# Funções

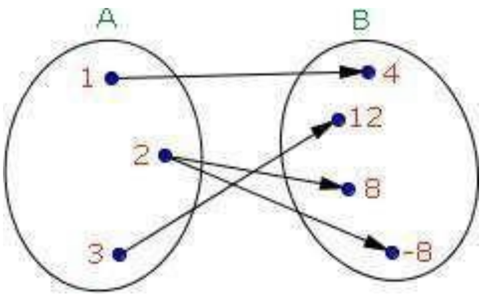
## Definição e Notação

Uma função é estabelecida por uma relação entre dois conjuntos. Esta relação é definida por uma lei de formação. Ou seja, dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento x pertencente a A a um único elemento y pertencente a B.

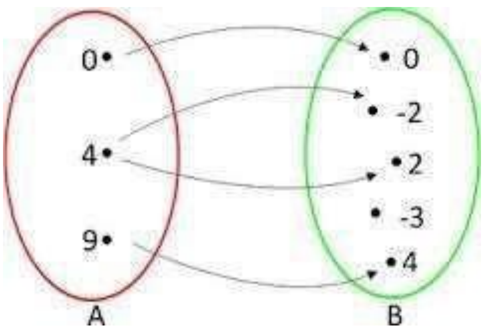

Usando a seguinte notação, temos:
F: A ---> B (lê-se: f é uma função de A em B)

**Exemplo:**

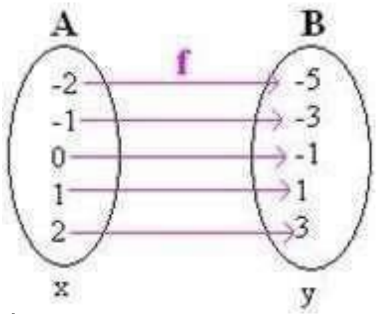
1. Quais dos diagramas a seguir se enquadra na definição de função de A em B. Justifique.




Não é função, pois o elemento 2 (pertencente a A) está associado a mais de um elemento do conjunto B.



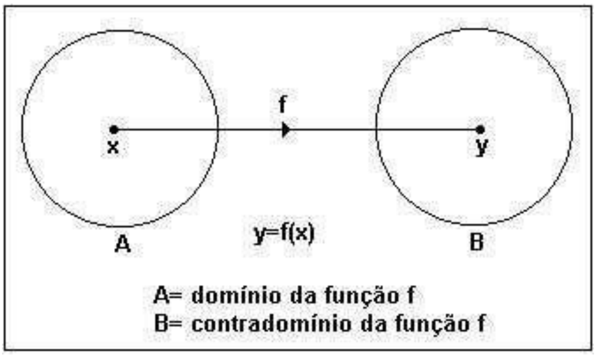

Não é função pelo mesmo motivo expresso anteriormente.




É um exemplo de função.

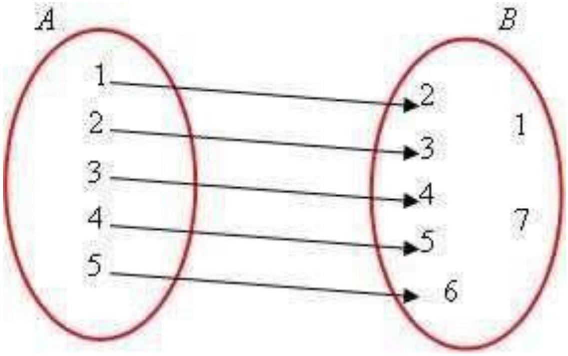
## Domínio, Contradomínio e Conjunto Imagem

Dada uma função f de A em B, o conjunto A chama-se domínio da função (denotamos por D) e o conjunto B, chama-se contradomínio (CD) da função. Para cada x pertencente a A, o elemento y pertencente a B chama-se imagem de x pela função f ou o valor assumido pela função f para x pertencente a A, e o representamos por f(x).
Assim, temos que f(x)=y. O conjunto de todos os y assim obtidos é chamado conjunto imagem da função f e é indicado por Im(f).




**Exemplo:**

Dada a função f(x) = x + 1, e os conjuntos A = (1, 2, 3, 4, 5) e B = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Vamos construir o diagrama de flechas:




Neste exemplo, temos que:
**Domínio:** representado por todos os elementos do conjunto A, a saber: (1, 2, 3, 4, 5).

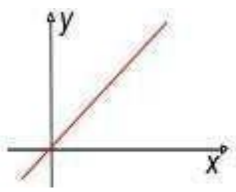
**Contradomínio:** representado por todos os elementos do conjunto B, a saber:
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

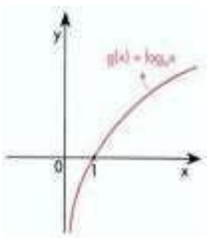
**Imagem:** representada pelos elementos do contradomínio (conjunto B) que possuem correspondência com o domínio (conjunto A), a saber: (2, 3, 4, 5, 6).

**Função Crescente, Decrescente e Constante**

**1) Função Crescente**

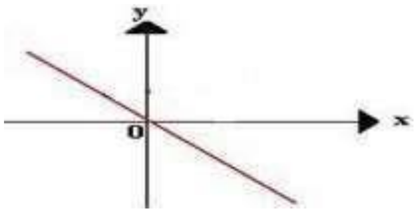
Dizemos que uma função é crescente quando:
Dados $x_2 > x_1$ implica que $f(x_2) > f(x_1)$. Ou seja, quanto maior for o valor dado a x, maior será o valor correspondente dado a y=f(x).

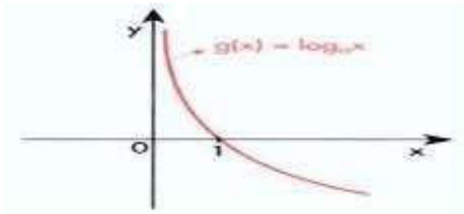


**2) Função Decrescente**

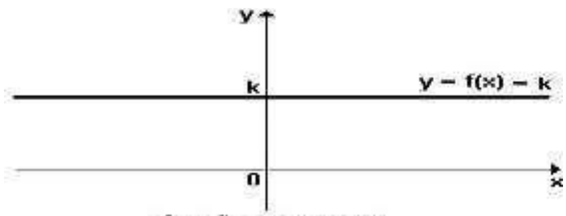
Dizemos que uma função é decrescente quando:
Dados $x_2 < x_1$ implica que $f(x_2) < f(x_1)$. Ou seja, quanto maior for o valor dado a x, menor será o valor correspondente dado a y=f(x).



**3) Função Constante**

Dizemos que uma função é constante quando:
F(x)=k, onde k independente de x, ou seja, é um termo independente.




função constante

**Função Injetiva (ou Injetora), Sobrejetiva (ou Sobrejetora) e Bijetiva (ou Bijetora)**

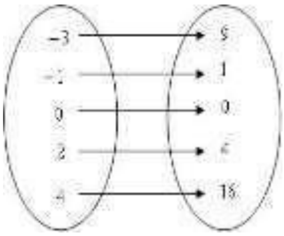
**1) Função Injetiva**

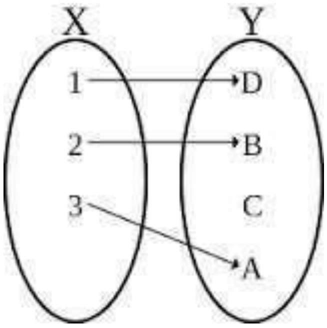
Uma função f: A--->B é injetiva quando elementos diferentes de A são transformados por f em elementos diferentes de B, ou seja, não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A. Assim, f é injetiva quando:

$x_1 \neq x_2$ em A ---> $f(x_1) \neq f(x_2)$ em B

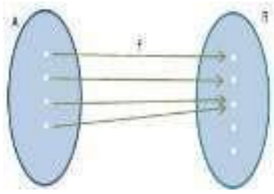
ou
$f(x_1) = f(x_2)$ em B ---> $x_1 = x_2$ em A

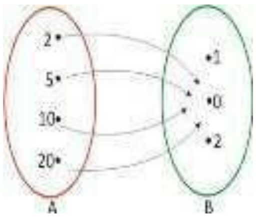
**Exemplos de Funções Injetivas:**
**Exemplos**






**Exemplos de Funções que não são Injetivas:**

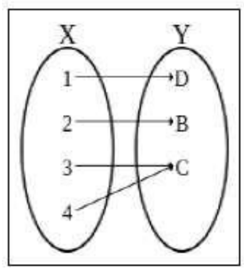


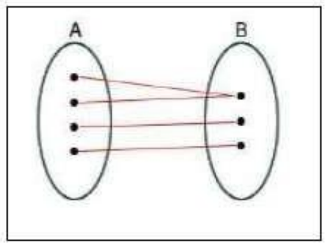



**2) Função Sobrejetiva**

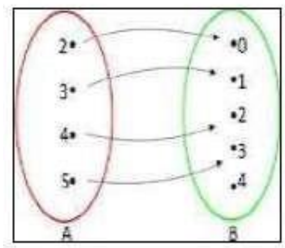
Uma função f: A--->B é sobrejetiva quando, para qualquer elemento y pertencente a B, pode-se encontrar um elemento x pertencente a A tal que f(x) = y. Ou seja, f é sobrejetiva quando todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A, isto é, quando Im(f)=B.

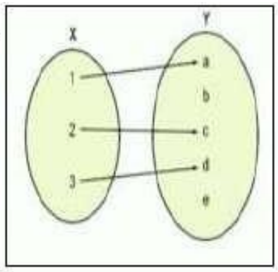
**Exemplos de Funções Sobrejetivas:**




**Exemplos de Funções que não são sobrejetivas:**

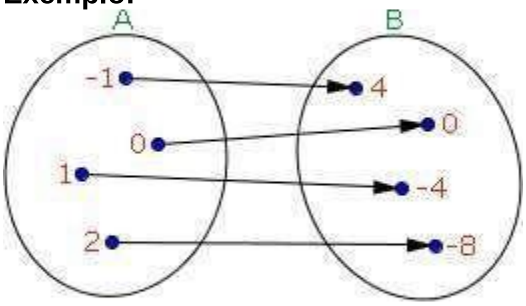



**Observação:** A função é sobrejetiva quando o conjunto contradomínio for igual ao conjunto imagem.

**3) Função Bijetiva**
Uma função f: A--->B é bijetiva se ela for, de forma simultânea, injetiva e sobrejetiva.
Quando isso ocorre dizemos que há uma bijeção ou uma correspondência biunívoca entre A e B

**Exemplo:**



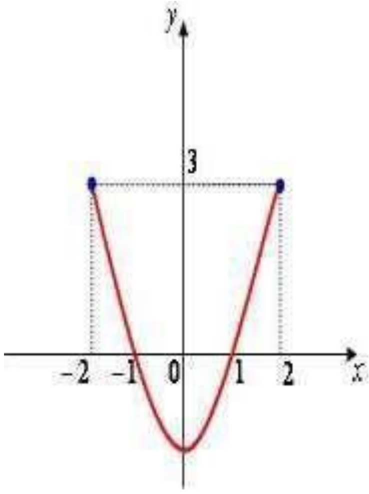

Esta função tem:
Domínio: D(f) = { -1, 0, 1, 2 }
Contradomínio: CD(f) = { 4, 0, -4, -8 }
Conjunto Imagem: Im(f) = { 4, 0, -4, -8 }
Esta função é dada por:

$$f: A \to B,\ f(x) = -4x$$

Ao substituirmos x em -4x, por cada um dos elementos de A, iremos encontrar os respectivos elementos de B, sem que sobrem elementos em CD(f) e sem que haja mais de um elemento do D(f) com a mesma Im(f). Logo, essa função é tanto injetora, quanto sobrejetora. E, portanto, f é bijetora.

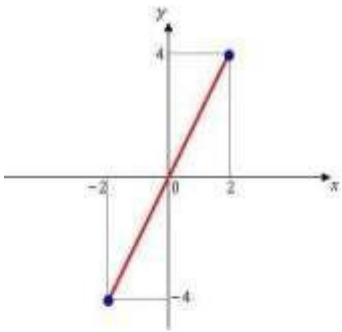
**Função Par e Função Ímpar**
**1) Função Par**
Uma função é dita função par se:
F(x) = f(-x), para todo x pertencente ao domínio da função.

**Exemplo:**
**F(x) = $x_2$ - 1**
F(-x) = $(-x)_2$ – 1 = $x_2$ – 1
Observe que temos, nesta função quadrática, f (-x) = f(x). Logo, f(x) = $x_2$ – 1 é uma função par.
Veja um exemplo numérico:
f(–1) = $(–1)^2$ – 1= 1 – 1 = 0
f(1) = $1^2$ – 1 = 1 – 1 = 0
f(–2) = $(–2)^2$ –1 = 4 – 1 = 3
f(2) = $2^2$ – 1 = 4 – 1 = 3
Veja sua representação gráfica:




**Observação:** O gráfico de f(x) = $x_2$ – 1 é simétrico em relação ao eixo da ordenadas (eixo y).
**2) Função Ímpar**
Uma função é dita função ímpar se: F(x) = - f(-x), para todo x pertencente ao domínio da função.

**Exemplo:**
**F(x) = 2x**
F(-x) = 2 . (-x) = -2x
= - (2x) = - f(x)
Observe que temos, nesta função polinomial do 1° grau, f(x) = - f(-x). Logo, tal função é uma função ímpar.
Veja um exemplo numérico:
f(–2) = 2 . (–2) = – 4
f(2) = 2 . 2 = 4
Veja sua representação gráfica:



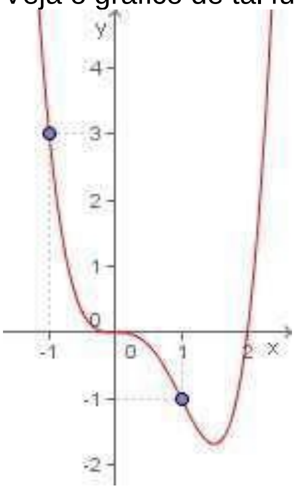
**Observação**: Note que o gráfico da função em questão é simétrico em relação à origem.

**ATENÇÃO: Existem funções que não são nem pares e nem ímpares.**
Exemplo: Considere a função f(x) = $x_4 - 2.x_3$
F(-x) = $(-x)_4 - 2.(-x)_3 = x_4 + 2.x_3$
Note que f(x) é diferente tanto de f(-x), quanto de –f(-x). Logo, tal função não é nem par e nem ímpar.

$$\begin{cases} f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 = -1 \\ f(-1) = -1^4 - 2 \cdot -1^3 = 3 \end{cases}$$

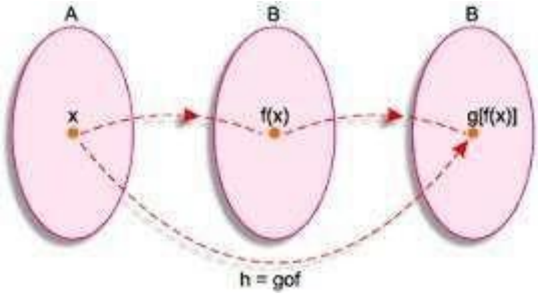
$$\boxed{f(x) = x^4 - 2x^3}$$

**Veja o exemplo numérico:**
No caso de ser uma função par teríamos que f(x) = f(-x), ou seja, as imagens de x = 1 e de x = -1, por exemplo, deveriam ser iguais, mas: não é uma função.
Para que ela fosse uma função ímpar teríamos que -f(x) = f(-x), ou seja, as imagens de x = 1 e de x = -1, por exemplo, deveriam ser opostas uma da outra, mas acabamos de verificar acima que isto também não ocorre.
Portanto também não é
uma função ímpar.
Veja o gráfico de tal função:




Observe que tal gráfico não é simétrico nem em relação à origem e nem em relação ao eixo das ordenadas (eixo y).

**Função Composta**
Sejam as funções f: A → B e g: B → C. Denominamos função composta de f com g a função h: A → C, tal que h(x) = g(f(x)) ou gof. A função composta pode ser interpretada como a determinação de uma terceira função C, formada pela junção das funções A e B.



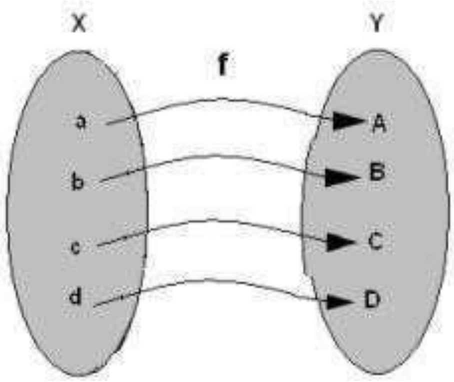

**Exemplos:**
**A)** Considere as funções s f(x) = x + 2 e g(x) = 4x² – 1. Determine g(f(x)) e f(g(x)).
1°) (g o f)(x) = g(f(x))
g(x) = 4x² – 1
g(x + 2) = 4 . (x + 2)² – 1

g(x + 2) = 4 . (x + 2) . (x + 2) – 1 g(x + 2) = 4 . (x² + 2x + 2x + 4) – 1 g(x + 2) = 4 . (x² + 4x + 4) – 1
g(x + 2) = 4x² + 16x + 16 – 1
g(x + 2) = 4x²+ 16x + 15
**(g o f)(x) = g(f(x)) = *4x² + 16x + 15***
**2°) (f o g)(x) = f(g(x))**
f(x) = x + 2
f(4x² – 1) = (4x² – 1) + 2
f(4x² – 1) = 4x² – 1 + 2
f(4x² – 1) = 4x² + 1
**(f o g)(x) = f(g(x)) = 4x² + 1**

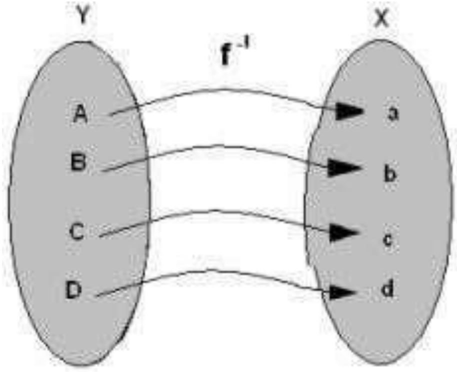
**B)** Considere as funções f(x) = 4x e g(x) = x² + 5, determine:
**a) g o f**
(g o f)(x) = g(f(x))
g(x) = x² + 5 g(4x)
= (4x)² + 5 g(4x)
= 16x² + 5
(g o f)(x) = g(f(x)) = **16x² + 5**

**b) f o g**
(f o g)(x) = f(g(x))
f(x) = 4x
$f(x^2 + 5) = 4 . (x^2 + 5)$
$f(x^2 + 5) = 4x^2 + 20$
$(f o g)(x) = f(g(x)) = 4x^2 + 20$

**Função Inversa**
Função inversa nada mais é do que um desfazer da operação executada pela função f. A função inversa cria funções a partir de outras. Vale ressaltar que, uma função somente será inversa se for bijetora, isto é, os pares ordenados da função f deverão pertencer à função inversa $f_{-1}$ da seguinte maneira: (x,y) Є $f_{-1}$ (y,x) Є f.
Observe que na função inversa, temos que: o domínio de f será a imagem de $f_{-1}$, e a imagem de f será o domínio de $f_{-1}$. Vamos a um exemplo para entendermos melhor:
Seja o conjunto X = {a, b, c, d ,e} e Y = { A, B, C, D, E}, definida como a função f que associa cada letra minúscula ao seu correspondente em maiúsculo.




Note que esta função é bijetora. Logo, a mesma admite inversa.
f = { (a,A), (b,B), (c,C), (d,D), (e,E) }
Domínio de f é: Dom(f) = X
Imagem de f é: Im(f) = Y.
Vamos, então, definir uma função $f_{-1}$ como sendo a função que associa cada letra maiúscula ao seu correspondente em minúsculo.




Assim também temos uma função bijetora do tipo:
f = { (A.a) , (B,b) , (C,c) , (D,d) , (E,e) }
Domínio de f é: Dom($f_{-1}$) = Y e
Imagem de f é: Im($f_{-1}$) = X

**Como encontrar a Função Inversa?**
Sendo uma função bijetora f(x) = y teremos que a inversa de f, que será representada por $f_{-1}$, será f(y) = x, ou seja $f_{-1}(x) = y$. Em outras palavras, para encontrarmos a inversa de uma função (quando a mesma admitir, é claro) devemos trocar a incógnita x pela incógnita y e vice versa, objetivando isolar a incógnita y, que será nossa função inversa
$f_{-1}(x)$.

**Exemplos:**
**1)** Dada a função f(x) = 3x -5, primeiro certifique-se de que, de fato ela é bijetora. Após, para determinarmos a sua inversa $f_{-1}(x)$ iremos trocar x e y na expressão y = 3x – 5. Assim teremos x = 3y – 5. E agora iremos isolar a incógnita y. Veja:
x = 3y – 5
–3y = –x –5 (multiplicar por –1)
3y = x + 5
y = (x + 5)/3
Portanto, a função f(x) = 3x -5 tem inversa igual a

$f_{-1}(x) = (x + 5)/3$.

**2)** Encontre a função inversa da função f(x) = (2x+3)/(3x–5), para x ≠ 5/3.
Bem, certifique-se de que, de fato, tal função é bijetora. Após, realizaremos a troca entre x e y na expressão y = (2x+3)/(3x–5). Assim:
x = (2y+3)/(3y–5)
x.(3y–5) = 2y + 3
3yx – 5x = 2y + 3
3yx – 2y = 5x + 3
y(3x – 2) = 5x + 3
y = (5x+3)/(3x–2), para x ≠ 2/3, pois o denominador tem que ser diferente de zero.

**EXERCÍCIOS**

**1)** Julgue a afirmação: "Toda função par é injetora"!

**2) (EsPCEx)** Seja f: R ---> R uma função tal que –2 ≤ f(x) ≤ 5 e g: R ---> R dada por g(x) = 1 – f(x). Então, o conjunto imagem da função g(x) é:
A) ]-4, 3] B) [-4, 3]
C) ]-4, 3[ D) [-3, 4[
E) ]-3, 4]

**3) O conjunto solução da equação abaixo é:**

$\sqrt{3}/\,x^2 - 1 = \sqrt{3}/2x - 2 + \sqrt{3}/\,2x+2?$

A) R B) R - (-1, 1)

C) R - [-1, 1] D) R - {-1, 1}

E) R - [-1, 1]

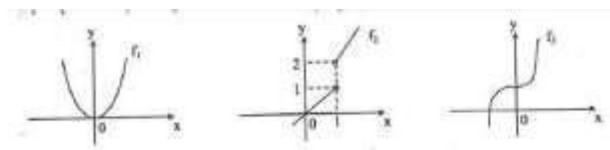
**4) EsPCEx)** Sendo f: R ---> R definida por f(x) = 1/x, se x pertence ao z* e f(x) = 2, se x pertence a R – Z* e g: R ---> R definida por g(x) = -1, se x pertence a Q e g(x) = ½, se x pertence a R – Q, então $(fogofog)(2+\sqrt{2})$ é:

a)-1 b) ½ c) 2 d) 1-$\sqrt{2}$

**5) (EsFAO)** Sendo f(x) = (ax+b)/x-a; (fof) (x) é igual a:
A) x + b
B) bx + a
C) x
D) 1/x
E) (ax + b) / x – a

**6)(EPCAR)** A inversa da função f(x) = (x+3) / (x-1) é:
A) $f_{-1}$(x) = (x-1) / (x-3)
B) $f_{-1}$(x) = (x+3) / (x-1)
C) $f_{-1}$(x) = (3-x) / (x+1)
D) $f_{-1}$(x) = (3-x) / (1-x)

**7) (EPCAR)** Sejam as funções $f_1$, $f_2$ e $f_3$ abaixo representadas:



Considere as afirmações:
I) $f_1$ admite inversa
II) $f_2$ é uma função crescente
III) $f_3$ é sobrejetora
Associe a cada uma delas o valor verdade V se for verdadeiro, e F caso seja falso. Nessa ordem, tem-se:
A) V,V,F
B) V,F,V
C) F,V,V
D) F,F,V

**8) (EsPCEx)** Na função f(x) = 3x – 2, sabemos que f(a) = b – 2 e f(b) = 2b + a. O valor de f(f(a)) é:
A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

**9)(EsPCEx)** Se f é uma função real, tal que:

I) f(a+b) = f(a) . f(b)

II) f(1) = 2

III) f ($\sqrt{2}$ ) = 4, então é possível afirmar que f( 3+ $\sqrt{2}$ ) vale:

**10) (ITA)** Seja D = R - {1} e f: D ---> D uma função dada por f(x) = (x+1) / (x-1). Considere as afirmações:

I) f é injetiva e sobrejetiva

II) f é injetiva, mas não sobrejetiva

III) f(x) + f(1/x) = 0, para todo x pertencente a D, com x diferente de 0.

IV) f(x).f(-x) = 1, para todo x pertencente a D. Então, são verdadeiras:

A) apenas I e III

B) apenas I e IV

C) apenas II e III

D) apenas I, III e IV

E) apenas II, III e IV

**11) (AFA)** Sejam A = {0, 1, 2, 3} e f: A---> A

uma função definida por f(0) = 1, f(1) = 2, f(2)

= 3 e f(3) = 0. Calculando fofofofof(1), encontra-se:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3