GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

Geometria Analítica

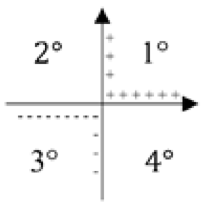
GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

Geometria Analítica

Plano Cartesiano

Plano de coordenadas é um sistema de orientação em dois eixos, vertical e horizontal.

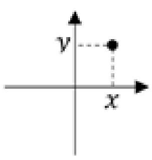
ELEMENTOS



- **Eixos:** X (abscissas) que é horizontal e Y (ordenadas) que é vertical;
- **Quadrantes:** ímpares (1 e 3) e pares (2 e 4).

Pontos e Coordenadas

Um ponto qualquer no plano cartesiano possui duas coordenadas, uma referente ao eixo X (abscissas) e outra referente ao eixo Y (ordenadas), formando um par ordenado em que o primeiro número é a abscissa e o segundo a ordenada (x, y).



Um ponto pode estar em quatro situações:

- Em algum dos quatro quadrantes;
- Sobre o eixo X;
- Sobre o eixo Y;
- Sobre o eixo X e Y (origem do plano com coordenadas $(0, 0)$).

Bissetrizes

Bissetriz é a reta que divide um ângulo ao meio. No cartesiano possuímos duas bissetrizes:

- Bissetriz dos Quadrantes Ímpares (BQI): Reta que divide o ângulo formado pelos eixos cartesianos ao meio e que passa pelos quadrantes ímpares $(1$ e $3)$.
- Qualquer ponto P sobre essa reta possui coordenadas P(a,a).
- Bissetriz dos Quadrantes Pares (BQP): Reta que divide o ângulo formado pelos eixos cartesianos ao meio e que passa pelos quadrantes pares $(2$ e $4)$.
- Qualquer ponto P sobre essa reta possui coordenadas $P(a,-a)$.

Simetria

Há quatro retas principais dentro do plano cartesiano para um determinado ponto P(a,b) ser simétrico:

- Eixo das Abscissas: o simétrico terá coordenada $P(a,-b)$;
- Eixo das Ordenadas: o simétrico terá coordenada $P(-a,b)$;
- Bissetriz dos Quadrantes Ímpares: o simétrico terá coordenada $P(b,a)$;
- Bissetriz dos Quadrantes Pares: o simétrico terá coordenada $P(-b,-a)$.

LUGAR GEOMÉTRICO

Ponto Médio

Ponto médio é o ponto que divide um segmento de reta exatamente no meio. Para encontrar a sua abscissa deve-se calcular a média aritmética das abscissas dos pontos extremos do segmento. Assim como, para calcular sua ordenada, calcula-se a média aritmética das ordenadas dos pontos extremos do segmento. Em outros termos:

$$P_M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

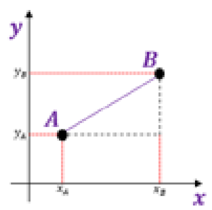
Baricentro

Baricentro é o centro de gravidade de um polígono. Se tratando de um triângulo, que é o caso mais comum, em geometria analítica podemos calcular sua coordenada através da média aritmética das abscissas e ordenadas dos três pontos que formam o triângulo. Basicamente:

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

Distância entre dois Pontos

Dados dois pontos com coordenadas distintas $A(x_a,y_a)$ e $B(x_b,y_b)$, a distância entre eles pode ser expressa pela hipotenusa do triângulo retângulo formado pelos catetos $|x_b-x_a|$ e $|y_b-y_a|$, graficamente falando:



Se a distância é a hipotenusa, podemos calculá-la pelo teorema de Pitágoras:

$$d(A,B)=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}$$

Áreas de Figuras Planas

É possível calcular a área de qualquer polígono em geometria analítica desde que as coordenadas dos vértices desse polígono estejam explicitas.

Primeiramente, relembramos que qualquer polígono pode ser dividido em n triângulos. Segundamente, a área de três pontos não colineares (três pontos que não pertencem a mesma reta), isto é, um triângulo, pode ser calculada por:

$$A=\frac{1}{2}\cdot|\det|$$

Em que o det, representa o determinante formado pelas coordenadas de três pontos, exemplo: $A(x_a,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ e $C(x_C,y_C)$

$$\det=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

EQUAÇÕES DA RETA

A reta, no plano cartesiano, representa um número infinito de pontos que são colineares e, para toda reta, é possível obter uma lei de formação. Essa lei de formação é apresentada de quatro maneiras principais:

- Equação Reduzida;
- Equação Geral;
- Equação Segmentária;
- Equações Paramétricas.

Equação Reduzida

A equação reduzida é representada da seguinte maneira:

$$y=a\cdot x+b$$

Em que a é o coeficiente angular (representa a variação de y por uma unidade de x) e b é o coeficiente linear (indica a posição da reta).

Para encontrar uma equação da reta na forma reduzida, devemos, ao menos, ter dois pontos dados ou um ponto dado e o ângulo que a reta forma com o eixo x no sentido anti-horário.

Dois Pontos Dados

Se você tiver dois pontos $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$, há duas maneiras de calcular:

- Área por determinante: Se A e B pertencem a mesma reta, então um ponto $P(x,y)$ que pertencer a reta $\overleftrightarrow{AB}$ deve ser colinear e, por isso, a área formada entre A, B e P deve ser 0, ou s eja, o determinante das coordenadas dos três pontos é 0:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

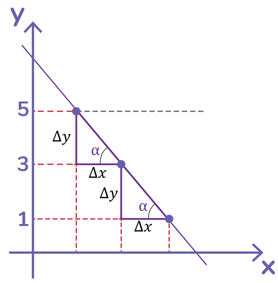
- Sistema de equações usando a forma da equação reduzida: Se $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$ pertencem a mesma reta, então pode se formar a equação da reta através do sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} y_A = a \cdot x_A + b \\ y_B = a \cdot x_B + b \end{cases}$$

Após encontrar os valores de a e b, basta substituir novamente na forma equação reduzida

Um Ponto Dado e Um Ângulo

Já vimos que a é o coeficiente angular e representa a variação de y a cada uma unidade de x. Dessa forma, observando a figura abaixo, podemos notar que os triângulos retângulos formados a cada dois pontos pelas coordenadas x e y possuem catetos Δx e Δy. Além disso sabemos que a tangente de α é a razão entre o cateto oposto Δy por Δx, ou seja: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Finalmente, se $tg\ \alpha$ é a variação de y pela variação de x, então, o coeficiente angular a é igual a $tg\ \alpha$, isto é: $a=tg\ \alpha$.



Agora, se $a=tg\ \alpha$, então:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$a = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

$$y - y_A = a(x - x_A)$$

$$\boldsymbol{y = \operatorname{tg} \alpha (x - x_A) + y_A}$$

Equação Geral

A equação geral é outra maneira de representar uma lei de formação de um reta, ela é da forma:

$$Ax+By+C=0$$

Equação Segmentária

Assim como as outras duas equações, a equação segmentária representa uma lei de formação de uma reta, e é da forma:

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{q}} = 1$$

Equações Paramétricas

As equações paramétricas representam uma reta com coordenadas x e y em função de um outro parâmetro t:

$$\begin{cases} x = \boldsymbol{x_A} + (\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_A}) \cdot t \\ y = \boldsymbol{y_a} + (\boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_A}) \cdot t \end{cases}$$

POSIÇÃO ENTRE RETAS

Se duas retas r e s estão em um mesmo plano há duas possíveis posições para elas:

Paralelas: quando os seus coeficientes angulares forem iguais $a_r=a_s$;

- **Distintas:** quando seus coeficientes lineares forem diferentes $b_r \neq b_s$;
- **Coincidentes:** quando seus coeficientes lineares forem iguais $b_r = b_s$, nesse caso falamos de retas idênticas.

Concorrentes: quando os seus coeficientes angulares forem distintos $a_r \neq a_s$;

- **Oblíquas:** quando o ângulo entre elas for diferente de 90º;
- **Perpendiculares:** quando o ângulo entre elas for de 90º, isto é, $a_r = -\frac{1}{a_s}$.

Ângulo Entre Retas

O ângulo entre duas retas r e s é sempre representado em um valor entre 0º e 90º, e pode ser calculado usando os seus coeficientes angulares:

$$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\theta} = \left|\frac{\boldsymbol{m_r} - \boldsymbol{m_s}}{1 + \boldsymbol{m_r} \cdot \boldsymbol{m_s}}\right|$$

Dessa forma, o ângulo entre elas é calculado pelo valor da tangente acima.

Distância de Ponto à Reta

Dados um ponto $P(x_0,y_0)$ e uma reta r na equação geral, ou seja, $Ax+By+C=0$, é possível calcularmos a menor distância entre eles pela fórmula:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{r}) = \frac{|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{C}|}{\sqrt{\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2}}$$

Essa fórmula é derivada da distância entre dois pontos.

CIRCUNFERÊNCIA

Uma circunferência possui dois elementos: centro C e raio r. No plano cartesiano não é diferente e, por isso, podemos definir uma equação que contém todos os pontos de uma circunferência de centro C e raio r.

Equação Reduzida da Circunferência

A equação reduzida da circunferência é determinada pela distância de um centro $C(x_0,y_0)$ a qualquer ponto $P(x,y)$ que está a uma distância r dele. Em outras palavras, pela distância entre pontos:

$$d(C,P)^2=(x_0-x)^2+(y_0-y)^2$$

Como a distância entre esses pontos é o raio r, então:

$$(x_0-x)^2+(y_0-y)^2=r^2$$

Definimos, acima, a equação reduzida da circunferência.

Equação Geral da circunferência

A equação geral da circunferência é a expansão da forma reduzida, ou seja, ela é da forma:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

Para encontrar a coordenada do centro e o raio usando a equação geral da circunferência, devemos retorná-la para a equação reduzida. Para isso, são usados os métodos de completar quadrados e os produtos notáveis.

Basta lembrar que:

$$(a \pm b)^2=a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b+b^2$$

POSIÇÕES RELATIVAS COM CIRCUNFERÊNCIAS

As principais associações com circunferências, em geometria analítica para ENEM e vestibulares, são circunferências com pontos, circunferências com retas e circunferências com circunferências.

Ponto e Circunferência

Dado um ponto P(a,b) e uma circunferência $\lambda:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ de centro $C(x_0,y_0)$ e raio r, há três possíveis posições entre o ponto P e a circunferência λ, são elas:

- **Interior:** Se o ponto P está a uma distância do centro de λ menor que o raio da circunferência, ou seja, $d(P,C)<r$;
- **Exterior:** Se o ponto P está a uma distância do centro de λ maior que o raio da circunferência, ou seja, $d(P,C)>r$;
- **Pertencente:** Se o ponto P está a uma distância do centro de λ igual a medida do raio da circunferência, ou seja, $d(P,C)=r$;

Reta e Circunferência

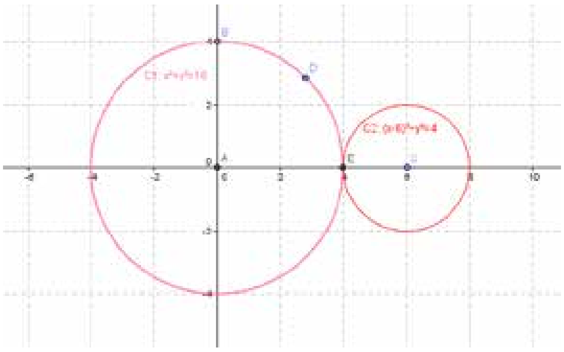
Dado uma reta $s: Ax+By+C=0$ e uma circunferência $\lambda: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ de centro $C(x_0,y_0)$ e raio r, há três possíveis posições entre a reta s e a circunferência λ, são elas:

- **Secante:** Se a reta s está a uma distância do centro de λ menor que o raio da circunferência, ou seja, $d(s,C)<r$. Além disso, a reta secante a uma circunferência intersecta ela e dois pontos;
- **Externa:** Se a reta s está a uma distância do centro de λ maior que o raio da circunferência, ou seja, $d(s,C)>r$. Além disso, a reta externa a uma circunferência não intersecta em nenhum ponto;
- **Tangente:** Se a reta s está a uma distância do centro de λ igual a medida do raio da circunferência, ou seja, $d(s,C)=r$. Além disso, a reta tangente a uma circunferência intersecta ela em apenas um ponto.

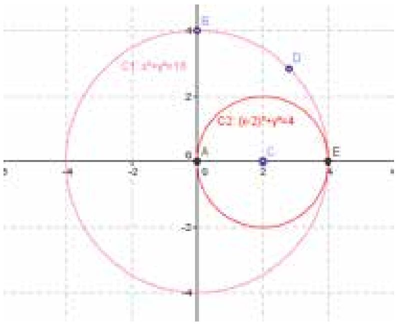
Circunferência e Circunferência

Dadas duas circunferências de centros c_1 e c_2 e raios R_1 e R_2, respectivamente, temos que as possíveis posições entre essas circunferências estão definidas para os casos abaixo:

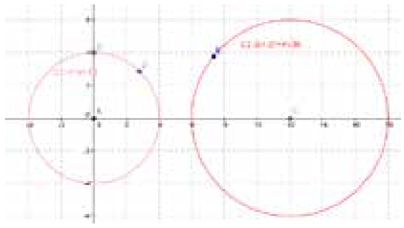
- Se a $d(c_1,c_2)=R_1+R_2$, então as circunferências são **tangentes externas**;



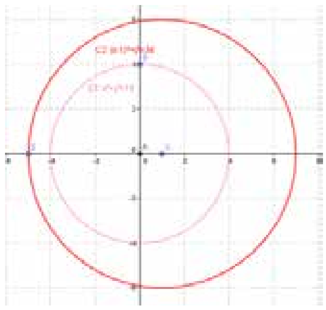
- Se a $d(c_1,c_2)=|R_1-R_2|$, então as circunferências são **tangentes internas**;



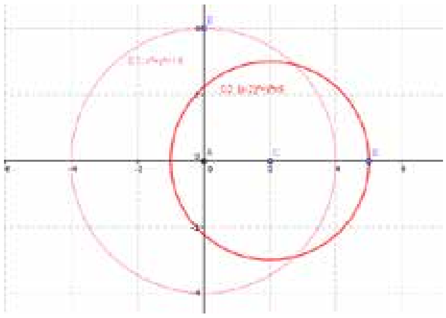
- *Se a* $d(c_1,c_2)>R_1+R_2$, então as circunferências são **externas**;



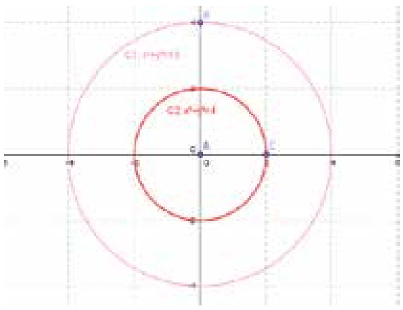
- Se a $d(c_1,c_2)<|R_1-R_2|$, então as circunferências são **internas**;



- Se a $|R_1-R_2|<d(c_1,c_2)<R_1+R_2$, então as circunferências são **secantes**;



- Se a $d(c_1,c_2)=0$, então as circunferências são **concêntricas**;



CÔNICAS

As cônicas são figuras geométricas estudadas em geometria analítica e podem ser geradas a partir de diferentes secções em uma clepsidra (figura semelhante a uma ampulheta, junção de dois cones pelo vértice de forma que suas bases fiquem paralelas).

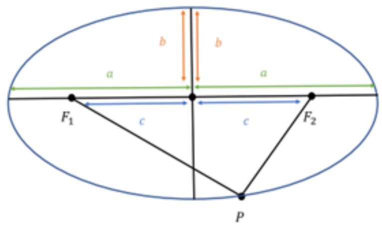
Uma das cônicas já foi estudada, é o caso da circunferência que é uma figura obtida a partir de uma secção transversal ou paralela à base de uma clepsidra.

ELIPSE

A elipse é uma cônica obtida pela secção oblíqua da clepsidra de forma que a secção intersecte apenas as laterais da clepsidra.

Além disso, a elipse é o lugar geométrico em que a soma das distâncias entre um ponto e os dois focos é constante.

Elementos



- Focos F_1 e F_2;
- Centro C;
- a: medida do centro até o vértice do eixo maior;
- b: medida do centro até o vértice do eixo menor;
- c: medida do centro até um dos focos;
- Eixo maior $(2a)$, eixo menor $(2b)$ e distância focal $(2c)$.

Propriedades

- $a^2=b^2+c^2$;
- Para qualquer ponto P pertencente a elipse: $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$;
- Excentricidade é igual a $e=\frac{c}{a}$ e é um valor maior ou igual a 0 e menor que 1. OBS: se for igual a 0 a elipse tem o formato de uma circunferência.

Equação da Elipse

- Se o eixo maior estiver na horizontal, então:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$$

- Se o eixo maior estiver na vertical, então:

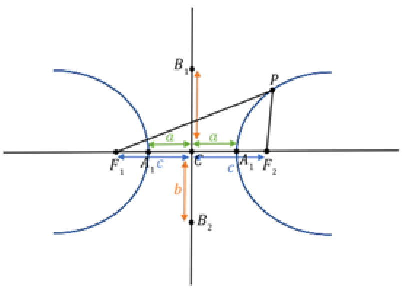
$$\frac{(y-y_c)^2}{a^2}+\frac{(x-x_c)^2}{b^2}=1$$

HIPÉRBOLE

A hipérbole é uma das figuras que compõem as cônicas. Ela é obtida pela secção longitudinal da clepsidra ou de forma que a secção intersecte a base inferior e superior da clepsidra.

Ademais, a hipérbole é o lugar geométrico em que a diferença das distâncias entre um ponto e os dois focos é constante.

Elementos



- Focos F_1 e F_2;
- Centro C;
- a: medida do centro até o vértice do eixo real;
- b: medida do centro até o vértice do eixo imaginário;
- c: medida do centro até um dos focos;
- Eixo real $(2a)$, eixo imaginário $(2b)$ e distância focal $(2c)$.

Propriedades

- $c^2=b^2+a^2$;
- Para qualquer ponto P pertencente a hipérbole:
- $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$;
- Excentricidade é igual a $e=\frac{c}{a}$ e é um valor maior que 1.

Equação da Hipérbole

- Se o eixo real estiver na horizontal, então:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$$

- Se o eixo real estiver na vertical, então:

$$\frac{(y-y_c)^2}{a^2}-\frac{(x-x_c)^2}{b^2}=1$$

Assíntota da Hipérbole

As assíntotas da hipérbole são as retas que projetam uma delimitação nas curvas da hipérbole, elas são calculadas através da fórmula:

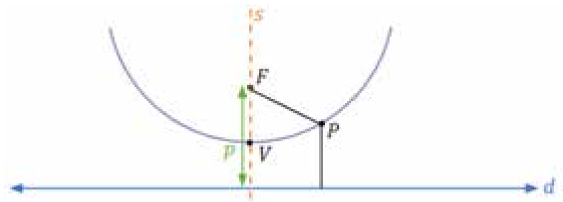
$$y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$$

PARÁBOLA

Para finalizar este guia, vamos ver a última cônica estudada em geometria analítica: a parábola. Ela é a figura que é originada pela secção paralela a geratriz ou, melhor dizendo, é a secção que intersecta a base inferior ou superior e a lateral da clepsidra.

De maneira abstrata, a parábola é o lugar geométrico cuja distância de um ponto dela a um foco é a mesma que desse ponto a uma reta denominada diretriz.

Elementos



- p: Parâmetro;
- s: Eixo de simetria;
- d: Reta diretriz;
- F: Foco;
- V: Vértice.

Propriedades

- $p=d(F,d)$;
- $d(F,V)=d(V,d)=p/2$;
- Para qualquer ponto P pertencente a parábola: $d(P,F)=d(P,d)$
- Eixo de simetria é a reta imaginária que intersecta o vértice e o foco e é perpendicular a diretriz da parábola.

Equação da Parábola

- Diretriz paralela ao eixo X:
- $2p(y-y_v)=(x-x_v)^2$

ou

- $y=ax^2+bx+c$
- Diretriz paralela ao eixo Y:
- $2p(x-x_v)=(y-y_v)^2$

ou

- $x=ay^2+by+c$

ANOTAÇÕES

Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT