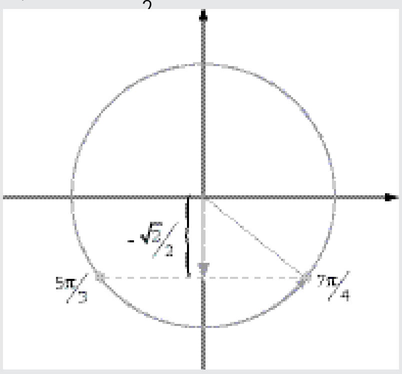
1ª) $\text{sen } x > \frac{\sqrt{2}}{2}$



Para essa inequação, temos:

$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

2ª) $\text{sen } x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Para essa inequação, temos:

$\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

Logo: S = $\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

PRATICANDO

1. **Resolvendo a equação** $\cos(\text{sen } \theta) = 1$**, obtém-se:**

a) $\theta = 0$

b) $\theta = \frac{\pi}{2}$

c) $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\theta = 2k\pi, k \in z$

e) $\theta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. **(Mack – SP) Para** $0 \le x \le 2\pi$**, o conjunto-solução de sen x + (cos x)² > 1 é:**

a) $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x < \frac{\pi}{2}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < x < \frac{3\pi}{2}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{2} < x < \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\}$

e) $\varnothing$

3. **(UFRGS) No intervalo real** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$**, o conjunto-solução da desigualdade** $\text{sen} x \cdot \cos x \le \frac{1}{4}$ **é:**

a) $\left[0, \frac{\pi}{15}\right]$

b) $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$

c) $\left[0, \frac{\pi}{10}\right]$

d) $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$

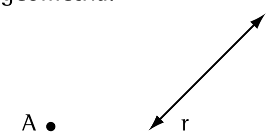
e) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

M24
M25

NOÇÕES DE GEOMETRIA ESPACIAL E PRISMAS

CONCEITOS PRIMITIVOS

Por serem primitivos, falamos primeiro deles: PONTO, RETA e PLANO. Esses entes geométricos são puramente intuitivos, mas usaremos representações que os exemplificam e nos auxiliam no trabalho com a geometria.



Ponto A   Reta r

Plano α

Os **pontos** são nomeados sempre com a utilização de uma letra maiúscula do nosso alfabeto.

As **retas** são nomeadas com a utilização de uma letra minúscula do nosso alfabeto.

Os **planos** são nomeados com as letras do alfabeto grego.

Essas nomenclaturas e padronizações são muito importantes para que possamos nos comunicar de forma simples e clara quando o assunto é geometria. Assim sendo, vamos agora conhecer alguns postulados geométricos, que são proposições consideradas verdadeiras sem que haja a necessidade de demonstração.

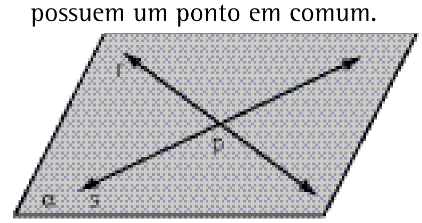
Postulados

I. O espaço é o conjunto de todos os pontos.
II. Nas retas, tanto nelas quanto fora delas, existem infinitos pontos.
III. Nos planos, tanto neles quanto fora deles, existem infinitos pontos.
IV. Dois pontos distintos determinam uma reta.
V. Três pontos não colineares determinam um plano.
VI. Uma reta está contida em um plano quando dois de seus pontos pertencem a ele.
VII. Por um único ponto passam infinitas retas.
VIII. Um ponto divide a reta em duas semi-retas.
IX. Uma reta divide o plano em dois semiplanos.
X. O plano divide o espaço em dois semi-espaços.
XI. Por uma reta traçamos infinitos planos.
XII. Por um ponto P externo a uma reta, traçamos uma única paralela à anterior *(Postulado de Euclides).*

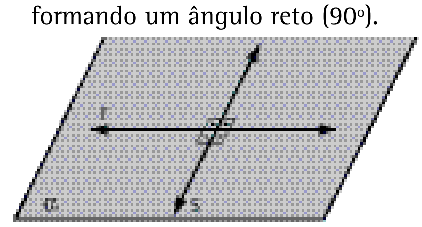
Posições relativas de duas retas

As retas podem, segundo sua posição no espaço, serem classificadas como: CONCORRENTES, PARALELAS, COINCIDENTES e REVERSAS.

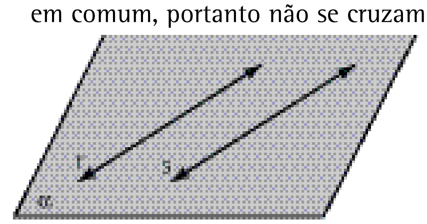
- **Concorrentes:** retas que se cruzam ou que possuem um ponto em comum.



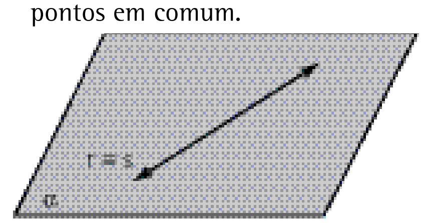
Caso particular de retas concorrentes - são as retas perpendiculares, que se cruzam formando um ângulo reto (90º).



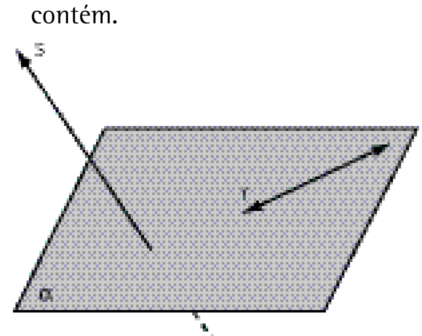
- **Paralelas:** retas que não possuem ponto em comum, portanto não se cruzam.



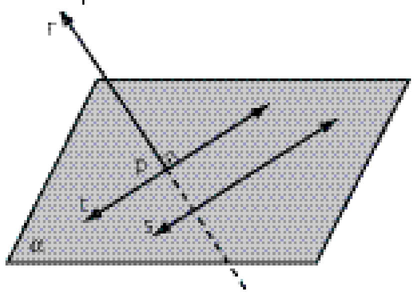
- **Coincidentes:** retas que possuem todos os pontos em comum.



- **Reversas:** são retas que nenhum plano as contém.



Caso particular de retas reversas - são as retas ortogonais. Veja na figura abaixo o exemplo:



Observação:

Como vimos, retas que formam ângulos retos podem ser chamadas de perpendiculares ou ortogonais. Assim como podemos diferenciar uma das outras?

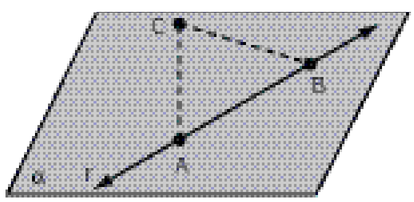
– Quando as retas forem reversas diremos que são ortogonais;

– Quando as retas forem coplanares diremos que são perpendiculares.

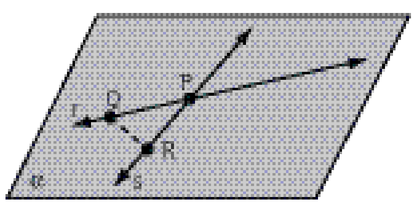
Determinação de um plano

Nos postulados descritos anteriormente, vimos que um plano pode ser determinado a partir de 3 pontos não colineares, porém existem outras formas de determinação do plano. Vejamos:

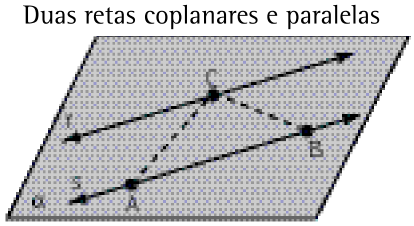
- Uma reta e um ponto não pertencente a ela.



- Duas retas coplanares e concorrentes



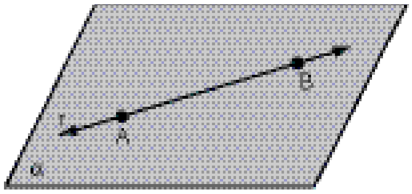
- Duas retas coplanares e paralelas



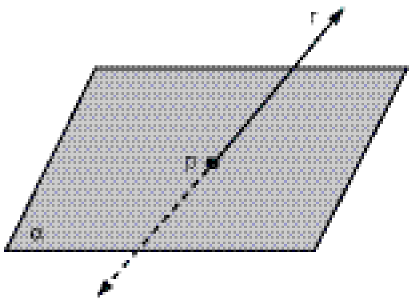
Posições relativas de reta e plano

Retas e planos possuem três posições distintas no espaço e de acordo com número de pontos em comum, classificamo-los como:

- Reta contida no plano - dois pontos em comum



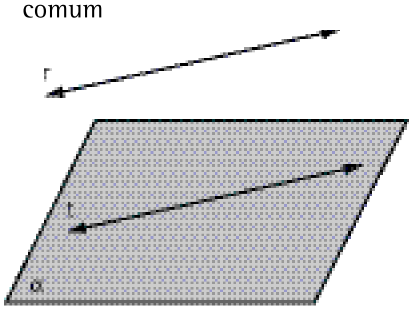
- Reta secante ou concorrente - um ponto em comum



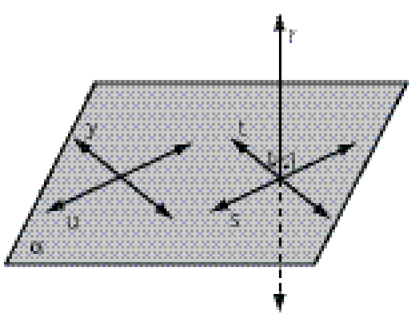
Observação:

Nesta posição, a reta que secciona o plano é reversa a quaisquer retas pertencentes ao plano e que não passam pelo ponto P.

- Reta paralela ao plano - não há pontos em comum



Perpendicularismo entre reta e plano



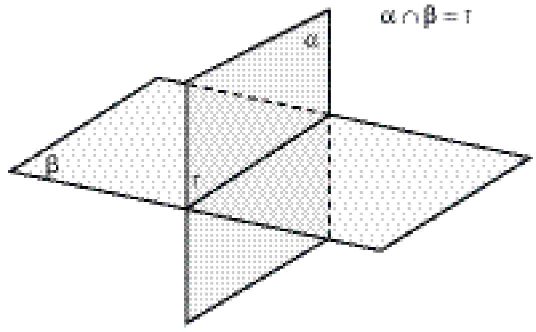
A figura acima nos exemplifica que, caso uma reta r e um plano α sejam perpendiculares, todas as retas contidas no plano α, que passam pelo ponto P, são perpendiculares à reta r.

Na prática, concluiremos que uma reta r é perpendicular ao plano α caso duas retas concorrentes contidas em α sejam perpendiculares à r.

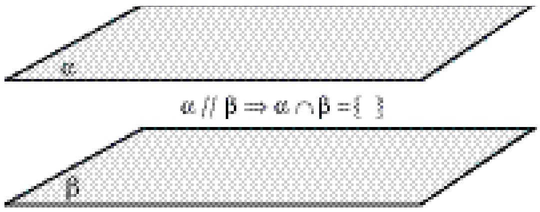
Posições relativas entre planos

Os planos possuem três posições relativas no espaço: COINCIDENTES, CONCORRENTES e PARALELOS.

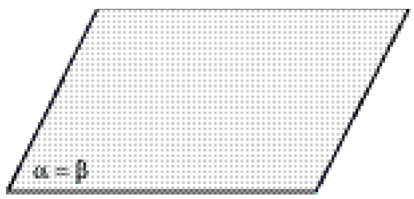
- Planos concorrentes: planos que se cruzam formando uma reta.



- Planos paralelos: planos que não se cruzam, portanto não possuem pontos em comum.

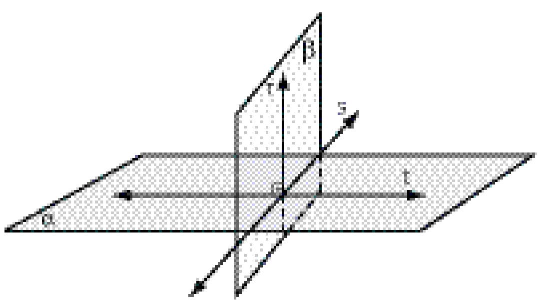


- Planos coincidentes: planos que se superpõem, tendo assim, todos os pontos em comum.



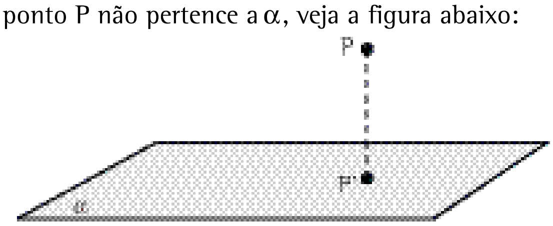
Observação:

Planos concorrentes podem ser perpendiculares, basta que uma reta pertencente a um dos planos seja perpendicular à reta pertencente ao outro.



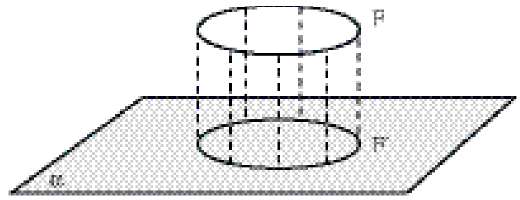
Projeção Ortogonal

Dados um ponto P e um plano α, sendo que o ponto P não pertence a α, veja a figura abaixo:



Traçamos uma reta perpendicular que passe pelo ponto P e por α, no momento em que a reta passa por α, ela determina o ponto P', este ponto é a projeção ortogonal de P.

Agora, se o nosso problema é fazer a projeção ortogonal de uma figura geométrica como a seguir:

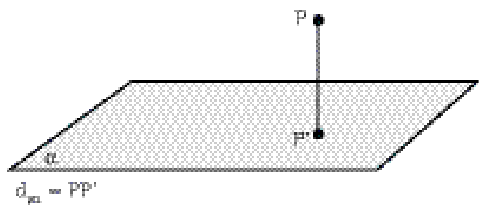


Então, a projeção da figura será o conjunto das projeções de cada ponto em relação ao plano α.

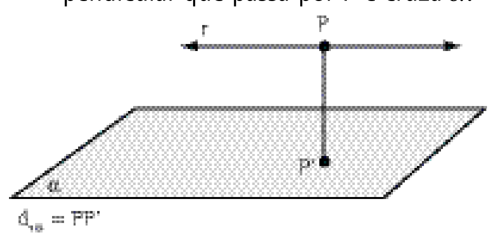
Distâncias

Vamos usar sempre como referência um ponto (P) e uma perpendicular para encontrarmos a distância (d).

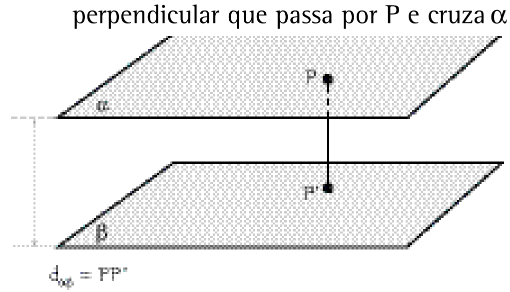
- Distância entre o ponto P e α é a medida de $\overline{PP'}$.



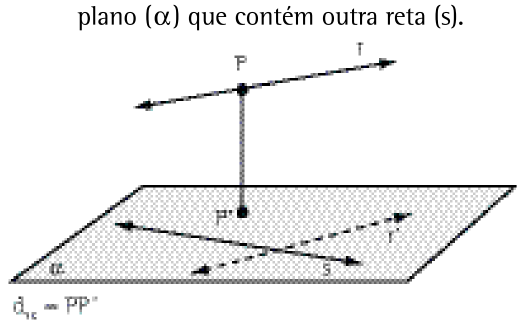
- Distância entre a reta r e α é a medida do segmento $\overline{PP'}$, sendo P um ponto qualquer de r e P', o ponto marcado pela perpendicular que passa por P e cruza α.



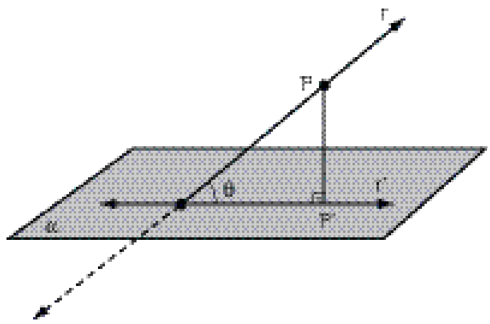
- Distância entre planos paralelos é a medida do segmento $\overline{PP'}$, sendo P um ponto qualquer de r e P', o ponto marcado pela perpendicular que passa por P e cruza α.



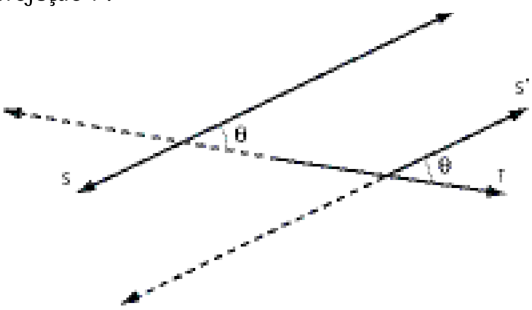
- Distância entre retas reversas é a medida do segmento $\overline{PP'}$, sendo P um ponto qualquer de r e P', o ponto que surge do encontro da perpendicular que passa por P e encontra o plano (α) que contém outra reta (s).



Ângulos

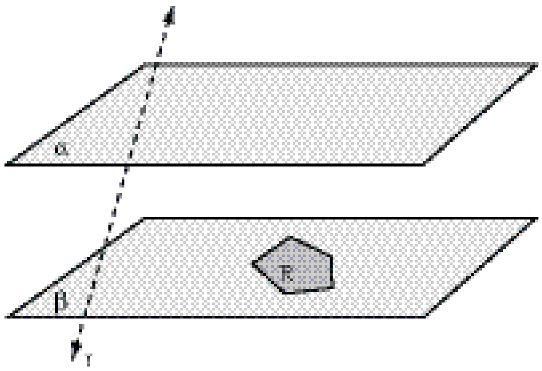


O ângulo formado entre a reta r e o plano α é o mesmo ângulo formado entre a reta r e a sua projeção r'.



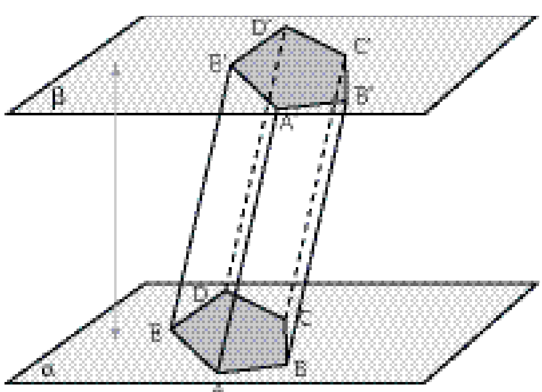
O ângulo formado entre duas retas reversas é encontrado a partir do ângulo que é formado entre uma das retas e uma paralela a outra, pois eles possuem a mesma medida.

Considere os planos α e β paralelos a reta r e a região poligonal R.



Se traçarmos segmentos paralelos a reta r e com extremidade na região R e no plano β, de maneira que para cada ponto da região R tenhamos um segmento a ele associado. A figura encontrada é um prisma.

ELEMENTOS DE UM PRISMA

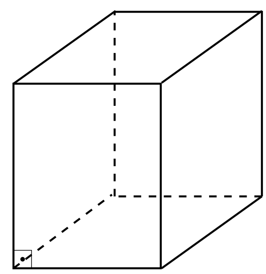


- **Bases:** polígonos congruentes contidos nos planos α e β.
- **Arestas das bases:** $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'E'}, \overline{E'A'}$.
- **Arestas Laterais:** $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'}, \overline{EE'}$.
- **Faces Laterais:** os paralelogramos AA'BB'; BB'CC'; DD'EE'; EE'AA'.
- **Alturas:** distância (h) entre os planos α e β.

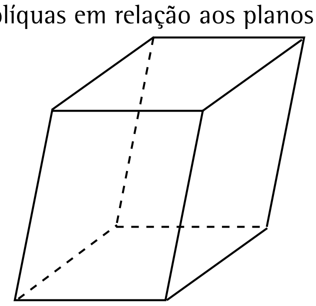
Classificação

São dois os tipos de prisma.:

- **Reto:** quando as arestas laterais formam ângulos retos com os planos da base, ou seja, quando suas faces laterais são retângulos.

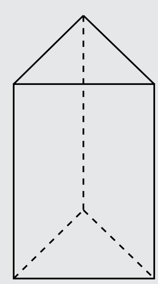


- **Oblíquos:** quando as arestas laterais são oblíquas em relação aos planos da base.



Observação:

Quando as bases de um prisma reto são formadas por polígonos regulares diremos então que esse prisma é regular.



Para denominar um prisma, usamos como referência o polígono que compõe as suas bases, ou seja, se as bases são triângulos, como na figura acima, diremos que ele é um prisma triangular ou ainda prisma de base triangular. De maneira análoga teremos também:

- Prisma Quadrangular
- Prisma Pentagonal
- Prisma Hexagonal
- Etc...

Área da superfície de um prisma

A área de um prisma é a soma das áreas das bases com as áreas de cada face lateral. Assim, podemos escrever:

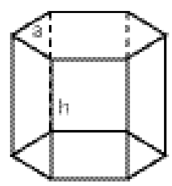
$$S_T = 2S_b + S_\ell$$

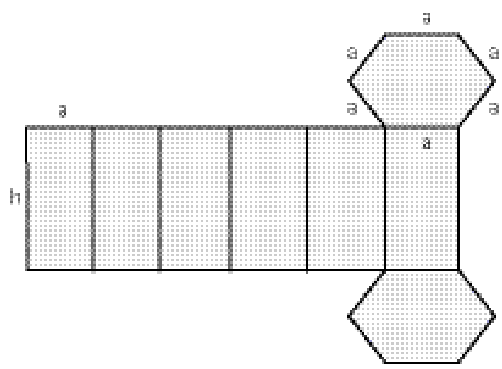
S_b: Área do polígono que está na base do prisma.

S_ℓ: Soma das áreas de cada face lateral.

Exemplo:

Calcule a área da superfície do prisma hexagonal abaixo.





$$S_\ell = 6.S_{RET} = 6.(a.h) = 6ah$$

$$S_b = S_{HEXÁGONO} = \text{(semiperímetro).(apótema)}$$

$$S_b = \left(3a.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$S_T = 6ah + 2\left(\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\right) = 3a.\left(2h + a\sqrt{3}\right)$$

Volume do Prisma

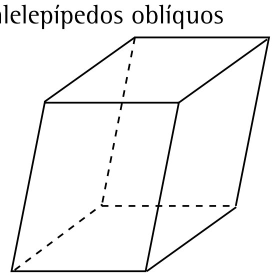
O volume do prisma é o produto da área da base pela altura.

$$V_P = S_b.h$$

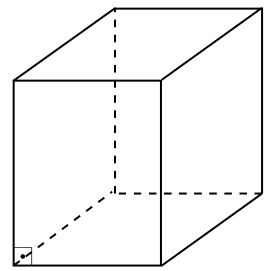
Paralelepípedo

Os paralelepípedos são prismas formados exclusivamente por paralelogramos e podem ser divididos em dois grupos:

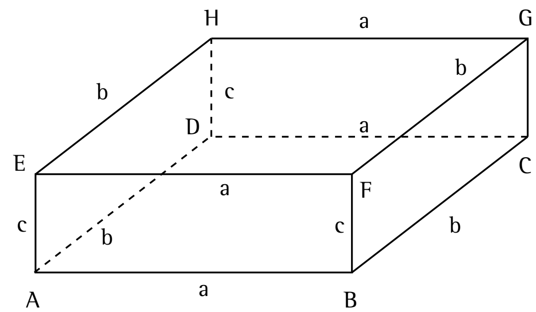
a) Paralelepípedos oblíquos



b) Paralelepípedos retângulos (Ortoedro)



Vamos agora estudar os paralelepípedos retângulos e seus elementos.



2 bases retangulares

4 faces laterais

Área: $S_T = 2S_b + S_\ell$

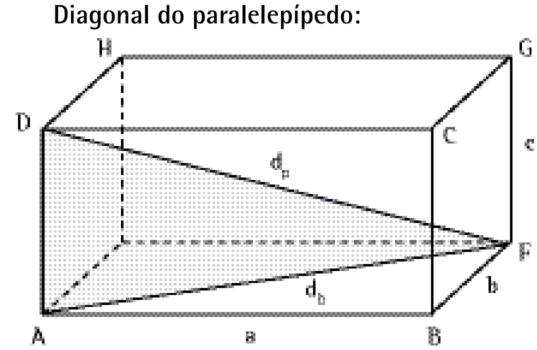
$S_\ell = 2ac + 2bc$

$S_b = a.b$

$$\boxed{S_T = 2a.b + 2b.c + 2a.c}$$

Volume: $V_P = S_b.h$, logo; $\boxed{V_P = a.b.c}$

Diagonal do paralelepípedo:



d_b = diagonal da base

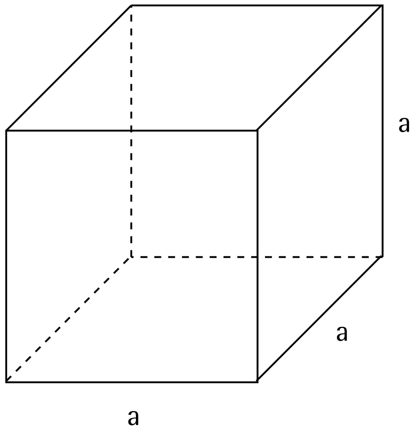
d_p = diagonal do paralelepípedo

Queremos encontrar d_p, assim aplicaremos Pitágoras no ΔADF, $d_p^2 = c^2 + d_b^2$. Para finalizarmos, precisamos encontrar d_b por Pitágoras novamente só que agora no triângulo ABF, temos: $d_b^2 = a^2 + b^2$, substituindo na equação anterior temos: $d_p^2 = c^2 + a^2 + b^2$ logo:

$$d_P = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Cubo

O cubo é um paralelepípedo com todas as dimensões iguais, ou seja, comprimento = largura = altura.



Antes de apresentar as fórmulas relativas ao cubo, devemos lembrar que o cubo é um paralelepípedo, assim as fórmulas que servem para o paralelepípedo também servem para o cubo. As diferenças que veremos serão ocasionadas pelo fato de que no cubo, as arestas possuem a mesma medida.

Área do cubo: $S_T = 2a.b + 2b.c + 2a.c$, como a = b = c.

$$S_T = 6a^2$$

Volume do cubo: $V_P = a.b.c$

$$V_P = a^3$$

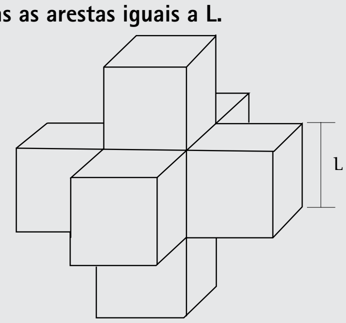
Diagonal do cubo:

$d_c = d_P = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, como $a = b = c$, substituindo, temos:

$$d_c = a\sqrt{3}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **(UFF) O sólido abaixo representado possui todas as arestas iguais a L.**



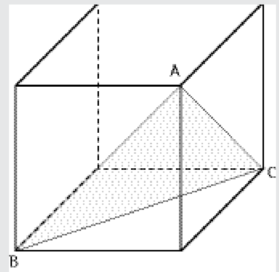
Sabendo-se que todos os ângulos entre duas faces adjacentes são retos, pode-se afirmar que o seu volume é:

a) $7\ L^3$ b) $9\ L^3$
c) $11\ L^3$ d) $19\ L^3$
e) $27\ L^3$

Solução: A

O sólido é formado por 7 cubos. Como o volume de cada cubo é L^3, então o volume do sólido é $7L^3$.

2. **(Fatec-SP) No cubo representado pela figura, cada aresta mede 1u. Então a área do triângulo ABC mede:**



a) $\frac{\sqrt{6}}{2}u^2$ b) $\frac{\sqrt{3}}{47}u^2$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}u^2$ d) $\sqrt{3}u^2$
e) $\sqrt{6}u^2$

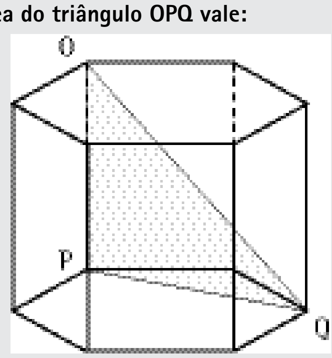
Solução: C

$\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}u$

$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{4}}$

$A = \frac{\sqrt{3}}{2}u^2$

3. **(MACK – SP) O prisma reto regular da figura tem área lateral 6 e volume $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Então a área do triângulo OPQ vale:**



a) $2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
e) $4\sqrt{3}$

Solução: C

$A\ell = 6 \to 6\cdot Aret = 6 \to Aret = 1$

$V = A_b\cdot h \to A_b\cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$A_b = A_{hex} = \cancel{6}\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{\cancel{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot b^2$

$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot b^2\cdot h$

$b^2\cdot h = 1 \to (b\cdot h)\cdot b = 1$

$b = 1$

$\Rightarrow OP = b = 1$

$PQ = 2\cdot \text{apótema} = 2\cdot\frac{b\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$A_{OPQ} = \frac{1\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. **(UFF-RJ) Um fabricante de embalagens, para fazer caixas de papelão, sem tampa, em forma de prisma hexagonal regular (veja figura 1, abaixo), se utiliza de hexágonos regulares de papelão, cada um deles com lado 30 cm.**

Corta, em cada vértice, um quadrilátero, como o destacado na figura 2 e, a seguir, dobra o papelão nas linhas tracejadas.

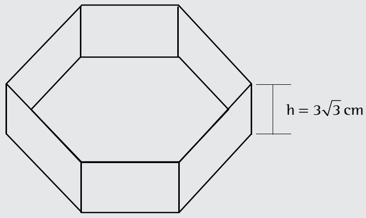


Figura 1

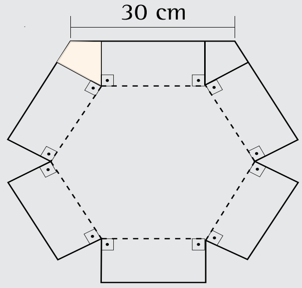


Figura 2

Sabendo que a altura da caixa é de $3\sqrt{3}$ cm, seu volume é:

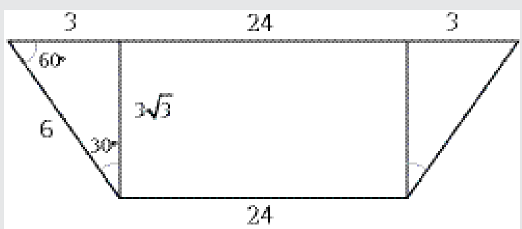
a) $900\sqrt{3}$ cm^3 b) $2700\sqrt{3}$ cm^3

c) $727\sqrt{3}$ cm^3 d) $776\sqrt{3}$ cm^3

e) $7776\sqrt{3}$ cm^3

Solução: E

$V = A_b \cdot h \rightarrow 3\sqrt{3}\text{cm}$



$$A_b = A_{Hex} = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{24^2\sqrt{3}}{4} = 864\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$V = 864\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 7776\text{cm}^3$$

PRATICANDO

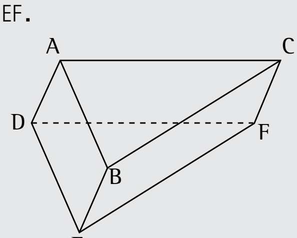
1. A soma das seis distâncias de um ponto P, no interior de um cubo, a cada uma face é igual a 6cm. O volume desse cubo é:

a) 1 m^3 b) 6 m^3

c) 8 m^3 d) 64 m^3

e) 216 m^3

2. (PUC-SP) Na figura abaixo tem-se o prisma reto ABCDEF, na qual DE = 6 cm, EF = 8 cm e $\overline{DE} \perp \overline{EF}$.



Se o volume desse prisma é 120 cm^3, a sua área total em centímetros quadrados, é:

a) 144 b) 156

c) 160 d) 168

e) 172

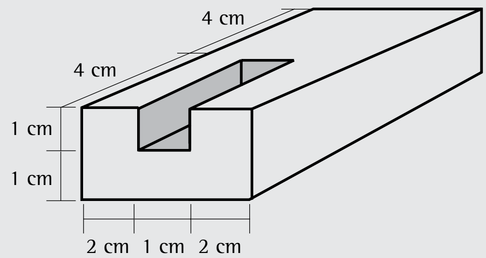
3. (U.F. São Carlos – SP) Se a soma das medidas de todas as arestas de um cubo é 60 cm, então o volume desse cubo, em centímetros cúbicos, é:

a) 125 b) 100

c) 75 d) 60

e) 25

4. (UNIFICADO) Na fabricação da peça acima, feita de um único material que custa R$ 5,00 o cm^3, deve-se gastar a quantia de:

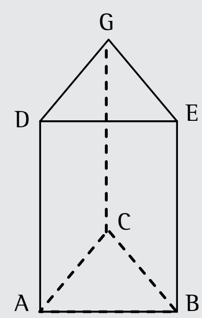


a) R$ 400,00 b) R$ 380,00

c) R$ 360,00 d) R$ 340,00

e) R$ 320,00

5. (FUVEST) Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face ADGC e, finalmente completou seu passeio percorrendo a aresta reversa $\overline{CG}$. A formiga chegou ao vértice:



a) A b) B c) C

d) C e) E

6. (ITA-SP) São dados dois cubos, I e II, de áreas totais S_1 e S_2 e de diagonais d_1 e d_2, respectivamente. Sabendo-se que $S_1 - S_2 = 54$ m^2 e que $d_2 = 3$m, então o valor da razão $\frac{d_1}{d_2}$ é:

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) 2

d) $\frac{7}{3}$ e) 3

7. (Unisinos – RS) Uma empresa, cujos carros-pipa têm 8000 litros de capacidade, foi chamada para encher uma cisterna. Essa cisterna, no formato de um paralelepípedo, tem dimensões 3,0m, 5,0m e 1,0m. Para a realização dessa tarefa, podemos concluir que a capacidade de:

a) 1 carro-pipa de água é suficiente para encher totalmente a cisterna sem sobrar água.

b) 1 carro-pipa de água é maior do que a capacidade da cisterna.

c) 2 carros-pipa de água são insuficientes para encher totalmente a cisterna.

d) 2 carros-pipas de água ultrapassam em 1000 litros a capacidade da cisterna.

e) 1 carro-pipa de água mais 2000 litros de água são suficientes para encher totalmente a cisterna.

8. (FUVEST) O volume de um paralelepípedo reto retângulo é 240cm^3. As áreas de duas de suas faces são 30cm^2 e 48cm^2. A área total do paralelepípedo, em cm^2, é:

a) 96 b) 118

c) 236 d) 240

e) 472

9. (U.F. Viçosa – MG) Um recipiente, contendo água, tem a forma de um paralelepípedo retangular, e mede 1,20m de comprimento, 0,50m de largura e 2,00m de altura. Uma pedra de forma irregular é colocada no recipiente, ficando totalmente coberta pela água. Observa-se, então. que o nível da água sobe 1m. Assim, é correto concluir que o volume da pedra, em m^3, é:

a) 0,06 b) 6

c) 0,6 d) 60

e) 600

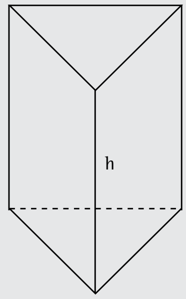
10. (PUC – MG) UM tanque é um prisma retangular reto de dimensões 25cm, 80cm e 90cm. Sua capacidade, em litros, é:

a) 18 b) 180

c) 1800 d) 18000

e) 180000

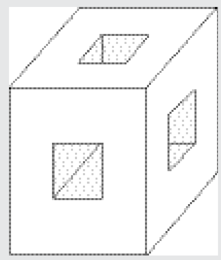
11. (UF-RN) Um triângulo isósceles cujos lados medem 10 cm, 10 cm e 12 cm é a base do prisma reto, de volume igual a 528 cm^3, conforme figura abaixo. Pode–se afirmar que a altura h do prisma é igual a:



a) 13 cm b) 8 cm

c) 12 cm d) 11 cm

12. (UFPI) Na figura o cubo sólido tem aresta 3m. No centro de toda face foram feitas aberturas em forma quadrada de lado igual a 1m até a face oposta e retiradas estas partes. O volume do corpo que restou após a retirada de todas as partes é:

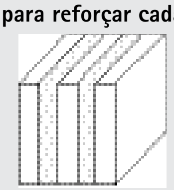


a) 8 m^3 b) 18 m^3

c) 20m^3 d) 24 m^3

e) 28 m^3

13. (FEI – SP) A embalagem de um motor elétrico é uma caixa de madeira com formato de um cubo cujo volume mede 64 litros. A embalagem é reforçada por duas fitas de aço como mostra a figura. Qual o comprimento da fita necessária para reforçar cada caixa?



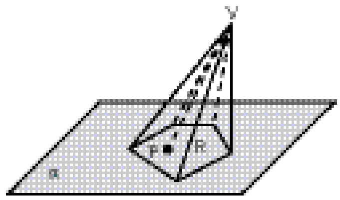
a) 120 cm b) 240 cm

c) 320 cm d) 360 cm

e) 480 cm

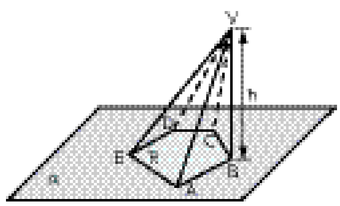
M26 ÁREA E VOLUMES DE PIRÂMIDES – APLICAÇÕES

Dados um plano α, uma região poligonal R e um ponto V não pertencente a α.



Se construirmos todos os segmentos com uma das extremidades no ponto V e a outra em qualquer ponto da região poligonal R, a figura geométrica encontrada é uma pirâmide.

Elementos de uma pirâmide



- **Bases:** polígono convexo ABCDE.
- **Arestas das bases:** $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$.
- **Arestas Laterais:** $\overline{VA}, \overline{VB}, \overline{VC}, \overline{VD}, \overline{VE}$.
- **Faces Laterais:** $\Delta VAB, \Delta VBC, \Delta VCD, \Delta VDE, \Delta VEA$.
- **Vértice:** Ponto V.
- **Alturas:** distância (h) do ponto vértice à base.

Classificação de uma pirâmide

Para denominar uma pirâmide, usamos como referência o polígono que compõe a sua base, ou seja, se a base é um triângulo, diremos que ela é uma pirâmide triangular ou ainda pirâmide de base triangular, de maneira análoga teremos também:

- Pirâmide Quadrangular
- Pirâmide Pentagonal
- Pirâmide Hexagonal
- Etc...

Observação:

A pirâmide **triangular** também é conhecida como **tetraedro**.

Pirâmide Regular

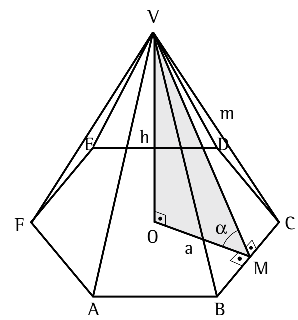
Uma pirâmide para ser regular deve atender a duas exigências:

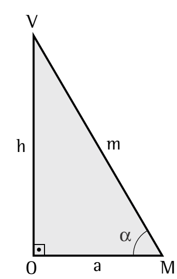
- A base deve ser um polígono regular;
- A projeção ortogonal do vértice da pirâmide tem sua extremidade exatamente no centro do polígono da base.

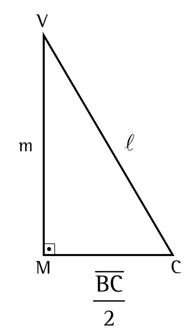
Nestas pirâmides, devemos ainda dizer que as faces laterais são formadas por triângulos isósceles e as arestas laterais são congruentes.

Vamos abaixo continuar fazendo relações com base no que já foi dito sobre as pirâmides regulares, assim:

Dado a pirâmide regular abaixo:







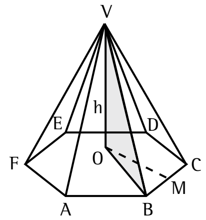
Temos:

- $\overline{VO} =$ Altura da pirâmide (h)
- $\overline{VM} =$ Altura do triângulo isósceles que compõe a face lateral (m)
- $\overline{OM} =$ Apótema do polígono da base (a)
- $\overline{VC} =$ Lado da pirâmide (ℓ)

1ª relação: $\boxed{m^2 = h^2 + a^2}$

2ª relação: $\boxed{\ell^2 = m^2 + \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2}$

Área da superfície de uma pirâmide



De maneira análoga ao do prisma, encontraremos a área de uma pirâmide, veja:

$$S_T = S_b + S_\ell$$

S_b: Área do polígono que está na base do prisma.

S_ℓ: Soma das áreas de cada face lateral.

Volume de uma pirâmide

Em qualquer pirâmide podemos encontrar seu volume a partir da fórmula abaixo:

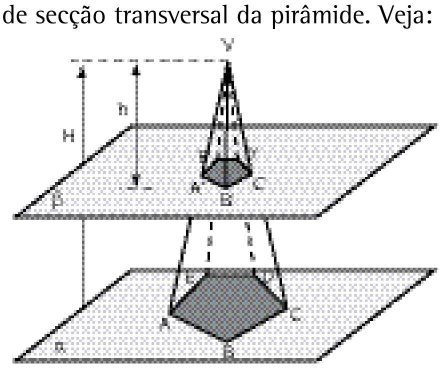
$$V_P = \frac{1}{3} S_b . h$$

Observação:

O volume da pirâmide representa $1/3$ do volume de um prisma.

Secção de uma Pirâmide

Se um plano paralelo à base de uma pirâmide for traçado, determinaremos então o que chamamos de secção transversal da pirâmide. Veja:



Antes de estudarmos os troncos em particular, vejamos algumas propriedades das secções transversais:

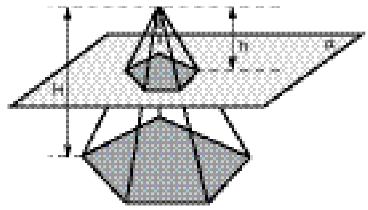
$$(1^a) \quad \frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{VD'}{VD} = \frac{VE'}{VE} = \frac{h}{H}$$

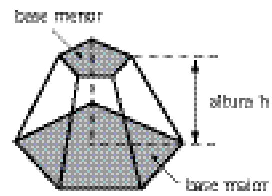
$$(2^a) \quad \frac{S_{A'B'C'D'E'}}{S_{ABCDE}} = \frac{h^2}{H^2}$$

$$(3^a) \quad \frac{V_{A'B'C'D'E'}}{V_{ABCDE}} = \frac{h^3}{H^3}$$

Essas propriedades nos ajudam a trabalhar com os troncos.

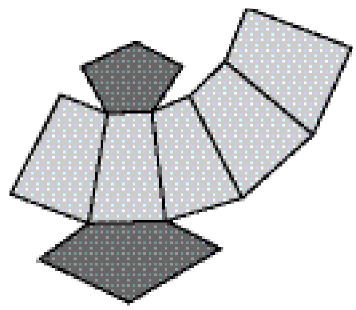
Tronco da pirâmide





TRONCO DA PIRÂMIDE

Área do tronco da pirâmide



$$\boxed{S_t = S_\ell + S_B + S_b}$$

S_t = Área total

S_ℓ = Soma das áreas das faces laterais

S_B = Área da base maior (base da pirâmide)

S_b = Área da base menor (base da secção)

Volume do tronco da pirâmide

$$V_{tronco} = V_{ABCDE} - V_{A'B'C'D'E'}$$

Logo, fazendo as devidas substituições, temos:

$$\boxed{V = \frac{h}{3}\left(S_B + \sqrt{S_B \, . \, S_b} + S_b\right)}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **(Unicruz-RS) Em uma pirâmide com 12 cm de altura, tendo como base um quadrado de lados igual a 10 cm, a área lateral é:**

a) 240 cm²   b) 260 cm²

c) $20\sqrt{119}$ cm²   d) 340 cm²

e) 400 cm²

Solução: B

$$g^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 \therefore g = 13cm$$

$$S_\ell = n \cdot S_f \Rightarrow S_\ell = n \cdot \frac{\ell \cdot g}{2} \Rightarrow S_\ell = 4 \cdot \frac{10 \cdot 13}{2} \therefore$$

$$S_\ell = 260 cm^2$$

2. **(IBMEC) Considere uma pirâmide regular de vértice V e arestas laterais medindo 6 cm, cuja base é um quadrado de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Se a área lateral desta pirâmide totaliza 36 cm^2, então um possível valor para a medida do ângulo VÂB é:**

a) 45º b) 60º

c) 75º d) 90º

e) 105º

Solução: C

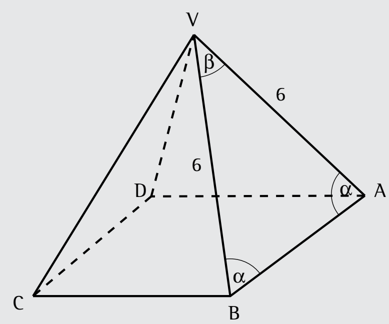
Do enunciado temos a figura cotada em cm.

Como a área lateral da pirâmide é igual a $36cm^2$, temos:

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot VA \cdot \text{sen}\beta = 36$$

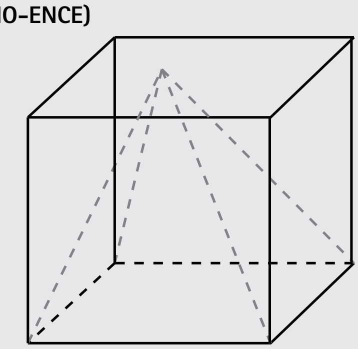
$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \text{sen}\beta = 36$$

$$\text{sen}\beta = \frac{1}{2} \left\langle \begin{array}{l} \beta = 30^\circ \therefore \alpha = 75^\circ \\ \quad\quad e \\ \beta = 150^\circ \therefore \alpha = 15^\circ \end{array} \right.$$



Logo, um possível valor para a medida do ângulo VÂB é 75º.

3. **(UNIRIO-ENCE)**



Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura acima. Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m^3, então, o volume do cubo, em m^3, é igual a:

a) 9 b) 12 c) 15

d) 18 e) 21

Solução: D

$$V_{pir} = 6 \to A_b \cdot h \cdot \frac{1}{3} \to A_b \cdot h = 18$$

$$V_{pri} = A_b \cdot h \to V_{pri} = 18m^3$$

4. **(EsSa 2008) A pirâmide de Quéops, em Gizé, no Egito, tem aproximadamente $90\sqrt{2}$ metros de altura, possui uma base quadrada e suas faces laterais são triângulos equiláteros. Nessas condições, pode-se afirmar que, em metros, cada uma de suas arestas mede:**

a) 90

b) 120

c) 160

d) 180

e) 200

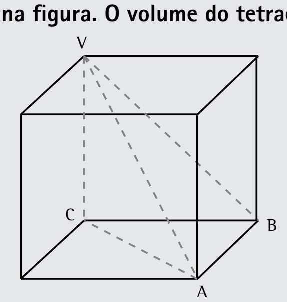
Solução: D

$$\left(90\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)^2 = x^2 \to \frac{x^2}{2} =$$

$$16200 \to x^2 = 32400 \to x = 180$$

PRATICANDO

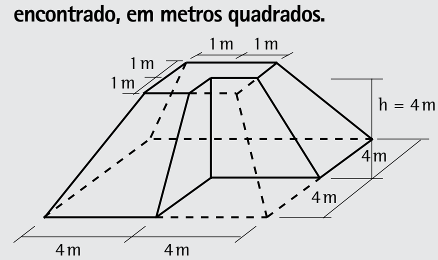
1. **(Cesgranrio-RJ) Em um cubo de aresta $\sqrt[3]{6}$ considera-se o tetraedro VABC, como indicado na figura. O volume do tetraedro é:**



a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{3}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ e) 1

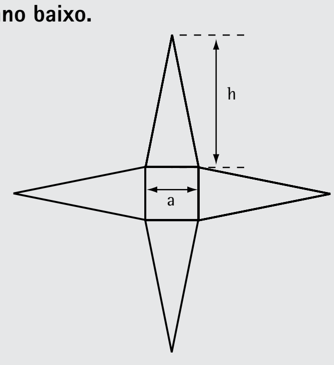
2. **(Cefet-PR) No acesso principal da cidade de Troncópolis existe um monumento de concreto maciço. Inspirado basicamente num tronco de pirâmide quadrangular regular, conforme a figura a seguir. Para pintá-lo, o prefeito da cidade mandou medir as dimensões e então calcular o total da área externa que receberá tinta. Determine o valor encontrado, em metros quadrados.**



a) 151 b) 78 c) 98

d) 83 e) 131

3. **(UFRS) Considere uma pirâmide regular de base quadrada, construída a partir do padrão plano baixo.**



Se a altura da pirâmide é o dobro do lado a da base, o valor de **h** no padrão é:

a) $h = \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)a$ b) $h = \left(\sqrt{5}\right)a$

c) $h = \left(\frac{\sqrt{22}}{2}\right)a$ d) $h = \left(\sqrt{3}\right)a$

e) $h = \left(\frac{5}{2}\right)a$

4. (UFPA) O perímetro da base de uma pirâmide hexagonal regular mede 24 m, e a altura, 6 m. O volume dessa pirâmide é:

a) $12\sqrt{3}m^3$ b) $26\sqrt{3}m^3$

c) $39\sqrt{3}m^3$ d) $48\sqrt{3}m^3$

e) $60\sqrt{3}m^3$

5. (FGV-SP) Em uma piscina retangular com 10 m de comprimento e 5 m de largura, para elevar o nível de água em 10 cm são necessários:

a) 500ℓ de água

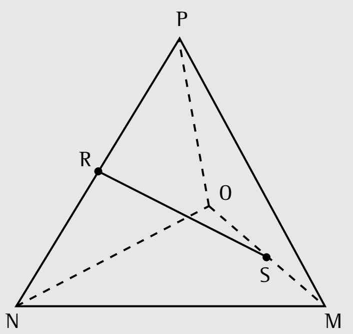
b) 5000ℓ de água

c) 10000ℓ de água

d) 1000ℓ de água

e) 50000ℓ de água

6. (UFF-RJ) No triângulo regular representado na figura, R e S são, respectivamente, os pontos médios de $\overline{NP}$ e $\overline{OM}$.



A razão $\frac{RS}{MN}$ é igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{2}$

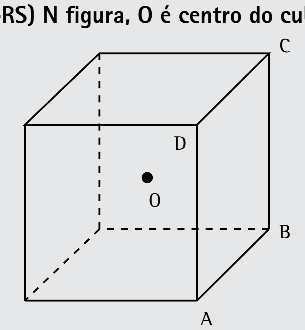
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $3\sqrt{2}$

7. (ITA-SP) A razão entre a área da base de uma pirâmide regular de base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo que o volume da pirâmide é de 12 m³, temos que a altura da pirâmide mede (em metros):

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5

8. (UF-RS) N figura, O é centro do cubo.



Se o volume do cubo é 1, o volume da pirâmide de base ABCD e vértice O é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{8}$

9. (UFCE) Uma pirâmide regular de base quadrada tem um lado da base medindo 20cm e arestas laterais iguais a 15cm. Se V cm³ é o volume dessa pirâmide, então $\frac{3}{25}V$ é igual a:

a) 60 b) 65

c) 80 d) 85

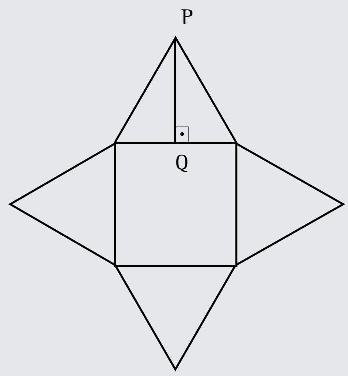
10. (UNIRIO) Um prisma de altura H e uma pirâmide têm bases com a mesma área. Se o volume do prisma é a metade do volume da pirâmide, a altura da pirâmide é:

a) H/6 b) H/3

c) 2H d) 3H

e) 6H

11. A figura abaixo representa a planificação de uma pirâmide quadrangular regular.



Sabendo-se que $\overline{PQ}$ mede $3\sqrt{3}$ cm e que as faces laterais são triângulos equiláteros, o volume da pirâmide é:

a) $18\sqrt{2}cm^3$ b) $36\sqrt{2}cm^3$

c) $48\sqrt{2}cm^3$ d) $60\sqrt{2}cm^3$

e) $72\sqrt{2}cm^3$

12. (ITA) Considere uma pirâmide regular de altura igual a 5 cm e cuja base é formada por um quadrado de área igual a 8 cm² . A distância de cada face desta pirâmide ao centro de sua base, em cm, é igual a:

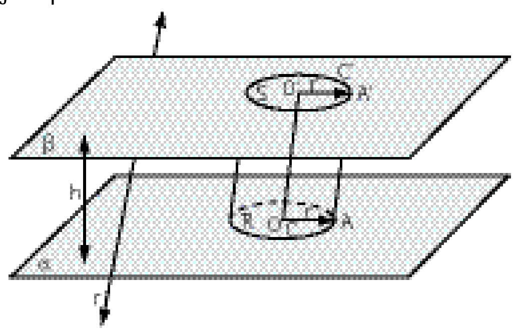
a) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ b) $\frac{5\sqrt{6}}{9}$

c) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ d) $\frac{7}{5}$

e) $\sqrt{3}$

M27 ÁREAS E VOLUMES DE CILINDROS – APLICAÇÕES

Figura geométrica, formada pelo conjunto de segmentos congruentes, que unem os pontos do círculo pertencentes a α com o plano β, e que sejam paralelos à reta r.



Elementos do Cilindro

Bases: Os dois círculos de mesmo raio, com centro O e O'.

Altura: distância (h) entre as duas bases.

Eixo: reta que passa pelos centros das circunferências da base (OO').

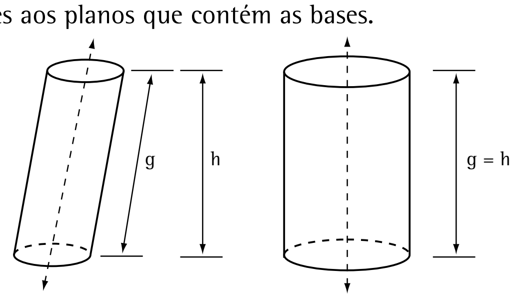
Geratrizes: quaisquer segmentos que unem dois pontos da circunferência e são paralelos ao eixo (AA').

Classificação do cilindro

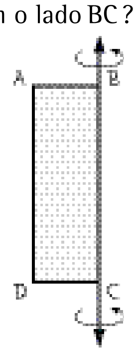
Existem dois tipos a se considerar:

Oblíquo – quando as geratrizes formam um ângulo diferente de 90º com os planos que contém as bases.

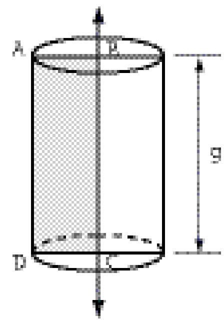
Reto – quando as geratrizes são perpendiculares aos planos que contém as bases.



Vou agora te fazer uma pergunta. Que figura obteremos se girarmos o retângulo abaixo em torno do eixo que contém o lado $\overline{BC}$?



Não é difícil, certo? Pois bem, a figura encontrada é um cilindro circular reto. Veja:



> **Observação:**
> Neste caso, a altura do cilindro é igual à geratriz.

Área do cilindro

De uma forma geral tentamos estabelecer todas as áreas das figuras espaciais estudadas até aqui, como o resultado da soma das áreas de sua base com a soma das áreas laterais. Assim sendo, podemos dizer que a área do cilindro é:

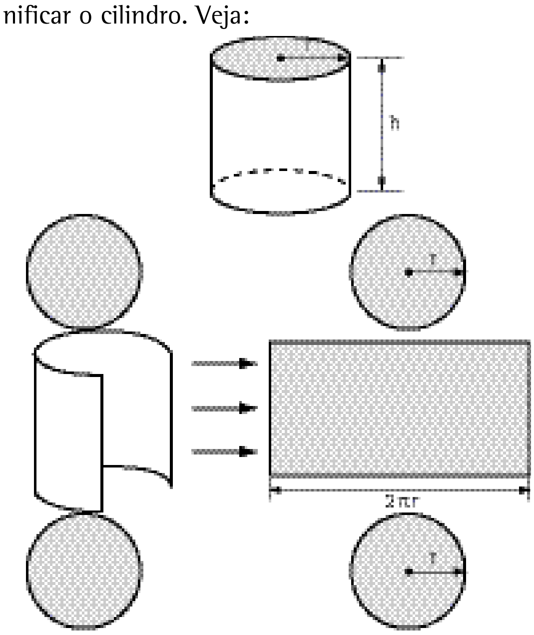
$$\boxed{S_t = 2S_b + S_\ell}$$

$S_t =$ Área da superfície total

$S_b =$ Área da base

$S_\ell =$ Área lateral

Mas como no cilindro as bases serão sempre circunferências, então podemos construir uma fórmula mais particular. Para isso vamos primeiro planificar o cilindro. Veja:



$S_b = S_{circunferência} = \pi r^2$

$S_\ell = S_{retângulo} = 2\pi r \,.\, h$, aplicando na fórmula (S_t) teremos:

$$S_t = 2.\left(\pi r^2\right) + 2\pi r \,.\, h$$

$$S_t = 2\pi r\left(r + h\right)$$

Logo: $\boxed{S_t = 2\pi r\left(r + h\right)}$

Volume do cilindro

Volume do prisma = volume do cilindro

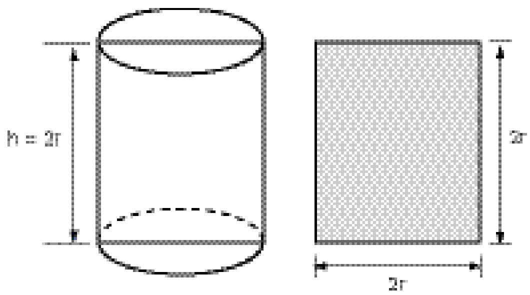
Logo, volume do cilindro = S_b . h

Tornando o caso particular, teremos:

$$\boxed{V_{cil} = \pi r^2 \,.\, h}$$

Cilindro equilátero

Cilindros cuja secção meridiana é um quadrado. Veja abaixo que este cilindro possui uma característica a ser estudada:



Como a secção é quadrada, podemos dizer então que h = 2r. Assim, o cálculo da área e do volume podem ser encurtados, nos cilindros equiláteros.

Área do cilindro equilátero:

$$S_t = 2\pi r\left(h + r\right)$$

como h = 2r, faremos a substituição na fórmula acima:

$$S_{t(\text{cilindro equilátero})} = 2\pi r\left(2r + r\right)$$

logo,

$$\boxed{S_{t(\text{cilindro equilátero})} = 6\pi r^2}$$

Volume do cilindro equilátero:

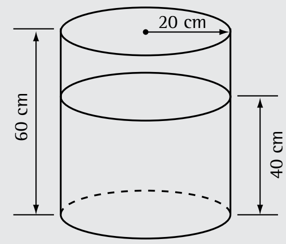
$$V_{cil} = \pi r^2 \,.\, h$$

Como h = 2r, faremos a substituição na fórmula acima e teremos que:

$$\boxed{V_{\text{Cil equilátero}} = 2\pi r^3}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. (UERJ) Um recipiente cilíndrico de 60 cm de altura e base com 20 cm de raio está sobre uma superfície plana horizontal e contém água até a altura de 40 cm, conforme indicado na figura.



Imergindo-se totalmente um bloco cúbico no recipiente, o nível da água sobe 25%.

Considere π igual a 3. A medida, em cm, da aresta do cubo colocado na água é igual a:

a) $10\sqrt{2}$ b) $10\sqrt[3]{2}$

c) $10\sqrt{12}$ d) $10\sqrt[3]{12}$

Solução: D

O volume deslocado V_d é igual ao volume do cubo

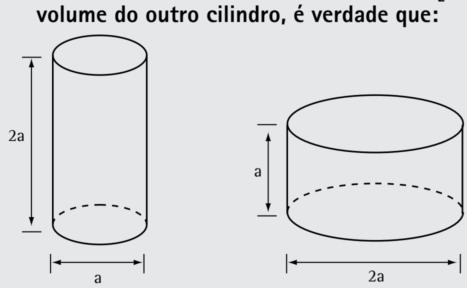
$V_d = \pi R^2 \cdot (25\% \cdot 40)$

$V_d = \pi \cdot 20^2 \cdot 10 = 12000 cm^3$

Se a é a aresta do cubo, $a^3 = 12000$

$a = 10\sqrt[3]{12}$

2. (PUCC–SP) Considere os dois cilindros circulares retos abaixo representados. Se V_1 é o volume do cilindro de maior altura e V_2 é o volume do outro cilindro, é verdade que:



a) $V_1 = 2V_2$ b) $V_1 = V_2$

c) $V_1 = \dfrac{V_2}{2}$ d) $V_1 = \dfrac{V_2}{4}$

e) $V_1 = \dfrac{V_2}{a}$

Solução: C

$V_1 = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^2 = 2\pi a^3$

$V_2 = \pi 4a^2 \cdot a = 4\pi a^3$

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_1 = \dfrac{V_2}{2}$

3. (IBMEC – SP) Um famoso edifício na moderna Xangai tem a forma de um cilindro chanfrado (ou seja, a base superior não é paralela à base do chão). O diâmetro do edifício é de aproximadamente 48 metros, a altura do lado mais alto mede 225 metros e a altura do lado mais baixo mede 185 metros. Toda a lateral do edifício é recoberta de vidro. Desconsiderando eventuais perdas ou quebras durante a construção, foram necessários, aproximadamente:

(Observação: se necessário, utilize $\pi \cong \frac{25}{8}$).

a) 10.750m² de vidro para recobrir o edifício.

b) 15.750m² de vidro para recobrir o edifício.

c) 20.750m² de vidro para recobrir o edifício.

d) 25.750m² de vidro para recobrir o edifício.

e) 30.750m² de vidro para recobrir o edifício.

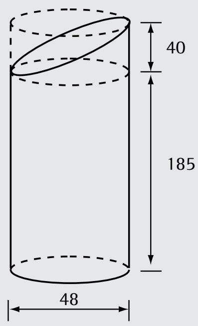
Solução: E

A área da superfície lateral do edifício é dada por:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot 24 \cdot 185 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 24 \cdot 40$$

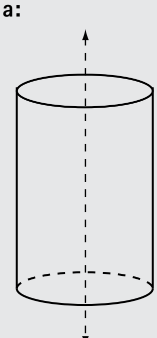
$$A_L = 9840\pi$$

$$A_L \cong 30750m^2$$



PRATICANDO

1. **(UNIFAP) Uma indústria projeta um reservatório conforme a figura abaixo, constituído de um cilindro de raio 2 m e 10 m de altura. O volume do interior do reservatório é aproximadamente igual a:**



a) 125 m³ b) 142 m³

c) 137 m³ d) 150 m³

e) 118 m³

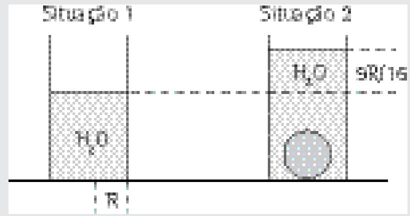
2. **(EEP-SP) Em um cilindro circular de raio igual a 5 cm, coloca-se água até uma altura h. Em seguida, mergulha-se no cilindro uma esfera e verifica-se que o nível da água subiu 4 cm. O volume da esfera deve ser então igual a:**

a) $25\pi cm^3$ b) $50\pi cm^3$

c) $100\pi cm^3$ d) $150\pi cm^3$

e) $300\pi cm^3$

3. **(Unipac) Um tanque cilíndrico, com água, possui uma base com raio R. Ao mergulhar-se nesse tanque uma esfera de aço, o nível da água sobe 9R/16 (veja a figura a seguir). O raio da esfera de aço vale:**



a) 9R/16 b) R/2

c) 3R/4 d) 2R/3

4. **(ITA) Um cilindro circular reto é secionado por um plano paralelo ao seu eixo. A secção fica a 5 cm do eixo e separa na base um arco de 120º. Sendo de $30\sqrt{3}$ cm² a área da secção plana retangular, então o volume da parte menor do cilindro secionado mede, em cm³:**

a) $30\pi - 10\sqrt{3}$ b) $30\pi - 20\sqrt{3}$

c) $20\pi - 10\sqrt{3}$ d) $50\pi - 25\sqrt{3}$

e) $100\pi - 75\sqrt{3}$

5. **(ITA) O raio da base de um cone circular reto é igual à média aritmética da altura e a geratriz do cone. Sabendo-se que o volume do cone é 128 m³, temos que o raio da base e a altura do cone medem, respectivamente, em metros:**

a) 9 e 8 b) 8 e 6

c) 8 e 7 d) 9 e 6

e) 10 e 8

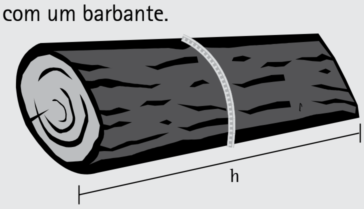
6. **(MACK-SP) O raio de um cilindro circular reto é aumentado em 25%; para que o volume permaneça o mesmo, a altura do cilindro deve ser diminuída em k%. Então K vale:**

a) 36 b) 28 c) 25

d) 30 e) 32

7. **(ENEM) Em muitas regiões do Estado do Amazonas, o volume de madeira de uma árvore cortada é avaliado de acordo com uma prática dessas regiões:**

I. Dá-se uma volta completa em torno do tronco com um barbante.



II. O barbante é dobrado duas vezes pela ponta e, em seguida, seu comprimento é medido com fita métrica.

1ª dobra 2ª dobra

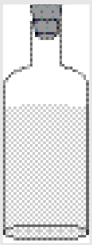
III. O valor obtido com essa medida é multiplicado por ele mesmo e depois multiplicado pelo comprimento do tronco. Esse é o volume estimado de madeira.

Outra estimativa pode ser obtida pelo cálculo formal do volume do tronco, considerando-o um cilindro perfeito. A diferença entre essas medidas é praticamente equivalente às perdas de madeira no processo de corte para comercialização. Pode-se afirmar que essas perdas são da ordem de:

a) 30% b) 22% c) 15%

d) 12% e) 5%

8. (ENEM) Uma garrafa cilíndrica está fechada, contendo um líquido que ocupa completamente seu corpo, conforme mostra a figura. Suponha que, para fazer medições, você disponha apenas de uma régua milimetrada. Para calcular o volume do líquido contido na garrafa, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

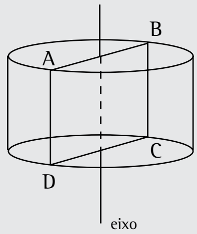


a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

9. (ENEM) Para calcular a capacidade total da garrafa, lembrando que você pode virá-la, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

10. (UFMG) Num cilindro de 5 cm de altura, a área da base é igual à área de uma seção por um plano que contém o eixo do cilindro, tal como a seção ABCD na figura ao lado. O volume desse cilindro é de:

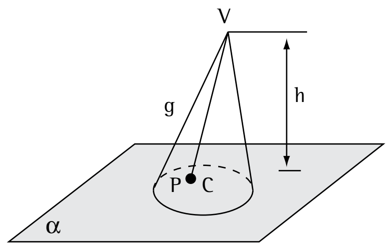


a) $250/\pi$ cm^3 b) $500/\pi$ cm^3
c) $625/\pi$ cm^3 d) $125/\pi$ cm^3

M28 ÁREAS E VOLUMES DE CONES – APLICAÇÕES

Cone Circular

Dados um plano α, um círculo C, contido no plano, e um ponto V não pertencente a α.



O conjunto formado por todos os segmentos com extremidade em V e nos pontos pertencentes ao círculo C é a figura geométrica denominada cone.

Elementos do cone

Base: círculo

Vértice: ponto V

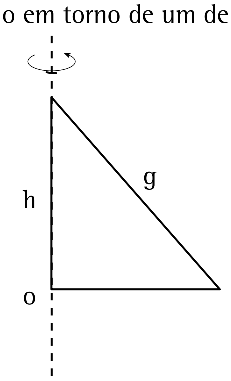
Altura: distância do plano que contém a base ao vértice V, representada na figura por h.

Eixo: reta que passa simultaneamente pelo vértice e pelo centro da circunferência que compõe a base.

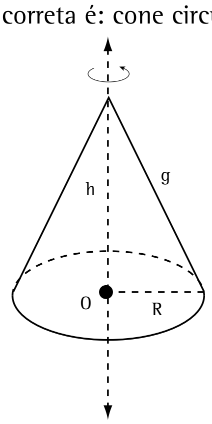
Geratrizes: segmentos que unem o vértice à circunferência, compondo a superfície lateral (g).

Cone reto

Qual a figura formada pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos?



A resposta correta é: cone circular reto.



Observe que na figura, o eixo é perpendicular à base, sendo assim podemos concluir que em todo cone circular reto, temos:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

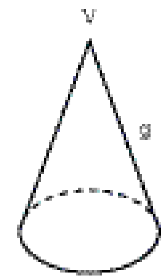
g = geratriz do cone

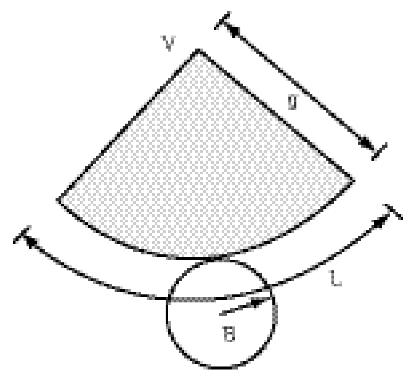
h = altura do cone

r = raio da circunferência que é base

Área do cone

Para calcular a área do cone, vamos inicialmente planificá-lo, para que possamos observar as superfícies envolvidas na confecção do cone.





Área total:

$$S_t = S_l + S_b$$

$$S_t = \pi r g + \pi r^2$$

Logo:

$$S_t = \pi r (g + r)$$

Volume do cone

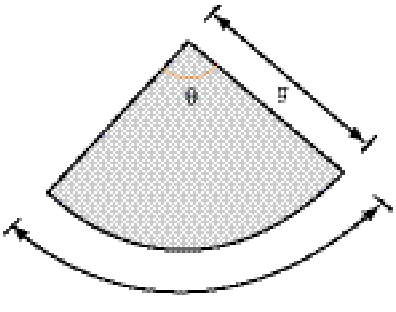
Volume do cone = volume da pirâmide.

Assim, $V_{cone} = \frac{1}{3} S_b h$.

Como $S_b = \pi r^2$, vamos substituir na fórmula dada. Logo:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Observando a planificação da superfície lateral do cone, vemos o ângulo central θ.



Para encontrarmos a medida do ângulo θ, faremos:

$$\theta = 2\pi \frac{r}{g} \text{ rad}$$

Cone equilátero

O cone equilátero caracteriza-se por ter sua secção meridiana representada por um triângulo equilátero. Assim:

$$g = 2r$$

Particularizando as fórmulas da área e do volume para os cones equiláteros, temos:

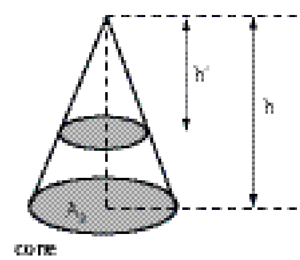
Área total do cone equilátero

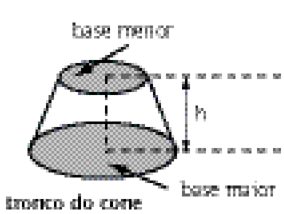
$$S_t = 3\pi r^2$$

Volume do cone equilátero

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^3 \sqrt{3}$$

Tronco de cone





Área lateral do tronco de cone

$$S_\ell = \pi g (R + r)$$

Área do tronco de cone

$$S_t = S_\ell + S_B + S_b$$

S_t = Área total

S_ℓ = Área lateral

S_B = Área da base maior (circunferência de raio R)

S_b = Área da base menor (circunferência de raio r)

Volume do tronco do cone

$$V_{\text{tronco cone}} = V_{\text{cone}(R)} - V_{\text{cone}(r)}$$

$V_{\text{cone}(R)}$ = volume do cone cuja base tem raio R.

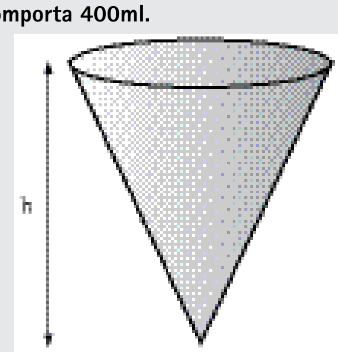
$V_{\text{cone}(r)}$ = volume do cone cuja base tem raio r (cone obtido pela secção transversal)

Logo, fazendo as devidas substituições, temos:

$$V_{\text{tronco cone}} = \frac{h\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

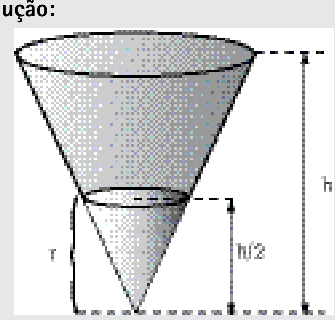
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. (UFRJ) Um recipiente em forma de cone circular reto de altura h é colocado com vértice para baixo e com eixo na vertical, como na figura. O recipiente, quando cheio até a borda, comporta 400ml.



Determine o volume de líquido quando o nível está em $\frac{h}{2}$.

Solução:

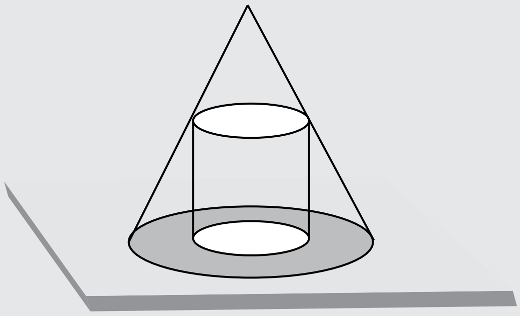


Considere o cone de altura $\frac{h}{2}$ e volume v que é semelhante ao recipiente. Então:

$$\frac{v}{400} = \left(\frac{h/2}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{v}{400} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow v = 50\text{ml}$$

Resp.: 50ml

2. **(UERJ) Um cilindro circular reto é inscrito em um cone, de modo que os eixos desses dois sólidos sejam colineares, conforme na ilustração abaixo.**



A altura do cone e o diâmetro da sua base medem, cada um, 12 cm. Admita que as medidas, em centímetros, da altura e do raio do cilindro variem no intervalo]0;12[de modo que ele permaneça inscrito nesse cone.

Calcule a medida que a altura do cilindro deve ter para que sua área lateral seja máxima.

Solução:

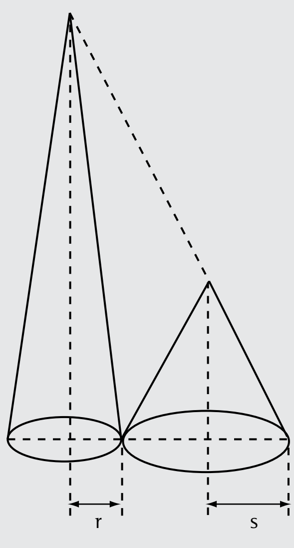
$$\frac{12-h}{12}=\frac{2R}{12}\rightarrow R=\frac{12-h}{2}$$

$$S_L=2\pi R\cdot h=2\pi\cdot\frac{12-h}{2}\cdot h=\pi(12-h)\cdot h$$

S_L é máxima para $h=6$

3. **(UFRJ) Dois cones circulares retos têm bases tangentes e situadas no mesmo plano, como mostra a figura. Sabe-se que ambos têm o mesmo volume e que a reta que suporta uma das geratrizes de um passa pelo vértice do outro.**

Sendo r o menor dentre os raios das bases, s o maior e $x=\frac{r}{s}$. Determine x.



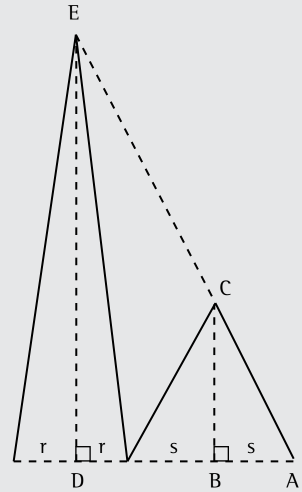
Solução:

Sejam V_r e V_s, respectivamente, os volumes dos cones que têm raios r e s.

$$V_r=V_s\Rightarrow\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\overline{DE}=\frac{1}{3}\pi s^2\cdot\overline{BC}\Rightarrow$$

$$\frac{r^2}{s^2}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}\quad(I)$$

como os triângulos ABC e DEA são semelhantes.



$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}=\frac{s}{r+2s}\quad(II)$$

Comparando (I) com (II) obtemos:

$$\frac{r^2}{s^2}=\frac{s}{r+2s}\Rightarrow\left(\frac{r}{s}\right)^2=\frac{1}{\frac{r}{s}+2}$$

Substituindo $\frac{r}{s}$ por x ficamos com:

$x^3 + 2x^2 - 1 = 0$

Assim temos as raízes:

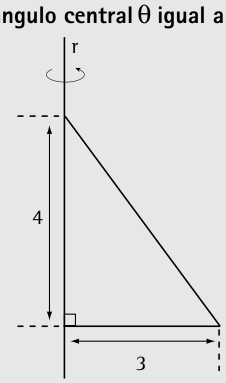
$$-1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\text{ e }\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Como x > 0 temos então que:

$$x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

PRATICANDO

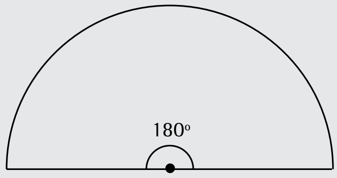
1. **(MACK – SP) O triângulo retângulo da figura gira em torno da reta r, obtendo-se, desta forma, um sólido cuja superfície lateral apresenta um ângulo central θ igual a:**



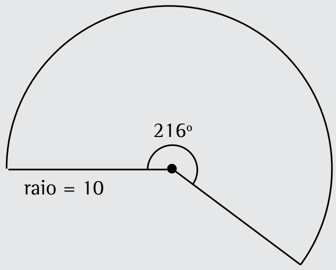
a) 252°
b) 216°
c) 225°
d) 240°
e) 288°

2. **(UFRGS) A figura que melhor representa a planificação da superfície lateral de um cone reto cujo volume é igual a 96π cujo raio da base mede 6 é:**

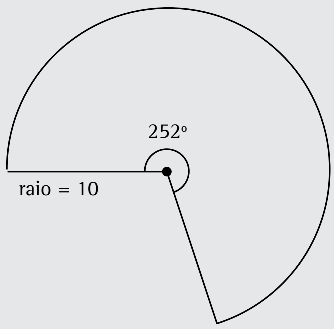
a)



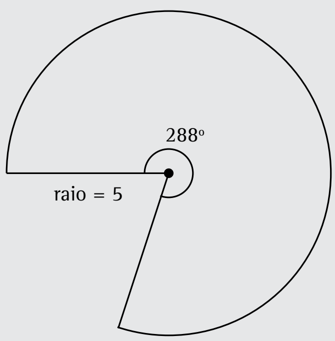
b)



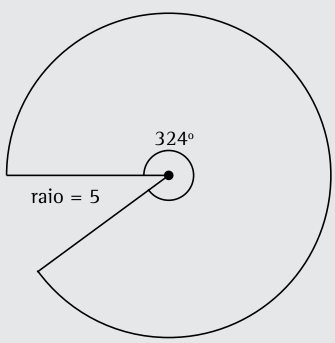
c)



d)



e)



3. **(UFRGS – 2005) Um cone circular reto é tal que cada seção obtida pela interseção de um plano que passa por seu vértice e pelo centro de sua base é um triângulo retângulo de catetos iguais. Se cortarmos esse cone ao longo de uma geratriz, abrindo e planificando sua superfície lateral, será obtido um setor circular cujo ângulo central tem medida α. Então:**

a) $\alpha < 180°$
b) $180° \leq \alpha < 200°$
c) $200° \leq \alpha < 220°$
d) $220° \leq \alpha < 240°$
e) $\alpha \geq 240°$

4. **(UECE) Um cone circular reto de altura $3\sqrt{3}$ cm tem volume igual a $18\sqrt{2\pi}$ cm³. O raio da base desse cone, em centímetros, mede:**

a) 2 b) $2\sqrt{2}$
c) 3 d) $3\sqrt{2}$

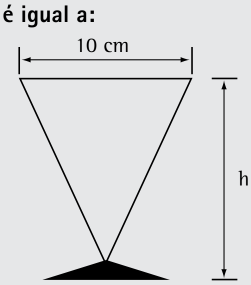
5. **(ITA) Considere o triângulo isósceles OAB, com lados OA e OB de comprimento $\sqrt{2}$.R e lado AB de comprimento 2R. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado AB, é igual a:**

a) $(\pi/2)R^3$ b) πR^3
c) $(4\pi/3)R^3$ d) $\sqrt{2}.\pi R^3$
e) $\sqrt{3}.\pi R^3$

6. **(ITA) Num cone circular reto, a altura é média geométrica entre o raio da base e a altura. A razão entre a altura e raio da base é:**

a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$ d) $\frac{\sqrt[3]{5}-1}{3}$
e) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

7. **(UNIRIO) Uma tulipa de chopp tem a forma cônica, como mostra a figura abaixo. Sabendo-se que sua capacidade é de 100πml, a altura h é igual a:**



a) 20 cm b) 16 cm
c) 12 cm d) 8 cm
e) 4 cm

8. **(UNIFICADO) A é um ponto não pertencente a um plano P. O número de retas que contém A e fazem um ângulo de 45° com P é igual a:**

a) 0 b) 1
c) 2 d) 4
e) infinito

9. **(UFSC) A geratriz de um cone equilátero mede $2\sqrt{3}$ cm.**

Calcule a área da seção meridiana do cone, em cm², multiplique o resultado por $\sqrt{3}$. Qual o valor obtido?

10. **(UFPI) Um homem tinha um cone de revolução que usava como depósito. Não satisfeito com o seu volume, querendo quadruplicá-lo, mandou fazer um segundo cone mantendo o raio e duplicando a altura do cone inicial.**

Indicar qual das alternativas é correta:

a) O homem tomou a providência correta.
b) O homem devia ter quadruplicado a altura e o raio do cone inicial.

c) O homem poderia ter duplicado o raio e mantido a altura do cone inicial.

d) Bastaria o homem ter triplicado a altura do cone inicial.

e) O homem deveria ter duplicado a altura e quadruplicado o raio do cone inicial.

11. (ITA) A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede R cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm^3, é igual a:

a) πR^3

b) $\sqrt{\pi}2R^3$

c) $(\pi/\sqrt{2})R^3$

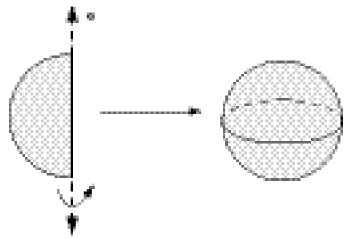
d) $\sqrt{\pi}3R^3$

e) $(\pi/\sqrt{3})R^3$

ÁREAS E VOLUMES DE ESFERAS – APLICAÇÕES

Esfera

Dados um ponto O e uma distância R, chamamos de superfície esférica todos os pontos que distam R do ponto O. Se juntarmos todos os pontos cuja distância é menor que R com os pontos da superfície esférica, temos a esfera. Outra forma de obtermos uma esfera é rotacionarmos em torno de um eixo, uma semicircunferência como a da figura abaixo.



Área da superfície esférica

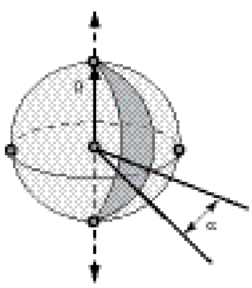
$$S = 4\pi R^2$$

Volume da esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Fuso esférico

O fuso esférico é um pedaço da superfície esférica, como vemos no desenho:



Como podemos perceber, se girarmos uma semicircunferência em um ângulo que esteja entre 0º e 360º, e trabalharmos somente com a superfície gerada, teremos exatamente o fuso esférico.

Área do fuso esférico

Pode ser obtida a partir de uma regra de 3, em relação à área da superfície esférica. Assim, podemos dizer:

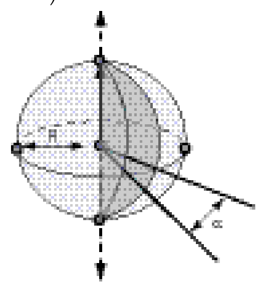
$$S_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi r^2\ \alpha}{360^\circ},\ \alpha \text{ em graus}$$

ou

$$S_{\text{fuso esférico}} = 2r^2,\ \alpha \text{ em radianos}$$

Cunha esférica

A cunha esférica é a figura obtida ao girarmos uma semicircunferência segundo o eixo que contém o diâmetro da mesma, sob um ângulo $\alpha\ (0^\circ < \alpha \leq 360^\circ)$.



Volume da cunha esférica

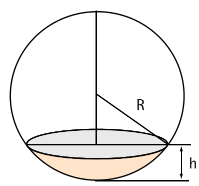
O volume da cunha esférica pode ser encontrado a partir de uma regra de 3 em relação ao volume da esfera:

$$V_{cunha} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270^\circ},\ \alpha \text{ em graus}$$

ou

$$V_{cunha} = \frac{2}{3}R^3\alpha,\ \alpha \text{ em radianos}$$

Calota esférica

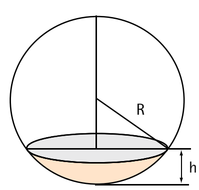


Quando um plano secciona uma esfera, ele determina sobre a superfície esférica o que denominamos de **calota esférica**.

Área da calota

$$S_{calota} = 2\pi Rh$$

Segmento esférico



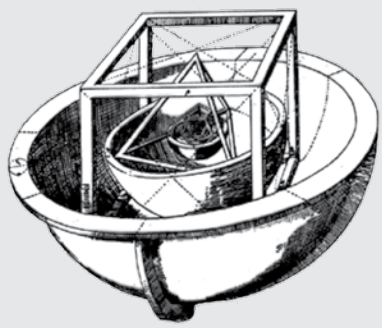
Quando um plano secciona uma esfera, ele a divide em duas partes que denominamos **segmento esférico**.

Volume do segmento esférico

$$V_{segmento} = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **(UERJ) O modelo astronômico heliocêntrico de Kepler, de natureza geométrica, foi construído a partir dos cinco poliedros de Platão, inscritos em esferas concêntricas, conforme ilustra a figura abaixo:**

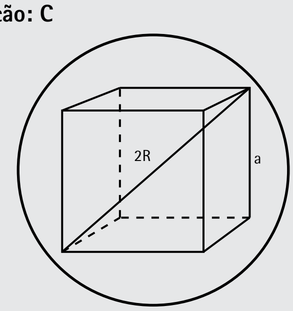


A razão entre a medida da aresta do cubo e a medida do diâmetro da esfera a ele circunscrita, é:

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

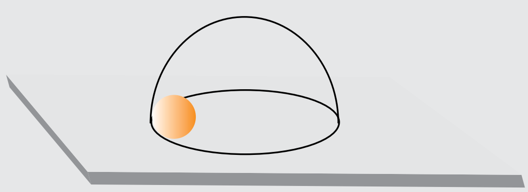
c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Solução: C



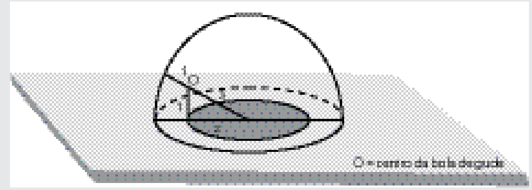
$$2R = a\sqrt{3} \Rightarrow \frac{a}{2R} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. **(UERJ) Uma cuba de superfície semi-esférica, com diâmetro de 8 cm, está fixada sobre uma mesa plana. Uma bola de gude de forma esférica, com raio igual a 1 cm, encontra-se sob essa cuba.**



Desprezando a espessura do material usado para fabricar a cuba, determine a maior área, em cm², pela qual a bola de gude poderá se deslocar na superfície da mesa.

Solução:

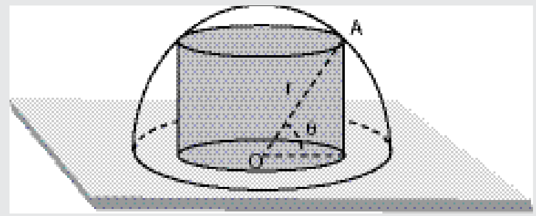


$x^2 + 1^2 = 3^2$

$x^2 = 8$

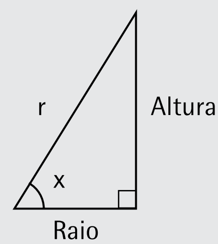
Área $= \pi x^2 = 8\pi \, cm^2$

3. **(UERJ) Observe a figura abaixo, que representa um cilindro circular reto inscrito em uma semi-esfera, cujo raio $\overline{OA}$ forma um ângulo θ com a base do cilindro.**



Se θ varia no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ e o raio da semi-esfera mede r, calcule a área lateral máxima desde cilindro.

Solução:



Altura $= r \cdot \text{sen}x$ e ainda raio $= r \cdot \cos x$

$S_l = 2\pi \cdot r\cos x \cdot r\,\text{sen}x = \pi r^2 \text{sen}2x \Rightarrow$

$S_{max} = \pi r^2$

PRATICANDO

1. **(UFRS) São fundidas 300 esferas com 20 mm de diâmetro para fabricar cilindros circulares retos com 20mm de diâmetro a 200mm de altura. O número de cilindros resultantes é:**

a) 2 b) 5 c) 20

d) 25 e) 30

2. **Qual a quantidade de chumbo necessária para a confecção de 100 bolinhas esféricas, maciças, de 2 cm de diâmetro?**

a) 520 ml b) 4,19 ml

c) 232 ml d) 101,12 ml

3. **(Vunesp – SP) Seja r um número real positivo e P um ponto do espaço. O conjunto formado por todos os pontos do espaço, que estão a uma distância de P menor ou igual a r, é:**

a) um segmento de reta medindo **2r** e tendo P como ponto médio.

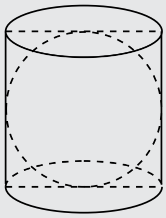
b) Um cone cuja base é um cilindro de centro **P** e raio **r**.

c) Um cilindro cuja base é um círculo de centro **P** e raio **r**.

d) Uma esfera de centro **P** e raio **r**.

e) Um círculo de centro **P** e raio **r**.

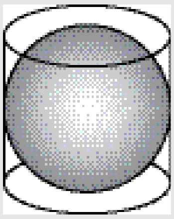
4. (UEL –PR) Um cilindro circular reto encontra-se circunscrito a uma esfera, conforme a figura abaixo. A que porcentagem do volume da esfera corresponde o volume do cilindro?



a) 20% b) 45% c) 92%

d) 100% e) 150%

5. (UCDB-MT)

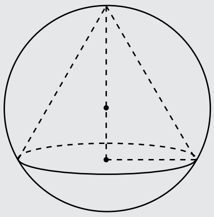


Um cilindro equilátero de volume V m^3 encontra-se cheio de água, quando uma esfera, cujo raio coincide com o raio da base do cilindro, é mergulhada completamente no cilindro fazendo transbordar certa quantidade de água. Nessas condições, o volume, em m^3, de água restante no cilindro é igual a:

a) 0 b) $\frac{V}{4}$ c) $\frac{1}{3}V$

d) $\frac{V}{2}$ e) $\frac{3V}{4}$

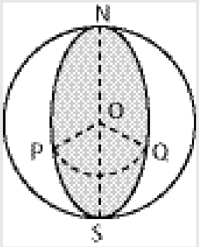
6. (PUC-SP) Um cone circular reto, cujo raio da base é 3 cm, está inscrito em uma esfera de 5 cm de raio, conforme mostra a figura abaixo. O volume do cone corresponde a que porcentagem do volume da esfera?



a) 26,4% b) 21,4% c) 19,5%

d) 18,6% e) 16,2%

7. (UFMG) Observe a figura.



Nessa figura, O é o centro da bola de raio 6 cm. O arco PQ, situado num círculo máximo, mede 2π cm. NPS e NOS são semicírculos com centros em O. O volume, em cm^3, do sólido limitado por esses semicírculos e pela bola contida na região em que o ângulo PÔQ é menor que um raso é:

a) 2π b) 24π c) 48π

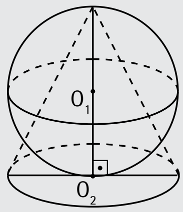
d) 72π e) 144π

8. (Mackenzie-SP) Bolas de tênis, normalmente, são vendidas em embalagens cilíndricas contendo três unidades, que tangenciam as paredes internas da embalagem. Numa dessas embalagens, se o volume não ocupado pelas bolas é 2π, o volume da embalagem é:

a) 6π b) 8π c) 10π

d) 12π e) 4π

9. (UFF – RJ) Sobre o cone reto e a esfera do de centro O_1, representados na figura abaixo, sabe-se que o raio da base é igual ao raio da esfera.



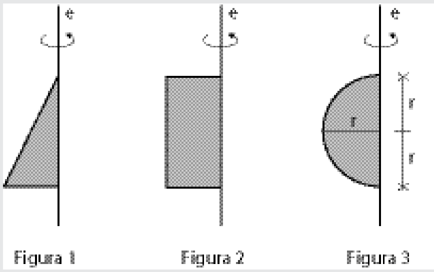
Se V_c é o volume do cone V_E é o volume da esfera, pode-se afirmar que:

a) $V_C = 2V_E$ b) $V_C = V_E$

c) $V_C = 3V_E$ d) $V_C = V_E/2$

e) $V_C = V_E/3$

10. (UFSC) Quando se gira a parte hachurada das figuras 1, 2 e 3 em torno do eixo e, obtêm-se as seguintes superfícies de revolução:



(01)Na figura 1, um cone de revolução.

(02)Na figura 2, um prisma.

(03)Na figura 3, uma esfera.

(08)As figuras 1, 2 e 3 são cone, cilindro e esfera de revolução, respectivamente.

(16)Na figura 1, uma pirâmide.

Marque a opção que representa a soma das alternativas corretas.

a) 3 b) 12 c) 13

d) 17 e) 20

11. (Ufop) Se metade de uma panela cilíndrica de 40 cm de diâmetro e 20 cm de altura está cheia de massa para doce, quantos doces em forma de bolinhas de 2 cm de raio podem ser feitos com a massa toda?

a) 125 b) 250

c) 375 d) 750

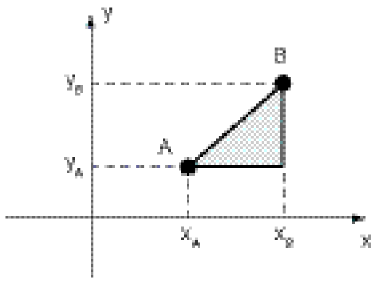
M30

GEOMETRIA ANALÍTICA

Plano Cartesiano e coordenadas de pontos do plano. Distância entre dois pontos e ponto médio de um segmento. Estudo da reta e da circunferência

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DO PLANO CARTESIANO

Vejamos a figura abaixo.



Dados A e B, dois pontos distintos do plano cartesiano, podemos calcular a distância entre eles utilizando a fórmula abaixo, veja:

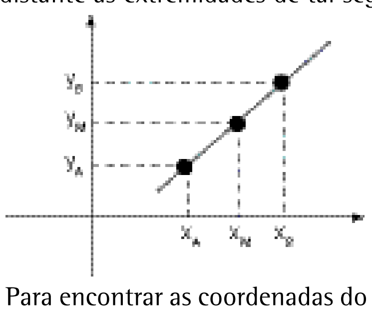
$$(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$\text{ou } d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Como você pode perceber a variação das coordenadas dos pontos A e B é que irão determinar a distância entre eles.

PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Consideremos o segmento $\overline{AB}$ representado no plano cartesiano abaixo e o ponto M, que é equidistante as extremidades de tal segmento.

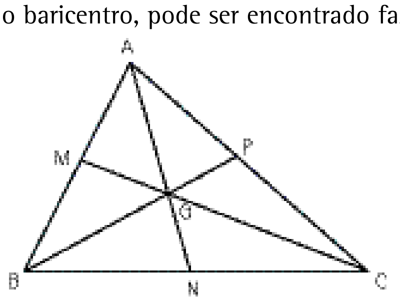


Para encontrar as coordenadas do ponto médio $M(x_M, y_M)$ devemos calcular a média aritmética das coordenadas dos pontos que são extremidades do segmento $\overline{AB}$, veja:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Baricentro de um triângulo

As coordenadas do ponto de encontro das medianas, o baricentro, pode ser encontrado fazendo:

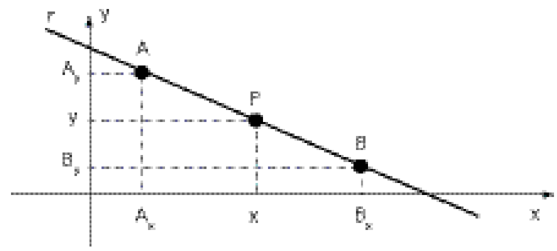


$$G_x = \frac{A_x + B_x + C_x}{3} \text{ e } G_y = \frac{A_y + B_y + C_y}{3}$$

ESTUDO DA RETA

Equação geral da reta

Vejamos o gráfico:



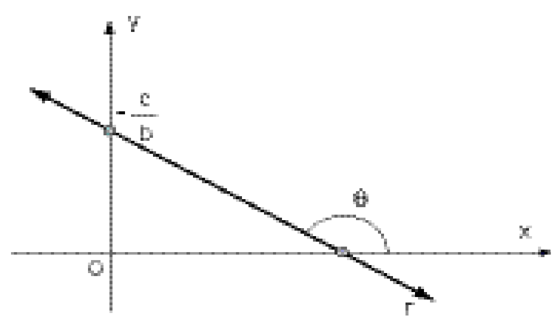
Sendo os pontos A e B conhecidos e P um ponto genérico na reta **r**, considerando a possibilidade deles serem colineares, então podemos observar o seguinte:

$$\overline{AB} // \overline{AP} \Rightarrow \overline{AP} = k.\overline{AB},$$

$$\text{logo } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Teremos então a.x + b.y + c = 0 chamada de equação geral da reta (a, b e c constantes e a ≠ 0 e b ≠ 0).

Equação reduzida da reta



Para termos a equação reduzida basta isolarmos o y na equação geral, assim:

$$\boxed{y = mx + n}$$

$$\boxed{m = tg\theta}$$

coeficiente angular entre a reta e o eixo x.

$$\boxed{n = \frac{-c}{a}}$$

coeficiente linear ou ponto que intercepta o eixo y.

Observação:

Quando forem dados dois pontos podemos encontrar **m** fazendo:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \therefore m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Posições relativas entre retas

I – Paralelas

Quando os coeficientes angulares são iguais.

$$m_r = m_s$$

II - Perpendiculares

Quando acontecer dos coeficientes angulares se relacionarem da seguinte forma.

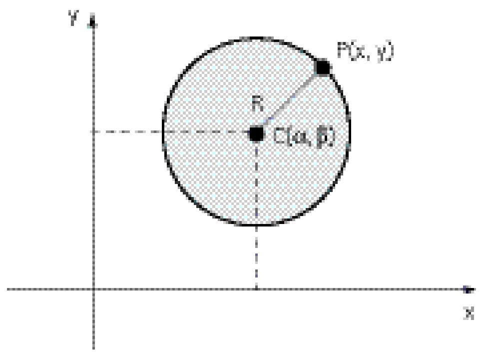
$$m_s . m_r = -1 \text{ ou } m_s = -\frac{1}{m_r}$$

Resumo:

Posição (entre duas retas)	Coeficientes angulares	Coeficientes lineares
Paralelas	$m_s = m_r$	$n_s \neq n_r$
Perpendiculares	$m_s = -\frac{1}{m_r}$	Indiferente

Equação reduzida e geral

Lugar geométrico dos pontos equidistantes de um único ponto chamado centro. Essa distância é fixa e denominada raio.



ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

Utilizando a distância entre pontos chegamos a equação reduzida de um circunferência, veja:

$$d_{(PC)} = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

como $d_{(PC)} = R$ teremos então

$$R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$$

Esta é chamada de **equação reduzida da circunferência.**

Desenvolvendo a equação reduzida da circunferência, temos a equação geral da circunferência:

$$x^2 + y^2 - 2.\alpha.x - 2.\beta.y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$$

No intuito de facilitarmos o aprendizado, faremos as seguintes substituições:

$C = -2.\alpha$

$D = -2.\beta$

$E = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$

Então fica assim:

$$A.x^2 + B.y^2 + C.x + D.y + E = 0$$

Centro da Circunferência

$$\alpha = -\frac{C}{2} \qquad \beta = -\frac{D}{2}$$

Raio da circunferência

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - E}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **Dados os pontos A (2m+1,-3m-4) e B (3n+2, n+4), sendo que A ∈ 3º quadrante e B ∈ 1º quadrante. Determine o ponto médio e a distância deste à origem do sistema, sabendo que x = y.**

   Solução:

   Vejamos a tabela de sinais:

quadrante	x	y
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

   No 3º quadrante tanto a abscissa quanto a ordenada são negativos. Então podemos efetuar da seguinte forma:

   $$-(2m+1) = -(-3m-4) \Rightarrow 2m+1 = -3m-4 \Rightarrow$$
   $$5m = -5 \Rightarrow m = -1 \therefore A(-1,-1)$$

   No 1º quadrante tanto a abscissa quanto a ordenada são positivos. Então podemos efetuar da seguinte forma:

   $$3n+2 = n+4 \Rightarrow 2n = 2 \Rightarrow n = 1$$
   $$\therefore B(5,5)$$

   Cálculo do ponto médio:

   $$\begin{cases} P_{Mx} = \dfrac{x_A + x_B}{2} \therefore P_{Mx} = \dfrac{-1+5}{2} \therefore P_{Mx} = 2 \\ P_{Mx} y = \dfrac{y_A + y_B}{2} \therefore P_{My} = \dfrac{-1+5}{2} \therefore P_{My} = 2 \end{cases}$$

   Cálculo da distância entre $P_M O_{origem}$:

   Dados: P (2,2); O (0,0)

   $$d_{PMOrigem} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2} \Rightarrow$$
   $$\sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

2. **Dados os pontos A(5,12), B(15,-3), C(Cx,Cy), D(0,0) e a razão de $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{2}{3}$.**

Determine:

a) o valor da mediana relativa ao triângulo ACD, tomando como referência o vértice D.

b) o baricentro do triângulo BCD.

Solução:

Passo I - Vamos determinar as coordenadas do ponto **C**:

$$x_c = \frac{x_A + K.x_B}{1+K} \therefore x_c = \frac{\frac{5}{1}+\frac{2}{3}.\frac{15}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{2}{3}} \therefore x_c = \frac{\frac{15}{1}}{\frac{5}{3}} \therefore$$

$$x_c = \frac{15}{1}.\frac{3}{5} \therefore x_c = 9$$

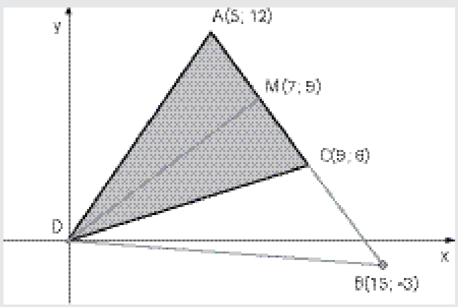
$$y_c = \frac{y_A + K.y_B}{1+K} \therefore x_c = \frac{\frac{12}{1}+\frac{2}{3}.\frac{-3}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{2}{3}} \therefore x_c = \frac{\frac{10}{1}}{\frac{5}{3}} \therefore$$

$$x_c = \frac{10}{1}.\frac{3}{5} \therefore x_c = 6$$

Passo II - O ponto médio de AC:

$$P_{Mx} = \frac{x_A + x_C}{2} \therefore P_{Mx} = \frac{5+9}{2} \therefore P_{Mx} = 7$$

$$P_{Mx}y = \frac{y_A + y_C}{2} \therefore P_{My} = \frac{12+6}{2} \therefore P_{My} = 9$$



Passo III - Cálculo da mediana (distância de um vértice ao ponto médio do lado oposto ao vértice):

$$d_{DM} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \therefore d_{DM} = \sqrt{(7\text{-}0)^2 + (9\text{-}0)^2} \therefore$$

$$d_{DM} = \sqrt{130}$$

Cálculo do baricentro do triângulo ABD:

$$G_x = \frac{A_x + B_x + D_x}{3} \therefore G_x = \frac{5+15+0}{3} \therefore G_x = \frac{20}{3}$$

$$G_y = \frac{A_y + B_y + D_y}{3} \therefore G_y = \frac{12\text{-}3+0}{3} \therefore G_y = 3$$

$$\Rightarrow \text{Baricentro}\left(\frac{20}{3}, 3\right)$$

3. Dados os pontos P(a,b), A(0,3) ,B(1,0), C(m,6), D(1,2), E(0,1) e F(–2,s), sendo que os pontos P, A, B e C são colineares e P, D, E e F também os são. Determine a + b + m + s.

Solução:

Vamos montar um determinante com P, A, B:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & a \\ b & 3 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3a+0+b)-(0+3+0)=0 \Rightarrow$$

$$3a+b=3$$

Vamos montar um determinante com P, D, E:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & a \\ b & 2 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2a+1+0)-(b+0+a)=0 \Rightarrow$$

$$2a+1-b-a=0 \Rightarrow a-b=-1$$

Resolvendo o sistema temos:

$$\begin{cases} 3a+b=3 \\ a-b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$$

Lembrando que para montarmos uma reta precisamos apenas de dois pontos, então, vamos montar o seguinte determinante para podermos trabalhar com o ponto C(m,6):

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & x \\ y & 3 & 0 & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3x+0+y)-(0+3+0)=0 \Rightarrow$$

$$3x+y-3=0 \Rightarrow y=-3x+3$$

Como o ponto C $\in$ à reta acima, podemos substituir seus valores:

$$-3m+3=6 \Rightarrow m=-1$$

Lembrando que para montarmos uma reta precisamos apenas de dois pontos, então, vamos montar o seguinte determinante para podermos trabalhar com o ponto F(-2,s):

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ y & 2 & 1 & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2x+1+0)-(y+0+x)=0 \Rightarrow$$

$$2x+1-y-x=0 \Rightarrow y=x+1$$

Como o ponto F $\in$ à reta acima podemos substituir seus valores:

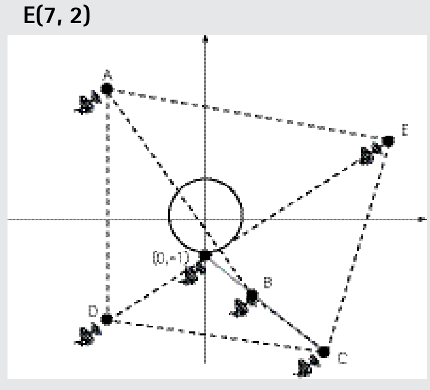
$$-2+1=s \Rightarrow s=-1$$

Então:

$$a+b+m+s=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-1-1=0$$

4. (UNB modificada) As placas geológicas que formam a superfície da Terra estão em constante movimento. Para estudar o efeito do movimento das placas tectônicas sobre os continentes, foi elaborado o seguinte experimento. Cinco antenas parabólicas (A, B, C, D, E) foram colocadas em pontos diferentes, cada uma delas sobre uma placa tectônica, para captar as ondas de rádio de um quasar. Um computador foi configurado para calcular o tempo levado para que essas ondas atinjam determinada antena. Dessa forma, é possível calcular a distância entre as antenas e verificar se elas estão se movimentando, uma em relação às outras. Suponha que, inicialmente, as antenas estejam posicionadas de acordo com o esquematizado no plano cartesiano xOy ilustrado na figura abaixo. Com base na figura e nas informações do texto, julgue os itens que se seguem, considerando o sistema de coordenadas xOy ali mostrado e marque, abaixo, a opção correta:

Dados: A(-3, 4); B(1, -2); C(3, -4); D(x, y); E(7, 2)



I. Se a distância entre as antenas D e B for igual a $\sqrt{20}$, então as coordenadas (x, y) de D satisfazem a relação xy = 12.

Solução:

Dados: B(1,-2); D(-3,y) ∴ D(-3,-4)

$$d_{BD} = \sqrt{(1+3)^2 + (y+2)^2} \therefore \sqrt{20} = \sqrt{16 + y^2 + 4y + 4} \therefore$$

$$20 = y^2 + 4y + 20 \therefore y_1 = 0 \text{ ou } y_2 = -4$$

–3.–4 = 12 *correta*

II. A reta que passa pelas antenas A e B é perpendicular à reta que passa pelas antenas B e E.

Solução:

Dados: A(-3,4); B(1,-2)

Vou chamar de reta **r**:

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & x \\ y & 4 & -2 & y \end{vmatrix} = 0 \therefore 4x + 6 + y + 3y - 4 + 2x = 0 \therefore$$

$$6x + 4y + 2 = 0\,(\div 2) \therefore 3x + 2y + 1 = 0 \therefore y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$m_r = -\frac{3}{2}$$

Dados: B(1,–2); E(7,2)

Vou chamar de reta **s**:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 7 & x \\ y & -2 & 2 & y \end{vmatrix} = 0 \therefore -2x + 2 + 7y - y + 14 - 2x = 0 \therefore$$

$$-4x + 6y + 16 = 0\,(\div 2) \therefore -2x + 3y + 8 = 0 \therefore y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$$

$$m_r = \frac{2}{3}$$

Então $m_r = -\frac{1}{m_s} \therefore -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ ela está *correta.*

III. Se um observatório for colocado no ponto médio entre as antenas A e B, então o módulo da diferença das coordenadas desse ponto será inferior a 1,5.

Solução:

Dados: A(-3,4); B(1,-2)

$$P_{Mx} = \frac{A_x + B_x}{2} \therefore P_{Mx} = \frac{-3+1}{2} \therefore P_{Mx} = -1$$

$$P_{My} = \frac{A_y + B_y}{2} \therefore P_{My} = \frac{4-2}{2} \therefore P_{Mx} = 1$$

$$P_M = (-1;1) \therefore |-1-1| \therefore |-2| \therefore 2$$

Falsa

IV. Considere que uma sexta antena deva ser colocada no ponto de interseção das retas que contêm os segmentos AE e BC. Nesse caso, a soma das coordenadas desse ponto é igual a =1.

Solução:

Dados: A(-3,4); E(7,2)

Vou chamar de reta **t**:

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 7 & x \\ y & 4 & 2 & y \end{vmatrix} = 0 \therefore 4x - 6 + 7y + 3y - 28 - 2x = 0 \therefore$$

$$2x + 10y - 34 = 0\,(\div 2) \therefore x + 5y - 17 = 0 \therefore y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$$

Dados: B(1,-2); C(3,-4)

Vou chamar de reta **u**:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 & x \\ y & -2 & -4 & y \end{vmatrix} = 0 \therefore -2x - 4 + 3y - y + 6 + 4x = 0 \therefore$$

$$2x + 2y + 2 = 0\,(\div 2) \therefore x + y + 1 = 0 \therefore y = -x - 1$$

Vamos agora efetuar a $t \cap u$, gerando o ponto

$$I = \left(-\frac{11}{2}; \frac{9}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x + 5y = 17 \\ x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{11}{2} \text{ e } y = \frac{9}{2}$$

então: x + y = -1 *Falsa*

V. Suponha que um observatório deva ser colocado em um ponto (x0,y0) sobre uma circunferência de raio 1 com centro na origem do plano xOy, tal que a distância desse observatório até a antena C seja a menor possível. Nesse caso, log (3.x0 + y0) = 0.

Solução:

Dados: $x_0 = 0$; $y_0 = -1$

$\log(3.0-1) = 0 \rightarrow \log(-1) = 0$

Falsa, pois o logaritmando não pode ser negativo.

a) I e II falsas

b) III e IV corretas

c) II e V falsas

d) III, IV e V falsas VERDADEIRA

e) II e III corretas

Opção correta: letra D

5. (UFU) A condição para que $x^2 + y^2 - 6x + 4y + (17 - m^2) = 0$, represente uma circunferência é:

a) $m \leq -2$ ou $m \geq 2$

b) $m < -2$ ou $m > 2$

c) $-2 < m < 2$

d) $-2 \leq m \leq 2$

e) a equação não pode representar uma circunferência

Solução:

Dados: A = B = 1; C = -6; D = 4; E = 17 - m^2

$$\alpha = -\frac{C}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{6}{2} \therefore \alpha = 3$$

$$\beta = -\frac{D}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{4}{2} \therefore \beta = -2$$

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - E}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - E > 0 \Rightarrow 9 + 4 - 17 + m^2 > 0 \therefore$$

$$m^2 - 4 > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ ou } m > 2$$

Opção correta: letra B

6. (UNIFOR modificada) Dada duas circunferências secantes entre si:

C_1: $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$ e

C_2: $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0$

determinar a equação secante entre as circunferências.

a) $\frac{2x}{5} + \frac{3y}{20} = 1$

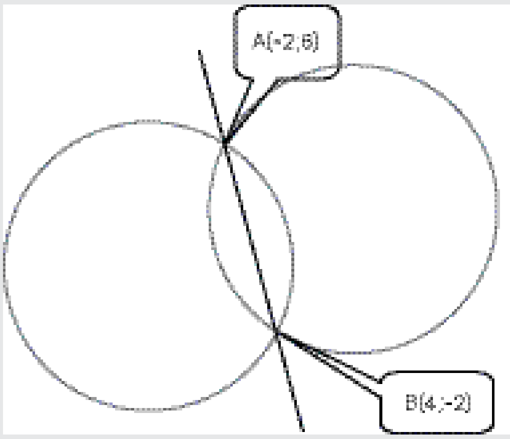
b) $-\frac{2x}{5} + \frac{3y}{20} = 1$

c) $-\frac{2x}{5} - \frac{3y}{20} = 1$

d) $\frac{2x}{5} - \frac{3y}{20} = -1$

e) $-\frac{2x}{5} - \frac{3y}{20} = -1$

Solução



$$\begin{cases} x^2+y^2-10x-10y=0\,(I) \\ x^2+y^2+6x+2y-40=0\,(II)\ \times(-1) \end{cases}$$

$-10x - 6x - 10y - 2y + 40 = 0 \therefore$

$-16x - 12y + 40 = 0\ (-4) \therefore 4x + 3y - 10 = 0 \therefore$

$$y=\frac{-4x+10}{3}$$

Vamos substituir em I:

$$x^2+\left(\frac{-4x+10}{3}\right)^2-10x-10.\left(\frac{-4x+10}{3}\right)=0\therefore$$

$$x^2+\frac{16x^2-80x+100}{9}-10x+\frac{40x-100}{3}=0\therefore$$

$$9x^2+16x^2-80x+100-90x+120x-300=0\therefore$$

$$25x^2-50x-200=0\,(\div 25)\therefore$$

$$x^2-2x-8=0\therefore x_1=-2 \text{ ou } x_2=4\therefore$$

$$y_1=6 \text{ ou } y_2=-2$$

A(-2,6) e B(4,-2):

$$\begin{vmatrix} x & -2 & 4 & x \\ y & 6 & -2 & y \end{vmatrix}=0\therefore$$

$$6x+4+4y+2y-24+2x=0\therefore$$

$$8x+6y-20=0\therefore 8x+6y=20\,(\div 20)\therefore$$

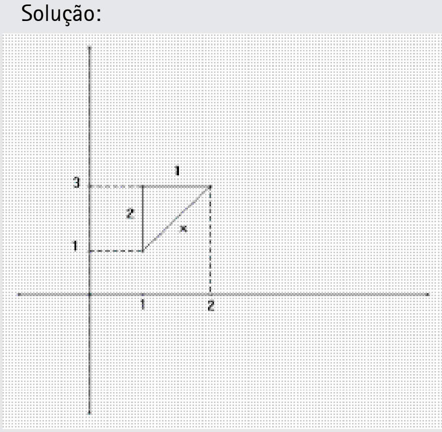
$$\frac{2x}{5}+\frac{3y}{10}=1$$

7. **(EsSA 2008) A medida do perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos (1,1), (1,3) e (2,3) é:**

a) $3+\sqrt{5}$ b) $3+2\sqrt{5}$ c) $3+3\sqrt{5}$

d) $3+4\sqrt{5}$ e) $3+5\sqrt{5}$

Solução:



Como vemos os pontos quando marcados no plano cartesiano, determinam um triangulo retângulo sendo assim falta-nos encontrar a hipotenusa para determinarmos o perímetro pedido:

$x^2 = 1^2 + 2^2 \rightarrow\ x = \sqrt{5}$, logo o perímetro será $3 + \sqrt{5}$

8. **(EsSA 2008) As equações $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 64$ e $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 25$ representam duas circunferências cuja posição relativa no plano permite afirmar que são:**

a) Interiores (sem ponto de intersecção)

b) Tangentes interiores.

c) Secantes.

d) Tangentes exteriores.

e) Exteriores (sem ponto de intersecção).

Solução:

C_1 (-1, 4) e $r_1 = 8$

C_2 (4, -8) e $r_2 = 5$

Calculando a distância entre os centros:

$d^2 = (4-(-1))^2 + (-8-4)^2 \rightarrow d = 13$

Como podemos ver, a distancia entre os centros é igual à soma dos raios, logo as circunferências são tangentes exteriores.

PRATICANDO

1. **(Unitau-SP) Sabendo que o ponto Q(1-a,b+2) $\in$ ao quarto quadrante do plano cartesiano, pode-se concluir que os possíveis valores de a e b são:**

a) $\{a\in\Re / a=0\}$ e $\{b\in\Re / b<1\}$

b) $\{a\in\Re / a<1\}$ e $\{b\in\Re / b<-2\}$

c) $\{a\in\Re / a>1\}$ e $\{b\in\Re / b>-2\}$

d) $\{a\in\Re / a<-2\}$ e $\{b\in\Re / b<1\}$

e) $\{a\in\Re / a=-1\}$ e $\{b\in\Re / b=2\}$

2. **(CEFET-PR MODIFICADA) Qual a somatória das coordenadas do ponto "P" do triângulo MNO situado a igual distância dos vértices M(4,0), N(6,4) e O(0.4) com seu baricentro(CG)?**

a) 14 b) 12 c) 8

d) 6 e) 4

3. **(UFBA MODIFICADA) Sendo dadas as equações das retas suportes dos lados de um triângulo determine a soma das coordenadas de seu baricentro, y = 2x - 1, y = 5x - 4 e x = 5 e assinale a alternativa correta.**

a) $\frac{31}{3}$ b) $\frac{9}{5}$ c) 14

d) −12 e) 0

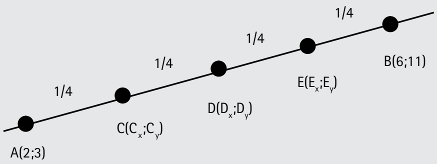
4. **(VUNESP) Dado um sistema de coordenadas cartesianas no plano, considere os pontos A(2,2), B(4,-1) e C(m,0). Para que AC + CB seja mínimo, o valor de <u>m</u> será de?**

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{10}{3}$

d) $\frac{7}{2}$ e) $\frac{11}{3}$

5. **(UFGS – modificada) Dada a figura abaixo assinale a alternativa correspondente a so-**

matória das abscissas e das coordenadas dos pontos A, B, C, D e E, sendo que as distâncias entre si são iguais.



a) 55 b) 20 c) 35
d) 31 e) 26

6. **(UFPE - modificada) Sendo d o comprimento da mediana relativa ao lado BC do triângulo ABC onde A(0,0), B(4,6) e C(2,4) , então d^2 é igual a:**

a) $\sqrt{34}$ b) 32 c) $\sqrt{41}$
d) 34 e) 17

7. **(FEEQ-SP) A distância entre os pontos A(cosα, senα) e B(senα,-cosα) é:**

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$
d) $-\sqrt{2}$ e) 2

8. **(PUC-SP) Sendo A(3,1), B(4,-4) e C(-2,2) vértices de um triângulo, então esse triângulo será um:**

a) retângulo e não isósceles
b) retângulo e isósceles
c) equilátero
d) obtusângulo
e) escaleno e não obtusângulo

9. **(UFMG) O valor de m para que os pontos A(2m+1,2), B(-6,-5) e C(0,1) sejam colineares é:**

a) -1 b) $-\frac{1}{2}$ c) 0
d) $\frac{1}{2}$ e) 1

10. **(CEFET-PR) A equação reduzida da reta que passa pelo ponto P(-1,-3) e é perpendicular à reta (s) 2x -3y + 4 = 0, é:**

a) $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ b) $y=-\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$
c) $y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}$ d) $y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{3}$
e) $y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$

11. **(AFA-adaptada) As equações paramétricas**

$$\begin{cases} x = sen^2\, t \\ y = cos^2\, t \end{cases}$$

representam a seguinte equação.

a) x + y = 1
b) x – y = 1
c) x + y = -1
d) –x + y = 1
e) –x – y = -1

12. **(AFA) As diagonais de um losango estão contidas nas retas (r) (3m – 1)x + (m –2)y = 0 e (t) x + (m + 1)y + m + 2 = 0. É correto afirmar que os possíveis valores de m**

a) têm soma igual a 2
b) têm produto igual a 3
c) pertencem ao intervalo]–3, 3]
d) têm sinais opostos
e) n.d.a

13. **(ITA-SP) Considere o triângulo ABC do plano cartesiano, aonde A = (p,q), B = (2p,3q) e C = (3p,2q), sendo p e q reais. Se M é o ponto de intersecção de suas medianas, então a reta que passa por M e é paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ intercepta os eixos cartesianos nos pontos:**

a) (0,p) e (4p,q)
b) (0,4q) e (4p,0)
c) (0,4p) e (4q,0)
d) (0,q) e (p,0)
e) (0,3q) e (3p,0)

14. **(CEFET-PR) O ponto P, de ordenada positiva, pertence ao eixo y e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$. A equação da reta tangente a circunferência ao ponto P é:**

a) 4x + 3y + 12 = 0
b) 4x - 3y + 9 = 0
c) 4x - 3y + 12 = 0
d) 4x - 3y + 6 = 0
e) 4x + 3y – 9 = 0

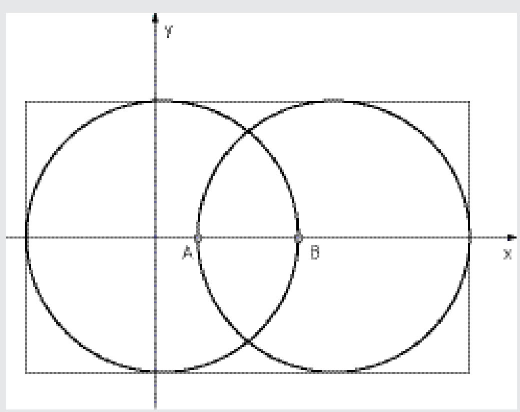
15. **(UFPR) Determinar o maior valor inteiro de k a fim de que $x^2 - y^2 - 6x + 10y + k = 0$, seja a equação de uma circunferência de raio não nulo.**

a) 15 b) 20 c) 25
d) 33 e) 42

16. **(UFPR) Para que a equação $(2m + 1)x^2 + (m - 2).y^2 + 2x - 6y + k = 0$, represente uma circunferência, devemos ter:**

a) m = k = 2
b) m = 3 e k = 2
c) m = k = 0
d) m = k = 3
e) m = -3 e k < 2

17. **(UNB–modificada) Na figura a seguir, as circunferências têm centros nos pontos A e B e cada uma delas é tangente a três lados do retângulo. Sabendo que cada círculo tem área 2, determinar suas equações e a distância entre AB, respectivamente?**



a) $x^2 + y^2 + \dfrac{4}{\pi} = 0$ e

$x^2 + y^2 + \dfrac{8.\sqrt{\pi}}{\pi}.y + \dfrac{12}{\pi} = 0, \dfrac{2.\sqrt{\pi}}{\pi}$

b) $x^2 + y^2 - \dfrac{4}{\pi} = 0$ e

$x^2 + y^2 - \dfrac{8.\sqrt{\pi}}{\pi}.y + \dfrac{2}{\pi} = 0, \dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}$

c) $x^2 + y^2 + \dfrac{4}{\pi} = 0$ e

$x^2 + y^2 - \dfrac{8.\sqrt{\pi}}{\pi}.y + \dfrac{12}{\pi} = 0, \dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}$

d) $x^2 + y^2 - \dfrac{4}{\pi} = 0$ e

$x^2 + y^2 - \dfrac{8.\sqrt{\pi}}{\pi}.y + \dfrac{12}{\pi} = 0, \dfrac{2.\sqrt{\pi}}{\pi}$

e) $x^2 + y^2 - \dfrac{4}{\pi} = 0$ e

$x^2 + y^2 - \dfrac{8.\sqrt{\pi}}{\pi}.y + \dfrac{2}{\pi} = 0, \dfrac{2.\sqrt{\pi}}{\pi}$

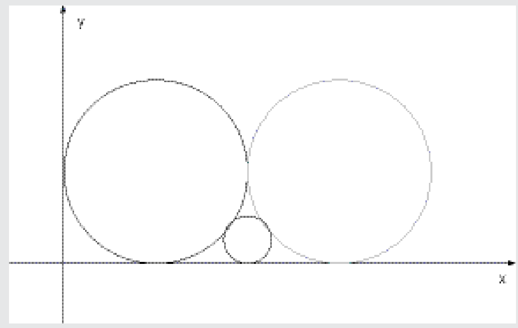
18. (FGV-SP) Dado o ponto P(5, 4) e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$, a equação da circunferência concêntrica com a circunferência dada e que passa por P é:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 20 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 21 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 22 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 24 = 0$

19. (OSEC) Qual e a circunferência que passa pela origem e tem o ponto C(-1,-5) como centro?

a) $x^2 + y^2 + 2x + 10y = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x - 10y = 0$
c) $x^2 + y^2 - 26 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 2 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 8x - y + 8 = 0$

20. (UFMG-modificada) Na figura a seguir, estão representadas três circunferências, tangentes duas a duas, e uma reta tangente às três circunferências:



Sabe-se que o raio de cada uma das duas circunferências maiores mede 1 cm. Então, é CORRETO afirmar que a equação da menor vale:

a) $x^2 + y^2 - 8x - y + 8 = 0$
b) $2x^2 + 2y^2 + 8x - y + 8 = 0$
c) $2x^2 + 2y^2 - 8x + y - 8 = 0$
d) $2x^2 + 2y^2 - 8x - y - 8 = 0$
e) $2x^2 + 2y^2 - 8x - y + 8 = 0$

Gabarito

M15

1. A	2. A	3. A
4. D	5. A	6. C
7. E	8. E	9. D
10. C	11. B	12. C
13. C		

M16

1. B	2. 225°	3. C
4. A	5. E	6. B
7. D	8. E	9. D
10. C		

M17

1. A	2. A	3. C
4. C	5. C	6. 180°
7. B	8. C	9. C
10. E	11. D	12. B
13. B	14. C	15. 300 m

M18

1. A	2. B	3. D
4. C	5. B	6. E
7. D	8. C	9. B
10. D	11. B	12. D

M19

1. D	2. B	3. D
4. C	5. C	6. B
7. D	8. D	9. C
10. D		

M20

1. D	2. A	3. E
4. B	5. C	6. A
7. D	8. E	9. A
10. B	11. B	12. A
13. E	14. D	15. C
16. A	17. $\sqrt{3}$cm	18. A
19. B	20. A	21. D
22. B	23. C	24. B

M21

1. D	2. C	3. A	4. C	5. B	6. B	7. B
8. B	9. B	10. D	11. C	12. A	13. D	14. E
15. D	16. A	17. D	18. C	19. B	20. D	21. C
22. A	23. E	24. E	25. D	26. D	27. A	28. B
29. C						

M22

1. D	2. A	3. B	4. A	5. C	6. E	7. B
8. D	9. C	10. E				

M23

1. C	2. B	3. B

M24 E 25

1. C	2. D	3. A	4. B	5. E	6. C	7. D
8. C	9. C	10. B	11. D	12. C	13. C	

M26

1. E	2. C	3. A	4. D	5. B	6. D	7. C
8. D	9. C	10. E	11. B	12. B		

M27

1. A	2. B	3. C	4. E	5. B	6. A	7. B
8. B	9. C	10. B				

M28

1. B	2. B	3. E	4. D	5. C	6. E	7. C
8. E	9. 9	10. C	11. E			

M29

1. C	2. B	3. D	4. E	5. C	6. E	7. C
8. A	9. D	10. C	11. C			

M30

1. B	2. A	3. C	4. C
5. A	6. A	7. B	8. D
9. C	10. B	11. A	12. D
13. B	14. C	15. D	16. E
17. D	18. D	19. A	20. E