3.CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. INTRODUÇÃO

Números são elementos abstratos, largamente usados na matemática, com finalidade de contar e medir. Nesta seção, trataremos dos mais importantes conjuntos formados por números, os chamados Conjuntos Numéricos. São eles o conjunto dos Números Naturais $\mathbb{N}$, o conjunto dos Números Inteiros $\mathbb{Z}$, o conjunto dos Números Racionais $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números Irracionais $\overline{\mathbb{Q}}$ e o conjunto dos Números Reais $\mathbb{R}$.

2. O CONJUNTO $\mathbb{N}$

Ao resultado de uma contagem chamamos número natural. O conjunto dos números naturais é assim representado,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

A ideia principal por trás deste conjunto é a de *sucessão*. $\mathbb{N}$ é um conjunto de números ordinais, no qual o "um" é o primeiro elemento, cujo sucessor é denominado "dois", que por sua vez tem um sucessor denominado "três" e assim em diante.

Um subconjunto importante de $\mathbb{N}$ é o conjunto dos naturais não nulos

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Se o símbolo de um conjunto estiver associado ao símbolo "*", então o zero não fará parte deste conjunto, isto é $A^* = A - \{0\}$.

Em relação às operações adição e multiplicação $\mathbb{N}$ possui a propriedade do *fechamento,* que diz basicamente que a soma de números naturais resulta em um número natural, e o mesmo vale para a multiplicação.

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, (m + n) \in \mathbb{N} \; e \; m.n \in \mathbb{N}$$

Perceba que $\mathbb{N}$ não é fechado para a subtração nem para a divisão. Por exemplo, $(3 - 5) \notin \mathbb{N}$ e $(3 \div 7) \notin \mathbb{N}$.

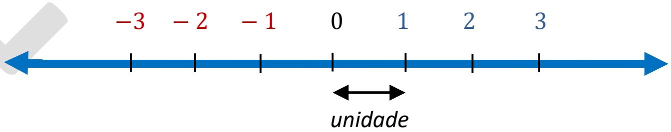
3. O CONJUNTO $\mathbb{Z}$

Em certo momento da história os números naturais precisaram ser estendidos a fim de atender melhor às necessidades humanas. Assim surge o conjunto dos números Inteiros. Representado da seguinte forma,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

É imediato que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e que $\mathbb{Z}$ é fechado para adição, subtração e multiplicação (Pense em exemplos!).

A geometria do conjunto $\mathbb{Z}$ permite compreender melhor a relação de ordem entre dois números inteiros. Esta geometria se faz numa reta numerada, escalonada e geralmente orientada para crescimento à direita. Ela é denominada a *Reta Numérica dos Inteiros*, veja,



A reta numérica voltará a ser estudada posteriormente de forma mais ampla.

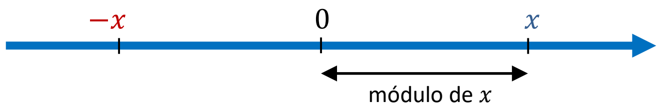
A seguir, apresentam-se alguns subconjuntos importantes de $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

Pense em como seriam os conjuntos $\mathbb{Z}_-^*$ e $\mathbb{Z}_+^*$.

3.1. Módulo de um número inteiro

Definimos o módulo do número inteiro x, indicado por $|x|$, como sendo a distância de x a zero na reta numérica,



Note que o módulo de um número inteiro nunca é negativo, uma vez que se trata de uma distância. Perceba também que módulo tem a propriedade: $|x| = |-x|$.

Outra forma de definir módulo é a que segue,

$$|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

Por exemplo, $|13| = 13$, $|-7| = 7$ e $|0| = 0$.

Veja a seguir, outras propriedades para módulos, para todo x real:

i) $|x^2| = |x|^2 = x^2$;

ii) $\sqrt{x^2} = |x|$;

iii) $|x.y| = |x|.|y|$;

iv) $|x:y| = |x|:|y|, para\ y \neq 0$;

v) $|x + y| \leq |x| + |y|$ $(desigualdade\ triangular)$;

vi) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Temos ainda que $|x - y| = |y - x|$, o que pode ser facilmente verificado.

3.2. Oposto de um número inteiro

O oposto do número inteiro x é o número $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.

Por exemplo, o oposto de 17 é -17 e o oposto de -3 é 3.

4. O CONJUNTO $\mathbb{Q}$

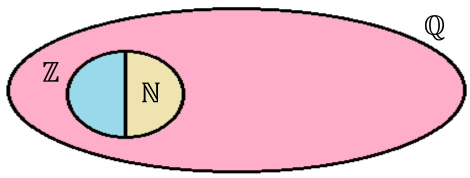
A fim de dar completude a operação de divisão entre dois números inteiros estende-se mais uma vez o conceito de número e surge o conjunto das frações, a saber, $\mathbb{Q}$, assim definido:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, com\ a, b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0\right\}$$

A condição $b \neq 0$ é necessária uma vez que não se define a divisão por zero.

São exemplos de números racionais, $\frac{2}{3}, -4, 0, \frac{-1}{6}, 5\ e\ \frac{1}{17}$.

Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



O conjunto $\mathbb{Q}$ é fechado em relação às operações adição, subtração e multiplicação e o conjunto $\mathbb{Q}^*$é fechado em relação à divisão também.

4.1. Representação Decimal

Consideremos a fração $\frac{a}{b}$ não inteira, isto é, na qual b não é divisor de a. Ao efetuar a divisão de a por b obtemos um número decimal. Este número pode ser um decimal exato – *quando apresenta uma quantidade finita de algarismos após a vírgula,* ou um decimal não exato – *quando apresenta uma quantidade infinita de algarismos* *após a vírgula. Se as infinitas casas decimais de um decimal não exato apresentam a regularidade de se repetirem em certo período, teremos uma dízima periódica, caso contrário, teremos uma dízima não periódica.*

Naturalmente, considera-se $x = a_0, a_1a_2a_3 \dots\ a_n0000 \dots = a_0, a_1a_2a_3 \dots\ a_n$ um decimal com n algarismos após a vírgula, uma vez que considerar uma quantidade finita ou infinita de zeros após o último algarismo decimal diferente de zero não altera o quociente obtido. Por exemplo, é claro que,

$$0{,}2451000000 \dots 0 = 02451000000 \dots (infinitos\ zeros) = 0{,}2451$$

São exemplos de decimais exatos,

$$\frac{4}{10} = 0{,}4\ e\ \frac{17}{2} = 8{,}5$$

São exemplos de dízimas periódicas,

$$\frac{1}{3} = 0{,}333 \dots e\ \frac{214}{90} = 2{,}3777 \dots$$

Pode-se utilizar as formas de representação $0{,}333 \dots = 0,\overline{3}$ e $2{,}3777 \dots = 2{,}3\overline{7}$

4.2. Conversão para frações (Frações Geratrizes)

O caso dos decimais exatos é simples,

$$a_0, a_1a_2a_3 \dots\ a_n = \frac{a_0a_1a_2a_3 \dots\ a_n}{10^n}$$

Por exemplo,

$$3{,}47 = \frac{347}{100}\ e\ 0{,}0127 = \frac{127}{10000}$$

(o número de zeros após o "1" no denominador equivale ao número de casas decimais)

Veja, por exemplo, como proceder com as dízimas periódicas 0,333 ... e 2,0323232 ...

Seja $x = 0{,}333 \dots$, assim $10x = 3{,}333$ (multiplicando-se ambos os lados por 10), subtraindo, lado a lado, a segunda equação pela primeira obtemos,

$9x = 3$, portanto, $x = \frac{1}{3}$

Agora seja $y = 2{,}0323232 \dots$, assim $10y = 20{,}323232 \dots e\ 1000y = 2032{,}323232 \dots$, subtraindo, lado a lado, a terceira equação pela primeira,

$$1000y - 10y = 2032{,}323232 \dots - 20{,}323232 \dots$$

$$990y = 2012$$

$$y = \frac{2012}{990}$$

Observe agora um método prático para realizar a conversão de dízimas periódicas em frações.

Para dízimas periódicas começando por zero, sem evasor, procede-se assim

$$0{,}232323 \dots = \frac{23}{99}$$

no numerador escreve-se o período e no denominador escreve-se o número composto de tantos algarismos "9" quantos forem os elementos do período). Veja outro exemplo, $0{,}555 \dots = \frac{5}{9}$.

Para dízimas periódicas começando ou não por zero, com ou sem evasor, procede-se assim

$$2{,}3777 \dots = \frac{237-23}{90} = \frac{214}{90}$$

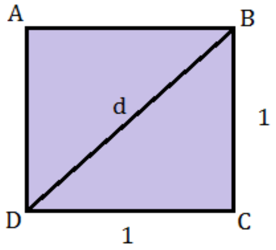
subtrai-se o número formado pelos algarismos iniciais da dizima até o fim do primeiro período, pelo número formado pelos algarismos iniciais da dízima até o último elemento que não faz parte do primeiro período, e forma-se o numerador. Já o denominador será o número composto por algarismos "9", tantos quantos forem os elementos do período, seguidos de algarismos "0", tantos quantos forem os evasores, caso existam. Veja outro exemplo,

$$1{,}04323232 \dots = \frac{10432 - 104}{9900} = \frac{10328}{9900}$$

5. O CONJUNTO $\overline{\mathbb{Q}}$

Existem números que não podem ser expressos em forma de fração. E não é trivial pensar isso. Por muito tempo na história pensou-se justamente o contrário. O teorema de Pitágoras foi personagem protagonista no reconhecimento dos números irracionais.

Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1. Digamos que a diagonal d é racional, isto é, existem a e b inteiros positivos com $b \neq 0$, tal que $d = \frac{a}{b}$ é uma fração irredutível.



Pelo teorema de Pitágoras,

$$d^2 = 1^2 + 1^1$$
$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$
$$a^2 = 2b^2$$

Como a e b são números naturais, necessariamente são pares ou ímpares. Vamos analisar a possível paridade de a e b.

Antes dessa análise consideremos as seguintes afirmações:

i) a forma geral de um número par é $2k,\ com\ k \in \mathbb{Z}$;

ii) a forma geral de um número ímpar é $2k + 1,\ com\ k \in \mathbb{Z}$;

iii) Se o número m é par, então m^2 também é par.

A fim de provar isto, tome $m = 2k$,

$$assim\ m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)(par)$$

iv) Se o número m é ímpar, então m^2 também é ímpar.

A fim de provar isto, tome $m = 2k + 1$,

$$assim\ m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1(ímpar)$$

Voltando ao caso da diagonal, vimos que

$$a^2 = 2b^2$$

Analisemos a paridade de a e b:

1º caso: a e b ímpares.

Se a é ímpar, então a^2 também é ímpar. Contradição, pois a tem fator 2 em sua decomposição.

2º caso: a é ímpar e b é par.

Análogo ao anterior.

3º caso: a é par e b é ímpar.

Se a é par, então $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ tem um fator 4 em sua decomposição. Mas como b é ímpar, segue que b^2 também é ímpar e $2b^2$ não possui fator 4 em sua decomposição. (Contradição).

4º caso: a e b são pares.

Se a e b são pares a fração $\frac{a}{b}$ não seria irredutível.

Conclui-se, portanto, que não existem tais a e b.

Como nem todos os números podem ser expressos em forma de fração, admitimos a existência do conjunto dos números irracionais (os não racionais).

Na explanação anterior vimos que a diagonal de um quadrado de lado 1 é irracional. Mas esta diagonal é $d = \sqrt{2}$, logo foi provado que $\sqrt{2}$ é irracional.

Em resumo, a maneira prática de identificar um número irracional é a seguinte:

São números irracionais:

- **Raízes não exatas $x = \sqrt[n]{r}$, e**
- **Decimais não exatos sem periodicidade.**

Por exemplo, são todos irracionais os números a seguir,

$$\sqrt{3};\ \sqrt[3]{7},\ \sqrt[13]{45}\ e\ \sqrt[2]{\sqrt[3]{7,3}}$$

E ainda,

$$0,121221222\ldots;\ 32,71289345\ldots\ e\ 21,7898998999\ldots$$

(estes últimos casos, supõe-se que não há períodos nas infinitas casas decimais sugeridas pelos "três pontinhos".

Há dois números irracionais bastante importantes na matemática. São eles o número π, que é a razão entre comprimento de uma circunferência por seu diâmetro, cuja aproximação mais comumente utilizada é $\pi \cong 3{,}14$ e o número e, base do logaritmo natural, cuja aproximação mais comumente utilizada é $e \cong 2{,}71$. O número π é amplamente estudado em geometria enquanto e será visto no estudo de exponencial e logaritmos.

6. O CONJUNTO $\mathbb{R}$

Define-se o conjunto dos números reais por

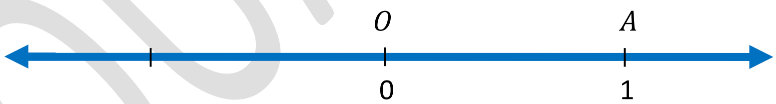
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$$

Em $\mathbb{R}$, assim como em $\mathbb{Q}$, vale a propriedade do fechamento em relação à adição, à subtração e à multiplicação. O fechamento em relação à divisão vale para $\mathbb{R}^*$.

A geometria de $\mathbb{R}$ se faz relacionando cada número real x a um ponto P da reta. A reta real não tem "buracos", isto é, cada ponto da reta está associado a um número real, de forma biunívoca.

6.1. A RETA REAL (OU EIXO REAL)

Seja uma reta na qual foi fixada a origem no ponto O = 0(zero) e o ponto A = 1(um). O segmento OA, de medida um, é a unidade. A origem divide a reta em duas semirretas, uma positiva (à direta) e outra negativa (à esquerda).



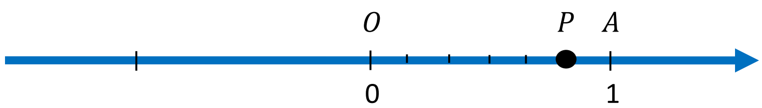
Seja P um ponto qualquer da reta e x_p o número real a ele associado.

i) Se P estiver na origem, $x_p = 0$;

ii) Se P estiver à direita de zero, $x_p > 0$. Se OA couber um número inteiro n de vezes em OP, então $x_p = n$ será um inteiro positivo;

iii) Se P estiver à esquerda de zero, $x_p < 0$. Se OA couber um número inteiro n de vezes em OP, então $x_p = -n$ será um inteiro negativo;

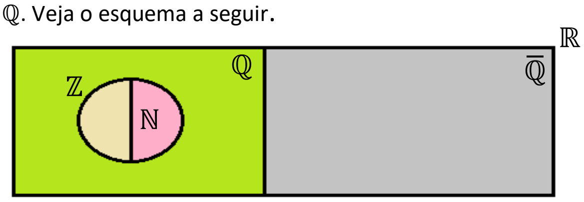
iv) Se P estiver à direita ou à esquerda de zero e OA não couber um número inteiro de vezes em OP, mas for possível subdividir OA, digamos em n partes iguais a $\frac{1}{n}$, e este segmento de medida $\frac{1}{n}$ couber m vezes em OP, então teremos $x_p = \frac{m}{n}$ (estando P à direita de zero) ou, caso contrário, teremos $x_p = -\frac{m}{n}$. Veja o exemplo ilustrativo.



Note que OA não cabe um número inteiro de vezes em OP, até mesmo porque neste exemplo temos que a medida de OP é menor que a de OA. Mas ao subdividir OA em $n = 6$ partes, vemos que o segmento de medida $\frac{1}{n} = \frac{1}{6}$ cabe $m = 5$ vezes em OP, logo P está associado ao número $\frac{m}{n} = \frac{5}{6}$.

iv) Agora se P estiver à direita ou à esquerda de zero, mas OP não se enquadrar em alguma das hipóteses anteriores, isto é, os segmentos OA e OP forem incomensuráveis. Teremos que x_p é irracional, positivo no caso de P estar à direita de zero ou negativo em caso contrário.

É imediato que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Veja o esquema a seguir.



6.2. Intervalos Reais

Intervalos Reais, ou simplesmente Intervalos, são subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos a partir de dois números a e b, com $a < b$, da seguinte maneira,

Intervalo Aberto de Extremos a e b

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

Graficamente,

Intervalo Fechado de Extremos a e b

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

Graficamente,

Intervalo Fechado a Esquerda e Aberto a Direita

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

Graficamente,

Intervalo Aberto a Esquerda e Fechado a Direita

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

Graficamente,

Há ainda os seguintes intervalos,

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$$

$$] \, a, +\infty \, [= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$$

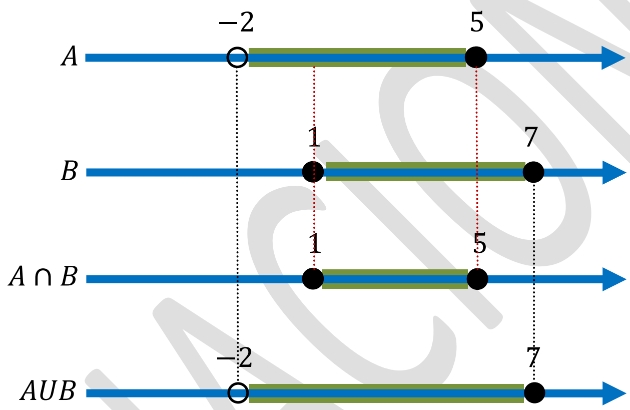
Veja como ficaria o modelo gráfico de $[\, a, +\infty \, [$

Pense em como seria os demais modelos gráficos e os desenhe.

6.3. Operações com intervalos

Como os intervalos reais são conjuntos, vale também para eles, as operações de União, Intersecção, Diferença e Complemento. Veja um exemplo,

Dados os conjuntos $A =]-2, 5] \; e \; B = [1, 7]$, vamos determinar $A \cap B$ e $A \; U \; B$.



Temos que $A \cap B = [1, 5]$ e $A \cup B =]-2, 7]$.

7. AXIOMATIZAÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS

No início do capítulo foi abordado o conjunto $\mathbb{N}$. Estenderemos um pouco o conceito sobre este conjunto.

7.1. Os axiomas de Peanno

Enunciaremos a seguir os **Axiomas de Peano,** sem nos aprofundar. Estes axiomas são os pilares de toda a teoria dos números naturais. Daremos destaque exclusivo ao terceiro axioma. Este, quando enunciado sob a forma de proposições, constitui uma excelente ferramenta para demonstrações relativas a números naturais. Demonstrações que se utilizam deste axioma são denominadas *provas por indução finita,* ou simplesmente *provas por indução.* Para maiores elucidações sobre a axiomatização dos números naturais aconselhasse a leitura do artigo sobre o Princípio da Indução Finita, de Elon Lages Lima, na revista *EUREKA, nº3,* de 1998 ou outras fontes.

Considere, primitivamente, isto é, sem requerer definição, um conjunto N cujos elementos n são chamados de números naturais e uma função, chamada sucessor, $s: N \to N$ tal que $n \to (n+1)$, sendo $(n+1)$ denominado o sucessor de n.

A função sucessor s satisfaz os seguintes axiomas:

i) s é injetiva – Se $a \neq b$ então $s(a) \neq s(b)$(números naturais distintos possuem sucessores distintos);

ii) $N - s(N)$ é um conjunto unitário. (Existe um único número natural, representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro número natural);

iii) (Axioma da Indução) Se $A \subset N$, $1 \in A$ e $\forall\, a \in A$, ocorre também $a + 1 \in A$, então $A = N$ (Se um subconjunto de N possui o número 1 e tem a propriedade de possuir o sucessor de todos os seus elementos, então ele é o próprio N.

O terceiro axioma de Peano pode também ser enunciado como a seguir:

7.2. O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

Seja $P(n)$ uma proposição relativa a números naturais. Suponha que:

*$P(1)$ é verdadeira, e

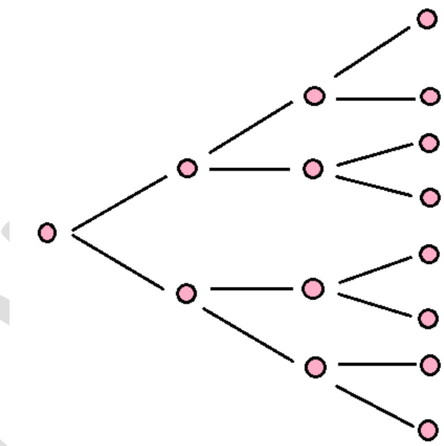
*Se $P(n)$ é verdadeira, para algum n, segue-se que $P(n+1)$ também é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todos os números naturais.

Veja agora, uma aplicação desta poderosa ferramenta:

1. A árvore genealógica da família Pereira tem uma característica bem singular. Cada indivíduo tem sempre dois filhos e cada um dos dois filhos tem sempre dois filhos também, e assim sucessivamente. Quantos descendentes terá a 3ª geração da família Pereira? E a enésima geração

Determinar o número de descendentes da 3ª geração é uma tarefa bem simples. Pode-se montar um gráfico, como a seguir, e contar o número de descendentes de cada geração, teremos uma solução investigativa. Já para a segunda pergunta, a história é outra, não dá para simplesmente contar o número de descendentes, pois a pergunta exige uma resposta literal. Veja o gráfico e a tabela que expõe os resultados nele obtidos:



GERAÇÃO	DESCENDENTES
1	2
2	$4=2^2$
3	$8=2^3$
...	...

A terceira geração terá 8 descendentes. Quanto à segunda pergunta, temos uma boa suspeita para a resposta: na enésima geração teremos 2^n descendentes. Mas isso tem que ser provado. Vamos a demonstração por indução:

$P(1)$ significa que a 1ª geração tem dois descendentes. O que é verdade pelo nosso gráfico;

Suponha que $P(n)$ é verdadeira, isto é, a enésima geração tem 2^n descendentes. Como, por hipótese, cada indivíduo tem sempre dois filhos, uma geração qualquer sempre terá o dobro de indivíduos da geração anterior. Logo, a geração de ordem $(n+1)$ terá $2.2^n = 2^{n+1}$ elementos. Conclui-se, portanto, que $P(n+1)$ é verdadeira e assim, por indução, a proposição vale para qualquer número natural.

Isto significa que, de fato, a enésima geração da família Pereira terá 2^ndescendentes.

2(UNICAMP-1997) A desigualdade de Bernoulli: Seja x um número real, $x > -1$.

Para todo natural n temos $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Vamos à prova por indução:

Seja $P(n)$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

$P(1)$: $(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1.x$, é verdadeira.

Suponha que $P(n)$ é verdadeira. Como

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2$ e observando que $nx^2 \geq 0$, temos que:

$(1+x)^{n+1} = 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + x + nx = 1 + (n+1)x$, portanto $p(n+1)$ é verdadeira, e assim, por indução, a desigualdade de Bernoulli está provada.