Estratégia
Militares

Aula 00

Ângulos, Triângulos e Pontos Notáveis

EPCAR - 2020

Prof. Ismael Santos

Sumário

1 - Introdução

Olá, meu querido!!! Como andam os estudos??

Na aula de hoje iniciaremos a parte de geometria plana.

Fiz questão de deixar a parte de geometria mais para frente por dois motivos: ser a parte da matemática que menos cai em quantidade de questões, bem como por ser uma disciplina dependente de alguns conceitos de álgebra e aritmética.

Importante destacar que as questões de geometria da sua prova serão todas comentadas em um PDF EXTRA, para um melhor compreesão. No entanto, estou postando questões similares bem como questões de provas militares anteriores.

Sem mais delongas, vamos ao nosso conteúdo!!!

Fale comigo!

@profismael_santos	*Ismael Santos*	*@IsmaelSantos*

2 – Geometria Euclidiana Plana

Antes mesmo de estudarmos a geometria euclidiana em si, faz-se necessário alguns breves apontamentos sobre as noções primitivas e sobre alguns postulados necessários para que possamos relacionar entes geométricos.

A geometria euclidiana, também conhecida como geometria plana, é a parte da matemática que estuda a construção e propriedades de figuras planas como triângulos, circunferência, quadriláteros etc.

Antes de iniciar, quero apresentar as noções primitivas de ponto, reta e plano e os postulados que relacionam esses entes geométricos.

2.1. Noções Primitivas

Como mencionado anteriormente, vamos iniciar nossos estudos trabalhando com os entes fundamentais da geometria euclidiana, que nada mais são que formas que ajudam (auxiliam) na construção de toda e qualquer figura. Esses entes são: ponto, reta e plano. Ressalto que, por serem noções primitivas, não há um conceito definido, mas sim, um conhecimento intuitivo decorrente de experiências e observações.

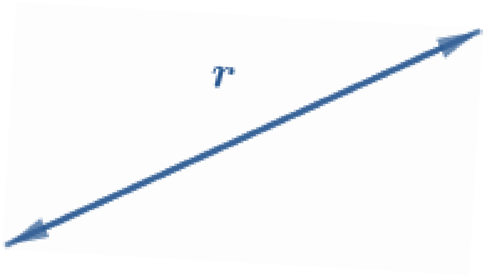
- ### Ponto

Usualmente, representamos o ponto por letras maiúsculas do alfabeto: $A, B, C, D, E, \ldots$ Devemos entender o ponto como a menor parte dos entes geométricos. Ele é adimensional (não possui uma dimensão). Uma forma de representarmos é a seguinte:

- ### Reta, Semirreta e Segmento de Reta

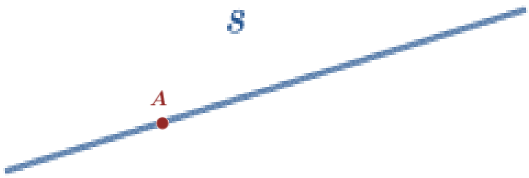
Importante ressaltar que a reta é usualmente representada por letras minúsculas do nosso alfabeto: $a, b, c, d, \ldots$ A reta é o ente geométrico cujas extremidades não possuem limites, ela é contínua em ambos os lados, ou seja, infinita. Por esse motivo, é recomendável usar setas para indicar a continuidade da reta nos dois sentidos. Cabe ressaltar também que a reta é um conjunto, isso mesmo, um conjunto de infinitos pontos.

Veja na figura abaixo uma possível representação deste ente tão importante.



Já sabemos que as retas são conjuntos, ou seja, um ente geométrico com infinitos pontos. Desta forma, podemos fazer uma analogia com a aula de conjuntos que diz: todo conjunto possui ao menos um subconjunto. Isso mesmo! Aqui não é diferente. A reta também possui subconjunto notáveis, quais sejam: *semirreta e segmento de reta.*

Quando falamos de semirreta, devemos sempre ter em mente a ideia literal de: "metade" de uma reta. Ou seja, a semirreta nada mais é que um "pedaço" de reta que possui uma de suas extremidades infinitas. Observe a figura abaixo.



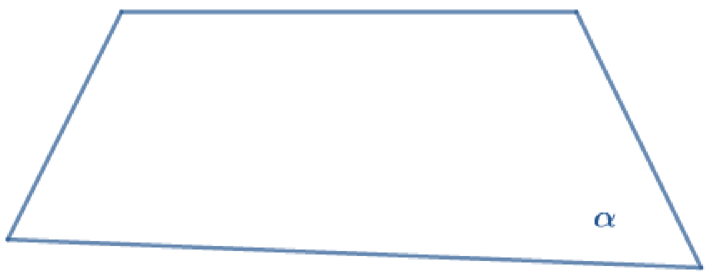
Note que o ponto A (origem das semiretas), pertencente a reta s, delimitou duas semirretas: a da esquerda e a da direta. Ressalto que essas semirretas não são infinitas em ambos os sentidos, mas em apenas um deles. Veja uma outra imagem que representa a semirreta $\overrightarrow{AB}$, com origem em A, devido ao sentido.

Por outro lado, temos uma semirreta $\overleftarrow{BA}$, com origem em B, da seguinte forma:

Agora, vamos entender o que venha a ser segmento de reta. Para a construção deste outro ente geométrico, faz-se necessário a existência de dois pontos pertencentes a reta original. Veja no exemplo abaixo, dois pontos, $A\ e\ B$, pertencentes a reta t , os quais determinam um "pedaço" denominado segmento de reta. Como exemplo prático podemos citar os lados do quadrado, que são segmentos de reta. Ressalto que em um segmento de reta em que as extremidades são coincidentes, dizemos que este segmento é nulo. Observe na figura abaixo um segmento de reta $\overline{AB}$:

- **Plano**

Usualmente, representamos o plano com letras minúsculas gregas: α, β, γ, ... Assim como a reta, ele deve ser entendido como um plano ilimitado sem bordas que o limite. A figura abaixo é apenas ilustrativa, mostrando uma parte do todo. Veja:

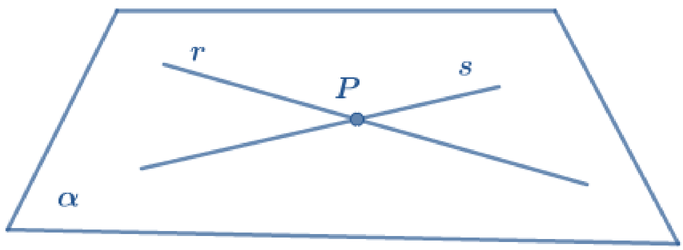


Um plano é determinado por três pontos não colineares (pontos que não pertençam a mesma reta).

Neste tópico, vamos estudar as principais posições relativas entre os entes estudados até agora. Destaco, entre elas, as seguintes: posição relativa entre $\boldsymbol{ponto\ e\ reta}$ e posição relativa entre $\boldsymbol{retas}$. Para iniciarmos, destaco as posições entre retas. Veja:

- **Retas concorrentes ou transversais**

Duas retas distintas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum. Destaco as retas que são concorrentes e formam um ângulo reto $(90º)$. A essas retas damos o nome de retas perpendiculares, representadas por $r \perp s$.

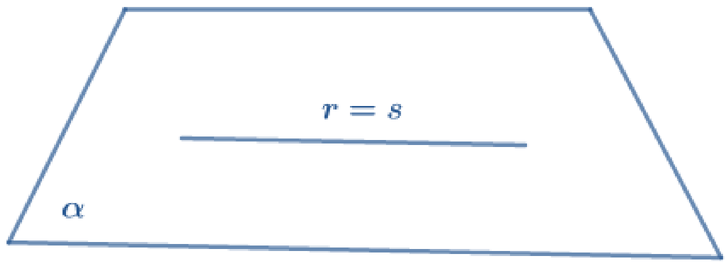


$$r \cap s = \{P\} \Longrightarrow o\ ponto\ P\ é\ a\ intersecção\ entre\ as\ retas.$$

- ## Retas paralelas

Se as retas r e s são paralelas e distintas entre si, então $r \cap s = \emptyset$. Simbolicamente, $r//s$ representa que a reta r é paralela à reta s. Temos duas possibilidades para $r//s$:

1) Quando r e s são coincidentes:



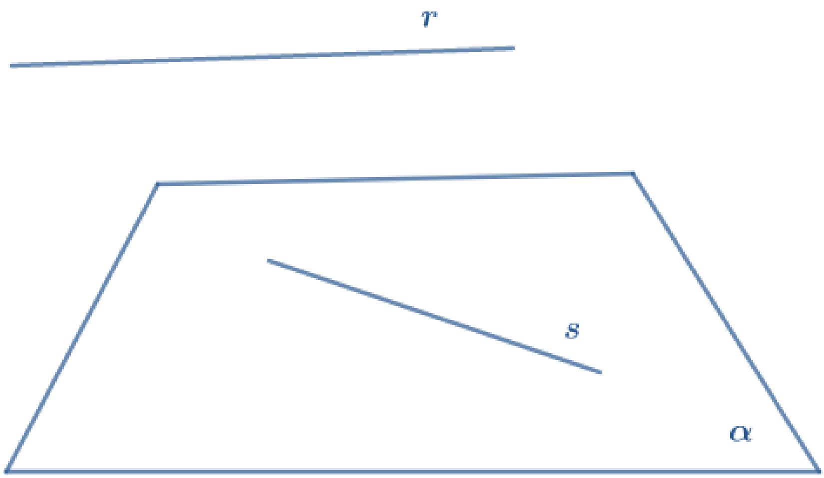
$$r \cap s = r = s \;\Rightarrow a\ intersecção\ entre\ as\ retas\ será\ igual\ a\ cada\ uma\ delas.$$

2) Quando r e s são distintas:

$$r \cap s = \{\ \ \} \Longrightarrow a\ intersecção\ entre\ as\ retas\ é\ um\ conjunto\ vazio.$$

- ## Retas reversas

Duas retas são reversas se, e somente se, não pertencem a um mesmo plano. Ou seja, nenhum plano consegue possuir as duas retas ao mesmo tempo. Para isso, faz-se necessário que as retas não se interceptem nem sejam paralelas entre si.

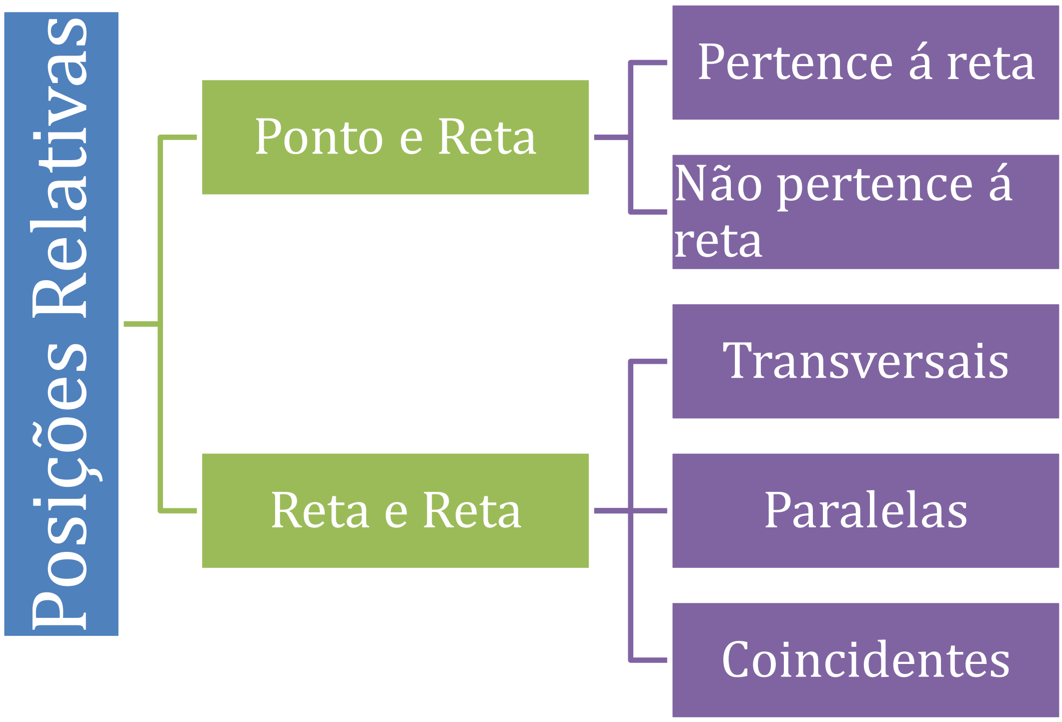


$$r \text{ e } s \text{ serão reversas } \Leftrightarrow \nexists \alpha \text{ tal que } r, s \subset \alpha \text{ e } r \cap s = \emptyset$$

Agora falaremos das posições entre os entes ponto e reta. Veja!

- **Ponto e Reta**

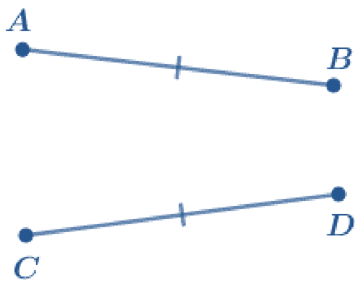
Neste novo conceito, temos que observar a posição do ponto em relação à reta da seguinte forma: se o ponto estiver sobre a reta, esse ponto pertencerá a ela. Caso contrário, não pertencerá. Veja um resumo dessas posições relativas:



2.1. Classificação dos Segmentos

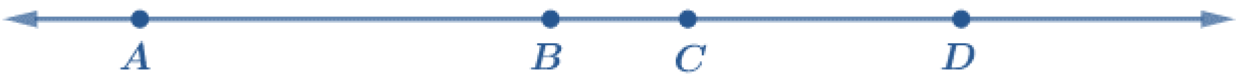
- **Congruentes**

Dois segmentos de reta são congruentes quando eles possuem as mesmas medidas. Usamos o símbolo ≡ para indicar a congruência. Veja:



- **Colineares**

Dois segmentos de reta são colineares quando eles pertencem a uma mesma reta suporte. Veja:



- **Consecutivos**

Dois segmentos de reta são consecutivos quando eles possuem uma extremidade comum. Como exemplos, temos: $\overline{AB}\ e\ \overline{BC}$, que são colineares. Veja:

- **Adjacentes**

Aqui o "bicho" começa a pegar, rsrsrs. No conceito de segmentos adjacentes estão presentes também os conceitos de colineares e consecutivos. Assim, dois segmentos de reta são adjacentes quando são colineares e consecutivos e possuem apenas uma extremidade comum. Veja:

$\overline{AB}\ e\ \overline{BC}$ são adjacentes, pois possuem apenas o ponto B comum.

$\overline{MN}$ e $\overline{NP}$não são adjacentes, pois possuem mais de uma extremidade em comum, ou seja:

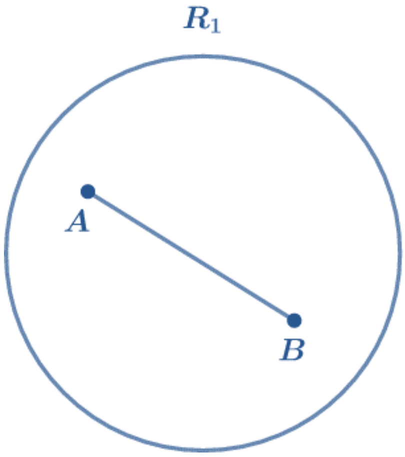
$$\overline{MN} \cap \overline{NP} = \overline{NP}$$

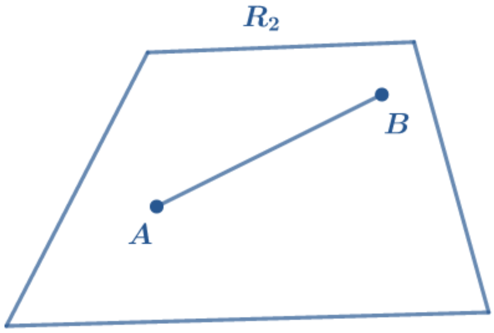
3. Ângulos

3.1. Região Convexa e Região Côncava

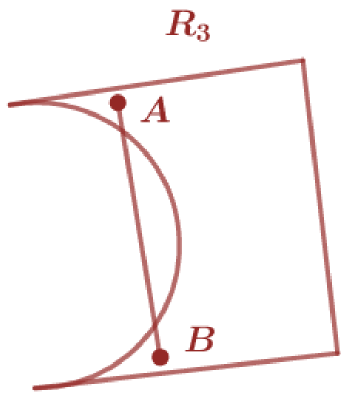
Um conjunto de pontos é convexo se, e somente se, para todo par de pontos A e B do conjunto, o segmento $\overline{AB}$ está inteiramente contida no conjunto. Caso contrário, esse conjunto de pontos é côncavo.

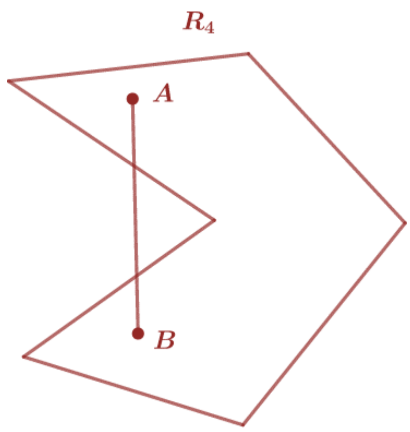
Exemplos:





Note que qualquer ponto pertencente ao segmento de reta $\overline{AB}$, pertence também ao conjunto R_1 e R_2.



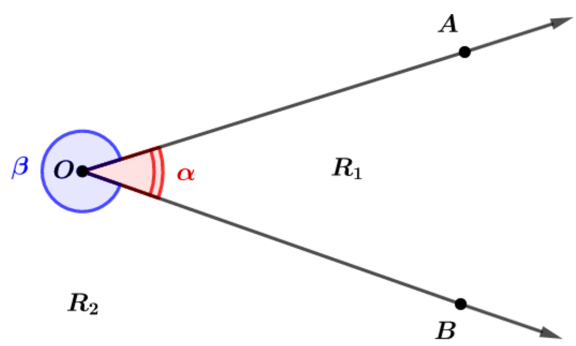


Observe agora que, a característica anterior não ocorre para os conjuntos R_3 e R_4. Logo, os conjuntos R_1 e R_2 são convexos e os conjuntos R_3 e R_4 são côncavos.

É isso! Simples, não!? Vamos seguir com a nossa teoria!

3.2. Definição de Ângulo

Chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas (chamadas de lados) não colineares de mesma origem.

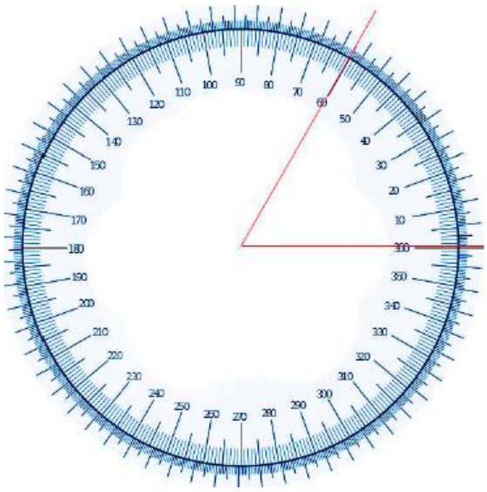


O ponto O é o vértice do ângulo e as semirretas OA e OB são os lados do ângulo.

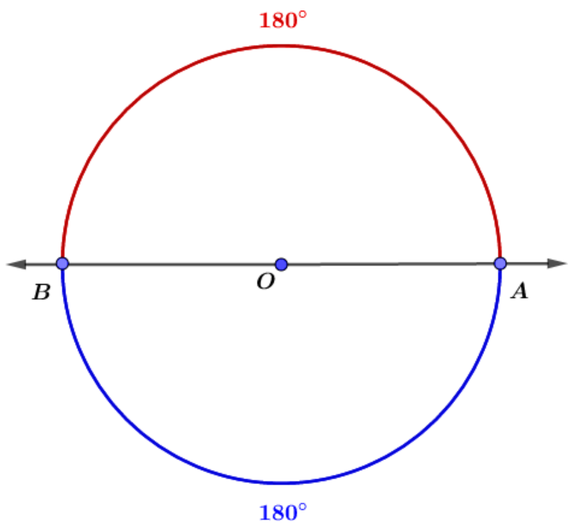
Perceba que, caso as semirretas não sejam opostas, o ângulo determina duas regiões angulares, um convexo e um côncavo. A região interna do ângulo R_1 é convexa e a região externa R_2 é côncava. Outro ponto que gostaria de destacar é que α é a notação usada para representar o ângulo da região convexa e β é o ângulo da região côncava. Também podemos usar a notação:

$$\alpha = A\hat{O}B = \hat{O} = \angle AOB$$

Agora, gostaria de destacar uma das duas maneiras existentes para se medir um ângulo: o $grau$. Na concepção geométrica, 1 (um) $grau$ nada mais é que $1/360$ avo de uma circunferência. Assim, cada unidade da divisão de uma circunferência em 360 partes representará 1 (um) $grau$. Veja a figura abaixo que ilustra bem o conceito acima com a representação de um ângulo de $60\ graus$ ou $60°$:



Em outras palavras, temos que um grau $(1°)$ é a unidade de medida determinada pela divisão de uma circunferência em 360 partes iguais. Assim, se dividimos uma circunferência ao meio, cada arco que obtemos terá a medida de 180°. Veja:



Aproveitando o tópico, podemos destacar as transformações desta unidade de medida tão conhecida. Veja:

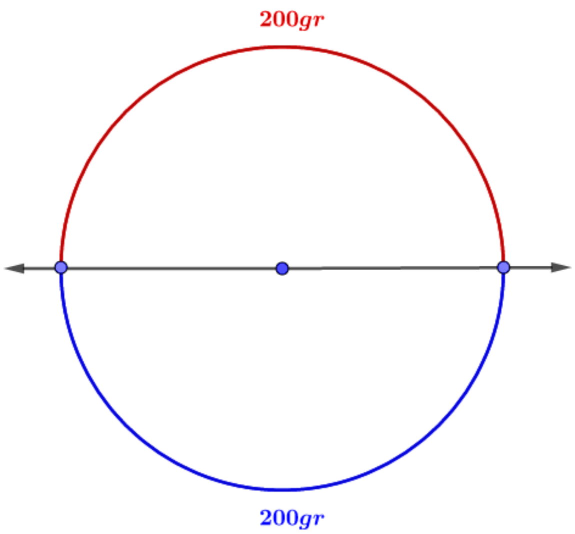
- Definimos um minuto por $1'$ e ele equivale a $1/60$ do ângulo de um grau.
- Um segundo é representado por $1''$ e equivale a 1/60 do ângulo de um minuto.

Dessa forma, temos as seguintes relações: $\mathbf{1^\circ = 60' = 3600''}$

Destaco, ainda, mais duas unidades usuais de medidas, são elas: *grado e radianos*. Vamos a elas!

- **Grado**

Um grado $(1\ gr)$ é a unidade de medida determinada pela divisão da circunferência em 400 partes iguais. Dessa forma, se dividimos a circunferência ao meio, cada arco terá a medida de $200\ gr$. Conclusão: $180^\circ = 200gr$. Veja:

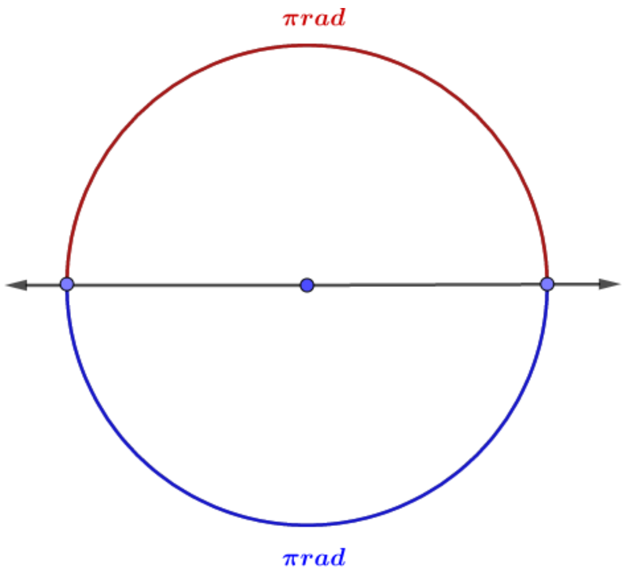


- **Radianos**

Um radiano $(1\ rad)$ é a unidade de medida igual ao comprimento do raio da circunferência.

Devemos saber que o comprimento total de uma circunferência é dado por: $C\ = 2\pi r$, em que r é o raio da circunferência e C é o seu comprimento total. Tenha em mente que: π, lê-se "pi", além disso, seu valor numérico é aproximadamente: $\pi\ \cong 3{,}14$.

Sabendo que $r = 1rad$, se $2\pi r$ é o comprimento da circunferência, então o arco de uma volta completa corresponde a $2\pi\, rad$.



Vimos os três principais tipos de medidas usadas para os ângulos. Podemos estabelecer a seguinte equivalência entre elas: $\mathbf{2\pi\, rad = 360° = 400\ gr}$

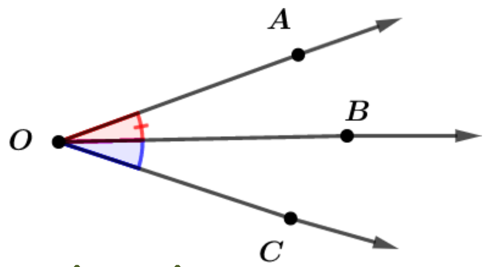
A tabela abaixo esquematiza essas relações:

Grau	Grado	Radiano
360°	$400gr$	$\mathbf{2\pi\, rad}$
180°	$\mathbf{200gr}$	$\mathbf{\pi\, rad}$

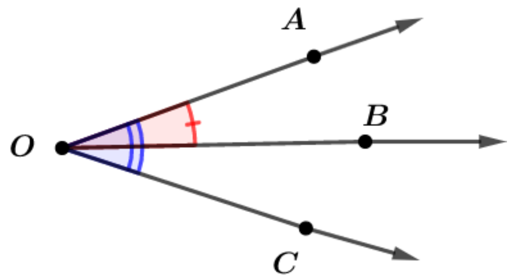
3.3. Classificação dos Ângulos

- **Ângulo Adjacente**

Dois ângulos são adjacentes se, e somente se, não tem pontos internos comuns, ou seja, são ângulos que não possuem interseção. Veja:



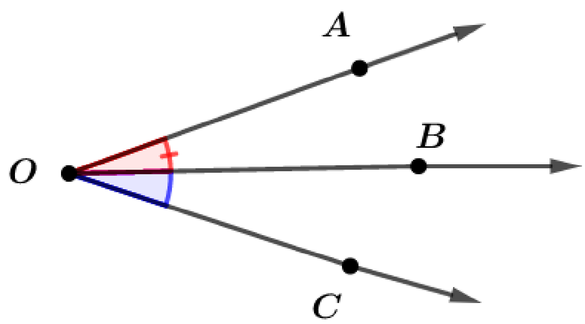
$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes



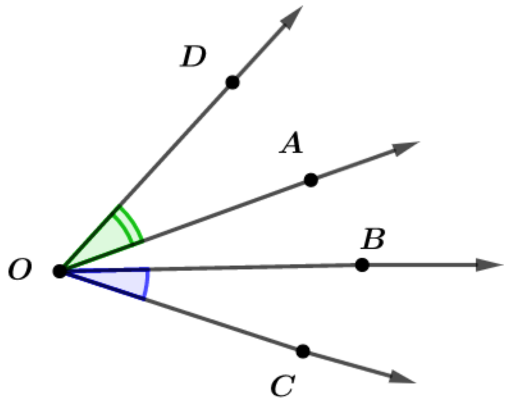
$A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ não são adjacentes, pois $A\hat{O}B$ possui pontos internos comuns com $A\hat{O}C$

- **Ângulo Consecutivo**

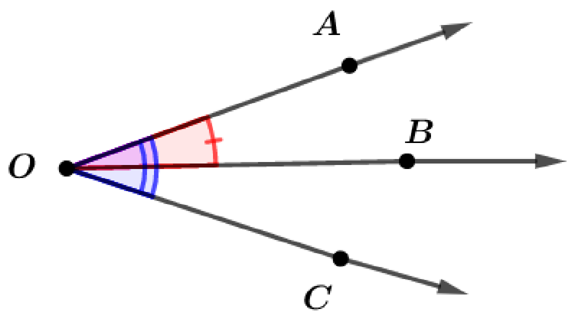
Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, um lado de um deles coincide com o lado do outro.



$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são consecutivos, pois possuem o lado OB em comum



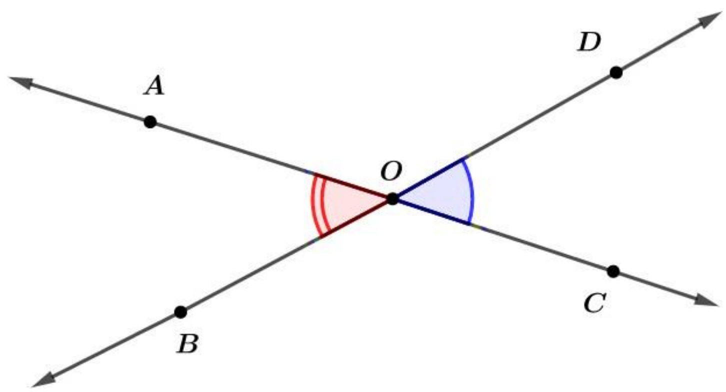
$A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ não são consecutivos, pois não possuem lado em comum



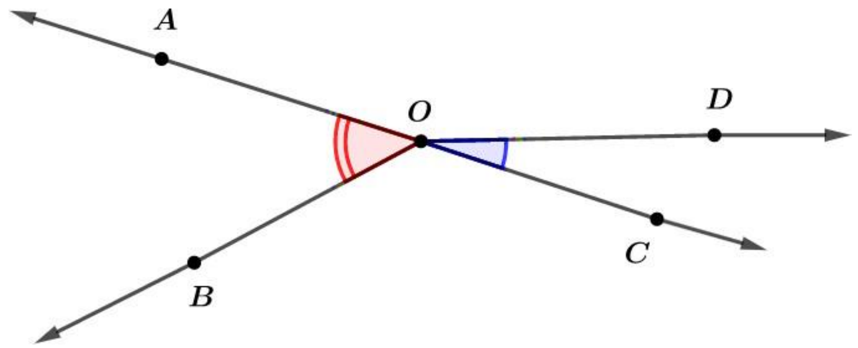
$A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$ são consecutivos, pois possuem o lado OA em comum

- **Ângulos Opostos pelo Vértice**

Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um deles são as semirretas opostas dos lados do outro. Consequentemente, esses ângulos são iguais. Veja:

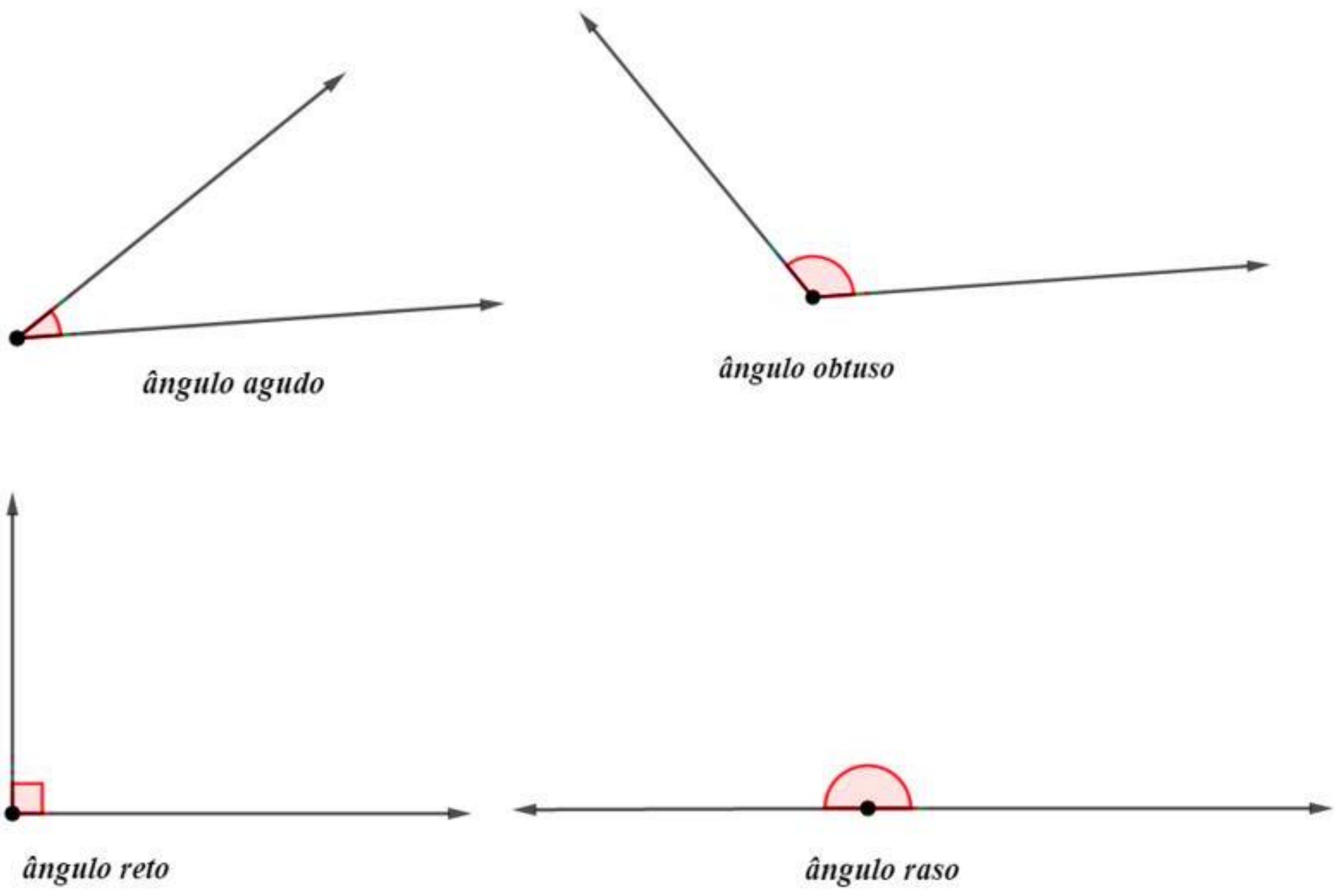


$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice



$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ não são opostos pelo vértice, pois o lado D não é a semirreta oposta de OB

- **Ângulo Reto, Agudo, Obtuso e Raso**



Ângulo agudo é todo ângulo menor do que $90°$.

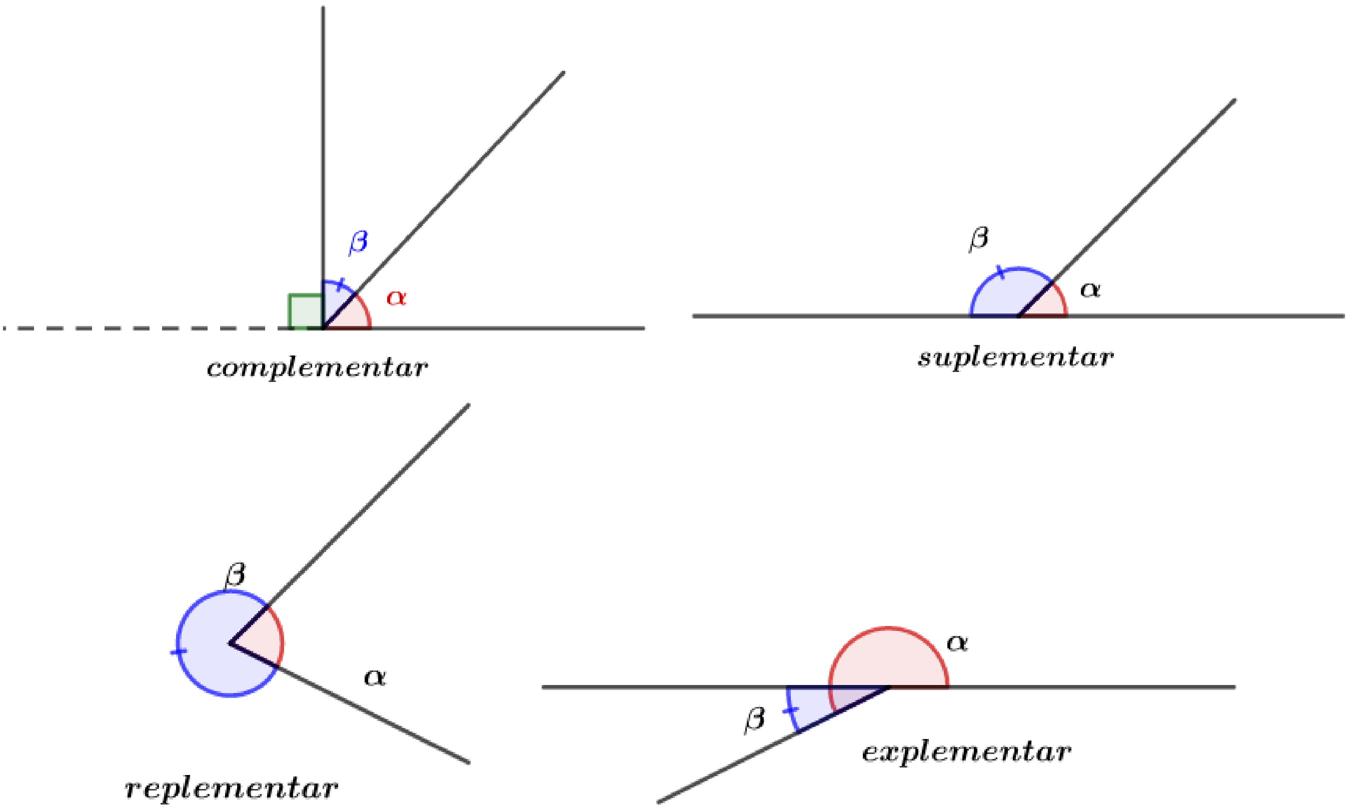
Ângulo obtuso é todo ângulo maior do que $90°$.

Ângulo reto é todo ângulo igual a $90°$.

Ângulo raso é todo ângulo igual a $180°$.

Tipo de Ângulo	Condição
Agudo	$< 90°$
Obtuso	$> 90°$
Reto	$= 90°$
Raso	$= 180°$

- **Ângulo Complementar, Suplementar, Replementar e Explementar**



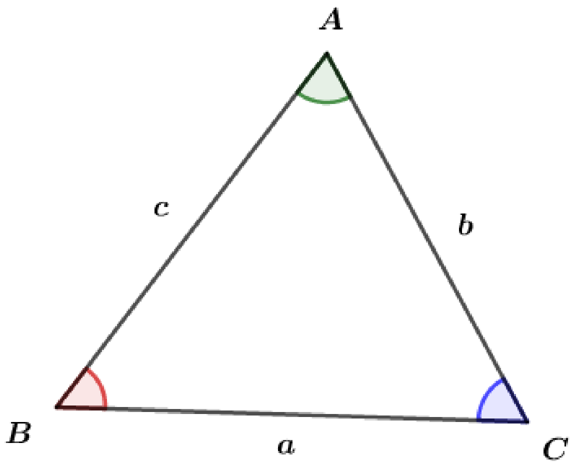
Classificação para α e β	Condição
Complementar	$\alpha + \beta = 90°$
Suplementar	$\alpha + \beta = 180°$
Replementar	$\alpha + \beta = 360°$
Explementar	$\alpha - \beta = 180°$

4. Triângulos

4.1. Definição

Dados três pontos A, B e C não colineares, os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{AC}$ definem o triângulo ABC e $\hat{C}, \hat{A}\ e\ \hat{B}$ são os ângulos opostos a esses respectivos lados.

Dizemos que A, B e C são os vértices do triângulo e os segmentos formados por esses pontos são os lados do triângulo.



4.2. Classificação dos Triângulos

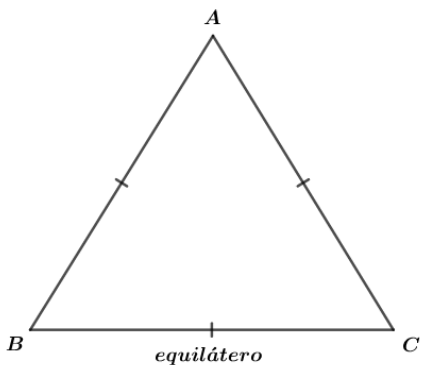
Existem diversas classificações quando falamos de triângulos. Vamos estudar cada uma delas. A primeira será a classificação quanto aos lados. Veja:

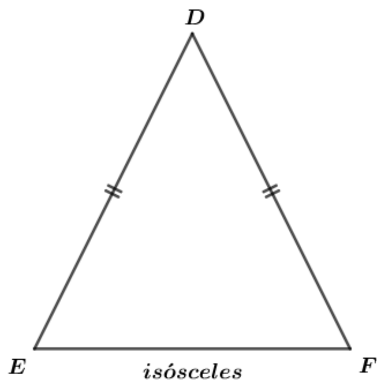
- **Quanto aos lados**

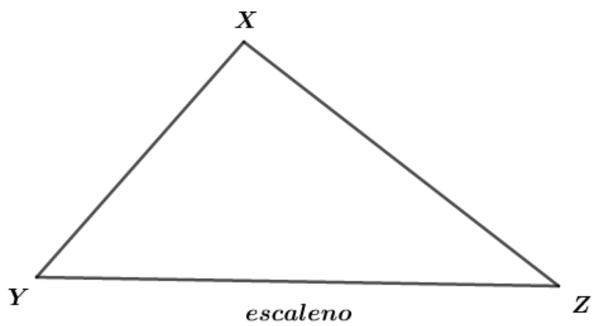
Equilátero se, e somente se, todos os seus lados são congruentes.

Isósceles se, e somente se, possui dois lados congruentes.

Escaleno se, e somente se, nenhum lado é congruente.





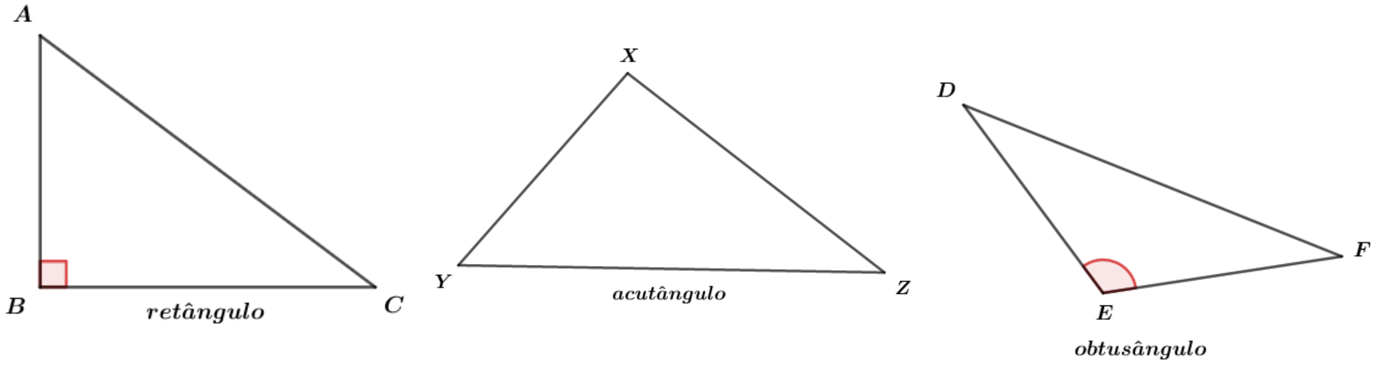


- **Quanto aos ângulos**

Retângulo se, e somente se, possui um ângulo reto.

Acutângulo se, e somente se, todos os ângulos internos são agudos.

Obtusângulo se, e somente se, possui um ângulo obtuso.



- ## Síntese de Clairaut

Seja um triângulo qualquer de lados a, b e c, podemos classificar o triângulo de acordo com as seguintes condições:

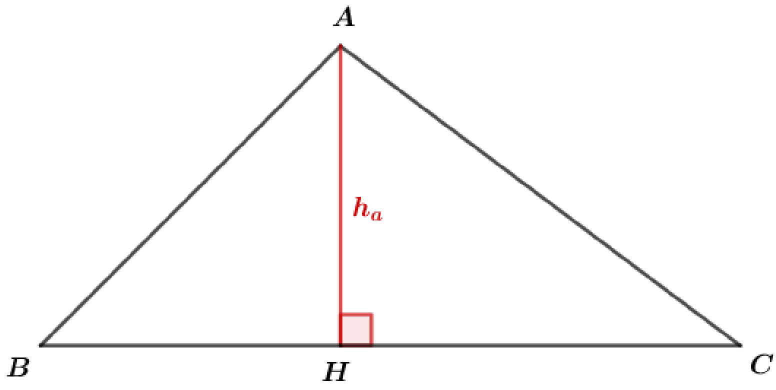
Condição	Tipo de triângulo
$a^2 < b^2 + c^2$	**Acutângulo**
$a^2 = b^2 + c^2$	**Retângulo**
$a^2 > b^2 + c^2$	**Obtusângulo**

4.3. Cevianas Notáveis

Definimos como ceviana qualquer reta que passa pelo vértice do triângulo. Vamos estudar as principais:

- ## Altura

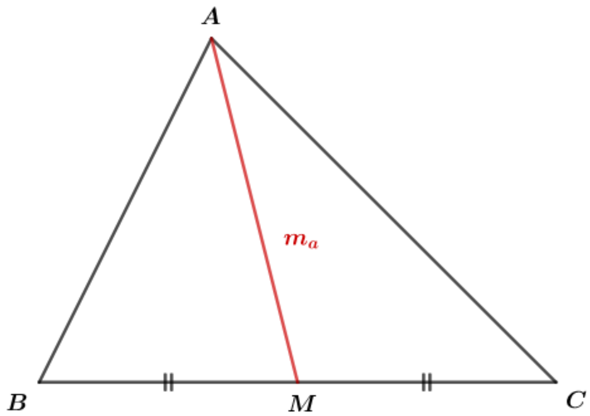
Usualmente, usamos a letra h para denotar a altura de um triângulo. Ela é um segmento que passa pelo vértice do triângulo e forma um ângulo reto com o lado oposto desse vértice. Veja:



$\overline{AH}$ é a altura do vértice A.

- ## Mediana

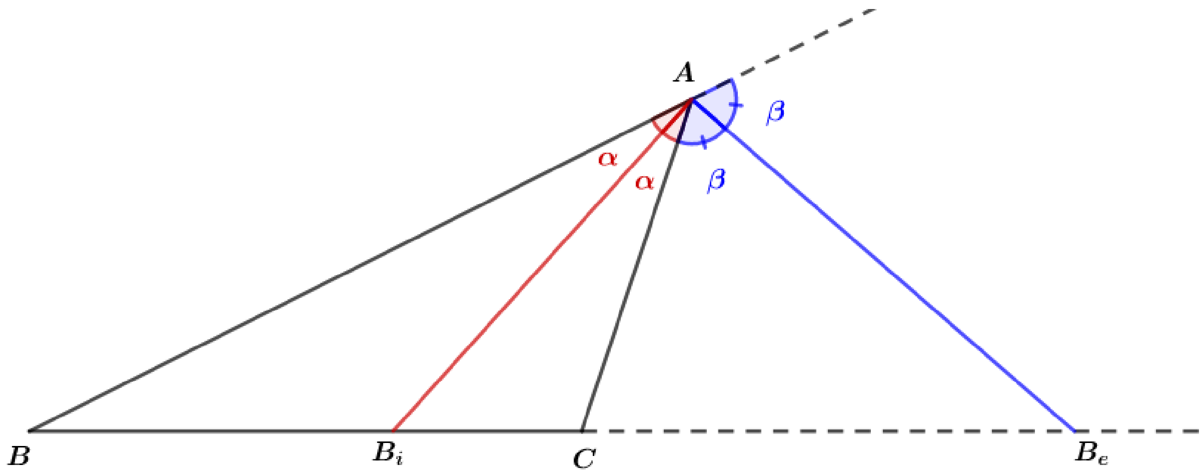
A mediana de um triângulo é o segmento que passa pelo vértice e pelo ponto médio do lado oposto ao vértice. Veja:



$\overline{AM}$ é a mediana do vértice A.

- ## Bissetrizes interna e externa

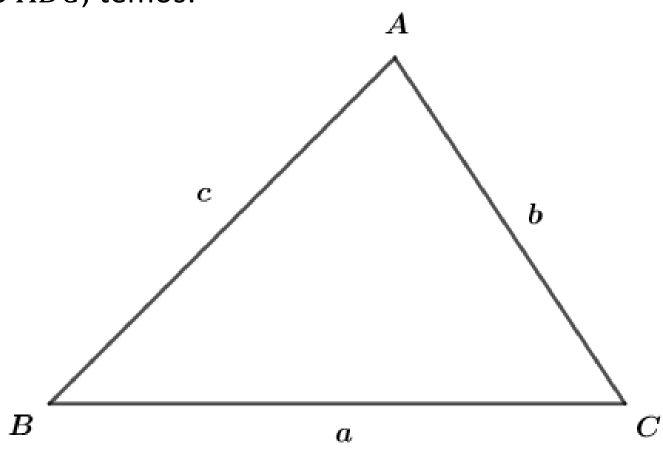
A bissetriz interna de um triângulo é o segmento que divide o ângulo interno em dois ângulos congruentes. A bissetriz externa é o segmento que divide o ângulo externo em dois ângulos congruentes.



$\overline{AB}$ é a bissetriz interna do ΔABC e $\overline{AB}$ é a sua bissetriz externa.

4.4. Condição de Existência do Triângulo

Na geometria plana, temos o postulado da distância mínima que afirma: "A menor distância entre dois pontos é uma reta". Por esse postulado, podemos estudar a condição de existência do triângulo. Assim, para um triângulo ABC, temos:



$$a < b + c$$

$$b < a + c \Rightarrow b - c < a$$

$$c < a + b \Rightarrow c - b < a$$

$$|b - c| < a < b + c$$

Essa desigualdade é conhecida como desigualdade triangular.

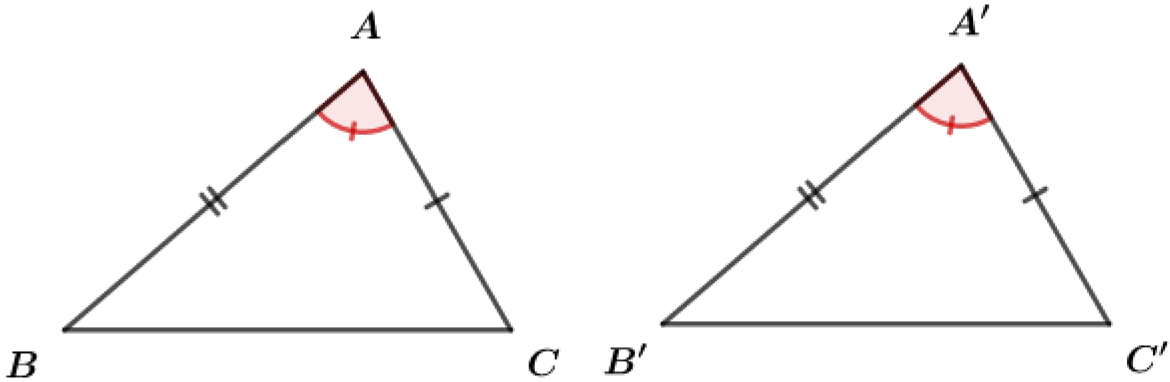
4.5. Congruência de Triângulos

Podemos afirmar que dois ou mais triângulos são congruentes se, e somente se, todos os lados e ângulos internos deles forem congruentes na mesma ordem.

Um postulado que consegue garantir a congruência de triângulos é o LAL, esse postulado gera outros teoremas que também provam a congruência de triângulos. Não veremos a demonstração dos teoremas, pois o que nos interessa é saber como aplicá-los.

- **Postulado LAL (lado-ângulo-lado)**

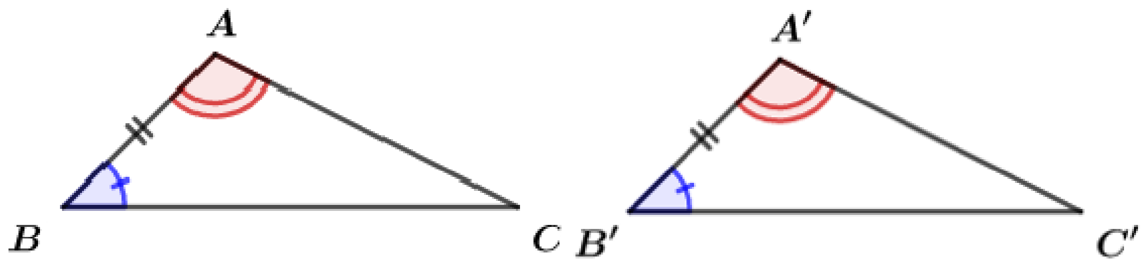
Esse postulado diz que se dois triângulos tiverem dois lados e o ângulo entre esses lados congruentes, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes.



$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AB} \equiv \overline{AB'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

- **Teorema ALA (ângulo-lado-ângulo)**

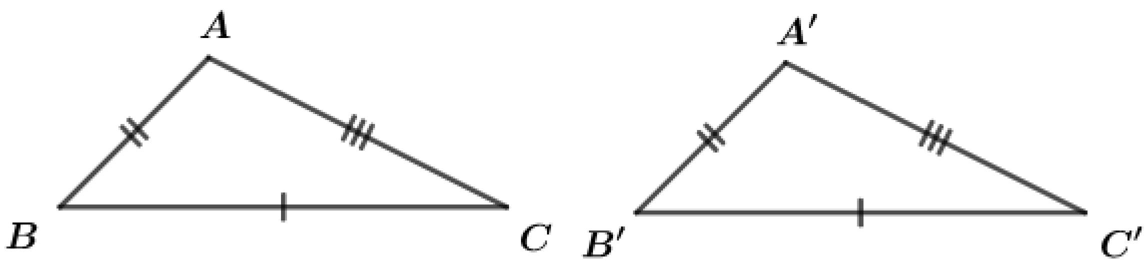
Se o lado e os ângulos adjacentes de dois triângulos forem congruentes ordenadamente, podemos afirmar que os triângulos são congruentes.



$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

- **Teorema LLL (lado-lado-lado)**

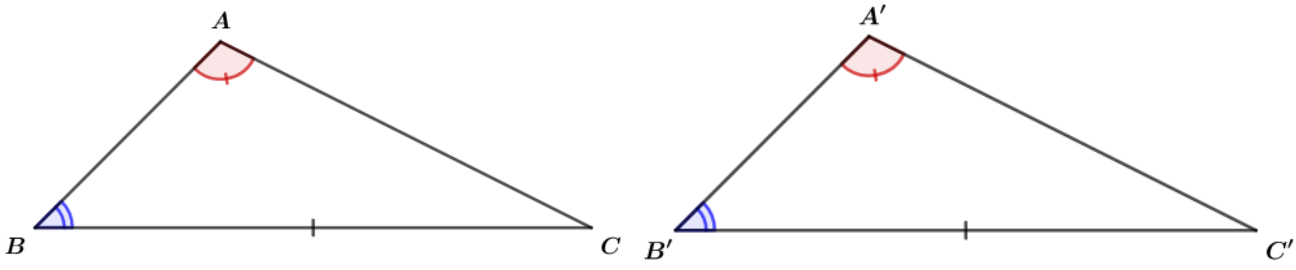
Se os três lados de dois triângulos são ordenadamente congruentes, esses triângulos são congruentes.



$$\begin{cases} \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \overline{AB} \equiv \overline{AB'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

- **Teorema LAA_0 (lado-ângulo adjacente-ângulo oposto)**

Se dois triângulos tiverem o lado, ângulo adjacente e ângulo oposto desse lado congruentes, então esses triângulos são congruentes.



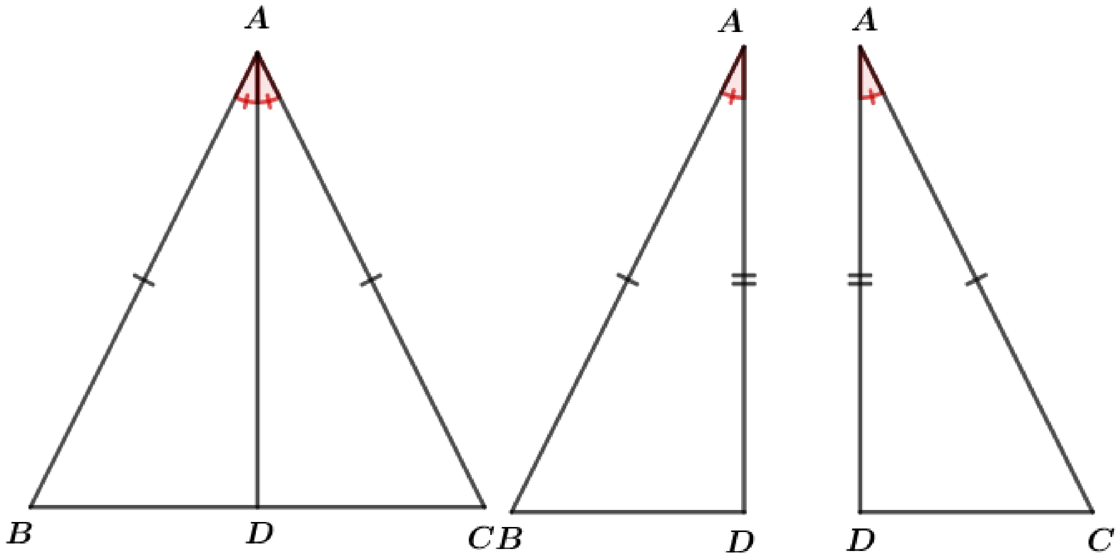
$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \widehat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C$$

4.6. Consequência do Postulado LAL

- **Triângulo Isósceles**

Sabemos que um triângulo ABC é isósceles se, e somente se, possui dois lados iguais.

Seja ΔABC isósceles com $AB = AC$. Traçando-se a bissetriz no vértice A, temos:



Como AD é a bissetriz do vértice A, temos $B\hat{A}D = C\hat{A}D$.

Usando o postulado LAL, sabemos que $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$. Então, os elementos correspondentes são congruentes:

$$\Delta ABD \equiv \Delta ACD$$

$$AB = AC \Rightarrow BD = CD \Rightarrow \overline{AD} \text{ é } mediana$$

$$\Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$$

$$A\widehat{D}B = A\widehat{D}C = \theta \Rightarrow \theta + \theta = 180° \Rightarrow \theta = 90° \Rightarrow \overline{AD} \text{ é } altura$$

Como $\overline{AD}$ é mediana e altura ao mesmo tempo, temos por definição que $\overline{AD}$ é mediatriz do triângulo ABC. Perceba que todos os pontos da mediatriz do segmento $\overline{BC}$ são equidistantes das extremidades B e C. Então, se não soubéssemos que o triângulo ABC era isósceles, pelo fato do segmento AD ser mediatriz, poderíamos afirmar que ele é isósceles. Isso pode ser provado pelo postulado LAL:

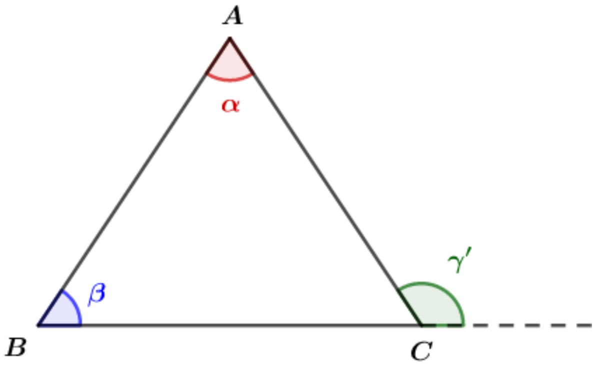
$$BD \equiv DC$$

$$B\widehat{D}A \equiv C\widehat{D}A \Rightarrow \Delta BDA \equiv \Delta CDA \Rightarrow AB = AC$$

$$DA \equiv DA$$

- **Teorema do Ângulo Externo**

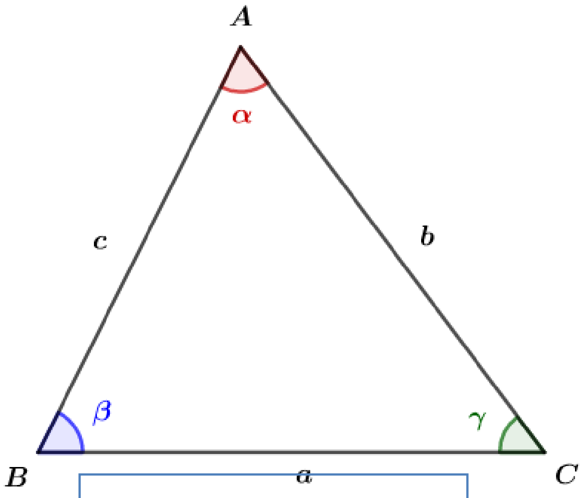
O Teorema do Ângulo Externo diz que: um ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer um dos ângulos internos não adjacente.



$$\gamma' > \alpha$$
$$\gamma' > \beta$$

- **Desigualdades no Triângulo**

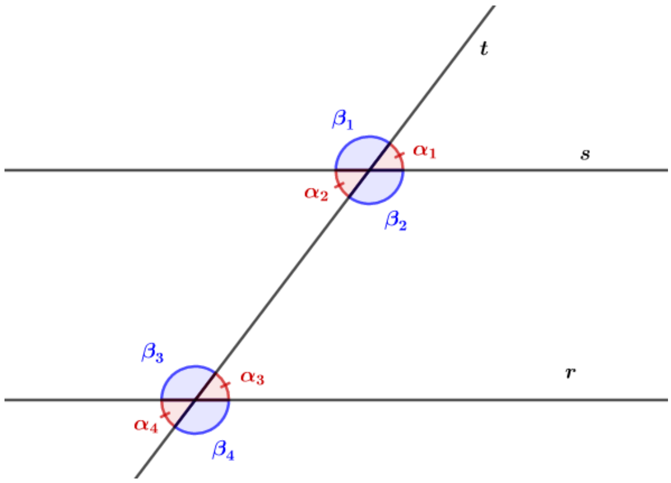
Dado o triângulo ABC abaixo, temos: podemos afirmar que o maior ângulo possui o maior lado oposto. Demonstração:



$$\boxed{a > b > c \Leftrightarrow \alpha > \beta > \gamma}$$

4.7. Ângulos de Retas Paralelas

Sejam as retas r, s, t dadas tal que $r//s$ e t cruza as outras duas. Os ângulos formados pelo cruzamento de t com r e s possuem uma relação entre eles, veja:



Os ângulos α_1, α_2, α_3, α_4 são congruentes e os ângulos β_1, β_2, β_3, β_4 são congruentes.

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv \alpha_4$$

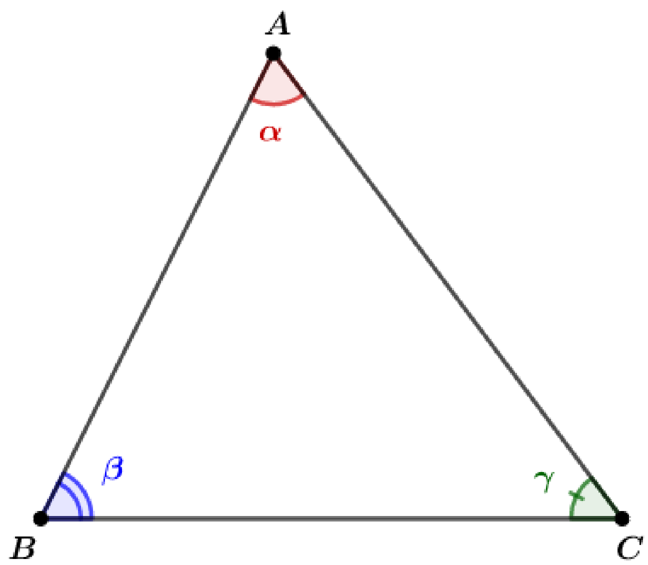
$$\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv \beta_3 \equiv \beta_4$$

Esses ângulos recebem as seguintes denominações:

Classificações	Par de ângulos
Alternos internos	α_2 e α_3 β_2 e β_3
Alternos externos	α_1 e α_4 β_1 e β_4
Colaterais internos	α_2 e β_3 β_2 e α_3
Colaterais externos	α_1 e β_4 α_4 e β_1

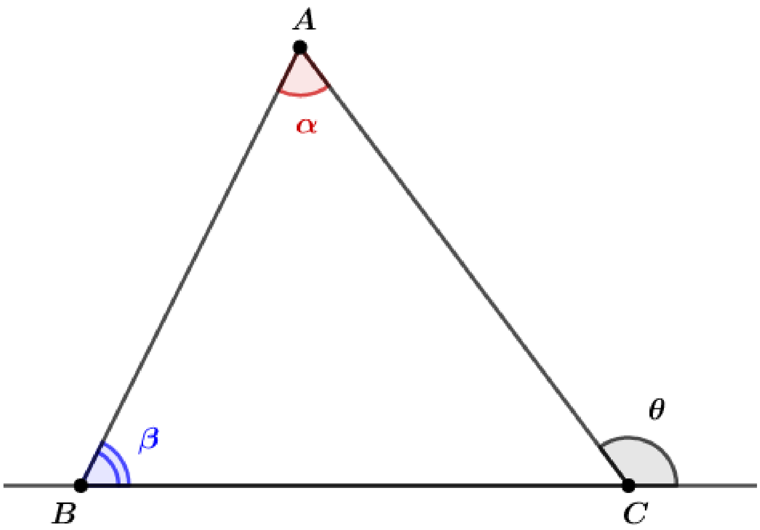
4.8. Teorema Angular de Tales

I. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$.



$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

II. O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

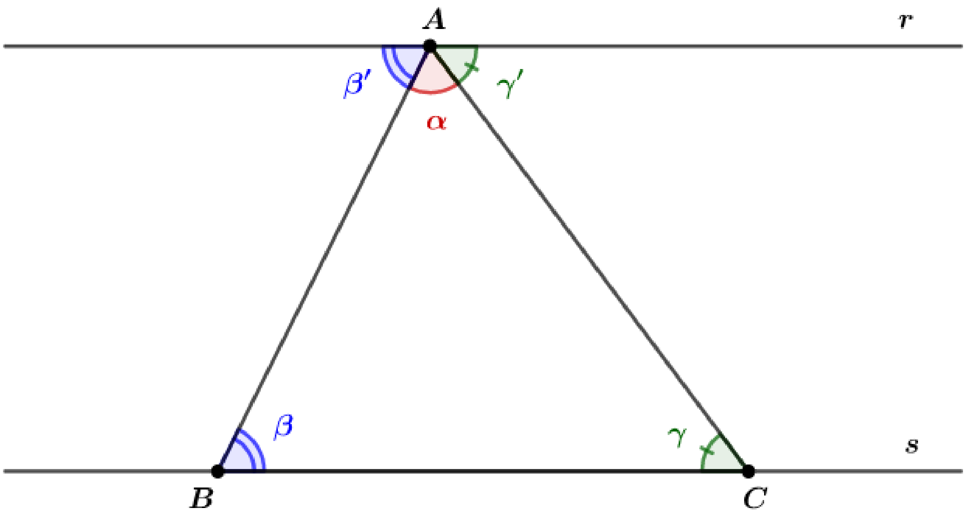


$$\boxed{\theta = \alpha + \beta}$$

Demonstração:

I. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Traçando-se as retas r e s tal que $\overline{BC} \subset s, A \subset r$ e $r//s$

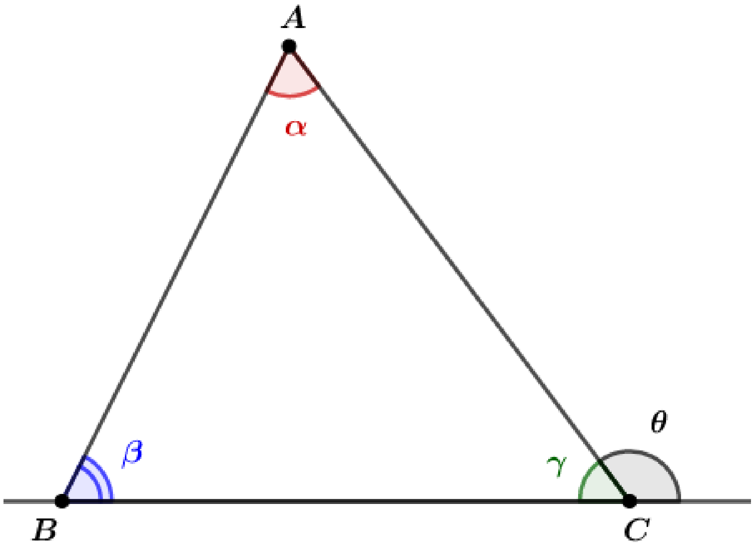


α, β' e γ' são elementos de um ângulo raso, então $\alpha + \beta' + \gamma' = 180°$.

Como $r//s$, temos $\beta \equiv \beta'$ e $\gamma \equiv \gamma'$. Portanto:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

III. O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.



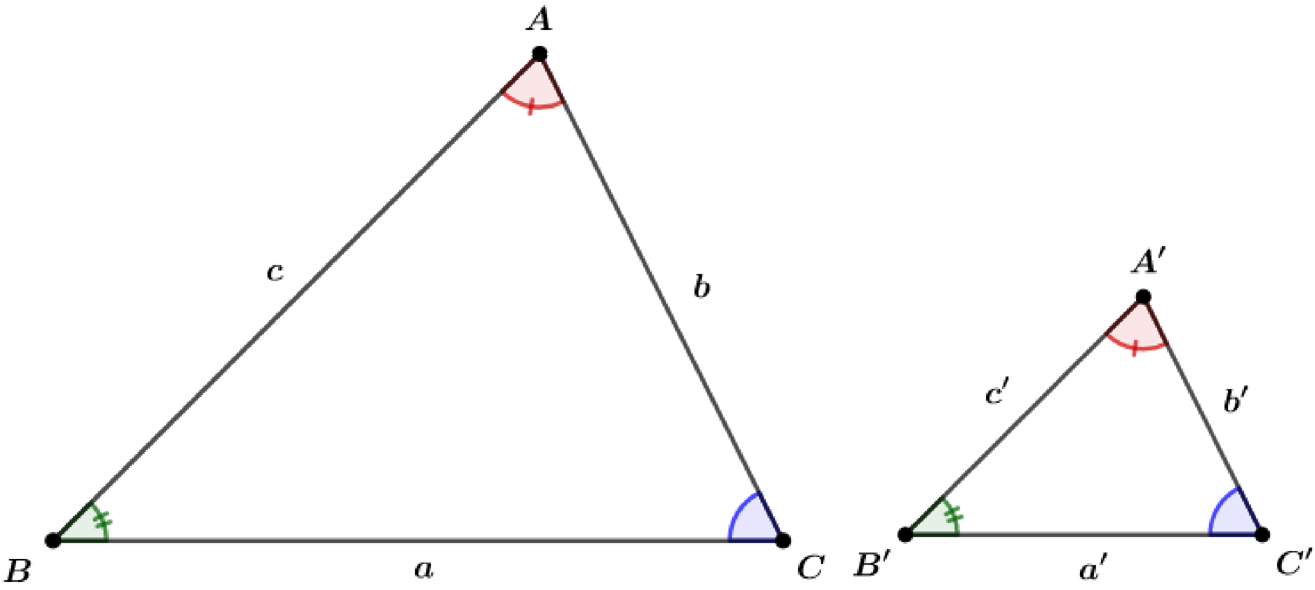
Podemos ver que $\gamma + \theta = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - \theta$. Pelo Teorema I, sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Substituindo o valor de γ na equação acima, temos:

$$\alpha + \beta + (180° - \theta) = 180°$$

$$\therefore \theta = \alpha + \beta$$

5. Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os ângulos internos são congruentes e os lados opostos a esses ângulos congruentes são proporcionais entre si. Usamos o símbolo $\sim$ para indicar que dois triângulos são semelhantes.

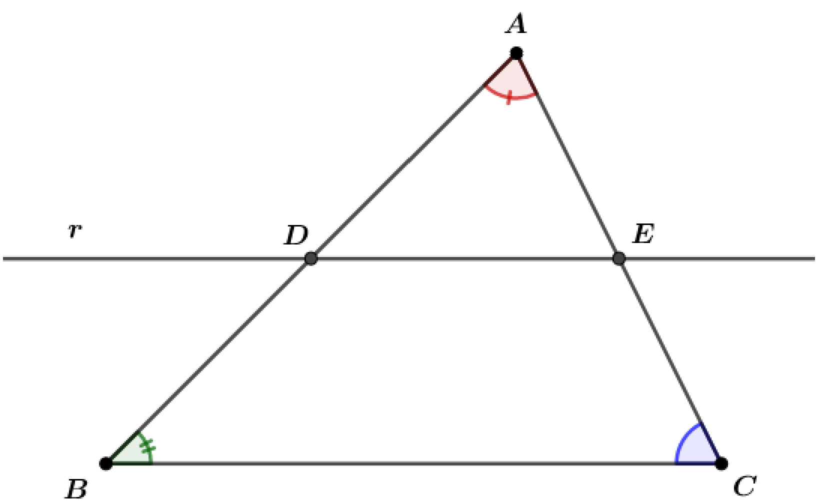


$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C' \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

Definimos k como a razão de semelhança dos triângulos semelhantes.

5.1. Teorema Fundamental

Dado o seguinte triângulo ABC e a reta r que passa por ele nos pontos D e E, temos:



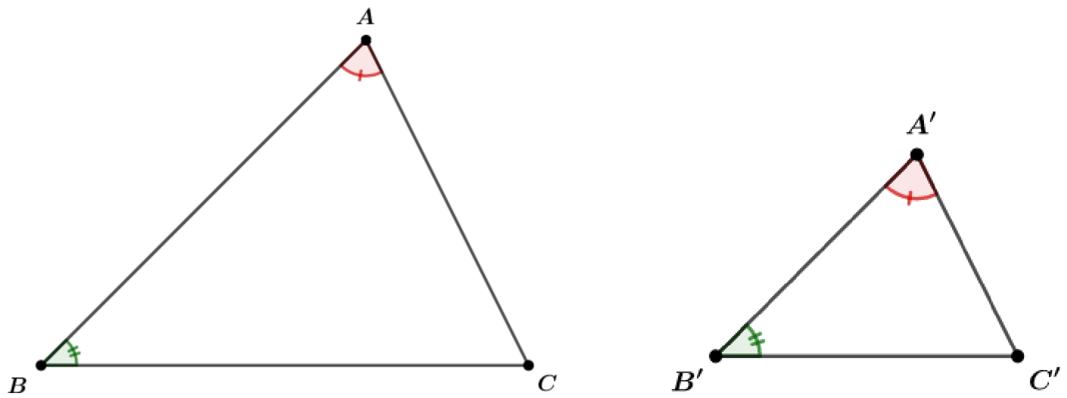
$$\boxed{\boldsymbol{r//BC \Leftrightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC}}$$

Se a reta r for paralela a um dos lados de um triângulo ABC, o ΔADE que ele determina é semelhante ao ΔABC.

5.2. Critérios de Semelhança

- **AA (dois ângulos congruentes)**

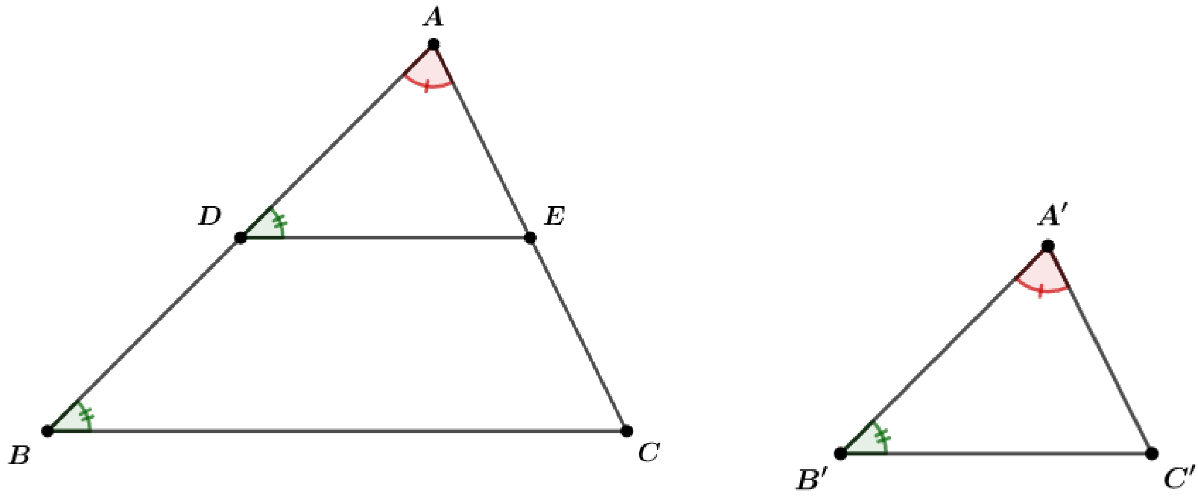
Se dois triângulos tiverem dois ângulos congruentes, eles serão semelhantes.



$$\begin{matrix} \hat{A} \equiv \hat{A} \\ B \equiv B' \end{matrix} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Demonstração:

Supondo que $AB > A'B'$, podemos construir um triângulo ADE no triângulo ABC tal que $D \equiv \hat{B}$ e $AD \equiv A'B'$:



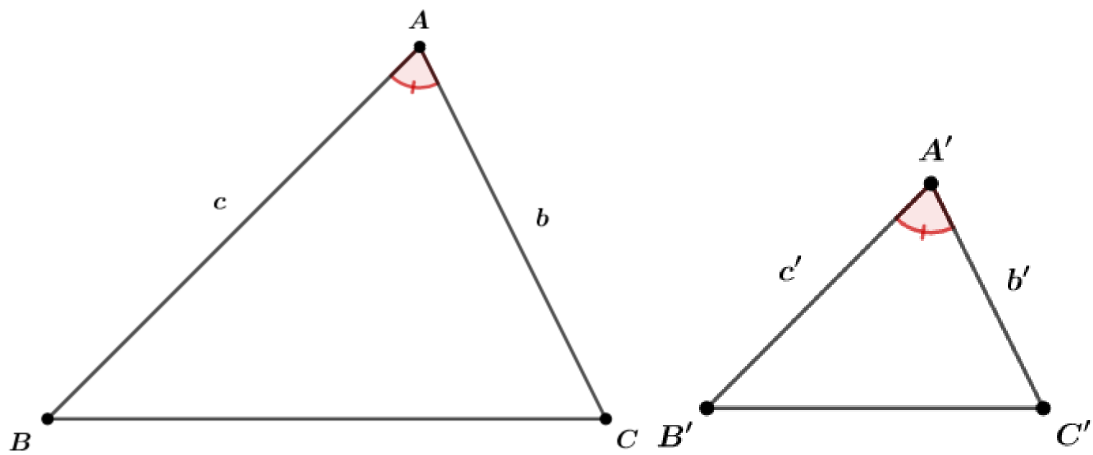
Pelo critério de congruência ALA, podemos afirmar que $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$

Como $B \equiv B' \equiv D$, temos que $\overline{DE}//\overline{BC}$, portanto, $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

Como $\sim\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$, temos $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Logo, são semelhantes

- **LAL (lado-ângulo-lado)**

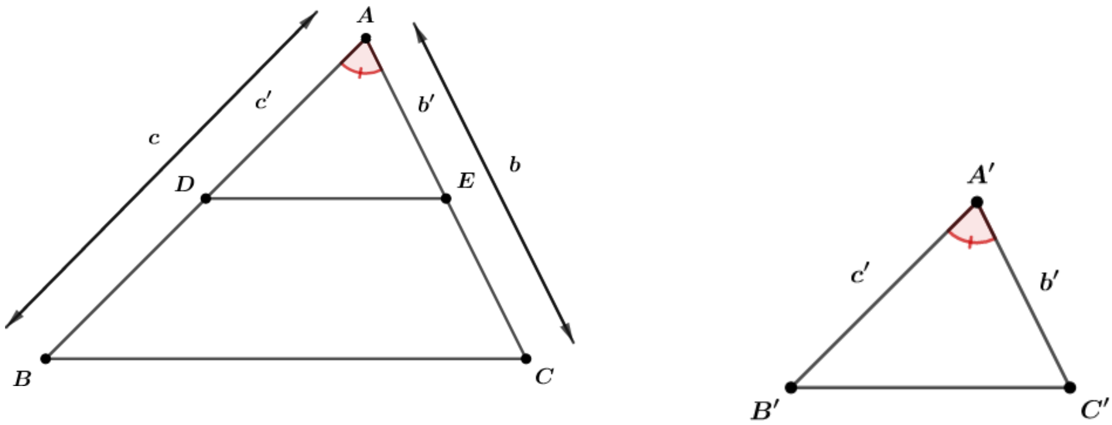
Se dois triângulos tiverem dois lados proporcionais e o ângulo compreendido entre eles for congruente, então esses triângulos são semelhantes.



$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Demonstração:

Supondo $AB > A'B'$, vamos traçar o segmento de reta $\overline{DE}$ no triângulo ABC tal que $AD \equiv A'B'$ e $AE \equiv A'C'$:



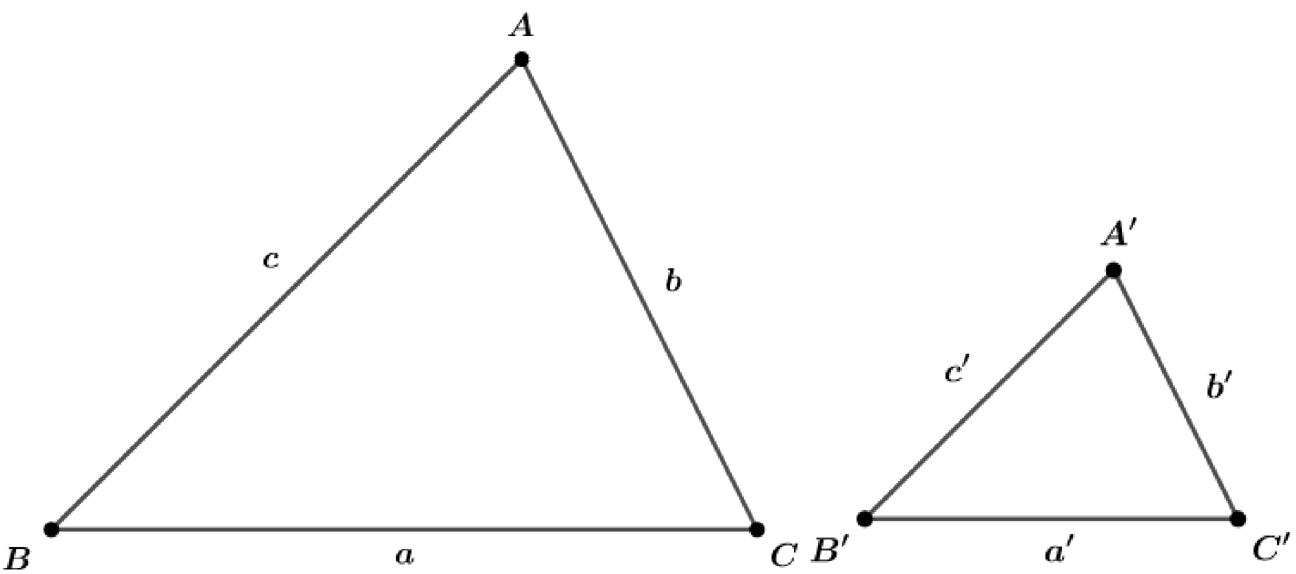
Pelo Teorema de Tales, como $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$, temos que $\overline{DE}//\overline{BC}$. Então, $\widehat{D} \equiv \widehat{B}$ e $\widehat{E} \equiv \widehat{C}$

Usando o critério de congruência LAL, temos $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$. Logo, $\widehat{D} \equiv \widehat{B}'$ e $\widehat{E} \equiv \widehat{C}'$

Portanto, pelo critério de semelhança AA, podemos ver que $\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$ implica $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

- **LLL (lado-lado-lado)**

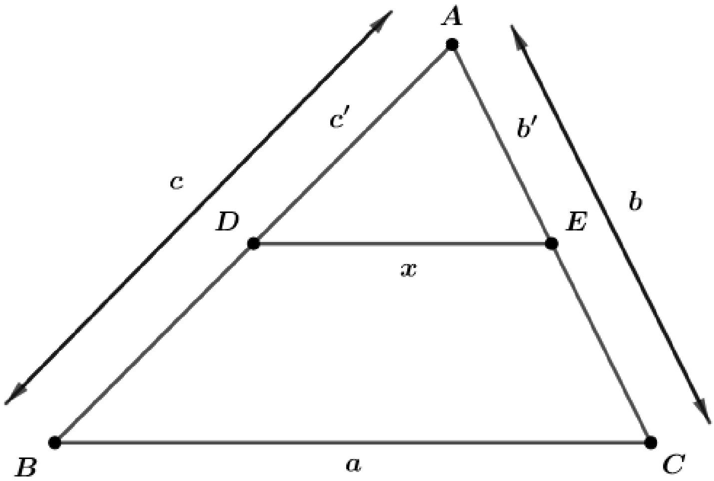
Se dois triângulos tiverem os lados correspondentes proporcionais entre si, então eles são semelhantes.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Demonstração:

Supondo que $AB > A'B'$, podemos traçar o segmento de reta $\overline{DE}$, tal que $AD \equiv A'B'$ e $AE \equiv A'C'$



Usando o Teorema de Tales:

$$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow DE\ //\ BC$$

Então:

$$\hat{D} \equiv \hat{B} \text{ e } \hat{E} \equiv \hat{C} \Longrightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$$

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Da hipótese, temos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Portanto:

$$a' = x$$

$$\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$$

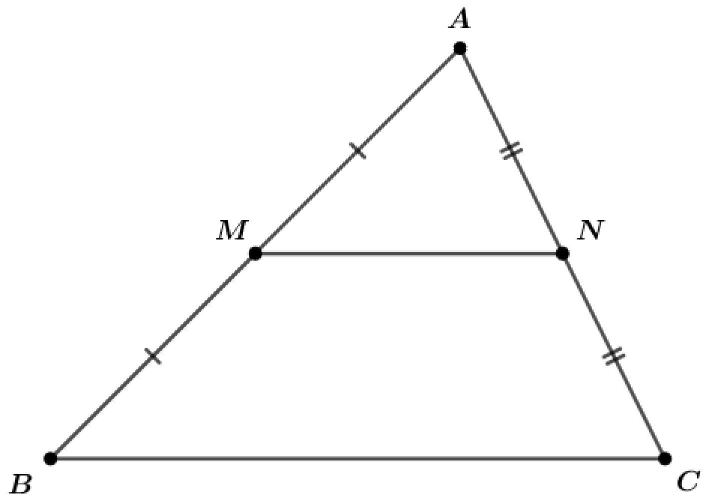
$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

5.3. Propriedades

As seguintes propriedades decorrem da semelhança de triângulos.

- **Base Média**

Seja ABC, um triângulo qualquer. Se M é o ponto médio do lado AB e N é o ponto médio do lado AC, temos:



Pelo Teorema de Tales, sendo $AM = MB$ e $AN = NC$:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \; // \; BC$$

Deste modo:

$$M \; \equiv B \text{ e } N \; \equiv C$$

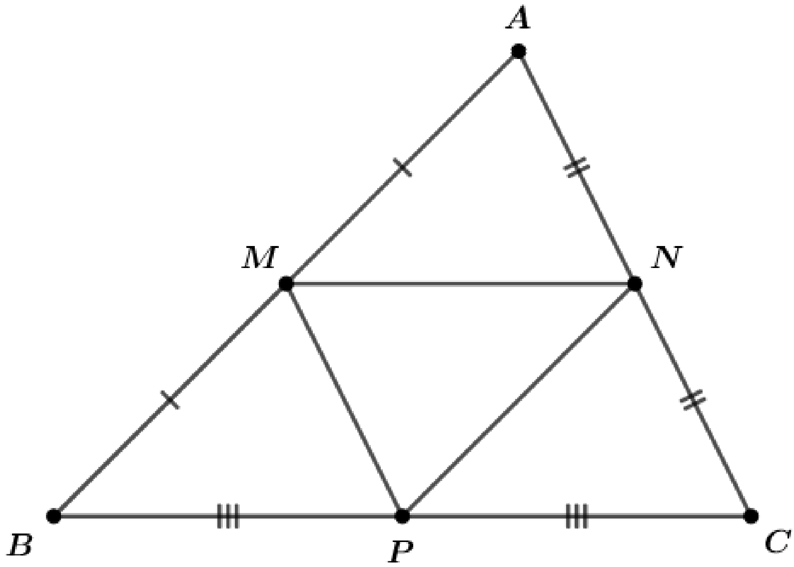
Pelo critério de semelhança AA, temos:

$$\Delta AMN \sim \Delta ABC$$

A razão de proporção entre eles é $1/2$:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

Se BC é a base do triângulo ABC, então MN é chamado de base média do triângulo ABC. Tomando-se P, o ponto médio do lado BC e formando o triângulo MNP, encontramos:



Vimos que MN é paralelo ao lado BC, analogamente, para os outros lados, podemos provar que $NP//AB$ e $MP//AC$. Então, o triângulo MNP é semelhante ao triângulo ABC e possui razão igual a $1/2$.

- **Razão de Proporção**

Se a razão de proporção de dois triângulos é k, então a razão entre seus elementos lineares correspondentes é k. Assim, a razão entre:

- suas alturas é k;

- suas medianas é k;

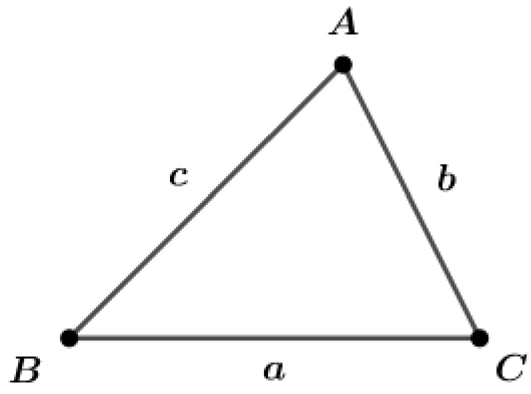
- seus perímetros é k;

- os raios das circunferências inscritas é k;

- os raios das circunferências circunscritas é k;

- dois elementos lineares e homólogos é k.

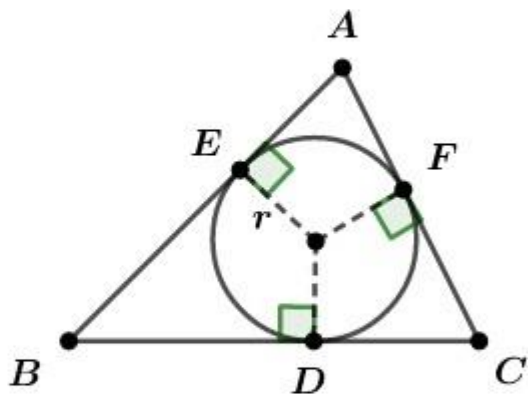
Chamamos de perímetro a soma de todos os lados de um triângulo, então para um triângulo ABC:



$$2p = a + b + c$$

p é o semiperímetro do triângulo ABC e $2p$ é o seu perímetro.

Uma circunferência inscrita em um triângulo é uma circunferência que tangencia internamente os lados do triângulo:

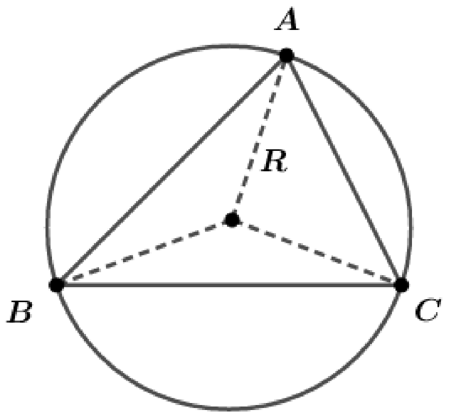


D, E, F são os pontos de tangência da circunferência inscrita ao triângulo ABC.

r é o raio da circunferência inscrita.

Perceba que os segmentos de reta que ligam o centro da circunferência aos pontos de tangência sempre formam um ângulo reto.

Uma circunferência circunscrita a um triângulo é uma circunferência que passa por todos os vértices do triângulo:

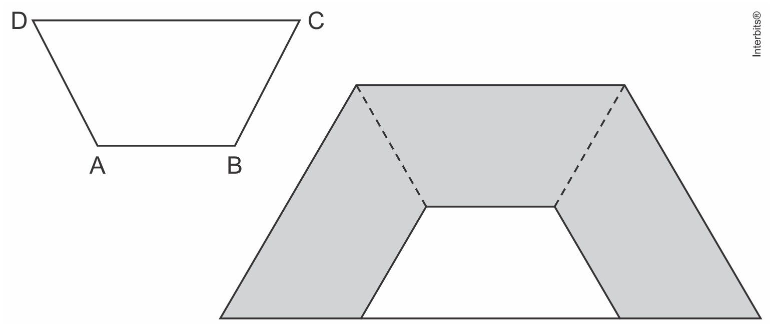


R é o raio da circunferência circunscrita.

Dizemos que dois elementos são homólogos quando ambos são correspondentes um ao outro. Por exemplo, tomando-se dois triângulos semelhantes, podemos afirmar que os lados opostos aos ângulos congruentes são homólogos.

6. Lista de Questões

1. (cftmg 2019) A região sombreada da figura é formada pela junção de três trapézios congruentes ao trapézio isósceles ABCD.



Sendo o perímetro do trapézio ABCD igual a 30 m e a soma das medidas das bases igual a 20 m, o perímetro da região sombreada, em m, é igual a

a) 45.
b) 60.
c) 70.
d) 90.

2. (cftmg 2019) Considere θ e α dois ângulos adjacentes e complementares. A expressão que determina o valor do ângulo formado pelas bissetrizes de θ e α é

a) $\frac{\theta+\alpha}{2}$.

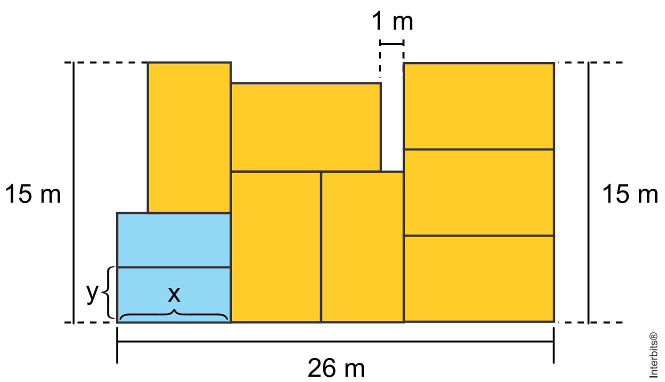
b) $\frac{\theta+\alpha}{4}$.

c) $\frac{90-(\theta+\alpha)}{2}$.

d) $\frac{90-(\theta+\alpha)}{4}$.

---

3. (Famerp 2019) A figura, feita em escala, indica um painel formado por sete retângulos amarelos idênticos e dois retângulos azuis idênticos. Cada retângulo azul tem dimensões x e y, ambas em metros.



Na situação descrita, $x-y$ é igual a

a) 2,5 m.

b) 4 m.

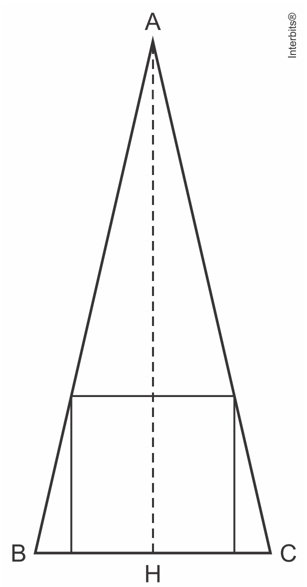
c) 3,5 m.

d) 3 m.

e) 2 m.

---

4. (Upf 2019) Na figura a seguir, estão representados o triângulo retângulo ABC e um quadrado inscrito nesse triângulo. O segmento AH é a altura do triângulo em relação à base BC. Sabe-se que o segmento AH mede $10\,\text{cm}$ e o segmento BC mede $4\,\text{cm}$. Então, a medida do lado do quadrado, em centímetros, é



a) $\frac{8}{3}$

b) $\frac{9}{2}$

c) 3

d) $\frac{5}{2}$

e) $\frac{20}{7}$

---

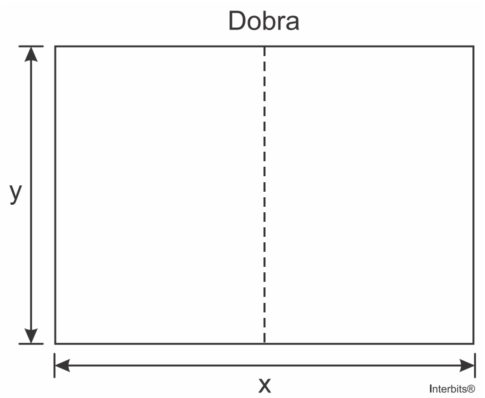
5. (cmrj 2019) A maioria das televisões apresenta tela semelhante a um retângulo de lados 3 e 4 cuja diagonal representa as polegadas da televisão. Logo, uma tela de 45 polegadas tem lados iguais a

a) 12 e 16 polegadas.
b) 15 e 20 polegadas.
c) 18 e 24 polegadas.
d) 27 e 36 polegadas.
e) 30 e 40 polegadas.

---

6. (Fatec 2019) Um formato de papel usado para impressões e fotocópias, no Brasil, é o A4, que faz parte de uma série conhecida como série A, regulamentada internacionalmente pelo padrão ISO 216.

Essa série criou um padrão de folha retangular que, quando seu lado maior é dobrado ao meio, gera um retângulo semelhante ao original, conforme ilustrado.



Considerando uma folha da série A, com as dimensões indicadas na figura, pode-se afirmar que

a) $x = 2y$

b) $x = y\sqrt{2}$

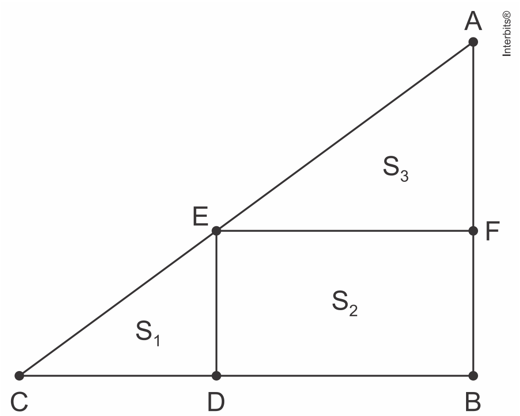
c) $x = y$

d) $y = x\sqrt{2}$

e) $y = 2x$

---

7. (cftmg 2019) A figura abaixo mostra o esboço dos terrenos S_1, S_2 e S_3, em que o quadrilátero BDEF é um retângulo e os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$ medem, respectivamente, 30 cm e 60 cm.



Assim sendo, é correto afirmar que a área do terreno

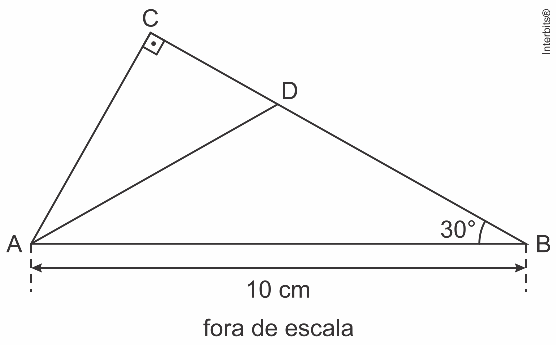
a) S_3 é igual à área do terreno S_2.

b) S_1 é a metade da área do terreno S_3.

c) S_1 é igual a $\frac{1}{3}$ da área do terreno S_3.

d) S_2 é a igual à soma das áreas dos terrenos S_1 e S_3.

8. (Famema 2019) A figura mostra o triângulo retângulo ABC, de hipotenusa $AB = 10\text{ cm}$, com o ângulo $A\hat{B}C = 30°$ e o ponto D sobre o lado $\overline{BC}$.



Sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, o valor da razão $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ é

a) 3

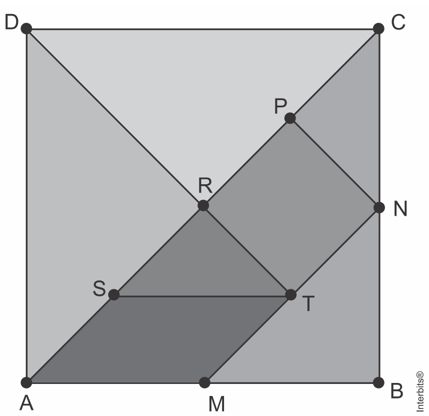
b) $\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{1}{3}$

d) 1

e) 2

9. (Uerj 2019) O Tangram é um quebra-cabeça chinês que contém sete peças: um quadrado, um paralelogramo e cinco triângulos retângulos isósceles. Na figura, o quadrado $ABCD$ é formado com as peças de um Tangram.



Observe os seguintes componentes da figura:

- $NP -$ lado do quadrado;
- $AM -$ lado do paralelogramo;
- CDR e $ADR -$ triângulos congruentes, bem como CNP e RST.

A razão entre a área do trapézio $AMNP$ e a área do quadrado $ABCD$ equivale a:

a) $\frac{3}{32}$

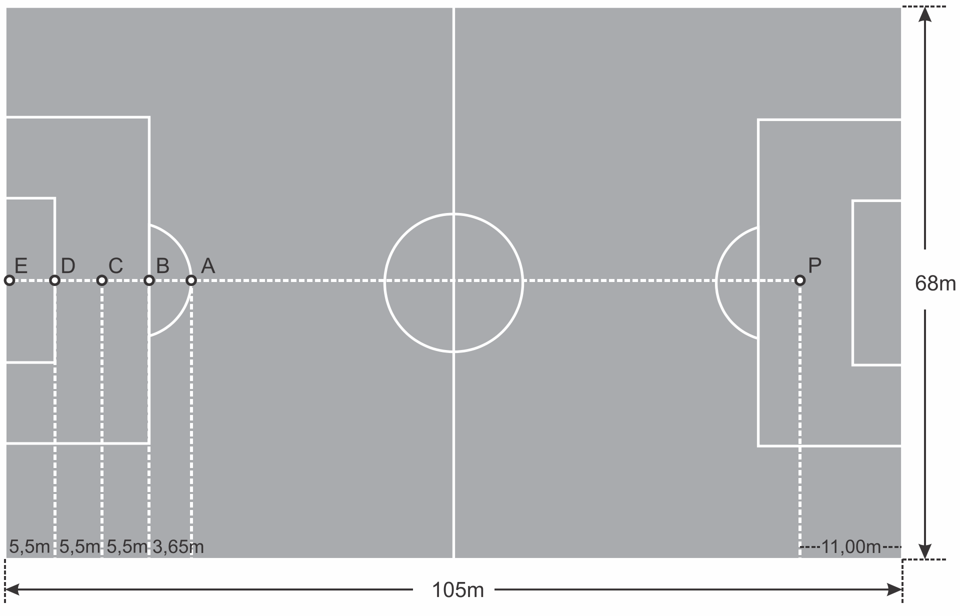
b) $\frac{5}{32}$

c) $\frac{3}{16}$

d) $\frac{5}{16}$

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

As medidas apresentadas na figura abaixo seguem o padrão exigido pela FIFA − Federação Internacional de Futebol.



Adaptado de: globoesporte.globo.com, agosto/ 2018. (Adaptado)

10. (cmrj 2019) Ederson, goleiro do Manchester City (Inglaterra) e goleiro reserva do Brasil na Copa do Mundo da Rússia, é o atual recordista mundial de "tiro de meta mais longo". Seu nome foi

registrado no livro *Guiness Book* – o livro dos recordes – por ele ter conseguido, com um chute, fazer com que a bola atingisse o solo a uma distância de $75{,}35$ metros do ponto de partida. Se Ederson der um chute em uma bola parada, na marca do pênalti (ponto P), em direção ao ponto E, tão forte quanto o do seu recorde, então ela voltará a tocar o campo, pela primeira vez, entre os pontos

a) P e A

b) A e B

c) B e C

d) C e D

e) D e E

---

11. (ifal 2018) Um fazendeiro resolveu cercar um terreno de formato retangular, cujas dimensões eram 60 metros de largura e 80 metros de comprimento, gastando R\$ 20,00 para cada metro linear da cerca. Qual o valor total do gasto para cercar todo o terreno?

a) R\$ 2.800,00.

b) R\$ 4.800,00.

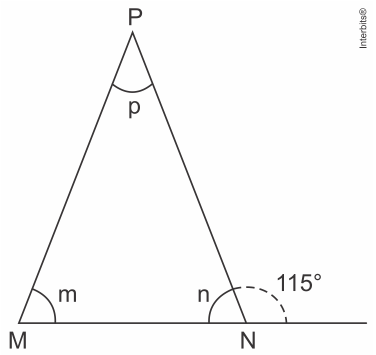
c) R\$ 5.600,00.

d) R\$ 6.800,00.

e) R\$ 9.600,00.

---

12. (Mackenzie 2018)



O triângulo PMN acima é isósceles de base $\overline{MN}$. Se p, m e n são os ângulos internos do triângulo, como representados na figura, então podemos afirmar que suas medidas valem, respectivamente,

a) $50°, 65°, 65°$

b) $65°, 65°, 50°$

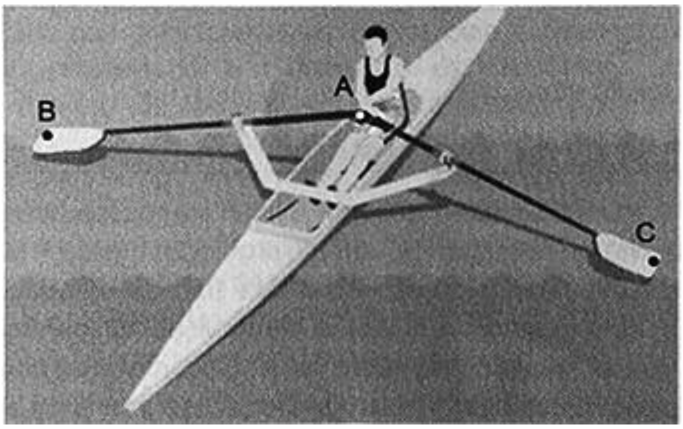
c) $65°, 50°, 65°$

d) $50°, 50°, 80°$

e) $80^\circ, 80^\circ, 40^\circ$

---

13. (Enem 2018) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho.
A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.



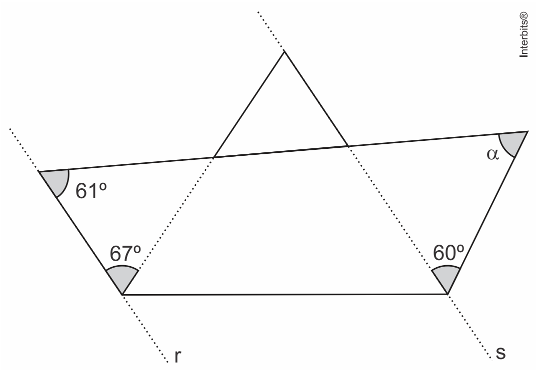
Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos B e C. Esses três pontos formam um triângulo ABC cujo ângulo $B\hat{A}C$ tem medida de 170°.

O tipo de triângulo com vértices nos pontos A, B e C, no momento em que o remador está nessa posição, é
a) retângulo escaleno.
b) acutângulo escaleno.
c) acutângulo isósceles.
d) obtusângulo escaleno.
e) obtusângulo isósceles.

---

14. (ifpe 2018) Eva é aluna do curso de Construção Naval do campus Ipojuca e tem mania de construir barquinhos de papel. Durante a aula de desenho técnico, resolveu medir os ângulos do último barquinho que fez, representado na imagem a seguir. Sabendo que as retas suportes, r e s, são paralelas, qual a medida do ângulo α destacado?



a) $52°$.

b) $60°$.

c) $61°$.

d) $67°$.

e) $59°$.

---

15. (Upe-ssa 1 2018) Os lados de um triângulo medem, respectivamente, $5\text{ cm}, 7\text{ cm}$ e 8 cm. Quais são as respectivas medidas dos lados de um triângulo semelhante a este cujo perímetro mede $0{,}6\text{ m}$?

a) $15\text{ cm}, 21\text{ cm}$ e 24 cm

b) $12\text{ cm}, 22\text{ cm}$ e 26 cm

c) $18\text{ cm}, 20\text{ cm}$ e 22 cm

d) $11\text{ cm}, 23\text{ cm}$ e 26 cm

e) $16\text{ cm}, 18\text{ cm}$ e 26 cm

---

16. (Mackenzie 2018) Em um triângulo retângulo ABC, reto em B, as medidas de seus lados AB, BC e AC formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão 3. Então, das alternativas abaixo, as medidas de AB, BC e AC são, respectivamente,

a) $3, 6$ e 9

b) $6, 9$ e 12

c) $9, 12$ e 15

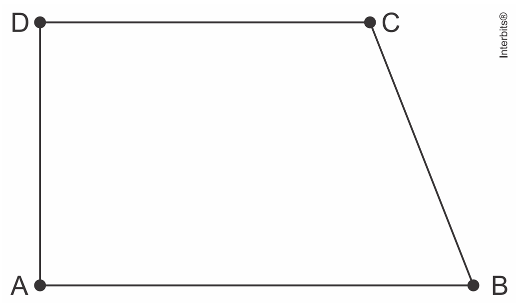
d) $12, 15$ e 18

e) $15, 18$ e 21

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

O trapézio retângulo $ABCD$ da figura representa a superfície de um reservatório de água.

Na figura, tem-se que:



$AB = 20$ m;
$CD = 15$ m;
$AD = 12$ m;
o ângulo $D\hat{A}B$ é reto.

---

17. (cps 2018) Se, por uma questão de segurança, o reservatório precisa ser cercado, então o comprimento dessa cerca será, em metros, de
a) 60.
b) 59.
c) 58.
d) 57.
e) 56.

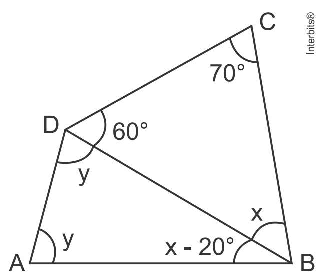
---

18. (cftmg 2017) Sejam dois ângulos x e y tais que $(2x)$ e $(y + 10°)$ são ângulos complementares e $(5x)$ e $(3y - 40°)$ são suplementares.

O ângulo x mede
a) 5°.
b) 10°.
c) 15°.
d) 20°.

---

19. (Eear 2017)



No quadrilátero $ABCD,$ o valor de $y - x$ é igual a

a) $2x$

b) $2y$

c) $\frac{x}{2}$

d) $\frac{y}{2}$

---

20. (Ufrgs 2017) Em um triângulo $ABC,$ $B\hat{A}C$ é o maior ângulo e $A\hat{C}B$ é o menor ângulo. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é 70° maior que a medida de $A\hat{C}B.$ A medida de $B\hat{A}C$ é o dobro da medida de $A\hat{B}C.$

Portanto, as medidas dos ângulos são

a) $20^\circ, 70^\circ$ e $90^\circ.$

b) $20^\circ, 60^\circ$ e $100^\circ.$

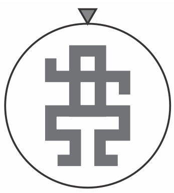
c) $10^\circ, 70^\circ$ e $100^\circ.$

d) $30^\circ, 50^\circ$ e $100^\circ.$

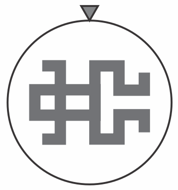
e) $30^\circ, 60^\circ$ e $90^\circ.$

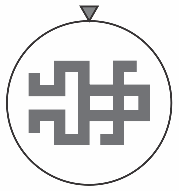
---

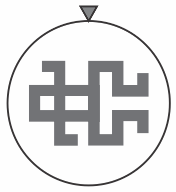
21. (Fatec 2017) Em um círculo recortado em papel cartão foi feito o desenho de um homem estilizado. Esse círculo foi utilizado para montar uma roleta, conforme a figura 1, fixada em uma parede. Quando a roleta é acionada, o círculo gira livremente em torno do seu centro, e o triângulo indicador permanece fixo na parede.

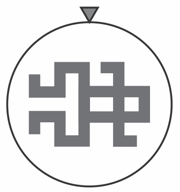


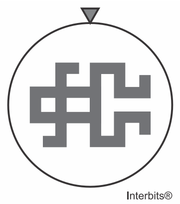
Considerando, inicialmente, a imagem do homem na posição da figura 1, obtém-se, após a roleta realizar uma rotação de três quartos de volta, no sentido horário, a figura representada em

a) 

b) 

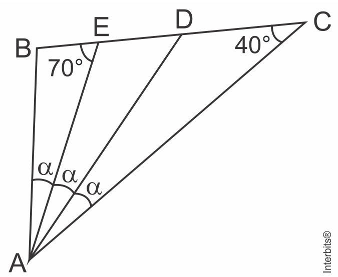
c) 

d) 

e) 

---

22. (Eear 2017)



Se ABC é um triângulo, o valor de α é

a) $10°$

b) $15°$

c) $20°$

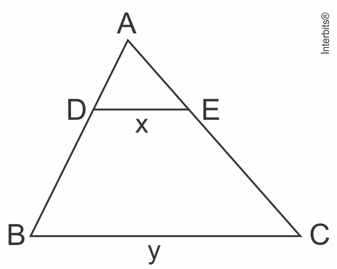
d) $25°$

23. (Fmp 2017) Os lados de um triângulo medem $13\text{ cm},$ 14 cm e $15\text{ cm},$ e sua área mede $84\text{ cm}^2.$ Considere um segundo triângulo, semelhante ao primeiro, cuja área mede $336\text{ cm}^2.$

A medida do perímetro do segundo triângulo, em centímetros, é

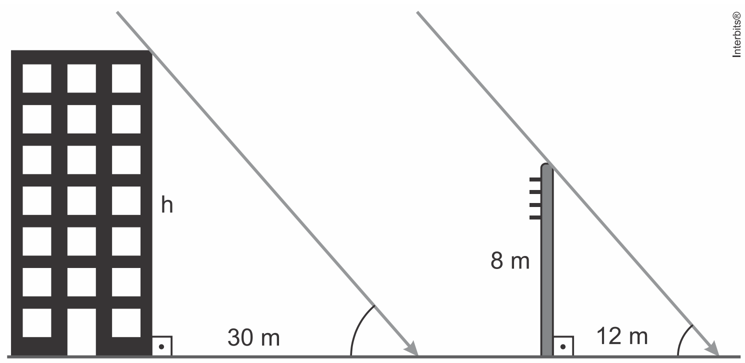
a) 42
b) 84
c) 126
d) 168
e) 336

24. (Eear 2017) Seja um triângulo $ABC,$ conforme a figura. Se D e E são pontos, respectivamente, de AB e $AC,$ de forma que $\overline{AD}=4,$ $\overline{DB}=8,$ $\overline{DE}=x,$ $\overline{BC}=y,$ e se $DE \parallel BC,$ então



a) $y = x + 8$
b) $y = x + 4$
c) $y = 3x$
d) $y = 2x$

25. (ifpe 2017) Às $10\text{ h }45\text{ min}$ de uma manhã ensolarada, as sombras de um edifício e de um poste de 8 metros de altura foram medidas ao mesmo tempo. Foram encontrados 30 metros e 12 metros, respectivamente, conforme ilustração abaixo.



De acordo com as informações acima, a altura h do prédio é de

a) 12 metros.

b) 18 metros.

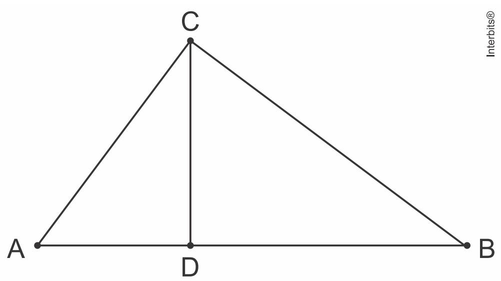
c) 16 metros.

d) 14 metros.

e) 20 metros.

---

26. (Unisinos 2017) Na figura abaixo, temos que $AC = 6$, $BC = 8$ e os ângulos $A\hat{C}B$ e $C\hat{D}B$ são retos.



Com base nessas informações, podemos dizer que as medidas dos segmentos AB e CD são, respectivamente:

a) 10 e $4{,}8$

b) 10 e $4{,}2$

c) 10 e 4

d) 8 e 5

e) 8 e 4

---

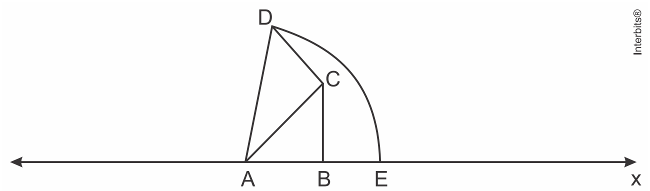
27. (Eear 2016) Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes. Sendo $\hat{A} = 2x + 15^\circ$ e $\hat{B} = 5x - 9^\circ$. Assinale a alternativa que representa, corretamente, o valor de x.

a) 2°

b) 8°
c) 12°
d) 24°

---

28. (Ulbra 2016) Considere a construção representada na figura abaixo, sobre o eixo x dos números reais.



Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ medem 1 unidade cada um. DE é um arco de circunferência de centro em A. Qual número real está associado ao ponto E, no eixo x? Sabe-se que A está na origem do eixo x, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ e $\overline{AC} \perp \overline{CD}$.

a) $\sqrt{6}$.
b) $\sqrt{2}$.
c) $\sqrt{5}$.
d) $\sqrt{3}$.
e) $\sqrt{8}$.

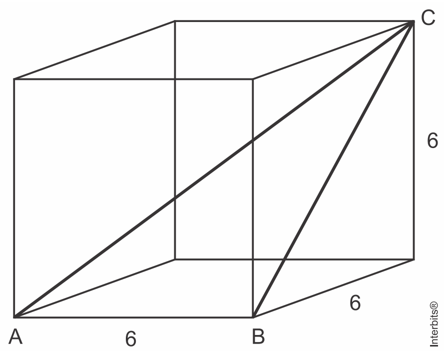
---

29. (ifce 2016) O triângulo ABC tem lados medindo 8 cm, 10 cm e 16 cm, enquanto o triângulo DEF, semelhante a ABC, tem perímetro 204 cm. O maior e o menor dos lados de DEF medem, respectivamente,

a) 64 cm e 32 cm.
b) 60 cm e 48 cm.
c) 48 cm e 24 cm.
d) 96 cm e 48 cm.
e) 96 cm e 64 cm.

---

30. (Ulbra 2016) A figura a seguir representa um cubo de lado medindo 6 cm e um triângulo ABC.



A área desse triângulo mede

a) $36\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

b) $18\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

c) $24\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

d) $12\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

e) $6\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

---

31. (ifce 2016) Um retângulo cujo comprimento excede a largura em $2\,\text{m}$ está inscrito em um círculo de $5\,\text{m}$ de raio. A área desse retângulo, em metros quadrados, vale

a) 56.

b) 35.

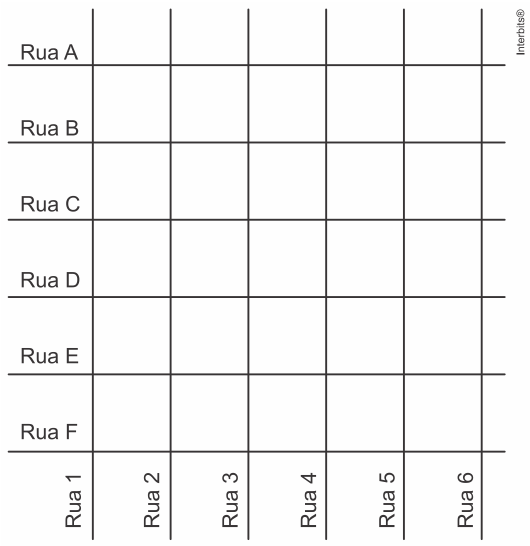
c) 48.

d) 50.

e) 64.

---

32. (Enem 2016) Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.



A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A.

Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C.
b) 4 e C.
c) 4 e D.
d) 4 e E.
e) 5 e C.

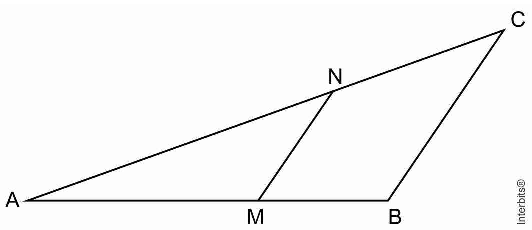
---

33. (Uece 2016) No retângulo $PQRS,$ a medida dos lados PQ e QR são respectivamente $3\,m$ e $2\,m.$ Se V é um ponto do lado PQ tal que a medida do segmento VQ é igual a $1m$ e U é o ponto médio do lado $PS,$ então, a medida, em graus, do ângulo $V\hat{U}R$ é

a) $40.$
b) $35.$
c) $50.$
d) $45.$

---

34. (cftmg 2016) No triângulo ABC da figura a seguir, $\overline{MN}//\overline{BC}$ e a medida de $\overline{AC}$ é igual a $30\,cm.$ Sabe-se que o ponto M dista $8\,cm$ do vértice $B,$ que $\overline{AB}$ mede $\frac{2}{3}$ da medida de $\overline{AC}$ e que a medida de $\overline{BC}$ vale a metade da medida de $\overline{AC}$.



O perímetro do triângulo AMN da figura, mede, em cm,

a) 15.

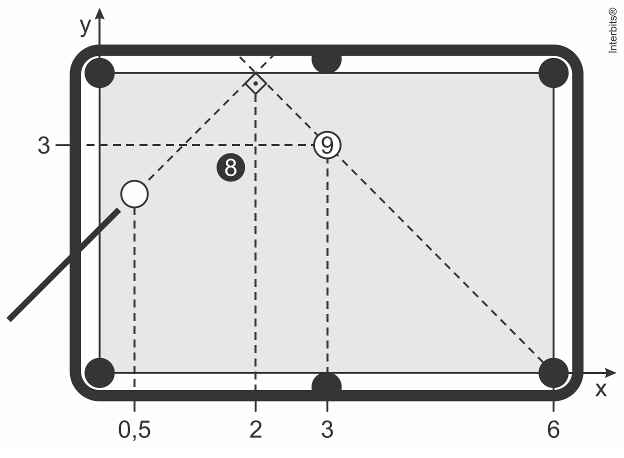
b) 21.

c) 27.

d) 39.

---

35. (Enem PPL 2016) Em sua vez de jogar, um jogador precisa dar uma tacada na bola branca, de forma a acertar a bola 9 e fazê-la cair em uma das caçapas de uma mesa de bilhar. Como a bola 8 encontra-se entre a bola branca e a bola 9, esse jogador adota a estratégia de dar uma tacada na bola branca em direção a uma das laterais da mesa, de forma que, ao rebater, ela saia em uma trajetória retilínea, formando um ângulo de 90° com a trajetória da tacada, conforme ilustrado na figura.



Com essa estratégia, o jogador conseguiu encaçapar a bola 9. Considere um sistema cartesiano de eixos sobre o plano da mesa, no qual o ponto de contato da bola com a mesa define sua posição nesse sistema. As coordenadas do ponto que representa a bola 9 são $(3; 3)$, o centro da caçapa de destino tem coordenadas $(6; 0)$ e a abscissa da bola branca é $0,5$, como representados na figura.

Se a estratégia deu certo, a ordenada da posição original da bola branca era

a) $1{,}3$.

b) $1{,}5$.

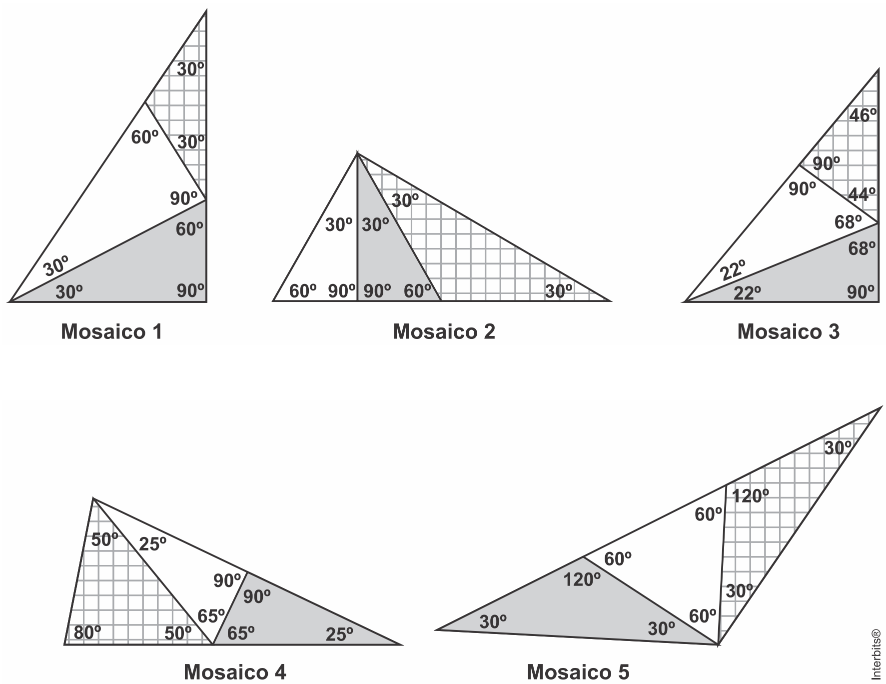
c) $2{,}1$.

d) $2{,}2$.

e) $2{,}5$.

---

36. (Enem 2ª aplicação 2016) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.



Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

a) 1.

b) 2.

c) 3.

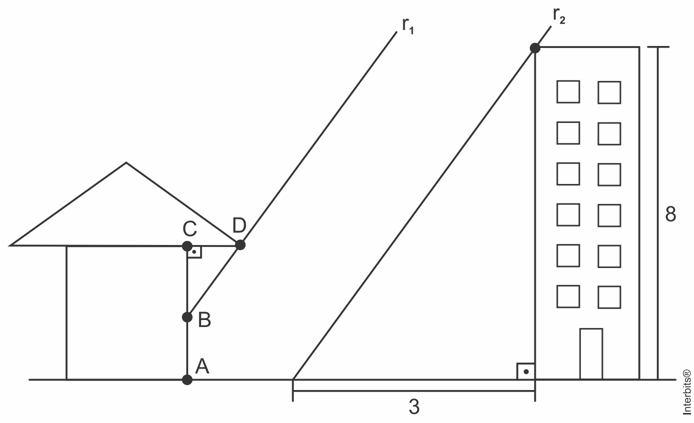
d) 4.

e) 5.

---

37. (cftmg 2016) Na figura a seguir, o segmento $\overline{AC}$ representa uma parede cuja altura é $2{,}9\text{ m}$. A medida do segmento $\overline{AB}$ é $1{,}3\text{ m}$ o segmento $\overline{CD}$ representa o beiral da casa. Os raios de sol r_1 e r_2

passam ao mesmo tempo pela casa e pelo prédio, respectivamente.



Se r_1 é paralelo com r_2, então, o comprimento do beiral, em metros, é

a) $0,60.$

b) $0,65.$

c) $0,70.$

d) $0,75.$

---

38. (ifsul 2016) A sombra de uma Torre mede $4,2\text{ m}$ de comprimento. Na mesma hora, a sombra de um poste de 3 m de altura é 12 cm de comprimento. Qual é a altura da torre?

a) $95\text{ m}.$

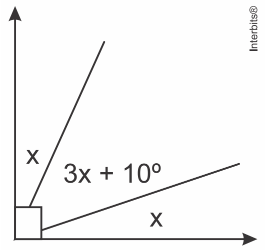
b) $100\text{ m}.$

c) $105\text{ m}.$

d) $110\text{ m}.$

---

39. (utfpr 2015) Calcule o valor de x, em graus, na figura:



a) $16.$

b) $10.$

c) $20.$

d) 58.

e) 32.

---

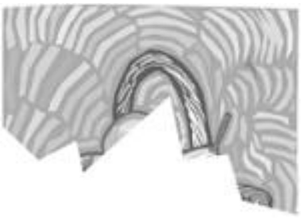
40. (Fatec 2015) Observe as imagens para responder à questão proposta.

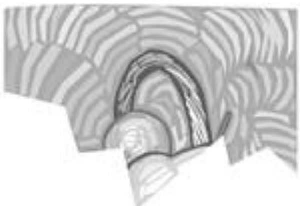
Ao se recortar a figura 1, obteve-se a figura 2.

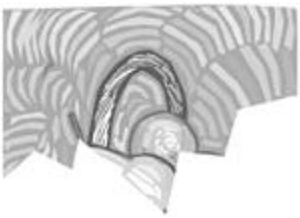
Figura 1 Figura 2

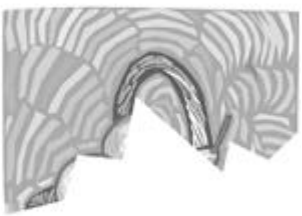
Fonte: Clip-Art

Assinale a alternativa que apresenta o complemento correto da figura 2 para se refazer a figura 1.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

---

41. (ifsul 2015) Duas retas paralelas "r" e "s", cortadas por uma transversal "t", formam ângulos colaterais internos, dos quais um excede o outro em $20°$.

O ângulo colateral interno agudo mede

a) $20°$

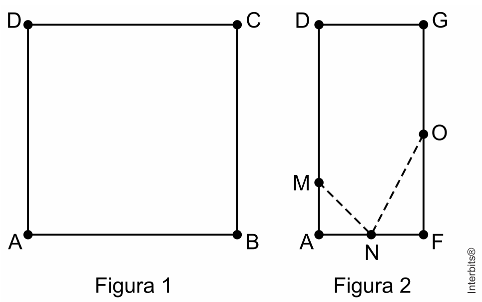
b) $35°$

c) $55°$

d) $80°$

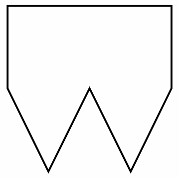
---

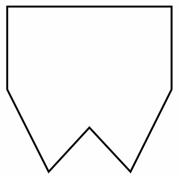
42. (Enem 2015) Uma família fez uma festa de aniversário e enfeitou o local da festa com bandeirinhas de papel. Essas bandeirinhas foram feitas da seguinte maneira: inicialmente, recortaram as folhas de papel em forma de quadrado, como mostra a Figura 1. Em seguida, dobraram as folhas quadradas ao meio sobrepondo os lados BC e AD, de modo que C e D coincidam, e o mesmo ocorra com A e B, conforme ilustrado na Figura 2. Marcaram os pontos médios O e N, dos lados FG e AF, respectivamente, e o ponto M do lado AD, de modo que AM seja igual a um quarto de AD. A seguir, fizeram cortes sobre as linhas pontilhadas ao longo da folha dobrada.

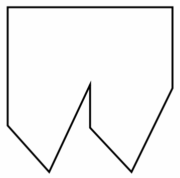


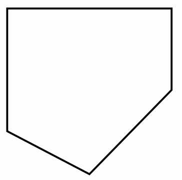
Após os cortes, a folha e aberta e a bandeirinha esta pronta.

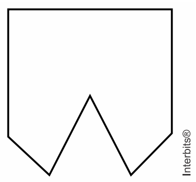
A figura que representa a forma da bandeirinha pronta é

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

---

43. (Uece 2015) Considere um segmento de reta XY cuja medida do comprimento é $10\,\text{cm}$ e P um ponto móvel no interior de XY dividindo-o em dois segmentos consecutivos XP e PY. Se M e N são respectivamente os pontos médios de XP e PY, então podemos afirmar corretamente que a medida do comprimento do segmento MN

a) varia entre $0\,\text{cm}$ e $10\,\text{cm}$, dependendo da posição do ponto P.

b) varia entre $5\,\text{cm}$ e $10\,\text{cm}$, dependendo da posição do ponto P.

c) varia entre $2{,}5\,\text{cm}$ e $10\,\text{cm}$, dependendo da posição do ponto P.

d) é igual a $5\,\text{cm}$, sempre.

---

44. (Ucs 2015) Uma escada está apoiada em uma parede a uma altura de $16\,\text{m}$ do solo plano. A distância do pé da escada até a parede é igual a $12\,\text{m}$. O centro de gravidade da escada está a um terço do comprimento dela, medido a partir do seu apoio no chão. Nessa situação, o comprimento da escada e a altura aproximada do seu centro de gravidade até o chão são, respectivamente, iguais a

a) 20 m e $5{,}3\text{ m}$.

b) 20 m e $6{,}6\text{ m}$.

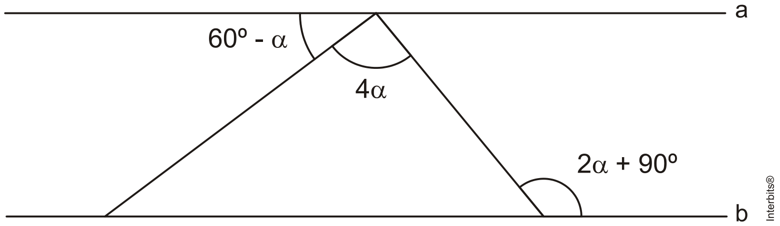
c) 28 m e $9{,}3\text{ m}$.

d) $\sqrt{56}$ m e $5{,}3\text{ m}$.

e) $\sqrt{56}$ m e $2{,}6\text{ m}$.

---

45. (Mackenzie 2014) Na figura abaixo, a e b são retas paralelas.



A afirmação correta a respeito do número que expressa, em graus, a medida do ângulo α é

a) um número primo maior que 23.

b) um número ímpar.

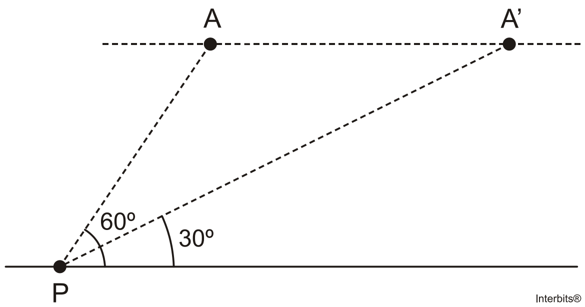
c) um múltiplo de 4.

d) um divisor de 60.

e) um múltiplo comum entre 5 e 7.

---

46. (Espm 2014) Um avião voava a uma altitude e velocidade constantes. Num certo instante, quando estava a 8 km de distância de um ponto P, no solo, ele podia ser visto sob um ângulo de elevação de 60° e, dois minutos mais tarde, esse ângulo passou a valer 30°, conforme mostra a figura abaixo.



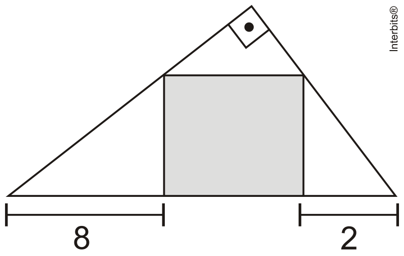
A velocidade desse avião era de:

a) 180 km/h

b) 240 km/h
c) 120 km/h
d) 150 km/h
e) 200 km/h

---

47. (ifce 2014)



O valor do lado de um quadrado inscrito em um triângulo retângulo, conforme o esboço mostrado na figura, é
a) 10.
b) 8.
c) 6.
d) 4.
e) 2.

---

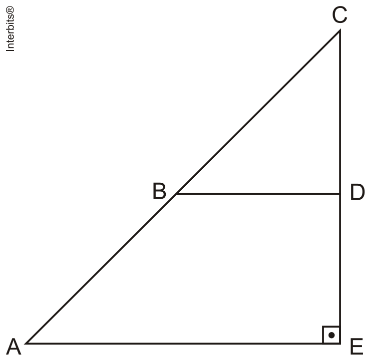
48. (cftmg 2014) Numa festa junina, além da tradicional brincadeira de roubar bandeira no alto do pau de sebo, quem descobrisse a sua altura ganharia um prêmio. O ganhador do desafio fincou, paralelamente a esse mastro, um bastão de 1m. Medindo-se as sombras projetadas no chão pelo bastão e pelo pau, ele encontrou, respectivamente, 25 dm e 125 dm. Portanto, a altura do “pau de sebo”, em metros, é
a) 5,0.
b) 5,5.
c) 6,0.
d) 6,5.

---

49. (Cefet MG 2014) A figura abaixo tem as seguintes características:

- o ângulo $\hat{E}$ é reto;
- o segmento de reta $\overline{AE}$ é paralelo ao segmento $\overline{BD}$;

- os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DE}$, medem, respectivamente, 5, 4 e 3.



O segmento $\overline{AC}$, em unidades de comprimento, mede

a) 8.

b) 12.

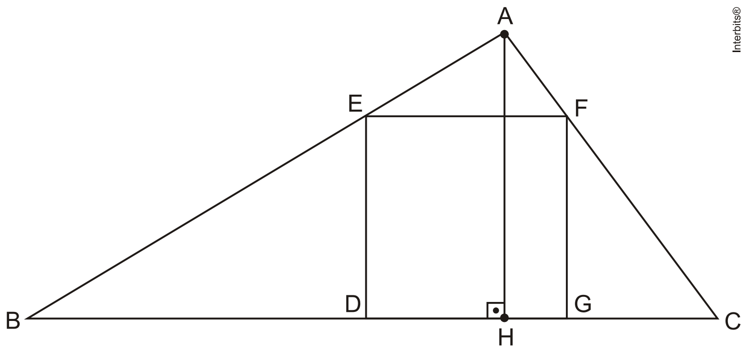
c) 13.

d) $\sqrt{61}$

e) $5\sqrt{10}$.

---

50. (cftmg 2014) A figura a seguir apresenta um quadrado DEFG e um triângulo ABC cujo lado BC mede 40 cm e a altura AH, 24 cm.



A medida do lado desse quadrado é um número

a) par.

b) primo.

c) divisível por 4.

d) múltiplo de 5.

---

51. (Enem PPL 2013) O símbolo internacional de acesso, mostrado na figura, anuncia local acessível para o portador de necessidades especiais. Na concepção desse símbolo, foram empregados elementos gráficos geométricos elementares.

Regras de acessibilidade ao meio físico para o deficiente.

Disponível em: www.ibdd.org.br. Acesso em: 28 jun. 2011(adaptado).

Os elementos geométricos que constituem os contornos das partes claras da figura são

a) retas e círculos.

b) retas e circunferências.

c) arcos de circunferências e retas.

d) coroas circulares e segmentos de retas.

e) arcos de circunferências e segmentos de retas.

---

52. (Enem 2013) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.

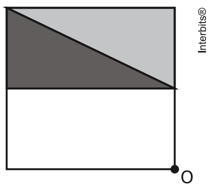
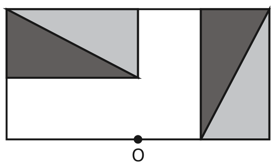
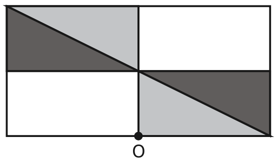
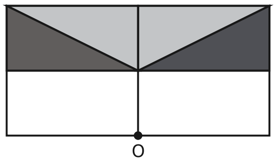


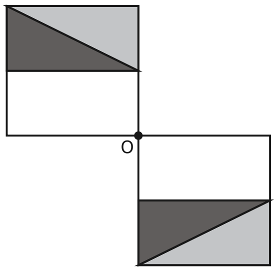
Figura original

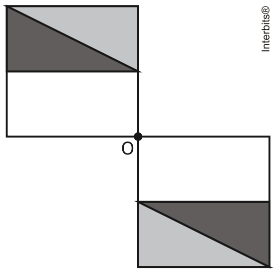
A imagem que representa a nova figura é:

a) 

b) 

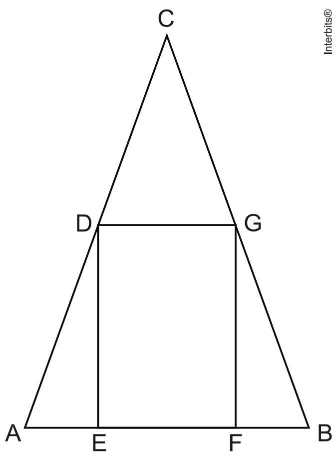
c) 

d) 

e) 

---

53. (Pucrj 2013) O retângulo DEFG está inscrito no triângulo isósceles ABC, como na figura abaixo:



Assumindo $\overline{DE} = \overline{GF} = 12$, $\overline{EF} = \overline{DG} = 8$ e $\overline{AB} = 15$, a altura do triângulo ABC é:

a) $\frac{35}{4}$

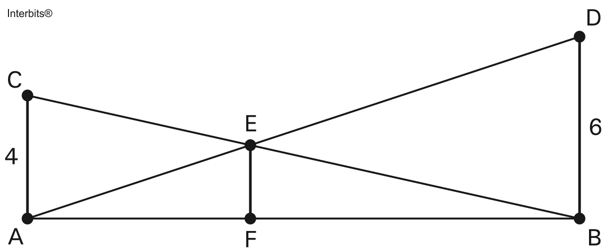
b) $\frac{150}{7}$

c) $\frac{90}{7}$

d) $\frac{180}{7}$

e) $\frac{28}{5}$

54**.** (Enem 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6m e 4m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

a) $1\,\text{m}$

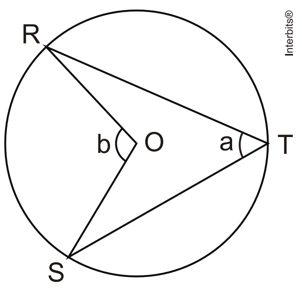
b) $2\,\text{m}$

c) $2{,}4\,\text{m}$

d) $3\,\text{m}$

e) $2\sqrt{6}\,\text{m}$

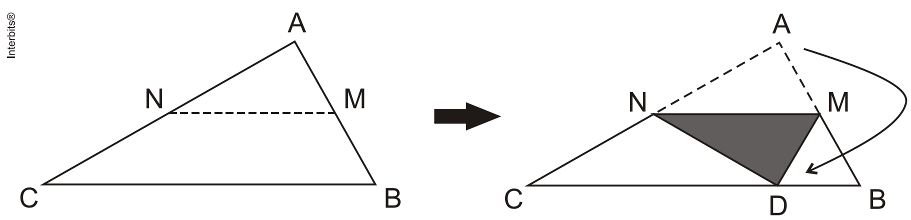
55**.** (ifce 2012) Na figura abaixo, **R**, **S** e **T** são pontos sobre a circunferência de centro **O**. Se ***x*** é o número real, tal que ***a* = 5*x* e *b* = 3*x* + 42°** são as medidas dos ângulos **RTS** e **ROS**, respectivamente, pode-se dizer que



a) $a = 30°$ e $b = 60°$.
b) $a = 80°$ e $b = 40°$.
c) $a = 60°$ e $b = 30°$.
d) $a = 40°$ e $b = 80°$.
e) $a = 30°$ e $b = 80°$.

---

56. (Enem PPL 2012) Um professor, ao fazer uma atividade de origami (dobraduras) com seus alunos, pede para que estes dobrem um pedaço de papel em forma triangular, como na figura a seguir, de modo que M e N sejam pontos médios respectivamente de AB e AC, e D, ponto do lado BC, indica a nova posição do vértice A do triângulo ABC.



Se ABC é um triângulo qualquer, após a construção, são exemplos de triângulos isósceles os triângulos
a) CMA e CMB.
b) CAD e ADB.
c) NAM e NDM.
d) CND e DMB.
e) CND e NDM.

---

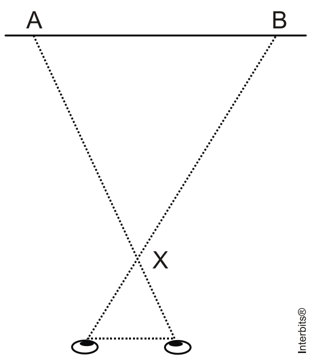
57. (Ufrn 2012) Numa projeção de filme, o projetor foi colocado a 12 m de distância da tela. Isto fez com que aparecesse a imagem de um homem com 3 m de altura. Numa sala menor, a projeção resultou na imagem de um homem com apenas 2 m de altura. Nessa nova sala, a distância do projetor em relação à tela era de
a) 18 m.

b) 8 m.
c) 36 m.
d) 9 m.

---

58. (Udesc 2012) Quando olhamos para um ambiente qualquer, a percepção de profundidade é possível devido a nossa visão binocular. Por estarem separados em média $65\,\text{mm}$ em adultos, cada um dos nossos olhos registra uma imagem de um ângulo ligeiramente diferente. Ao interpretar essas imagens ao mesmo tempo, o cérebro forma um "mapa" dessas diferenças, tornando possível estimar a distância dos objetos em relação a nós.
A estereoscopia (popularmente conhecida como "imagem 3D") é uma técnica que consiste em exibir imagens distintas para cada olho do observador, representando o que se observaria em uma situação real. Assim, o cérebro pode ser "enganado" a interpretar os objetos representados como se estivessem flutuando diante da tela ou atrás dela.
Diversas tecnologias existem atualmente para conseguir isso. A mais comum delas, usada nas salas de cinema 3D, funciona com o uso de óculos polarizadores que filtram a imagem projetada na tela, permitindo que cada olho receba somente a imagem correspondente.
Um observador está em uma sala de cinema 3D usando óculos polarizadores e sobre a tela são projetados dois pontos *A* e *B* a uma distância de $30\,\text{cm}$ um do outro, com *A* à esquerda de *B*. Os filtros polarizadores dos óculos fazem com que o ponto *A* seja visto apenas por seu olho direito e o ponto *B* apenas por seu olho esquerdo, de forma que as linhas de visão de cada um dos olhos se interseccionem em um ponto *X*, conforme a figura. O observador verá apenas um único ponto, resultado da junção em seu cérebro dos pontos *A* e *B*, localizado em *X*.

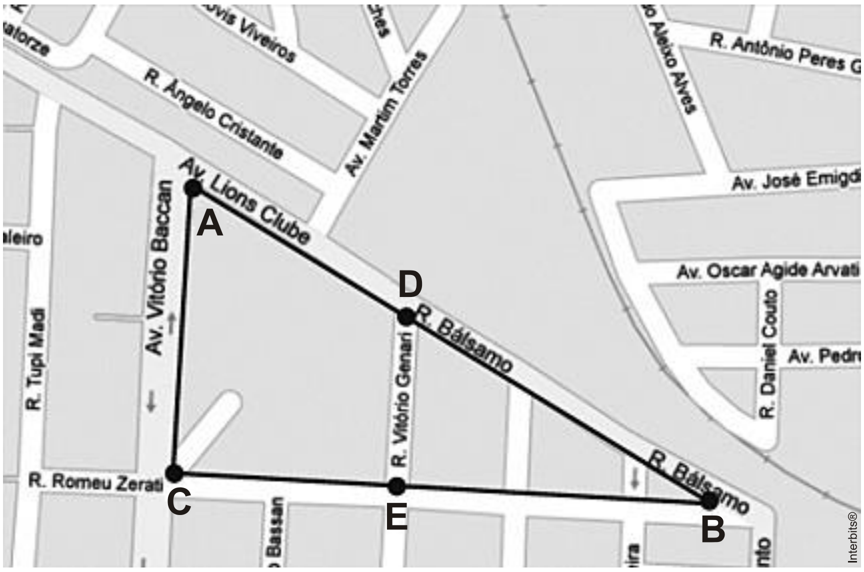
Sabendo que a reta imaginária que passa por seus olhos é paralela àquela que passa pelos pontos *A* e *B* e estas distam $20\,\text{m}$ entre si, e que sua distância interocular é de $60\,\text{mm},$ a distância da tela em que ele verá a imagem virtual, formada no ponto *X,* é aproximadamente:



a) 6,6 m
b) 3,3 m

c) 4 m
d) 16,7 m
e) 16 m

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:
As ruas e avenidas de uma cidade são um bom exemplo de aplicação de Geometria.
Um desses exemplos encontra-se na cidade de Mirassol, onde se localiza a Etec Prof. Mateus Leite de Abreu.
A imagem apresenta algumas ruas e avenidas de Mirassol, onde percebemos que a Av. Vitório Baccan, a Rua Romeu Zerati e a Av. Lions Clube/Rua Bálsamo formam uma figura geométrica que se aproxima muito de um triângulo retângulo, como representado no mapa.



(http://maps.google.com.br/ Acesso em: 18.02.2012. Adaptado)

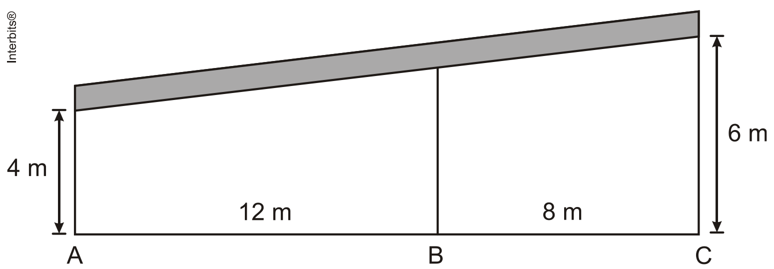
Considere que
– a Rua Bálsamo é continuação da Av. Lions Clube;
– o ponto A é a intersecção da Av. Vitório Baccan com a Av. Lions Clube;
– o ponto B é a intersecção da Rua Romeu Zerati com a Rua Bálsamo;
– o ponto C é a intersecção da Av. Vitório Baccan com a Rua Romeu Zerati;
– o ponto D é a intersecção da Rua Bálsamo com a Rua Vitório Genari;
– o ponto E é a intersecção da Rua Romeu Zerati com a Rua Vitório Genari;
– a medida do segmento $\overline{AC}$ é 220 m;
– a medida do segmento $\overline{BC}$ é 400 m e
– o triângulo ABC é retângulo em C.

59. (cps 2012) Considere que o trecho $\overline{DE}$ da rua Vitório Genari é paralelo ao trecho $\overline{AC}$ da Av. Vitório Baccan. Sabendo que a medida do segmento $\overline{DE}$ é $120\ m$, então a medida do trecho $\overline{CE}$ da Rua Romeu Zerati é, em metros, mais próxima de

a) 182.
b) 198.
c) 200.
d) 204.
e) 216.

---

60. (Ufpr 2011) Um telhado inclinado reto foi construído sobre três suportes verticais de aço, colocados nos pontos A, B e C, como mostra a figura ao lado. Os suportes nas extremidades A e C medem, respectivamente, 4 metros e 6 metros de altura.

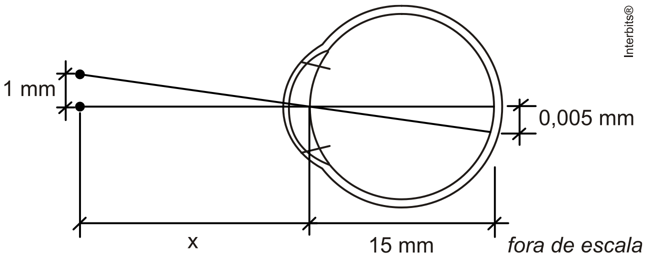


A altura do suporte em B é, então, de:

a) 4,2 metros.
b) 4,5 metros.
c) 5 metros.
d) 5,2 metros.
e) 5,5 metros.

---

61. (Unesp 2011) Para que alguém, com o olho normal, possa distinguir um ponto separado de outro, é necessário que as imagens desses pontos, que são projetadas em sua retina, estejam separadas uma da outra a uma distância de $0,005\ mm$.



Adotando-se um modelo muito simplificado do olho humano no qual ele possa ser considerado uma esfera cujo diâmetro médio é igual a $15\,\text{mm}$, a maior distância x, em metros, que dois pontos luminosos, distantes $1\,\text{mm}$ um do outro, podem estar do observador, para que este os perceba separados, é

a) 1.

b) 2.

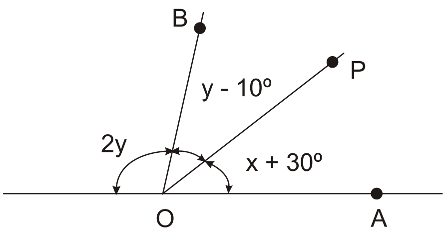
c) 3.

d) 4.

e) 5.

---

62. (cftsc 2010) Na figura abaixo, OP é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Determine o valor de x e y.



a) $x = 13$ e $y = 49$

b) $x = 15$ e $y = 35$

c) $x = 12$ e $y = 48$

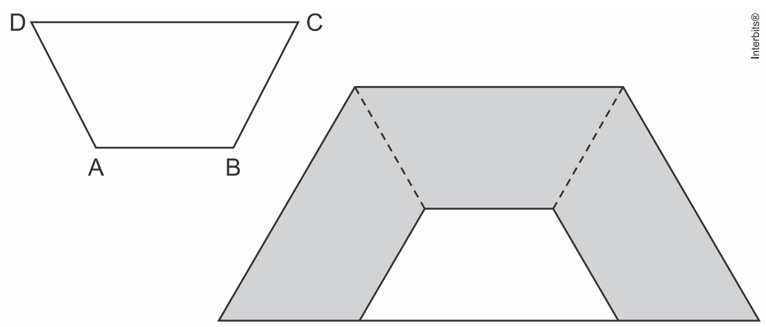
d) $x = 17$ e $y = 42$

e) $x = 10$ e $y = 50$

---

7. Questões Comentadas

1. (cftmg 2019) A região sombreada da figura é formada pela junção de três trapézios congruentes ao trapézio isósceles $ABCD$.



Sendo o perímetro do trapézio $ABCD$ igual a $30\,m$ e a soma das medidas das bases igual a $20\,m$, o perímetro da região sombreada, em m, é igual a

a) 45.
b) 60.
c) 70.
d) 90.

Comentário:

Como os trapézios são congruentes, pode-se concluir pela figura que a medida da base menor AB é igual à medida dos lados DA e CB. Sendo x a medida da base menor e y a medida da base maior, pode-se calcular:

$$\begin{cases} 3x + y = 30 \\ x + y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 30 \\ -x - y = -20 \end{cases} \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

Perímetro área hachurada $\Rightarrow 3 \cdot 20 + 5 + 5 = 70$

Gabarito: C

---

2. (cftmg 2019) Considere θ e α dois ângulos adjacentes e complementares. A expressão que determina o valor do ângulo formado pelas bissetrizes de θ e α é

a) $\dfrac{\theta + \alpha}{2}$.
b) $\dfrac{\theta + \alpha}{4}$.

c) $\frac{90-(\theta+\alpha)}{2}$.

d) $\frac{90-(\theta+\alpha)}{4}$.

Comentário:

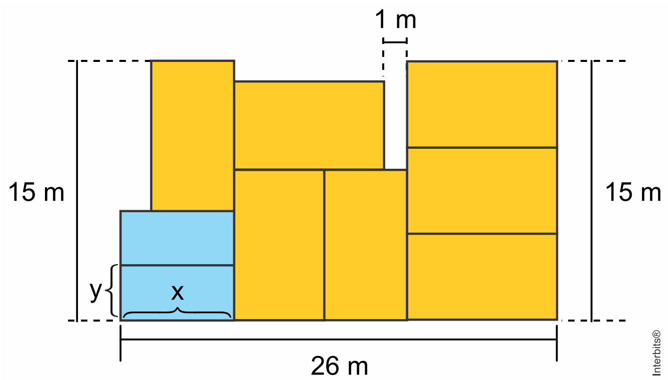
Calculando:

$\frac{\theta}{2}+\frac{\alpha}{2}=\frac{\theta+\alpha}{2}$

Gabarito: A

---

3. (Famerp 2019) A figura, feita em escala, indica um painel formado por sete retângulos amarelos idênticos e dois retângulos azuis idênticos. Cada retângulo azul tem dimensões x e y, ambas em metros.



Na situação descrita, $x-y$ é igual a

a) $2{,}5\text{ m}.$

b) $4\text{ m}.$

c) $3{,}5\text{ m}.$

d) $3\text{ m}.$

e) $2\text{ m}.$

Comentário:

Sendo a e b as medidas dos retângulos amarelos, pode-se calcular:

$3a=15\Rightarrow a=5\text{ m}$

$b+1=2a\Rightarrow b+1=10\Rightarrow b=9\text{ m}$

$x+2a+b=26\Rightarrow x+10+9=26\Rightarrow x=7\text{ m}$

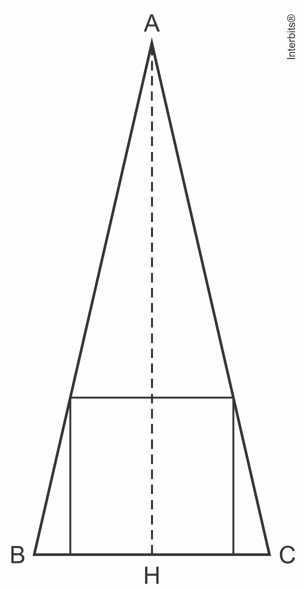
$2y+b=15\Rightarrow 2y+9=15\Rightarrow 2y=6\Rightarrow y=3$

$x-y=7-3=4$

Gabarito: B

---

4. (Upf 2019) Na figura a seguir, estão representados o triângulo retângulo ABC e um quadrado inscrito nesse triângulo. O segmento AH é a altura do triângulo em relação à base BC. Sabe-se que o segmento AH mede $10\,\text{cm}$ e o segmento BC mede $4\,\text{cm}$. Então, a medida do lado do quadrado, em centímetros, é



a) $\frac{8}{3}$

b) $\frac{9}{2}$

c) 3

d) $\frac{5}{2}$

e) $\frac{20}{7}$

---

5. (cmrj 2019) A maioria das televisões apresenta tela semelhante a um retângulo de lados 3 e 4 cuja diagonal representa as polegadas da televisão. Logo, uma tela de 45 polegadas tem lados iguais a

a) 12 e 16 polegadas.
b) 15 e 20 polegadas.
c) 18 e 24 polegadas.
d) 27 e 36 polegadas.
e) 30 e 40 polegadas.

Comentário:

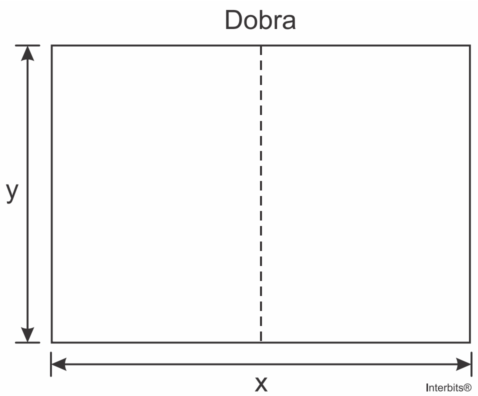
É imediato que um retângulo de lados 3 e 4 possui diagonal igual a 5. Portanto, como $45 = 9 \cdot 5$, segue que os lados têm medidas iguais a $9 \cdot 3 = 27$ e $9 \cdot 4 = 36$ polegadas.

Gabarito: D

---

6. (Fatec 2019) Um formato de papel usado para impressões e fotocópias, no Brasil, é o A4, que faz parte de uma série conhecida como série A, regulamentada internacionalmente pelo padrão ISO 216.

Essa série criou um padrão de folha retangular que, quando seu lado maior é dobrado ao meio, gera um retângulo semelhante ao original, conforme ilustrado.



Considerando uma folha da série A, com as dimensões indicadas na figura, pode-se afirmar que

a) $x = 2y$

b) $x = y\sqrt{2}$

c) $x = y$

d) $y = x\sqrt{2}$

e) $y = 2x$

Comentário:

Desde que o retângulo de lados x e y é semelhante ao retângulo de lados y e $\frac{x}{2}$, temos

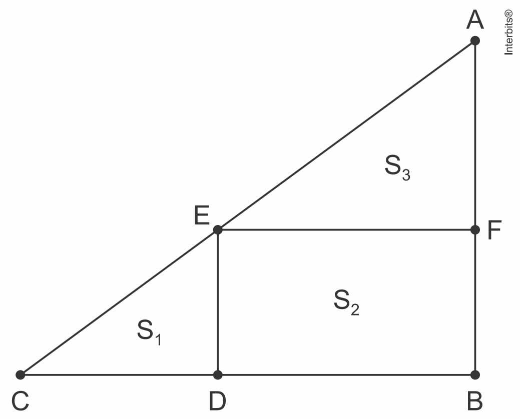
$$\frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}y.$$

Gabarito: B

---

7. (cftmg 2019) A figura abaixo mostra o esboço dos terrenos S_1, S_2 e S_3, em que o quadrilátero

$BDEF$ é um retângulo e os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$ medem, respectivamente, 30 cm e 60 cm.



Assim sendo, é correto afirmar que a área do terreno

a) S_3 é igual à área do terreno S_2.

b) S_1 é a metade da área do terreno S_3.

c) S_1 é igual a $\frac{1}{3}$ da área do terreno S_3.

d) S_2 é a igual à soma das áreas dos terrenos S_1 e S_3.

Comentário:

Calculando:

$$\frac{30}{\overline{ED}} = \frac{60}{\overline{AF}} \Rightarrow 3\overline{AF} = 6\overline{ED} \Rightarrow \overline{AF} = 2\overline{ED}$$

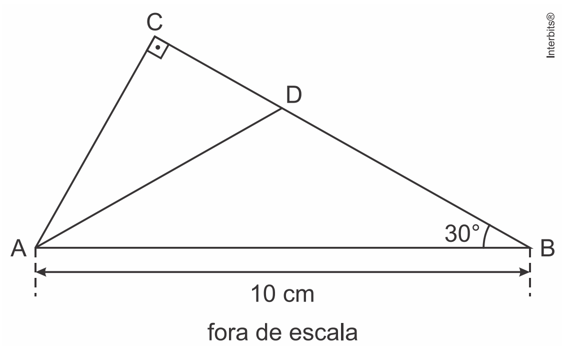
$$S_1 = \frac{30 \cdot \overline{ED}}{2} = 15\overline{ED} = 15 \cdot \frac{\overline{AF}}{2} = 7{,}5\overline{AF}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_2 = 60\overline{ED} = 60 \cdot \dfrac{\overline{AF}}{2} = 30\overline{AF} \\ S_3 = \dfrac{60 \cdot \overline{AF}}{2} = 30\overline{AF} \end{array}\right\rangle \Rightarrow S_2 = S_3$$

Gabarito: A

---

8. (Famema 2019) A figura mostra o triângulo retângulo ABC, de hipotenusa $AB = 10\text{ cm}$, com o ângulo $A\hat{B}C = 30°$ e o ponto D sobre o lado $\overline{BC}$.



Sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, o valor da razão $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ é

a) 3

b) $\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{1}{3}$

d) 1

e) 2

Comentário:

Calculando:

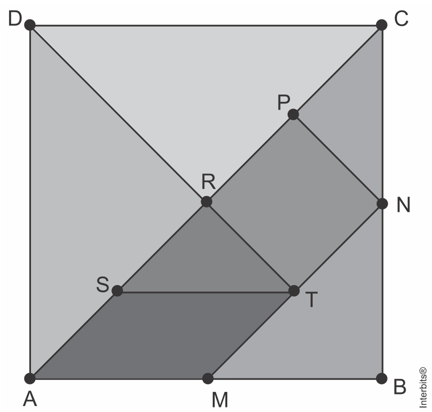
$$\text{sen } 30° = \frac{\overline{CA}}{10} \Rightarrow \overline{CA} = \frac{1}{2} \cdot 10 \Rightarrow \overline{CA} = 5$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CA}} \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{10} = \frac{\overline{DC}}{5} \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{10}{5} = 2$$

Gabarito: E

---

9. (Uerj 2019) O Tangram é um quebra-cabeça chinês que contém sete peças: um quadrado, um paralelogramo e cinco triângulos retângulos isósceles. Na figura, o quadrado ABCD é formado com as peças de um Tangram.



Observe os seguintes componentes da figura:

- NP – lado do quadrado;
- AM – lado do paralelogramo;
- CDR e ADR – triângulos congruentes, bem como CNP e RST.

A razão entre a área do trapézio $AMNP$ e a área do quadrado $ABCD$ equivale a:

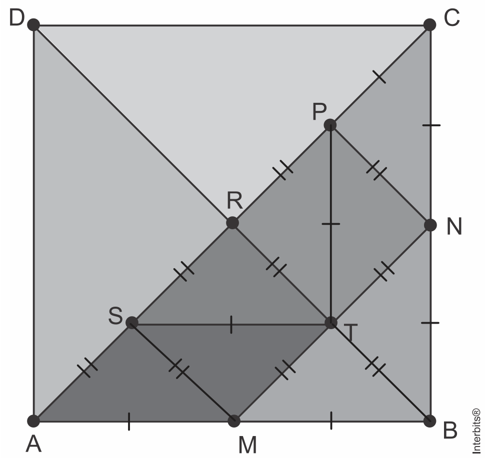
a) $\frac{3}{32}$

b) $\frac{5}{32}$

c) $\frac{3}{16}$

d) $\frac{5}{16}$

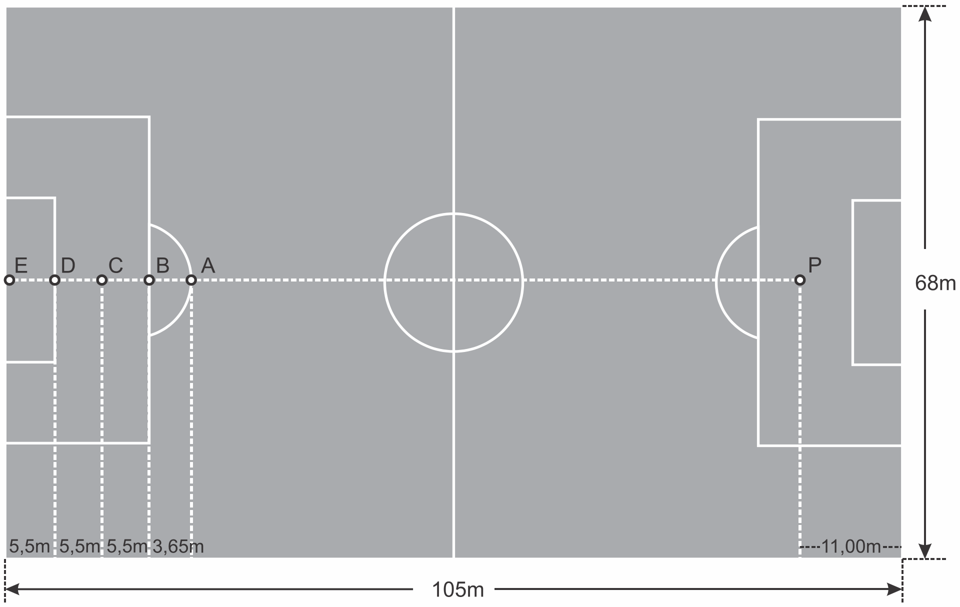
Comentário:



Se o trapézio $AMNP$ é formado por 5 triângulos isósceles e o quadrado $ABCD$ é formado por 16 triângulos isósceles, então a razão entre eles será $5/16$.

Gabarito: D

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:
As medidas apresentadas na figura abaixo seguem o padrão exigido pela FIFA − Federação Internacional de Futebol.



Adaptado de: globoesporte.globo.com, agosto/ 2018. (Adaptado)

10. (cmrj 2019) Ederson, goleiro do Manchester City (Inglaterra) e goleiro reserva do Brasil na Copa do Mundo da Rússia, é o atual recordista mundial de "tiro de meta mais longo". Seu nome foi registrado no livro *Guiness Book* – o livro dos recordes – por ele ter conseguido, com um chute, fazer com que a bola atingisse o solo a uma distância de $75{,}35$ metros do ponto de partida. Se Ederson der um chute em uma bola parada, na marca do pênalti (ponto P), em direção ao ponto E, tão forte quanto o do seu recorde, então ela voltará a tocar o campo, pela primeira vez, entre os pontos

a) P e A
b) A e B
c) B e C
d) C e D
e) D e E

Comentário:

Como a distância entre os pontos P e E é igual a $105-11=94\,\mathrm{m}$, podemos concluir que a distância entre o ponto E e o ponto em que a bola toca o campo pela primeira vez é igual a $94-75{,}35=18{,}65\,\mathrm{m}$.

Portanto, sendo $5{,}5 \cdot 3 = 16{,}5\,\text{m}$ a distância entre os pontos B e E, e $16{,}5 + 3{,}65 = 20{,}15\,\text{m}$ a distância entre os pontos A e E, é fácil ver que a bola tocará o solo entre os pontos A e B.

Gabarito: B

---

11. (ifal 2018) Um fazendeiro resolveu cercar um terreno de formato retangular, cujas dimensões eram 60 metros de largura e 80 metros de comprimento, gastando R\$ 20,00 para cada metro linear da cerca. Qual o valor total do gasto para cercar todo o terreno?

a) R\$ 2.800,00.

b) R\$ 4.800,00.

c) R\$ 5.600,00.

d) R\$ 6.800,00.

e) R\$ 9.600,00.

Comentário:

Primeiramente deve-se obter o valor do perímetro do terreno, somando todos seus lados, para saber o tamanho da cerca a ser utilizada, logo:

$$\text{Perimetro} = 60 + 80 + 60 + 80 = 280\ \text{m}.$$

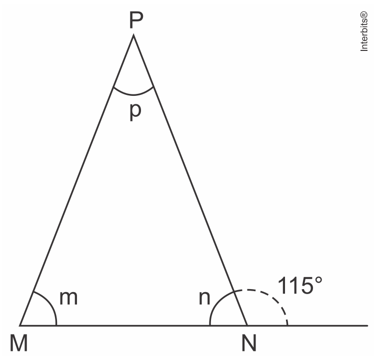
Multiplicando este valor por R\$ 20,00 para obter o valor gasto com a cerca, temos:

$$280 \times 20 = 5600\ \text{reais}.$$

Gabarito: C

---

12. (Mackenzie 2018)



O triângulo PMN acima é isósceles de base $\overline{MN}$. Se p, m e n são os ângulos internos do triângulo, como representados na figura, então podemos afirmar que suas medidas valem, respectivamente,

a) $50°, 65°, 65°$

b) $65°, 65°, 50°$

c) $65°, 50°, 65°$

d) $50°, 50°, 80°$

e) $80°, 80°, 40°$

Comentário:

$$n = 180° - 115° \Rightarrow n = 65°$$
$$PM = PN \Rightarrow m = 65°$$

Logo,

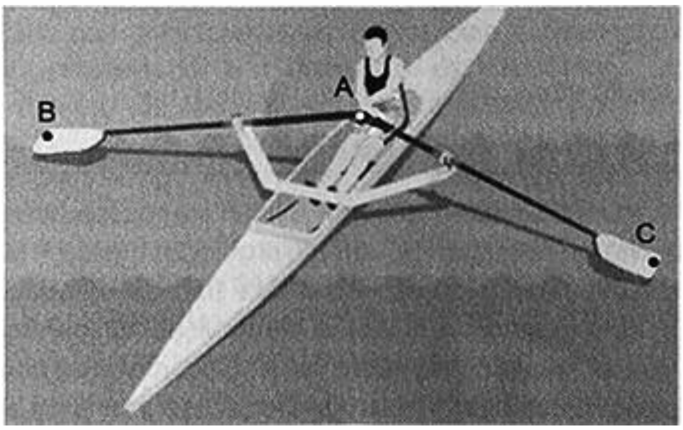
$$p = 180° - 2 \cdot 65° = 50°$$

Gabarito: A

---

13. (Enem 2018) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho.

A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.



Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos B e C. Esses três pontos formam um triângulo ABC cujo ângulo $B\hat{A}C$ tem medida de $170°$.

O tipo de triângulo com vértices nos pontos A, B e C, no momento em que o remador está nessa posição, é

a) retângulo escaleno.
b) acutângulo escaleno.
c) acutângulo isósceles.
d) obtusângulo escaleno.
e) obtusângulo isósceles.

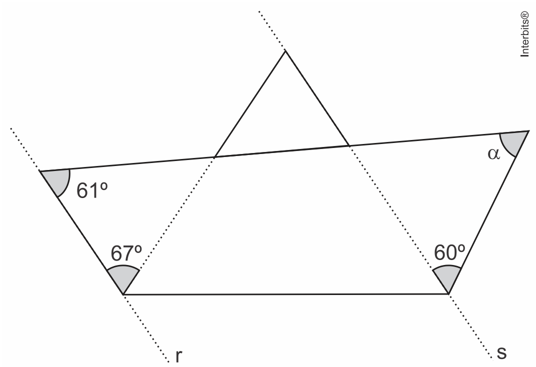
Comentário:

Sendo $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $90° < BAC < 180°$, podemos afirmar que ABC é obtusângulo isósceles.

Gabarito: E

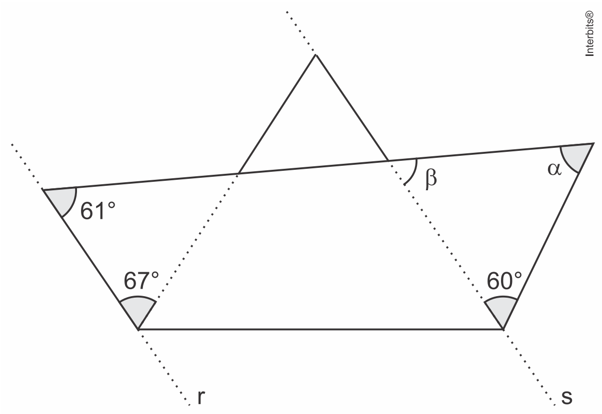
---

14. (ifpe 2018) Eva é aluna do curso de Construção Naval do campus Ipojuca e tem mania de construir barquinhos de papel. Durante a aula de desenho técnico, resolveu medir os ângulos do último barquinho que fez, representado na imagem a seguir. Sabendo que as retas suportes, r e s, são paralelas, qual a medida do ângulo α destacado?



a) $52°$.
b) $60°$.
c) $61°$.
d) $67°$.
e) $59°$.

Comentário:



$r // s \Rightarrow \beta = 61°$

Logo,

$\alpha + 61° + 60° = 180° \Rightarrow \alpha = 59°$

Gabarito: E

---

15. (Upe-ssa 1 2018) Os lados de um triângulo medem, respectivamente, $5\ \text{cm}, 7\ \text{cm}$ e $8\ \text{cm}$. Quais são as respectivas medidas dos lados de um triângulo semelhante a este cujo perímetro mede $0{,}6\ \text{m}$?

a) $15\ \text{cm}, 21\ \text{cm}$ e $24\ \text{cm}$

b) $12\ \text{cm}, 22\ \text{cm}$ e $26\ \text{cm}$

c) $18\ \text{cm}, 20\ \text{cm}$ e $22\ \text{cm}$

d) $11\ \text{cm}, 23\ \text{cm}$ e $26\ \text{cm}$

e) $16\ \text{cm}, 18\ \text{cm}$ e $26\ \text{cm}$

Comentário:

Sejam a, b e c, as medidas dos lados do triângulo semelhante, em centímetros. Logo, como o perímetro do triângulo cujos lados queremos determinar mede $0{,}6\ \text{m} = 60\ \text{cm}$, temos

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8} = \frac{a+b+c}{5+7+8} \Leftrightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8} = 3$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a = 15\ \text{cm} \\ b = 21\ \text{cm} \\ c = 24\ \text{cm} \end{vmatrix}.$$

Gabarito: A

---

16. (Mackenzie 2018) Em um triângulo retângulo ABC, reto em B, as medidas de seus lados AB, BC e AC formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão 3. Então, das alternativas abaixo, as medidas de AB, BC e AC são, respectivamente,

a) $3, 6$ e 9

b) $6, 9$ e 12

c) $9, 12$ e 15

d) $12, 15$ e 18

e) $15, 18$ e 21

Comentário:

Para resolver a questão pode-se testar cada um dos conjuntos de valores utilizando o Teorema de Pitágoras. Outra solução seria verificar quais dos conjuntos de valores são proporcionais aos triângulos pitagóricos, como o $3, 4$ e 5. Nesse caso, percebe-se facilmente que os valores $9, 12$ e 15 formam um triângulo semelhante ao pitagórico:

$3 \cdot 3 = 9$

$4 \cdot 3 = 12$

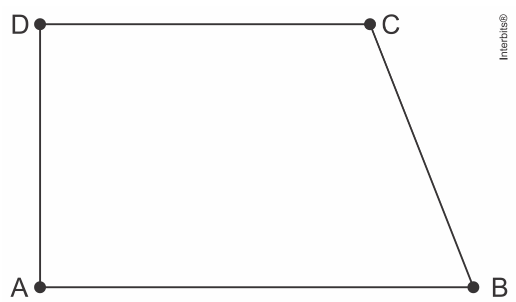
$5 \cdot 3 = 15$

Gabarito: C

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

O trapézio retângulo $ABCD$ da figura representa a superfície de um reservatório de água.

Na figura, tem-se que:



$AB = 20$ m;

$CD = 15$ m;

$AD = 12$ m;

o ângulo $D\hat{A}B$ é reto.

17. (cps 2018) Se, por uma questão de segurança, o reservatório precisa ser cercado, então o comprimento dessa cerca será, em metros, de

a) $60.$

b) $59.$

c) 58.
d) 57.
e) 56.

Comentário:
Calculando:
$\overline{CB}^2 = 12^2 + (20-15)^2 \Rightarrow \overline{CB}^2 = 144 + 25 \Rightarrow \overline{CB} = \sqrt{169} \Rightarrow \overline{CB} = 13$
$P = 12 + 15 + 20 + 13 = 60 \text{ m}$

Gabarito: A

---

18. (cftmg 2017) Sejam dois ângulos x e y tais que $(2x)$ e $(y+10°)$ são ângulos complementares e $(5x)$ e $(3y-40°)$ são suplementares.

O ângulo x mede
a) $5°$.
b) $10°$.
c) $15°$.
d) $20°$.

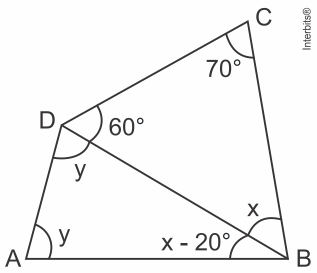
Comentário:
De acordo com as informações do problema, podemos escrever que:
$$\begin{cases} 2x + y + 10° = 90° \\ 5x + 3y - 40° = 180° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 80° \\ 5x + 3y = 220° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 3y = -240° \\ 5x + 3y = 220° \end{cases}$$

Somando as equações, obtemos:
$x = 20°$.

Gabarito: D

---

19. (Eear 2017)



No quadrilátero $ABCD,$ o valor de $y-x$ é igual a

a) $2x$

b) $2y$

c) $\frac{x}{2}$

d) $\frac{y}{2}$

Comentário:

Do triângulo $BCD,$ temos

$$x+70°+60°=180° \Leftrightarrow x=50°.$$

Logo, vem $DBA=50°-20°=30°$ e, portanto, segue que

$$2y=180°-30° \Leftrightarrow y=75°.$$

Em consequência, a resposta é $y-x=75°-50°=25°=\frac{x}{2}.$

Gabarito: C

---

20. (Ufrgs 2017) Em um triângulo $ABC,$ $B\hat{A}C$ é o maior ângulo e $A\hat{C}B$ é o menor ângulo. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é $70°$ maior que a medida de $A\hat{C}B.$ A medida de $B\hat{A}C$ é o dobro da medida de $A\hat{B}C.$

Portanto, as medidas dos ângulos são

a) $20°, 70°$ e $90°.$

b) $20°, 60°$ e $100°.$

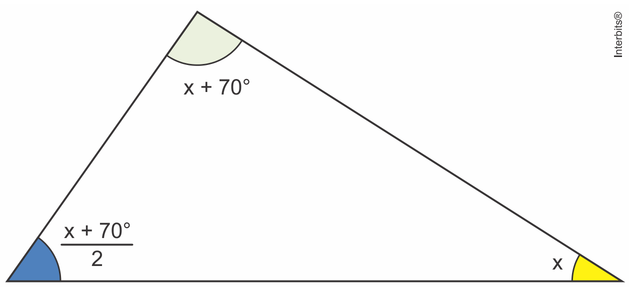
c) $10°, 70°$ e $100°.$

d) $30°, 50°$ e $100°.$

e) $30°, 60°$ e $90°.$

Comentário:

De acordo com as informações do problema e considerando que $A\hat{C}B=x,$ temos:



$$x + 70° + \frac{x + 70°}{2} + x = 180°$$
$$2x + 140° + x + 70° + 2x = 360°$$
$$5x = 150°$$
$$x = 30°$$

Portanto, as medidas dos ângulos são:

$$x = 30°$$

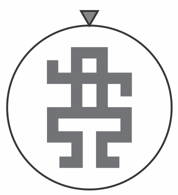
$$\frac{x + 70°}{2} = \frac{30° + 70°}{2} = 50°$$

$$x + 70° = 100°$$

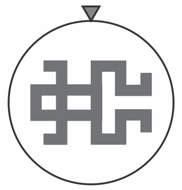
Gabarito: D

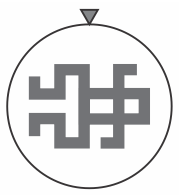
---

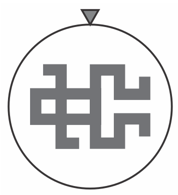
21. (Fatec 2017) Em um círculo recortado em papel cartão foi feito o desenho de um homem estilizado. Esse círculo foi utilizado para montar uma roleta, conforme a figura 1, fixada em uma parede. Quando a roleta é acionada, o círculo gira livremente em torno do seu centro, e o triângulo indicador permanece fixo na parede.

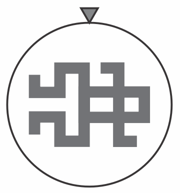


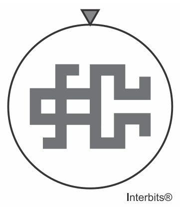
Considerando, inicialmente, a imagem do homem na posição da figura 1, obtém-se, após a roleta realizar uma rotação de três quartos de volta, no sentido horário, a figura representada em

a) 

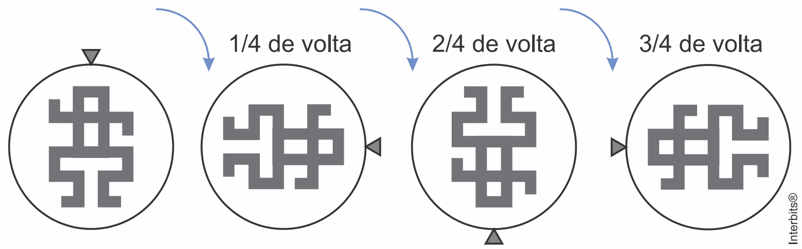
b) 

c) 

d) 

e) 

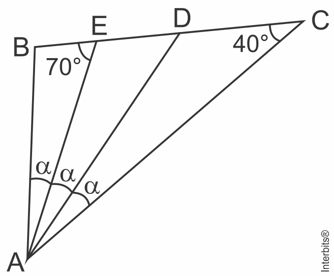
Comentário:



Gabarito: E

---

22. (Eear 2017)



Se ABC é um triângulo, o valor de α é

a) $10°$
b) $15°$
c) $20°$
d) $25°$

Comentário:

Pelo Teorema do Ângulo Externo aplicado no triângulo ACD, temos

$$\begin{aligned} ADE &= CAD + DCA \\ &= \alpha + 40°. \end{aligned}$$

Logo, aplicando novamente o teorema no triângulo ADE, vem

$$\begin{aligned} AEB = ADE + DAE &\Leftrightarrow 70° = \alpha + 40° + \alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha = 15°. \end{aligned}$$

Gabarito: B

---

23. (Fmp 2017) Os lados de um triângulo medem 13 cm, 14 cm e 15 cm, e sua área mede 84 cm^2. Considere um segundo triângulo, semelhante ao primeiro, cuja área mede 336 cm^2.

A medida do perímetro do segundo triângulo, em centímetros, é

a) 42
b) 84
c) 126
d) 168
e) 336

Comentário:

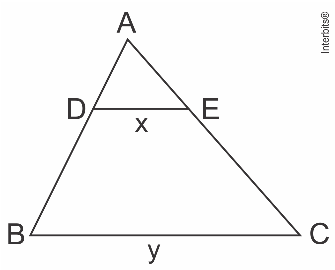
Seja $2p$ o perímetro desejado. Como os triângulos são semelhantes e o perímetro do primeiro triângulo é igual a $13 + 14 + 15 = 42\text{cm}$, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{2p}{42}\right)^2 = \frac{336}{84} &\Leftrightarrow \left(\frac{2p}{42}\right)^2 = 4 \\ &\Rightarrow 2p = 84\text{cm}. \end{aligned}$$

Gabarito: B

---

24. (Eear 2017) Seja um triângulo ABC, conforme a figura. Se D e E são pontos, respectivamente, de AB e AC, de forma que $\overline{AD} = 4$, $\overline{DB} = 8$, $\overline{DE} = x$, $\overline{BC} = y$, e se $DE \parallel BC$, então



a) $y = x + 8$

b) $y = x + 4$

c) $y = 3x$

d) $y = 2x$

Comentário:

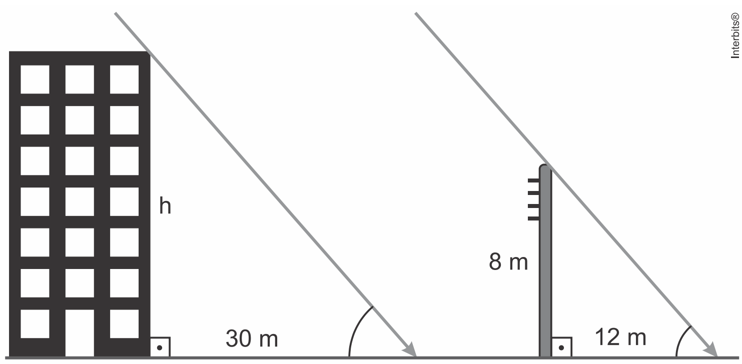
Sendo $DE \parallel BC$, tem-se que os triângulos ABC e ADE são semelhantes por AA. Portanto, segue que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{4}{12} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y = 3x.$$

Gabarito: C

---

25. (ifpe 2017) Às $10\,\text{h}\,45\,\text{min}$ de uma manhã ensolarada, as sombras de um edifício e de um poste de 8 metros de altura foram medidas ao mesmo tempo. Foram encontrados 30 metros e 12 metros, respectivamente, conforme ilustração abaixo.



De acordo com as informações acima, a altura h do prédio é de

a) 12 metros.

b) 18 metros.

c) 16 metros.

d) 14 metros.

e) 20 metros.

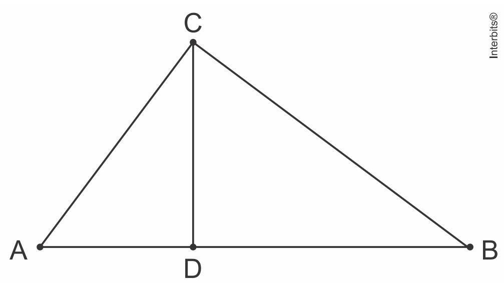
Comentário:

Para obter a altura, basta aplicar a semelhança de triângulos, e neste caso, temos a seguinte relação: $\frac{h}{30}=\frac{8}{12}\Rightarrow h=20$ metros.

Gabarito: E

---

26. (Unisinos 2017) Na figura abaixo, temos que $AC=6$, $BC=8$ e os ângulos $A\hat{C}B$ e $C\hat{D}B$ são retos.



Com base nessas informações, podemos dizer que as medidas dos segmentos AB e CD são, respectivamente:

a) 10 e $4,8$

b) 10 e $4,2$

c) 10 e 4

d) 8 e 5

e) 8 e 4

Comentário:

É fácil ver que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo retângulo pitagórico de lados $3,4$ e 5. Logo, sua hipotenusa AB mede $5\cdot 2=10$ e sua altura CD mede $2,4\cdot 2=4,8$.

Gabarito: A

---

27. (Eear 2016) Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes. Sendo $\hat{A}=2x+15^\circ$ e $\hat{B}=5x-9^\circ$. Assinale a alternativa que representa, corretamente, o valor de x.

a) 2°

b) 8°

c) 12°

d) 24°

Comentário:

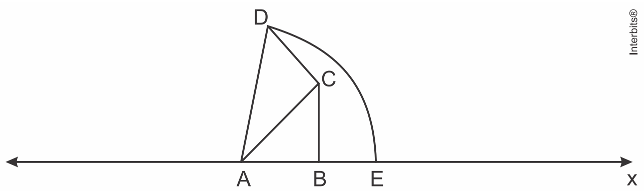
Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes, podemos escrever que:

$2x + 15^\circ = 5x - 9^\circ \Rightarrow 24^\circ = 3x \Rightarrow x = 8^\circ$

Gabarito: B

---

28. (Ulbra 2016) Considere a construção representada na figura abaixo, sobre o eixo x dos números reais.



Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ medem 1 unidade cada um. DE é um arco de circunferência de centro em A. Qual número real está associado ao ponto E, no eixo x? Sabe-se que A está na origem do eixo x, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ e $\overline{AC} \perp \overline{CD}$.

a) $\sqrt{6}$.

b) $\sqrt{2}$.

c) $\sqrt{5}$.

d) $\sqrt{3}$.

e) $\sqrt{8}$.

Comentário:

$\overline{AD} = \overline{AE}$

$\overline{AC} = \sqrt{2}$

$\left(\overline{AD}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 \rightarrow \overline{AD} = \sqrt{3} \rightarrow \overline{AE} = \sqrt{3}$

Gabarito: D

---

29. (ifce 2016) O triângulo ABC tem lados medindo 8 cm, 10 cm e 16 cm, enquanto o triângulo DEF, semelhante a ABC, tem perímetro 204 cm. O maior e o menor dos lados de DEF medem, respectivamente,

a) 64 cm e 32 cm.

b) 60 cm e 48 cm.

c) 48 cm e 24 cm.

d) 96 cm e 48 cm.

e) 96 cm e 64 cm.

Comentário:

Sendo x o maior lado e y o menor lado do triângulo DEF, pode-se escrever:

$p_{ABC} = 8 + 10 + 16 = 34$

34 —— 204

16 —— x

$x = 96$

34 —— 204

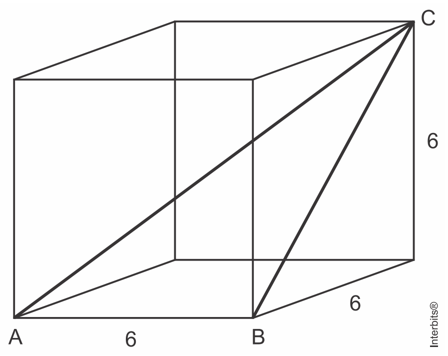
8 —— y

$y = 48$

Gabarito: D

---

30. (Ulbra 2016) A figura a seguir representa um cubo de lado medindo 6 cm e um triângulo ABC.



A área desse triângulo mede

a) $36\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

b) $18\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

c) $24\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

d) $12\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

e) $6\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

Comentário:

$$S_{\Delta} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{2}}{2} \rightarrow S_{\Delta} = 18\sqrt{2}$$

Gabarito: B

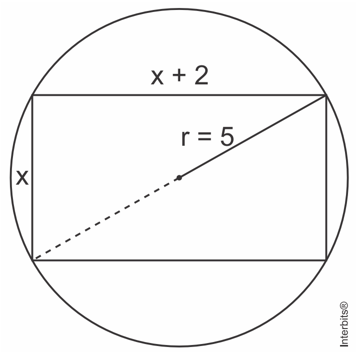
---

31. (ifce 2016) Um retângulo cujo comprimento excede a largura em $2\,\text{m}$ está inscrito em um círculo de $5\,\text{m}$ de raio. A área desse retângulo, em metros quadrados, vale

a) 56.
b) 35.
c) 48.
d) 50.
e) 64.

Comentário:

Teremos:



$$(2r)^2 = x^2 + (x+2)^2$$

$$(10)^2 = x^2 + (x+2)^2 \rightarrow 100 = x^2 + x^2 + 4x + 4 \rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0$$

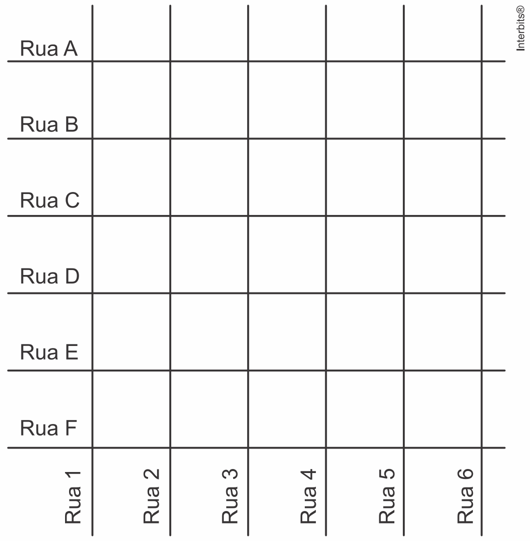
$$2x^2 + 4x - 96 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = -8 \text{ (não convém)} \\ x = 6 \end{array} \right.$$

$$S_{\text{retângulo}} = 6 \cdot (6+2) = 48$$

Gabarito: C

---

32. (Enem 2016) Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.



A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A.

Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C.

b) 4 e C.

c) 4 e D.

d) 4 e E.

e) 5 e C.

Comentário:

Por simetria, o imóvel deverá estar sobre a mediatriz do segmento de reta que une o local de trabalho da mãe e o consultório do pai. Tal mediatriz corresponde à rua 4. Ademais, por inspeção, concluímos que a rua horizontal que cumpre a condição é a D.

Gabarito: C

---

33. (Uece 2016) No retângulo $PQRS$, a medida dos lados PQ e QR são respectivamente $3\,m$ e $2\,m$. Se V é um ponto do lado PQ tal que a medida do segmento VQ é igual a $1m$ e U é o ponto médio do lado PS, então, a medida, em graus, do ângulo $V\hat{U}R$ é

a) 40.

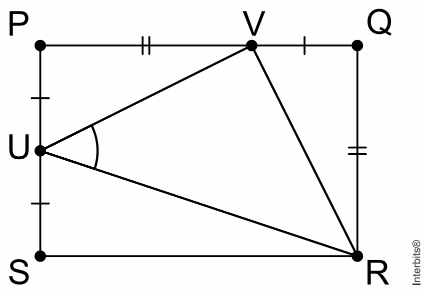
b) 35.

c) 50.

d) 45.

Comentário:

Considere a figura.



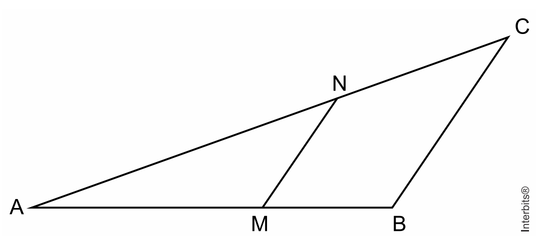
Sabendo que $\overline{VQ} = 1\,m$ e U é ponto médio de PS, temos $\overline{PV} = \overline{QR} = 2\,m$ e $\overline{PU} = 1\,m$. Em consequência, os triângulos PVU e QRV são congruentes por LAL. Portanto, segue que UVR é reto e, assim, o triângulo VRU é retângulo isósceles.

A resposta é $VUR = 45^\circ$.

Gabarito: D

---

34. (cftmg 2016) No triângulo ABC da figura a seguir, $\overline{MN} // \overline{BC}$ e a medida de $\overline{AC}$ é igual a $30\,cm$. Sabe-se que o ponto M dista $8\,cm$ do vértice B, que $\overline{AB}$ mede $\frac{2}{3}$ da medida de $\overline{AC}$ e que a medida de $\overline{BC}$ vale a metade da medida de $\overline{AC}$.



O perímetro do triângulo AMN da figura, mede, em cm,

a) 15.

b) 21.

c) 27.

d) 39.

Comentário:

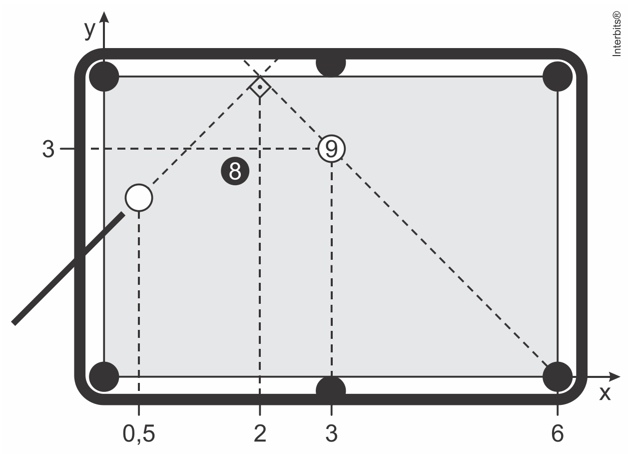
Os triângulos ABC e AMN são semelhantes por AA. Em consequência, sabendo que $\overline{AM} = 12\text{cm}$ e $2p_{ABC} = 30 + 20 + 15 = 65\text{cm}$, temos:

$$\frac{2p_{AMN}}{2p_{ABC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow 2p_{AMN} = \frac{12}{20} \cdot 65$$
$$\Leftrightarrow 2p_{AMN} = 39\text{cm}.$$

Gabarito: D

---

35. (Enem PPL 2016) Em sua vez de jogar, um jogador precisa dar uma tacada na bola branca, de forma a acertar a bola 9 e fazê-la cair em uma das caçapas de uma mesa de bilhar. Como a bola 8 encontra-se entre a bola branca e a bola 9, esse jogador adota a estratégia de dar uma tacada na bola branca em direção a uma das laterais da mesa, de forma que, ao rebater, ela saia em uma trajetória retilínea, formando um ângulo de $90°$ com a trajetória da tacada, conforme ilustrado na figura.



Com essa estratégia, o jogador conseguiu encaçapar a bola 9. Considere um sistema cartesiano de eixos sobre o plano da mesa, no qual o ponto de contato da bola com a mesa define sua posição nesse sistema. As coordenadas do ponto que representa a bola 9 são $(3; 3)$, o centro da caçapa de destino tem coordenadas $(6; 0)$ e a abscissa da bola branca é $0{,}5$, como representados na figura.

Se a estratégia deu certo, a ordenada da posição original da bola branca era

a) $1{,}3$.

b) $1{,}5$.

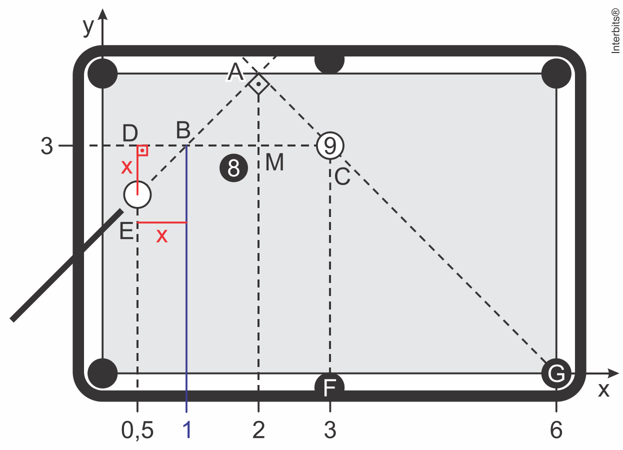
c) $2{,}1$.

d) $2{,}2$.

e) $2{,}5$.

Comentário:

Considerando os dados do enunciado:



$\Delta ABC \approx \Delta CFG \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC}$

$\overline{BM} = \overline{CM} \Rightarrow \overline{BM} = 1 \Rightarrow B(1;3)$

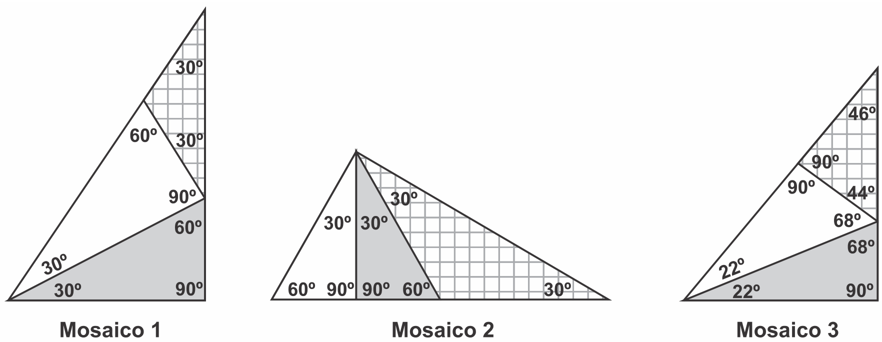
$\Delta ABC \approx \Delta DBE$

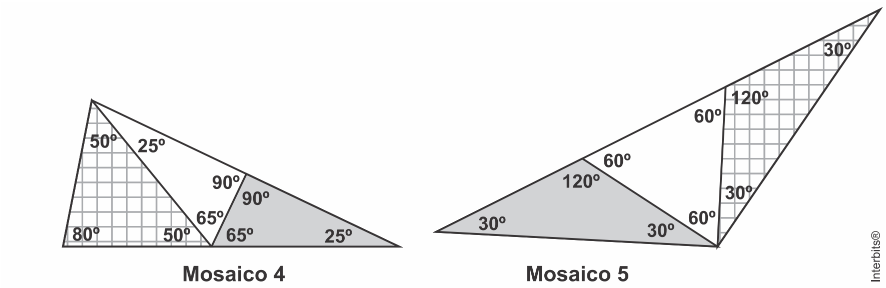
$\overline{DE} = \overline{DB} \Rightarrow \overline{DE} = 0,5 \Rightarrow E(0,5;\ 2,5)$

Gabarito: E

---

36. (Enem 2ª aplicação 2016) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.





Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Comentário:

O mosaico que possui as características daquele que se pretende construir é o 2. De fato, pois os triângulos $30°, 60°, 90°$ são congruentes e o triângulo $30°, 30°, 120°$ é isósceles.

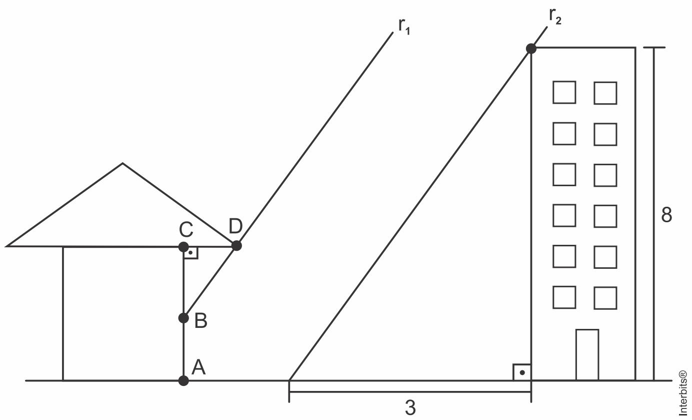
No mosaico 1, o triângulo $30°, 30°, 120°$ é isósceles, mas os triângulos $30°, 60°, 90°$ não são congruentes.

No mosaico 3, os triângulos $22°, 68°, 90°$ são congruentes, mas o triângulo $44°, 46°, 90°$ não é isósceles.

Nos mosaicos 4 e 5 não é possível formar um triângulo retângulo com as três peças.

Gabarito: B

37**.** (cftmg 2016) Na figura a seguir, o segmento $\overline{AC}$ representa uma parede cuja altura é $2{,}9\text{ m}$. A medida do segmento $\overline{AB}$ é $1{,}3\text{ m}$ o segmento $\overline{CD}$ representa o beiral da casa. Os raios de sol r_1 e r_2 passam ao mesmo tempo pela casa e pelo prédio, respectivamente.



Se r_1 é paralelo com r_2, então, o comprimento do beiral, em metros, é

a) $0,60.$

b) $0,65.$

c) $0,70.$

d) $0,75.$

Comentário:

Sendo os triângulos retângulos semelhantes por AA e $\overline{BC} = 1,6\text{ m},$ temos

$$\frac{\overline{CD}}{3} = \frac{1,6}{8} \Leftrightarrow \overline{CD} = 0,6\text{ m}.$$

Gabarito: A

---

38. (ifsul 2016) A sombra de uma Torre mede $4,2\text{ m}$ de comprimento. Na mesma hora, a sombra de um poste de 3 m de altura é 12 cm de comprimento. Qual é a altura da torre?

a) $95\text{ m}.$

b) $100\text{ m}.$

c) $105\text{ m}.$

d) $110\text{ m}.$

Comentário:

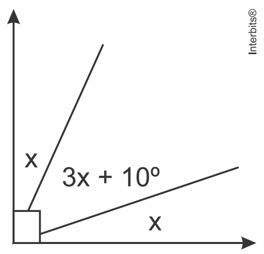
Por semelhança de triângulos:

$$\frac{h}{4,2} = \frac{3}{0,12} \to h = 105\text{ m}$$

Gabarito: C

---

39. (utfpr 2015) Calcule o valor de $x,$ em graus, na figura:



a) $16.$

b) 10.

c) 20.

d) 58.

e) 32.

Comentário:

Os três ângulos juntos formam um ângulo reto, daí:

$x + 3x + 10° + x = 90° \Rightarrow 5x = 80° \Rightarrow x = 16°.$

Gabarito: A

---

40. (Fatec 2015) Observe as imagens para responder à questão proposta.

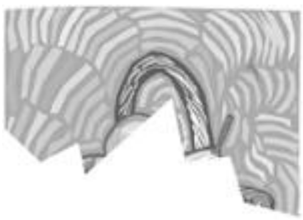
Ao se recortar a figura 1, obteve-se a figura 2.

Figura 1

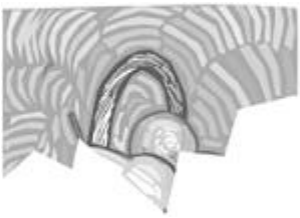
Figura 2

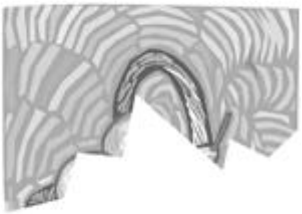
Fonte: Clip-Art

Assinale a alternativa que apresenta o complemento correto da figura 2 para se refazer a figura 1.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Comentário:
É imediato que o complemento correto da figura 2 se encontra na alternativa [D].

Gabarito: D

---

41. (ifsul 2015) Duas retas paralelas "r" e "s", cortadas por uma transversal "t", formam ângulos colaterais internos, dos quais um excede o outro em $20°$.

O ângulo colateral interno agudo mede

a) $20°$
b) $35°$
c) $55°$
d) $80°$

Comentário:
A soma dos ângulos colaterais de uma reta que atravessa retas paralelas é $180°$. Assim, se os ângulos forem x e y, pode-se deduzir:

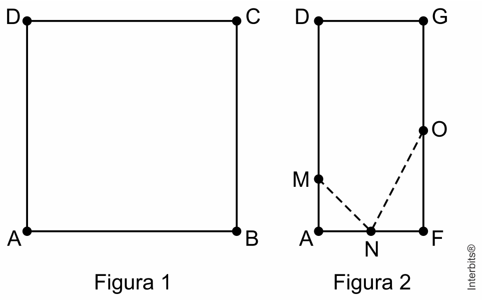
$$\begin{cases} x + y = 180 \\ x - y = 20 \end{cases}$$

$$2x = 200 \rightarrow x = 100 \rightarrow y = 80$$

Gabarito: D

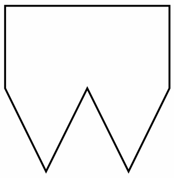
---

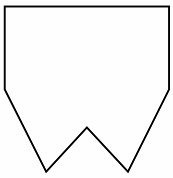
42. (Enem 2015) Uma família fez uma festa de aniversário e enfeitou o local da festa com bandeirinhas de papel. Essas bandeirinhas foram feitas da seguinte maneira: inicialmente, recortaram as folhas de papel em forma de quadrado, como mostra a Figura 1. Em seguida, dobraram as folhas quadradas ao meio sobrepondo os lados BC e AD, de modo que C e D coincidam, e o mesmo ocorra com A e B, conforme ilustrado na Figura 2. Marcaram os pontos médios O e N, dos lados FG e AF, respectivamente, e o ponto M do lado AD, de modo que AM seja igual a um quarto de AD. A seguir, fizeram cortes sobre as linhas pontilhadas ao longo da folha dobrada.

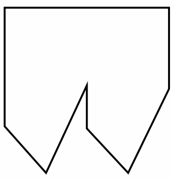


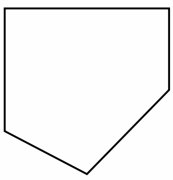
Após os cortes, a folha e aberta e a bandeirinha esta pronta.

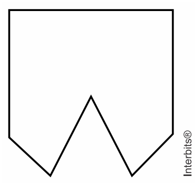
A figura que representa a forma da bandeirinha pronta é

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Comentário:

Seja FG o eixo de simetria da bandeirinha. Logo, a bandeirinha pronta está representada na figura da alternativa [E].

Gabarito: E

---

43. (Uece 2015) Considere um segmento de reta XY cuja medida do comprimento é $10\,cm$ e P um ponto móvel no interior de XY dividindo-o em dois segmentos consecutivos XP e PY. Se M e N são respectivamente os pontos médios de XP e PY, então podemos afirmar corretamente que a medida do comprimento do segmento MN

a) varia entre $0\,cm$ e $10\,cm$, dependendo da posição do ponto P.

b) varia entre $5\,cm$ e $10\,cm$, dependendo da posição do ponto P.

c) varia entre $2,5\,cm$ e $10\,cm$, dependendo da posição do ponto P.

d) é igual a $5\,cm$, sempre.

Comentário:

O segmento de reta inicial (de comprimento $10\,cm$) foi dividido em dois e cada um dos segmentos resultantes foi dividido ao meio. Cada uma dessas metades resultantes, quando somadas, serão sempre iguais a metade do segmento inicial.

$$XP = a$$
$$PY = b$$
$$XY = a + b = 10$$
$$XM = MP = \frac{a}{2}$$
$$PN = NY = \frac{b}{2}$$
$$MN = \frac{a+b}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Gabarito: D

---

44. (Ucs 2015) Uma escada está apoiada em uma parede a uma altura de $16\,m$ do solo plano. A distância do pé da escada até a parede é igual a $12\,m$. O centro de gravidade da escada está a um

terço do comprimento dela, medido a partir do seu apoio no chão. Nessa situação, o comprimento da escada e a altura aproximada do seu centro de gravidade até o chão são, respectivamente, iguais a

a) 20 m e $5{,}3\text{ m}$.

b) 20 m e $6{,}6\text{ m}$.

c) 28 m e $9{,}3\text{ m}$.

d) $\sqrt{56}\text{ m}$ e $5{,}3\text{ m}$.

e) $\sqrt{56}\text{ m}$ e $2{,}6\text{ m}$.

Comentário:

Sendo x o comprimento da escada e y a altura aproximada do seu centro de gravidade, pode-se escrever, utilizando o Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos:

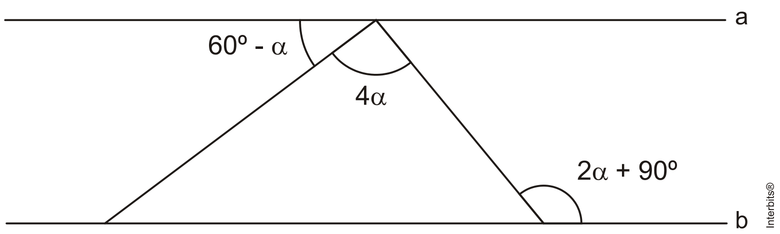
$$x^2 = 16^2 + 12^2 \rightarrow x = 20 \text{ metros}$$

$$\frac{y}{16} = \frac{20/3}{20} \rightarrow y = 5{,}33 \text{ metros}$$

Gabarito: A

---

45. (Mackenzie 2014) Na figura abaixo, a e b são retas paralelas.



A afirmação correta a respeito do número que expressa, em graus, a medida do ângulo α é

a) um número primo maior que 23.

b) um número ímpar.

c) um múltiplo de 4.

d) um divisor de 60.

e) um múltiplo comum entre 5 e 7.

Comentário:

Os ângulos $(60° - \alpha + 4\alpha) = (60° + 3\alpha)$ e $2\alpha + 90°$ são alternos internos. Portanto,

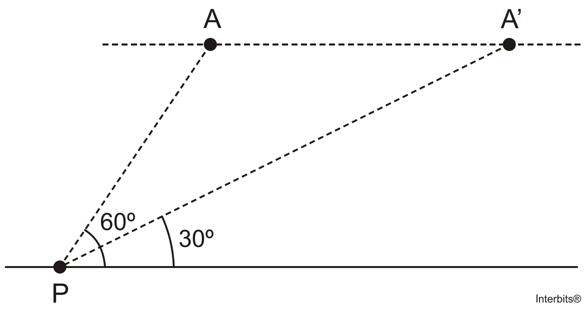
$$60° + 3\alpha = 2\alpha + 90° \Leftrightarrow \alpha = 30°,$$

que é um divisor de 60.

Gabarito: D

---

46. (Espm 2014) Um avião voava a uma altitude e velocidade constantes. Num certo instante, quando estava a 8 km de distância de um ponto P, no solo, ele podia ser visto sob um ângulo de elevação de 60° e, dois minutos mais tarde, esse ângulo passou a valer 30°, conforme mostra a figura abaixo.



A velocidade desse avião era de:
a) 180 km/h
b) 240 km/h
c) 120 km/h
d) 150 km/h
e) 200 km/h

Comentário:

Seja P' o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta $\overleftrightarrow{AA'}$. É fácil ver que $P'\hat{A}P = 60^\circ$. Daí, como $P'\hat{A}P$ é ângulo externo do triângulo $AA'P$ segue-se que $A\hat{A}'P = 30^\circ$, o que implica em $\overline{AA'} = \overline{AP} = 8\,\text{km}$.

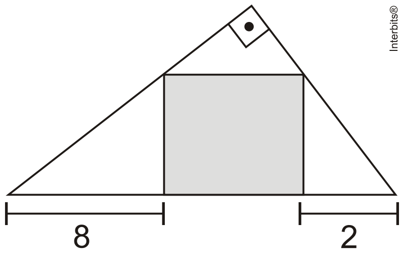
Portanto, a velocidade do avião no trecho AA' era de

$$\frac{8}{\frac{2}{60}} = 240\,\text{km/h}.$$

Gabarito: B

---

47. (ifce 2014)



O valor do lado de um quadrado inscrito em um triângulo retângulo, conforme o esboço mostrado na figura, é

a) 10.

b) 8.

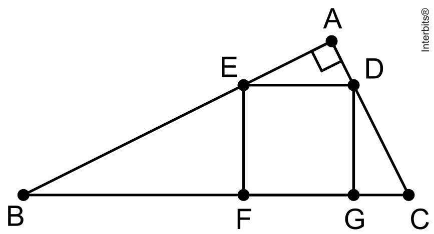
c) 6.

d) 4.

e) 2.

Comentário:

Considere a figura.



É fácil ver que os triângulos BFE e DGC são semelhantes por AA. Portanto, se ℓ é a medida do lado do quadrado, temos

$$\frac{\ell}{2}=\frac{8}{\ell}\Leftrightarrow \ell^2=16\Rightarrow \ell=4.$$

Gabarito: D

48. (cftmg 2014) Numa festa junina, além da tradicional brincadeira de roubar bandeira no alto do pau de sebo, quem descobrisse a sua altura ganharia um prêmio. O ganhador do desafio fincou, paralelamente a esse mastro, um bastão de 1m. Medindo-se as sombras projetadas no chão pelo bastão e pelo pau, ele encontrou, respectivamente, 25 dm e 125 dm. Portanto, a altura do "pau de sebo", em metros, é

a) 5,0.

b) 5,5.

c) 6,0.

d) 6,5.

Comentário:

Sabendo que a altura é proporcional ao comprimento da sombra projetada, segue-se que a altura h do pau de sebo é dada por

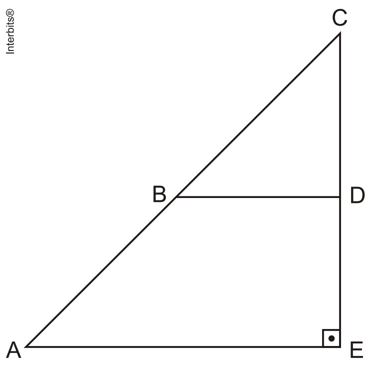
$$\frac{h}{125} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow h = 5 \text{ m}.$$

Gabarito: A

---

49. (Cefet MG 2014) A figura abaixo tem as seguintes características:

- o ângulo $\hat{E}$ é reto;
- o segmento de reta $\overline{AE}$ é paralelo ao segmento $\overline{BD}$;
- os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DE}$, medem, respectivamente, 5, 4 e 3.



O segmento $\overline{AC}$, em unidades de comprimento, mede

a) 8.

b) 12.

c) 13.

d) $\sqrt{61}$

e) $5\sqrt{10}$.

Comentário:

Desde que os triângulos ACE e BCD são semelhantes por AA, vem

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{CD}+3} = \frac{4}{5}$$
$$\Leftrightarrow \overline{CD} = 12.$$

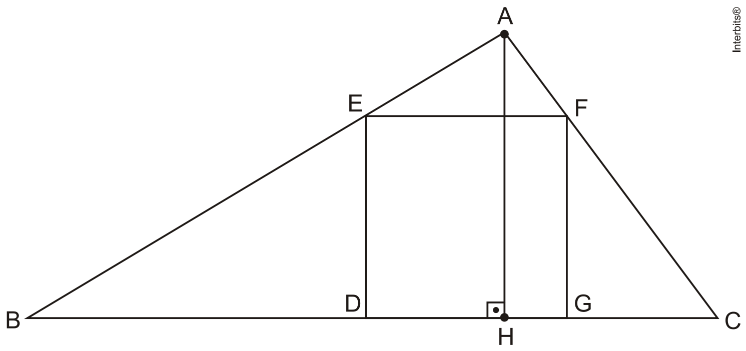
Portanto, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACE, encontramos

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 5^2 + 15^2$$
$$\Rightarrow \overline{AC} = 5\sqrt{10}.$$

Gabarito: E

---

50. (cftmg 2014) A figura a seguir apresenta um quadrado DEFG e um triângulo ABC cujo lado BC mede 40 cm e a altura AH, 24 cm.



A medida do lado desse quadrado é um número
a) par.
b) primo.
c) divisível por 4.
d) múltiplo de 5.

Comentário:

Seja ℓ a medida do lado do quadrado $DEFG$.

Os triângulos ABC e AEF são semelhantes por AA.

Portanto,

$$\frac{\ell}{40} = \frac{24-\ell}{24} \Leftrightarrow 120 - 5\ell = 3\ell$$
$$\Leftrightarrow \ell = 15\,\text{cm},$$

que é um múltiplo de 5.

Gabarito: D

51. (Enem PPL 2013) O símbolo internacional de acesso, mostrado na figura, anuncia local acessível para o portador de necessidades especiais. Na concepção desse símbolo, foram empregados elementos gráficos geométricos elementares.

Regras de acessibilidade ao meio físico para o deficiente.

Disponível em: www.ibdd.org.br.
Acesso em: 28 jun. 2011(adaptado).

Os elementos geométricos que constituem os contornos das partes claras da figura são

a) retas e círculos.

b) retas e circunferências.

c) arcos de circunferências e retas.

d) coroas circulares e segmentos de retas.

e) arcos de circunferências e segmentos de retas.

Comentário:

É fácil ver que os elementos geométricos que constituem os contornos das partes claras da figura são arcos de circunferências e segmentos de retas.

Gabarito: E

52. (Enem 2013) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.

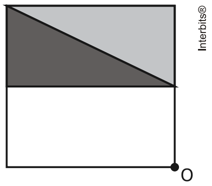
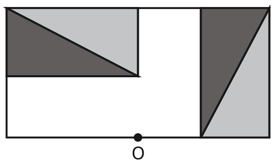
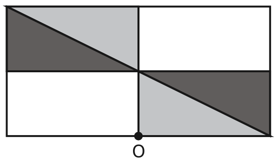
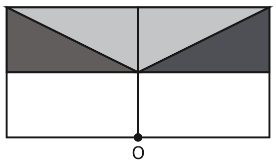


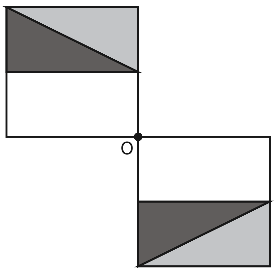
Figura original

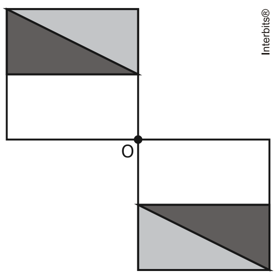
A imagem que representa a nova figura é:

a) 

b) 

c) 

d) 

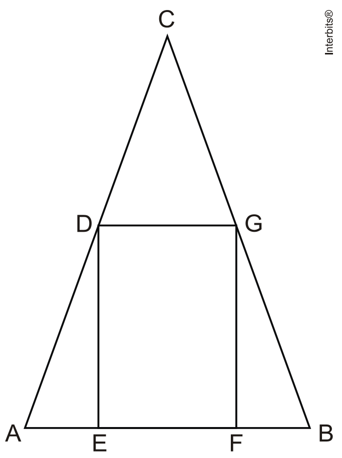
e) 

Comentário:

Como o simétrico de um ponto P do plano, em relação ao ponto O, é o ponto P' tal que $\overline{PO} = \overline{P'O}$ e P' pertence à reta $\overleftrightarrow{PO}$, segue-se que a alternativa correta é a alternativa [E].

Gabarito: E

53. (Pucrj 2013) O retângulo DEFG está inscrito no triângulo isósceles ABC, como na figura abaixo:



Assumindo $\overline{DE} = \overline{GF} = 12$, $\overline{EF} = \overline{DG} = 8$ e $\overline{AB} = 15$, a altura do triângulo ABC é:

a) $\frac{35}{4}$

b) $\frac{150}{7}$

c) $\frac{90}{7}$

d) $\frac{180}{7}$

e) $\frac{28}{5}$

Comentário:

Seja h a altura do triângulo ABC.

Como os triângulos ABC e DGC são semelhantes, temos que

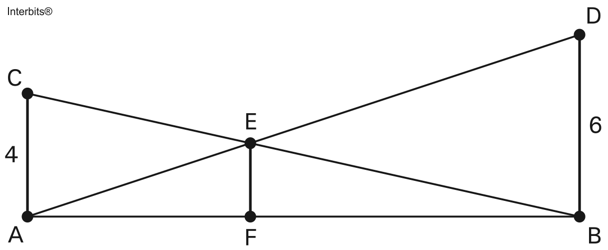
$$\frac{h-12}{h} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow 15h - 180 = 8h$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{180}{7} \text{ u.c.}$$

Gabarito: D

---

54. (Enem 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6m e 4m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

a) $1\,m$

b) $2\,m$

c) $2{,}4\,m$

d) $3\,m$

e) $2\sqrt{6}\,m$

Comentário:

É fácil ver que os triângulos AEC e BED são semelhantes. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &\Leftrightarrow \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{4}{6} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{AF}+\overline{BF}}{\overline{AF}} = \frac{2+3}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{AF}}{\overline{AF}+\overline{BF}} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

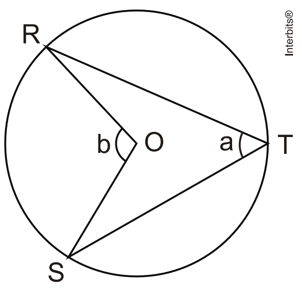
Além disso, como os triângulos AEF e ABD também são semelhantes, vem

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BD}} &\Leftrightarrow \frac{\overline{AF}}{\overline{AF}+\overline{BF}} = \frac{\overline{EF}}{6} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{6} = \frac{2}{5} \\ &\Leftrightarrow \overline{EF} = 2{,}4\,m.\end{aligned}$$

Gabarito: C

---

55. (ifce 2012) Na figura abaixo, **R**, **S** e **T** são pontos sobre a circunferência de centro **O**. Se ***x*** é o número real, tal que ***a* = 5*x* e *b* = 3*x* + 42°** são as medidas dos ângulos **RTS** e **ROS**, respectivamente, pode-se dizer que



a) a = 30° e b = 60°.

b) a = 80° e b = 40°.

c) a = 60° e b = 30°.

d) a = 40° e b = 80°.

e) a = 30° e b = 80°.

Comentário:

De acordo com as propriedades do ângulo inscrito, pode-se escrever que:

b = 2.a
3x + 42° = 2.5x
7x = 42°
x= 6°

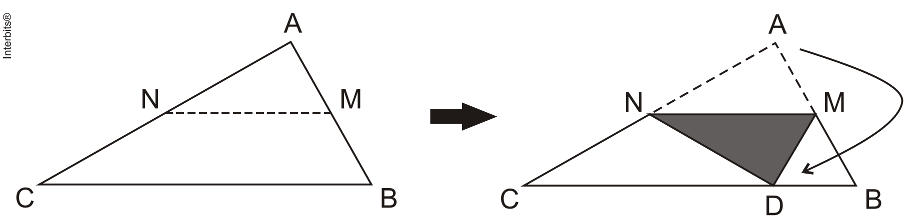
Logo, a = 5.6° = 30°

b = 3.6° + 42° = 60°.

Gabarito: A

---

56. (Enem PPL 2012) Um professor, ao fazer uma atividade de origami (dobraduras) com seus alunos, pede para que estes dobrem um pedaço de papel em forma triangular, como na figura a seguir, de modo que M e N sejam pontos médios respectivamente de AB e AC, e D, ponto do lado BC, indica a nova posição do vértice A do triângulo ABC.



Se ABC é um triângulo qualquer, após a construção, são exemplos de triângulos isósceles os triângulos

a) CMA e CMB.
b) CAD e ADB.
c) NAM e NDM.
d) CND e DMB.
e) CND e NDM.

Comentário:

Gabarito: D

57**.** (Ufrn 2012) Numa projeção de filme, o projetor foi colocado a 12 m de distância da tela. Isto fez com que aparecesse a imagem de um homem com 3 m de altura. Numa sala menor, a projeção resultou na imagem de um homem com apenas 2 m de altura. Nessa nova sala, a distância do projetor em relação à tela era de
a) 18 m.
b) 8 m.
c) 36 m.
d) 9 m.

Comentário:

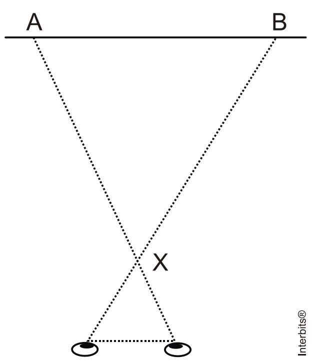
Se d é a distância procurada, então $\frac{d}{12}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow d=8\text{ m}.$

Gabarito: B

58**.** (Udesc 2012) Quando olhamos para um ambiente qualquer, a percepção de profundidade é possível devido a nossa visão binocular. Por estarem separados em média 65 mm em adultos, cada um dos nossos olhos registra uma imagem de um ângulo ligeiramente diferente. Ao interpretar essas imagens ao mesmo tempo, o cérebro forma um "mapa" dessas diferenças, tornando possível estimar a distância dos objetos em relação a nós.
A estereoscopia (popularmente conhecida como "imagem 3D") é uma técnica que consiste em exibir imagens distintas para cada olho do observador, representando o que se observaria em uma situação real. Assim, o cérebro pode ser "enganado" a interpretar os objetos representados como se estivessem flutuando diante da tela ou atrás dela.

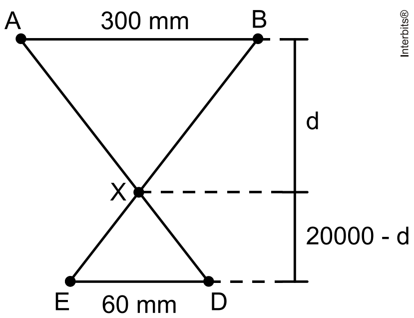
Diversas tecnologias existem atualmente para conseguir isso. A mais comum delas, usada nas salas de cinema 3D, funciona com o uso de óculos polarizadores que filtram a imagem projetada na tela, permitindo que cada olho receba somente a imagem correspondente.
Um observador está em uma sala de cinema 3D usando óculos polarizadores e sobre a tela são projetados dois pontos *A* e *B* a uma distância de 30 cm um do outro, com *A* à esquerda de *B*. Os filtros polarizadores dos óculos fazem com que o ponto *A* seja visto apenas por seu olho direito e o ponto *B* apenas por seu olho esquerdo, de forma que as linhas de visão de cada um dos olhos se interseccionem em um ponto *X*, conforme a figura. O observador verá apenas um único ponto, resultado da junção em seu cérebro dos pontos *A* e *B*, localizado em *X*.

Sabendo que a reta imaginária que passa por seus olhos é paralela àquela que passa pelos pontos *A* e *B* e estas distam 20 m entre si, e que sua distância interocular é de 60 mm, a distância da tela em que ele verá a imagem virtual, formada no ponto *X*, é aproximadamente:



a) 6,6 m
b) 3,3 m
c) 4 m
d) 16,7 m
e) 16 m

Comentário:
Considere a figura, em que d é a distância pedida.



Como os triângulos ABX e EDX são semelhantes, temos que

$$\begin{aligned}\frac{20000-d}{d}=\frac{60}{300} &\Leftrightarrow d=100000-5d\\ &\Leftrightarrow d=\frac{100000}{6}\\ &\Rightarrow d\cong 16\,666{,}7\,\text{mm}\\ &\Rightarrow d\cong 16{,}7\text{ m.}\end{aligned}$$

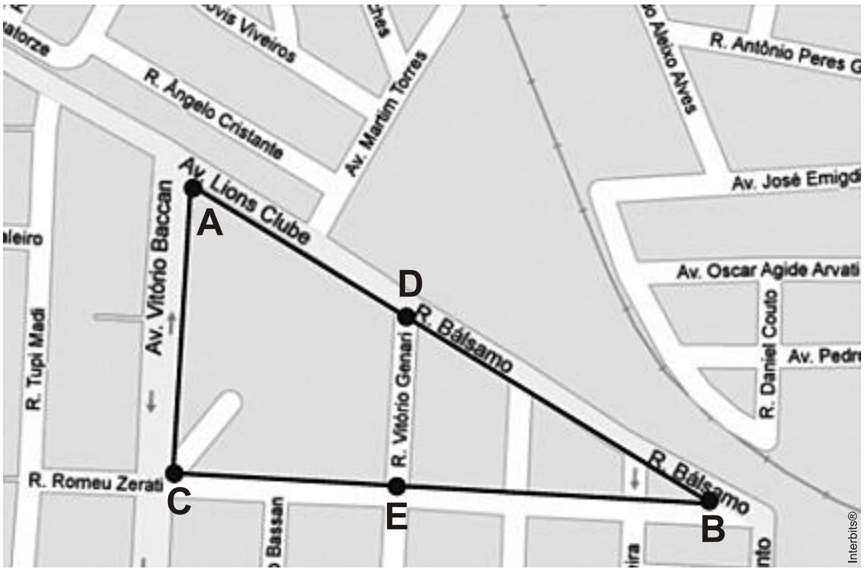
Gabarito: D

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

As ruas e avenidas de uma cidade são um bom exemplo de aplicação de Geometria.

Um desses exemplos encontra-se na cidade de Mirassol, onde se localiza a Etec Prof. Mateus Leite de Abreu.

A imagem apresenta algumas ruas e avenidas de Mirassol, onde percebemos que a Av. Vitório Baccan, a Rua Romeu Zerati e a Av. Lions Clube/Rua Bálsamo formam uma figura geométrica que se aproxima muito de um triângulo retângulo, como representado no mapa.



(http://maps.google.com.br/ Acesso em: 18.02.2012. Adaptado)

Considere que

– a Rua Bálsamo é continuação da Av. Lions Clube;

– o ponto A é a intersecção da Av. Vitório Baccan com a Av. Lions Clube;

– o ponto B é a intersecção da Rua Romeu Zerati com a Rua Bálsamo;

– o ponto C é a intersecção da Av. Vitório Baccan com a Rua Romeu Zerati;

– o ponto D é a intersecção da Rua Bálsamo com a Rua Vitório Genari;

– o ponto E é a intersecção da Rua Romeu Zerati com a Rua Vitório Genari;

– a medida do segmento $\overline{AC}$ é 220 m;
– a medida do segmento $\overline{BC}$ é 400 m e
– o triângulo ABC é retângulo em C.

59. (cps 2012) Considere que o trecho $\overline{DE}$ da rua Vitório Genari é paralelo ao trecho $\overline{AC}$ da Av. Vitório Baccan. Sabendo que a medida do segmento $\overline{DE}$ é 120 m, então a medida do trecho $\overline{CE}$ da Rua Romeu Zerati é, em metros, mais próxima de
a) 182.
b) 198.
c) 200.
d) 204.
e) 216.

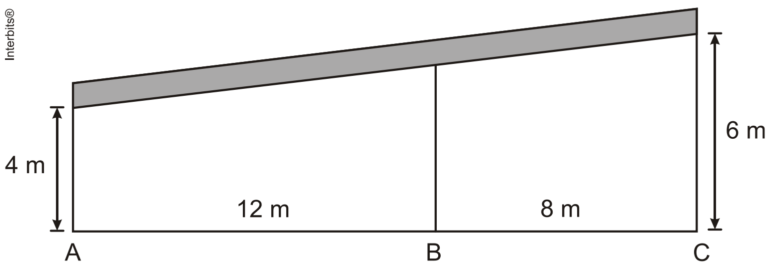
Comentário:
Como os triângulos ABC e BED são semelhantes, vem

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}}\Leftrightarrow\frac{400-\overline{CE}}{400}=\frac{120}{220}$$
$$\Leftrightarrow 11\cdot(400-\overline{CE})=400\cdot 6$$
$$\Leftrightarrow \overline{CE}=\frac{2000}{11}$$
$$\Rightarrow \overline{CE}\cong 182\text{ m.}$$

Gabarito: A

---

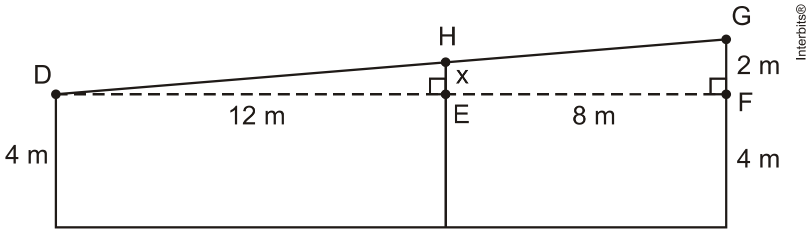
60. (Ufpr 2011) Um telhado inclinado reto foi construído sobre três suportes verticais de aço, colocados nos pontos A, B e C, como mostra a figura ao lado. Os suportes nas extremidades A e C medem, respectivamente, 4 metros e 6 metros de altura.



A altura do suporte em B é, então, de:
a) 4,2 metros.

b) 4,5 metros.
c) 5 metros.
d) 5,2 metros.
e) 5,5 metros.

Comentário:



Traçando $DF \parallel AC,$ temos que os triângulos DHE e DGF são semelhantes por AAA.
Se $\overline{HE} = x,$ vem:

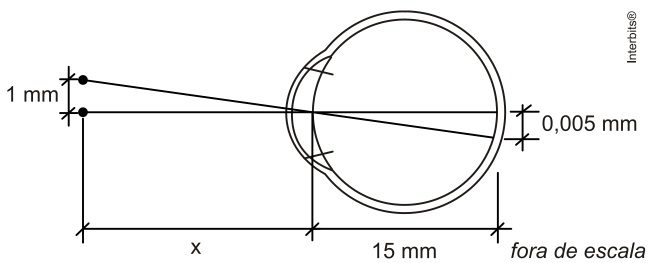
$$\frac{x}{2} = \frac{12}{20} \Rightarrow x = 1{,}2\text{ m}.$$

Assim, a altura do suporte em B é:

$$4 + x = 4 + 1{,}2 = 5{,}2\text{ m}.$$

Gabarito: D

61. (Unesp 2011) Para que alguém, com o olho normal, possa distinguir um ponto separado de outro, é necessário que as imagens desses pontos, que são projetadas em sua retina, estejam separadas uma da outra a uma distância de $0{,}005\text{ mm}.$



Adotando-se um modelo muito simplificado do olho humano no qual ele possa ser considerado uma esfera cujo diâmetro médio é igual a $15\text{ mm},$ a maior distância $x,$ em metros, que dois pontos luminosos, distantes 1mm um do outro, podem estar do observador, para que este os perceba separados, é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

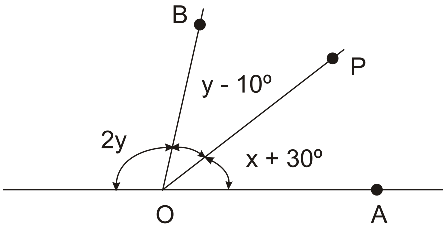
Comentário:

$$\frac{1}{0{,}005}=\frac{x}{15}\Leftrightarrow x=\frac{15}{0{,}005}\Leftrightarrow x=3000\text{ mm}=3\text{ m}$$

Gabarito: C

---

62. (cftsc 2010) Na figura abaixo, OP é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B.$ Determine o valor de x e $y.$



a) $x=13$ e $y=49$

b) $x=15$ e $y=35$

c) $x=12$ e $y=48$

d) $x=17$ e $y=42$

e) $x=10$ e $y=50$

Comentário:

$y-10°=x+30°\Leftrightarrow y=x+40°$ (OP é bissetriz)

$2y+y-10°+x+30°=180°\Leftrightarrow 3y+x=160°$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} y=x+40° \\ 3y+x=160° \end{cases}$ temos:

$x=10°$ e $y=50°$

Gabarito: E
