MATEMÁTICA

NOTAÇÕES
C é o conjunto dos números complexos.
R é o conjunto dos números reais.
N = {1, 2, 3, ...}.
i denota a unidade imaginária, ou seja, $i^2 = -1$.
$\overline{z}$ é o conjugado do número complexo z.
Se X é o conjunto, P(X) denota o conjunto de todos os subconjuntos de X.
$A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$.
$[a\ ,\ b] = \{x \in R;\ a \le x \le b\}$.
$[a, \infty) = \{x \in R;\ a \le x\}$.
$(-\infty, a] = \{x \in R;\ x \le a\}$.
P = (x, y) significa ponto P de coordenadas (x, y).
$\overline{AB}$ denota o segmento que une os pontos A e B.
In x denota o logaritmo natural de x.
A^t denota a matriz transposta da matriz A.

1. Considere as seguintes afirmações sobre números reais positivos:

I. Se $x > 4$ e $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.
II. Se $x > 4$ ou $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.
III. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - 2y < 0$.

Então, destas é (são) verdadeira(s)

A. ( ) apenas I.
B. ( ) apenas I e II.
C. ( ) apenas II e III.
D. ( ) apenas I e III.
E. ( ) todas.

RESOLUÇÃO:

Com $x,\ y \in R_+^*$ tem-se:

$x > 4$ e $y < 2 \Rightarrow x^2 > 16$ e $-2y > -4 \Rightarrow x^2 - 2y > 12$

$\Rightarrow$ I é Verdadeira e II é Falsa

$x^2 < 1$ e $y^2 > 2 \Rightarrow x^2 < 1$ e $y > \sqrt{2} \Rightarrow x^2 < 1$ e $-2y < -2\sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2y < 1 - 2\sqrt{2} < 0$

$\Rightarrow$ III é Verdadeira

Alternativa: **D**

Observação: $y^2 > 2 \Rightarrow y > \sqrt{2}$ ou $y < -\sqrt{2}$, mas como os números dados são reais e positivos, $y < -\sqrt{2}$ não convém.

2. Sejam a, b, c reais não-nulos e distintos, c > 0. Sendo par a função dada por

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+c}, \quad -c < x < c,$$

então f(x), para – c < x < c, é constante e igual a

A. ( ) a + b. B. ( ) a + c. C. ( ) c.
D. ( ) b. E. ( ) a.

RESOLUÇÃO:

A função *f* é par em]– c, c[$\Rightarrow$ f(–x) = f(x), $\forall x \in$]– c, c[

Assim para qualquer x $\in$] – c, c [, tem-se:

$$\frac{a(-x)+b}{(-x)+c} = \frac{ax+b}{x+c} \Rightarrow (x+c).(-ax+b) = (-x+c).(ax+b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{-ax^2} + bx - acx + \cancel{bc} = \cancel{-ax^2} - bx + acx + \cancel{bc} \Rightarrow 2bx = 2acx,\ \forall x \in\ ]-c, c[$$

Portanto, b = ac.

Daí segue:

$$f(x) = \frac{ax+ac}{x+c} = \frac{a(x+c)}{(x+c)} \Rightarrow \boxed{f(x) = a,\ \forall x \in\ ]\text{-}\ c, c[}$$

Alternativa: **E**

---

3. Os valores de x $\in$ R, para os quais a função real dada por $f(x) = \sqrt{5 - \left||2x-1| - 6\right|}$ está definida, formam o conjunto:

A. ( ) [0, 1]. B. ( ) [– 5, 6]. C. ( ) [– 5, 0] U [1, ∞).
D. ( ) (– ∞, 0] U [1, 6]. E. ( ) [– 5, 0] U [1, 6].

RESOLUÇÃO:

Os valores de x $\in$ R para os quais a função real está definida são aqueles que tornam não-negativo o radicando. Assim:

$$5 - \left||2x-1| - 6\right| \geq 0 \Rightarrow \left||2x-1| - 6\right| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq |2x-1| - 6 \leq 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq |2x-1| \leq 11 \Rightarrow -11 \leq 2x-1 \leq -1 \text{ ou } 1 \leq 2x-1 \leq 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10 \leq 2x \leq 0 \text{ ou } 2 \leq 2x \leq 12 \Rightarrow -5 \leq x \leq 0 \text{ ou } 1 \leq x \leq 6$$

Portanto, o conjunto procurado é: $\boxed{[-5,\ 0] \cup [1,\ 6]}$

Alternativa: **E**

4. Seja a equação em C

$$z^4 - z^2 + 1 = 0.$$

Qual dentre as alternativas abaixo é igual à soma de duas das raízes dessa equação?

A. ( ) $2\sqrt{3}$. B. ( ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. ( ) $+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. ( ) – i. E. ( ) $\frac{i}{2}$.

RESOLUÇÃO:

$$z^4 - z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Assim, $z^2 = \text{cis}\frac{\pi}{3}$ ou $z^2 = \text{cis}\frac{-\pi}{3}$. Daí:

$$z^2 = \text{cis}\frac{\pi}{3} \Rightarrow z = \text{cis}\frac{\pi}{6} \text{ ou } z = \text{cis}\frac{7\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ z_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \end{cases}$$

$$z^2 = \text{cis}\frac{-\pi}{3} \Rightarrow z = \text{cis}\frac{-\pi}{6} \text{ ou } z = \text{cis}\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \\ z_4 = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \end{cases}$$

Tem-se que $\boxed{z_2 + z_3 = -i}$.

Alternativa: **D**

---

5. Sejam *A* um conjunto com 8 elementos e *B* um conjunto tal que *A U B* contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de *P(B \ A) U P(Æ)* é igual a

A. ( ) 8. B. ( ) 16. C. ( ) 20.
D. ( ) 17. E. ( ) 9.

RESOLUÇÃO:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 12 = 8 + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$

$n(B) - n(A \cap B) = n(B \backslash A) = 4$

Então: $n[P(B \backslash A)] = 2^4 = 16$

Como $P(\varnothing) \subset P(B \backslash A)$, segue que $\boxed{n[P(B \backslash A) \cup P(\varnothing)] = 16}$

Alternativa: **B**

6. Sejam f e g duas funções definidas por

$$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{3\text{sen}x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\text{sen}^2 x-1}, \quad x \in R.$$

A soma do valor mínimo de *f* com o valor mínimo de *g* é igual a

A. ( ) 0. B. ( ) $-\frac{1}{4}$. C. ( ) $\frac{1}{4}$.

D. ( ) $\frac{1}{2}$. E. ( ) 1.

RESOLUÇÃO:

As funções dadas são das formas $f(x) = a_1^{F(x)}$, $a_1 > 1$, e $g(x) = a_2^{G(x)}$, $0 < a_2 < 1$.
Assim, f será mínima quando F for mínima e g será mínima quando G for máxima.
Segue que:

$-1 \le \text{sen } x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\text{sen } x \le 3 \Rightarrow -4 \le 3 \text{ sen } x - 1 \le 2, \forall x \in R$

$\Rightarrow -4 \le F(x) \le 2 \Rightarrow \min\{F(R)\} = -4$

$0 \le \text{sen}^2 x \le 1 \Rightarrow 0 \le 3 \text{ sen}^2 x \le 3 \Rightarrow -1 \le 3 \text{ sen}^2 x - 1 \le 2, \forall x \in R$

$\Rightarrow -1 \le G(x) \le 2 \Rightarrow \max\{G(R)\} = 2$

Então: $\min\{f(R)\} = (\sqrt{2})^{\min\{F(R)\}} = (\sqrt{2})^{-4} = \frac{1}{4}$ e $\min\{g(R)\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\max\{G(R)\}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Portanto: $\boxed{\min\{f(R)\} + \min\{g(R)\} = \frac{1}{2}}$

Alternativa: **D**

---

7. Seja $f : R \to P(R)$ dada por

f(x) = {y Î R; sen y < x}.

Se A é tal que *f(x)* = R, $\forall x \in A$, então

A. ( ) A = [– 1, 1]. B. ( ) A = [a, ∞) , ∀ a > 1.

C. ( ) A = [a, ∞) , ∀ a ≥ 1. D. ( ) A = (– ∞, a] , ∀ a < – 1.

E. ( ) A = (– ∞, a] , ∀ a ≤– 1.

RESOLUÇÃO:

Para qualquer $x \in A$, tem-se:

$f(x) = R \Rightarrow \text{sen } y < x, \forall y \in R \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \boxed{A = [a, \infty), \forall a > 1}$

Alternativa: **B**

8. A divisão de um polinômio *f(x)* por *(x – 1)(x – 2)* tem resto *x + 1*. Se os restos das divisões de *f(x)* por *x – 1* e *x – 2* são, respectivamente, os números *a* e *b*, então $a^2 + b^2$ vale

A. ( ) 13. B. ( ) 5. C. ( ) 2.
D. ( ) 1. E. ( ) 0.

RESOLUÇÃO:

Das informações do enunciado, tem-se:

$f(x) = (x - 1).(x - 2).Q_1(x) + x + 1 = (x - 1).Q_2(x) + a = (x - 2).Q_3(x) + b$

$f(1) = 2 = a = -Q_3(1) + b \Rightarrow a = 2$

$f(2) = 3 = Q_2(2) + a = b \Rightarrow b = 3$

Portanto, $\boxed{a^2 + b^2 = 13}$

Alternativa: **A**

---

9. Sabendo que a equação

$$x^3 - px^2 = q^m, \quad p, q > 0, \quad q \neq 1, \quad m \in N,$$

possui três raízes reais positivas a, b e c, então

$$\log_q\left[abc(a^2+b^2+c^2)^{a+b+c}\right]$$

é igual a

A. ( ) $2m + p \log_q p$. B. ( ) $m + 2p \log_q p$. C. ( ) $m + p \log_q p$.
D. ( ) $m - p \log_q p$. E. ( ) $m - 2p \log_q p$.

RESOLUÇÃO:

Das relações de Girard da equação $x^3 - px^2 - q^m = 0$, temos:

$a + b + c = p$,

$ab + ac + bc = 0$ e

$abc = q^m$

Daí segue que:

$$\log_q\left[abc(a^2+b^2+c^2)^{a+b+c}\right] = \log_q(abc) + (a+b+c)\log_q(a^2+b^2+c^2) =$$

$$= \log_q(abc) + (a+b+c)\log_q\left[(a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc)\right] =$$

$$= \log_q q^m + p.\log_q\left[p^2 - 2.0\right] = \boxed{m + 2p\log_q p}$$

Alternativa: **B**

10. Dada a função quadrática

$$f(x) = x^2 \ln\frac{2}{3} + x\ln 6 - \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$$

temos que

A. ( ) a equação *f(x) = 0* não possui raízes reais.

B. ( ) a equação *f(x) = 0* possui duas raízes reais distintas e o gráfico de *f* possui concavidade para cima.

C. ( ) a equação *f(x) = 0* possui duas raízes reais iguais e o gráfico de *f* possui concavidade para baixo.

D. ( ) o valor máximo de *f* é $\frac{\ln 2\ \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.

E. ( ) o valo máximo de *f* é $2\frac{\ln 2\ \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.

RESOLUÇÃO:

O discriminante da equação é dado por:

$$\Delta = \ln^2 6 - 4.\ln\frac{2}{3}.\left(-\frac{1}{4}.\ln\frac{3}{2}\right) = \ln^2 6 - \ln^2\frac{3}{2} = \left(\ln 6 + \ln\frac{3}{2}\right)\left(\ln 6 - \ln\frac{3}{2}\right) =$$

$$= (\ln 3 + \cancel{\ln 2} + \ln 3 - \cancel{\ln 2})(\cancel{\ln 3} + \ln 2 - \cancel{\ln 3} + \ln 2) \Rightarrow \Delta = 4\ln 3.\ln 2$$

Como $\ln\frac{2}{3} < 0$, segue que f admite um valor máximo e daí:

$$\max\{f(x)\} = \frac{-4\ln 3.\ln 2}{4.\ln\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{\max\{f(x)\} = \frac{\ln 3.\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}}$$

Alternativa: **D**

11. Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras *a*, *b* e *c*?

A. ( ) 1692. B. ( ) 1572. C. ( ) 1520.
D. ( ) 1512. E. ( ) 1392.

RESOLUÇÃO:

Deveremos inicialmente escolher duas letras dentre a, b e c, o que pode ser feito de C_3^2 modos distintos.

Em seguida escolhemos mais duas letras (o anagrama possui 4 letras) dentre d, e, f, g, h, i, j, o que pode ser feito de C_7^2 modos distintos.

Permutando as 4 letras, temos:

$$\boxed{C_3^2 \, . \, C_7^2 \, . \, 4! = 1512}$$

Observação:

Consideramos, na resolução, que “contenham 2 das letras a, b e c” significa “contenham exatamente 2...”

Alternativa: **D**

---

12. O seguinte trecho de artigo de um jornal local relata uma corrida beneficente de bicicletas: “Alguns segundos após a largada, Ralf tomou a liderança, seguido de perto por David e Rubinho, nesta ordem. Daí em diante, eles não mais deixaram as primeiras três posições e, em nenhum momento da corrida, estiveram lado a lado mais do que dois competidores. A liderança, no entanto, mudou de mão nove vezes entre os três, enquanto que em mais oito ocasiões diferentes aqueles que corriam na segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si. Após o término da corrida, Rubinho reclamou para nossos repórteres que David havia conduzido sua bicicleta de forma imprudente pouco antes da bandeirada de chegada. Desse modo, logo atrás de David, Rubinho não pôde ultrapassá-lo no final da corrida.”

Com base no trecho acima, você conclui que

A. ( ) David ganhou a corrida.
B. ( ) Ralf ganhou a corrida.
C. ( ) Rubinho chegou em terceiro lugar.
D. ( ) Ralf chegou em segundo lugar.
E. ( ) não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

RESOLUÇÃO:

Como Rubinho deve terminar a corrida logo atrás de David, podemos ter duas possibilidades para o resultado da corrida:

1º) Ralf 2º) David 3º) Rubinho (A)

ou

1º) David 2º) Rubinho 3º) Ralf (B)

A primeira possibilidade é a mesma do início da corrida. Para que Ralf termine em primeiro lugar, ele deve trocar de posição um número par de vezes.

Para David e Rubinho também terminarem na mesma posição em que estavam, devem trocar de lugar um número par de vezes. Assim, essa possibilidade não pode ocorrer.

Considere, agora, a segunda possibilidade. Antes de os concorrentes chegarem à posição final, eles poderiam ter estado nas seguintes configurações:

1º) David 2º) Ralf 3º) Rubinho (C)

ou

1º) Rubinho 2º) David 3º) Ralf (D)

Na opção (C), já realizamos uma troca entre o segundo e terceiro lugares, restando 9 trocas entre 1º e 2º e 7 trocas entre 2º e 3º. Rubinho começou em último lugar e deve continuar ali, devendo passar por um número par de trocas. Porém, devemos realizar 7 trocas de 2º e 3º lugar, não sendo possível que Rubinho ali permaneça.

Falta a opção (D). Da posição inicial até a (D), devemos passar pelas seguintes configurações:

1º) Ralf 2º) David 3º) Rubinho (posição inicial)

1 troca

1º) David 2º) Ralf 3º) Rubinho

1 troca

1º) David 2º) Rubinho 3º) Ralf

1 troca

1º) Rubinho 2º) David 3º) Ralf (E)

Restam, então, 7 trocas entre 1º e 2º lugar e 7 trocas entre 2º e 3º lugares. Porém, (E) é igual a (D), e devemos ter um número par de trocas até o final (mesmo raciocínio do primeiro caso).

Assim, não há posição final válida com as condições indicadas.

Alternativa: **E**

13. Seja a matriz $\begin{bmatrix} \cos 25^o & \text{sen } 65^o \\ \text{sen } 120^o & \cos 390^o \end{bmatrix}$. O valor de seu determinante é

A. ( ) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. ( ) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. ( ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
D. ( ) 1. E. ( ) 0.

RESOLUÇÃO:
Como:
cos390° = cos30° (ângulos côngruos)
e
cos25° = sen65° (ângulos complementares), segue:

$$\begin{vmatrix} \cos 25° & \text{sen}65° \\ \text{sen}120° & \cos 390° \end{vmatrix} = \cos 25°.\cos 390° - \text{sen}120°.\text{sen}65° =$$

$$\cos 25°.\cos 30° - \text{sen}120°.\cos 25° = (\cos 30° - \text{sen}120°).\cos 25° =$$

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).\cos 25° = 0}$$

Alternativa: **E**

---

14. Sejam *A* e *B* matrizes quadradas de ordem *n* tais que *AB* = *A* e *BA* = *B*.
Então, $\left[(A+B)^t\right]^2$ é igual a

A. ( ) $(A + B)^2$. B. ( ) $2(A^t.B^t)$. C. ( ) $2(A^t + B^t)$.
D. ( ) $A^t + B^t$. E. ( ) A^tB^t.

RESOLUÇÃO:
Escrevendo:
(1) AB = A
(2) BA = B
(3) Propriedade associativa
Então temos:

$$\text{(i) } AB = A \overset{x(A)}{\Rightarrow} AB.A = A.A \overset{(3)}{\Rightarrow} A(BA) = A^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} AB = A^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} A = A^2$$

$$\text{(ii) } BA = B \overset{x(B)}{\Rightarrow} BA.B = B.B \overset{(3)}{\Rightarrow} B(AB) = B^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} BA = B^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} B = B^2$$

Por outro lado:
$[(A + B)^t]^2 = (A^t + B^t)^2 = (A^t)^2 + A^t.B^t + B^tA^t + (B^t)^2$
$= (A^2)^t + (BA)^t + (AB)^t + (B^2)^t$
Substituindo os resultados de (i) e (ii) e de (1) e (2), vem:

$$\boxed{\left[(A+B)^t\right]^2 = A^t + B^t + A^t + B^t = 2(A^t + B^t)}$$

Alternativa: **C**

---

15. Seja *A* uma matriz real *2 x 2*. Suponha que α e β sejam dois números distintos, e *V* e *W* duas matrizes reais *2 x 1* não-nulas, tais que

$$AV = aV \text{ e } AW = bW.$$

Se $a, b \in$ R são tais que $aV + bW$ é igual à matriz nula *2 x 1*, então $a + b$ vale

A. ( ) 0. B. ( ) 1. C. ( ) –1.

D. ( ) $\frac{1}{2}$. E. ( ) $-\frac{1}{2}$.

RESOLUÇÃO:

Como $aV + bW = 0_{2x1} \Rightarrow aV = -bW$
$AW = \beta W \Rightarrow A(-bW) = -b\beta W \Rightarrow AaV = -b\beta W \Rightarrow a(AV) = \beta(-bW) \Rightarrow a(\alpha V) = \beta aV$
$\Rightarrow a\alpha V - \beta aV = 0_{2x1} \Rightarrow (a\alpha - \beta a)V = 0_{2x1}$

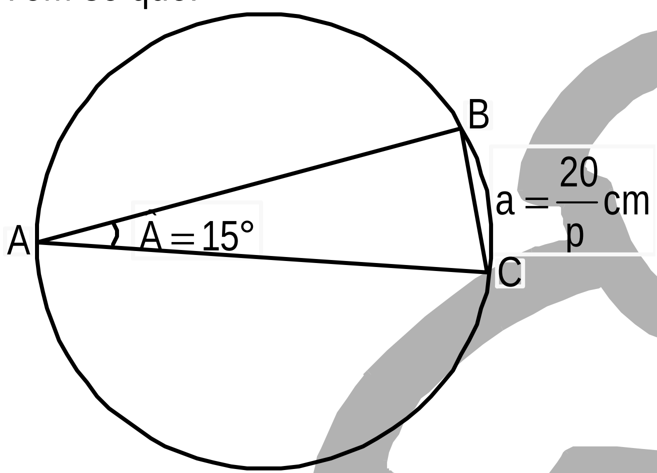
A matriz V é não-nula, então $a\alpha - \beta a = 0 \Rightarrow a(\alpha - \beta) = 0$. Como $\alpha \neq \beta$ temos $a = 0$
Por hipótese, $aV = -bW \Rightarrow 0_{2x1} = -bW$, como W é não-nula, temos $b = 0$
Assim: $\boxed{a + b = 0}$

Alternativa: **A**

16. O triângulo *ABC*, inscrito numa circunferência, tem um lado medindo $\frac{20}{p}$ cm, cujo ângulo oposto é de 15°. O comprimento da circunferência, em cm, é:

A. ( ) $20\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$. B. ( ) $400(2+\sqrt{3})$. C. ( ) $80(1+\sqrt{3})$.
D. ( ) $10(2\sqrt{3}+5)$. E. ( ) $20(1+\sqrt{3})$.

RESOLUÇÃO:
Tem-se que:



$$\operatorname{sen}15° = \operatorname{sen}\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Pelo Teorema dos Senos, vem da figura:

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} \Rightarrow C = 2\pi R = \frac{\pi . a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{\cancel{\pi}.\frac{20}{\cancel{\pi}}\text{cm}}{\frac{\sqrt{2}.(\sqrt{3}-1)}{4}} \Rightarrow \boxed{C = 20\sqrt{2}.(1+\sqrt{3})\text{cm}}$$

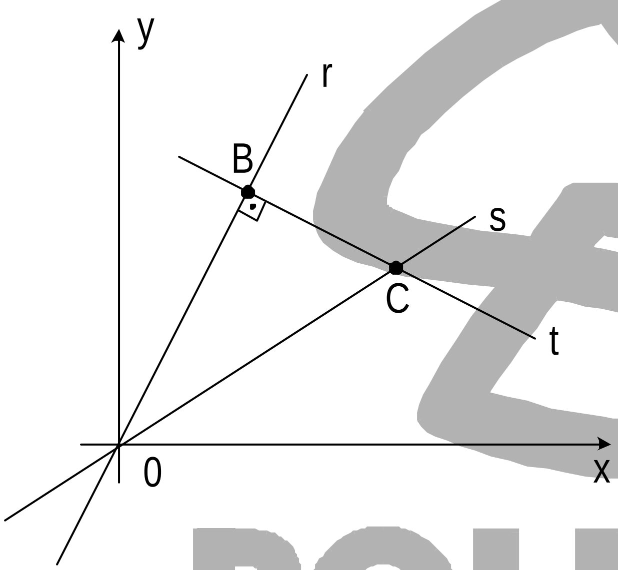
Alternativa: **A**

17. Num sistema de coordenadas cartesianas, duas retas *r* e *s*, com coeficientes angulares *2* e $\frac{1}{2}$, respectivamente, se interceptam na origem *0*. Se $B \in r$ e $C \in s$ são dois pontos no primeiro quadrante tais que o segmento $\overline{BC}$ é perpendicular a *r* e a área do triângulo *OBC* é igual a 12×10^{-1}, então a distância de B ao eixo das ordenadas vale

A. ( ) $\frac{8}{5}$.
B. ( ) $\frac{4}{5}$.
C. ( ) $\frac{2}{5}$.
D. ( ) $\frac{1}{5}$.
E. ( ) 1.

RESOLUÇÃO:

A figura referente à questão é:



(r) $y = 2x \Rightarrow B(x_B,\ 2x_B)$

(s) $y = \frac{x}{2} \Rightarrow C(2y_C,\ y_C)$

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} x_B & 2x_B & 1 \\ 2y_C & y_C & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 1{,}2 \Rightarrow x_B y_C - 4x_B y_C = \pm\ 2{,}4 \Rightarrow x_B y_C = \pm\frac{4}{5}$$

$$B,\ C \in 1^{\text{o}}\text{quadrante} \Rightarrow x_B y_C = +\frac{4}{5} \quad (1)$$

$$t \perp r \Rightarrow m_t = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y_C - 2x_B}{2y_C - x_B} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 4y_C = 5x_B \quad (2)$$

De (1) e (2) segue $\boxed{x_B = \frac{4}{5}}$, que é a distância de B ao eixo das ordenadas.

Alternativa: B

18. Seja $k > 0$ tal que a equação $(x^2 - x) + k(y^2 - y) = 0$ define uma elipse com distância focal igual a 2. Se (p,q) são as coordenadas de um ponto da elipse, com $q^2 - q$ ¹ 0, então $\dfrac{p-p^2}{q^2-q}$ é igual a

A. ( ) $2+\sqrt{5}$. B. ( ) $2-\sqrt{5}$. C. ( ) $2+\sqrt{3}$.
D. ( ) $2-\sqrt{3}$. E. ( ) 2.

RESOLUÇÃO:

Levando a equação dada à forma canônica, temos:

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + k\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{k}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + k\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{k+1}{4}$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{k+1}{4}} + \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{k+1}{4k}} = 1$$

Para k>1, tem-se $a^2 = \dfrac{k+1}{4}$ e $b^2 = \dfrac{k+1}{4k}$ e daí segue que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{k+1}{4} = \frac{k+1}{4k} + 1 \Rightarrow k^2 - 4k - 1 = 0 \Rightarrow k = 2 \pm \sqrt{5}$$

Como k > 0, tem-se $k = 2 + \sqrt{5}$. Daí, substituindo as coordenadas de (p, q) na equação, segue:

$$\left(p^2 - p\right) + k\left(q^2 - q\right) = 0 \Rightarrow k\left(q^2 - q\right) = p - p^2 \Rightarrow \boxed{\frac{p-p^2}{q^2-q} = k = 2 + \sqrt{5}}$$

Alternativa: **A**

Observação: A condição 0 < k <1 também fornece uma resposta válida: elipse de eixo focal vertical. Entretanto, ela não se encontra entre as alternativas. A condição k = 1 fornece uma circunferência, o que não pode ser aceito, tendo-se em vista que a distância focal mencionada deve ser igual a 2.

19. Considere a região do plano cartesiano xy definida pela desigualdade

$$x^2 + 4x + y^2 - 4y - 8 \leq 0.$$

Quando esta região rodar um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos em torno da reta x + y = 0, ela irá gerar um sólido de superfície externa total com área igual a

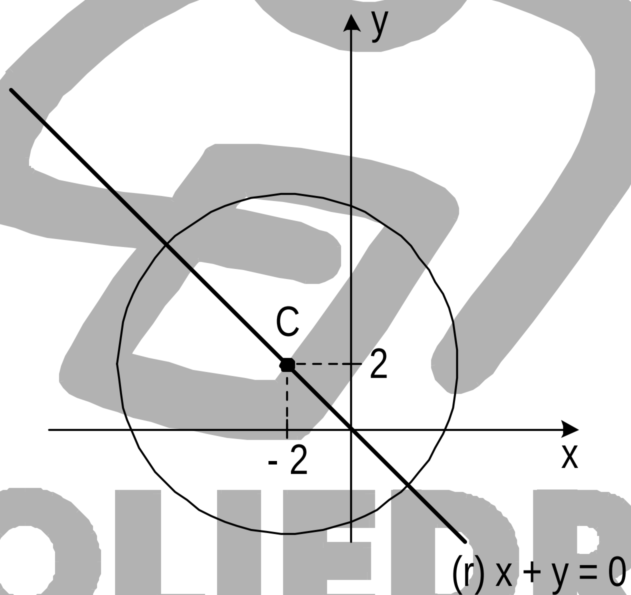
A. ( ) $\frac{128}{3}\pi$. B. ( ) $\frac{128}{4}\pi$. C. ( ) $\frac{128}{5}\pi$.
D. ( ) $\frac{128}{6}\pi$. E. ( ) $\frac{128}{7}\pi$.

RESOLUÇÃO:

Reescrevendo a inequação dada, temos:

$x^2 + 4x + y^2 - 4y - 8 \leq 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \leq 16 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4^2$.

Portanto, a região definida é um círculo de raio R = 4 centrado em C(– 2, 2).



Como C(– 2, 2) $\in$ r, a rotação de $\frac{\pi}{6}$ rad do círculo descrito em torno da reta x + y = 0 gerará duas cunhas esféricas. A área da superfície externa total do sólido gerado pela união das cunhas será:

$$S = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 . \frac{2\pi/6}{2\pi} = \frac{8\pi R^2}{3} = \frac{8\pi . 4^2}{3} \Rightarrow \boxed{S = \frac{128\pi}{3}}$$

Alternativa: **A**

20. Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\frac{1}{8}$ do volume da pirâmide original?

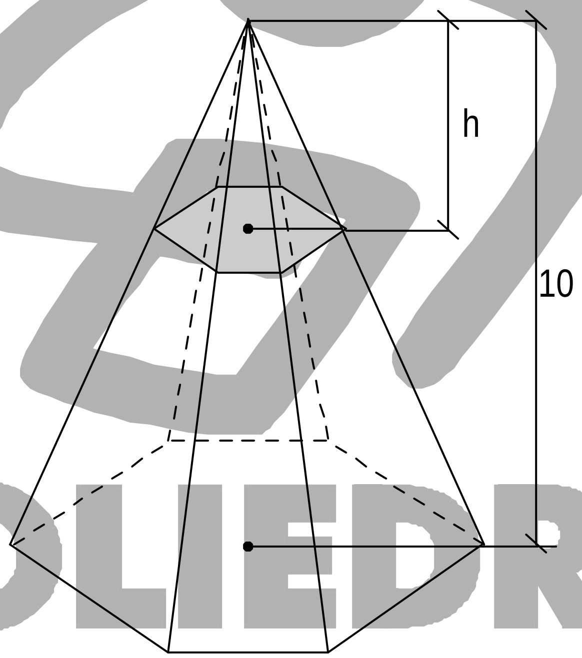
A. ( ) 2 m. B. ( ) 4 m. C. ( ) 5 m.
D. ( ) 6 m. E. ( ) 8 m.

RESOLUÇÃO:

Traçando um plano paralelo à base da pirâmide, a uma distância h do vértice teremos uma outra pirâmide semelhante à original.

Assim: $\left(\frac{h}{10}\right)^3 = \frac{1}{8}$ (a razão dos volumes é o cubo da razão de semelhança)

$\frac{h}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{h = 5\text{ cm}}$



Alternativa: **C**

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser respondidas no caderno de soluções.

21. Seja a função *f* dada por

$$f(x) = (\log_3 5).\log_5 8^{x-1} + \log_3 4^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)}.$$

Determine todos os valores de x que tornam *f* não-negativa.

RESOLUÇÃO:

Sendo $f(x) = \log_3 5.\log_5 8^{x-1} + \log_3 4^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)} \Rightarrow$

$$f(x) = \cancel{\log_3 5}.\frac{\log_3 8^{x-1}}{\cancel{\log_3 5}} + \log_3 4^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)} \Rightarrow$$

$$f(x) = \log_3 \frac{8^{x-1}.4^{1+2x-x^2}}{2^{x(3x+1)}} \Rightarrow f(x) = \log_3 2^{3x-3+2+4x-2x^2-x(3x+1)} \Rightarrow f(x) = \log_3 2^{-5x^2+6x-1}$$

em que o logaritmando 2^{-5x^2+6x-1} é sempre positivo.

Para f(x) ser não-negativa $f(x) \geq 0$ teremos:

$$\log_3 2^{-5x^2+6x-1} \geq 0 \Rightarrow \log_3 2^{-5x^2+6x-1} \geq \log_3 2^0 \Rightarrow 2^{-5x^2+6x-1} \geq 2^0 \Rightarrow -5x^2 + 6x - 1 \geq 0$$

Encontrando as raízes, temos o intervalo $\boxed{1/5 \leq x \leq 1}$.

22. Mostre que

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4},$$

para quaisquer x e y reais positivos.

Obs.: $C_{n,p}$ denota a combinação de *n* elementos tomados *p* a *p*.

RESOLUÇÃO:

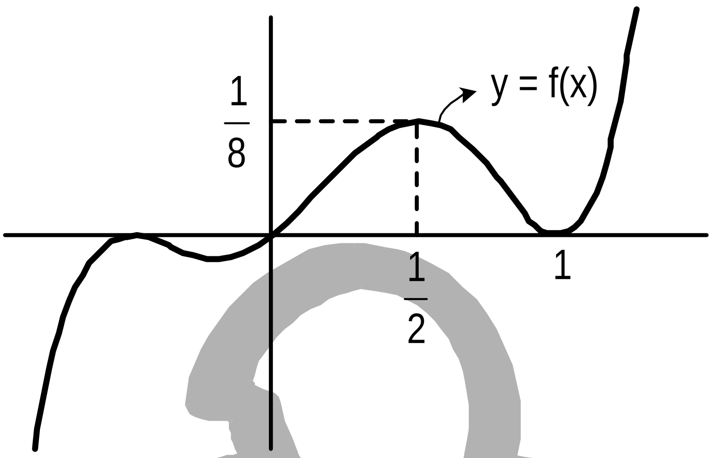
Como x, y e $\mathbb{R}_+^*$, pela desigualdade das médias $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2,$ teremos:

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq (2+2)^4 = 4^4 = 256$$

Mas $C_{8,4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$

Concluímos que $\boxed{\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq 256 > 70}$

23. Com base no gráfico da função polinomial y = f(x) esboçado abaixo, responda qual é o resto da divisão de f(x) por $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$.



RESOLUÇÃO:

Dividindo f(x) por $\left(x-\frac{1}{2}\right).(x-1)$ podemos montar: $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right).(x-1).q(x)+ax+b$

Pelo gráfico, tiramos que f(1) = 0 e $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$. Assim:

f(1) = a + b e $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{2}+b$

Montando o sistema:

$\begin{cases} a+b=0 \\ \frac{a}{2}+b=\frac{1}{8} \end{cases}$ obtendo a solução $a=-\frac{1}{4}$ e $b=\frac{1}{4}$

O resto é: $\boxed{-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}}$

24. Sejam *a* e *b* dois números complexos não-nulos, tais que $a^2 + b^2 = 0$. Se $z, w \in C$ satisfazem a

$$\begin{cases} \bar{z}w + z\bar{w} = 6a \\ \bar{z}w - z\bar{w} = 8b \end{cases}$$

determine o valor de $|a|$ de forma que $|zw| = 1$.

RESOLUÇÃO:

Resolvendo o sistema $\begin{cases} \bar{z}w + z\bar{w} = 6a \\ \bar{z}w - z\bar{w} = 8b \end{cases}$ obtemos: $\bar{z}w = 3a + 4b$ e $z\bar{w} = 3a - 4b$

Substituindo $a = \dfrac{\bar{z}w + z\bar{w}}{6}$ e $b = \dfrac{\bar{z}w - z\bar{w}}{8}$ em $a^2 + b^2 = 0$:

$$\left(\frac{\bar{z}w + z\bar{w}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\bar{z}w - z\bar{w}}{8}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(\bar{z}w)^2 + 2\bar{z}w.z\bar{w} + (z\bar{w})^2}{36} + \frac{(\bar{z}w)^2 - 2\bar{z}w.z\bar{w} + (z\bar{w})^2}{64} = 0$$

Sendo: $\bar{z}w.z\bar{w} = \bar{z}.\bar{w}.z.w = \overline{zw}.(zw) = |zw|^2 = 1.$

Fazendo a substituição:

$$(\bar{z}w)^2 + (z\bar{w})^2 = -\frac{14}{25} \Rightarrow$$

$$\left(9a^2 + 24ab + 16b^2\right) + \left(9a^2 - 24ab + 16b^2\right) = -\frac{14}{25} \Rightarrow 18a^2 + 32b^2 = -\frac{14}{25}.$$

Como $b^2 = -a^2 \Rightarrow -14a^2 = -\dfrac{14}{25} \Rightarrow a^2 = \dfrac{1}{25} \Rightarrow |a^2| = \left|\dfrac{1}{25}\right| \Rightarrow |a|^2 = \dfrac{1}{25} \Rightarrow \boxed{|a| = \dfrac{1}{5}}$

25. 1. Mostre que se uma matriz quadrada não-nula A satisfaz a equação

$$A^3 + 3A^2 + 2A = 0 \qquad (1)$$

então $(A + I)^3 = A + I$, em que I é a matriz identidade.

2. Sendo dado que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

satisfaz à equação (1) acima, encontre duas matrizes não-nulas B e C tais que $B^3 + C^3 = B + C = A$. Para essas matrizes você garante que o sistema de equações

$$(B - C)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem solução *(x, y) ¹ (0, 0)*? Justifique.

RESOLUÇÃO:

1) Vamos calcular $(A + I)^3 = A^3 + 3A^2I + 3AI^2 + I^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I = A^3 + 3A^2 + 2A + (A + I)$

Como, por hipótese, $A^3 + 3A^2 + 2A = 0$, então $\boxed{(A + I)^3 = A + I}$

2) Como $A = B + C = B^3 + C^3$, com A satisfazendo o item (1), vamos fazer as substituições convenientes:

$$(A + I)^3 = A + I \Rightarrow [(B + C) + I]^3 = (B^3 + C^3) + I \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}^3 = B^3 + C^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^3 = B^3 + C^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3$, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = B^3 + C^3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^3 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^3 = B^3 + C^3$$

Temos os possíveis valores:

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

Observe ainda que: $B - C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ou $B - C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Para analisar a solução do sistema, temos que det (B - C) = 0, ou seja, o sistema é possível e indeterminado e admite $(x;y) \neq (0;0)$ como solução.

26. Sejam n ³ 2 números reais positivos $a_1, a_2, \ldots a_n$ que formam uma progressão aritmética de razão positiva. Considere $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ e responda, justificando: Para todo n ³ 2, qual é o maior entre os números $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2$ e $\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^{\,2}$?

RESOLUÇÃO:

Vamos analisar o sinal da diferença: $d = \left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 - \left[\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2\right]$

$$d = \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 2\frac{A_n.a_n}{n} + a_n^2 - \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 + a_n^2 = 2a_n^2 - 2\frac{A_n.a_n}{n} = 2a_n\left(a_n - \frac{A_n}{n}\right) \qquad (1)$$

Como $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ temos $A_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2}.n$. Substituindo em (1):

$$d = 2a_n\left[a_n - \frac{(a_1 + a_n).n}{2n}\right] = 2.a_n\left(a_n - \frac{a_1 + a_n}{2}\right) = 2a_n.\left(\frac{2a_n - a_1 - a_n}{2}\right) = a_n.(a_n - a_1)$$

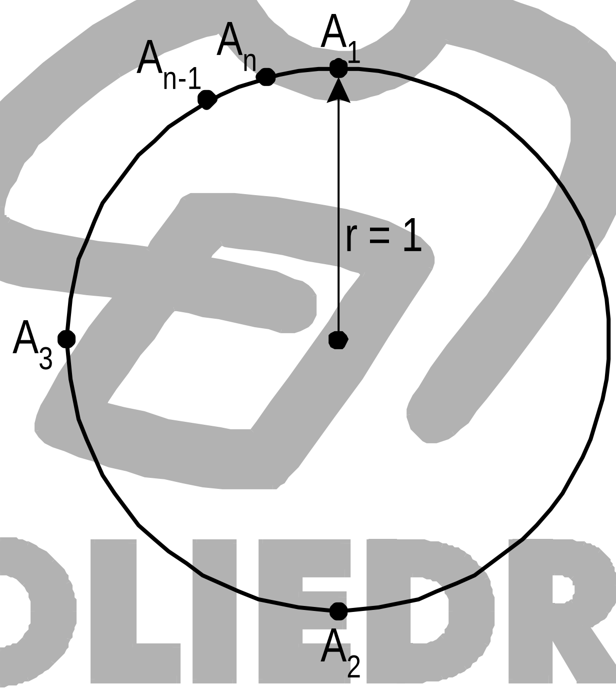
Os termos da PA são positivos, logo $a_n > 0$. Como a razão é positiva, então a PA é crescente ($a_{k+1} > a_k$)

Provamos então que d > 0, ou seja, $\boxed{\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 > \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - (a_n)^2}$.

27. Considere *n* pontos distintos $A_1, A_2, \ldots A_n$ sobre uma circunferência de raio unitário, de forma que os comprimentos dos arcos $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, ..., $\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ formam uma progressão geométrica de termo inicial p e razão $\frac{1}{2}$. Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ teremos o comprimento do arco $\overset{\frown}{A_nA_1}$ menor que $\frac{1}{512}$ do comprimento da circunferência?

Obs.: Para todo arco $\overset{\frown}{A_kA_\ell}$, o comprimento considerado é o do arco que une o ponto A_k ao ponto A_ℓ no sentido anti-horário.

RESOLUÇÃO:



Como r = 1, vem que o comprimento da circunferência é dado por:
C = 2.π.r = 2π

O comprimento do arco $\overset{\frown}{A_nA_1}$ é dado pela diferença entre o comprimento da circunferência e o comprimento do arco $\overset{\frown}{A_1A_n}$. Assim:

$$\overset{\frown}{A_nA_1} = 2\pi - \overset{\frown}{A_1A_n}$$

Mas $\overset{\frown}{A_1A_n} = \overset{\frown}{A_1A_2} + \overset{\frown}{A_2A_3} + ... + \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$

Ou seja, $\overset{\frown}{A_1A_n}$ é dado pela soma da P.G. onde $a_1 = \pi$ e $q = \frac{1}{2}$. Note que entre A_1 e A_n existem (n – 1) arcos, logo:

$$\overset{\frown}{A_nA_1} = 2\pi - a_1.\frac{\left(1-q^{n-1}\right)}{1-q} = 2\pi - \pi.\frac{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\overset{\frown}{A_nA_1} = 2\pi - 2\pi.\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = 2\pi - 2\pi + 2\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\overset{\frown}{A_nA_1} = 2\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Como se quer que $\overset{\frown}{A_nA_1} < \frac{1}{512}.2\pi$, tem-se:

$$\cancel{2\pi}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{512}.\cancel{2\pi}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^9}$$

Assim:

$n - 1 > 9 \Rightarrow \boxed{n > 10, \forall\, n \in \mathbb{N}}$

28. Seja *S* a área total da superfície de um cone circular reto de altura *h*, e seja *m* a razão entre as áreas lateral e da base desse cone. Obtenha uma expressão que forneça *h* em função apenas de *S* e *m*.

RESOLUÇÃO:

Tem-se que a área total de um cone é dada por:

$$S = A_b + A_l = \pi.R^2 + \pi.g.R \Rightarrow \frac{S}{\pi} = R^2 + g.R \qquad (1)$$

Onde A_b é a área da base, A_l é a área lateral, R é o raio da base e g é a geratriz do cone.

Tem-se ainda que:

$g^2 = h^2 + R^2$

Mas:

$$m = \frac{\pi.g.R}{\pi.R^2} = \frac{g}{R} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R}$$

Logo:

$$m^2 = \frac{R^2 + h^2}{R^2} \Rightarrow h^2 = R^2.(m^2 - 1)$$

Ou:

$$R^2 = \frac{h^2}{m^2 - 1} \qquad (2)$$

Como g = m.R, em (1):

$$\frac{S}{\pi} = R^2 + m.R.R = R^2 + m.R^2$$

Substituindo o resultado de (2):

$$\frac{S}{\pi} = \frac{h^2}{m^2 - 1} + \frac{m.h^2}{m^2 - 1} \Rightarrow h^2 + m.h^2 = \frac{(m^2 - 1).S}{\pi}$$

$$h^2.\cancel{(1+m)} = \frac{\cancel{(m+1)}\,(m-1).S}{\pi}$$

Assim, tem-se:

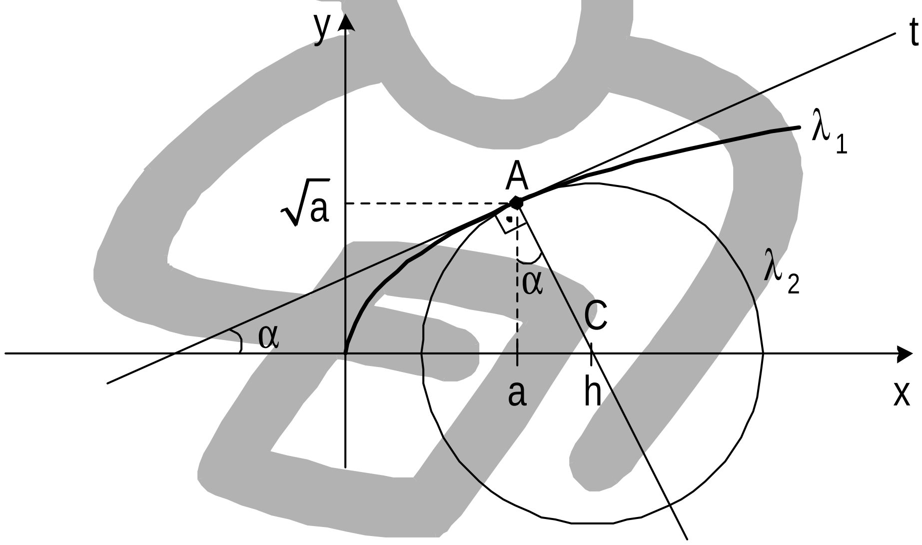
$$\boxed{h = \sqrt{\frac{S.(m-1)}{\pi}}}$$

29. Considere o seguinte raciocínio de cunho cartesiano: "Se a circunferência de centro *C = (h, 0)* e raio *r* intercepta a curva $y = +\sqrt{x},\ x > 0,$ no ponto $A = (a,\ \sqrt{a})$ de forma que o segmento $\overline{AC}$ seja perpendicular à reta tangente à curva em *A*, então *x = a* é raiz dupla da equação em *x* que se obtém da intersecção da curva com a circunferência."

Use este raciocínio para mostrar que o coeficiente angular dessa reta tangente em A é $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

RESOLUÇÃO:

As informações do enunciado remetem à seguinte construção:



As equações das linhas são:

λ_1: $y = \sqrt{x},\ x > 0$

λ_2: $(x-h)^2 + y^2 = r^2 = (h-a)^2 + (\sqrt{a})^2$

Das equações anteriores, segue:

$(x - h)^2 + x = h^2 - 2ha + a^2 + a \Rightarrow x^2 + (1 - 2h)x + 2ha - a^2 - a = 0$

Como a equação anterior admite raiz dupla, seu discriminante é nulo. Daí segue:

$$\Delta = (1-2h)^2 - 4(2ha - a^2 - a) = 0 \Rightarrow h^2 - (2a+1)h + \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow h = a + \frac{1}{2}$$

Assim:

$$m_t = tg\alpha = \frac{h-a}{\sqrt{a}} \ \Rightarrow \ \boxed{m_t = \frac{1}{2\sqrt{a}}}$$

30. Se x, y e z são os ângulos internos de um triângulo ABC e $sen\,x = \dfrac{sen\,y + sen\,z}{cos y + cos z}$, prove que o triângulo ABC é retângulo.

<u>RESOLUÇÃO:</u>

$$\text{sen } x = \frac{\text{sen } y + \text{sen } z}{\cos y + \cos z} = \frac{2\ \text{sen}\left(\frac{y+z}{2}\right).\cos\left(\frac{y-z}{2}\right)}{2\ \cos\left(\frac{y+z}{2}\right).\cos\left(\frac{y-z}{2}\right)} = \text{tg}\left(\frac{y+z}{2}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi - x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\text{sen } x = \text{cotg}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow 2\ \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow \left[2\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right].\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Como $0 < x < \pi$, $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ e daí segue:

$$\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Mais uma vez, $0 < x < \pi \Rightarrow$ $\boxed{x = \frac{\pi}{2}\text{rad} \Rightarrow \text{O triângulo ABC é retângulo}}$.

COMENTÁRIOS SOBRE A PROVA

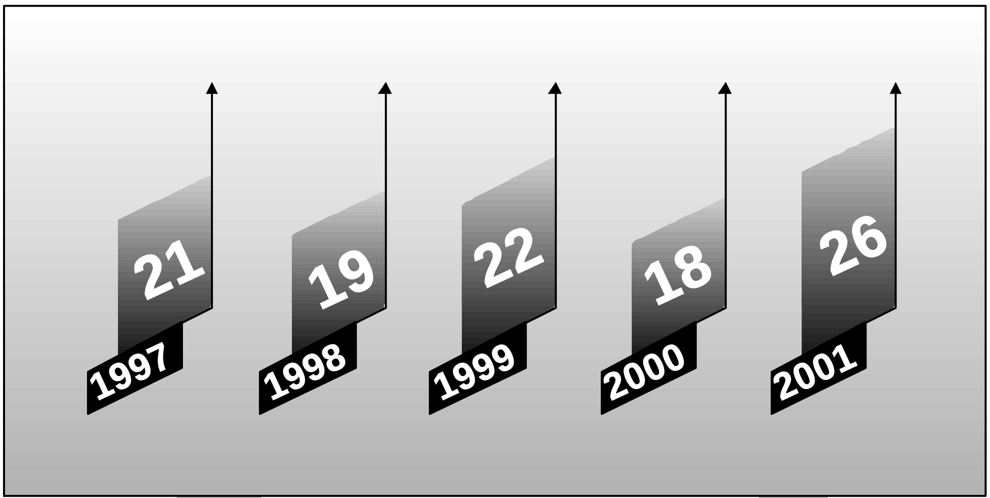
O vestibular do ITA 2002 reinaugura um novo modelo de prova com 20 testes e 10 questões dissertativas.
A prova abrangeu todo o programa, enfatizando o domínio de funções por parte dos alunos.
As questões de Geometria Plana e Espacial foram fáceis, enquanto as de Geometria Analítica foram mais trabalhosas.
Para um bom resultado na prova, o aluno deveria fazer uma análise geral das questões e resolver as mais rápidas em primeiro lugar.
Os enunciados das questões 11 e 18 poderiam ser mais precisos, evitando assim dupla interpretação. (Leia os comentários nas respectivas resoluções).
As questões envolvendo matrizes tiveram um nível de dificuldade elevado em vista do tempo para a sua resolução.
Sentimos a falta de problemas envolvendo a discussão de sistemas lineares.
De um modo geral, o vestibular do ITA, em sua nova versão, busca uma maior criatividade dos candidatos, selecionando assim os mais bem preparados.

Distribuição das questões:

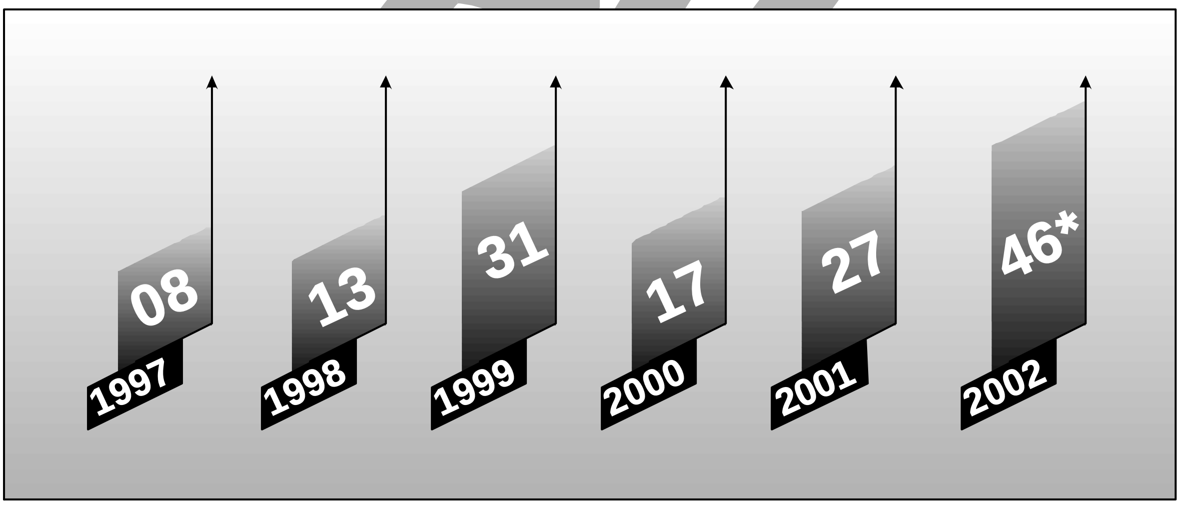
1ª Questão: ***Desigualdades***
2ª Questão: ***Funções***
3ª Questão: ***Função modular***
4ª Questão: ***Números complexos***
5ª Questão: ***Teoria dos conjuntos***
6ª Questão: ***Funções***
7ª Questão: ***Funções***
8ª Questão: ***Polinômios***
9ª Questão: ***Equações polinomiais***
10ª Questão: ***Função***
11ª Questão: ***Análise combinatória***
12ª Questão: ***Raciocínio lógico***
13ª Questão: ***Determinantes***
14ª Questão: ***Matrizes***
15ª Questão: ***Matrizes***
16ª Questão: ***Geometria plana***
17ª Questão: ***Geometria analítica***
18ª Questão: ***Geometria analítica***
19ª Questão: ***Geometria espacial***
20ª Questão: ***Geometria espacial***
21ª Questão: ***Funções***
22ª Questão: ***Desigualdades***
23ª Questão: ***Polinômios***
24ª Questão: ***Números complexos***
25ª Questão: ***Matrizes***
26ª Questão: **PA**
27ª Questão: **PG**
28ª Questão: ***Geometria espacial***
29ª Questão: ***Geometria analítica***
30ª Questão: ***Trigonometria***

Entre o histórico vitorioso de aprovações do Poliedro, aqui estão algumas que podem interessar mais especificamente para você:

ITA



IME



* 14 alunos POLIEDRO aprovados em 1ª fase e 46 classificados ao total.

2º Lugar e 4º Lugar geral do Brasil no IME!

E mais...

1995 Þ 1996

47 aprovados na FUVEST, VUNESP e UNICAMP
22 aprovados na AFA
09 aprovados na Escola Naval (100% em SP)

1996 Þ 1997

50% de aprovação em Universidades Federais e Estaduais
32 aprovados na AFA com os 3 primeiros lugares do Brasil!
10 aprovados na Escola Naval (90% em SP)
07 aprovados no Colégio Naval (39% em SP)
36 aprovados na EPCAR (77% em SJC)

1997 Þ 1998

106 aprovados em Biológicas
78 aprovados em Humanas
39 aprovados na AFA (100% em SJC)
17 aprovados na Escola Naval (90% em SP)
08 aprovados no Colégio Naval (40% em SP)
11 aprovados na EPCAR

1998 Þ 1999

84 aprovados em Biológicas
88 aprovados em Humanas
89 aprovados em Exatas
25 aprovados na Escola Naval (96% em SP)

1999 Þ 2000

145 aprovados em Biológicas
108 aprovados em Humanas
276 aprovados em Exatas

2000 Þ 2001

132 aprovados em Biológicas
110 aprovados em Humanas
334 aprovados em Exatas

A garantia de resultados como estes está na competente equipe de professores e no máximo contato possibilitado entre eles e os alunos, característica importante em nossa estrutura.

ALOJAMENTO

O Poliedro possui um alojamento em São José dos Campos com todas as facilidades para hospedar alunos de outras cidades. O **Recanto do Estudante** é uma pousada construída num espaço de aproximadamente 10.000 m^2, com acomodações amplas e confortáveis, que garantirão o melhor desempenho do aluno durante o curso.

O convívio nos alojamentos é importante, pois cria-se um ambiente de forte estudo e concentração, não só pelo apoio dado por professores e coordenadores do Poliedro, como também pela progressiva interação dos alunos, que podem discutir assuntos e questões das diversas matérias, permitindo um crescimento mais homogêneo do grupo.

O alojamento oferece alimentação completa e dispõe ainda de ônibus fretados que executam o trajeto alojamento-curso-alojamento nos horários de interesse. Tudo isso para que o aluno se preocupe apenas com o estudo.

ENSINO MÉDIO NO POLIEDRO

O Colégio Poliedro possui uma turma 3º Ano IME-ITA, que oferece uma preparação integrada ao cursinho, específica para os vestibulares do IME, ITA, Escolas Militares e Faculdades de Engenharia.

Professores responsáveis pela resolução:
Émerson de Maria
Fabiano Rodrigues dos Santos
Umberto César Chacon Malanga

Professores revisores:
Alex Sander Schroeder de Barros
Andressa de Mello
Celso Faria de Souza
Henrique Ferreira Villares
Thiago Pereira Mohallem

Coordenação:
André Oliveira de Guadalupe
Nicolau Arbex Sarkis

Digitação e diagramação:
Anderson Flávio Correa
Antonio José Domingues da Silva
Fábio Amaral Braga de Andrade
Kleber de Souza Portela
Nelson de Siqueira

Visite nossa Home Page
http://www.poliedro.com

Boletins Virtuais
Nossos Cursos
Nossos Resultados – Conheça nosso histórico de aprovações
Recanto do Estudante – Conheça nosso alojamento
Site do Vestibulando – Informações de todos os vestibulares

Fale Conosco

e-mail: poliedro@poliedro.com

ASSEART
Editora e Gráfica
Impressão e acabamento
SJCampos-SP
Tel.: (12) 3941-4858