APLICAÇÕES DA DERIVADA

1. TESTE DE MONOTONICIDADE

Seja f uma função contínua no intervalo I.

Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente crescente no intervalo I.

Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente decrescente no intervalo I.

Exemplo: Identifique os intervalos de crescimento ou decrescimento da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

Se $\frac{1}{3} < x < 1$, então $f'(x) < 0$. Portanto, f é decrescente em $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$.

Se $x < \frac{1}{3}$ ou $x > 1$, então $f'(x) > 0$. Portanto, f é crescente em $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ e $\left]1, +\infty\right[$.

2. MÁXIMOS E MÍNIMOS DE UMA FUNÇÃO

Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que p é um ponto de **máximo local** de f, se existir $r > 0$ tal que

$$\mathbf{f(x) \le f(p),\ \forall x \in \left]p - r, p + r\right[\cap D_f}.$$

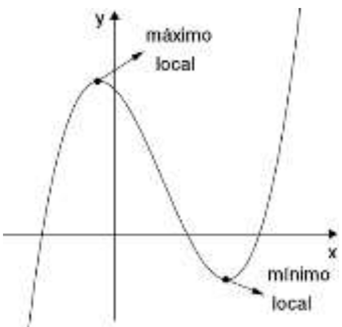
Isso significa que todos os valores da função nas “proximidades” de p são menores ou iguais a $f(p)$.

Por outro lado, dizemos que p é um ponto de **mínimo local** de f se existir $r > 0$ tal que

$$\mathbf{f(x) \ge f(p),\ \forall x \in \left]p - r, p + r\right[\cap D_f}.$$

Isso significa que todos os valores da função nas “proximidades” de p são maiores ou iguais a $f(p)$.

Observe as duas situações descritas na figura a seguir:



No gráfico ao lado, nenhum dos dois pontos indicados é máximo ou mínimo absoluto, apenas local.

OBSERVAÇÃO

Uma forma de identificar máximos e mínimos locais é estudar o sinal da primeira derivada. Quando a primeira derivada é positiva antes de um ponto e negativa depois, esse é um ponto de máximo local. Quando a primeira derivada é negativa antes de um ponto e positiva depois, esse é um ponto de mínimo local.

Exemplo: Determine os máximos e mínimos locais de $f(x)=x^3-3x^2+3$.

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

Logo, f cresce de $]-\infty,0[$, decresce de $]0,2[$ e cresce de $]2,+\infty[$.

Portanto, $x=0$ é abscissa de um ponto de máximo local e $x=2$ é abscissa de um ponto de mínimo local.

O termo genérico para os pontos de máximo ou mínimo de uma função é **pontos extremos**.

Teorema: Uma **condição necessária** para a existência de um ponto extremo é que a primeira derivada $f'(x)$ seja igual a zero ou não exista.

Atente para o fato que primeira derivada nula ou inexistente não garante a existência um ponto extremo. Trata-se de uma condição necessária, mas não suficiente!

OBSERVAÇÃO

Os pontos nos quais a primeira derivada é nula ou não existe são chamados pontos críticos.

Teorema (Teste da derivada segunda): Seja uma função $f(x)$ derivável até a segunda ordem em um ponto crítico x_0, ou seja, onde $f'(x_0)=0$.

Se $f''(x_0)<0$, então x_0 é abscissa de um ponto de máximo local;

Se $f''(x_0)>0$, então x_0 é abscissa de um ponto de mínimo local; e

Se $f''(x_0)=0$, então a existência de um ponto extremo em x_0 permanece em aberto.

Teorema: Sejam $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ e $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

- Se n é par e $f^{(n)}(x_0)<0$, então x_0 é abscissa de um ponto de máximo local.

- Se n é par e $f^{(n)}(x_0)>0$, então x_0 é abscissa de um ponto de mínimo local.

- Se n é ímpar, então não há ponto extremo em x_0.

Esse último teorema apresenta uma condição necessária e suficiente para a determinação de pontos extremos.

Exemplo: Encontre e caracterize os pontos extremos de $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$.

Devemos inicialmente identificar as raízes da derivada primeira da função.

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$

Vamos agora identificar o sinal da derivada segunda em cada uma das raízes da derivada primeira.

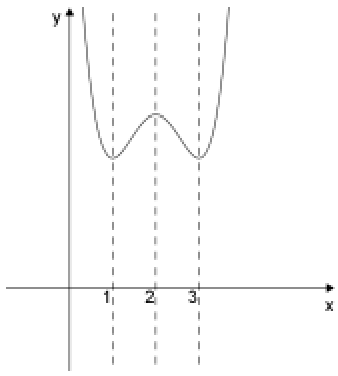
$f''(x) = 12x^2 - 48x + 44$

$f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow x = 1$ é abscissa de um ponto de mínimo local

$f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow x = 2$ é abscissa de um ponto de máximo local

$f''(3) = 8 > 0 \Rightarrow x = 3$ é abscissa de um ponto de mínimo local

Observe os pontos extremos de f no gráfico a seguir:

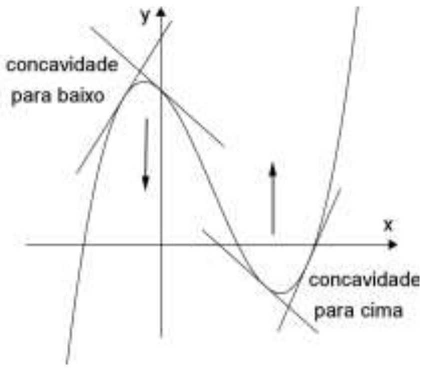


3. CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO

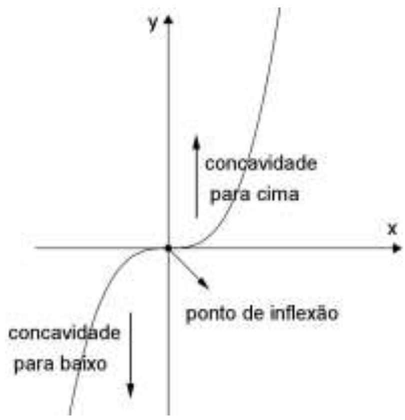
Seja f uma função derivável no intervalo aberto I e $p \in I$. A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é uma função $T(x)$ dada por: $T(x) = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$.

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima no intervalo aberto I, se $f(x) > T(x)$, $\forall x \in I$, $x \neq p$.

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo (convexa) no intervalo aberto I, se $f(x) < T(x)$, $\forall x \in I$, $x \neq p$.



Definição: Sejam f uma função e $p \in D_f$, com f contínua em p. Dizemos que p é um **ponto de inflexão** de f, se $\exists a,b \in \mathbb{R}$, $p \in]a,b[\subset D_f$ tal que f tenha concavidades de nomes contrários em $]a,p[$ e $]p,b[$, ou seja, se ocorre mudança de concavidade em p.



Teorema: Seja f uma função derivável até a 2^a ordem no intervalo aberto I.

Se $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, então o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em I (função côncava em I).
Se $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, então o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em I (função convexa em I).

Teorema: Seja f derivável até a 3^a ordem no intervalo aberto I e seja $p \in I$. Se f''' é contínua em p, $f''(p) = 0$ e $f'''(p) \neq 0$, então $(p, f(p))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f.

Exemplo: Encontre os intervalos nos quais a função é côncava ou convexa e identifique os pontos de inflexão de $f(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$.

Vamos analisar o sinal da derivada segunda da função.

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 6x - 36$$

Se $x \in]-\infty, -2[$, então $f''(x) > 0$ e o gráfico de f tem concavidade para cima (côncavo).

Se $x \in \left]-2, \frac{3}{2}\right[$, então $f''(x) < 0$ e o gráfico de f tem concavidade para baixo (convexo).

Se $x \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$, então $f''(x) > 0$ e o gráfico de f tem concavidade para cima (côncavo).

Ocorrem mudanças de concavidade em $x = -2$ e $x = \frac{3}{2}$ que são, portanto, abscissas de pontos de inflexão.

4. ASSÍNTOTAS

A reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** ao gráfico de f se, e somente se, $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$.

A reta $y = mx + n$ é uma assíntota ao gráfico de f se, e somente se, $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$.

Se $m = 0$, a reta é uma **assíntota horizontal**; e se $m \neq 0$, a reta é uma **assíntota oblíqua**.

OBSERVAÇÃO

Se $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios, então o gráfico de f admitirá assíntota se $\partial(p) - \partial(q) \leq 1$.

Se $\partial(p) - \partial(q) \in \{0, 1\}$, então basta efetuar a divisão dos polinômios para encontrar a assíntota.

Se $\partial(p) - \partial(q) < 0$, então a assíntota é a reta $y = 0$.

Método geral para obtenção das assíntotas
1°. Calcular o limite $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$
2°. Com o valor de m encontrado no limite anterior, calcular $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx] = n$.
3°. Se m e n são finitos, então a reta $y = mx + n$ é uma assíntota ao gráfico de f.

Exemplo: Encontre as assíntotas ao gráfico de $y = \sqrt{4x^2 + x + 1}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}+x+1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{1}{4}$$

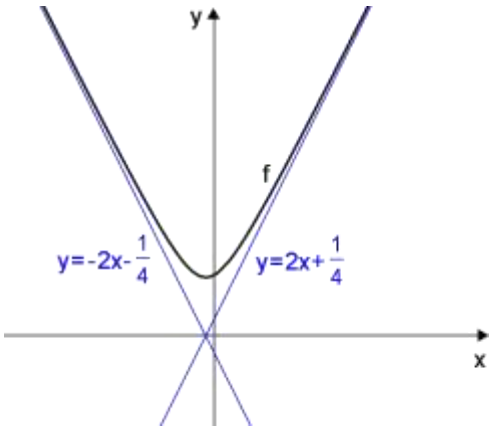
Logo, $y=2x+\frac{1}{4}$ é uma assíntota quando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{4x^2}+x+1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2}=-\frac{1}{4}$$

Logo, $y=-2x-\frac{1}{4}$ é uma assíntota quando $x\to-\infty$.

Observe o gráfico a seguir que representa a situação do exemplo.



5. MÉTODO BÁSICO PARA A CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

1°. Identificar o domínio de definição da função;
2°. Identificar se a função é par, ímpar ou periódica;
3°. Testar a continuidade da função e encontrar os pontos de descontinuidade.
4°. Encontrar as assíntotas ao gráfico;
5°. Encontrar os pontos extremos da função e calcular o valor da função nesses pontos;
6°. Estudar a concavidade da função e identificar seus pontos de inflexão.

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (EN 2003) De um ponto P do cais, João observa um barco AB ancorado. Para um sistema de eixos ortogonais os pontos A e B têm coordenadas respectivamente iguais a (0, 20) e (0, 40), enquanto P encontra-se no semieixo positivo das abscissa. Se o ângulo $A\hat{P}B$ de observação é máximo, então a abscissa de P é igual a:

a) $20\sqrt{2}$

b) $20\sqrt{3}$

c) 20

d) 15

e) 10

2. (EN 2003) Seja $f(x)=\begin{cases} e^x - a\cdot e^{3x}, \text{ se } x\le 0 \\ b+2\operatorname{sen}x+\cos 2x, \text{ se } 0<x\le 2\pi \end{cases}$.

I. Sabendo-se que f é uma função contínua em $x=0$ e que $x=-\ln 3$ é um ponto crítico desta, calcule as constantes reais a e b.

II. Substituindo-se na função f os valores de a e b encontrados em I), determine:

a) Todos os pontos críticos de f.

b) Os pontos de máximo e mínimo relativos da função f.

3. (EN 2006) Um recipiente cilíndrico que deve ter $1\,m^3$ de volume vai ser construído nas oficinas do Arsenal de Marinha, para atender a um dos navios da MB. Na lateral e na tampa, será utilizado um material cujo preço é R\$ 1.000,00 por m^2 e, no fundo, um material cujo preço é R\$ 2.000,00 por m^2. Que dimensões deve ter o recipiente, para que a MB tenha a menor despesa possível?

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}\,m$ e $\frac{1}{3\pi^2}\,m$

b) $\frac{1}{3\sqrt[3]{\pi}}\,m$ e $\frac{1}{9\pi\sqrt[3]{\pi^2}}\,m$

c) $\frac{1}{\pi\sqrt[3]{3}}\,m$ e $\frac{1}{\sqrt[3]{9\pi^2}}\,m$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}\,m$ e $\sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}\,m$

e) $\frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}\,m$ e $\frac{1}{\pi\sqrt[3]{9\pi^2}}\,m$

4. (EN 2007) O cone circular reto, de volume mínimo, circunscrito a um hemisfério de raio R e apoiado no plano diametral, tem por volume o número real

a) $\frac{\pi}{3}R^3$

b) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^3$

c) πR^3

d) $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi R^3$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi R^3$

5. (EN 2008) O valor mínimo relativo da função f, de variável real x, definida por $f(x)=\frac{a^2}{\text{sen}^2 x}+\frac{b^2}{\cos^2 x}$, onde $a,b \in \mathbb{R}^*$, vale

a) $(a+2|b|)^2$

b) a^2+b^2

c) $2|ab|$

d) $(|a|+|b|)^2$

e) $2(a+b)^2$

6. (EN 2011) Seja L uma lata de forma cilíndrica, sem tampa, de raio da base r e altura h. Se a área da superfície de L mede $54\pi a^2\text{ cm}^2$, qual deve ser o valor de $\sqrt{r^2+h^2}$, para que L tenha volume máximo?

a) $a\text{ cm}$

b) $3a\text{ cm}$

c) $6a\text{ cm}$

d) $9a\text{ cm}$

e) $12a\text{ cm}$

7. (EN 2013) Considere a função real de variável real definida por $f(x)=3x^4-4x^3+5$. É verdade afirmar que

a) f tem um ponto de mínimo em $]-\infty,0[$.

b) f tem um ponto de inflexão em $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

c) f tem um ponto de máximo em $\left[0,+\infty\right[$.

d) f é crescente em $\left[0,1\right]$.

e) f é decrescente em $\left[-1,2\right]$.

8. (EN 2015) A concentração de um certo remédio no sangue, t horas após sua administração, é dada pela fórmula $y(t)=\frac{10t}{(t+1)^2}$, $t\geq 0$. Em qual dos intervalos abaixo a função $y(t)$ é crescente?

a) $t\geq 0$

b) $t>10$

c) $t>1$

d) $0\leq t<1$

e) $\frac{1}{2}<t<10$

9. (EN 2015) Considere a função real $f(x)=x^2e^x$. A que intervalo pertence a abscissa do ponto de máximo local de f em $\left]-\infty,+\infty\right[$?

a) $\left[-3,-1\right]$

b) $\left[-1,1\right[$

c) $\left]0,\frac{1}{2}\right]$

d) $\left]1,2\right]$

e) $\left]2,4\right]$

10. (EFOMM 2013) O gráfico de $f(x)=(x-3)^2\cdot e^x$, $x\in\mathbb{R}$, tem uma assíntota horizontal r. Se o gráfico de f intercepta r no ponto $P=(a,b)$, então $a^2+b\cdot e^{\text{sen}^2 a}-4a$ é igual a:

a) -3

b) -2

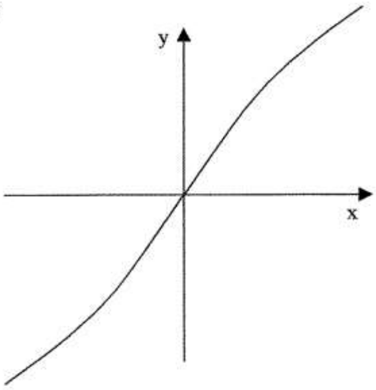
c) 3

d) 2

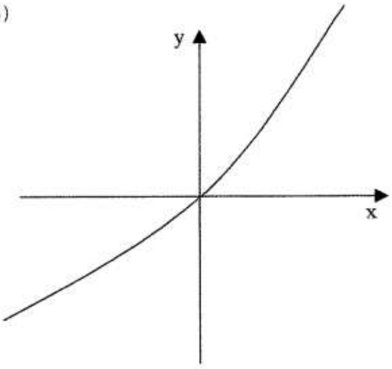
e) $\frac{1}{2}$

11. (EN 2006) Dentre as opções abaixo, aquela que melhor representa o gráfico da função real de variável real $f(x) = x + 2\text{arctg}\,x$ é

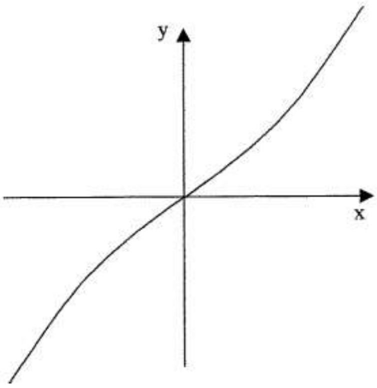
(A)



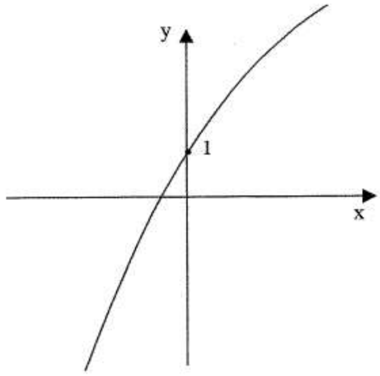
(B)



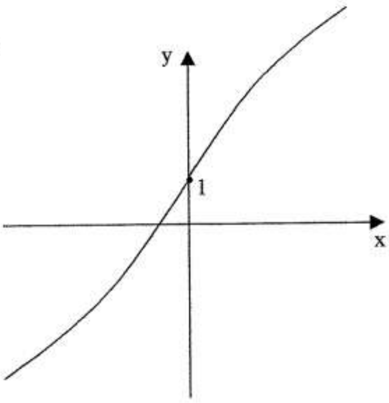
(C)



(D)



(E)



12. (EN 2007) Sejam r e s retas do plano tais que:

I. r é a assíntota de coeficiente angular positivo à curva de equação $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

II. s é tangente ao gráfico da função real f definida por $f(x) = e^{(x^2-1)}.\sqrt{3x-2} + \ln\left[1+(x-1)^4\right]$ no ponto $P(1,1)$.

Se I é o ponto de interseção de r e s, então a soma de suas coordenadas vale

a) $\frac{4}{25}$

b) $\frac{11}{17}$

c) $\frac{12}{25}$

d) $\frac{21}{25}$

e) $\frac{16}{17}$

13. (EN 2008) Seja f a função real, de variável real, definida por $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$. Podemos afirmar que

a) f é derivável $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

b) f é crescente $\forall x\in\mathbb{R}_+$.

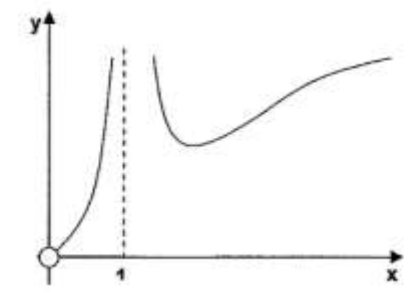
c) f é positiva $\forall x\in\mathbb{R}_+$ e $(1,f(1))$ é ponto de inflexão.

d) a reta $3y-3x+1=0$ é uma assíntota do gráfico de f e $(0,f(0))$ é ponto de máximo local.

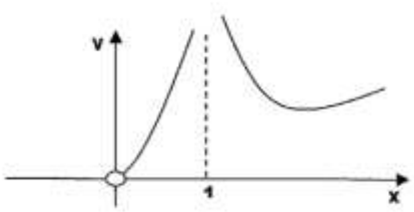
e) f é derivável $\forall x\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ e $3y-3x-1=0$ é uma assíntota do gráfico de f.

14. (EN 2009) A melhor representação gráfica para a função real f, de variável real, definida por $f(x)=\left|\frac{x}{\ln x}\right|$ é

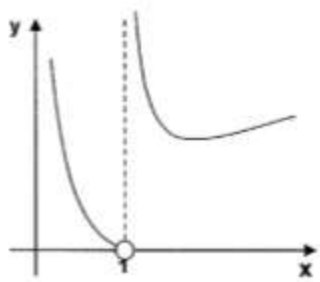
(A)



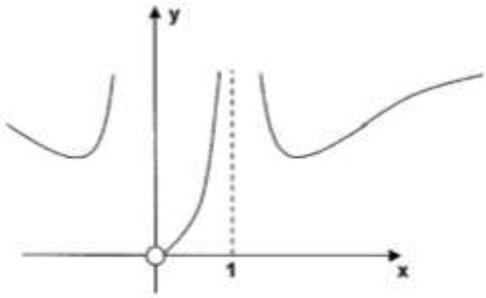
(B)



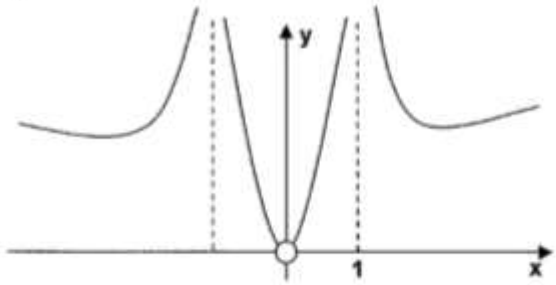
(C)



(D)

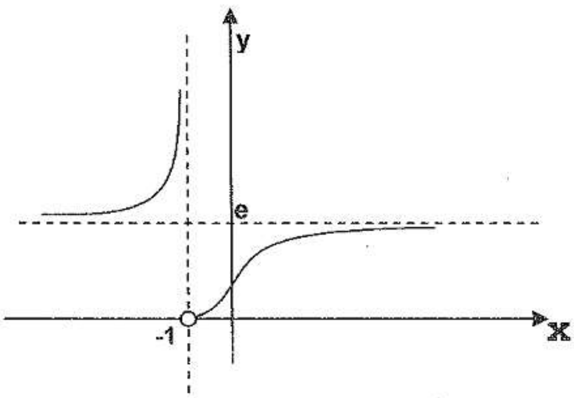


(E)

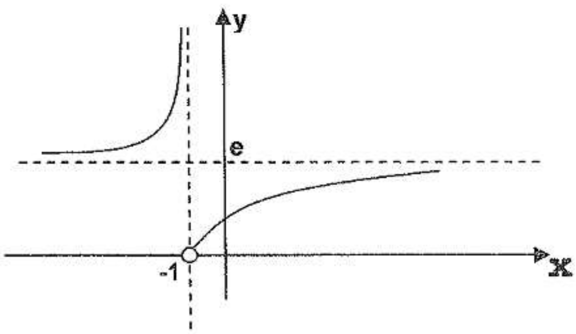


15. (EN 2011) A figura que melhor representa o gráfico da função $y = e^{\frac{x-1}{x+1}}$ é:

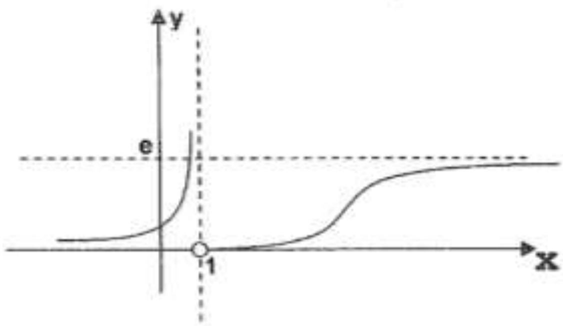
(A)



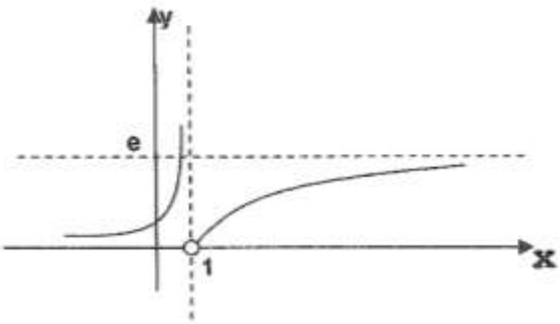
(B)



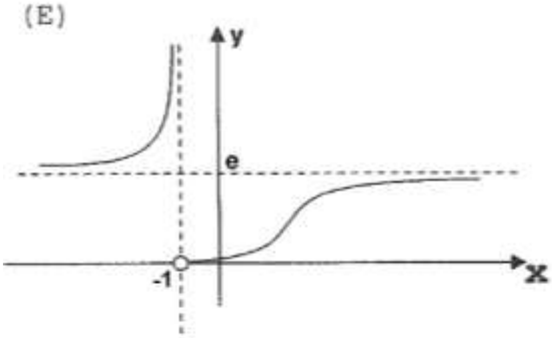
(C)



(D)

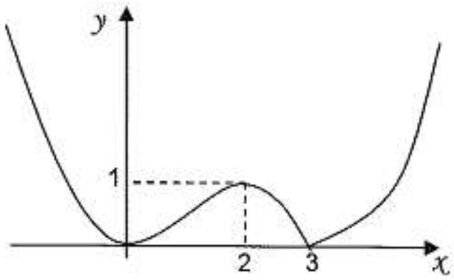


(E)

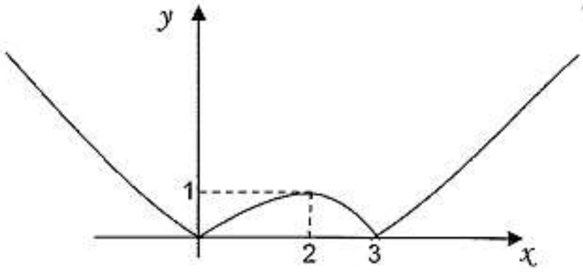


16. (EN 2012) O gráfico que melhor representa a função real f, definida por $f(x)=\frac{1}{4}\left|x^3-3x^2\right|$ é

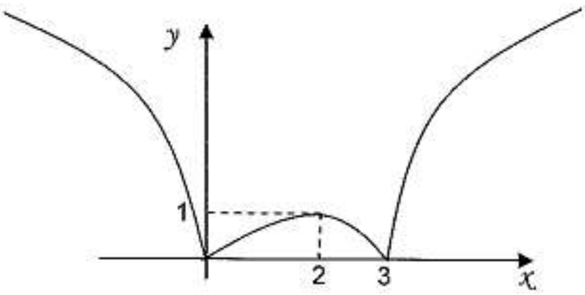
(A)



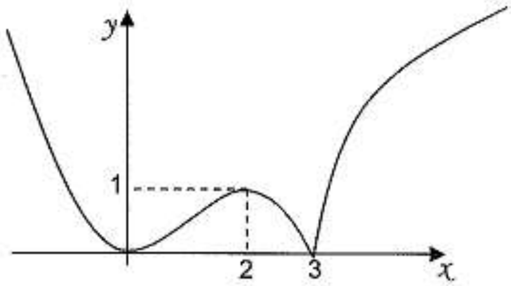
(B)



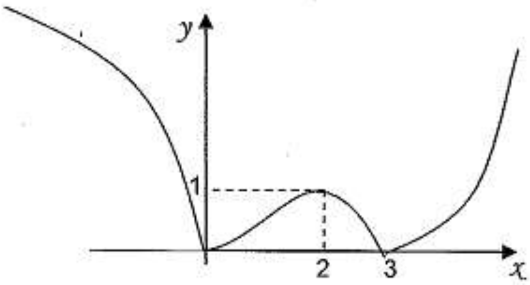
(C)



(D)

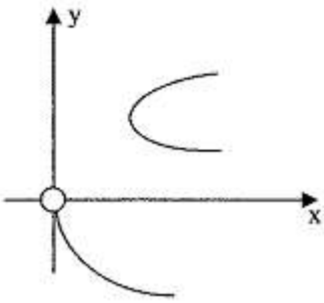


(E)

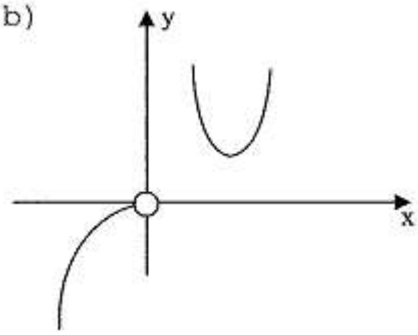


17. (EN 2013) A figura que melhor representa o gráfico da função $x=|y|e^{\frac{1}{y}}$ é

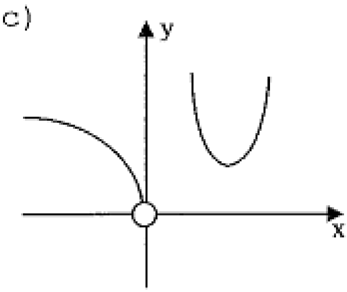
a)



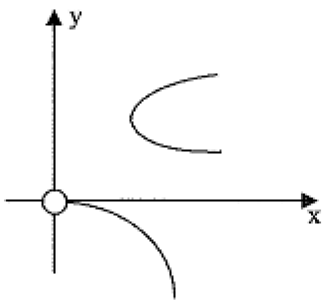
b)



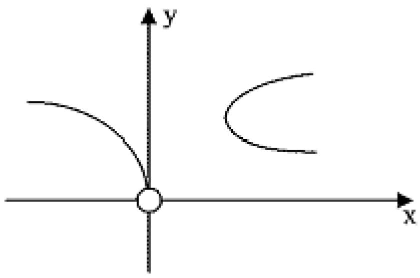
c)



d)



e)



18. (EN 2015) A função real de variável real $f(x)=\frac{2x-a}{bx^2+cx+2}$, onde a, b e c são constantes reais, possui as seguintes propriedades:

I. o gráfico de f passa pelo ponto $(1,0)$ e

II. a reta $y=1$ é um assíntota para o gráfico de f.

O valor de $a+b+c$ é

a) -2

b) -1

c) 4

d) 3

e) 2

19. (EN 2015) Considere a função real de variável real $f(x)=x+\sqrt{|x|}$. Para que valore da constante real k, a equação $f(x)=k$ possui exatamente 3 raízes reais?

a) $k<-\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{4}<k<\frac{1}{4}$

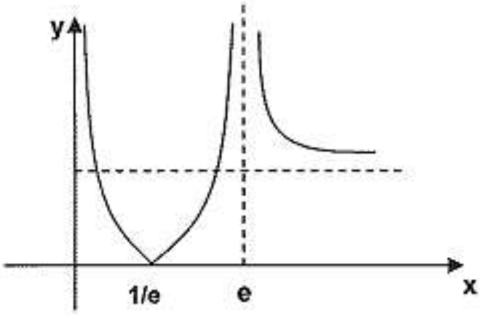
c) $k>\frac{1}{2}$

d) $-\frac{1}{4}<k<0$

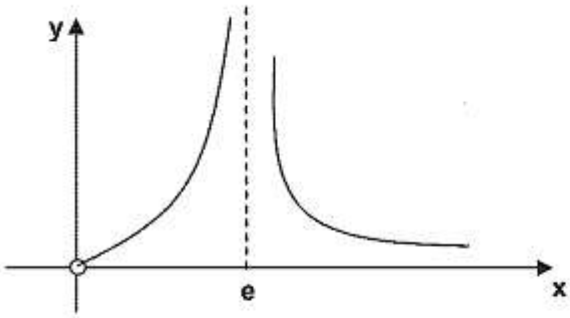
e) $0<k<\frac{1}{4}$

20. (EN 2015) O gráfico que melhor representa a função real de variável real $f(x)=\left|\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}\right|$ é

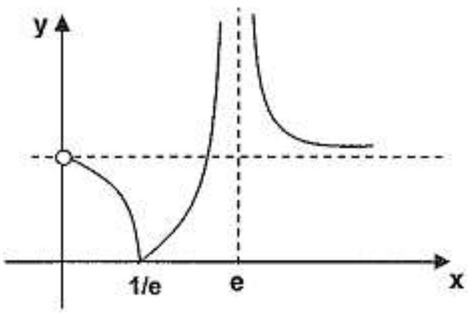
(A)



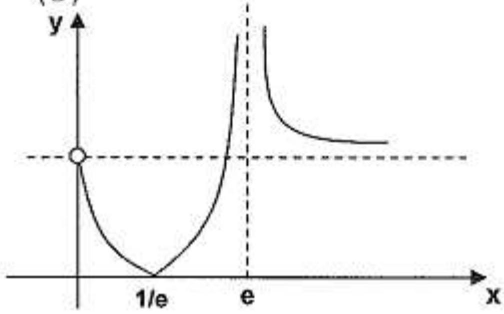
(B)



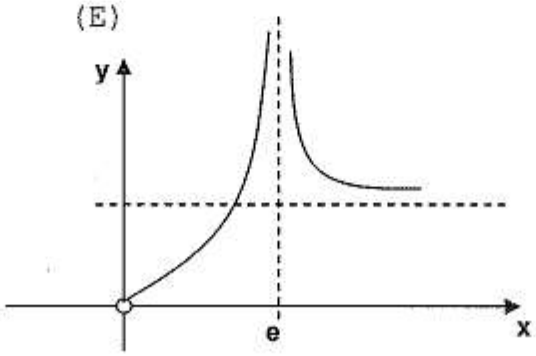
(C)



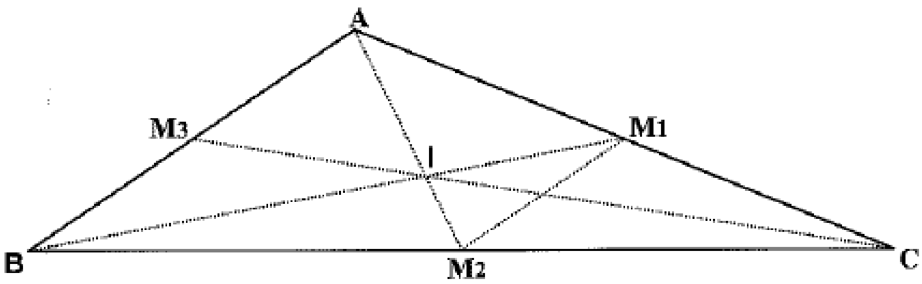
(D)



(E)



21. (EN 2010) Considere o triângulo ABC dado abaixo, onde M_1, M_2 e M_3 são os pontos médios dos lados AC, BC e AB, respectivamente, e k a razão da área do triângulo AIB para a área do triângulo IM_1M_2 e $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}x^3+x^2-2x-11\right)\sqrt{2}$. Se um cubo se expande de tal modo que num determinado instante sua aresta mede $5\,dm$ e aumenta à razão de $|f(k)|$ dm/min então podemos afirmar que a taxa de variação da área total da superfície deste sólido, neste instante, vale em dm^2/min



a) $240\sqrt{2}$

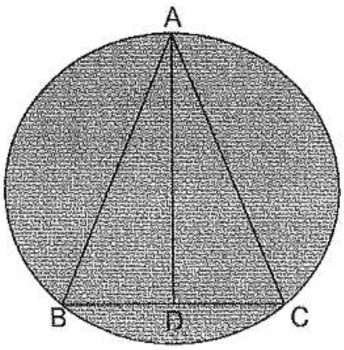
b) $330\sqrt{2}$

c) $420\sqrt{2}$

d) $940\sqrt{2}$

e) $1740\sqrt{2}$

22. (EN 2011) Considere o triângulo isósceles ABC inscrito em um círculo, conforme figura abaixo. Suponha que o raio do círculo cresce a uma taxa de $3\,\text{cm/s}$ e a altura $\overline{AD}$ do triângulo cresce a uma taxa de $5\,\text{cm/s}$. A taxa de crescimento da área do triângulo no instante em que o raio e a altura $\overline{AD}$ medem, respectivamente, $10\,\text{cm}$ e $16\,\text{cm}$, é



a) $78\,\text{cm}^2/\text{s}$

b) $76\,\text{cm}^2/\text{s}$

c) $64\,\text{cm}^2/\text{s}$

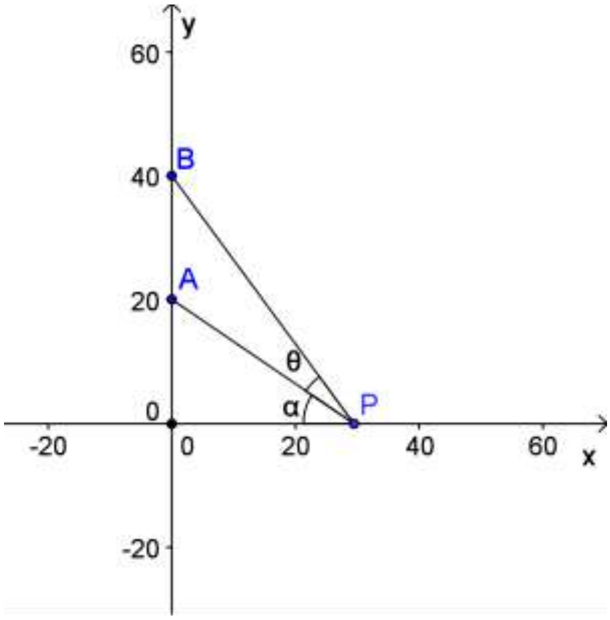
d) $56\,\text{cm}^2/\text{s}$

e) $52\,\text{cm}^2/\text{s}$

GABARITO

1.

RESPOSTA: A



$$P(p,0)\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{20}{p},\ \operatorname{tg}(\alpha+\theta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\theta}=\frac{40}{p}\Rightarrow\frac{\frac{20}{p}+\operatorname{tg}\theta}{1-\frac{20}{p}\cdot\operatorname{tg}\theta}=\frac{40}{p}$$

$$\Leftrightarrow\frac{20+p\cdot\operatorname{tg}\theta}{p-20\cdot\operatorname{tg}\theta}=\frac{40}{p}\Leftrightarrow 20p+p^2\cdot\operatorname{tg}\theta=40p-800\cdot\operatorname{tg}\theta\Leftrightarrow\operatorname{tg}\theta=\frac{20p}{p^2+800}$$

O ângulo θ é máximo quando $\operatorname{tg}\theta$ é máximo, ou seja, quando $\frac{20p}{p^2+800}$ assume seu valor máximo.

$$\left(\frac{20p}{p^2+800}\right)'=\frac{20\cdot(p^2+800)-20p\cdot 2p}{(p^2+800)^2}=0\Leftrightarrow p^2=800\Rightarrow p=20\sqrt{2}$$

Observe que essa abscissa refere-se a um ponto de máximo, pois a derivada é positiva antes e negativa depois do ponto.

2.

RESPOSTA:

I. $\mathbf{a=3}$ e $\mathbf{b=-3}$,

II. a) $\mathbf{-\ln 3, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}}$

b) $\mathbf{-\ln 3, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}}$ são pontos de máximo local e $\mathbf{0, \frac{3\pi}{2}}$ são pontos de mínimo local

I.
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(e^x - a\cdot e^{3x}\right) = 1-a$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (b+2\operatorname{sen}x+\cos 2x) = b+1$$

Se f é contínua em $x=0$, então $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe e $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow 1-a = b+1 \Leftrightarrow b=-a$$

Encontrando a expressão de f' para valores negativos de x.

$$x<0 \Rightarrow f(x) = e^x - a\cdot e^{3x} \Rightarrow f'(x) = e^x - a\cdot e^{3x}\cdot 3 = e^x - 3a\cdot e^{3x}$$

Se $x=-\ln 3$ é um ponto crítico de f, então $f'(-\ln 3)=0$.

$$f'(-\ln 3) = e^{-\ln 3} - 3a\cdot e^{3\cdot(-\ln 3)} = e^{\ln 3^{-1}} - 3a\cdot e^{\ln 3^{-3}} = 3^{-1} - 3a\cdot 3^{-3} = 0 \Leftrightarrow a=3 \Rightarrow b=-3$$

II.

a) $f(x) = \begin{cases} e^x - 3\cdot e^{3x}, \text{ se } x\le 0 \\ -3+2\operatorname{sen}x+\cos 2x, \text{ se } 0<x\le 2\pi \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} e^x - 9\cdot e^{3x}, \text{se } x<0 \\ 2\cos x - 2\operatorname{sen}2x, \text{se } x>0 \end{cases}$

$$x<0 \Rightarrow f(x) = e^x - 3\cdot e^{3x} \Rightarrow f'(x) = e^x - 9\cdot e^{3x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = -\ln 3$$

$$x>0 \Rightarrow f(x) = -3+2\operatorname{sen}x+\cos 2x \Rightarrow f'(x) = 2\cos x - 2\operatorname{sen}2x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}2x = \cos x$$
$$\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x = \cos x \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = e^x - 9\cdot e^{3x} = -8$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2\cos x - 2\operatorname{sen}2x = 2$, então f não é derivável em $x=0$.

b) $x>0 \Rightarrow f''(x) = e^x - 27\cdot e^{3x} \Rightarrow f''(-\ln 3) = e^{\ln 3^{-1}} - 27\cdot e^{\ln 3^{-3}} = \frac{1}{3} - 27\cdot\frac{1}{27} = -\frac{2}{3} < 0$

$\Rightarrow$ $x=-\ln 3$ é um ponto de máximo local

$$x>0 \Rightarrow f''(x) = -2\operatorname{sen}x - 4\cos 2x$$
$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2, f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3$$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ são pontos de máximo local e $\frac{3\pi}{2}$ é ponto de mínimo local.

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -8$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2 \Rightarrow 0$ é um ponto de mínimo

3.

RESPOSTA: D

Seja um cilindro com raio da base r e altura h, o volume é dado por $V = \pi r^2 \cdot h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi \cdot r^2}$.

O custo do recipiente será dado por:

$$P = 1000 \cdot 2\pi rh + 1000 \cdot \pi r^2 + 2000 \cdot \pi r^2 = 1000\pi r(2h + 3r) = 1000\pi r\left(2 \cdot \frac{1}{\pi r^2} + 3r\right)$$

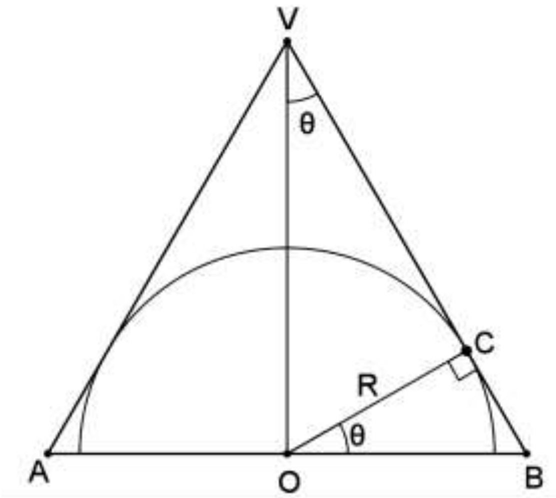
$$\Rightarrow P(r) = 1000\left(\frac{2}{r} + 3\pi r^2\right) \Rightarrow P'(r) = 1000\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) + 3\pi \cdot 2r\right) = 2000\left(-\frac{1}{r^2} + 3\pi r\right)$$

$$P'(r) = 2000\left(-\frac{1}{r^2} + 3\pi r\right) = 0 \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{3\pi} \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}} \text{ e } h = \frac{1}{\pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$$

4.

RESPOSTA: E

A figura abaixo representa a seção meridiana do cone.



O raio da base do cone é $OB = R\sec\theta$ e a altura do cone é $VO = R\operatorname{cossec}\theta$

O volume do cone é

$$V(\theta) = \frac{1}{3} \cdot \pi(R\sec\theta)^2 \cdot R\operatorname{cossec}\theta = \frac{R^3\pi}{3} \cdot \sec^2\theta \cdot \operatorname{cossec}\theta = \frac{R^3\pi}{3} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\theta \cdot \cos^2\theta}$$

$$= \frac{R^3\pi}{3} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\theta \cdot (1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \frac{R^3\pi}{3} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta}$$

$$V'(\theta) = \frac{R^3\pi}{3} \cdot \left(-\frac{1}{(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta)^2} \cdot (\cos\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta)\right) = \frac{R^3\pi}{3} \cdot \frac{\cos\theta \cdot (3\operatorname{sen}^2\theta - 1)}{(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\cos\theta = 0} \text{ ou } \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{MIN} = \frac{R^3\pi}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}} = \frac{R^3\pi}{3}\cdot\frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R^3\pi$$

Note que antes do ponto tal que $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a derivada é negativa e depois positiva, o que caracteriza um ponto de mínimo local.

5.

RESPOSTA: D

$$f(x) = \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{b^2}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = a^2\left(-2\operatorname{sen}^{-3} x\cdot\cos x\right) + b^2\left(-2\cos^{-3} x\cdot(-\operatorname{sen} x)\right) = \frac{-2a^2\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{2b^2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$$

Identificando as raízes da primeira derivada:

$$f'(x) = \frac{-2a^2\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{2b^2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} = 0 \Leftrightarrow -a^2\cos^4 x + b^2\operatorname{sen}^4 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^4 x = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{|a|}{|b|}}$$

Efetuando o teste da segunda derivada:

$$f'(x) = -2a^2\cos x\cdot\operatorname{cossec}^3 x + 2b^2\operatorname{sen} x\cdot\sec^3 x$$

$$\Rightarrow f''(x) = -2a^2\left(-\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{cossec}^3 x + \cos x\cdot 3\operatorname{cossec}^2 x\cdot(-\operatorname{cossec} x\cdot\operatorname{cotg} x)\right)$$

$$+2b^2\left(\cos x\cdot\sec^3 x + \operatorname{sen} x\cdot 3\sec^2 x(\sec x\cdot\operatorname{tg} x)\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2a^2\cdot\operatorname{cossec}^2 x\left(1+3\operatorname{cotg}^2 x\right) + 2b^2\cdot\sec^2 x\left(1+3\operatorname{tg}^2 x\right) > 0,\ \forall x$$

Logo, os pontos de abscissa x tais que $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{|a|}{|b|}}$ são pontos de mínimo local.

Dessa forma, o valor mínimo relativo será:

$$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{|a|}{|b|}} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{|a|}{|b|}, \operatorname{cotg}^2 x = \frac{|b|}{|a|}, \sec^2 x = 1+\frac{|a|}{|b|}, \operatorname{cossec}^2 x = 1+\frac{|b|}{|a|}$$

$$f(x) = \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{b^2}{\cos^2 x} = a^2\operatorname{cossec}^2 x + b^2\sec^2 x$$

$$\Rightarrow f_{MIN}(x) = a^2\left(1+\frac{|b|}{|a|}\right) + b^2\left(1+\frac{|a|}{|b|}\right) = (|a|+|b|)(|a|+|b|) = (|a|+|b|)^2$$

6.

RESPOSTA: C

$$S=2\pi rh+\pi r^2=54\pi a^2 \Leftrightarrow 2rh+r^2=54a^2 \Leftrightarrow h=\frac{54a^2-r^2}{2r}$$

$$V=\pi r^2 h=\pi r^2\cdot\frac{54a^2-r^2}{2r}=\frac{\pi}{2}\left(54a^2r-r^3\right)\Rightarrow V'=54a^2-3r^2=0\Leftrightarrow r^2=18a^2\Rightarrow r=3\sqrt{2}\,|a|$$

$V''=\frac{\pi}{2}\cdot(-6r)=-3\pi r<0$, logo trata-se de um ponto de máximo.

$$h=\frac{54a^2-r^2}{2r}=\frac{54a^2-18a^2}{2\cdot 3\sqrt{2}\,|a|}=3\sqrt{2}\,|a|\Rightarrow\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{18a^2+18a^2}=6|a|$$

Assumindo que a seja positivo, então $\sqrt{r^2+h^2}=6a\,\text{cm}$.

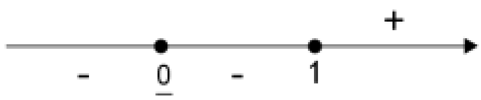
7.

RESPOSTA: B

$$f(x)=3x^4-4x^3+5\Rightarrow f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)\Rightarrow f''(x)=36x^2-24x=12x(3x-2)$$

A primeira derivada tem uma raiz dupla $x=0$ e uma raiz simples $x=1$.

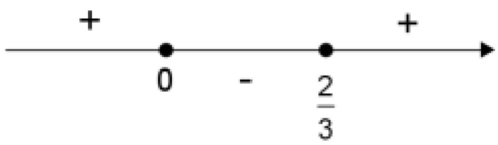
Vamos estudar o sinal da primeira derivada.



Logo, a função f é decrescente em $]-\infty,1[$ e crescente em $]1,+\infty[$.

Analisando o sinal da segunda derivada nas raízes da primeira derivada: $f''(0)=0$ e $f''(1)=12>0$. Portanto, $x=1$ é um ponto de mínimo.

Vamos estudar o sinal da segunda derivada.



Portanto, a função f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty,0[$ e $\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$, e concavidade voltada para baixo em $\left]0,\frac{2}{3}\right[$. Além disso, $x=0$ e $x=\frac{2}{3}$ são pontos de inflexão (pontos em que há mudança de concavidade).

Portanto, é correto afirmar que f tem ponto de inflexão em $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

8.

RESPOSTA: D

Para que a função seja crescente em um intervalo, sua derivada naquele intervalo deve ser positiva.

$$y(t)=\frac{10t}{(t+1)^2}\Rightarrow y'(t)=\frac{10\cdot(t+1)^2-10t\cdot 2(t+1)}{(t+1)^4}=\frac{10\left(1-t^2\right)}{(t+1)^4}>0\Leftrightarrow -1<t<1$$

Mas é dado que $t\geq 0$, então a função $y(t)$ é crescente em $0\leq t<1$.

9.

RESPOSTA: A

$$f(x)=x^2e^x\Rightarrow f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=\left(x^2+2x\right)\cdot e^x=0$$

Identificação dos pontos críticos: $f'(x)=\left(x^2+2x\right)\cdot e^x=0\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=-2$.

Teste da 2^a derivada: $f''(x)=(2x+2)\cdot e^x+\left(x^2+2x\right)\cdot e^x=\left(x^2+4x+2\right)\cdot e^x$

$f''(0)=\left(0^2+4\cdot 0+2\right)\cdot e^0=2>0\Rightarrow$ ponto de mínimo loca

$f''(-2)=\left((-2)^2+4\cdot(-2)+2\right)\cdot e^{-2}=\dfrac{-2}{e^2}<0\Rightarrow$ ponto de máximo local

Portanto, o ponto de abscissa $-2\in[-3,-1]$ é um ponto de máximo local finito.

10.

RESPOSTA: A

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-3)^2\cdot e^x=+\infty$$

Assim, a função não possui assíntota em $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-3)^2\cdot e^x=\lim_{x\to+\infty}(-x-3)^2\cdot e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+3)^2}{e^x}$$

O limite acima é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Aplicando o teorema de L'Hôpital duas vezes, temos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+3)^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+3)\cdot 1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+6}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

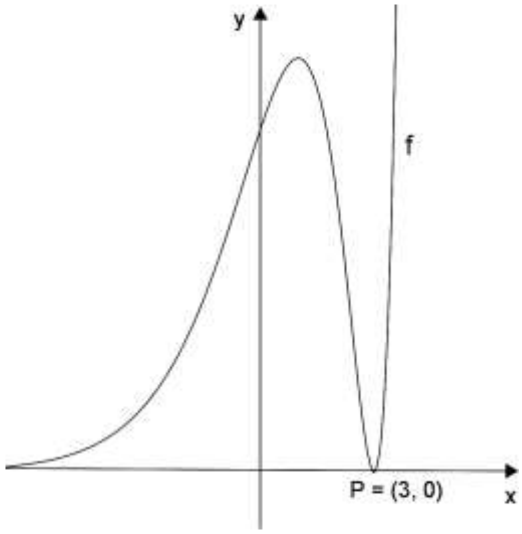
Portanto, a assíntota horizontal em $-\infty$ é a reta $r: y=0$.

Vamos agora encontrar a interseção do gráfico de f com a reta $r: y=0$.

$(x-3)^2 \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow P = (a,b) = (3,0) \Leftrightarrow a = 3 \ \wedge \ b = 0$.

A expressão pedida é dada por $a^2 + b \cdot e^{\text{sen}^2 a} - 4a = 3^2 + 0 \cdot e^{\text{sen}^2 3} - 4 \cdot 3 = -3$.

Observe no gráfico da função f a seguir, o comportamento da função quando $x \to -\infty$ que mostra a aproximação assintótica com a reta $y = 0$.



11.

RESPOSTA: A

$f(x) = x + 2 \cdot \text{arctg}\, x$

$f(0) = 0 + 2 \cdot \text{arctg}\, 0 = 0$

$f'(x) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{3+x^2}{1+x^2} > 0 \Rightarrow f \text{ é crescente}, \forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 2 \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{concavidade para cima} \\ x > 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \text{concavidade para baixo} \end{cases}$

Nota-se que a alternativa (A) é a única que apresenta um gráfico que passa na origem, possui concavidade para cima para valores de x negativos e concavidade para baixo para valores de x positivos.

12.

RESPOSTA: E

A curva de equação $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ é uma hipérbole de centro $(2,1)$, semi-eixo real $a = 3$ e semi-eixo imaginário $b = 2$.

Assim, a assíntota de coeficiente angular positivo é $r: \frac{y-1}{x-2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$$f(x)=e^{(x^2-1)}.\sqrt{3x-2}+\ln\left[1+(x-1)^4\right]$$

$$\Rightarrow f'(x)=e^{(x^2-1)}\cdot 2x\cdot\sqrt{3x-2}+e^{(x^2-1)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x-2}}\cdot 3+\frac{1}{1+(x-1)^4}\cdot 4(x-1)^3$$

$$\Rightarrow f'(x)=e^{(x^2-1)}\left[2x\cdot\sqrt{3x-2}+\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}\right]+\frac{4(x-1)}{1+(x-1)^4}$$

$$\Rightarrow f'(1)=e^{(1^2-1)}\left[2\cdot 1\cdot\sqrt{3\cdot 1-2}+\frac{3}{2\sqrt{3\cdot 1-2}}\right]+\frac{4(1-1)}{1+(1-1)^4}=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

$$s:\frac{y-1}{x-1}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow y=\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}$$

$$I=r\cap s\Rightarrow\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}\Leftrightarrow x=\frac{13}{17}\text{ e }y=\frac{3}{17}\Rightarrow x+y=\frac{16}{17}$$

13.

RESPOSTA: D

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\left(x^3-x^2\right)^{-\frac{2}{3}}.\left(3x^2-2x\right)=\frac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)^2}}$$

A expressão de f' indica que a função não é derivável em 0 e 1, o que é confirmado pela análise dos limites abaixo:

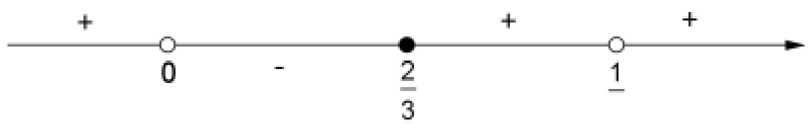
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{x^2(x-1)}{(x-1)^3}}=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}=+\infty$$

Assim, f é derivável em $\mathbb{R}^*-\{1\}$.

Para verificar os intervalos em que f cresce ou decresce, vamos realizar o estudo de sinais de f'.

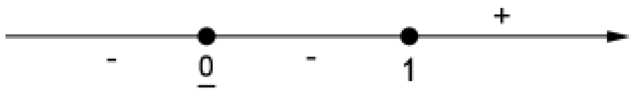
$$f'(x)=\frac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)^2}}=\frac{3x\left(x-\frac{2}{3}\right)}{3\sqrt[3]{x^4}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$



$$f'(x)>0\Leftrightarrow x<0\text{ ou }\frac{2}{3}<x<1\text{ ou }x>1\Leftrightarrow f\text{ é crescente}$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<\frac{2}{3} \Leftrightarrow \text{f é decrescente}$$

Vamos realizar o estudo de sinais de f.



f é positiva $\Leftrightarrow x>1$

$f=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1$

f é negativa $\Leftrightarrow x<0 \text{ ou } 0<x<1$

Identificação do ponto de inflexão.

$$f'(x)=\frac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)^2}} \Rightarrow f''(x)=\frac{(6x-2)\cdot 3\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)^2}-\left(3x^2-2x\right)\cdot 3\cdot\frac{2}{3}\left(x^3-x^2\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(3x^2-2x\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)^4}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{6(3x-1)\cdot\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)^2}-2\frac{\left(3x^2-2x\right)^2}{\sqrt[3]{x^3-x^2}}}{9\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)^4}}=\frac{6(3x-1)\cdot\left(x^3-x^2\right)-2\left(3x^2-2x\right)^2}{9\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)^5}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{2x^2}{9}\cdot\frac{\left(9x^2-12x+3\right)-\left(9x^2-12x+4\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)^5}}=\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{(x-1)^5}}$$

f'' é negativa $\Leftrightarrow x>1 \Rightarrow$ concavidade para baixo

f'' é positiva $x<0 \text{ ou } 0<x<1 \Rightarrow$ concavidade para cima

Logo, em $(1,f(1))$ temos uma mudança de concavidade, ou seja, temos um ponto de inflexão.

Identificação das assíntotas.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}-x^2-\cancel{x^3}}{\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)}\cdot x+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1}=-\frac{1}{3}$$

Logo, a reta $y=x-\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3y-3x+1=0$ é assíntota ao gráfico quando $x\to\infty$.

a) ERRADA: f é derivável em $\mathbb{R}^* - \{1\}$.

b) ERRADA: f é crescente quando $x < 0 \text{ ou } \frac{2}{3} < x < 1 \text{ ou } x > 1$

c) ERRADA: f é positiva $\Leftrightarrow x > 1$, mas o ponto $(1, f(1))$ é ponto de inflexão

d) CORRETA

e) ERRADA: a assíntota é $3y - 3x + 1 = 0$

14.

RESPOSTA: A

$$f(x) = \left|\frac{x}{|\ln x|}\right|$$

Determinação do domínio de f:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{|\ln x|}$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{-\ln x}$$

$$x > 1 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Determinação dos intervalos em que a função é crescente ou decrescente.

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1 \cdot (-\ln) - x \cdot \left(-\dfrac{1}{x}\right)}{(-\ln x)^2} = \dfrac{1 - \ln x}{(\ln x)^2} \\ 0 < x < 1 \Rightarrow -\infty < \ln x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1 \cdot \ln x - x \cdot \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \\ 1 < x < e \Rightarrow 0 < \ln x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \\ x > e \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 : \text{f é crescente} \\ 1 < x < e : \text{f é decrescente} \\ x > e : \text{f é crescente} \end{cases}$$

Logo, $x = e$ é um ponto de mínimo local.

Determinação dos limites nas extremidades do domínio e no ponto de descontinuidade.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left|\frac{x}{\ln x}\right| = 0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left|\frac{x}{\ln x}\right| = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

Determinação da concavidade.

$$0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1-\ln x}{(\ln x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)(\ln x)^2 - (1-\ln x)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{\ln x - 2}{x(\ln x)^3}$$

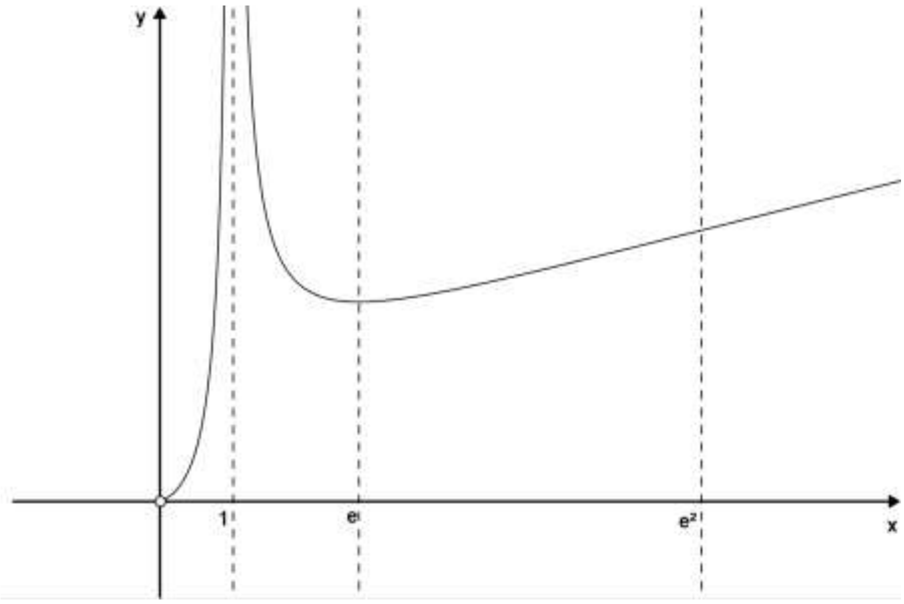
$$0 < x < 1 \Rightarrow -\infty < \ln x < 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{concavidade para cima}$$

$$x > 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot(\ln x)^2 - (\ln x - 1)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$$

$$1 < x < e^2 \Rightarrow 0 < \ln x < 2 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \text{concavidade para baixo}$$

$$x > e^2 \Rightarrow \ln x > 2 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{concavidade para cima}$$

Logo, em $x = e^2$ temos uma mudança de concavidade e consequentemente um ponto de inflexão.



Analisando os resultados obtidos, conclui-se que a melhor alternativa é a letra A.

15.

RESPOSTA: A

$y = f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$

$f(0) = e^{\frac{0-1}{0+1}} = \frac{1}{e}$ (isso elimina a alternativa (E))

$f(1) = e^{\frac{1-1}{1+1}} = 1$ (isso elimina as alternativas (C) e (D))

Temos que determinar a alternativa correta dentre as opções (A) e (B). A diferença entre elas é que a alternativa (A) apresenta mudança de concavidade em 0 e a alternativa (B) não. A mudança de concavidade é determinada por uma mudança de sinal da segunda derivada da função.

A análise da função mostra que temos um ponto de descontinuidade e, consequentemente, uma assíntota vertical em $x = -1$.

Como $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$, a função possui assíntota horizontal $y = e$.

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

A primeira derivada é sempre positiva, logo a função é sempre crescente.

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$f''(x) = \frac{-4}{(x+1)^3} \cdot e^{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{2}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{4 \cdot e^{\frac{x-1}{x+1}}}{(x+1)^3} \cdot \left(-1 + \frac{1}{x+1}\right) = \frac{-4x \cdot e^{\frac{x-1}{x+1}}}{(x+1)^4}$$

Analisando a expressão da segunda derivada da função, conclui-se que $f''(x) < 0$ se $x > 0$ e $f''(x) > 0$ se $x < 0$. Assim, quando x é negativo, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e, quando x é positivo, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo.

Portanto, a alternativa correta é a letra (A).

16.

RESPOSTA: A

Inicialmente vamos traçar o gráfico de $g(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2)$.

Raízes de $g(x)$: 0 (dupla) e 3.

$g'(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 6x)$

Raízes de $g'(x)$: 0 e 2

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$: estritamente crescente

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$: estritamente decrescente

$g''(x) = \frac{1}{4}(6x - 6)$

$g''(0) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow (0,0)$ é um ponto de máximo local

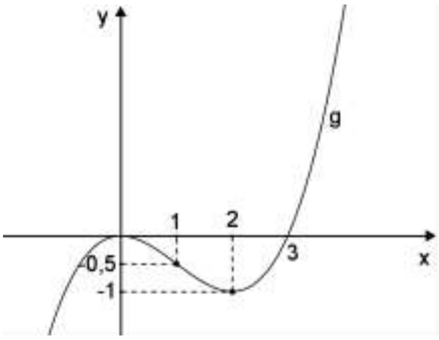
$g''(2) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow (2,-1)$ é um ponto de mínimo local

$g''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$: concavidade voltada para cima

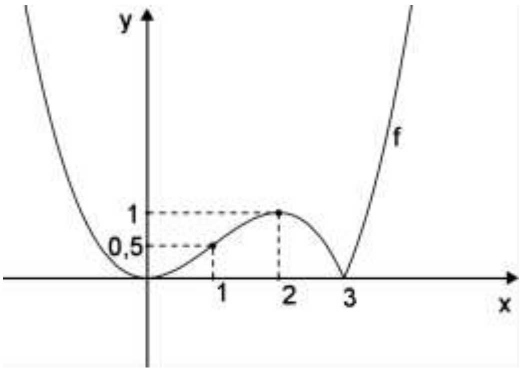
$g''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$: concavidade voltada para baixo

Assim, o ponto de abscissa 1 é um ponto de inflexão.

As informações acima permitem esboçar o gráfico de $g(x)$.



O gráfico de $f(x) = \frac{1}{4}|x^3 - 3x^2|$ pode ser obtido refletindo-se as partes de ordenada negativa do gráfico de $g(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2)$ em relação ao eixo Ox.



17.

RESPOSTA: A

A expressão $x=|y|\cdot e^{\frac{1}{y}}$ apresenta x como função de y.

Temos a restrição $y\neq 0$, que implica $x\neq 0$, logo o gráfico da função não cruza nenhum dos eixos coordenados.

Como $|y|>0$ e $e^{\frac{1}{y}}>0$, então $x>0$, o que exclui as alternativas B, C e E.

Vamos agora analisar a expressão da função:

1° caso: $y>0$

$$y>0\Rightarrow x=y\cdot e^{\frac{1}{y}}\Rightarrow \frac{dx}{dy}=1\cdot e^{\frac{1}{y}}+y\cdot e^{\frac{1}{y}}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=e^{\frac{1}{y}}\cdot\left(1-\frac{1}{y}\right)$$

$$0<y<1\Rightarrow \frac{dx}{dy}<0\Rightarrow x \text{ é decrescente}$$

$$y>1\Rightarrow \frac{dx}{dy}>0\Rightarrow x \text{ é crescente}$$

2° caso: $y<0$

$$y<0\Rightarrow x=-y\cdot e^{\frac{1}{y}}\Rightarrow \frac{dx}{dy}=-1\cdot e^{\frac{1}{y}}-y\cdot e^{\frac{1}{y}}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-e^{\frac{1}{y}}\cdot\left(1-\frac{1}{y}\right)<0$$

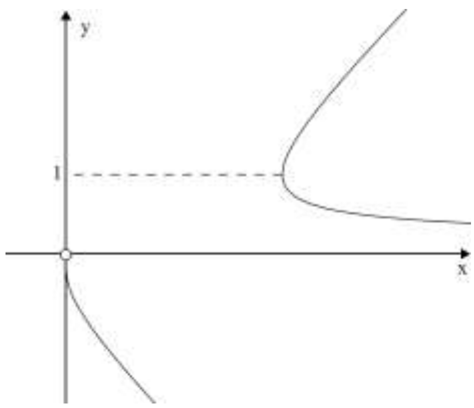
$\Rightarrow x$ é decrescente

Para escolher entre A e D temos que analisar a concavidade quando $y<0$.

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\left(e^{\frac{1}{y}}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{y}\right)-e^{\frac{1}{y}}\cdot\left(\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^3}$$

Assim, com $y<0$, temos $\frac{d^2x}{dy^2}>0$ e concavidade “para cima” (apontando para x positivo).

A figura abaixo é um esboço do gráfico da função.



Portanto, a alternativa correta é A.

Note que seria possível, por comodidade, encontrar o gráfico de $y=|x|e^{\frac{1}{x}}$ (relação inversa) e depois refletir esse gráfico em relação à reta $y=x$, o que resultaria no gráfico procurado.

18.

RESPOSTA: C

$$(1,0)\in f \Leftrightarrow f(1)=0 \Leftrightarrow f(1)=\frac{2\cdot 1-a}{b\cdot 1^2+c\cdot 1+2}=0 \Leftrightarrow a=2$$

Se $y=1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f, então $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{bx^2+cx+2}\right)=1$.

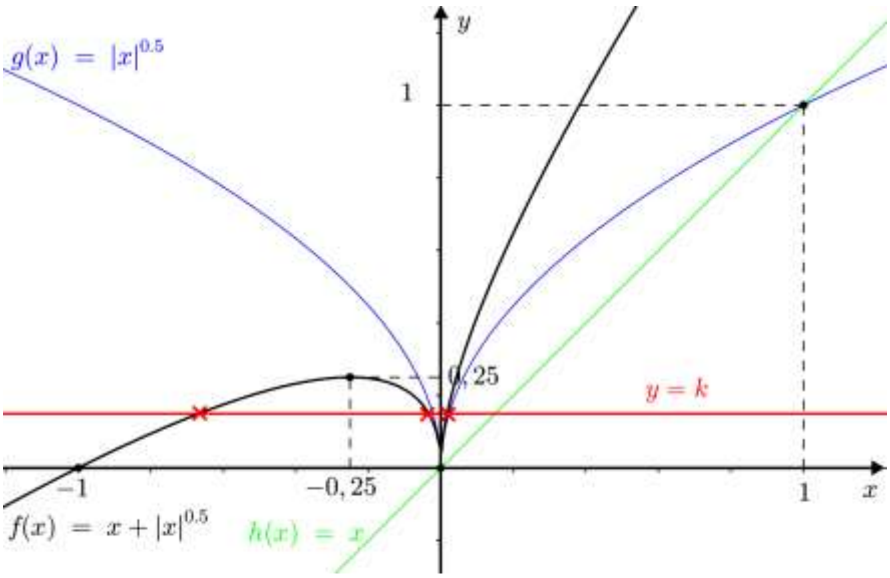
Se $b\neq 0$, o limite é 0. Assim, para que o limite seja igual a 1, devemos ter $b=0$ e $c=2$.

Portanto, $a+b+c=2+0+2=4$.

19.

RESPOSTA: E

Vamos inicialmente esboçar o gráfico de $f(x)=x+\sqrt{|x|}$.



$$f(x)=x+\sqrt{|x|}=0 \Leftrightarrow \sqrt{|x|}=-x \Leftrightarrow |x|=(-x)^2 \wedge x\le 0 \Leftrightarrow -x=x^2 \wedge x\le 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+x=0 \wedge x\le 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$$

Raízes de f: $x=0$ e $x=-1$

Estudo de sinal da 1ª derivada:

$$x<0: f(x)=x+\sqrt{-x} \Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{-x}}$$

$$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{-x}}=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{-x}=1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$$

$$x<-\frac{1}{4} \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f \text{ é crescente}$$

$$-\frac{1}{4}<x<0: f'(x)<0 \Rightarrow f \text{ é decrescente}$$

$$x>0: f(x)=x+\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0 \Rightarrow f \text{ é crescente}$$

Essas informações são suficientes para esboçarmos o gráfico acima, a menos da concavidade, o que para esse problema não é importante.

Para que a equação $f(x)=k$ possua exatamente três raízes reais, a reta $y=k$ deve cortar o gráfico de f em exatamente três pontos. Isso ocorre para $0<k<\frac{1}{4}$.

20.

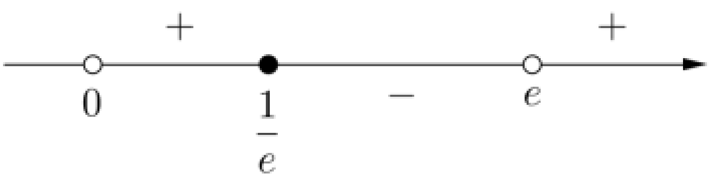
RESPOSTA: D

$$f(x)=\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right|$$

Determinação do domínio de f:

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq e \end{cases} \Rightarrow D_f = \left]0,e\right[\cup \left]e,+\infty\right[$$

Vamos fazer um estudo de sinal de $y=\frac{\ln x+1}{\ln x-1}$.



Assim, temos:

$$x \in \left]0,\frac{1}{e}\right] \cup \left]e,+\infty\right[\Rightarrow y>0 \Rightarrow f(x)=\frac{\ln x+1}{\ln x-1}$$

$x \in \left[\frac{1}{e}, e\right[\Rightarrow y < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x + 1}{1 - \ln x}$

Determinação dos intervalos em que a função é crescente ou decrescente.

A primeira derivada de $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$ é $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (\ln x - 1) - (\ln x + 1) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2} = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$.

$$\begin{cases} x \in \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup \left]e, +\infty\right[\Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2} < 0 \Rightarrow f \text{ é decrescente} \\ x \in \left[\frac{1}{e}, e\right[\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x(\ln x - 1)^2} > 0 \Rightarrow f \text{ é crescente} \end{cases}$$

Logo, $x = \frac{1}{e}$ é um ponto de mínimo local.

Determinação dos limites nas extremidades do domínio e no ponto de descontinuidade.

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \left|\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right| = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right) = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right) = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{1 + \frac{1}{\ln x}}{1 - \frac{1}{\ln x}}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to e} f(x) = \lim_{x \to e} \left|\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right| = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left|\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right| = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{\ln x}}{1 - \frac{1}{\ln x}}\right) = 1$$

Determinação da concavidade:

$$x \in \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup \left]e, +\infty\right[\Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$$

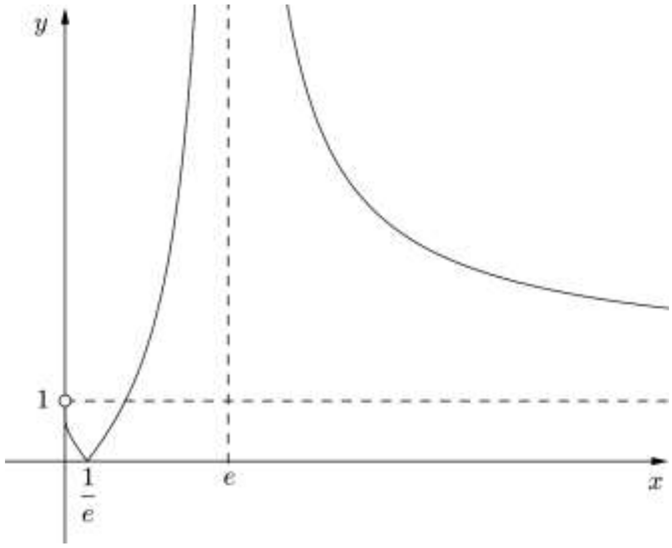
$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-(-2)\left[(\ln x - 1)^2 + x \cdot 2(\ln x - 1) \cdot \frac{1}{x}\right]}{x^2 (\ln x - 1)^4} = \frac{2\left[(\ln x)^2 - 1\right]}{x^2 (\ln x - 1)^4} > 0$$

Note que, se $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup \left]e, +\infty\right[$, então $(\ln x)^2 - 1 > 0$.

$$x \in \left[\frac{1}{e}, e\right[\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x(\ln x - 1)^2} > 0 \Rightarrow f''(x) = \frac{-2\left[(\ln x)^2 - 1\right]}{x^2 (\ln x - 1)^4} > 0$$

Como a derivada segunda é positiva em todo o domínio, então a concavidade do gráfico é sempre para cima.

Com base nesse desenvolvimento, podemos esboçar o gráfico a seguir:



Analisando os resultados obtidos, conclui-se que a melhor alternativa é a letra D.

21.

RESPOSTA: E

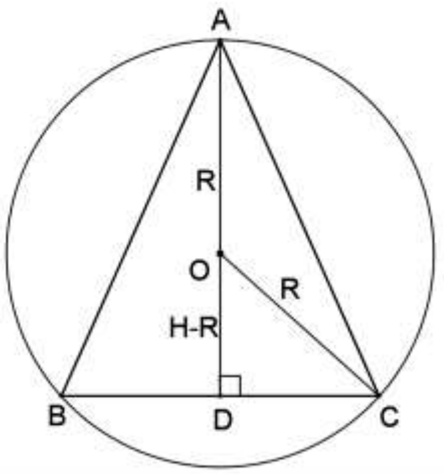
$$k=\frac{S_{AIB}}{S_{IM_1M_2}}=\left(\frac{AB}{M_1M_2}\right)^2=2^2=4$$

$$|f(k)|=|f(4)|=\left|\left(\frac{1}{2}\cdot 4^3+4^2-2\cdot 4-11\right)\sqrt{2}\right|=29\sqrt{2}\ {}^{dm}\!/_{min}$$

$$S=6a^2\Rightarrow\frac{dS}{dt}=\frac{d}{dt}\left(6a^2\right)=12a\cdot\frac{da}{dt}=12\cdot 5\cdot 29\sqrt{2}=1740\sqrt{2}\ {}^{dm^2}\!/_{min}$$

22.

RESPOSTA: B



Sejam $\overline{AD}=H$, R o raio do círculo circunscrito ao $\triangle ABC$ de circuncentro O e $\overline{BC}=2x$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ODC$, temos: $x^2+(H-R)^2=R^2\Leftrightarrow x=\sqrt{2RH-H^2}$.

A área triângulo ABC é dada por: $S_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}{2}=\frac{2x\cdot H}{2}=H\cdot\sqrt{2RH-H^2}$.

A taxa de crescimento da área do triângulo é:

$$\frac{dS_{ABC}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(H\cdot\sqrt{2RH-H^2}\right)=\frac{dH}{dt}\cdot\sqrt{2RH-H^2}+H\cdot\frac{1}{2\sqrt{2RH-H^2}}\cdot\left(2\frac{dR}{dt}H+2R\frac{dH}{dt}-2H\frac{dH}{dt}\right)$$

$$\frac{dS_{ABC}}{dt}=\frac{dH}{dt}\cdot\sqrt{2RH-H^2}+\frac{H}{\sqrt{2RH-H^2}}\cdot\left(\frac{dR}{dt}H+R\frac{dH}{dt}-H\frac{dH}{dt}\right)$$

Do enunciado temos: $R=10\text{ cm}$, $H=16\text{ cm}$, $\frac{dR}{dt}=3\text{ cm/s}$ e $\frac{dH}{dt}=5\text{ cm/s}$. Logo,

$$\frac{dS_{ABC}}{dt}=5\cdot\sqrt{2\cdot10\cdot16-16^2}+\frac{16}{\sqrt{2\cdot10\cdot16-16^2}}(3\cdot16+10\cdot5-16\cdot5)=40+2\cdot18=76\text{ cm}^2/\text{s}.$$