TÉCNICAS EM OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA
TEORIA DOS NÚMEROS

Marcelo Rufino de Oliveira

444 problemas resolvidos

356 problemas com dicas ou respostas

Índice

6. Divisores

7. Congruência

8. Teoremas de Euler e Fermat

9. Função Máximo Inteiro

10. Equações Diofantinas

19. Função Máximo Inteiro

20. Equações Diofantinas

TEORIA DOS NÚMEROS

REPRESENTAÇÃO DECIMAL

1.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

Base da teoria dos números, as propriedades dos dígitos de um número são cobradas de forma direta ou indireta em praticamente toda prova de olimpíada de matemática, desde olimpíadas de nível fundamental como de nível médio.

1.2. RESUMO TEÓRICO

Todo número inteiro possui uma única representação decimal, ou seja, um número inteiro n admite uma única representação da forma:

$$n = a_m.10^m + a_{m-1}.10^{m-1} + \dots + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$$

onde os a_i são tais que $0 \leq a_i \leq 9$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Os termos a_i, $0 \leq a_i \leq 10$ são chamados de algarismos, dígitos ou cifras.

1.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) (Pará-2003) Numa divisão, vários números ficaram borrados.

```
□ □ □ □ □ □ □   1 □
□ □ □          ---------
-----          □ 0 8 □ □
0 0 0

      -----
       0
            □ □ □
            -----
            0 0 1
```

Recomponha a divisão acima.

Solução:

```
E F G H I J K | 1 D
E F G         |---------
-----         | A 0 8 B C
0 0 0 H I     |
      □ □
      ---
      0 □ J K
        □ □ □
        -----
        0 0 1
```

1) A x 1D = EFG

2) Note que quando baixa-se J não foi possível dividir, logo B = 0.

4) Quando se faz 8 x 1D obtém-se um número de dois algarismos. Porém A x 1D possuiu três algarismos, logo A = 9.

5) O mesmo acontece com C x 1D $\Rightarrow$ D = 9.

6) Note que já está pronto o quociente: 90809

7) Como $8 \times 11 = 88 < 100$, $9 \times 11 = 99 < 100$, $8 \times 12 = 96 < 100$ e $9 \times 12 = 108 > 100 \Rightarrow D = 2$.

8) Portanto: $(12)(90809) + 1 = 1089709$

2) (Índia-98) Existe algum inteiro positivo N tal que o número formado pelos últimos dois dígitos da soma $1 + 2 + 3 + \ldots + N$ é 98?

Solução:

Suponha que exista N tal que $1 + 2 + 3 + \ldots + N = \ldots 98$.

Assim: $\dfrac{N(N+1)}{2} = \ldots 98 \Rightarrow N(N + 1) = \ldots 96$

Como o dígito das unidades de $N(N + 1)$ é 6, então as únicas possibilidades para o algarismo das unidades de N são 2 ou 7. Seja x o algarismo das dezenas de N. Assim, podemos armar o algoritmo para multiplicar N e N + 1:

$$\begin{array}{rrr} \ldots & a & 3 \\ \times\ \ldots & a & 2 \\ \hline \ldots & 2a & 6 \\ \ldots & 3a & \\ \hline \ldots & 5a & 6 \end{array}, \qquad \begin{array}{rrr} \ldots & \overset{5}{a} & 8 \\ \times\ \ldots & a & 7 \\ \hline \ldots & 7a+5 & 6 \\ \ldots & 8a & \\ \hline \ldots & 15a+5 & 6 \end{array}.$$

Note que nos dois casos o dígito das dezenas de $N(N + 1)$ é sempre múltiplo de 5, não podendo valer 9. Assim, não existe nenhum inteiro N tal que o número formado pelos últimos dois dígitos da soma $1 + 2 + 3 + \ldots + N$ é 98.

3) (Venezuela-2006) Um inteiro positivo possui 223 dígitos e o produto destes dígitos é 3^{446}. Qual a soma dos dígitos?

Solução:

Seja n um inteiro positivo de 223 dígitos. O valor máximo do produto dos dígitos de n ocorre quando todos os dígitos são iguais a 9 e vale $9^{223} = (3^2)^{223} = 3^{446}$. Assim, os dígitos de n são todos iguais a 9: $n = \underbrace{999\ldots999}_{223}$

Portanto, a soma dos dígitos vale $9(223) = 2007$.

4) (Malásia-2010) Seja $\gamma = \alpha \times \beta$ onde $\alpha = \underbrace{999\ldots99}_{2010}$ e $\beta = \underbrace{444\ldots44}_{2010}$.

Determine a soma dos dígitos de γ.

Solução:

Perceba que:

Digitalizado com CamScanner

$$\underbrace{999...99}_{2010} \times \underbrace{444...44}_{2010} = (10^{2010} - 1) \times \left(\underbrace{444...44}_{2010} \right) =$$

$$= \underbrace{444...44}_{2010}\underbrace{000...00}_{2010} - \underbrace{444...44}_{2010} = \underbrace{444...44}_{2009}3\underbrace{555...55}_{2009}6$$

Assim, a soma dos dígitos de γ será $4.2009 + 3 + 5.2009 + 6 = 18090$.

V **5)** (Estônia-2000) Em um inteiro positivo M, de três algarismos, o algarismo das centenas é menor do que o algarismo das dezenas e o algarismo das dezenas é menor que o algarismo das unidades simples. A média aritmética de M com todos os números de três algarismos obtidos pela reordenação dos algarismos de M termina em 5. Determine tais números M.

Solução:

Seja $M = abc = 100a + 10b + c$.

Seja S a média aritmética de M com todos os números de 3 algarismos obtidos pela reordenação dos dígitos de M.

$S = (abc + acb + bac + bca + cab + cba)/6 \Rightarrow$

$S = (100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a +$

$+ 100c + 10a + b + 100c + 10b + a)/6 \Rightarrow$

$S = 222(a + b + c)/6 \Rightarrow S = 37(a + b + c)$

Desde que $c > b > a \Rightarrow c \geq b + 1 \geq a + 2$

Como M possui 3 algarismos, $a \geq 1 \Rightarrow b \geq 2 \Rightarrow c \geq 3 \Rightarrow$

$a + b + c \geq 1 + 2 + 3 \geq 6$

Como S termina em 5, temos 2 possibilidades:

i) $a + b + c = 15$:

Se $c = 9 \Rightarrow a + b = 6 \Rightarrow a = 1$ e $b = 5$ ou $a = 2$ e $b = 4$;

Se $c = 8 \Rightarrow a + b = 7 \Rightarrow a = 1$ e $b = 6$ ou $a = 2$ e $b = 5$ ou $a = 3$ e $b = 4$;

Se $c = 7 \Rightarrow a + b = 8 \Rightarrow a = 2$ e $b = 6$ ou $a = 3$ e $b = 5$;

Se $c = 6 \Rightarrow a + b = 9 \Rightarrow a = 4$ e $b = 5$;

Se $c = 5 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow b \geq 5$.

Assim, para $a + b + c = 15$, temos os números:

$M = \{159, 249, 168, 258, 348, 267, 357, 456\}$

ii) $a + b + c = 25$:

Se $c = 9 \Rightarrow a + b = 16 \Rightarrow b \geq 9$, pois $a \neq b$.

Desta forma, $a + b + c = 25$ $(a < b < c)$ não possui solução.

6) (Rússia-99) A soma dos algarismos de um inteiro positivo n escrito no sistema de numeração decimal é igual a 100 e a soma dos algarismos do número $44n$ é 800. Determine a soma dos algarismos do número $3n$.

Solução:

Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ os algarismos de n e $S(n)$ a soma de seus algarismos.

Então, $44n = 40(a_1a_2\ldots a_k) + 4(a_1a_2\ldots a_k) = 4(a_1a_2\ldots a_k)(10 + 1)$.

Logo, se os algarismos de $44n$ forem:

$4a_1, (4a_2 + 4a_1), (4a_3 + 4a_2), \ldots, (4a_k + 4a_{k-1})$ e $4a_k$

teríamos $S(44n) = 8(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = 800$.

Assim, se houvesse algum "vai um", a soma dos algarismos de $44n$ cairia. Deste modo, todos os algarismos de n são menores ou iguais a 2 donde os algarismos de $3n$ são $3a_1, 3a_2, 3a_3, \ldots, 3a_k$.

Assim, $S(3n) = 3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + \ldots + 3a_k = 3.S(n) = 300$.

7) (IMO-77 Shortlist) Determine todos os inteiros N tais que, em base 10, os dígitos de 9N são o reverso dos dígitos de N, e N possui no máximo um dígito igual a 0.

Solução:

Seja $[a_1a_2\ldots a_n]$ a representação decimal de N em base 10, com $a_1 \neq 0$. Desde que 9N possui o mesmo número de dígitos de N, temos que $a_1 = 1$ e $a_n = 9$. Como $9.19 \neq 91$, para $n = 2$ não temos solução, implicando que $n > 2$. Assim, já temos que $N = [1a_2a_3\ldots a_{n-1}9]$.

Desde modo: $9[1a_2a_3\ldots a_{n-1}9] = [9a_{n-1}\ldots a_3a_21] \Rightarrow$

$9.10^{n-1} + 90.[a_2a_3\ldots a_{n-1}] + 81 = 9.10^{n-1} + 10.[a_{n-1}\ldots a_3a_2] + 1 \Rightarrow$

$9[a_2a_3\ldots a_{n-1}] + 8 = [a_{n-1}\ldots a_3a_2]$.

Novamente, como o número de dígitos em ambos os lados é igual, devemos ter $a_2 \leq 1$.

O caso $a_2 = 1$ implica que $9a_{n-1} + 8$ termina em a_2 (que vale 1), ou seja, $a_{n-1} = 7$, que não é possível pois $9[1\ldots 7] + 8 > [7\ldots 1]$.

Deste modo concluímos que $a_2 = 0$ e, como $9a_{n-1} + 8$ termina em a_2 (que vale 0), temos que $a_{n-1} = 8$.

Como $(9)(1089) = (9801)$, temos que $N = 1089$ é uma solução para o problema. Para $n > 4$ temos que temos que $N = [10a_3a_4\ldots a_{n-2}89]$.

Assim: $9[10a_3a_4\ldots a_{n-2}89] = [98a_{n-2}\ldots a_4a_301] \Rightarrow$

$90.10^{n-2} + 900.[a_3a_4\ldots a_{n-2}] + 801 = 90.10^{n-2} + 100.[8a_{n-2}\ldots a_4a_3] + 1 \Rightarrow$

$9[a_3\ldots a_{n-2}] + 8 = [8a_{n-2}\ldots a_3] \Rightarrow a_3 \geq 8$

Inicialmente analisemos $a_3 = 8$. Desde que $9a_{n-2} + 8$ termina em a_3 $(= 8)$, temos que $a_{n-2} = 0$, que não é possível pois N já possui um dígito igual a 0.

Se $a_3 = 9$, como $9a_{n-2} + 8$ termina em a_3 $(= 9)$, temos que $a_{n-2} = 9$.

Deste modo como $a_3 = a_{n-2}$, se fizermos $n = 5$ temos $N = 10989$ que satisfaz o problema, e fazendo $n = 6$, temos que $N = 109989$, que também satisfaz o enunciado.

Para $n > 6$, novamente chegamos a $9[a_4\ldots a_{n-3}] + 8 = [8a_{n-3}\ldots a_4]$.

Assim, temos que $a_4 = a_5 = \ldots = a_{n-3} = 9$.

Portanto, todos os números da forma $N = 1099...989$ satisfazem o enunciado.

8) Determine um número de quatro dígitos $(abcd)_{10}$ (com $a \neq 0$) que é igual a $a^a + b^b + c^c + d^d$.

Solução:

Estipulemos inicialmente que $0^0 = 1$.
Sejam $m = abcd$, $s = a^a + b^b + c^c + d^d$ e assumamos que $m = s$.
Claramente, como m possui 4 dígitos, temos $10^3 \leq m \leq 10^4$.
Se $x \geq 6$, para todo $x \in \{a, b, c, d\}$ então $s \geq 6^6 > 10^4$, que é uma contradição. Desta forma $a, b, c, d \leq 5$.
Se $x < 5$ para todo $x \in \{a, b, c, d\}$, então $s \leq 4x4^4 = 1024$ e assim $a = b = c = d = 4$ é a única combinação para o qual $s \geq 10^3$.
Entretanto, neste caso, $s = 1024 \neq 4444 = m$.
Assim, $x = 5$ para algum $x \in \{a, b, c, d\}$.
Nós não podemos ter mais do que um 5 entre os números a, b, c, d, ou senão $s \geq 2x5^2 = 6250$, implicando que algum dígito de m é ao menos 6, que já concluímos que é impossível. Deste modo, temos exatamente um número 5 entre a, b, c, d.
Desde que $s > 5^5 = 3125$ e $s \leq 5^5 + 3x4^4 = 3893 < 4000$, tem-se $a = 3$.
Portanto $s = 5^5 + 3^3 + x^x + y^y = 3152 + x^x + y^y$, onde $x, y \in \{a, b, c, d\}$. Sem perda de generalidades, assumamos que $0 \leq y \leq x \leq 4$.
Se $x = 0$, então $y = 0$ e $s = 3154$ que não possui 0 entre seus dígitos.
Se $x = 1$, então $y = 0$ ou 1, implicando que $s = 3154$, enquanto que m não possui 4 entre seus dígitos.
Se $x = 2$, então $s = 3156 + y^y$ e notamos que s não possui 2 entre seus dígitos para $y = 0, 1, 2$.
Se $x = 3$, então $s = 3179 + y^y$ e notamos que s não possui 5 entre seus dígitos para $y = 0, 1, 2, 3$.
Se $x = 4$, então $s = 3408 + y^y$ e novamente notamos que s não possui 5 entre seus dígitos para $y = 0, 1, 2, 4$.
Entretanto, quando $y = 3$ temos $s = 3435$, que é claramente uma solução, fazendo $x = b = 4$ e $y = c = 3$.
Desta forma, $m = 3435$ é a única solução.

1.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) (OBM-97) O número N tem três algarismos. O produto dos algarismos de N é 126 e a soma dos dois últimos algarismos de N é 11. O algarismo das centenas de N é:
A) 2 B) 3 C) 6 D) 7 E) 9

2) (OBM-2000) Um certo número N de dois algarismos é o quadrado de um número natural. Invertendo-se a ordem dos algarismos desse número, obtém-se um número ímpar. A diferença entre os dois números é o cubo de um número natural. Podemos afirmar que a soma dos algarismos de N é:
A) 7 B) 10 C) 13 D) 9 E) 11

3) (Goiás-97) Determine a soma dos algarismos do número $(999.......995)^2$, onde o número 999.... 5 tem 99 dígitos iguais a 9.

4) (OBM-95) A soma dos algarismos da soma dos algarismos de $(400...001)^2$ (com 1995 zeros) é:
a) 16 b) 25 c) 34 d) 42 e) 07

5) (Maio-98) Inês escolheu quatro dígitos distintos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Formou com eles todos os possíveis números de quatro cifras distintas e somou todos esses números de quatro cifras. O resultado é 193314. Encontre os quatro dígitos que Inês escolheu.

6) (OBM-98) Quantos números de 3 algarismos existem cuja soma dos algarismos é 25 ?
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

7) (OBM-2001) São escritos todos os números de 1 a 999 nos quais o algarismo 1 aparece exatamente 2 vezes (tais como, 11, 121, 411, etc.). A soma de todos estes números é:
A) 6882 B) 5994 C) 4668 D) 7224 E) 3448

8) (OBM-2000) Quantos são os números inteiros de 2 algarismos que são iguais ao dobro do produto de seus algarismos?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9) (Canadá-78) Seja n um inteiro. Se o dígito das dezenas de n^2 é 7, qual o dígito das unidades de n^2?

10) (Hong Kong-92) Qual é o menor valor obtido quando um inteiro arbitrário de três dígitos distintos (não-nulos) é dividido pela soma dos seus dígitos?

11) (Argentina-97) Determinar todos os números naturais de quatro dígitos "abcd" tais que

"ab" + "cd" = "bc" e b – c = d

Observação: "ab" é um número de dois dígitos, o primeiro é a e o segundo b.

12) (Portugal-2000) Encontre os algarismos A, B, C, D que tornam a operação seguinte correta:

$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ D \\ \times \quad\quad 9 \\ \hline D\ C\ B\ A \end{array}$$

13) Mostre que 1 é o único inteiro positivo que é igual à soma dos quadrados dos seus dígitos.

14) (Rio Grande do Norte-95) A soma dos algarismos de um número natural N, de três dígitos, é 21. Formamos um novo número mudando a posição do algarismo das unidades com o das dezenas. O novo número é 45 unidades maior que N. Então, o produto dos algarismos de N é:

15) Prove que o dígito das dezenas de 3^n, n um inteiro positivo é sempre par.

16) (Maio-96) Considerando os números naturais de três dígitos, em quantos deles ao somar dois dos dígitos se obté dobro do terceiro? Justifique a sua resposta.

17) (Cone Sul-97) A cada número inteiro positivo n, $n \leq 99$, subtrai-se a soma dos quadrados de seus dígitos. Para que valores de n, esta diferença é a maior possível?

18) (Bélgica-90) O dígito das unidades de um número natural é 7. Quando este dígito é removido para frente do número, um novo número 5n é formado. Quantos dígitos, pelo menos, possui este número n?

19) (Irlanda-96) Para cada inteiro positivo n, seja S(n) a soma dos dígitos de n (quando n é escrito em base 10). Prove que para todo inteiro positivo n $S(2n) \leq 2S(n) \leq 10S(2n)$. Prove também que existe um inteiro positivo n com $S(n) = 1996S(3n)$.

20) (Portugal-2001) Determine todos os números inteiros positivos que são iguais a 11 vezes a soma dos seus algarismos.

21) (IMO-68) Determine todos os números naturais n cujo produto dos seus dígitos é igual a $n^2 - 10n - 22$.

22) (Teste Seletiva Cone Sul-96) Prove que toda progressão aritmética de números naturais contém dois termos cuja soma dos algarismos são iguais.

23) (Torneio das Cidades-94) Uma estudante esqueceu-se de escrever um sinal de multiplicação entre dois números naturais de 3 algarismos e escreveu esses dois números juntos, como se fosse um número de 6 algarismo. Esse número de 6 algarismo é 3 vezes maior do que o produto obtido pela multiplicação dos dois números originais. Ache esses números.

24) (Maio-95) Considera-se inicialmente um número de três algarismos distintos, nenhum dos quais igual a zero. Trocando de lugar dois de seus algarismos, encontra-se um segundo número menor do que o primeiro. Se a diferença entre o primeiro e o segundo números é um número de dois algarismos e a soma do primeiro e do segundo é um número palíndromo menor que 500, quais são os palíndromos que podem ser obtidos?
Observação: Um número palíndromo é um número que pode ser lido indiferentemente da frente para trás ou de trás para frente, como por exemplo 191.

25) (Argentina-95) Achar todos os números de 3 dígitos tais que ao elevarmos ao quadrado apresenta os três últimos dígitos iguais e na mesma ordem que o número original.

26) (Áustria-Polônia-96) Seja $k \geq 1$ um inteiro. Mostre que existem exatamente 3^{k-1} inteiros positivos n com as seguintes propriedades:
(a) A representação decimal de n consiste de exatamente k dígitos.
(b) Todos os dígitos de n são ímpares.
(c) O número n é divisível por 5.
(d) O número $m = n/5$ possui k dígitos ímpares.

27) (Pará-2006) Todo mundo possui somente um "aniversário mágico", quando sua idade é exatamente igual à soma dos dígitos do ano do seu nascimento. Por exemplo, o aniversário mágico de alguém que nasceu em 1899 foi em 1926 ($1926 - 1899 = 1 + 8 + 9 + 9$). Perceba que alguém que nasceu em 1908 também possuiu aniversário mágico em 1926 ($1926 - 1908 = 1 + 9 + 0 + 8$). Qual é o próximo ano depois de 1926 no qual duas pessoas que nasceram em anos diferentes possuem ambos aniversários mágicos.

28) (Pará-2007) Qual é o maior número de inteiros consecutivos tais que nenhum deles têm a soma de seus dígitos divisível por 5?

29) (OBM-2008) Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$. Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

30) (OBM-2003) Dizemos que um número *N* de quatro algarismos é biquadrado quando é igual à soma dos quadrados de dois números: um é formado pelos dois primeiros algarismos de *N*, na ordem em que aparecem em *N* e o outro, pelos dois últimos algarismos de *N*, também na ordem em que aparecem em *N*.
Por exemplo, 1233 é biquadrado pois $1233 = 12^2 + 33^2$. Encontre um outro número biquadrado.
Observação: Lembre-se de que um número de quatro algarismos não pode começar com zero.

31) (Teste Seletiva Cone Sul-2007) Dado um natural n, seja S(n) a soma de seus dígitos. Existe algum natural n para o qual S(n), S(2n), S(3n), . . . nunca seja um múltiplo de 2007?

32) (Argentina-2000) Em um quadro negro está escrito um número de três dígitos, todos distintos. Ana troca o primeiro dígito com o último. A soma do número escrito no quadro negro mais o número de Ana é igual a 92 vezes a soma dos dígitos do número escrito no quadro negro. Determinar todos os possíveis valores do número escrito no quadro negro.

33) (Polônia-2012) Seja S(k) a soma dos dígitos na representação decimal de k. Prove que existem infinitos n inteiros positivos tais que $S(2^n + n) < S(2^n)$.

34) (Nórdica-96) Prove a existência de um inteiro positivo divisível por 1996 e cuja soma dos dígitos seja 1996.

35) (Lista de Treinamento Cone Sul-2008) Existe algum inteiro n cuja soma dos dígitos é 10 e a soma dos dígitos de n^2 é 100?

36) (Moscou-1940) Determine todos os números de três dígitos $\overline{abc}$ tais que $\overline{abc} = a! + b! + c!$.

1.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) (British Columbia Colleges-2000) Um número inteiro de seis dígitos inicia com 1. Se este dígito é movido do extremo esquerdo para o extremo esquerdo sem mudar a ordem dos outros dígitos, o novo número é 3 vezes o original. A soma dos dígitos dos números é:

2) (British Columbia Colleges-97) Considere um número n de 3 dígitos com as seguintes propriedades:
1. Se os dígitos das dezenas e unidades são trocados de lugar, o seu valor é aumentado em, 36.
2. Se os dígitos das centenas e unidades são trocados de lugar, o seu valor é diminuído em 198.
Suponha agora que somente os dígitos das centenas e dezenas são trocados de lugar. O que ocorre com n?

3) (México-98) Quantos dígitos tem o número $2^{1998}.5^{2002}$?
(a) 1999 (b) 2000 (c) 2001 (d) 2002 (e) 2003

4) (México-92) Qual é a soma dos dígitos do número $N = 10^{92} - 92$?
(a) 1992 (b) 992 (c) 818 (d) 808 (e) 798

5) (Alberta High School-99) Determine o número de dois dígitos tal que a diferença entre o inteiro e o produto de seus dígitos é 12.

6) (Sonorense-97) Encontre todos os números $N = abc$ de três dígitos tais que ao somarmos 9 obtém-se o número cab.

7) (Campina Grande-2000) Encontre um número de 3 dígitos tal que a soma dele com o produto de seus dígitos dê 586.

8) (OBM-2001) O número N de três algarismos multiplicado por 7 deu como resultado um número que termina em 171. A soma dos algarismos de N é:
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

9) (Brasília-86) Determine um número de 4 dígitos, sabendo que seus dois primeiros dígitos são iguais, que seus dois últimos dígitos também são iguais e que o número é um quadrado perfeito.

10) (Pará-2006) Usando os algarismos de 1 a 6 podem-se formar dois números de 3 algarismos, por exemplo 645 e 321. A diferença entre esses dois números é 324. Forma-se agora com esses algarismos dois números de três algarismos cuja diferença seja a menor possível positiva. Quanto vale essa diferença?

11) (Pará-2007) Rui foi sacar um cheque no banco. No cheque a quantidade de centavos era o triplo da quantidade valores inteiros em reais. O funcionário do caixa se equivocou ao pagar o valor do cheque. Ele pagou em valores inteiros de reais a quantidade que deveria pagar em centavos e pagou em centavos o que deveria pagar em valores inteiros de reais. Rui tomou o dinheiro, gastou R$ 14,25 e então se deu conta que tinha o dobro do que o caixa deveria ter dado a ele pelo cheque. Determine de quanto era o valor do cheque.

12) (Pará-2007) João nasceu antes do ano 2000. Em 25 de agosto de 2001 ocorreu um fato interessante: João fez aniversário e passou a ter como idade um número que é igual à soma dos dígitos do ano em que nasceu. Determine a sua data de nascimento e justifique que esta é a única solução possível.

13) (Pará-2008) Dois irmãos escrevem as suas idades, uma a seguir à outra, e obtêm um número com 4 algarismos que é exatamente o quadrado da idade do seu pai. Nove anos mais tarde voltam a escrever as suas idades, pela mesma ordem, obtendo novamente um número com 4 algarismos que é o quadrado da idade do seu pai. Qual era a idade dos irmãos na primeira situação?

14) (Pará-2009) Determine todos os números N de três dígitos que são iguais a sete vezes um número de dois dígitos obtido quando apagamos algum dos dígitos de N?

15) (Pará-2010) São dados dois números de dois dígitos x e y, onde x é duas vezes y. Um dos dígitos de y é a soma, enquanto que o outro dígito de y é a diferença, dos dígitos de x. Determine os valores de x e y, provando que não existem outros.

16) (OBM-2009) Determine a quantidade de inteiros de dois algarismos que são divisíveis pelos seus algarismos.

17) (OBM-2008) Dado um número natural N, multiplicamos todos os seus algarismos. Repetimos o processo com o número obtido até obtermos um número com um algarismo. Este número será chamado de *primitivo* de N. Por exemplo, como $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ e $4 \cdot 2 = 8$, concluímos que o primitivo de 327 é 8. Calcule a soma dos algarismos do maior número natural com todos os algarismos diferentes cujo primitivo é ímpar.

18) (Iberoamericana-92) Para cada inteiro positivo n, seja a_n o último dígito do número $1 + 2 + 3 + ... + n$. Calcular $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1992}$.

X

19) (OBM-2004) Um número de 4 algarismos *a b c d* é chamado de *legal* quando a soma dos números formados pelos dois primeiros e pelos dois últimos algarismos é igual ao número formado pelos algarismos centrais (ou seja, $ab + cd = bc$). Por exemplo, 2307 é um número legal pois 23 + 07 = 30.

(a) Qual é o menor número legal maior do que 2307?

(b) Quantos são os números legais de 4 algarismos?

20) (Moldávia-99) Determine todos os números de quatro dígitos n tais que a soma dos dígitos de n é igual a $2027 - n$.

21) (Cone Sul-95) Achar um número de três dígitos, sabendo que a soma de seus dígitos é 9, o produto das mesmas é 24 e também o número lido da direita para a esquerda é 27/38 do número primitivo.

342

22) (OBM-2006) O par ordenado (83;89) é chamado de *par centenário* porque $83 + 8 + 9 = 89 + 8 + 3 = 100$, isto é, a soma de cada número com os dígitos do outro número é 100. Quantos são os pares centenários?

23) (Maio-99) Um número natural de três algarismos é chamado de tricúbico se é igual à soma dos cubos dos seus dígitos. Encontre todos os pares de números consecutivos tais que ambos sejam tricúbicos.

24) (Iberoamericana-91) Encontrar um número N de cinco dígitos diferentes e não nulos, que seja igual à soma de todos os números de três dígitos distintos que se podem formar com cinco dígitos de N.

25) (Inglaterra-97) N é um número inteiro de 4 dígitos, não terminando em zero, e R(N) é o número inteiro de 4 dígitos obtido pela reversão dos dígitos de N; por exemplo R(3275) = 5723. Determine todos os inteiros N para os quais $R(N) = 4N + 3$.

26) (Rio Grande do Norte-2001) Existem quantos inteiros positivos de dois algarismos tais que a diferença entre o inteiro e o produto de seus algarismos seja 12?

2

27) (IMO-62) Encontre o menor número natural com 6 como o último dígito, tal que se o dígito final 6 é movido para o início do número, ele é multiplicado por 4.

28) (OBM-93 Jr.) Sendo $d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0$ a representação decimal de um número natural n com k + 1 algarismos, diremos que n é um "superquadrado" se, e somente se,

d_0,
$d_1 d_0$,
$d_2 d_1 d_0$,
...
$d_{k-1} \ldots d_1 d_0$ e
$d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0 = n$ são quadrados de números inteiros positivos.

Exemplos:
64 é superquadrado, pois $4 = 2^2$ e $64 = 8^2$.
4225 não é superquadrado, pois, apesar de $25 = 5^2$, $225 = 15^2$, e $4225 = 65^2$, 5 não é o quadrado de um inteiro.

a) Determine todos os superquadrados menores do que 1000.
b) Determine todos os números que são superquadrados.

29) (Itália-2002) Determine todos os números inteiros positivos de três dígitos que são iguais a 34 vezes a soma dos seus dígitos.

30) (Putnam-56) Prove que todo inteiro positivo possui um múltiplo cuja representação decimal envolve todos os dígitos decimais.

31) (Rússia-98) Existem três números naturais a, b, c tais que $S(a + b) < 5$, $S(b + c) < 5$, $S(c + a) < 5$, mas $S(a + b + c) > 50$?

32) (Finlândia-2011) Mostre que existe um quadrado perfeito cuja soma dos dígitos é 2011.

33) (Rússia-67) Os dígitos de número natural são rearranjados. Prove que a soma do número dado com o obtido não pode ser igual a 999...99 (1967 noves).

34) (Itália-2012) Determine todos os inteiros positivos que são iguais a 300 vezes a soma dos seus dígitos.

35) (Moscou-73) Um número de quatro dígitos é subtraído do número composto pelos mesmos dígitos, porém em ordem inversa. Pode a subtração ser igual a 1008?

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

2.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

Apesar de ser atualmente pouco cobrado diretamente em provas de olimpíadas de matemática, o conhecimento dos critérios de divisibilidade ajuda na resolução de exercícios de outros tópicos, tais como invariantes, contagem, probabilidade e princípio da casa dos pombos.

Normalmente é um assunto mais explorado nas provas de Ensino Fundamental.

2.2. RESUMO TEÓRICO

Divisibilidade por 2: um número inteiro é divisível por 2 se seu último algarismo for divisível por 2.

Divisibilidade por 3: um número inteiro é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos for divisível por 3.

Divisibilidade por 4: um número inteiro é divisível por 4 se o número formado por seus dois últimos algarismos for divisível por 4.

Divisibilidade por 5: um número inteiro é divisível por 5 se o seu último algarismo for igual a 0 ou 5.

Divisibilidade por 7: um número inteiro $N = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ é divisível por 7 quando o inteiro

$$a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 6a_9 + \ldots$$

for divisível por 7.

Divisibilidade por 8: um número inteiro é divisível por 8 se o número formado por seus três últimos algarismos for divisível por 8.

Divisibilidade por 9: um número inteiro é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos for divisível por 9.

Divisibilidade por 10: um número inteiro é divisível por 10 se seu último algarismo for igual a 0.

Divisibilidade por 11: um número inteiro $N = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ é divisível por 11 quando o inteiro

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots + (-1)^n a_n$$

for divisível por 11.

Divisibilidade por 2^m ou 5^m, $m \geq 1$: um número inteiro de n algarismos é divisível por 2^m ou 5^m, $n \geq m \geq 1$, se o número formado por seus últimos m algarismos for divisível por 2^m ou 5^m, respectivamente.

2.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) (Pará-2001) Determinar todos os números de quatro dígitos $n = 1a7b$ que são múltiplos de 15. (a e b são dígitos não necessariamente distintos)

Solução:

Desde que $15 = 3.5$, temos aplicar os critérios de divisibilidade por 3 e 5. Para que $n = 1a7b$ seja divisível por 5, b deve ser igual a 0 ou 5:

i) $b = 0 \Rightarrow n = 1a70$

Para que n seja divisível por 3 temos que a soma dos dígitos de n deve ser divisível por 3:

$\therefore 1 + a + 7 + 0 = 8 + a = 3k$

se $k \leq 2 \Rightarrow 8 + a \leq 6 \Rightarrow a \leq -2$, que não é dígito

se $k = 3 \Rightarrow 8 + a = 9 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow n = 1170$

se $k = 4 \Rightarrow 8 + a = 12 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow n = 1470$

se $k = 5 \Rightarrow 8 + a = 15 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow n = 1770$

se $k \geq 6 \Rightarrow 8 + a \geq 18 \Rightarrow a \geq 10$, que não é dígito

ii) $b = 5 \Rightarrow n = 1a75$

Para que n seja divisível por 3 temos que a soma dos dígitos de n deve ser divisível por 3:

$1 + a + 7 + 5 = 13 + a = 3k$

se $k \leq 4 \Rightarrow 13 + a \leq 12 \Rightarrow a \leq -1$, que não é dígito

se $k = 5 \Rightarrow 13 + a = 15 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow n = 1275$

se $k = 6 \Rightarrow 13 + a = 18 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow n = 1575$

se $k = 7 \Rightarrow 13 + a = 21 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow n = 1875$

se $k \geq 8 \Rightarrow 13 + a \geq 24 \Rightarrow a \geq 11$, que não é dígito

Portanto, todos os números são 1170, 1470, 1770, 1275 1575, 1875.

2) (OBM-2010) Seja N o menor número inteiro positivo que multiplicado por 33 resulta em um número cujos algarismos são todos iguais a 7. Determine a soma dos algarismos de N.

Solução:

O critério de divisibilidade por 11 nos diz que se o número 33N possui todos os seus algarismos iguais e é divisível por 11, então ele deve possuir um número par de algarismos. O critério de divisibilidade por 3 também nos diz que a soma dos algarismos deve ser múltipla de 3 e isso obriga que a quantidade de algarismos 7 seja divisível por 3. O menor número que cumpre essas condições é 777777, ou seja, $N = 777777/33 = 23569$.

3) (OBM-2009) Determine a quantidade de números $n = a_1a_2a_3a_4a_5a_6$, de seis algarismos distintos, que podemos formar utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas simultaneamente:

i) $a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$;

ii) n é divisível por 9.

Solução:

Seja $k = a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$. Temos $3k = a_1 + a_2 + \ldots + a_6$ é múltiplo de 9, uma vez que n é múltiplo de 9. Daí, segue que k é múltiplo de 3. Mas, como os algarismos são distintos, perceba que

$1 + 2 + \ldots + 6 \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_6 \leq 4 + 5 + \ldots + 9 \Leftrightarrow 21 \leq 3k \leq 39 \Leftrightarrow$ $7 \leq k \leq 13$.

Como k é múltiplo de 3, temos dois casos: $k = 9$ e $k = 12$.

1º caso: $k = 9$. Veja que é suficiente escolhermos a_1, a_2 e a_3, pois $a_4 = 9 - a_3$, $a_5 = 9 - a_2$ e $a_6 = 9 - a_1$. Como os dígitos devem ser distintos, devemos escolher a_1, a_2 e a_3 de modo que haja no máximo um dígito em cada um dos conjuntos {1, 8}, {2, 7}, {3, 6} e {4, 5}. Esta escolha pode ser feita da seguinte forma:

- Escolhemos três dos quatro conjuntos: 4 maneiras;
- Em cada um dos três conjuntos acima, escolhemos um dos dois dígitos: $2^3 = 8$ maneiras;
- Permutamos os dígitos escolhidos: $3! = 6$ maneiras.

Logo, o total de números, neste caso, é igual a $4 \times 8 \times 6 = 192$.

2º caso: $k = 12$. Neste caso, os dígitos a_1, a_2 e a_3 devem ser escolhidos do conjunto
{3, 4, 5, 7, 8, 9} de modo que haja no máximo um dígito em cada um dos conjuntos {3, 9}, {4, 8} e {5, 7}. Esta escolha pode ser feita da seguinte maneira:

- Em cada um dos três conjuntos acima, escolhemos um dos dois dígitos: $2^3 = 8$ maneiras;
- Permutamos os dígitos escolhidos: $3! = 6$ maneiras.

Logo, o total de números, neste caso, é igual a $8 \times 6 = 48$.

O total de números é, portanto, $192 + 48 = 240$.

4) (Rússia-80) Todos os números de dois dígitos de 19 a 80 são escritos em linha reta sem espaços. É obtido o número 192021....7980. Este número é divisível por 1980?

Solução:

Fatorando 1980 temos: $1980 = 2^2.3^2.5.11$

I) Como $x = 192021\ldots7980$ termina em 80 e 80 é divisível por 4, então x é divisível por 4.

II) $1 + 9 + 2 + 0 + 2 + 1 + 2 + 2 + \ldots + 7 + 9 + 8 + 0 =$

$= 1 + 10(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 8 + 9 + 6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 1 + 270 + 17 + 270 = 558$

Como $5 + 5 + 8 = 18 = 9.2$ então x é divisível por 9

III) Como x termina em 0, então x é divisível por 5.

IV) Notamos que os dígitos de ordem ímpar são os dígitos das unidades de cada par, então:

$a = 9 + 6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 279$

Notamos que os dígitos de ordem par são os dígitos das dezenas de cada par, então:

$b = 1 + 10(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 8 = 279$

Como $a - b = 0$, então x também é divisível por 11.

Desta forma 192021...7980 é divisível por 1980.

2.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) Determinar os algarismos $\underline{x}$ e $\underline{y}$ de modo que o inteiro

a) 67xy seja divisível por 5 e por 11.

b) 34xx58y seja divisível por 9 e por 11.

2) Demonstrar que um inteiro é divisível por 4 se e somente se a soma do algarismo das unidades com o dobro do algarismo das dezenas é divisível por 4.

3) Demonstrar que um inteiro é divisível por 8 se e somente se a soma do algarismo das unidades, mais o dobro do algarismo das dezenas, mais o quádruplo do algarismo das centenas é divisível por 8.

4) O inteiro xy243z é divisível por 396. Determinar os dígitos $\underline{x}$, $\underline{y}$ e $\underline{z}$.

5) Sejam A e B dois números distintos de sete dígitos, cada um deles contendo todos os dígitos de 1 até 7. Prove que A não é divisível por B.

6) (Rio Grande do Norte-97) O número 1234 não é divisível por 11, mas um número formado por uma permutação de seus algarismo pode ser divisível por 11. Por exemplo, 1243 é divisível por 11. Qual é número total de permutações do número 1234 que é divisível por 11?:

a) 11 b) 1 c) 15 d) 8 e) 10

7) (Noruega-97) Se adicionarmos 329 ao número de três dígitos 2x4 obtemos 5y3. Se 5y3 é divisível por três, o maior valor possível de x é:

a) 1 b) 4 c) 7 d) 8 e) 9

8) (Manhattan-97) Considere um inteiro positivo que, quando escrita a sua representação decimal, somente foram usados dígitos 0 e 1. Suponha que exatamente 300 1's são usados, e o resto dos dígitos são 0's. Pode este inteiro ser o quadrado de outro inteiro?

9) (Argentina-97) Designando x e y por dígitos, achar todos os números naturais de cinco dígitos $\underline{65x1y}$ que são múltiplos de 12.

10) (Furman University-99) Um número é chamado *palíndromo* se lido da esquerda para a direita é igual ao número lido da direita para a esquerda. Qual é o maior inteiro $\underline{k}$ que é verdade afirmar que todos os números palíndromos de 4 dígitos são divisíveis por $\underline{k}$?
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) nda

11) (University of South Carolina-91) O maior inteiro $\underline{k}$ tal que 5^k divide $3(10!) + 12(5!) + 4(7!)$ é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

12) (OBM-95) O número de 8 algarismos, 1x9y9z55 é divisível por 33. Se $x < y < z$ quantos há de tais números?
a) Nenhum b) 05 c) 10 d) 45 e) 30

13) (Ceará-98) Determine todos os inteiros positivos N de três dígitos tais que N e a soma dos seus dígitos seja divisível por 11.

14) (OBM-2002) N = _539984_ é um número inteiro positivo com oito algarismos, sendo o primeiro e o último desconhecidos. Sabendo que N é um múltiplo de 198, encontre o algarismo das unidades de N / 198.

15) (Rússia-98) Existem números de 5 algarismos M e N onde todos os algarismos de M sejam pares, todos os algarismos de N sejam ímpares, cada um dos algarismos de 0 a 9 ocorrendo exatamente uma vez entre M e N e tais que N divide M?

16) (Suécia-93) O inteiro x é tal que a soma dos dígitos de 3x é igual à soma dos dígitos de x. Prove que x é divisível por 9.

17) (Ceará-99) Azambuja escreveu __4__1__6__3__ no quadro de sua sala de aula. Disse para seus colegas que eles dispunham dos algarismos 9, 8 e 5 para colocar dois deles em dois espaços vazios, apagar os espaços não preenchidos e assim obter um número de seis algarismos diferentes. Quais algarismos devem ser escolhidos e onde colocá-los para formar o maior número possível que seja divisível por 6?

18) (Ahsme-92) Os inteiros de dois dígitos de 19 a 92 são escritos consecutivamente para formar o inteiro $N = 19202122...909192$. Se 3^k é a maior potência de 3 que é fator de N, então $k =$
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) mais de 3

19) (México) Quantos números múltiplos de 6 menores que 1000 tem a propriedade de que a soma de suas cifras é 21?
(a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) 15 (e) 18

20) (Rio de Janeiro-2000) Determine o único número inteiro N de nove algarismos que satisfaz às seguintes condições:
(1) seus algarismos são todos distintos e diferentes de zero.
(2) para todo inteiro positivo $n = 2, 3, 4, ..., 9$, o número formado pelos n primeiros algarismos de N (da esquerda para a direita) é divisível por n.

21) (Hong Kong-90) O número de 6 dígitos $a1989b$ é divisível por 72. Determine a e b.

22) (Rússia-62) É dado um número de 1962 dígitos, que é divisível por 9. Seja x a soma dos seus dígitos. Seja y a soma dos dígitos de x. Seja z a soma dos dígitos de y. Calcule z.

23) (Rússia-80) Um número natural contem seis dígitos distintos não-nulos e é divisível por 37. Prove que, rearranjando a ordem dos dígitos, é possível obter pelo menos mais 23 números que são divisíveis por 37.

24) (Rússia-1998) Um número de 10 algarismos é dito *interessante* se todos os seus algarismos são distintos e ele é um múltiplo de 11111. Quantos números *interessantes* existem?

25) Determine o menor inteiro cuja representação decimal consiste somente de 1's e que é divisível pelo número 333···333 formado por 100 algarismos iguais a 3.

26) (OBM-98) O menor múltiplo de 1998 que possui apenas os algarismos 0 e 9 é 9990. Qual é o menor múltiplo de 1998 que possui apenas os algarismos 0 e 3?

27) (Cone Sul-94) O inteiro positivo N tem 1994 dígitos. Destes, 14 são iguais a zero e os números de vezes que aparecem os demais dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, estão na razão 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8: 9, respectivamente. Demonstrar que N não é um quadrado perfeito.

2.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) Determinar o algarismo x de modo que o inteiro:
a) 5x9 seja divisível por 9.
b) 45x3x seja divisível por 3.
c) 50x2x seja divisível por 2, por 3 e por 11.

2) Demonstrar que um inteiro é divisível por 6 se e somente se a soma do algarismo das unidades com o quádruplo da soma de todos os outros algarismos é divisível por 6.

3) (Leningrado-90) Existe um número de 6 dígitos divisível por 11, cujos dígitos são 1, 2, 3, 4, 5, 6 escritos em alguma ordem sem repetições?

4) (Argentina) Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, formar um número de seis cifras distintas *abcdef* tal que o número de três cifras *abc* seja múltiplo de 4, o número de três cifras *bcd* seja múltiplo de 5, o número de três cifras *cde* seja múltiplo de 3 e o número de três cifras *def* seja múltiplo de 11.

5) (Argentina-97) Sejam p = 2.3.5.7.11.13... o produto de todos os números primos até 1997 e q = 3.5.7.9.11.13... o produto de todos os números impares até 1997. Achar a penúltima cifra da direita do produto pq.

6) (Argentina-98) Determinar os dígitos a e b tais que o número de 7 cifras 6a74b14 seja múltiplo de 9 e de 11. Dar todas as possibilidades.

7) (México) Ao dividir qualquer potência de 10 por 45, o resto é sempre 10. Com base neste critério (distinto da divisibilidade simultânea por 9 e por 5) para que um número $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0$ seja divisível por 45.

8) (University of South Carolina-87) Em base 10, o valor do dígito d para o qual o número d456d seja divisível por 18 é:
a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

9) (Rice Math Tournament-96) Determine o resto quando $(0! + 1! + \ldots + 64!)^2$ é dividido por 5.

10) (São Paulo-2009) O truque favorito do grande matemágico Benjamini é o seguinte:
Ele pede para uma pessoa na platéia pensar em um número de sete algarismos. Esse número não deve ser revelado.
Então pede para ela inverter o número (primeiro algarismo vira o último, o segundo vira o penúltimo e assim por diante) e subtrair o maior do

menor (pode usar lápis e papel, pois a conta é grande). Nada é revelado ainda.

Finalmente pede para a pessoa convidada ir falando na ordem os sete algarismos obtidos (mesmo os possíveis zeros à esquerda devem ser falados), sendo que um dos algarismos ela não deve dizer, desafiando Benjamini com "Descubra!".

Após o convidado concluir a sua participação, para espanto de todos, Benjamini imediatamente diz o algarismo que ele não falou.

Por exemplo:

A pessoa escolhe o número 2485772.

O número invertido é 2775842. Subtraindo: 2775842 − 2485772 = 0290070.

O convidado, então, diz Zero, Dois, Nove, Zero, Zero, Descubra!, Zero.

E o triunfante Benjamini, diz de imediato "Sete!", recebendo as suas merecidas palmas.

O segredo de Benjamini é que ele sabe que o número obtido após a subtração deve ser múltiplo de onze. E sabe também o critério de divisibilidade por onze:

Seja $a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ a representação decimal de um número inteiro n. O número n é múltiplo de 11 se, e somente se, $(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots)$ é múltiplo de 11. Por exemplo: 4770216 é múltiplo de 11, pois (6 + 2 + 7 + 4) − (1 + 0 + 7) = 11 é um múltiplo de 11; já 5672109 não é múltiplo de 11, pois (9 + 1 + 7 + 5) − (0 + 2 + 6) = 14 não é múltiplo de 11.

Explicando o truque: 0290070 é múltiplo de 11, pois (0 + 0 + 9 + 0) − (7 + 0 + 2) = 0 que é múltiplo de 11.

a) Um membro da platéia disse: Quatro, Três, Dois, Zero, Descubra!, Cinco, Cinco.

Faça como o grande Benjamini e determine o algarismo que falta.

b) Um outro membro da platéia disse: Seis, Zero, Oito, Descubra!, Zero, Oito, Quatro. E Benjamini, para surpresa de todos, afirmou que não diria o algarismo porque o resultado da conta estava errado!

Baseado no critério de divisibilidade por onze, explique mais esse mistério envolvendo o maior dos matemágicos.

11) (OBM-98) Coloque em cada quadradinho, no desenho a seguir, os algarismos 1, 2, 3, 4 ou 5, de forma que cada um deles apareça pelo menos uma vez e que o número formado seja o maior possível e múltiplo de 9.

No número que você construiu, o algarismo mais repetido apareceu:

a) 6 vezes b) 5 vezes c) 4 vezes d) 3 vezes e) 2 vezes

12) (Argentina) Utilizando exclusivamente dois dígitos distintos, 2 e a, forma-se o seguinte número de 90 cifras: $2a22a222a2222a$... Se este número de 90 cifras é múltiplo de 9, determinar todos os valores possíveis do dígito a.

13) (Hong Kong-98) Um inteiro positivo N é composto somente dos dígitos 0 e 1, e é divisível por 2475. Determine o menor número possível de dígitos de N.

14) (Maio-2001) Na minha calculadora, uma das teclas de 1 a 9 está com defeito: ao pressioná-la aparece na tela um dígito entre 1 e 9 que não é o correspondente. Quando tentei escrever o número 987654321, apareceu na tela um número divisível por 11 e que deixa resto 3 ao ser dividido por 9. Qual é a tecla defeituosa? Qual é o número que apareceu na tela?

15) (Argentina-96) Quantos números de 15 dígitos que utilizam exclusivamente os dígitos 3 e 8 são múltiplos de 11?

16) (Argentina-2002) Achar o menor múltiplo de 84 formado exclusivamente por dígitos 6 e 7.

17) (ProMath Competition) a) Mostre que nenhum dos seguintes 99 números 1, 12, 123, ..., 123...969798, 123...979899
é divisível por 11.
b) Em quanto deve continuar a seqüência para encontrar um número divisível por 11?

18) (Argentina-2010) Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 deve-se formar um número natural de seis cifras distintas $abcdef$ tal que o número de duas cifras ab seja múltiplo de 2, o número de três cifras abc seja múltiplo de 3, o número de quatro cifras $abcd$ seja múltiplo de 4, o número de cinco cifras $abcde$ seja múltiplo de 5 e o número de seis cifras $abcdef$ seja múltiplo de 6.

19) (Argentina-2010) Pablo escreveu a lista de todos os números naturais palíndromos de 5 dígitos que são múltiplos de 11. Calcular quantos números existem na lista de Pablo.

2,70 - 140

20) (São Paulo-2006) No código numérico de diversos produtos, como, por exemplo, aquele que aparece no código de barras, utiliza-se o seguinte esquema para detectar erros de digitação: multiplicando-se cada dígito alternadamente por 1 e 3 e adicionando-se os resultados, sempre se obtém um múltiplo de 10. Por exemplo, um possível código de um produto é 4905370265546, pois

$$4\times 1 + 9\times 3 + 0\times 1 + 5\times 3 + 3\times 1 + 7\times 3 + 0\times 1 + 2\times 3 + 6\times 1 + 5\times 3 + 5\times 1 + 4\times 3 + 6\times 1 = 120$$

é um múltiplo de 10.

Por outro lado, 4905370265564 não pode ser o código de um produto pois

$$4\times 1 + 9\times 3 + 0\times 1 + 5\times 3 + 3\times 1 + 7\times 3 + 0\times 1 + 2\times 3 + 6\times 1 + 5\times 3 + 5\times 1 + 6\times 3 + 4\times 1 = 124$$

não é um múltiplo de 10.

Assim, conferindo esta conta, o computador é capaz de detectar erros de digitação.

(a) O último dígito do código de um produto é chamado dígito de verificação. O dígito de verificação que aparece na embalagem de um desodorante está ilegível. Abaixo, ele está indicado por um □:

789103304863□

Qual é esse dígito?

(b) Como você pode observar nos dois primeiros exemplos, os dois últimos dígitos trocaram de lugar. Esse é um dos erros mais comuns de digitação, a transposição. Mais precisamente, a transposição de dois dígitos consecutivos ocorre quando em vez de se digitar ab digita-se ba, onde a e b representam algarismos distintos.

(i) Um corretivo líquido tem código 7897254113302. Mostre que, mesmo que haja uma transposição entre os dígitos 7 e 2, obtemos um possível código de um produto. Ou seja, caso ocorra essa transposição, ela não será detectada.

(ii) Como vimos no item anterior, o esquema acima é capaz de detectar quase todos os erros de transposição. Determine todos os pares de dígitos consecutivos distintos ab cuja transposição ba não é detectada pelo esquema acima em qualquer código. Observe que, pelo item anterior, 72 é um desses pares.

(c) Quantos códigos de produto são da forma 7897073010xyz, em que x, y e z são dígitos?

21) (Moscou-1941) Determine o número $\overline{523abc}$ divisível por 7, 8 e 9.

22) (Moscou-95) Prove que se inserirmos uma quantidade qualquer de dígitos 3 entre os zeros do número 12008 nós sempre obtemos um número divisível por 19.

23) (Rioplatense-97) Qual é o menor múltiplo de 99 cujos dígitos somam 99 e que iniciam e terminam com 97?

DIVISIBILIDADE

3.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

O domínio das propriedades da divisibilidade é indispensável para resolver qualquer questão de teoria dos números, pois direta ou indiretamente os conceitos básicos das propriedades invariavelmente são cobrados. Muitas dos exercícios de olimpíadas exigem conhecimento das propriedades da divisibilidade em conjunto com propriedades algébricas, então também torna-se importante o conhecimento das operações algébricas.

Devido à simplicidade da maioria das questões, é possível encontrar problemas envolvendo propriedades da divisibilidade em provas de ensino fundamental e médio, bem como olimpíada regionais, nacionais e internacionais.

3.2. RESUMO TEÓRICO

Propriedades:

(1) $a \mid 0$, $1 \mid a$ e $a \mid a$

(2) Se $a \mid 1$, então $a = \pm 1$

(3) Se $a \mid b$ e se $c \mid d$, então $ac \mid bd$

(4) Se $a \mid b$ e se $b \mid c$, então $a \mid c$

(5) Se $a \mid b$ e se $b \mid a$, então $a = \pm b$

(6) Se $a \mid b$, com $b \neq 0$, então $|a| \leq |b|$

(7) Se $a \mid b$ e se $a \mid c$, então $a \mid (bx + cy)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$

Algoritmo da Divisão

Sendo a e b dois inteiros, com $b > 0$, então existem e são únicos os inteiros q e r que satisfazem às condições:

$$a = bq + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < b$$

Denominamos a de dividendo, b de divisor, q de quociente e r de resto. Na divisão entre dois inteiros deve-se ressaltar que na maioria absoluta dos casos estamos interessados no resto da divisão. O algoritmo da divisão euclidiana fornece uma importante ferramenta no estudo de questões em que determinada propriedade deve ser analisada para todos os inteiros. Por exemplo, como na divisão euclidiana por 3 temos apenas os restos 0, 1 e 2, todos os inteiros podem ser escritos das seguintes maneiras: $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$.

3.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) (Pará-2005) Determinar um número de dois dígitos sabendo que se o dividirmos pela soma dos seus dígitos o quociente é 7 e o resto é 3. Se invertermos os dígitos e dividirmos o número resultante pela soma dos seus dígitos o quociente é 3 o resto é 7. 73

Solução:

Seja $N = (ab)_{10} = 10a + b$.

i) $10a + b = 7(a + b) + 3 \Rightarrow 10a + b = 7a + 7b + 3 \Rightarrow 3a - 6b = 3 \Rightarrow a - 2b = 1$

ii) $10b + a = 3(a + b) + 7 \Rightarrow 10b + a = 3a + 3b + 7 \Rightarrow 2a - 7b = -7$

Resolvendo o sistema encontramos que $a = 7$ e $b = 3 \Rightarrow N = 73$

2) Determine todos os inteiros positivos $\underline{d}$ tais que $\underline{d}$ divide ambos $n^2 + 1$ e $(n + 1)^2 + 1$ para todo inteiro n.

Solução:

Seja $d \mid (n^2 + 1)$ e $d \mid [(n + 1)^2 + 1]$.

Logo: $d \mid [(n^2 + 2n + 2) - (n^2 + 1)] \Rightarrow d \mid (2n + 1) \Rightarrow d \mid (4n^2 + 4n + 1)$

Analogamente: $d \mid [4(n^2 + 2n + 2) - 4n^2 + 4n + 1)] \Rightarrow d \mid (4n + 7)$

Finalmente: $d \mid [(4n + 7) - 2(2n + 1)] \Rightarrow d \mid 5 \Rightarrow d = 1$ ou $d = 5$

3) (Ceará-96) Os lados de um triângulo são expressos, em cm, por três inteiros consecutivos e sua área, em cm², é dada por um inteiro. Prove que o menor lado do triângulo é ímpar.

Solução:

Sejam $a = x - 1$, $b = x$ e $c = x + 1$ os lados do triângulo.

Assim, $p = (x - 1 + x + x + 1)/2 = 3x/2$.

A área é dada por

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{3x}{2}\frac{(x+2)}{2}\frac{x}{2}\frac{x-2}{2}} = \sqrt{\frac{3.x^2.(x-2)(x+2)}{16}}.$$

Como S é inteiro $\Rightarrow 16 \mid x^2.(x - 2)(x + 2)$

Como x, $x - 2$ e $x + 2$ possuem a mesma paridade $\Rightarrow 2 \mid x \Rightarrow$ $x - 1$ é ímpar.

4) (Rio Grande do Norte-97) Qual é o menor número natural que é soma de 9 números naturais consecutivos, é soma de 10 números naturais consecutivos?
consecutivos e é soma de 11 números naturais consecutivos?

a) 555 b) 466 c) 495 d) 695 e) 396

Solução:

Se o número x é soma de 9 números naturais consecutivos:

$x = n - 4 + n - 3 + n - 2 + n - 1 + n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 = 9n$

Se o número x é soma de 11 números naturais consecutivos:

$x = m - 5 + m - 4 + m - 3 + m - 2 + m - 1 + m + m + 1 + m + 2 + m + 3 + m + 4 + m + 5 = 11m$

Assim temos que x é divisível por 99: $x = 99k$

Se o número x é soma de 10 números naturais consecutivos segue que:

$x = y - 4 + y - 3 + y - 2 + y - 1 + y + y + 1 + y + 2 + y + 3 + y + 4 + y + 5$

$= 10y + 5 = 5(2y + 1)$

Desta forma, x é divisível por 99 e 5. Portanto, $x_{min} = 99 \cdot 5 \Rightarrow x = 495$.

X **5)** (OBM-97) O número de valores inteiros de m para os quais as raízes da equação $x^2 - (m + m^2)x + m^3 - 1 = 0$ são inteiras é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solução:

Resolvendo a equação de 2º grau $x^2 - (m^2 + m)x + m^3 - 1 = 0$:

$$x = \frac{m^2 + m \pm \sqrt{(m^2+m)^2 - 4(m^3-1)}}{2} = \frac{m(m+1) \pm \sqrt{m^4 - 2m^3 + m^2 + 4}}{2} =$$

$$= \frac{m(m+1) \pm \sqrt{m^2(m-1)^2 + 4}}{2}$$

A expressão $m(m + 1)$ é par pois m ou $m + 1$ é um número par.

Da mesma forma $m^2(m - 1)^2 + 4$ é divisível por 4, uma vez que $m(m - 1)$ é divisível por 2, fazendo com que $m^2(m - 1)^2$ seja divisível por 4, implicando que $m^2(m - 1)^2 + 4$ seja divisível por 4 e que $\sqrt{m^2(m-1)^2 + 4}$ seja divisível por 2.

Desde modo, é necessário e suficiente que o discriminante de $x^2 - (m^2 + m)x + m^3 - 1 = 0$ seja um quadrado perfeito:

$[m(m - 1)]^2 + 4 = k^2 \Rightarrow k^2 - [m(m - 1)]^2 = 4$

Sendo 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... os primeiros quadrados perfeitos, notemos que os únicos quadrados perfeitos que distam 4 unidades um do outro são 0 e 4. Assim temos que $k^2 = 4$ e $[m(m - 1)]^2 = 0 \Rightarrow$

$m(m - 1) = 0 \Rightarrow m = 0$ ou $m = 1 \Rightarrow$

existem 2 valores inteiros de m de modo que as raízes são inteiras.

6) Dado um inteiro n, mostre que existe um múltiplo de n que se escreve com os algarismos 0 e 1 apenas. (Por exemplo, se $n = 3$, temos 111 ou 1011, etc...).

Solução:

Sejam os números 1, 11, 111, 1111, ..., 111...11

onde temos $n + 1$ números, com o último tendo $n + 1$ dígitos iguais a 1.

Se dividirmos todos estes números por n, obteremos $n + 1$ restos, todos entre 0 e $n - 1$. Como entre 0 e $n - 1$ temos n números, então temos pelo menos 2 restos iguais.

Desta forma teremos a situação: $111...11 = q_1.n + r$ $111...11 = q_2.n + r$

Subtraindo obteremos: $111...1100...00 = n(q_1 - q_2)$

Assim provamos que sempre existe um múltiplo de qualquer natural n tal que este número inicie somente com dígitos 1's e termine somente com dígitos 0's.

7) (Espanha-2012) Determine se o número $\lambda_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ é irracional para todos os inteiros não negativos n.

Solução:

Suponhamos que exista $m \in \mathbb{N}$ tal que $3n^2 + 2n + 2 = m^2 \Rightarrow$ $9n^2 + 6n + 6 = 3m^2 \Rightarrow (3n + 1)^2 + 5 = 3m^2$

Analisemos agora todos os restos da divisão por 4 dos quadrados perfeitos. Se x par: $x = 2k \Rightarrow x^2 = 4k^2 \Rightarrow$ resto 0 na divisão por 4

Se x ímpar: $x = 2k + 1 \Rightarrow x^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 \Rightarrow$ resto 1 na divisão por 4

Desta maneira conclui-se que $(3n + 1)^2 + 5$ deixa restos 1 ou 2 na divisão por 4. Por outro lado, $3m^2$ deixa restos 0 ou 3 na divisão por 4. Assim, conclui-se que para todo n natural tem-se que $\lambda_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ é irracional.

8) (USA Talent Search-2012) Determine todas as triplas (a, b, c) de inteiros positivos com $a \le b \le c$ tais que $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 3$.

Solução:

Se $a \ge 3$ tem-se que $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \le \left(1 + \frac{1}{a}\right)^3 \le \left(\frac{4}{3}\right)^3 < 3$, que é uma contradição. Logo, os únicos valores que a pode assumir são 1 e 2.

i) $a = 1$: $2\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bc}\right) = 3 \Rightarrow bc - 2b - 2c = 3 \Rightarrow$

$(b - 2)(c - 2) = 6$

Como $1 \le b \le c$ tem apenas as soluções (3, 8) e (5, 6)

ii) $a = 2$: $\frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bc}\right) = 3 \Rightarrow bc - b - c = 1 \Rightarrow$

$(b - 1)(c - 1) = 2$

Como $1 \le b \le c$ tem apenas as soluções (2, 3)

Deste modo, as soluções são (1, 3, 8), (1, 5, 6) e (2, 2, 3)

9) (IMO-77) Sejam a e b inteiros positivos. Quando $a^2 + b^2$ é dividido por $a + b$, o quociente é q e o resto é r. Determine todos os pares a, b tais que $q^2 + r = 1977$.

Solução:

Como $a^2 + b^2 \geq (a + b)^2/2$, então $q \geq (a + b)/2$.
Temos também que $r < 2q$.
O maior quadrado perfeito menor que 1977 é $1936 = 44^2$. Podemos escrever que $1977 = 44^2 + 41$.
Para o próximo quadrado, podemos escrever que $1977 = 43^2 + 128$.
Entretanto $128 > 2.43 = 86$.
Então devemos ter $q = 44$ e $r = 41$.
Como $a^2 + b^2 = 44(a + b) + 41$, então $(a - 22)^2 + (b - 22)^2 = 1009$.
Como 1009 somente pode ser decomposto como soma de dois quadrados da forma $28^2 + 15^2 = 1009$, temos:
i) $a - 22 = 28 \Rightarrow a = 50$ e $b - 22 = 15 \Rightarrow b = 37$
ii) $a - 22 = 15 \Rightarrow a = 37$ e $b - 22 = 28 \Rightarrow b = 50$

10) (IMO-90 Shortlist) Prove que todo inteiro k (>1) possui um múltiplo menor que k^4 e que pode ser escrito em duas representação decimal possui no máximo 4 dígitos distintos.

Solução:
Evidentemente, todos os inteiros k que possuem no máximo 4 dígitos (ou seja, menores que 10000) satisfazem o enunciado, pois o próprio k (que é múltiplo de k) é formado por no máximo 4 dígitos distintos.
Seja k (> 1) um inteiro qualquer, e para cada k escolhemos o inteiro positivo tal que $2^{n-1} \leq k < 2^n \Rightarrow (2^{n-1})^4 \leq k^4 < 2^{4n}$.
Como já provamos que vale para todos os inteiros k tal que $k < 10000$, então basta analisar para $n \geq 14$, pois 2^{14} é a menor potência de 2 que possui mais de 4 dígitos.
Seja S o conjunto de todos os inteiros que são formados apenas pelos dígitos 0 e 1 e que possuem no máximo n dígitos.
Como cada dígito de cada elemento de S pode ser 0 ou 1, temos que existem exatamente 2^n elementos em S.
Como $k < 2^n$, então o número de elementos de S é maior que a quantidade de inteiros k que são menores que 2^n.
Assim, como existem somente k restos possíveis na divisão de um número por k, temos que existem dois inteiros a e b ($a > b$), ambos pertencentes a S, que deixam o mesmo resto na divisão por k.
Deste modo: $a = q_1.k + r$ e $b = q_2.k + r \Rightarrow a - b = q_3.k \Rightarrow$ $a - b$ é divisível por k.
Como os dígitos de a e b são apenas 0 e 1, então $a - b$ possui, possivelmente, somente os dígitos 0, 1, 8 e 9.
Temos que provar agora que $a - b < k^4$.
Como a e b possuem n dígitos, então $a - b$ possui no máximo n dígitos, ou seja: $a - b < 10^n$.
Assim, $a - b < 10^n = 10.10^{n-1} < (1,6)^5(10)^{n-1} < 16^{n-1} = (2^{n-1})^4 \leq k^4$.

Assim, provamos que para cada inteiro positivo k existe um múltiplo de k que é menor que k^4 e é formado somente pelos dígitos 0, 1, 8 e 9.

3.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) (OBM-98) Um número inteiro n é bom quando $4n + 1$ é divisível por 5. Quantos números bons há entre 500 e 1.000? 24

2) Prove que se $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são números naturais, então $a!b! \mid (a + b)!$.

3) Prove que, para todo número natural $\underline{k}$, o produto $P = (a + 1)(a + 2)...(a + k)$ é divisível por $k!$.

4) Determine todos os números de dois dígitos $\overline{AB}$ tais que $\overline{AB}$ divide $\overline{A0B}$.

5) (Rússia-96) Um número de 1996 dígitos inicia por 6 (dígito mais significativo). Todo número formado por dois dígitos consecutivos é divisível por 17 ou 23. Qual é o último dígito (das unidades)?

6) (Torneio das Cidades-97) Sejam a e b números inteiros. Dado que $a^2 + b^2$ é divisível por ab, prove que $a = b$.

7) (OBM Jr.-97) No edifício mais alto de Terra Brasilis moram Eduardo e Augusto. O número do andar do apartamento de Eduardo coincide com o número do apartamento de Augusto. A soma dos números dos apartamentos dos dois é 2164. Calcule o número do apartamento de Eduardo, sabendo que há 12 apartamentos por andar. (Por exemplo, no primeiro andar estão os apartamentos de 1 a 12, no segundo, de 13 a 24, e assim por diante).

8) (OBM-2007) Encontre todos os pares de inteiros positivos $(a; b)$ tais que $(a + 1)(b + 1)$ é múltiplo de $ab + 1$.

9) (Rússia-65) Um número de 6 dígitos é considerado "afortunado" se a soma de seus primeiros 3 dígitos é igual à soma dos seus últimos 3 dígitos. Prove que a soma de todos os números "afortunados" é divisível por 13.

10) (Irã-2007) Prove que para todo inteiro positivo n existem n inteiros positivos tais que sua soma é um quadrado perfeito e seu produto é um cubo perfeito.

11) (Pará-2003) A data 31/03/93 é dita “interessante” pois $31 \times 03 = 93$. Se todas as datas são escritas desta maneira, determine todos os anos do século 20 que não possuíram datas interessantes.

12) (Argentina) Sejam x e d números naturais tais que o resto de dividir x por d é igual a 4 e o resto de dividir $14x$ por d é 17. Achar o resto de dividir $210x$ por d.

13) (Argentina) Sejam a, b, c, d, e, números naturais consecutivos tais que $a + b + c + d + e$ é um cubo perfeito e $b + c + d$ é um quadrado perfeito. Achar o mínimo valor possível de c.

$c = 25 \cdot 3^3 = 675$

14) (Argentina) Colocar números naturais distintos e maiores que 1 nas casas de maneira que sempre o número de uma casa seja múltiplo do que está na casa anterior e que a soma dos cinco números seja 517.

15) (Teste Seleção Cone Sul-2006) Sejam m e n inteiros positivos tais que o período de m/n é 4356, ou seja, ao transformarmos m/n num decimal, aparecem, em algum momento, repetidamente os algarismos 4, 3, 5, 6, 4, 3, 5, 6, ... Prove que n é divisível por 101.

16) (Argentina) Consideramos os números naturais N menores que 10000 que tem o dígito 2 no lugar das dezenas. Quantos destes números N deixam resto 5 na divisão por 12?

59

17) Mostre que qualquer número inteiro é a soma de 5 cubos.

18) (IMO-76) Determine o maior número que é produto de inteiros positivos cuja soma é 1976.

19) Dados os números naturais a, b e n tais que $a^2 + 2nb^2$ é um quadrado perfeito. Prove que o número $a^2 + nb^2$ pode ser escrito como a soma dos quadrados de dois números naturais.

20) (Índia-95) Diz-se que um inteiro n é bom se existem n inteiros positivos ou negativos não necessariamente distintos tal que a sua soma e seu produto sejam iguais a n. Por exemplo 8 é bom pois:
$8 = 4.2.1.1.1.1.(-1).(-1) = 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + (-1) + (-1)$. Mostre que os inteiros da forma $4k + 1 (k \geq 0)$ e $4k$ $(k \geq 2)$ são bons.

21) (Rússia-2008) Existem 14 números inteiros positivos de modo que se cada um é acrescido de 1 o produto destes números aumenta 2008 vezes?

22) (Argentina) Encontrar dois dígitos distintos entre si A e B tais que o número da forma BABABA seja múltiplo de AAA, de BBB e de AB, e, entretanto, BA não seja múltiplo de B.

23) (Inglaterra-2002) Determine todos os inteiros positivos m e n, onde n é ímpar, que satisfazem $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12}$.

24) (Seletiva Brasileira Cone Sul-2003) Encontre o menor inteiro positivo n tal que 3^{2003} é um divisor de $(n+1)(n+2)\ldots(3n)$.

25) (Torneio das Cidades-95) Prove que 40...09 (com uma quantidade arbitrária de zeros) não é um quadrado perfeito.

26) (Báltica-99) Determine todos os inteiros positivos n com a propriedade que raiz cúbica de n é obtida pela remoção dos seus últimos 3 dígitos.

27) (Repúblicas Tcheca e Eslovaca-99) Mostre que para todo número natural n o produto $\left(4-\frac{2}{1}\right)\left(4-\frac{2}{2}\right)\left(4-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(4-\frac{2}{n}\right)$ é um inteiro.

28) (Rússia-83) Dados os números naturais n, m, k. Sabe-se que m^n é divisível por n^m; e n^k é divisível por k^n. Prove que m^k é divisível por k^m.

29) (Canadá-71) Mostre que, para todos os inteiros n, $n^2+2n+12$ não é múltiplo de 121.

30) (Chile-97) Para cada número inteiro positivo n, forma-se o número $K_n = n^2+n+1$. Prove que nenhum dos números K_n é um quadrado perfeito.

31) (China-98) Determine todos os inteiros positivos $n \geq 3$, tais que:

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3} \mid 2^{2000}.$$

32) (Canadá-78) Determine todos os pares a e b de inteiros positivos satisfazendo $2a^2 = 3b^3$.

a = 24, b = 6   b = 6 a = 18

Digitalizado com CamScanner

33) (Pará-2007) Demonstre que, para todo inteiro positivo n, o número $\frac{n^4}{12} - \frac{n^3}{3} + \frac{5n^2}{12} - \frac{n}{6}$ é um número inteiro.

34) (OBM-2006) Considere os 2161 produtos 0×2160, 1×2159, 2×2158, ..., 2160×0. Quantos deles são múltiplos de 2160?
A) 2 B) 3 C) 12 D) 13 E) 2161

35) (OBM-2010) Qual é o menor valor positivo de $21m^2 - n^2$ para m e n inteiros positivos?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

36) (Lista de Treinamento Cone Sul-95) Mostre que se x e y são inteiros tais que $x^2 + y^2 - x$ é divisível por 2xy, então x é um quadrado perfeito.

37) (Canadá Preparação IMO-2000) É possível dividir os números naturais 1, 2, ..., n em dois grupos disjuntos, tais que os quadrados dos membros em cada grupo possuem a mesma soma se (a) n = 40000; (b) n = 40002?

38) (Lista de Treinamento Cone Sul-2007) Seja n > 1 um inteiro positivo tal que a soma dos cubos dos números n − 1, n e n + 1 é igual ao cubo de um inteiro. Prove que n é um múltiplo de 4.

39) (Lista de Treinamento Cone Sul-2002) Uma progressão aritmética infinita, formada por inteiros positivos dois a dois distintos, é tal que um de seus termos é um quadrado perfeito. Prove que tal seqüência contém infinitos termos que são quadrados perfeitos.

40) (IMO-70) Determine todos os inteiros n tais que o conjunto {n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5} pode ser particionado em dois conjuntos distintos tais que os produtos dos elementos em cada conjunto seja o mesmo.

41) (Áustria-2011) Determine todos os pares (a, b) de inteiros não-negativos tais que $a^b + b$ divide $a^{2b} + 2b$.

42) (Itália-2007) Polinômios com coeficientes inteiros, p(x) e q(x), são simulares se possuem o mesmo grau e os mesmos coeficientes (possivelmente em ordem diferente).
a) Se p(x) e q(x) são semelhantes, prove que p(2007) − q(2007) é par.
b) Existe um inteiro k > 2 tal que p(2007) − q(2007) é divisível por k sempre que p(x) e q(x) sejam simulares?

43) (Croácia-2006) Sejam k e n inteiros positivos. Prove que $(n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k + (n + 1)n^{4k-1}$ é divisível por $n^5 + 1$.

44) (Rússia-74) Entre todos os números representados como $|36^m - 5^n|$ (m e n são números naturais), determine o menor. Prove que ele é realmente o menor.

45) (Rússia-96) Existem três números naturais maiores que 1 tais que o quadrado de cada um, menor 1, é divisível por cada um dos outros?

46) (OBM-2010) Resolva o sistema $\begin{cases} x + y + z = 77 \\ xy + yz + zx + xyz = 946 \end{cases}$, sendo $x \le y \le z$ inteiros não negativos.

47) (Bélgica-2005) Prove que 2005^2 pode ser escrito em ao menos 4 maneiras distintas como a soma de dois quadrados perfeitos não nulos.

48) (Rússia-2012) Existem 3 números naturais a, b e c, todos maiores que 10^{10}, tal que seu produto é divisível por cada um destes números somado com 2012?

49) Prove que existe um cubo perfeito entre n e 3n para todo $n \ge 10$.

50) (OBM-2013) Para quantos inteiros positivos k menores que 2013, existem inteiros a, b e c, não necessariamente distintos, satisfazendo

$$a^2 + b + c = b^2 + c + a = c^2 + a + b = k\ ?$$

A) 43 B) 44 C) 87 D) 88 E) 89

51) (Torneio das Cidades-2009) Existem inteiros positivos a, b, c e d tais que $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}$?

52) (Torneio das Cidades-2008) Existem inteiros positivos a, b, c e d tais que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$ e $\frac{a}{d} + \frac{c}{b} = 2008$?

53) (Índia Regional-2012) Determine todos os números naturais x, y, z tais que $(2^x - 1)(2^y - 1) = 2^{2^z} + 1$.

54) (Polónia-94) Determine todos os pares (x, y) de números naturais tais que os números $\frac{x+1}{y}$ e $\frac{y+1}{x}$ são naturais.

55) (IMO-98) Determine todos os pares (a, b) de inteiros positivos tais que $ab^2 + b + 7$ divide $a^2b + a + b$. Já vi solução dos autores

56) (IMO-2006) Determine todos os pares de inteiros (x, y) tais que:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

(0,2), (4,23) Sem prova de unicidade

57) (Balcânica Jr.-2013) Determine todos os pares (a, b) de inteiros positivos para os quais os números $\frac{a^3b-1}{a+1}$ e $\frac{b^3a+1}{b-1}$ são inteiros positivos.

58) (Lista de Treinamento Cone Sul-2007) Existe algum natural n para o qual existem n – 1 progressões aritméticas com razões 2, 3, ..., n tais que qualquer natural está em pelo menos uma das progressões?

3.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) (Hungria-1908) Dados dois inteiros ímpares a e b. Prove que $a^3 - b^3$ é divisível por 2^n se e somente se a – b é divisível por 2^n.

2) (OBM-99) Contando-se os alunos de uma classe de 4 em 4 sobram 2 e contando-se de 5 em 5 sobra 1. Sabendo-se que 15 alunos são meninas e que nesta classe o número de meninas é maior que o número de meninos, o número de meninos nesta classe é igual a :
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

3) (Santa Catarina-99) Demonstrar que nenhum inteiro da seqüência: 11, 111, 1111, 11111, ... é um quadrado perfeito.

4) (Irlanda-98) Mostre que nenhum inteiro da forma xyxy em base 10 (onde x e y são dígitos) podem ser o cubo de um inteiro.

5) (AIME-2007) Quantos quadrados perfeitos menores que 10^6 são divisíveis por 24?

6) (Argentina) Prove que $7 \mid a^2 + b^2$ somente quando $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

7) (Romênia Distrital-2001) Um inteiro positivo é chamado de bom se pode ser escrito como a soma de dois inteiros positivos consecutivos e como a soma de três inteiros positivos consecutivos. Prove que:
a) 2001 é bom, mas 3001 não é bom.

b) o produto de dois números bons é um número bom.

c) se o produto de dois números é bom, então pelo menos um dos números é bom.

8) Dada uma equação do segundo grau, com coeficientes inteiros, mostre que o seu discriminante não pode ser igual a 23.

9) (OBM-98) Encontre uma maneira de se escrever os algarismos de 1 a 9 em seqüência, de forma que os números determinados por quaisquer dois algarismos consecutivos sejam divisíveis ou por 7 ou por 13.

10) (Rússia-92) Existe algum inteiro positivo de 4 dígitos tal que não é possível fazer nenhuma troca de qualquer conjunto de 3 dos seus dígitos de modo a formar um número que é múltiplo de 1992.

11) (Harvard-MIT Tournament-2003) Para quantos inteiros $1 \leq k \leq 2013$ o representação decimal de k^k termina em 1?

12) Se 31^{1995} divide $a^2 + b^2$, prove que 31^{1996} divide ab.

13) Note que se ao produto de dois membros distintos de $\{1, 16, 27\}$ é acrescido 9, o resultado é o quadrado perfeito de um inteiro. Determine o único inteiro positivo <u>n</u> para o qual $n + 9$, $16n + 9$ e $27n + 9$ são também quadrados perfeitos.

14) (Índia Regional-2009) Mostre que $3^{2008} + 4^{2009}$ pode ser escrito como o produto de dois inteiros positivos cada um deles maior que 2009^{182}.

15) Se n^2 é o quadrado de um inteiro que não divisível nem por 2 e nem por 3, mostre que o número $n^2 + 23$ é divisível por 24.

16) (Manhattan-2003) Prove que o número $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ é um inteiro $\frac{m(m+1)(m+1)}{6}$

para todos os valores inteiros de m.

17) (OBM-2005) Determine todos os pares de inteiros $(x; y)$ tais que:

$$9xy - x^2 - 8y^2 = 2005.$$

18) (OBM-2005) Seja a um número inteiro positivo tal que a é múltiplo de 5, $a + 1$ é múltiplo de 7, $a + 2$ é múltiplo de 9 e $a + 3$ é múltiplo de 11. Determine o menor valor que a pode assumir.

19) (OBM-2002) Determine o maior natural k para o qual existe um inteiro n tal que 3^k divide $n^3 - 3n^2 + 22$.

20) (OBM-2001) Mostre que não existem dois números inteiros a e b tais que $(a + b)(a^2 + b^2) = 2001$.

21) (OBM-2006) Encontre todos os pares ordenados $(x; y)$ de inteiros tais que $x^3 - y^3 = 3(x^2 - y^2)$.

22) (Torneio das Cidades-86) Pode 1986 ser representado como a soma de 6 quadrados perfeitos ímpares?

23) (Espanha-85) Seja n um número natural. Prove que a expressão $(n + 1)(n + 2)\ldots(2n - 1)(2n)$ é divisível por 2^n.

indução

24) (St. Petersburg-98) Mostre que para todo número natural n, entre n^2 e $(n + 1)^2$ é possível escolher 3 números naturais distintos a, b, c tais que $a^2 + b^2$ é divisível por c.

25) (Suécia-91) Determine todos os inteiros positivos m e n tais que:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}.$$

26) (Wisconsin-2003) Suponha que $a^2 + b^2 + c^2$ é um múltiplo de 16, onde a, b e c são inteiros. Mostre que $a^3 + b^3 + c^3$ é um múltiplo de 64.

27) (Wisconsin-97) Suponha que a e b são inteiros tais que $a + 2b$ e $b + 2a$ são quadrados. Prove que a e b são múltiplos de 3.

28) (Vietnam-80) Determine todos os pares (x, y) de inteiros positivos tais que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1980$.

29) (Teste de Seleção Cone Sul-2010) Encontre todos os inteiros positivos n tais que $n + 2009$ divide $n^2 + 2009$ e $n + 2010$ divide $n^2 + 2010$.

30) (Lista de Treinamento Cone Sul-2004) Determine todos os pares de inteiros positivos x, y satisfazendo a equação $(x + y)^2 - 2(xy)^2 = 1$.

31) (Lista de Treinamento Cone Sul-2005) Ache todas as soluções inteiras da equação $(m^2 + n)(m + n^2) = (m + n)^3$.

32) (Lista de Treinamento Cone Sul-2007) Sejam x, y inteiros. Prove que $3x^2 + 4y^2$ e $4x^2 + 3y^2$ não podem ser ambos quadrados perfeitos.

33) (Rússia-62) São dados 3 inteiros distintos x, y, z. Prove que $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ é divisível por $5(x - y)(y - z)(z - x)$.

34) (Tailândia-2006) Determine todos os inteiros n tais que $n^2 + 59n + 881$ é um quadrado perfeito.

35) (St. Petersburg-96) Determine todos os inteiros positivos n tais que $3^{n-1} + 5^{n-1}$ divide $3^n + 5^n$.

36) (Polônia-94) Dados os inteiros positivos <u>a</u>, <u>b</u>, <u>c</u> tais que a^3 é divisível por b, b^3 é divisível por c, c^3 é divisível por a.
Prove que $(a + b + c)^{13}$ é divisível por abc.

37) (Rússia-95) Existem 10 inteiros distintos tais que a soma de todos 9 deles é um quadrado perfeito.

38) (Rússia-77) Chamamos de "fino" o número de 2n dígitos que é um quadrado perfeito e que os dois números representados pelos seus primeiros n dígitos (primeiro dígito diferente de zero) e últimos n dígitos (primeiro dígito pode ser zero mas todos os dígitos não podem ser nulos) são também quadrados perfeitos.
a) Determine todos os números "finos" de dois e quatro algarismos.
b) Existe algum número "fino" de seis algarismos?
c) Prove que existe um número "fino" de vinte dígitos.

39) (Rioplatense-2000) Existe um número natural n tal que a soma dos dígitos de n seja divisível por 23 e a soma dos dígitos de $(n + 1)$ também seja divisível por 23? Se a resposta é sim, determine o menor número n. Se é não, explicar por que.

40) (Vietnã-82) Determine todas as soluções inteiras positivas de $2^a + 2^b + 2^c = 2336$. Bases numéricas

mod

41) (Olimpíada Provincial-97) Achar todos os quadrados perfeitos que tem o primeiro dígito (da esquerda) igual a 1 e todos os restantes dígitos iguais a 4.

42) (Irlanda-2004) a) Para quais inteiros positivos n tem-se que 2n divide a soma dos primeiros n inteiros positivos?
b) Determine, com prova, quais inteiros positivos n que possuem a propriedade que 2n + 1 divide a soma dos primeiros n inteiros positivos.

43) (Finlândia-2012) Prove que para todo inteiro $k \geq 2$, o número $k^{k-1} - 1$ é divisível por $(k-1)^2$.

44) (Eslovênia-2010) Sejam a, b e c inteiros positivos. Prove que $a^2 + b^2 + c^2$ é divisível por 4 se e somente a, b e c são pares.

45) (Turquia-2013) Para quantos inteiros $0 \leq n < 2013$ tem-se que $n^4 + 2n^3 - 20n^2 + 2n - 21$ é divisível por 2013?

46) (África do Sul-2009) Determine o menor inteiro $n > 1$ com a propriedade que $n^2(n-1)$ é divisível por 2009.

47) (AIME-2010) Qual o resto quando $9 \times 99 \times 999 \times \ldots \times \underbrace{999\ldots99}_{999}$ é divisível por 1000? Não é 199

48) (IMO-88 Longlist) Se <u>r</u> é o resto quando cada um dos números 1059, 1417 e 2312 é dividido por <u>d</u>, onde <u>d</u> é um inteiro maior que 1, determine o valor de $d - r$.

49) (Provincial-97) Achar todos os inteiros <u>n</u> tais que $n + 19$ e $n + 97$ são ambos potências de 3.

50) (AIME-2008) Existe apenas um único par de inteiros positivos (x, y) que satisfazem a equação $x^2 + 84x + 2008 = y^2$. Determine o valor de $x + y$.
[illegible]

51) (Hong Kong-91) Seja a_n um número de 3^n dígitos iguais a 1: $a_n = 111\ldots11$. Mostre que a_n é divisível por 3^n.

52) (OBM-2009) Determine o maior inteiro n menor que 10000 tal que $2^n + n$ seja divisível por 5. 9998

53) (Torneio das Cidades-2009) Determine todos os inteiros positivos a e b tais que $(a + b^2)(a^2 + b) = 2^m$, para algum inteiro positivo m.

54) (Torneio das Cidades-2008) Determine todos os inteiros positivos n tais que $(n+1)!$ é divisível por $1! + 2! + \ldots + n!$.

55) (Estônia-2010) Sejam a, b e c inteiros positivos tais que a.b é divisível por 2c, b.c é divisível por 3a e c.a é divisível por 5b. Determine o menor valor possível de a.b.c.

NÚMEROS PRIMOS

4.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

Tópico de destacada relevância dentro da teoria dos números, a quantidade de questões de números primos em provas de olimpíadas de matemática é bastante elevada. Provavelmente é a área de matemática que concentra a maior quantidade de problemas em aberto, ou seja, problemas que ainda não foram resolvidos, tais como a infinitude dos primos gêmeos, a conjectura de Goldbach e a infinitude dos primos de Mersenne.

É mais comum encontrar questões de números primos em provas de olimpíadas de matemática de ensino médio, entretanto pode-se também encontrar em provas de ensino fundamental, sobretudo envolvendo fatoração canônica.

4.2. RESUMO TEÓRICO

Definição: Seja $p > 1$ um inteiro positivo. Diz-se que p̲ é um número primo (ou apenas primo) se e somente se p̲ apresenta como seus únicos divisores 1 e p. Se um inteiro positivo n̲ maior que 1 não é primo então chama-se n̲ de composto.

Propriedades:
(1) Se p̲ é um primo tal que $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.
(2) Se p̲ é um primo tal que $p \mid a_1a_2 \ldots a_n$, então existe um índice k̲, com $1 \le k \le n$, tal que $p \mid a_k$.
(3) Se os inteiros $p, q_1, q_2, \ldots, q_n$ são todos primos e se $p \mid q_1q_2 \ldots q_n$, então existe um índice k̲, com $1 \le k \le n$, tal que $p = a_k$.

Postulado de Bertrand: "Para todo inteiro positivo n̲, existe um primo p̲ tal que $n \le p \le 2n$."

Teorema Fundamental da Aritmética: Todo número inteiro maior que 1 possui um divisor primo.

Teorema: "Todo inteiro positivo $n > 1$ é igual a um produto de fatores primos."

Teorema: "A menos da ordem dos fatores, a decomposição de um inteiro positivo $n > 1$ como produto de fatores primos é única."
Demonstração:

Suponhamos que n admita duas decomposições como produto de fatores primos:

$N = p_1p_2 \dots p_r = q_1q_2 \dots q_s$ $(r \le s)$ onde p_i e q_j são inteiros primos e

$p_1 \le p_2 \le \dots \le p_r$, $q_1 \le q_2 \le \dots \le q_s$

Como $p_1 \mid q_1q_2 \dots q_s$ então existe um k $(1 \le k \le s)$ tal que $p_1 = q_k$.

Da mesma forma $p_2 = q_{k_2}$, $p_3 = q_{k_3}$, ... e assim por diante.

Se $r < s$, depois de r cancelamentos temos: $1 = q_{r+1} \cdot q_{r+2} \dots q_s$, o que é um absurdo, pois $q_i > 1$.

Assim $r = s$ e cada p_i é igual a um q_k, ou seja, as decomposições são idênticas, a menos da ordem dos fatores.

Deste modo, qualquer inteiro $n > 1$ admite somente uma representação da forma: $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ onde, para $i = 1, 2, \dots, r$, cada k_i é um inteiro positivo e cada p_i é um primo, com $p_1 < p_2 < \dots < p_r$, denominada decomposição canônica do inteiro positivo n.

Teorema (de Euclides): Há um número infinito de primos.

Demonstração:

Suponhamos, por hipótese, que exista um primo p_n maior que todos os outros primos:

$p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ..., e analisemos o número inteiro positivo P tal que: $P = p_1p_2p_3 \dots p_n + 1$

Como $P > 1$, do "Teorema Fundamental da Aritmética" pode-se concluir que P possui pelo menos um divisor primo p. Contudo, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ são os únicos primos existentes, implicando que p deve, necessariamente, ser igual a um desses n primos. Desta forma: $p \mid P$ e $p \mid p_1p_2p_3 \dots p_n$ implicando que: $p \mid P - p_1p_2p_3 \dots p_n$ ou $p \mid 1$

O que é um absurdo, pois $p > 1$ e o único divisor positivo de 1 é o próprio 1. Portanto, qualquer que seja o primo P_n, sempre existe um primo maior que P_n, isto é, o conjunto $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ dos primos é infinito.

Teorema: Se um inteiro positivo a > 1 é composto, então a possui um divisor primo $p \le \sqrt{a}$.

Demonstração:

Se o inteiro positivo $a > 1$ é composto, então existem inteiros b e c, onde $1 < b < a$ e $1 < c < a$, tais que $a = bc$.

Supondo que $b \le c$, temos: $b^2 \le bc = a \Rightarrow b \le \sqrt{a}$

Sendo $b > 1$, o "Teorema Fundamental da Aritmética" afirma que b tem pelo menos um divisor primo p, de modo que $p \le b \le \sqrt{a}$. Como $p \mid b$ e $b \mid a$, implica que $p \mid a$, isto é, o inteiro primo $p \le \sqrt{a}$ é um divisor de a.

Seqüências de Inteiros Consecutivos Compostos

Teorema: Para qualquer valor do inteiro positivo n, existem seqüências de n inteiros positivos consecutivos e compostos.

Demonstração:

Analisando a seguinte seqüência:

$(n + 1)! + 2,\ (n + 1)! + 3,\ (n + 1)! + 4, \ldots,\ (n + 1)! + (n + 1)$

vemos que os todos seus n termos são inteiros positivos consecutivos, e também cada um deles é um número composto, pois $(n + 1)! + j$ sempre é divisível por j se $2 \leq j \leq n + 1$.

4.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) (Alberta High School Mathematics Competition-97) (a) Suponha que p é um primo ímpar e a e b são inteiros positivos tais que p^4 divide $a^2 + b^2$ e p^4 também divide $a(a + b)^2$. Prove que p^4 também divide $a(a + b)$.

(b) Suponha que p é um primo ímpar e a e b são inteiros positivos tais que p^5 divide $a^2 + b^2$ e p^5 também divide $a(a + b)^2$. Mostre através de um exemplo que p^5 não necessariamente divide $a(a + b)$.

Solução:

(a) Notemos que $a(a + b)^2 = a(a^2 + b^2) + 2a^2b$. Como p^4 divide $a(a + b)^2$ e $a^2 + b^2$, então também divide $2a^2b$

Desde que p é um primo ímpar, então p^4 divide a^2b.

Suponhamos que p^2 não divide a, então as duas únicas potências de p que podem dividir a^2 são p ou p^2.

Como p^4 divide a^2b então p^2 divide b, implicando que p^4 divide b^2.

Entretanto isto é uma contradição, pois p^4 divide $a^2 + b^2$ e b^2, mas não divide a^2.

Deste modo, p^2 deve dividir a, implicando que p^4 divide a^2.

Como p^4 divide $a^2 + b^2$ e a^2, então p^4 divide b^2.

Como p^4 divide a^2 e b^2, então p^2 divide a e b, implicando também dividir $a + b$

Desde que p^2 divide $a + b$ e a, então p^4 divide $a(a + b)$

(b) Da mesma forma que o item anterior, se p^5 divide $a^2 + b^2$, p^2 divide a e b, mas p^3 não divide $a + b$.

Fazendo $a = p^2x$ e $b = p^2y$, então p divide $x^2 + y^2$ e p não divide $x + y$.

Fazendo $x = 2$, $y = 1$ e $p = 5$, temos $a = 50$ e $b = 25$.

2) (Ceará-99) Se p e $8p^2 + 1$ são números primos positivos, prove que $p = 3$.

Solução:

Pelo exemplo anterior, sabemos que o quadrado de todo número primo maior que 3 deixa resto 1 quando dividido por 12.
Desta forma:
$p^2 = 12k + 1 \Rightarrow 8p^2 + 1 = 8(12k + 1) + 1 = 96k + 9 = 3(32k + 3)$.
Portanto, se $p > 3$ então $8p^2 + 1$ é divisível por 3 e assim não pode ser primo.
As únicas possibilidades são portanto $p = 2$ ou $p = 3$:
i) $p = 2 \Rightarrow 8p^2 + 1 = 8.4 + 1 = 33 = 3.11$ que não é primo
ii) $p = 3 \Rightarrow 8p^2 + 1 = 8.9 + 1 = 73$ que é primo

3) (Polônia-99) Prove que entre os números da forma $50^n + (50n + 1)^{50}$, onde n é um número natural, existem infinitos números compostos.
Solução:
$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 - y^4) \Rightarrow x + y \mid x^5 + y^5$
Faça $n = 5k$, ou seja, n múltiplo de 5.
Assim:
$$50^n + (50n + 1)^{50} = (50^k)^5 + [(250k + 1)^{10}]^5 = [50k + (250k + 1)^{10}].X,$$
onde X é um inteiro qualquer, implicando que $50^n + (50n + 1)^{50}$ é composto quando n é múltiplo de 5, ou seja, para infinitos valores de n.

4) (OBM-2012) Os dois menores números primos da forma $n^2 + 5$ são $6^2 + 5 = 41$ e $12^2 + 5 = 149$. Qual é o terceiro menor primo dessa forma?
Solução:
Primeiro note que se n é ímpar então $n^2 + 5$ é par e maior do que 2, ou seja, não é primo. Logo n é par. Além disso, se $n = 3k \pm 1$, $n^2 + 5 = 9k^2 \pm 6k + 6$ é múltiplo de 3 e maior do que 3, ou seja, não é primo. Logo n é múltiplo de 3, e portanto é múltiplo de 6. Assim, os próximos candidatos a primo são $18^2 + 5 = 18^2 - 3^2 + 14 = (18 - 3)(18 + 3) + 14 = 15\cdot21 + 14$ e $24^2 + 5 = 24^2 - 3^2 + 14 = (24 - 3)(24 + 3) + 14 = 21\cdot27 + 14$, mas ambos são múltiplos de 7. O número $30^2 + 5$ é múltiplo de 5. O próximo número a ser testado é $36^2 + 5 = 1301$. Verifica-se que esse número é primo (basta verificar todos os primos até 36, ou seja, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31; vendo módulo cada um desses primos, obtemos 5, 5, 1, $1^2 + 5 = 6$, $3^2 + 5 = 14$, $(-3)^2 + 5 = 14$, $2^2 + 5 = 9$, $(-2)^2 + 5 = 9$, $(-10)^2 + 5 = 105$, $7^2 + 5 = 54$ e $5^2 + 5 = 30$).

5) (Mongólia-2009) Sejam a, b, c, d, e e f números inteiros positivos satisfazendo a relação $ab + ac + bc = de + df + ef$, e seja o número $N = a + b + c + d + e + f$. Prove que se $N \mid (abc + def)$ então N é um inteiro composto.
Solução:
Observe que $(x + a)(x + b)(x + c) - (x - d)(x - e)(x - f) =$
$= (a + b + c + d + e + f)x^2 + abc + def$

Fazendo $x = d$ obtém-se: $(d + a)(d + b)(d + c) = Nd^2 + abc + def$
Desta forma, como $N \mid abc + def$ segue que $N \mid (d + a)(d + b)(d + c)$
Seja p um número primo tal que $p \mid N$. Assim, p deve dividir ao menos um dos números $d + a$ ou $d + b$ ou $d + c$.
Desta maneira tem-se que

$$p \leq \max(d + a, d + b, d + c) < a + b + c + d + e + f = N$$

Portanto, p é um divisor de N menor que N, fazendo com que N seja um número composto.

6) (Eslovênia-2010) Determine todos os números primos p, q e r tais que $15p + 7pq + qr = pqr$.

Solução:

$15p + 7pq + qr = pqr \Rightarrow p(qr - 7q - 15) = qr \Rightarrow p = q$ ou $p = r$

i) $p = q$: $15p + 7p^2 + pr = p^2r \Rightarrow 15 + 7p + r = pr \Rightarrow (p - 1)(r - 7) = 22$

Se p e r forem ambos ímpares tem $p - 1$ e $r - 7$ pares, fazendo com que $(p - 1)(r - 7)$ seja divisível por 4, que é uma contradição. Assim, conclui-se que um dos fatores é par e ou outro é ímpar. A única possibilidade é

$p - 1 = 1$ e $r - 7 = 22 \Rightarrow p = 2$ e $r = 29 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow$ solução $(2, 2, 29)$

ii) $p = r$: $15p + 7pq + pq = p^2q \Rightarrow 15 + 8q = pq \Rightarrow q(p - 8) = 15 \Rightarrow$

$q \mid 15 \Rightarrow q = 3$ ou $q = 5$

Substituindo na equação obtém-se as soluções $(13, 3, 13)$ e $(11, 5, 11)$

Logo, as soluções são $(2, 2, 29)$, $(13, 3, 13)$ e $(11, 5, 11)$.

7) (Espanha-92) Seja a seqüência 3, 7, 11, 15, ... (progressão aritmética). Provar que em tal seqüência existem infinitos números primos.

Solução:

PA: $\{3, 7, 11, 15, \ldots\} \Rightarrow a_n = 3 + 4(n - 1) \Rightarrow a_n = 4n - 1$

Suponhamos, por absurdo, que exista um número finito de primos da forma $p_i = 4n - 1$.

Seja o número $N = 4p_1p_2p_3\ldots p_n - 1$, onde p_i são todos os primos da forma $4n - 1$.

Notemos que N também é da forma $4n - 1$ e é ímpar.

Fatorando em fatores primos N, temos que os primos que dividem N devem ser da forma $4n - 1$ e $4n + 1$.

Como $(4n_1 - 1)(4n_2 - 1) = 4(4n_1n_2 - n_1 - n_2) + 1 = 4k + 1$

$(4n_1 - 1)(4n_2 + 1) = 4(4n_1n_2 + n_1 - n_2) - 1 = 4k - 1$

$(4n_1 + 1)(4n_2 + 1) = 4(4n_1n_2 + n_1 + n_2) + 1 = 4k + 1$

Como $\text{mdc}(N, p_i) = 1$, então cada p_i não divide N

Entretanto, na fatoração de N temos que ter fatores primos da forma $4n - 1$, pois somente multiplicando um termo da forma $4n_1 - 1$ com outro da forma $4n_2 + 1$ conseguimos um número da forma $4k - 1$, que é a forma de N.

Assim, este fator primo de N da forma $4n-1$ deve ser distinto dos outros primos p_i da forma $4n-1$, que é um absurdo.

8) (IMO-79) Sejam $\underline{m}$ e $\underline{n}$ inteiros positivos tais que:

$$\frac{m}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}.$$

Prove que $\underline{m}$ é divisível por 1979.

Solução:

Como todos os termos negativos possuem denominadores pares, podemos escrever estes termos da seguinte forma:

$-\dfrac{1}{2k}=\dfrac{1}{2k}-\dfrac{1}{k}$, onde $1\le k\le 659$. Assim, podemos escrever:

$$\frac{m}{n}=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right)$$

$$\frac{m}{n}=1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{7}+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1318}-\frac{1}{659}\right)+\frac{1}{1319}\Rightarrow$$

$$\frac{m}{n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1319}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{659}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\frac{1}{662}+\ldots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\Rightarrow$$

$$\frac{m}{n}=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)$$

Desde que $\dfrac{1}{660+k}+\dfrac{1}{1319-k}=\dfrac{1319-k+660+k}{(660+k)(1319-k)}=\dfrac{1979}{(660+k)(1319-k)}$,

podemos afirmar que:

$$\frac{m}{n}=\frac{1979}{660.1319}+\frac{1979}{661.1318}+\ldots+\frac{1979}{989.990}=1979.\frac{p}{q}$$

onde q é o produto de todos os inteiros desde 660 até 1319, cada um deles primo em relação a 1979 (que é primo).

Desta forma: $m.q = 1979.p.n$, e como 1979 não divide q, então 1979 divide m.

4.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) (OBM-2001) Quantos números de dois algarismos não são primos nem múltiplos de 2, 3 ou 5?

A) 1 B) 3 C) 2 D) 4 E) mais de 4

2) (OBM-2001) No conjunto {101, 1 001, 10 001, ..., 1 000 000 000 001} cada elemento é um número formado pelo algarismo 1 nas extremidades e por algarismos 0 entre eles. Alguns desses elementos são números primos e outros são compostos. Sobre a quantidade de números compostos podemos afirmar que:

A) é igual 11 B) é igual a 4
C) é menor do que 3 D) é maior do que 4 e menor do que 11
E) é 3

3) Dado um número primo cujos dígitos são todos iguais a 1 (em expansão decimal), prove que o número de dígitos deve ser um número primo.

4) (Canadá-73) Prove que se p e $p + 2$ são ambos números inteiros primos maiores que 3, então 6 é um fator de $p + 1$.

5) (International Mathematical Talent Search) Seja n um inteiro positivo maior ou igual a 5. Mostre que no máximo 8 membros do conjunto $\{n + 1, n + 2, \dots , n + 30\}$ podem ser primos.

6) (Descartes-99) Se p_1 e p_2 são números primos distintos e $A = (p_1p_2 + 1)^4 - 1$, mostre que A possui ao menos 4 divisores primos distintos.

7) (Polônia-2001) Prove que para todos os inteiros $n \geq 2$ e para todos os números primos p o número $n^{p^p} + p^p$ é composto.

8) (Alemanha-97) Determine todos os primos p para os quais o sistema

$$\begin{cases} p+1=2x^2 \\ p^2+1=2y^2 \end{cases}$$

possui uma solução nos inteiros x, y.

9) Determine todas as seqüências $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ de primos distintos tais que $\left(1+\dfrac{1}{p_1}\right)\left(1+\dfrac{1}{p_2}\right)\dots\left(1+\dfrac{1}{p_n}\right)$ é um inteiro.

10) (Itália-2006) Determine todos os valores de m, n e p tais que $p^n + 144 = m^2$, onde m e n são inteiros positivos e p é um número primo.

IME

11) (Iberoamericana-93) Um número natural é palíndromo se ao escrevê-lo em notação decimal pode-se ler de igual forma da esquerda para a direita como da direita para a esquerda. Por exemplo: 8, 23432,

6446. Sejam $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots$ todos os números palíndromos. Para cada i seja $y_i = x_{i+1} - x_i$. Quantos números primos distintos têm o conjunto $\{y_1, y_2, y_3 \ldots\}$?.

12) (IMO-70) Determine todos os inteiros n tais que o conjunto $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ pode ser particionado em dois subconjuntos tal que o produto dos números de cada subconjunto é igual.

13) (Rio de Janeiro-2000) De quantas maneiras se pode escrever 2000 como a diferença de dois quadrados perfeitos (isto é, quadrados de números inteiros)?

14) Determine todos os inteiros n tais que $n^2 - 11n + 63$ é um quadrado perfeito.

15) (Auckland-2001) Quantas soluções inteiras positivas possui a equação $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2001}$. 110 Não [illegible]

16) (Rússia-95) Prove que é impossível colocar 1995 diferentes inteiros positivos ao longo de um círculo de modo que para todos números adjacentes, a razão entre o maior e o menor é igual a um número primo.

17) (Báltica-2008) Quantos pares (m, n) de inteiros positivos existem, com $m < n$, satisfazendo a equação $\frac{3}{2008} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$?

18) (Índia-96) Dado um inteiro positivo n, mostre que existem inteiros positivos x e y distintos tais que $x + j$ divide $y + j$ para $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

19) (Polónia-2007) Sejam a, b, c e d inteiros positivos e $ad = b^2 + bc + c^2$. Prove que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ é um número composto.

20) (Espanha-87) Seja C o conjunto dos números naturais $C = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots\}$. Dizemos que um número é "primo relativo a C" se ele não pode ser escrito como um produto de números menores de C.

a) Mostre que 4389 é um membro de C que não pode ser representado em ao menos duas maneiras distintas como um produto de dois números primos relativos a C.

b) Determine outro membro de C com a mesma propriedade.

21) (Pacífico Asiático-95) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ uma seqüência de inteiros com valores entre 2 e 1995 tal que:

(i) todos dois a_i's são primos relativos;

(ii) cada a_i é um primo ou um produto de diferentes primos.
Determine o menor valor possível de n o qual é possível construir uma seqüência de n termos que não contenha um número primo.

22) (Suíça-2010) Sejam m e n números naturais tais que $m + n + 1$ é primo e divide $2(m^2 + n^2) - 1$. Prove que $m = n$.

23) (Austrália-81) Mostre que cada um dos números 1066 até 1981 é um fator de $(1.2.3.....915) + (2.3.4.....916) + \ldots + (1066.1067.1068.....1980)$.

24) (Austrália-82) A seqüência $p_1, p_2, p_3, \ldots$ é definida por $p_1 = 2$ e p_n = o maior divisor primo de $p_1p_2\ldots p_{n-1} + 1$, $n \geq 2$. Prove que 5 não é um membro desta seqüência.

25) (OBM-2010) Determine todos os números primos m e n tais que $0 < m < n$ e os três números

$$2m + n,\ m + 2n \text{ e } m + n - 18$$

sejam também primos.

26) (Hong Kong-97) Iniciando de um certo inteiro positivo, é permitido fazer apenas uma operação: o dígito das unidades é separado e multiplicado por 4, e então este valor é somado ao restante do número. Por exemplo, o número 1997 é transformado para $7.4 + 199 = 227$. A operação é feita repetidamente. Prove que se a seqüência de números obtida contem 1001, então nenhum dos números na seqüência pode ser um número primo.

27) (OBM-2002) Mostre que existe um conjunto A formado por inteiros positivos tendo as seguintes propriedades:
a) A tem 2002 elementos.
b) A soma de qualquer quantidade de elementos distintos de A (pelo menos um) nunca é uma potência perfeita.
Obs: Uma potência perfeita é um número da forma a^b, onde a e b são inteiros positivos e $b \geq 2$.

28) (Lista de Treinamento Cone Sul-99) Prove que, ao expressarmos a soma $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{109}+\dfrac{1}{110}$ como uma fração irredutível, o numerador é um múltiplo de 11.

29) (Índia-2012) Sejam $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ e $q_1 < q_2 < q_3 < q_4$ dois conjuntos de números primos, tais que $p_4 - p_1 = 8$ e $q_4 - q_1 = 8$. Suponha que $p_1 > 5$ e $q_1 > 5$. Prove que 20 divide $p_1 - q_1$.

30) (Irã-2005) Sejam n, $p > 1$ inteiros positivos e p um primo. Sabe-se que $n \mid (p - 1)$ e $p \mid (n^3 - 1)$. Prove que $4p - 3$ é um quadrado perfeito.

31) (OBM-2005) Determine o menor valor possível do maior termo de uma progressão aritmética com todos os seus sete termos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 primos positivos distintos.

32) (Itália-2001) Dada a equação $x^{2001} = y^x$, determine todos os pares de soluções (x, y) tais que x seja um número primo e y um inteiro positivo. Determine todos os pares de soluções (x, y) tais que x e y são inteiros positivos.

+/− Preguiça na hora de [illegible] as contas

33) (Grécia-2000) Determine o número primo p para o qual o número $1 + p + p^2 + p^3 + p^4$ é um quadrado perfeito.

34) (Cone Sul-99) Achar o menor inteiro positivo n tal que as 73 frações $\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \ldots\ldots, \frac{91}{n+93}$ sejam todas irredutíveis.

35) (OBM-2008) Mostre que se p, q são inteiros positivos primos tais que $r = \frac{p^2 + q^2}{p + q}$ é inteiro, então r é primo.

36) (Coréia-95) Para um dado inteiro positivo m, determine todos os ternos (n, x, y) de inteiros positivos tais que m, n são primos relativos e $(x^2 + y^2)^m = (xy)^n$, onde n, x, y podem ser representados como função de m.

37) (Iberoamericana-99) Seja B um inteiro maior que 10 tal que cada um dos seus dígitos pertence ao conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$. Demonstre que B tem um fator primo maior ou igual a 11.

38) (IMO-89) Prove que, para cada inteiro positivo n, existem n inteiros positivos consecutivos nenhum dos quais é uma potência inteira de um número primo.

39) (Índia-2002) Mostre que existe um conjunto de 2002 inteiros positivos consecutivos contendo exatamente 150 números primos. (Você pode usar o fato que existem 168 primos menores que 1000)

X entendi!

40) (IMO-96 Shortlist) Quatro inteiros são marcados em um círculo. Em cada passo nós simultaneamente trocamos cada número pela diferença entre este número e o próximo número no círculo em uma dada direção (por exemplo, os números a, b, c, d são trocados por $a - b$, $b - c$, $c - d$, $d - a$). É possível que depois de 1996 passos tenhamos números a, b, c, d tais que os números $|bc - ad|$, $|ac - bd|$, $|ab - cd|$ sejam primos?

41) (Irlanda-2001) Mostre que se um número primo ímpar p pode ser colocado sob a forma $x^5 - y^5$ para alguns inteiros x e y então $\sqrt{\dfrac{4p+1}{5}} = \dfrac{v^2+1}{2}$ para algum inteiro ímpar v.

42) (Bulgária-81) Prove que se $\underline{n}$ é um inteiro positivo, para o qual o número $1 + 2^n + 4^n$ é primo, então $\underline{n}$ é uma potência de 3.

43) (IMO-92 shortlist) Prove que $N = \dfrac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$ é um número composto.

44) (Áustria-Polônia-93) Os números de Fibonacci são definidos por $F_0 = F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 0$. Sejam A e B números naturais tais que A^{19} divide B^{93} e também B^{19} divide A^{93}. Prove que para todos os números naturais $n \geq 1$ o número $(A^4 + B^8)^{F_{n+1}}$ é divisível por $(AB)^{F_n}$.

45) (IMO-92) Determine todos os ternos de inteiros (p, q, r) tais que $1 < p < q < r$ e $(p-1)(q-1)(r-1)$ é um divisor de $(pqr - 1)$.

46) (Cone Sul-2004) Maxi escolheu 3 dígitos e, fazendo todas as permutações possíveis, obteve 6 números distintos, cada um com 3 dígitos. Se exatamente um dos números que Maxi obteve é um quadrado perfeito e exatamente três são primos, encontrar os 3 dígitos que Maxi escolheu. Dê todas as possibilidades para os 3 dígitos.

4.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) Mostrar que, se $n > 3$, os inteiros n, $n + 2$ e $n + 4$ não podem ser todos primos.

2) Resolver a equação $y^3 - x^3 = 91$, para $\underline{x}$ e $\underline{y}$ inteiros.

$x = -3 \quad y = 4$
$x = -4 \quad y = 3$

3) (Pará-2000) Prove que o quadrado de todo número primo maior que 3 deixa resto 1 quando dividido por 12.

4) (Alemanha-2006) Determine todos os inteiros positivos n para os quais $z_n = \underbrace{1010...101}_{2n+1 \text{ dígitos}}$ é um número primo.

5) (British Columbia Colleges-2000) Determine o menor inteiro positivo k tal que $(k + 1) + (k + 2) + ... + (k + 19)$ seja um quadrado perfeito.
$k=9$

6) (Índia-98) Sejam n um inteiro positivo e $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ n números primos todos maiores que 5 e tais que 6 divide $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + ... + p_n^2$. Prove que 6 divide n.

7) (ProMath Competition) Considere a equação quadrática $x^2 + ax + b + 1 = 0$. Mostre que se as raízes desta equação são inteiros não nulos, então $a^2 + b^2$ é um número composto.

8) (Hong Kong-2000) Determine todos os primos da forma $n^n + 1$, que são menores que 10^{19} (n é um inteiro positivo).

9) Mostrar que todo inteiro da forma $n^4 + 4$, com $n > 1$, é composto.

10) (Rússia-64) Determine todos os números naturais n tal que $n!$ não é divisível por n^2.

11) (Báltica-96) Sejam a, b, c, d inteiros positivos tais que $ab = cd$. Prove que $a + b + c + d$ não é primo.

12) (Brasil Preparação Cone Sul-2000) Seja p um primo, $p > 3$. Provar que se existe um inteiro a tal que p divide $(a^2 - a + 3)$, então existe um inteiro b tal que p divide $b^2 - b + 25$.

13) (Estônia-2000) Determine todos os restos possíveis da divisão do quadrado de um número primo com 120 por 120.

14) (Eslovênia-2010) Sejam a, b e c dígitos não nulos. Seja p um número primo que divide os números de 3 dígitos $\overline{abc}$ e $\overline{cba}$. Mostre que p divide ao menos um dos números $a + b + c$, $a - b + c$ ou $a - c$.

15) (Hungria-1931) Seja p um primo maior que 2. Prove que $\frac{2}{p}$ pode expresso em somente uma forma como $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ onde x e y são inteiros positivos com $x > y$.

16) (OBM-95) Quantos são os números primos p, para os quais $p^{1994} + p^{1995}$ é um quadrado perfeito?

17) (Putnam-88) Se $n > 3$ não é primo, mostre que é possível encontrar inteiros positivos a, b, c tais que $n = ab + bc + ca + 1$.

18) (Israel-94) Prove que existem no máximo 3 números primos entre 10 e 10^{10} tal que todos os seus dígitos são iguais em 1 (por exemplo, 11).

19) (Rússia-2000) Seja M o conjunto que consiste dos 2000 números 11, 101, 1001, ... Mostre que pelo menos 99% dos elementos de M não são primos.

20) Seja p_n o enésimo número primo. Prove que $p_n > 3n$ para todo $n \geq 12$.

21) (Finlândia-2006) Os números p, $4p^2 + 1$ e $6p^2 + 1$ são primos. Determine p.

22) (Cone Sul-88) Considera-se um número n de quatro dígitos, quadrado perfeito, tal que todos seus dígitos são menores que 6. Se a cada dígito é somado 1, o número resultante é outro quadrado perfeito. Achar n.

23) (Bélgica-91) Seja n um número natural consistindo de 1991 uns: $n = \underbrace{1111.....111}_{1991\ 1's}$. Prove que n não é um número primo.

24) (OBM-98) São dados 15 números naturais maiores que 1 e menores que 1998 tais que dois quaisquer são primos entre si. Mostre que pelo menos um desses 15 números é primo.

25) (Argentina-95) É possível escrever os 11 números desde 1985 até 1995 em alguma ordem de modo que o número de 44 dígitos obtido seja um número primo?

26) (Argentina-99) Seja $d = a^{47} + b^{47} + c^{47}$, com a, b, c números inteiros tais que $a + b + c = 0$.

a) Decidir se é possível que d seja igual a 2.
b) Decidir se é possível que d seja um número primo.

27) (Tailândia-2006) Determine todos os números inteiros n tais que $n^2 + 59n + 881$ é um quadrado perfeito.

28) (Bélgica-90) Define-se $n! = 1.2.3...n$. Então o número de primos p tais que:

$$77! + 1 < p < 77! + 77$$

é dado por:
a) 0 b) 1 c) 7 d) 11 e) 17

29) (Torneio das Cidades-96) Existe um inteiro n tal que os três números:
a) $n - 96$, n, $n + 96$;
b) $n - 1996$, n, $n + 1996$
são primos (positivos)?

30) (Cone Sul-94) Pedro e Cecília participam em um jogo com as seguintes regras:
Pedro escolhe um número inteiro positivo a e Cecília ganha o jogo se encontra um número inteiro positivo b, primo com a, tal que na decomposição em fatores primos de $a^3 + b^3$ aparecem pelo menos três fatores primos distintos. Demonstrar que Cecília sempre pode ganhar.

31) (IMO-69) Prove que existem infinitos inteiros positivos m, tal que $n^4 + m$ não é primo para todo inteiro positivo n.

32) (Hong Kong-97) Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que $2^n + 1$ é divisível por n. Determine todos os n's que são números primos.

33) (ProMath Competition-97) Mostre que o numerador de

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{1995}{1996}$$

é divisível por 1997.

34) (Hungria-1923) Prove que, se os termos de uma progressão aritmética infinita de números naturais não são todos iguais, então não podem ser todos primos.

35) (Inglaterra-2005) Seja um inteiro maior que 6. Prove que se $n - 1$ e $n + 1$ são ambos primos, então $n^2(n^2 + 16)$ é divisível por 720.

36) (Suécia-77) Seja p um primo. Determine o maior inteiro d tal que p^d divide $p^4!$

37) (Báltica-94) Seja p > 2 um número primo e

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{(p-1)^3}=\frac{m}{n}$$

onde m e n são primos entre si. Mostre que m é múltiplo de p.

38) (Ucrânia-2009) Determine todos os números primos p e inteiros positivos m tais que $2p^2 + p + 9 = m^2$.

39) (Romênia-99) Sejam a, b, c inteiros não nulos, a ≠ c, tais que $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$. Prove que $a^2 + b^2 + c^2$ não pode ser um número primo.

40) (Eslovênia-2010) Determine todos os números primos p, q e r tais que p > q > r e os números p − q, p − r e q − r são todos primos.

41) (Maio-2009) Encontre números primos p, q, r para os quais $p+q^2+r^3=200$. Diga todas as possibilidades.

42) (Turquia-2013) Quantas triplas (p, q, n) existem tais que $\frac{1}{p}+\frac{2013}{q}=\frac{n}{5}$ onde p e q não números primos e n é um inteiro positivo?

43) (Itália-2013) $\overline{5654_b}$ é a potência de um número primo. Determine b se b > 6.

44) (USA Talent Search-2009) Encontre, com prova, um inteiro positivo n tal que

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+500)}{500!}$$

é um inteiro com nenhum fator primo menor que 500.

45) (Índia Regional-2011) Seja n um inteiro positivo tal que 2n + 1 e 3n + 1 são ambos quadrados perfeitos. Mostre que 5n + 3 é um número composto.

46) (Balcânica Jr.-2011) Determine todos os números primos p tais que existem inteiros positivos x e y que satisfaçam $x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$.

MDC E MMC

5.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

Assunto com importância mediana dentro da teoria dos números. O número de questões de MDC e MMC em provas de olimpíadas de matemática é reduzido, entretanto a compreensão dos conceitos de MDC e MMC é fundamental para a resolução de problemas de outros tópicos, tais como números primos, divisores e congruência aritmética.

Quando cobrado, os conceitos de MDC e MMC surgem mais normalmente em olimpíadas de matemática de ensino médio.

5.2. RESUMO TEÓRICO

Definição de MDC: Sejam a e b dois inteiros não simultaneamente nulos ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$). O inteiro positivo d é o máximo divisor comum de a e b se:

(1) $d \mid a$ e $d \mid b$ (2) $c \mid a$ e $c \mid b \Rightarrow c \mid d$.

Existência e Unicidade do MDC: Sendo a e b dois inteiros não simultaneamente nulos ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$), então existe e é único o mdc (a, b). Afirma-se também que existem os inteiros x e y tais que mdc $(a, b) = ax + by$ isto é, o mdc (a, b) é uma combinação linear entre os valores de a e b.

Inteiros Primos Entre Si: Sendo a e b dois inteiros que não são simultaneamente nulos ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$), pode-se afirmar que a e b são primos entre si se e somente se o mdc $(a, b) = 1$.

Teorema: Sejam a e b dois inteiros não simultaneamente nulos ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$). Os inteiros a e b são primos entre si se e somente se existem inteiros x e y tais que $ax + by = 1$.

Propriedades do MDC

(1) Se o mdc $(a, b) = d$, então o mdc $(a/d, b/d) = 1$.
(2) Se $a \mid b$ e se o mdc $(b, c) = 1$, então o mdc $(a, c) = 1$.
(3) Se $a \mid c$, se $b \mid c$ e se o mdc $(a, b) = 1$, então $ab \mid c$.
(4) Se mdc $(a, b) = 1 =$ mdc (a, c), então o mdc $(a, bc) = 1$.
(5) Se o mdc $(a, bc) = 1$, então mdc $(a, b) = 1 =$ mdc (a, c).
(6) (de Euclides) Se $a \mid bc$ e se o mdc $(a, b) = 1$, então $a \mid c$.
(7) mdc $(a, b, c) =$ mdc (mdc $(a, b), c)$.

(8) Sejam a e b dois inteiros positivos e $a = bq + r$, com $0 \le r < b$. Então mdc (a, b) = mdc (b, r).

Teorema: Sejam a e b dois inteiros positivos e $a = bq + r$, com $0 \le r < b$. Então mdc (a, b) = mdc (b, r).

Demonstração:

Com efeito, se $a = bq + r \Rightarrow r = a - bq$.

Seja k um divisor comum de a e b $\Rightarrow k \mid a$ e $k \mid b$.

Assim, $k \mid r$, ou seja, k é um divisor comum de b e r. Reciprocamente, como $a = bq + r$, vem imediatamente que todo divisor de comum de b e de r é divisor de b e de a.

Desta forma, o conjunto dos divisores comuns de a e de b é igual ao conjunto dos divisores comuns de b e de r.

Logo, mdc (a, b) = mdc (b, r).

Algoritmo de Euclides: Sejam a e b inteiros positivos, com $a \ge b$. Usando sucessivamente o algoritmo da divisão:

$a = bq_1 + b_1, \quad 0 < b_1 < b,$

$b = b_1q_2 + b_2, \quad 0 < b_2 < b_1,$

$b_1 = b_2q_3 + b_3, \quad 0 < b_3 < b_2,$

....

$b_{n-2} = b_{n-1}q_n + \quad 0 < b_n < b_{n-1}$

$b_n,$

$b_{n-1} = b_nq_{n+1}.$

Então mdc (a, b) = b_n.

Demonstração:

Inicialmente notemos que o processo acima realmente chega ao fim. De fato, como $0 < b_n < b_{n-1} < \ldots < b_1 < b$, vemos que esse processo não pode repetir-se indefinidamente, pois temos uma seqüência estritamente decrescente de inteiros positivos e há um número finito de inteiros entre 0 e b. Pelo Teorema anterior, mdc (a, b) = mdc (b, b_1) = mdc (b_1, b_2) = = mdc (b_2, b_3) = ... = mdc (b_{n-1}, bn).

Entretanto, mdc (b_{n-1}, b_n) = b_n, pois b_{n-1} é um múltiplo de b_n, o que conclui a demonstração.

Definição de MMC: Sendo a e b dois inteiros diferentes de zero ($a \neq 0$ e $b \neq 0$), define-se mínimo múltiplo comum de a e b o inteiro positivo m ($m > 0$) que satisfaz às seguintes condições:

(1) $a \mid m$ e $b \mid m$

(2) se $a \mid c$ e se $b \mid c$, com $c > 0$, então $m \le c$.

Relação entre MDC e MMC: Sejam $\underline{a}$ e $\underline{b}$ dois inteiros positivos, então mdc (a, b) . mmc (a, b) = ab

Demonstração:

Seja mdc (a, b) = d e mmc (a, b) = m.

Como a | a(b/d) e b | b(a/d), segue-se que ab/d é um múltiplo comum de $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

Portanto, existe um inteiro positivo $\underline{k}$ tal que ab/d = mk, k ∈ N, o que implica: a/d = (m/b)k e b/d = (m/a)k,

isto é, $\underline{k}$ é um divisor comum dos inteiros a/d e b/d. Mas, a/d e b/d são primos entre si, de modo que k = 1.

Assim sendo, temos ab/d = m ou ab = dm, isto é

ab = mdc (a, b).mmc (a, b)

5.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) (OBM-2001) Quantos dígitos tem o menor quadrado perfeito cujos quatro últimos dígitos são 2001?

A) 9 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Solução:

Como n termina com 2001: $n^2 = 10000m + 2001$, onde m é o número formado pelos outros dígitos de n^2.

$n^2 = 10000m + 2001 \Rightarrow n^2 - 1 = 2000(5m + 1) \Rightarrow$

$(n - 1)(n + 1) = 2^4 5^3(5m + 1)$.

Como mdc $(n - 1; n + 1) = \text{mdc}(n + 1; n + 1 - (n - 1)) = \text{mdc}(n + 1, 2) = 2$ (pois n é ímpar), então n – 1 ou n + 1 é divisível por $5^3 = 125 \Rightarrow$

$n = 125t + 1$ ou $n = 125t - 1$, onde t é inteiro positivo.

Como n é ímpar, t é par, logo o menor valor possível para t é 2.

Para $n = 125 \cdot 2 - 1 = 249$, temos $n^2 = 62001$, que termina em 2001.

Logo o menor quadrado perfeito cujos últimos quatro dígitos são 2001 é $249^2 = 62001$ que tem 5 dígitos.

2) (OBM-2011) Qual é o maior valor possível do mdc de dois números distintos pertencentes ao conjunto {1, 2, 3, ..., 2011}?

Solução:

O mdc de dois números é divisor de cada um dos dois números, ou seja, cada um dos dois números é múltiplo de seu mdc. Logo queremos o maior valor de d que tem dois múltiplos positivos menores ou iguais a 2011. O maior dos dois múltiplos de d é maior ou igual a $2d$, logo $2d \leq 2011 \Leftrightarrow d \leq 1005$. Como 1005 e $2 \cdot 1005 = 2010$ são ambos menores do que 2011, o valor procurado é 1005.

3) Os inteiros positivos $\underline{m}$ e $\underline{n}$ são tais que o mdc (m, n) = d. Mostrar que o mdc $(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^d - 1$.

Solução:

Sendo $m = nq + r \Rightarrow 2^m - 1 = (2^n - 1)(2^{n(q-1)} + 2^{n(q-2)} + \dots + 2^n + 1)$

Assim, todo divisor comum de $2^m - 1$ e $2^n - 1$ também dividirá $2^r - 1$.

Analogamente, os divisores de $2^n - 1$ e $2^r - 1$ também dividem $2^m - 1$, por isso também são divisores comuns de $2^m - 1$ e $2^n - 1$.

Deste modo mdc $(2^m - 1, 2^n - 1) =$ mdc $(2^n - 1, 2^r - 1)$

Aplicando o Algoritmo de Euclides:

$m = nq + r$

$n = rq_1 + r_1$

$r = r_1q_2 + r_2$

....

$r_{n-1} = r_nq_{n+1}$ onde $r_n = \text{mdc}(a, b)$

Assim, $(2^m - 1, 2^n - 1) = (2^n - 1, 2^r - 1) = (2^r - 1, 2^{r_1} - 1) = \dots =$

$= (2^{r(n-1)} - 1, 2^{rn} - 1) = 2^{rn} - 1 = 2^{\text{mdc}(m,n)} - 1.$

4) (Lista de Treinamento Cone Sul-2012) Dados os números naturais distintos a, b e c, prove que:

$$\text{mdc}(ab + 1, bc + a, ac + 1) \le \frac{a + b + c}{3}.$$

Solução:

Suponha que $a > b > c$. Se $d = \text{mdc}(ab + 1, bc + 1, ac + 1) \Rightarrow$

$d \mid [(ab + 1) - (bc + 1)] \Rightarrow d \mid b(a - c)$

Entretanto, como $d \mid bc + 1$, então mdc $(d, b) = 1$, ou seja, $d \mid a - c \Rightarrow$

$d \le a - c$

Analogamente pode-se demonstrar que $d \le a - b$ e $d \le b - c$.

Suponhamos que $a - b \ge b - c$.

Logo: $a + b + c = a - b + 2b - 2c + 3c \ge (a - b) + 2(b - c) \ge d + 2d = 3d$.

5) (OBM-2011) Quantos são os pares ordenados (a, b), com a, b inteiros positivos, tais que

$$a + b + \text{mdc}(a, b) = 33\,?$$

Solução:

Seja $d = \text{mdc}(a, b)$ Podemos reescrever a equação como: $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + 1 = \frac{33}{d}$

O lado esquerdo é uma soma de números inteiros logo, d divide 33.

Agora tem-se: $\text{mdc}(a/d, b/d) = \text{mdc}(a/d, 33/d - 1) = \text{mdc}(b/d, 33/d - 1)$

$= 1$. Fixado d, é suficiente encontrarmos os pares de inteiros positivos

(x, y) com $\text{mdc}(x, 33/d - 1) = 1$ tais que $x + y = 33/d - 1$ pois daí

obteremos também que $\text{mdc}(y, 33/d - 1) = 1$ e que $(a, b) = (dx, dy)$ é

solução. Vejamos então as possibilidades para d:

Para $d = 1$ e $x + y = 32$, tem-se 16 soluções pois basta escolher x ímpar.

Para $d = 3$ e $x + y = 10$, tem-se 4 soluções, pois x não pode ser par nem

múltiplo de 5.
Para $d = 11$ e $x + y = 2$, temos 1 solução apenas.
Não podemos ter $d = 33$ pois a e b são positivos.
Logo, existem 19 pares de soluções.

6) (Canadá-97) Quantos pares de inteiros positivos x, y existem, com $x \leq y$, e tais que mdc $(x, y) = 5!$ e mmc $(x, y) = 50!$

Solução:
Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_{12}$, em ordem crescente, os números primos de 7 a 47.
Então $5! = 2^3.3^1.5^1.p_1^0.p_2^0 \ldots p_{12}^0$ e $50! = 2^{a_1}.3^{a_2}.5^{a_3}.p_1^{b_1}.p_2^{b_2} \ldots p_{12}^{b_{12}}$.
Note que $2^4, 3^2, 5^2, p_1, p_2, \ldots, p_{12}$ todos dividem 50!, entretanto não dividem 5!. Desde que se $x \mid 50!$ e $y \mid 50!$, então x e y são da forma:
$x = 2^{n_1}.3^{n_2} \ldots p_{12}^{n_{15}}$ e $y = 2^{m_1}.3^{m_2} \ldots p_{12}^{m_{15}}$.
Então max (n_i, m_i) é a i-ésima potência prima em 50! e min (n_i, m_i) é a i-ésima potência prima em 5!.
Como as potências dos primos $2, 3, 5, p_1, p_2, \ldots, p_{12}$ são diferentes em 5! e 50!, existem 2^{15} escolhas para x, das quais metade são menores do que y, pois importa a ordem do par (x, y). Assim, temos 2^{14} escolhas possíveis.

5.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) (OBM-2000) Qual é o maior inteiro positivo *n* tal que os restos das divisões de 154, 238 e 334 por *n* são iguais?

2) (OBM-2000) Escrevem-se, em ordem crescente, os números inteiros e positivos que sejam múltiplos de 7 ou de 8 (ou de ambos), obtendo-se 7, 8, 14, 16, ... O 100º número escrito é:
A) 406 B) 376 C) 392 D) 384 E) 400

M

3) (OBM-99) Um edifício muito alto possui 1000 andares, excluindo-se o térreo. Do andar térreo partem 5 elevadores:
O elevador *A* pára em todos os andares.
O elevador *B* pára nos andares múltiplos de 5, isto é, 0, 5, 10, 15, ...
O elevador *C* pára nos andares múltiplos de 7, isto é, 0, 7, 14, 21, ...
O elevador *D* pára nos andares múltiplos de 17, isto é, 0, 17, 34, 51, ...
O elevador *E* pára nos andares múltiplos de 23, isto é, 0, 23, 46, 69, ...
a) Mostre que, excetuando-se o andar térreo, não existe nenhum andar onde param os 5 elevadores.
b) Determine todos os andares onde param 4 elevadores.

595 e 805

4) (OBM-2011) Qual é o maior valor possível do mdc de dois números distintos pertencentes ao conjunto {1, 2, 3, ..., 2011}?

5) Determinar os inteiros positivos a e b sabendo que $ab = 4032$ e $\text{mmc}(a, b) = 336$.

6) Achar o menor inteiro $a > 2$ tal que: $2 \mid a$, $3 \mid (a + 1)$, $4 \mid (a + 2)$, $5 \mid (a + 3)$ e $6 \mid (a + 4)$.

7) Prove que se m e n são números naturais e m é ímpar, então $\text{mdc}\ (2^m - 1, 2^n + 1) = 1$.

8) (Rússia-63) Os números naturais a e b são primos entre si. Prove que o máximo divisor comum entre $(a + b)$ e $(a^2 + b^2)$ está entre 1 ou 2.

Tentei

9) (Rússia-61) Dados a, b, p inteiros arbitrários, prove que sempre existem primos relativos m e n, tal que $(am + bn)$ é divisível por p.

10) (México-88) Se a e b são dois inteiros positivos primos relativos e n é um inteiro, prove que o máximo comum divisor de $a^2 + b^2 - nab$ e $a + b$ divide $n + 2$.

11) (OBM-2007) O máximo divisor comum entre os números 1221, 2332, 3443, 4554,........, 8998 é:

A) 3 B) 33 C) 37 D) 11. E) 101

12) (OBM-99) Determine o maior natural n para o qual existe uma reordenação (a, b, c, d) de (3, 6, 9, 12) (isto é, $\{a, b, c, d\} = \{3, 6, 9, 12\}$) tal que o número $\sqrt[n]{3^a 6^b 9^c 12^d}$ seja inteiro. Justifique sua resposta.

13) (Índia-97) Para cada inteiro positivo n, define-se $a_n = 20 + n^2$, e $d_n = \text{mdc}\ (a_n, a_{n+1})$. Determine o conjunto de todos os valores que pode assumir d_n e mostre um exemplo para cada um destes valores.
Resolução:

14) (OBM-2012) Esmeralda desenhou uma tabela com 100 linhas e 100 colunas e escreveu, na linha *i* e coluna *j* da tabela, $\text{mdc}(i, j)$ se $i < j$ e $\text{mmc}(i, j)$ se $i \geq j$. Por exemplo, na linha 4, coluna 6 ela escreveu $\text{mdc}(4,6) = 2$ e na linha 15, coluna 10 ela escreveu $\text{mmc}(15,10) = 30$. Qual é o produto de todos os 100^2 números da tabela?

~~A) $100!^{99}$~~ B) $100!^{100}$ C) $100!^{101}$
D) $\text{mmc}(1,2,3,\ldots,100)^{100}$ E) $\text{mdc}(1,2,3,\ldots,100)^{100}$

15) (Finlândia-2001) Determine $n \in \mathbb{N}$ tais que $n^2 + 2 \mid 2 + 2001.n$

16) Prove que todo inteiro positivo pode ser expresso como a diferença de dois números inteiros compostos primos entre si.

17) (Berkeley Math Circle) Determine todos os inteiros positivos n tais que $3^{n-1} + 5^{n-1}$ divide $3^n + 5^n$. $n = 1$

18) (Ceará-2000) Cinqüenta bolas, numeradas de 2 a 51, devem ser colocadas em 5 caixas, de modo que o máximo divisor comum (m. d. c) dos números de duas bolas quaisquer de uma caixa não seja o número correspondente a uma bola desta caixa. Quais são as bolas de cada uma das 5 caixas? Justifique. AMEI

19) (Polônia-2000) Seja $n \geq 3$ um inteiro positivo. Prove que a soma dos cubos de todos os números naturais, primos relativos com n e menores que n, é divisível por n.

20) Para todo inteiro positivo n, seja $T_n = 2^{2^n} + 1$. Mostre que se $m \neq n$, então T_m e T_n são primos relativos.

21) (Putnam-99) Seja S um conjunto finito de inteiros, cada um deles maior que 1. Suponha que para cada inteiro n existe algum $s \in S$ tal que mdc (s, n) = 1 ou mdc (s, n) = s. Mostre que existe s, $t \in S$ tal que mdc (s, t) é igual a um primo.

22) (Irlanda-99) Uma função $f : N \to N$ satisfaz às condições :
$f(ab) = f(a)f(b)$ se o máximo divisor comum de a e b é 1;
$f(p + q) = f(q) + f(q)$ para todos os números primos p e q.
Mostre que $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ e $f(1999) = 1999$.

23) (OBM-99) Um professor de matemática passou aos seus alunos a adição $\frac{A}{B} + \frac{C}{D}$ onde *A*, *B*, *C* e *D* são inteiros positivos, as frações estão simplificadas ao máximo e os denominadores são números primos entre si. Os alunos adicionaram as frações tirando o mínimo múltiplo comum dos denominadores das parcelas e escrevendo este como o denominador do resultado. Mostre que a fração que os alunos encontraram como resultado está simplificada.

24) (Rússia-51) Os inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são tais que cada um é menor ou igual que 1000 e mmc $(a_i, a_j) > 1000$ para todo i, j, $i \neq j$.
Mostre que $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 2$.

25) (Rússia-95) Para dois inteiros positivos m e n, seja mmc (m, n) o mínimo múltiplo comum de m e n e mdc (m, n) o máximo divisor comum de m e n. Se mmc (m, n) + mdc (m, n) = m + n, então prove que um dos números m e n é múltiplo do outro.

Muito Perfeito

26) (África do Sul-2004) Sejam $a = \underbrace{111...11}_{40}$ e $b = \underbrace{111...11}_{12}$. Determine o máximo divisor comum de a e b.

27) (Eslovênia-2001) Para os inteiros positivos x e y é verdadeira a igualdade $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Mostre que $x - y$ é um quadrado perfeito.

Errou

28) (Espanha-93) Determine todos os números naturais n tais que o número $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ possui exatamente 3 divisores primos.

29) (Alemanha-96) Determine o conjunto de todos os inteiros positivos n para os quais $n.2^{n-1}$ é um quadrado perfeito.

30) (Alemanha-96) Iniciando de (1, 1), uma ficha é movida em um plano coordenado de acordo com as seguintes regras:

a) De um ponto (a, b) a ficha pode ser movida para (2a, b) ou (a, 2b).

b) De um ponto (a, b) a ficha pode ser movida para (a – b, b) se a > b, ou (a, b – a) se a < b.

Para quais inteiros x, y a ficha pode ser movida para (x, y)?

31) (IMO-92 Shortlist) Prove que para todo inteiro positivo m existem infinitos pares de inteiros (x, y) tais que:

(1) mdc (x, y) = 1; (2) y divide $x^2 + m$; (3) x divide $y^2 + m$.

32) Sabe-se que todo número natural maior que 6 pode ser escrito como uma soma de dois números primos entre si, cada um deles maior que 1. Determine todos os números naturais que podem ser expressos como uma soma de 3 números primos entre si, cada um deles maior que 1.

33) (OBM-95) Seja P(n) o maior divisor primo do natural n, n > 1. Prove que existem infinitos $n \in N$ tal que $P(n) < P(n + 1) < P(n + 2)$.

34) (IMO-2000) Verifique se existe um inteiro positivo n tal que n é divisível por exatamente 2000 números primos diferentes e $2^n + 1$ é divisível por n.

$n = K.p_1.p_2 \ldots p_{2000}$

Não sei ainda

$2^n + 1 \equiv 3 \pmod{n}$

$\equiv 1 \pmod{p_i}$

35) (IMO-81) a) Para quais valores n > 2 existe um conjunto de n inteiros positivos tais que o maior número no conjunto é um divisor do mínimo múltiplo comum dos n – 1 números restantes?
b) Para quais valores de n > 2 existe exatamente um conjunto possuindo esta propriedade?

36) (Tailândia-2006) Determine todos os números primos p tais que $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ é um quadrado perfeito.

37) Seja n um inteiro positivo. Determine o máximo divisor comum dos números $\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \binom{2n}{5}, \ldots, \binom{2n}{2n-1}$.

38) (Báltica-2007) Sejam x, y e z números inteiros positivos tais que $\frac{x+1}{y}+\frac{y+1}{z}+\frac{z+1}{x}$ é um inteiro. Seja d o máximo divisor comum de x, y e z. Demonstre que $d \le \sqrt[3]{xy+yz+zx}$.

39) (Rússia-95) Seja $(a_n)_{n\ge 1}$ uma sequência de naturais tal que

$$\text{mdc}(a_m, a_n) = \text{mdc}(m, n), \forall\, m \neq n$$

Mostre que $a_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

40) (Teste Seleção Cone Sul-2008) Sejam x, y inteiros para os quais a fração $a = \frac{x^2+y^2}{xy}$ é inteira. Ache todos os possíveis valores de a.

5.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) Determine a quantidade de números inteiros positivos menores ou iguais a 1.000.000 que são divisíveis por todos os inteiros 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.

2) Prove que para cada número natural <u>n</u>: mdc [n! + 1, (n + 1)! + 1] = 1.

3) (Lituânia-97) São dados dois números naturais distintos *a* e *b*. Prove que existem infinitos números naturais *n* tais que *a* + *n* e *b* + *n* são primos entre si.

4) (Austrália-91) Seja M_n o mínimo múltiplo comum dos números 1, 2, 3, ..., n; isto é, $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $M_3 = 6$, $M_4 = 12$, $M_5 = 60$, $M_6 = 60$. Para quais inteiros positivos $M_{n-1} = M_n$ é válido?

5) (Mathematical Excalibur) Determine todos os pares ordenados de inteiros positivos (a, b) tais que mdc (a, b) + mmc $(a, b) = a + b + 6$.

6) (África do Sul-2006) Reduza a fração $\dfrac{2121212121210}{1121212121211}$ à mais simples forma.

7) (Hungria-98) Para quais inteiros positivos n existem os inteiros positivos x, y tais que mmc (x, y) = n! e mdc (x, y) = 1998?

8) (Argentina-2001) Achar o menor número natural que satisfaz as seguintes três condições simultaneamente: tem resto 24 na divisão por 57; tem resto 73 na divisão por 106 e tem resto 126 na divisão por 159.

9) (Argentina-2000) Dos números naturais A e B sabe-se que $B = (A^2 - 1)/8$ e que o mínimo múltiplo comum entre A e B é igual a 3720. Determinar A e B.

10) (Bélgica-2001) Qual é o maior valor que pode assumir o máximo divisor comum de 6 números naturais diferentes escritos com 2 dígitos?

11) (Torneio das Cidades-98) Prove que para todos os naturais a e b a igualdade mmc (a, a + 5) = mmc (b, b + 5) implica que a = b.

12) (Lista de Treinamento Cone Sul-2009) É possível que o mínimo múltiplo comum de 1, 2, . . . , n seja 2008 vezes o mínimo múltiplo comum de 1, 2, . . . , m para algum par de inteiros positivos (m, n)?

13) (Hungria-1913) Se d é o máximo divisor comum de a e b, e D é o máximo divisor comum de A e B. Mostre que dD é o máximo divisor comum de aA, aB, bA e bB.

14) (Lista de Treinamento Cone Sul-2006) Os inteiros positivos M e n são tais que M é divisível por todos os inteiros de 1 até n, mas não por n + 1, n + 2 e n + 3. Encontre todos os valores possíveis de n.

15) (Índia-98) Determine o menor valor possível do mmc de vinte (não necessariamente distintos) números naturais cuja soma é 801.

16) (Lista Treinamento Cone-Sul-95) Para que n = 1, 2, ..., seja d_n = mdc (n^2 + 1995, $(n + 1)^2$ + 1995). Ache o maior valor que d_n pode assumir.

17) (Torneio das Cidades-2003) Existe alguma progressão aritmética crescente, formada por cem inteiros positivos, de modo que os termos sejam dois a dois primos entre si?

18) (Torneio das Cidades-2000) O mínimo múltiplo comum dos inteiros positivos a, b, c e d é igual a $a + b + c + d$. Prove que um dos números a, b, c ou d é múltiplo de 3 ou 5.

19) (Argentina-98) Dos 999 números: $mdc(1;\ 1998)$, $mdc(2;\ 1998)$, $mdc(3;\ 1998)$, $mdc(4;\ 1998)$, ..., $mdc(997;\ 1998)$, $mdc(998;\ 1998)$, $mdc(999;\ 1998)$, quantos são números maiores que 19?

20) (Japão-96) Sejam m e n inteiros positivos com mdc (m, n) = 1. Calcule mdc ($5^m + 7^m$, $5^n + 7^n$).

21) (Irlanda-2000) Prove que em cada conjunto de 10 inteiros consecutivos existe um que é primo relativo com todos os outros inteiros. Por exemplo, tomando 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123 os números 119 e 121 são cada um primos relativos com todos os outros.

V: interessante

22) (Lista de Treinamento Cone Sul-2011) Dados a, b, c ∈ {1, 2, . . . , 9}, considere os números x = 10a + b, y = 10b + c, z = 10c + a. Ache todos os possíveis valores do máximo divisor comum entre x, y, z.

23) (Teste Seleção Cone Sul-2002) Determine todos os inteiros positivos n tais que $\sqrt{\dfrac{4n-2}{n+5}}$ é racional.

24) (Lista de Treinamento Cone Sul-2011) Encontre todos os números naturais k que satisfazem: mdc(37m − 1; 1998) = mdc(37m − 1; k) para todo número natural m.

25) (Bielo Rússia-2010) Determine todos os inteiros positivos a e b tais que ab = 160 + 90mdc(a, b).

26) (Torneio das Cidades-2000) Os inteiros m e n são primos entre si. A fração $\dfrac{m+2000n}{n+2000m}$ pode ser simplificada pelo cancelamento do divisor comum d. Qual é o maior valor possível de d?

27) (Báltica-96) Considere a seqüência: $x_1 = 19$, $x_2 = 95$, $x_{n+2} = mmc(x_{n+1}, x_n) + x_n$, para $n > 1$, onde mmc (a, b) significa o mínimo múltiplo comum de a e b. Determine de máximo divisor comum de x_{1995} e x_{1996}.

28) (Argentina Preparação Cone Sul-99) Elegem-se cinco números naturais distintos, a, b, c, d, e, ordenados do menor ao maior: $1 \le a < b < c < d < e$. Logo calcula-se o mínimo múltiplo comum de cada um dos 4 pares seguintes: mmc (a, b); mmc (b, c); mmc (c, d); mmc(d, e); e finalmente, efetua-se a soma de seus inversos

$$S = \frac{1}{mmc(a,b)} + \frac{1}{mmc(b,c)} + \frac{1}{mmc(c,d)} + \frac{1}{mmc(d,e)}.$$

Qual é o máximo valor que pode ter S?

29) (Turquia-2013) Determine todos os números primos que dividem simultaneamente os números $n^3 + 2$ e $(n + 1)^3 + 2$, onde n é um inteiro positivo.

30) (Indonésia-2011) Mostre que para todos os inteiros positivos a e b:

$$n = mmc(a, b) + mdc(a, b) - a - b$$

é um inteiro não negativo par.

MA-MG

mmc(a,b)·mdc(a,b)=ab

31) (Báltica-2012) Sejam n, m e k inteiros positivos satisfazendo $(n - 1)n(n + 1) = m^k$. Prove que $k = 1$.

32) (Aime-87) Quantos termos ordenados (a b, c) existem de modo que mmc (a, b) = 1000, mmc (b, c) = 2000 e mmc (c, a) = 2000?

33) (Torneio das Cidades-2003) Uma progressão aritmética crescente é formada por cem inteiros positivos. É possível que os termos sejam dois a dois primos entre si?

34) (Lista de Treinamento Cone Sul-95) Sejam a e b inteiros positivos tais que $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ é inteiro. Prove que $mdc(a, b) \le \sqrt{a + b}$.

DIVISORES

6.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

O estudo dos divisores inteiros de um número foi, ao longo do tempo, muito cobrado em provas de olimpíadas de matemática, mas recentemente vem sendo pouco usado para este fim. Provavelmente isto se deve à pequena possibilidade de variações nas questões, que giram em torno de propriedades da quantidade ou da soma dos divisores positivos de um número.

É mais comum encontrar questões sobre o número de divisores positivos e a soma dos divisores positivos em provas de olimpíadas de matemática de ensino médio.

6.2. RESUMO TEÓRICO

Divisores: Se $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ é a decomposição canônica do inteiro positivo $n > 1$, então os divisores positivos de $\underline{n}$ são os inteiros $\underline{d}$ da forma: $d = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_r^{h_r}$ onde $0 \le h_i \le k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Número de divisores positivos: Se $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ é a decomposição canônica do inteiro positivo $n > 1$, então:

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_r + 1)$$

Demonstração:

Sabemos que se $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ é a decomposição canônica do inteiro positivo $n > 1$, então os divisores positivos de $\underline{n}$ são da forma: $p_1^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_r^{h_r}$, onde $0 \le h_i \le k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Assim, para h_1 temos $k_1 + 1$ possibilidades, para h_2 temos $k_2 + 1$ possibilidades, ..., para h_r há $k_r + 1$ possibilidades. Como para cada escolha dos valores de $h_1, h_2, \ldots, h_r$ temos um divisor positivo distinto, então o número de divisores positivos de n é

$$\mathbf{d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_r + 1)}$$

Soma dos divisores positivos: Se $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ é a decomposição canônica do inteiro $n > 1$, então

$$s(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

Demonstração:

Lema 1: Se $n = p^k$, onde p é um primo e $k \geq 1$, então a soma s(n) dos divisores é $s(n) = 1 + p + p^2 + ... + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$.

Demonstração:
Se $n = p^k$, onde p é um primo e $k \geq 1$, então os divisores positivos de n são $1, p, p^2, ..., p^k$. Assim, $\mathbf{s(n) = 1 + p + p^2 + ... + p^k}$. Como $1, p, p^2, ..., p^k$ formam uma progressão aritmética de razão p, então também podemos representar a soma dos divisores positivos de n por $s(n) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$.

Lema 2: Se $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}$, onde p_1 e p_2 são primos e $k_1, k_2 \geq 1$, então $s(n) = s(p_1^{k_1})s(p_1^{k_2}) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1}\frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1}$.

Demonstração:
Se $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}$, então os divisores positivos de n são da forma $n = p_1^{h_1}.p_2^{h_2}$, onde $0 \leq h_1 \leq k_1$ e $0 \leq h_2 \leq k_2$. Assim:
$s(n) = 1 + p_1 + p_2 + p_1p_2 + p_1^2 + p_2^2 + p_1^2p_2 + p_1p_2^2 + p_1^3 + p_2^3 ... + p_1^{k_1}p_2^{k_2}$
Fatorando esta expressão encontramos que:
$s(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + p_1^3 + ... + p_1^{k_1})(1 + p_2 + p_2^2 + p_2^3 + ... + p_2^{k_2})$

Portanto: $s(n) = s(p_1^{k_1})s(p_1^{k_2}) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1}\frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1}$.

O raciocínio utilizado no item anterior, onde n possuía somente dois fatores primos, pode ser usado para demonstrar a expressão geral do número de divisores positivos.
Assim: $s(n) = \sum p_1^{h_1}p_2^{h_2}...p_r^{h_r}$ onde $0 \leq h_i \leq k_i$, para $0 \leq i \leq r \Rightarrow$
$s(n) = (1 + p_1 + ... + p_1^{k_1})(1 + p_2 + ... + p_2^{k_2})(1 + p_r + ... + p_r^{k_r}) \Rightarrow$
$s(n) = s(p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}) = s(p_1^{k_1})s(p_2^{k_2})...s(p_r^{k_r}) \Rightarrow$
$s(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1}.\frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1}...\frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}$

Da expressão acima podemos concluir que se **mdc** $(a, b) = 1$, então $\mathbf{s(a.b) = s(a).s(b)}$.

Produto dos divisores positivos: O produto dos divisores positivos de um inteiro positivo $n > 1$ é igual a $n^{\frac{d(n)}{2}}$.

Demonstração:

Sabe-se que se d é divisor de n, então d/n também é divisor de n. Deste modo, se $d_1, d_2, \ldots d_{d(n)}$ são os divisores positivos de n, podemos escrever seu produto de duas maneiras:

$$P(n) = d_1.d_2 \ldots d_{d(n)} \quad \text{e} \quad P(n) = \frac{n}{d_1}\frac{n}{d_2}\cdots\frac{n}{d_{d(n)}}$$

Multiplicando estas expressões:

$$[P(n)]^2 = \underbrace{n.n.n \ldots n.n}_{d(n)\text{ vezes}} = n^{d(n)} \Rightarrow P(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}$$

Números Perfeitos: Um inteiro positivo $\underline{n}$ diz-se perfeito se e somente se é igual à soma de todos os seus divisores positivos, exceto o divisor trivial $\underline{n}$. A soma de todos os divisores positivos de $\underline{n}$, com exceção do divisor $\underline{n}$, é igual a $s(n) - n$ e, portanto, $\underline{n}$ é um número perfeito se e somente se a seguinte condição se verifica:

$$n = s(n) - n \quad \text{ou} \quad s(n) = 2n.$$

Teorema (de Euclides): Se $2^k - 1$ é primo ($k > 1$), então o inteiro positivo $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ é um número perfeito.

Demonstração:
Seja $2^k - 1 = p$ ($k > 1$) um primo. Considere o inteiro positivo $n = 2^{k-1}p$.
Como o mdc $(2^{k-1}, p) = 1$ então $s(n) = s(2^{k-1}p) = s(2^{k-1}).s(p) =$
$= (2^k - 1)(p + 1) = (2^k - 1)2^k = 2n$
Logo, por definição, $\underline{n}$ é um número perfeito.

Teorema (de Euler): Se $\underline{n}$ é um número perfeito par, então $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ onde $2^k - 1$ é primo.

Demonstração:
Suponhamos que $\underline{n}$ é um número perfeito par. Então, $\underline{n}$ pode escrever-se da forma: $n = 2^{k-1}m$, onde $\underline{m}$ é um inteiro ímpar e $k \geq 2$.
mdc $(2^{k-1}, m) = 1$ então $s(n) = s(2^{k-1}m) = s(2^{k-1})s(m) = (2^k - 1)s(m)$
Por outro lado, como $\underline{n}$ é um número perfeito, temos: $s(n) = 2n = 2^k m$
Portanto: $2^k m = (2^k - 1)s(m)$ de modo que $(2^k - 1) \mid 2^k m$
Como mdc $(2^k - 1, 2^k) = 1 \Rightarrow (2^k - 1) \mid m$, isto é $m = (2^k - 1)M$
Como $\underline{m}$ e $\underline{M}$ são ambos divisores positivos de $\underline{m}$ (com $M < m$), temos:
$2^k M = s(m) \geq m + M = 2^k M$ o que implica que: $s(m) = m + M$
Assim sendo, $\underline{m}$ e $\underline{M}$ são os únicos divisores positivos de $\underline{m}$, e isto significa que $\underline{m}$ é primo e $M = 1$.
Então $m = (2^k - 1)M = 2^k - 1$ é um primo, e por ser
$n = 2^{k-1}m = 2^{k-1}(2^k - 1)$ o teorema de Euler fica provado.

6.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) Determinar o inteiro $n = 2^x.3^y$, sabendo que $n/6$ e $n/9$ têm, respectivamente, 8 divisores positivos e 10 divisores positivos a menos que n.

Solução:

Como $n = 2^x.3^y$ temos que $d(n) = (x + 1)(y + 1)$

i) $n/6 = 2^{x-1}.3^{y-1} \Rightarrow d(n/6) + 8 = x.y + 8 = (x + 1)(y + 1)$

iii) $n/9 = 2^x.3^{y-2} \Rightarrow d(n/9) + 10 = (x + 1)(y - 1) + 10 = (x + 1)(y + 1)$

$xy + 8 = xy - x + y - 1 + 10 \Rightarrow x = y + 1$

$(y + 1)y + 8 = (y + 2)(y + 1) \Rightarrow y^2 + y + 8 = y^2 + 3y + 2 \Rightarrow y = 3$ e $x = 4$

Assim $n = 2^4.3^3 \Rightarrow n = 432$

2) (OBM-99) Quantos são os possíveis valores inteiros de x para que $\dfrac{x+99}{x+19}$ seja um número inteiro? Já vi no vídeo

A) 5 B) 10 C) 20 D) 30 E) 40

Solução:

Note inicialmente que $\dfrac{x+99}{x+19} = 1 + \dfrac{80}{x+19}$.

Como 1 é inteiro, para que $\dfrac{x+99}{x+19}$ seja inteiro basta que $\dfrac{80}{x+19}$ seja também um número inteiro. Para que $\dfrac{80}{x+19}$ seja inteiro, $x + 19 \mid x$

Fatorando: $80 = 2^4.5 \Rightarrow d(80) = (4 + 1)(1 + 1) \Rightarrow d(80) = 10$.

Como estamos interessados em todos os divisores de 80 (positivos e negativos), temos que 80 tem 20 divisores inteiros, implicando que existem 20 valores de x que satisfazem o enunciado.

3) (Turquia-2013) Seja d(n) o número de divisores positivos do inteiro n. Para todos os divisores inteiros k de 64800, determine a soma dos números d(k).

Solução:

Fatorando obtém-se $64800 = 2^5.3^4.5^2$

Desde que d(n) é uma função multiplicativa tem-se que:

$\sum d(k) = [1 + d(2) + d(2^2) + \ldots + d(2^5)][1 + d(3) + \ldots + d(3^4)][1 + d(5) + d(5^2)] = (1 + 2 + 3 + \ldots + 6)(1 + 2 + \ldots + 5)(1 + 2 + 3) = 21.15.6 = 1890$

4) (OBM-2012) Arnaldo pensou em um número de quatro dígitos e desafiou Bernardo a descobrir qual era o número. Para tanto, passou as seguintes três dicas para Bernardo, sendo que exatamente uma das dicas é falsa.

- *Dica* 1: O número é um cubo perfeito;
- *Dica* 2: O número é o menor número de quatro dígitos que possui quatro divisores positivos;
- *Dica* 3: O número é múltiplo de 59.

Qual o número pensado por Arnaldo?

Solução:

Suponha que as dicas 1 e 3 sejam ambas verdadeiras. Então número é cubo perfeito e múltiplo de 59. Mas 59 é primo, de modo que é múltiplo de $59^3 > 10000$, o que não é possível. Assim, a dica 2 está correta.

Utilizaremos o fato de que um número cuja fatoração em primos é $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_k^{a_k}$ tem $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_k + 1)$ divisores positivos. Um número tem quatro divisores positivos se, e somente se, é da forma pq ou p^3, p,q primos. Note que $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ tem $4 \cdot 4 = 16$ divisores positivos; $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ tem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ divisores positivos; $1002 = 2 \cdot 3 \cdot 167$ tem 8 divisores positivos; $1003 = 17 \cdot 59$ tem $2 \cdot 2 = 4$ divisores positivos. Assim, o número pensado por Arnaldo é 1003.

5) A fração $\frac{1}{6}$ pode ser representado de diferentes maneiras:

60

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\quad \frac{1}{6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6};\quad \frac{1}{6}=\frac{1}{4}-\frac{1}{12};\quad \frac{1}{6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{30}.$$

De quantas maneiras a fração $\frac{1}{2175}$ pode ser expressa na forma $\frac{1}{2175}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, onde x e y são inteiros positivos?

Solução:

Notemos que $\frac{1}{2175}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y} \Rightarrow x=\frac{2175y}{y+2175} \Rightarrow x = 2175-\frac{2175^2}{y+2175}$.

Assim x vai ser inteiro se e somente se $y + 2175$ é um fator de 2175^2.

Notemos também que $x > 0 \Rightarrow 2175^2/(y + 2175) < 2175 \Rightarrow y > 2175$ e, analogamente, $y > 0 \Rightarrow x > 2175$.

Assim, estamos interessados nos fatores de 2175^2 que excedem 2175.

Sabemos que $2175^2 = 3^2.5^4.29^2$.

Assim o número de divisores positivos de 2175^2 é

$d(2175^2) = (2 + 1)(4 + 1)(2 + 1) = 45$.

Destes 45 divisores positivos de 2175^2, um deles é sua raiz quadrada, 2175. Com exceção de 2175, os outros 44 divisores positivos de 2175^2 podem ser agrupados aos pares cujo produto é 2175^2,

Portanto concluímos que exatamente metade destes divisores excedem 2175, dando 22 soluções nos inteiros positivos (x, y).

A menor solução é $x = 300$ e $y = 348$.

É possível generalizar o problema para um n qualquer, ou seja, determinar o número de soluções inteiras positivas (x, y) para a equação $\frac{1}{n} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. Sendo $d(n^2)$ o número de divisores positivos de n^2, então existem $(d(n^2) - 1)/2$ soluções inteiras positivas.

6) (Irlanda-97) Dado um inteiro positivo <u>k</u>, seja $\sigma(k)$ a soma de os inteiros positivos que dividem <u>n</u>. Por exemplo,
$\sigma(3) = 1 + 3 = 4$, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$,
$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.
Nós dizemos que <u>k</u> é abundante de $\sigma(k) > 2k$. Por exemplo, 12 é abundante. Sejam k, n inteiros positivos e suponha que k é abundante. Prove que kn é abundante.

Solução:

Vamos analisar a razão $\frac{S(k)}{k}$ para $k = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

Temos que

$$\frac{S(k)}{k} = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}\right) = \frac{(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1})}{p_1^{\alpha_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{(1 + p_n + \ldots + p_n^{\alpha_n})}{p_n^{\alpha_n}} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots + \frac{1}{p_1^{\alpha_1}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_n} + \ldots + \frac{1}{p_n^{\alpha_n}}\right).$$

Agora se multiplicarmos k por $m = q_1^{k_1} \cdot q_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{k_s}$, duas coisas podem acontecer:

i) Para cada primo p_i que aparece na fatoração de k e de m, o fator referente a ele no produtório $\frac{S(kn)}{kn}$ aumenta, pois, $\frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}} > 0, \ldots, \frac{1}{p_i^{\alpha_i+r}} > 0$ e portanto, $\left(1 + \frac{1}{p_i} + \ldots + \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right) < \left(1 + \frac{1}{p_i} + \cdot \ldots \cdot \frac{1}{p_i^{\alpha_i+r}}\right)$.

ii) Para cada primo q_j que só aparece na fatoração de k, vemos que ao calcularmos $\frac{S(km)}{km}$, aparecerá um novo fator $\left(1 + \frac{1}{q_j} + \ldots + \frac{1}{q_j^{k_j}}\right) > 1$, de modo que $\frac{S(km)}{km} > \frac{S(k)}{k}$.

7) (Croácia-2001). Dado o número $n = p_1p_2p_3p_4$ onde p_1, p_2, p_3 e p_4 são quatro números primos distintos. Sejam $d_1 = 1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_{15} < d_{16} = n$ os divisores positivos de n. Determine todos os $n < 2001$ tais que $d_9 - d_8 = 22$.

Solução:

Suponhamos que os primos 2 e 3 não dividam n. Assim, o menor valor possível para n seria: $n = 5.7.11.13 = 5005 > 2001$ contradição!!!
Assim, 2 e/ou 3 dividem n.

1º caso (2 divide n e 3 não divide n):
Suponhamos que 5 não divida n. Assim, o menor valor possível para n seria $n = 2.7.11.13 = 2002 > 2001$ que é um absurdo.
Desta forma, se 2 divide n então 5 necessariamente divide n.
Até agora temos que $n = 2.5.p_3.p_4 = 10.p_3.p_4$
Como $n < 2001 \Rightarrow p_3.p_4 < 200{,}1$
Desde que o valor mínimo de $p_3.p_4$ é $7.11 = 77$ e o valor máximo de $2.p_4$ é $2.23 = 46$, então os 8 primeiros divisores de n são exatamente (a menos da ordem): 1, 2, 5, p_3, p_4, 10, $2p_3$, $2p_4$
Como $d_9 = 5.p_3$ então $d_9 - d_8 = 5.p_3 - 2.p_4$ que nunca vai valer 22 pois $5.p_3$ é ímpar e $2.p_4$ é par, implicando que $d_9 - d_8$ vai ser sempre ímpar.

2º caso (2 e 3 dividem n):
Temos então que $n = 2.3.p_3.p_4$
Uma análise semelhante ao 1º caso mostrará que (a menos da ordem) o oitavo divisor e o nono divisor devem ser $2.p_4$ e $3.p_3$.
Portanto: $d_9 - d_8 = |2.p_4 - 3.p_3|$ que novamente nunca vai valer 22 pois $|2.p_4 - 3.p_3|$ sempre resulta em um número inteiro ímpar.

3º caso (2 não divide n e 3 divide n):
Suponhamos que 5 não divida n. Assim, o menor valor possível para n seria:
$n = 3.7.11.13 = 3003 > 2001$ que é um absurdo.
Desta forma, se 3 divide n então 5 necessariamente divide n.
Até agora temos que $n = 3.5.p_3.p_4 = 15.p_3.p_4$
Como $n < 2001 \Rightarrow p_3.p_4 < 133{,}4$
Temos cinco casos possíveis:
i) $p_3 = 7$ e $p_4 = 11$:
Assim $n = 3.5.7.11 \Rightarrow d_1 = 1$ $d_2 = 3$ $d_3 = 5$ $d_4 = 7$ $d_5 = 11$ $d_6 = 15$
$d_7 = 21$ $d_8 = 33$ $d_9 = 35 \Rightarrow d_9 - d_8 = 35 - 33 = 2 \neq 22$
ii) $p_3 = 7$ e $p_4 = 13$:
Assim $n = 3.5.7.13 \Rightarrow d_1 = 1$ $d_2 = 3$ $d_3 = 5$ $d_4 = 7$ $d_5 = 13$ $d_6 = 15$
$d_7 = 21$ $d_8 = 35$ $d_9 = 39 \Rightarrow d_9 - d_8 = 39 - 35 = 4 \neq 22$
iii) $p_3 = 11$ e $p_4 = 13$:
Assim $n = 3.5.11.13 \Rightarrow d_1 = 1$ $d_2 = 3$ $d_3 = 5$ $d_4 = 11$ $d_5 = 13$ $d_6 = 15$
$d_7 = 33$ $d_8 = 39$ $d_9 = 55 \Rightarrow d_9 - d_8 = 55 - 39 = 16 \neq 22$
iv) $p_3 = 7$ e $p_4 = 17$:
Assim $n = 3.5.7.17 \Rightarrow d_1 = 1$ $d_2 = 3$ $d_3 = 5$ $d_4 = 7$ $d_5 = 15$ $d_6 = 17$
$d_7 = 21$ $d_8 = 35$ $d_9 = 51 \Rightarrow d_9 - d_8 = 51 - 35 = 16 \neq 22$

v) $p_3 = 7$ e $p_4 = 19$:
Assim $n = 3.5.7.19 \Rightarrow d_1 = 1 \ d_2 = 3 \ d_3 = 5 \ d_4 = 7 \ d_5 = 15 \ d_6 = 19$
$d_7 = 21 \ d_8 = 35 \ d_9 = 57 \Rightarrow d_9 - d_8 = 57 - 35 = 22$

Deste modo, $n = 3.5.7.19 = 1995$ é o único inteiro positivo < 2001 que satisfaz o problema.

6.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) (OBM-2001) Se a n-ésima OBM é realizada em um ano que é divisível por n, dizemos que esse ano é *super-olímpico*. Por exemplo, o ano 2001, em que está sendo realizada a 23ª OBM, é super-olímpico pois $2001 = 87 \cdot 23$ é divisível por 23. Determine todos os anos super-olímpicos, sabendo que a OBM nunca deixou de ser realizada desde sua primeira edição, em 1979, e supondo que continuará sendo realizada todo ano.

2) (Berkeley Math Circle-2000) Mostre que existem infinitos números naturais n com a seguinte propriedade: a soma de todos os divisores positivos de n, excluindo n, é igual a $n + 12$.

3) (Lituânia-95) Um inteiro positivo n é chamado de ambicioso se ele possui a seguinte propriedade: escrevendo n à direita (na representação decimal) de todo inteiro positivo, obtemos sempre um número que é divisível por n. Determine:
a) Os primeiros 10 números ambiciosos:
b) todos os números ambiciosos.

4) (OBM-95) Quantos são os números inteiros que terminam com 1995 e que são múltiplos do número que se obtém quando estes últimos algarismos são eliminados?
(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16

5) (Espanha-92) Um número natural N que é múltiplo de 83 é tal que N^2 possui 63 divisores. Calcular N, sabendo que é o menor número possível que cumpre tais condições.

6) Determine o menor inteiro positivo n tal que:
i) n possui exatamente 144 divisores inteiros distintos;
ii) existem 10 inteiros consecutivos entre os divisores positivos de n.

7) (OBM-2005) Um número inteiro positivo n tem a propriedade P se a soma de seus divisores positivos é igual a 2n. Por exemplo: 6 tem a propriedade P, pois $1 + 2 + 3 + 6 = 2 \cdot 6$, porém 10 não tem a propriedade P, pois $1+2+5+10 \neq 2\cdot 10$. Mostre que nenhum quadrado perfeito tem a propriedade P.

8) (OBM-2008) O inteiro n é tal que $n\cdot 2^n$ possui 2008 divisores positivos a mais que n. A soma dos algarismos de n é igual a:

A) 5 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 11 **E)** 12

9) (Pará-2002) Seja d(n) o número de divisores positivos de n. Por exemplo, como os divisores positivos de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12, então d(12) = 6.

a) Determine todos os inteiros positivos n tais que d(n) é ímpar.

b) Determine se d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(2002) é par ou ímpar.

c) Caracterize todos os inteiros positivos n tais que d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(n) é par.

10) Determine todos os números naturais cuja soma dos divisores positivos é um número ímpar.

11) (Putnam-76) Seja σ(n) a soma de todos os divisores positivos de n, incluindo 1 e n. Mostre que se $\sigma(n) = 2n + 1$, então n é o quadrado de inteiro ímpar.

12) (OBM-95) O número de divisores positivos comuns de 10^{40} e 20^{30} é:

a) 1271 b) 1272 c) 1273 d) 1274 e) 1275

13) (OBM Jr.-97) Mostre que existem infinitos inteiros positivos n satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:

i. n é ímpar;

ii. n possui exatamente 1200 divisores positivos;

iii. existem exatamente 1997 triângulos retângulos, dois a dois não congruentes, de lados inteiros e n como medida de um dos catetos.

14) (Hong Kong-98) Chama-se n de número perfeito se a soma dos divisores positivos de n é igual a 2n. Supondo que n é um número perfeito ímpar, mostre que n possui ao menos 3 fatores primos distintos.

15) (Argentina-95) Para cada inteiro positivo n seja p(n) o número de pares ordenados (x, y) de inteiros positivos tais que $1/x + 1/y = 1/n$. Por exemplo, para n = 2 os pares são (3, 6), (4, 4), (6, 3). Logo, p(2) = 3.

a) Determinar p(n) para todo n e calcular p(1995).

b) Determinar todos os pares n tais que p(n) = 3.

16) (Índia-97) Para um número natural n, seja d(n) o número de divisores de n. Considere a seqüência {n, d(n), d(d(n)), ...}. Para quais valores de n esta seqüência não contém um quadrado perfeito?

17) (Japão-93) Seja d(n) o maior número inteiro ímpar que divide um inteiro n. Suponha que D(n) e T(n) são definidos por $D(n) = d(1) + d(2) + ... + d(n)$, $T(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n$. Prove que existem infinitos números inteiros positivos n tais que $3D(n) = 2T(n)$.

18) (Europa Média-2012) Para todo inteiro positivo n seja d(n) o número de divisores positivos de n. Existem dois números inteiros a e b tais que $d(a) = d(b)$ e $d(a^2) = d(b^2)$, porém $d(a^3) = d(b^3)$?

19) (Báltica-2012) Seja d(n) o número de divisores positivos de n. Determine todas as triplas (n, k, p), onde n e k são inteiros positivos e p é um número primo, tal que $n^{d(n)} - 1 = p^k$.

20) (Rússia-2000) Um inteiro positivo *n* é chamado *perfeito* se a soma de todos os seus divisores, excluindo *n*, é igual a *n*. Prove que se um número perfeito maior do que 28 é divisível por 7 então ele é divisível por 49.

21) (Lista de Treinamento Cone Sul-2009) a) Encontre um inteiro positivo n tal que $n^2 - 1$ tem exatamente 10 divisores positivos.
b) Mostre que $n^2 - 4$ não pode ter exatamente 10 divisores positivos para qualquer inteiro positivo n.

22) (Provincial-2000) De um número natural n sabe-se que tem exatamente seis divisores positivos contando de 1 a n. Também sabe-se que o produto de cinco desses divisores é igual a 648. Determinar n.

23) (IMO-90 shortlist) O inteiro 9 pode ser escrito como uma soma de dois inteiros consecutivos: 9 = 4 + 5; todavia também pode ser escrito como a soma de (mais do que um) inteiros positivos consecutivos em exatamente duas maneiras: 9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4. Existe algum inteiro que pode ser escrito como uma soma de 1990 inteiros consecutivos e que pode ser escrito como uma soma de (mais do que um) inteiros positivos consecutivos em exatamente 1990 maneiras?

24) (Irlanda-99) Determine todos os inteiros positivos n com a propriedade que a quarta potência do número de divisores positivos de n é igual a n.

25) (Irlanda-98) Determine todos os inteiros positivos n que possuem exatamente 16 divisores inteiros positivos $d_1, d_2, \ldots, d_{16}$ tais que $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{16} = n$, $d_6 = 18$ e $d_9 - d_8 = 17$.

26) (IMO-98) Para qualquer inteiro positivo n, seja d(n) o número de divisores positivos de n (incluindo 1 e n).

Determine todos os inteiros positivos k tais que $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ para algum n.

27) (Iberoamericana Universitária-98) Os divisores positivos de um número inteiro positivo n estão escritos em ordem crescente a partir do número 1. $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < n$. Encontrar o número n, se sabe-se que: $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$ e $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1$.

28) (IMO-2002) Seja $n \geq 2$ um inteiro positivo, com divisores $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Prove que $S = d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k < n^2$ e determine quando S divide n^2.

6.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) (Bay Area-99) Prove que entre 12 inteiros consecutivos existe ao menos um que é menor que a soma dos seus divisores próprios (os divisores próprios de um inteiro positivo n são os inteiros positivos diferentes de 1 e n que dividem n).

2) Determine todos os números naturais n tais que n é igual ao produto de todos os divisores positivos de n, excetuando n.

3) (Ceará-99) Seja n um inteiro positivo e $\sigma(n)$ a soma de todos os divisores positivos de n. Prove que $\sigma(n) + \sigma(n - 1) > 5n/2$, para todo n.

4) (Argentina-98) Determinar todos os números inteiros n tais que $(n + 98)/(n + 19)$ é um número inteiro. 4

5) Seja $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ um número perfeito par. Demonstrar que o produto dos divisores positivos de n é igual a n^k.

6) (Auckland-98) Determine todos os números primos p tais que o número $p^2 + 11$ possui exatamente 6 divisores positivos (incluindo 1 e o próprio número).

7) Determinar o inteiro $n = 2^x.3^y$, sabendo que $n/6$ e $n/9$ têm, respectivamente, 8 divisores positivos e 10 divisores positivos a menos que n.

resolvido

8) (International Mathematical Talent Search) Para todo inteiro positivo $n \geq 2$, seja $P(n)$ o produto dos divisores positivos de n (incluindo 1 e n). Determine o menor inteiro n para o qual $P(n) = n^{10}$.

9) (Catalunha) Um número natural possui 2 fatores primos e 8 divisores positivos. Calcule este número sabendo que a soma dos seus divisores é 320.

10) (Putnam-69) Seja n um inteiro positivo tal que $n + 1$ é divisível por 24. Prove que a soma de todos os divisores de n é divisível por 24.

11) (IMO-83 longlist) Qual dos números 1, 2, ..., 1983 possui o maior número de divisores positivos?

12) Mostrar que, se n é número perfeito par, então $8n + 1$ é um quadrado perfeito.

13) (Putnam-83) Quantos inteiros positivos dividem ao menos um dos números 10^{40} ou 20^{30}?

14) Seja $\sigma(n)$ a soma dos divisores positivos de n, prove que, para todo número natural m, existem números naturais x, y tais que $x - y \geq m$ e $\sigma(x^2) = \sigma(y^2)$.

15) (Báltica-92) Seja $d(n)$ o número de divisores positivos de um número natural n (incluindo 1 e n). Prove que existem infinitos números n tais que $n/d(n)$ é um inteiro.

16) Suponha que n é um número natural com pelo menos 4 divisores distintos e $0 < d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ são os quatro menores divisores de n. Determine todos os números n tais que $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

17) (Lista de Treinamento Cone Sul-95) Seja n um inteiro fixo e u, v inteiros positivos tais que mmc (u, v) = n. Prove que o número de tais pares (u, v) é igual ao número de divisores positivos de n^2.

18) (Argentina-2000) Dizemos que um inteiro maior que 1 é admissível se cada um dos resultados da multiplicação dos divisores do número (positivos e distintos) é maior que 1/5 do número. Por exemplo, 6 é

admissível porque seus divisores são 1, 2, 3 e 6, e os produtos: 1.2 = 2, 1.3 = 3, 1.6 = 6 e 3.6 = 18 são todos maiores que 6/5. Determinar todos os inteiros positivos admissíveis.

19) (Índia-97) Um divisor d > 0 de um inteiro n é chamado de divisor unitário se mdc (d, n/d) = 1. Suponha que n é um inteiro positivo tal que a soma dos seus divisores unitários é igual a 2n. Prove que n não pode ser um inteiro ímpar. (Por exemplo, os divisores unitários de 12 são 1, 3, 4, 12)

20) (Argentina-2000) Determinar qual é a quantidade de pares de números naturais (a, b) que verificam simultaneamente que 4620 é múltiplo de a, 4620 é múltiplo de b e b é múltiplo de a.

21) (Irã-2012) Sejam a e b inteiros positivos tais que o número de divisores positivos de a, b e ab é 3, 4 e 8, respectivamente. Determine o número de divisores de b^2.

22) (Mathcounts) Quantos quadrados perfeitos são divisores de $1! \times 2! \times 3! \times \ldots \times 9!$?

23) (Middle European-2010) Determine todos os inteiros positivos n que satisfazem as seguintes duas condições:
(a) n possui ao menos quatro diferentes divisores positivos;
(b) para cada divisor a e b de n satisfazendo $1 < a < b < n$, o número $b - a$ divide n.

24) (Báltica-2000) Determine todos os inteiros positivos n tais que n é igual a 100 vezes o número de divisores positivos de n.

25) (Báltica-96) Seja d(n) o número de divisores positivos de um inteiro positivo n (incluindo 1 e n). Sejam $a > 1$ e $n > 0$ inteiros tais que $a^n + 1$ é um primo. Prove que $d(a^n - 1) \geq n$.

26) (Finlândia-2010) Determine o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $n! = 1.2.3\ldots(n-1)$ possui ao menos 2010 divisores positivos.

27) (África do Sul-2008) Determine o número de divisores positivos de 2008^8 que são menores que 2008^4.

28) (Irã-2012) Sejam a e b inteiros positivos tais que os números de divisores positivos de a, b, ab é 3, 4 e 8, respectivamente. Determine o número de divisores positivos de b^2.

CONGRUÊNCIA

7.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

A congruência aritmética é uma ferramenta poderosa na resolução de questões envolvendo divisibilidade. É muito comum encontrar problemas de congruência em todo tipo de prova de olimpíada: regional, nacional e internacional.

Pela simplicidade de sua aplicação, costuma ser cobrada tanto em provas de olimpíadas de matemática de ensino fundamental quanto de ensino médio.

7.2. RESUMO TEÓRICO

Seja <u>m</u> um inteiro positivo fixo ($m > 0$) e sejam <u>a</u>, <u>b</u>, <u>c</u> e <u>d</u> inteiros quaisquer. São válidas as seguintes propriedades:

(1) $a \equiv a \pmod{m}$

(2) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$

(3) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e se $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$

(4) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e se $n \mid m$, com $n > 0$, então $a \equiv b \pmod{n}$

(5) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e se $c > 0$, então $ac \equiv bc \pmod{mc}$

(6) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e se a, b, m são todos divisíveis pelo inteiro $d > 0$, então $a/d \equiv b/d \pmod{m/d}$

(7) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e se $c \equiv d \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ e $ac \equiv bd \pmod{m}$

(8) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ e $ac \equiv bc \pmod{m}$

(9) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ para todo inteiro positivo n

(10) Se $ac \equiv bc \pmod{m}$ e se o mdc $(c, m) = d$, então $a \equiv b \pmod{m/d}$

(11) Se $ac \equiv bc \pmod{m}$ e se o mdc $(c, m) = 1$, então $a \equiv b \pmod{m}$

(12) Se $ac \equiv bc \pmod{p}$, com p primo, e se p não divide c, então $a \equiv b \pmod{p}$

Demonstração:

(1) Como 0 é divisível por qualquer inteiro $m > 0$, então:
$0 = a - a = qm \Rightarrow a = qm + a \Rightarrow a \equiv a \pmod{m}$

(2) Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = qm + b \Rightarrow b = (-q)m + a \Rightarrow$
$b \equiv a \pmod{m}$

(3) Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = q_1m + b$. Se $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow$
$b = q_2m + c$

Assim, $a = q_1m + q_2m + c \Rightarrow a = (q_1 + q_2) + c \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

(4) Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = q_1m + b$. Se $n \mid m \Rightarrow m = nq_2 \Rightarrow$ $a = q_1q_2n + b \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$

(5) Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = qm + b$. Multiplicando esta expressão por $c > 0 \Rightarrow ac = q(mc) + bc \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$

(6) Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = qm + b$ (i). Se $d \mid a$, $d \mid b$ e $d \mid m \Rightarrow$ a/d, b/d e m/d são todos inteiros.

Dividindo (i) por d temos que: $(a/d) = q(m/d) + (b/d) \Rightarrow$

$a/d \equiv b/d \pmod{m/d}$

(7) Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = q_1m + b$ (i). Se $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow$ $c = q_2m + d$ (ii).

Somando (i) e (ii) $\Rightarrow a + c = (q_1 + q_2)m + b + d \Rightarrow$

$a + c \equiv b + d \pmod{m}$

Multiplicando (i) e (ii) $\Rightarrow ac = q_1q_2m^2 + q_1dm + q_2bm + bd \Rightarrow$

$ac = (q_1q_2m + q_1d + q_2b)m + bd \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$

(8) Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = qm + b$ (i). Somando c aos 2 lados de (i):

$a + c = qm + b + c \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}$

Multiplicando (i) por c $\Rightarrow ac + (qc)m + bc \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$

(9) Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = qm + b$ (i).

Elevando a n os dois lados de (i) temos que:

$$a^n = (b + qm)^n \Rightarrow a^n = b^n + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} b^{n-p}(qm)^p \Rightarrow$$

$$a^n = b^n + m\left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{p} b^{n-p}q^p m^{p-1}\right) \Rightarrow a^n = b^n + mk \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

(10) Se $ac \equiv bc \pmod{m} \Rightarrow ac - bc = qm \Rightarrow c(a - b) = qm$ (i).

Se $\text{mdc}(c, m) = d \Rightarrow \text{mdc}(c/d, m/d) = 1$

Dividindo (i) por d $\Rightarrow (c/d)(a - b) = q(m/d)$.

Como $\text{mdc}(c/d, m/d) = 1 \Rightarrow (m/d) \mid (a - b) \Rightarrow a - b = k(m/d) \Rightarrow$ $a \equiv b \pmod{m}$.

(11) Aplicando $d = 1$ na propriedade anterior, o resultado segue diretamente.

(12) Analogamente, fazendo $m = p$ na propriedade anterior, temos o resultado diretamente.

7.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) Demonstrar que $2^{70} + 3^{70}$ é divisível por 13.

1ª Solução:

I) $2^6 = 64 = 65 - 1 = 5.13 - 1 \Rightarrow 2^6 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow$

$(2^6)^{11} \equiv (-1)^{11} \pmod{13} \Rightarrow 2^{66} \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow$
$(2^{66})2^4 \equiv (-1)2^4 \pmod{13} \Rightarrow 2^{70} \equiv -16 \pmod{13} \Rightarrow$
$2^{70} \equiv -3 \pmod{13}$
II) $3^3 = 27 = 26 + 1 = 2.13 + 1 \Rightarrow 3^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow$
$(3^3)^{23} \equiv (1)^{23} \pmod{13} \Rightarrow 3^{69} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow$
$(3^{69})3 \equiv 1.3 \pmod{13} \Rightarrow 3^{70} \equiv 3 \pmod{13}$
III) Somando as duas congruências: $2^{70} + 3^{70} \equiv -3 + 3 \pmod{13} \Rightarrow$
$2^{70} + 3^{70} \equiv 0 \pmod{13}$

2ª Solução:
$2^2 + 3^2 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 2^2 \equiv -3^2 \pmod{13} \Rightarrow$
$(2^2)^{35} \equiv (-3^2)^{35} \pmod{13} \Rightarrow$
$2^{70} \equiv -3^{70} \pmod{13} \Rightarrow 2^{70} + 3^{70} \equiv 0 \pmod{13}$

2) (Malásia-2010) Determine o último dígito de $7^1 \times 7^2 \times 7^3 \times \ldots \times 7^{2009} \times 7^{2010}$.
3

Solução:
$7^1 \times 7^2 \times 7^3 \times \ldots \times 7^{2009} \times 7^{2010} = 7^{1+2+3+\ldots+2009+2010} = 7^{\frac{(2011)(2010)}{2}} = 7^{2021055}$
Note que $7^4 = 2401 \Rightarrow 7^4 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 7^{4k} \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow$
$7^{4k+1} \equiv 7 \pmod{10} \Rightarrow$
$7^{4k+2} \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow 7^{4k+3} \equiv 3 \pmod{10}$
Desde que $2021055 = 4k + 3$ segue diretamente que $7^{2021055} \equiv 3 \pmod{10}$
Logo, o algarismo das unidades de $7^1 \times 7^2 \times 7^3 \times \ldots \times 7^{2009} \times 7^{2010}$ é 3.

3) (Pará-2003) Determine o algarismo das unidades de:
$$1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + \ldots + 98^{98} + 99^{99}.$$

Solução:
9 Seja d_n o algarismo das unidades de n. Inicialmente notemos que o algarismo das unidades de n^n é igual ao algarismo das unidades de $d_n^{\,n}$.
Sabemos que se n acaba em 1, então n^n também acaba em 1. Da mesma forma, se n acaba em 5 então n^n acaba em 5 e se n acaba em 6 então n^n também acaba em 6.

- Analisemos os números n que acabam em 2:
$2^2 = 4$, $2^4 = \ldots6$, $2^6 = \ldots4$, $2^8 = \ldots6$, $2^{10} = \ldots4$, $2^{12} = \ldots6$, $2^{22} = \ldots4$, $2^{32} = \ldots6$

Portanto, se o dígito das dezenas de n é par então n^n acaba em 4 e se o dígito das dezenas de n é ímpar então n^n acaba em 6.

- Analisemos os números n que acabam em 3:
$3^3 = \ldots7$, $3^5 = \ldots3$, $3^7 = \ldots7$, $3^9 = \ldots3$, $3^{11} = \ldots7$, $3^{13} = \ldots3$, $3^{23} = \ldots7$, $3^{33} = \ldots3$

Portanto, se o dígito das dezenas de n é par então n^n acaba em 7 e se o dígito das dezenas de n é ímpar então n^n acaba em 3.

- Analisemos os números n que acabam em 4:

$4^4 = ...6$, $4^6 = ...6$, $4^8 = ...6$,

Portanto, n^n sempre acaba em 6.

- Analisemos os números n que acabam em 7:

$7^7 = ...3$, $7^9 = ...7$, $7^{11} = ...3$, $7^{13} = ...7$, $7^{15} = ...3$, $7^{17} = ...7$, $7^{27} = ...3$, $7^{37} = ...7$

Portanto, se o dígito das dezenas de n é par então n^n acaba em 3 e se o dígito das dezenas de n é ímpar então n^n acaba em 7.

- Analisemos os números n que acabam em 8:

$8^8 = ...6$, $8^{10} = ...4$, $8^{12} = ...6$, $8^{14} = ...4$, $8^{16} = ...6$, $8^{18} = ...4$, $8^{28} = ...6$, $8^{38} = ...4$

Portanto, se o dígito das dezenas de n é par então n^n acaba em 6 e se o dígito das dezenas de n é ímpar então n^n acaba em 4.

- Analisemos os números n que acabam em 9:

$9^9 = ...7$, $9^{11} = ...7$, $9^{13} = ...7$, $9^{15} = ...7$

Portanto, n^n sempre acaba em 7.

A partir dos valores calculados acima, concluímos que podemos separar o somatório em duas partes:

i) algarismo das dezenas de n par: o algarismo das unidades da soma dos números em uma mesma dezena é igual ao algarismo das unidades da soma $1^1 + 2^2 + ... + 9^9$ (item b), ou seja, igual a 5.

ii) algarismo das dezenas de n ímpar: o algarismo das unidades da soma dos números em uma mesma dezena é igual ao algarismo das unidades de $11^{11} + 12^{12} + ... + 19^{19}$, que é igual ao algarismo das unidades de $1 + 6 + 3 + 6 + 5 + 6 + 7 + 4 + 7 = 45$, que é igual a 5.

Como dentro de $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{99} + a_{100}$ existem 5 dezenas com dígito das dezenas par e 5 com dígito das dezenas ímpar, o algarismo das unidades de S é igual ao algarismo das unidades de $5(5) + 5(5) = 50$, ou seja, o algarismo das unidades de S é igual a 0.

4) (Inglaterra-2000) Mostre que para cada inteiro positivo n, $121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n$ é divisível por 2000.

Solução:

Note inicialmente que $2000 = 2^4.5^3$

i) $1900 \equiv -4 \pmod{2^4} \Rightarrow 1900^n \equiv (-4)^n \pmod{2^4} \Rightarrow$
$1900^n - (-4)^n \equiv 0 \pmod{2^4}$

ii) $121 \equiv 25 \pmod{2^4} \Rightarrow 121^n \equiv 25^n \pmod{2^4} \Rightarrow 121^n - 25^n \equiv 0 \pmod{2^4}$

Somando estas congruências:

$121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n \equiv 0 \pmod{2^4}$ (*)

iii) $1900 \equiv 25 \pmod{5^3} \Rightarrow 1900^n \equiv 25^n \pmod{5^3} \Rightarrow$

$1900^n - 25^n \equiv 0 \pmod{5^3}$

iv) $121 \equiv -4 \pmod{5^3} \Rightarrow 121^n \equiv (-4)^n \pmod{5^3} \Rightarrow$

$121^n - (-4)^n \equiv 0 \pmod{5^3}$

Somando estas congruências:

$121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n \equiv 0 \pmod{5^3}$ (**)

Como mdc $(2^4, 5^3) = 1$ então podemos transformar as congruências (*) e (**) em:

$121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n \equiv 0 \pmod{24.5^3} \Rightarrow$

$2000 \mid 121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n$

5) (Canadá-2009) Determine todos os pares ordenados (a, b) tais que a e b são inteiros e $3^a + 7^b$ é um quadrado perfeito.

Solução:

Suponhamos que $3^a + 7^b = n^2$. Analisando módulo 4:

$3^a + 7^b \equiv (-1)^a + (-1)^b \pmod{4}$

Assim, deve-se ter a ímpar e b par ou a par e b ímpar.

1º caso: a ímpar e b par $\Rightarrow b = 2c$

$3^a + 7^{2c} = n^2 \Rightarrow 3^a = (n - 7^c)(n + 7^c)$

Perceba que 3 não pode dividir simultaneamente $n - 7^c$ e $n + 7^c$.

Assim: $3^a = 2.7^c + 1$ (1)

Se $c = 0$ tem-se que $a = 1$, ou seja, $a = 1$ e $b = 0$ é uma solução.

Suponhamos agora que $c \geq 1$.

$3^3 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 3^6 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 3^{6k} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow$

$3^{6k+1} \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 3^{6k+2} \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow$

$3^{6k+3} \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 3^{6k+4} \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 3^{6k+5} \equiv 5 \pmod{7}$

Pela equação (1) deve-se ter 3^a deixa resto 1 na divisão por 7, implicando que $a = 6k$, que é uma contradição, pois a deve ser ímpar.

caso 2: a par e b ímpar $\Rightarrow a = 2c$

Assim, tem-se que $7^b = (n - 3^c)(n + 3^c)$

Como $n - 3^c$ e $n + 3^c$ não podem ser simultaneamente divididos por 7 então conclui-se que $7^b = 2.3^c + 1$.

Se $c = 1$ tem-se que $b = 1$ e assim $a = 2$ e $b = 1$ é uma solução.

Suponha agora que $c > 1 \Rightarrow 7^b \equiv 1 \pmod{9}$

$7^3 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 7^{3k} \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 7^{3k+1} \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow$

$7^{3k+2} \equiv 4 \pmod{9}$

Logo, conclui-se que b é múltiplo de 3: $b = 3d$

Fazendo $y = 7^d$: $y^3 - 1 = 2.3^c \Rightarrow 2.3^c = (y - 1)(y^2 + y + 1) \Rightarrow$

$y - 1 = 2.3^u$ e $y^2 + y + 1 = 3^v$

Entretanto, $3y = (y^2 + y + 1) - (y - 1)^2$, implicando que $3 \mid y$, que é uma contradição, pois $3 \mid y - 1$.

Assim, as únicas soluções são $a = 1$ e $b = 0$ ou $a = 2$ e $b = 1$.

6) (Lituânia-94) Resolva a equação $1! + 2! + 3! + \ldots + n! = m^3$ nos números naturais.

Solução:

Vamos resolver um problema mais geral, que é determinar todas as soluções de $1! + 2! + 3! + \ldots + n! = m^k$, nos naturais n, k e m.

Designemos $S_n = 1! + 2! + 3! + \ldots + n!$.

Quando $k = 1$ claramente $m = S_n$ é a única solução.

Analisemos agora $k = 2$.

Note inicialmente que $d! \equiv 0 \pmod{10}$ para todo $d \geq 5$ e

$S_4 = 1 + 2 + 6 + 24 = 33 \equiv 3 \pmod{10}$.

Assim, o algarismo das unidades de S_n para $n \geq 4$ é igual a 3. Entretanto sabemos que não existe nenhum quadrado perfeito que possua 3 como algarismo das unidades, implicando que não exista solução natural $n \geq 4$ para a equação $1! + 2! + \ldots + n! = m^2$.

Para $n = 1 \Rightarrow m = 1$. Para $n = 2 \Rightarrow$ m não é inteiro.

Para $n = 3 \Rightarrow m = 3$.

Analisemos agora quando $k \geq 3$.

Se $n \geq 2 \Rightarrow S_n \equiv 0 \pmod{3}$. Porém $m^k \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow$

$m \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow m^k \equiv 0 \pmod{27}$ com $k \geq 3$.

Sabemos que $d! \equiv 0 \pmod{27}$ para todo $d \geq 9$.

Como $S_8 = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 + 5040 + 40320 = 46233$ e

$46233 \equiv 9 \pmod{27}$, então $S_n \equiv 9 \pmod{27}$.

Como para $n \geq 8$ temos $m^k \equiv 0 \pmod{27}$ e $S_n \equiv 9 \pmod{27}$, então não temos soluções naturais para o problema para $n \geq 8$.

Se $2 \leq n \leq 7$ temos que:

$S_2 = 3$, $S_3 = 9$, $S_4 = 33$, $S_5 = 153$, $S_6 = 873$ e $S_7 = 5913$, e nenhum destes valores é uma k-ésima potência de algum $k \geq 3$.

Obviamente, $n = 1$ e $m = 1$ é uma solução.

Finalmente, vemos que as soluções naturais (n, m, k) de

$1! + 2! + 3! + \ldots + n! = m^k$ são dadas por: $(1, 1, k)$ e $(3, 3, 2)$.

7) (Argentina-2009) Determine todos os inteiros n tais que $20^n - 13^n - 7^n$ é divisível por 309.

Solução:

Como $309 = 3.103$ então devemos analisar a divisibilidade por 3 e por 103.

$20^n - 13^n - 7^n \equiv (-1)^n - 1^n - 1^n \pmod{3} \Rightarrow$

$20^n - 13^n - 7^n \equiv (-1)^n - 2 \pmod{3}$

Assim, $3 \mid 20^n - 13^n - 7^n \Leftrightarrow$ n é ímpar

i) $20^6 \equiv 23 \pmod{103} \Rightarrow 20^{6k} \equiv 23^k \pmod{103} \Rightarrow$

$20^{6k+1} \equiv 20.23^k \pmod{103} \Rightarrow$

$20^{6k+3} \equiv 69.23^k \pmod{103} \Rightarrow 20^{6k+5} \equiv 99.23^k \pmod{103}$

ii) $13^6 \equiv 23 \pmod{103} \Rightarrow 13^{6k} \equiv 23^k \pmod{103} \Rightarrow$

$13^{6k+1} \equiv 13.23^k \pmod{103} \Rightarrow 13^{6k+3} \equiv 34.23^k \pmod{103} \Rightarrow$

$13^{6k+5} \equiv 81.23^k \pmod{103}$

iii) $7^6 \equiv 23 \pmod{103} \Rightarrow 7^{6k} \equiv 23^k \pmod{103} \Rightarrow$

$7^{6k+1} \equiv 7.23^k \pmod{103} \Rightarrow$

$7^{6k+3} \equiv 34.23^k \pmod{103} \Rightarrow 7^{6k+5} \equiv 18.23^k \pmod{103}$

Se $n = 6k + 1$: $20^n - 13^n - 7^n \equiv 20.23^k - 13.23^k - 7.23^k \pmod{103} \Rightarrow$

$20^n - 13^n - 7^n \equiv 0 \pmod{103}$

Se $n = 6k + 3$: $20^n - 13^n - 7^n \equiv 69.23^k - 34.23^k - 34.23^k \pmod{103} \Rightarrow$

$20^n - 13^n - 7^n \equiv 23^k \pmod{103}$

Se $n = 6k + 5$: $20^n - 13^n - 7^n \equiv 99.23^k - 81.23^k - 18.23^k \pmod{103} \Rightarrow$

$20^n - 13^n - 7^n \equiv 0 \pmod{103}$

Assim, se $n = 6k + 1$ ou $n = 6k + 5$ tem-se que $309 \mid 20^n - 13^n - 7^n$.

7.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) Prove que existem infinitos números compostos na seqüência:

$$1, 31, 331, 3331, \ldots$$

2) (Bélgica-92) Para quais dos seguintes valores de n $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ é divisível por 5?

a) 1980 b) 1988 c) 1990 d) 1992 e) 2000

3) Se 31^{1995} divide $a^2 + b^2$, prove que 31^{1996} divide ab.

4) (México-87) Demonstre que para qualquer inteiro positivo n, o número $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ é múltiplo de 3804.

5) (México-90) Prove que $n^{n-1} - 1$ é divisível por $(n-1)^2$ para todo inteiro $n > 2$.

6) (México-92) Mostre que 100 divide o número:

$$1 + 11^{11} + 111^{111} + \ldots + 1111111111^{1111111111}.$$

7) (Bélgica-2000) $\sqrt{2000^{2000}}$ é um número que termina com uma grande quantidade de zeros. Andando da direita para a esquerda, o primeiro dígito não nulo é:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) ímpar

8) Mostre que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é divisível por 7.

9) Seja $n > 6$ um inteiro positivo tal que $n - 1$ e $n + 1$ são primos. Mostre que $n^2(n^2 + 16)$ é divisível por 720. A recíproca é verdadeira?

10) (Alberta High School-98) Wei escreve uma lista, em ordem crescente, de todo os inteiros positivos b com a propriedade de que b e 2^b possuem o mesmo dígito das unidades. Qual é o 1998º número que Wei escreve?

11) (Bulgária-2000) Determine o dígito das centenas de:

X $$2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}.$$ 6

12) (Irã-94) Suponha que p é um número primo e maior que 3. Prove que $7^p - 6^p - 1$ é divisível por 43.

✓ **13)** (IMO-64) (a) Determine todos os números naturais <u>n</u> para os quais 7 divide $2^n - 1$.
(b) Prove que não existe um número natural <u>n</u> para o qual 7 divide $2^n + 1$.

14) (Espanha-2004) Determinar os quatro últimos dígitos de 3^{2004}.

15) (Goiás-99) a) Estude o comportamento do resto da divisão por 7 de $2^x - x^2$ sendo x um número inteiro positivo menor ou igual a 20000.
b) Quantos são os inteiros positivos $x \leq 20000$ tais que a diferença $2^x - x^2$ não é divisível por 7?

16) Para que valores de n, $5^n + n^6$ é divisível por 13?

17) (Áustria-Polônia-93) Determine todos os números naturais x, $y \geq 1$ tais que $2^x - 3^y = 7$.

18) (Alemanha-73) Para todo inteiro positivo n, prove que existe um único número N de n dígitos tais que:
i) N é formado somente com os dígitos 1 e 2;
ii) N é divisível por 2^n.

19) (Lista de Treinamento Cone Sul-2004) Prove que, para todo inteiro positivo n, existe um número de n dígitos divisível por 5^n com todos os dígitos ímpares.

20) Prove que se m termina em 5 então $1991 \mid 12^m + 9^m + 8^m + 6^m$.

21) (Tchecoslováquia-93) Determine todos os números naturais n para os quais $7^n - 1$ é múltiplo de $6^n - 1$.

22) (Inglaterra-92) Prove que o número $3^n + 2.17^n$, onde n é um inteiro não nulo, nunca é um quadrado perfeito.

23) (Rio de Janeiro-98) Mostre que o número

$$N = 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998}$$

é divisível por 1998.

24) (Báltica-92) Determine uma progressão aritmética não constante de inteiros positivos tal que cada termo não é a soma de dois quadrados e nem a soma de dois cubos (de inteiros positivos).

25) (Cone Sul-2000) Dizemos que um número é descendente se cada um de seus dígitos é menor do que ou igual ao dígito anterior, da esquerda para a direita. Por exemplo, 4221 e 751 são números descendentes, enquanto 476 e 455 não são descendentes. Determine se existem inteiros positivos *n* para os quais 16^n é descendente.

26) (Vietnã-92) Seja n um inteiro positivo, e f(n) o número de divisores positivos de n que são congruentes a 1 ou − 1 mod. 10, e g(n) o número de divisores positivos de n que são congruentes a 3 ou − 3 mod. 10. Prove que $f(n) \geq g(n)$.

27) (OBM-2008) Um inteiro positivo *n* é chamado de *auto-replicante* se os últimos dígitos de n^2 formam o número *n*. Por exemplo, 25 é auto-replicante pois $25^2 = 625$ Determine a soma de todos os números auto-replicantes com exatamente 4 dígitos (isto é, números auto-replicantes *n* com $1000 \leq n \leq 9999$).

28) (Rússia) Quais inteiros podem ser quadrados perfeitos e terminarem com os 4 últimos dígitos idênticos?

29) (Hong Kong-97) Determine o menor inteiro positivo n tal que $1997^n - 1$ é divisível por 2^{1998}.

30) (OBM-2005) Prove que o número $1^{2005} + 2^{2005} + 3^{2005} + \ldots + 2005^{2005}$ é múltiplo de $1 + 2 + 3 + \ldots + 2005$.

EBA!!

31) (Tailândia-2005) Existem inteiros positivos x, y e z tais que:

$$2548^x + (-2005)^y = (-543)^z?$$

40307

32) (Teste de Seleção Cone Sul-2004) É possível, para algum inteiro positivo n, escrever os números n, n^2 e n^3 utilizando apenas uma vez cada um dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

33) (Balkan Jr.-2001) Determine o máximo divisor comum dos números $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$, quando n = 0, 1, 2, ..., 1999.

34) (Asian Pacific-97) Determine um inteiro n com $100 \leq n \leq 1997$ tal que n divide $2^n + 2$.

35) (Macedônia-2011) Determine todos os números naturais n tais que cada número natural escrito com n – 1 dígitos 1 e um dígito 7 é primo.

7.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) Determine todos os membros da seqüência $a_n = 3^{2n-1} + 2^{n-1}$ $(n \in N)$ que são quadrados perfeitos de algum inteiro positivo.

2) (Lituânia-2004) Assuma que m e n são inteiros positivos. Prove que se mn – 23 é divisível por 24 então $m^3 + n^3$ é divisível por 72.

3) (Lista de Treinamento Cone Sul-2011) Sejam x, y e z inteiros tais que $S = x^4 + y^4 + z^4$ é divisível por 29. Mostre que S é divisível por 29^4. X

Não tá na lista

4) (Rio Grande do Sul-99) Prove que $\mathbf{3^{2N+2} - 8N - 9}$ é divisível por 64 para todo **N** inteiro positivo.

5) (Rússia-87) Prove que $1^{1987} + 2^{1987} + ... + n^{1987}$ não é divisível por (n + 2).

6) (Bay Area-99) Prove que $1993^{1993} + 1994^{1994} + 1995^{1995} + 1996^{1996}$ é divisível por 10.

7) Demonstrar que $A_n = 5^n + 2.3^{n-1} + 1$, é múltiplo de 8 para todo inteiro positivo n.

8) (Manhattan-97) Pode a soma dos dígitos de um número quadrado perfeito ser igual a 1970?

9) Os inteiros 1, 2, 3, ..., 1986 são escritos concatenadamente, um atrás do outro, em alguma ordem, formando um único número. Mostre que, independentemente da ordem o número obtido não é o cubo de um inteiro.

10) (Manhattan-97) Prove que 111...... 111 (81 uns) é divisível por 81.

11) (Moldávia-98) Prove que para todo inteiro positivo n o número $E = 666^n + 648^n + (-1)^n.1684^n$ é divisível por 1998.

12) (Torneio das Cidades-93) Determine todas as potências de 2 que são obtidas pela eliminação do primeiro dígito de outra potência de 2.

13) (Holanda-83) Prove que se $\underline{n}$ é um inteiro positivo ímpar, então os últimos dois dígitos na base dez de $2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ são 28.

14) (Macedônia-97) Para quais números naturais n a soma $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$ é divisível por 10?

15) (Suécia-63) Qual o resto quando dividimos $1234^{567} + 89^{1011}$ por 12?

16) (Número de Ouro-97) Para que valores de n a representação decimal de 11^n tem seus últimos dois dígitos iguais? E seus últimos três dígitos iguais?

17) (Itália-99) Qual o dígito das unidades do número:

$$2^{2^1} + 2^{2^2} + 2^{2^3} + 2^{2^4} + \dots + 2^{2^{1999}}?$$

18) (Argentina) Determine o algarismo m tal que $\underbrace{888...88}_{50}m\underbrace{999...99}_{50}$ seja divisível por 7.

19) (Manhattan-2000) Quantos zeros existe no final do número $9^{999} + 1$?

20) (Hungria-47) Prove que $46^{2n+1} + 296 \cdot 13^{2n+1}$ é divisível por 1947.

21) (Inglaterra-98) Sejam $a_1 = 19$, $a_2 = 98$. Para $n \geq 1$, define-se a_{n+2} como o resto de $a_n + a_{n+1}$ quando dividido por 100. Qual é o resto quando $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1998}^2$ é dividido por 8?

22) (Bielorússia-2001) Determine o resto da divisão de

$$1!.5 + 2!.11 + \dots + k!.(k^2 + 3k + 1) + \dots + 2000!.40601$$

por 2004.

23) (IMO-74 Longlist) Prove que $2^{147} - 1$ é divisível por 343.

24) (IMO-84 Longlist) Determine o menor inteiros positivo m tal que $529^n + m.132^n$ é divisível por 262417 para todo inteiro positivo ímpar n.

25) (IMO-92 Longlist) Seja $P_n = (19 + 92)(19^2 + 92^2)...(19^n + 92^n)$ para cada inteiro positivo n. Determine, com prova, o menor inteiro positivo m, se existe, para o qual P_m é divisível por 33^{33}.

26) (Moscow-82) Determine todos os inteiros positivos n, tais que $n.2^n + 1$ é divisível por 3.

27) (Singapura-2003) Qual é o resto quando $6^{273} + 8^{273}$ é dividido por 49?

28) Demonstre que $1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 1983^{1983}$ não é uma potência inteira da forma m^k, com $k \geq 2$ e m um inteiro positivo.

29) Prove que, para todos os inteiros positivos n, $1492^n - 1770^n - 1863^n + 2141^n$ é divisível por 1946.

30) (Grécia-2007) Se n é um inteiro tal que 4n + 3 é divisível por 11. Determine o resto que n^4 deixa na divisão por 11.

31) (Bulgária-2005) Prove que a equação $x^2 + 2y^2 + 98z^2 = \underbrace{777...77}_{2005}$ não possui soluções inteiras.

32) (Malásia-2010) Sejam m e n números inteiros positivos tais que $2^n + 3^m$ é divisível por 5. Prove que $2^m + 3^n$ é divisível por 5.

33) (Turquia-2012) Determine o menor valor de $n \geq 2012$ de modo que 10 divide o número $1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + ... + n.2^n$.

34) (Báltica-2012) Mostre que $n^n + (n + 1)^{n+1}$ é composto para infinitos inteiros positivos n.

35) (Vietnã-92) Prove que para todo número inteiro positivo t,

$$1 + 2^t + 3^t + ... + 9^t - 3(1 + 6^t + 8^t)$$

é divisível por 18.

36) (IMO-75) Seja A a soma dos dígitos decimais de 4444^{4444}, e B a soma dos dígitos decimais de A. Determine a soma dos dígitos decimais de B.

TEOREMAS DE EULER E FERMAT

8.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

Tópico bastante específico, sendo cobrado apenas em provas de olimpíadas de ensino médio. Observa-se também que é mais comum encontrar questões envolvendo as aplicações dos teoremas de Euler e Fermat nas últimas fases de olimpíadas nacionais ou em olimpíadas internacionais.

8.2. RESUMO TEÓRICO

Função de Euler: Função de Euler é uma função aritmética, simbolizada por $\phi(n)$, definida para todo inteiro positivo $\underline{n}$ de modo que $\phi(n)$ é igual ao número de inteiros positivos que não superam $\underline{n}$ e que são primos com $\underline{n}$.

Teorema: "A função ϕ de Euler é uma função aritmética multiplicativa, ou seja, sendo $\underline{r}$ e $\underline{s}$ dois inteiros positivos tais que o **mdc (r, s) = 1**, então $\boldsymbol{\phi(r.s) = \phi(r).\phi(s)}$."

Demonstração:

Notemos inicialmente que se r ou s vale 1 a proposição é diretamente verdadeira.

Suponhamos agora que $r > 1$ e $s > 1$. Para esta demonstração utilizaremos uma tabela contendo todos os inteiros positivos de até r.s, organizados em r colunas e s linhas.

1	2	... h	... r
r + 1	r + 2	... r + h	... 2r
2r + 1	2r + 2	... 2r + h	... 3r
...	...	... ...	... ...
(s − 1)r + 1	(s − 1)r + 2	... (s − 1)r + h	... sr

Como na primeira linha o número de inteiros menores que r e primos com r é igual a $\phi(r)$, temos que existem apenas $\phi(r)$ colunas em que os primeiros termos destas colunas são primos com r. Desde que mdc (qr + h, r) = mdc (h, r), os inteiros da h-ésima coluna são primos com r se e somente se h é primo com r. Assim, concluímos que quando o primeiro elemento de cada coluna (que são os elementos da primeira linha) é primo com r, então todos os elementos destas colunas são primos com r.

Deste modo, existem exatamente $\phi(r)$ colunas formadas com inteiros que são todos primos com r.
Analisemos somente estas colunas em que todos os inteiros são primos com r.
Como nestas colunas temos que mdc (h, r) = 1, então o número de elementos de cada coluna (h, r + h, 2r + h, ..., (s − 1)r + h) que são primos com s é igual a $\phi(s)$, pois para isto ocorrer basta que mdc (h, s) seja igual a 1.
Concluímos, portanto, que o número de inteiros menores que rs e que são primos com rs é igual a $\phi(r)\phi(s)$, ou seja, $\phi(rs) = \phi(r)\phi(s)$.

Teorema: "Se n é um inteiro positivo tal que $n > 1$, então $\phi(n) = n - 1$ se e somente se n é primo."

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se $n > 1$ é um número primo, então cada inteiro entre 1 e $n - 1$ é primo com n, ou seja, $\phi(n) = n - 1$.
($\Leftarrow$) Seja n um inteiro tal que $\phi(n) = n - 1$. Suponhamos, por absurdo, que n é composto, ou seja, n = a.b, com a e b inteiros positivos tal que $1 < a \leq b < n$. Deste modo, entre os inteiros 1, 2, 3, 4, ..., n, teríamos pelo menos dois inteiros que não seriam primos com, que são a e n (lembre-se que podemos ter a = b), e assim $\phi(n) \leq n - 2$, que é um absurdo. Portanto n é primo.

Teorema: "Se p é primo e se k é um inteiro positivo, então $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = (p-1)p^{k-1}$".

Demonstração:

Inicialmente notemos que mdc $(n, p^k) = 1 \Leftrightarrow$ mdc $(n, p) = 1$.
Assim, os inteiros entre 1 e p^k que não são primos com p^k são todos os inteiros da forma x.p $(1 \leq x \leq p^{k-1})$.
Ou seja, estes p^{k-1} inteiros são: p, 2p, 3p, ..., $(p^{k-1})p$, e todos os outros inteiros entre 1 e p^k são todos primos com p^k.
Portanto, o número de inteiros entre 1 e p^k e que são primos com p^k é igual a $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = (p-1)p^{k-1}$.

Teorema: "Se $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}$ é a decomposição canônica do inteiro positivo $n > 1$, então:

$$\varphi(n) = \left(p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}\right)\left(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}\right)...\left(p_r^{k_r} - p_r^{k_r-1}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

"

Demonstração:

Como $p_1, p_2, \ldots, p_r$ são todos primos, então o máximo divisor comum de qualquer par destes primos é igual a 1.
Portanto, como $\phi(n)$ é uma função aritmética multiplicativa:

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}) = \varphi(p_1^{k_1})\varphi(p_2^{k_2})\ldots\varphi(p_r^{k_r}) = \left(p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}\right)\left(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}\right)\ldots\left(p_r^{k_r} - p_r^{k_r-1}\right) =$$

$$= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

Teorema de Euler: "Se $\underline{n}$ é um inteiro positivo e se o mdc $(a, n) = 1$, então $a^{\varphi(n)} \equiv 1$ **(mod. n)**."

Demonstração:
Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(n)}$ os números entre 1 e $\underline{n}$ e primos com $\underline{n}$. Temos que $a.a_i$ é primo com $\underline{n}$ (nem $\underline{a}$ e nem a_i possui fatores comuns com $\underline{n}$) e $a.a_i \equiv x$ (mod. n), onde $1 \le x \le n$.
Suponhamos, por absurdo, que $\underline{x}$ possui fatores comuns $\underline{d}$ com $\underline{n}$ então $a.a_i \equiv x$ (mod. n) $\Leftrightarrow$ $n \mid a.a_i - x$ $\Rightarrow$ $a.a_i - x = nt$ $\Leftrightarrow$ $a.a_i = nt + x$ $\Rightarrow$ $d \mid a.a_i$ $\Rightarrow$ $\underline{a}$ ou a_i possui fator comum com $\underline{d}$, isto é, $\underline{a}$ ou a_i possui fator comum com $\underline{n}$, que é um absurdo, pois $\underline{a}$ e a_i são primos com $\underline{n}$.
Desta forma, $\underline{x}$ é primo com $\underline{n}$ e $1 \le x \le n$, implicando que $x = a_j$

$a.a_i \equiv a_j$ (mod. n)
$a.a_1 \equiv a_{j1}$ (mod. n)
$a.a_2 \equiv a_{j2}$ (mod. n)
$a.a_3 \equiv a_{j3}$ (mod. n)
....
$a.a_{\phi(n)} \equiv a_{j\phi(n)}$ (mod. n)

Multiplicando todas estas congruências:
$a^{\phi(n)}.a_1.a_2\ldots a_{\phi(n)} = a_{j1}.a_{j2}\ldots a_{j\phi(n)}$
Agora basta provar que $a_{jm} \neq a_{jm'}$, quando $m \neq m'$
$\therefore$ Supondo $a_{jm} = a_{jm'}$ $\Rightarrow$ $a.a_m \equiv a.a_{m'}$ (mod. n) $\Leftrightarrow$ $a \equiv a_{m'}$ (mod. n) $\Rightarrow$ $a_m = a_{m'}$, ou seja: $a_m \neq a_{m'}$ $\Rightarrow$ $a_{jm} \neq a_{jm'}$ $\quad 1 \le a_m \le n \quad 1 \le a_{m'} \le n$
Assim $\{a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(n)}\} = \{a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{j\phi(n)}\}$ e
$a^{\phi(n)}.a_1.a_2\ldots a_{\phi(n)} \equiv a_{j1}.a_{j2}\ldots a_{j\phi(n)}$ (mod. n) $\Leftrightarrow$ $a^{\phi(n)} \equiv 1$ (mod. n)

Teorema de Fermat: "Se $\underline{p}$ é um primo e se $\underline{p}$ não divide o inteiro $\underline{a}$, então $a^{p-1} \equiv 1$ **(mod. p)**."

Demonstração:
Se mdc $(a, p) = 1$, então vale o Teorema de Euler:
$a^{\phi(p)} \equiv 1$ (mod. p) $\Leftrightarrow$ $a^{p-1} \equiv 1$ (mod. p)

Corolário: "Se $\underline{p}$ é um primo, então $a^p \equiv a$ (mod. p) qualquer que seja o inteiro $\underline{a}$."

Definição: Chama-se ordem de $\underline{a}$ módulo de $\underline{n}$ o menor inteiro positivo $\underline{k}$ tal que $a^k \equiv 1$ (mod. n).

Teorema: Seja $\underline{a}$ um inteiro positivo que tem ordem $\underline{k}$ módulo $\underline{n}$. Então $a^x \equiv 1$ (mod. n) se e somente se $\underline{k}$ divide $\underline{x}$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $k \mid x$, ou seja, $x = kq$, onde que é inteiro. Como $\underline{k}$ é a ordem de a módulo n temos:

$a^k \equiv 1$ (mod. n) $\Rightarrow$ $(a^k)^q \equiv (1)^q$ (mod. n) $\Rightarrow$ $a^x \equiv 1$ (mod. n)

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $a^x \equiv 1$ (mod. n)

Pela divisão euclidiana entre $\underline{x}$ e $\underline{k}$ temos: $x = kq + r$, onde $0 \le r < k$

Deste modo: $a^x = a^{kq+r} = (a^k)^q a^r$. Como $\underline{k}$ é a ordem de a módulo $\underline{n}$ temos que $a^k \equiv 1$ (mod. n) e pela suposição $a^x \equiv 1$ (mod. n) $\Rightarrow$

$(a^k)^q a^r \equiv 1$ (mod. n) $\Rightarrow$ $a^r \equiv 1$ (mod. n).

Como $\underline{k}$ é o menor inteiro positivo tal que $a^k \equiv 1$ (mod. n) e $0 \le r < k$, temos que $r = 0$, ou seja, $\underline{k}$ divide $\underline{x}$.

Notemos que este teorema também é válido quando mdc $(a, n) = 1$ e $x = \phi(n)$.

Corolário: Seja $\underline{a}$ um inteiro que tem ordem $\underline{k}$ módulo $\underline{n}$. Assim, a^x tem ordem $\underline{k}$ módulo $\underline{n}$ se e somente se mdc $(x, k) = 1$.

Demonstração:

Notemos que se mdc $(x, k) = 1$ então a^x também tem ordem $\underline{k}$ módulo $\underline{n}$.

Por outro lado, se a^x tem ordem $\underline{k}$ módulo $\underline{n}$ e o mdc $(x, k) = d$ então:

$1 \equiv a^{\frac{xk}{d}} \equiv (a^k)^{x/d} \equiv (a^x)^{k/d}$ (mod. n).

Deste modo, k divide k/d, o que implica que d = mdc $(x, k) = 1$.

Definição: Chama-se raiz primitiva de inteiro positivo $\underline{n}$ um inteiro $\underline{a}$ tal que o mdc $(a, n) = 1$ e a ordem de $\underline{a}$ módulo $\underline{n}$ é $\phi(n)$. Em outras palavras, $\underline{a}$ é raiz primitiva módulo $\underline{n}$ quando $\phi(n)$ é o menor valor que pode assumir $\underline{x}$ tal que a^x é congruente a 1 módulo $\underline{n}$.

Teorema: Um número inteiro positivo n tem raiz primitiva se e somente se $n = 2; 4; p^{\alpha}$ ou $2p^{\alpha}$, onde p é primo.

8.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) (Lista de Treinamento Cone Sul-99) São dados vários inteiros cuja soma é 1496. É possível que a soma de suas sétimas potências seja:
a) 1999?

Só vi moço tenre

b) 2000?

Solução:

Fazer

Pelo Teorema de Fermat: $x^7 \equiv x \pmod{7} \Rightarrow$

$x_1^7 + x_2^7 + \ldots + x_n^7 \equiv x_1 + x_2 + \ldots + x_n \pmod{7} \Rightarrow$

$x_1^7 + x_2^7 + \ldots + x_n^7 \equiv 5 \pmod{7}$

a) Como $1999 \equiv 4 \pmod{7}$ então não é possível

b) Sim, é possível. Considere que $1 + 1 + 1 + .. + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 1496$, onde existem 1488 números iguais a 1 no somatório.

Assim: $1^7 + 1^7 + 1^7 + \ldots + 1^7 + 2^7 + 2^7 + 2^7 + 2^7 = 1488 + 512 = 2000$

2) (Inglaterra-2007) Determine quatro números primos menores que 100 que são fatores de $3^{32} - 2^{32}$.

Solução:

Fatorando obtém-se:

$3^{32} - 2^{32} = (3^2 - 2^2)(3^2 + 2^2)(3^4 + 2^4)(3^8 + 2^8)(3^{16} + 2^{16}) \Rightarrow$

$3^{32} - 2^{32} = 5.13.97.(3^8 + 2^8)(3^{16} + 2^{16}) \Rightarrow$ 5, 13 e 97 são fatores primos de $3^{32} - 2^{32}$.

Pelo Teorema de Fermat: $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ e $2^{16} \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow$

$3^{16} \equiv 2^{16} \pmod{17} \Rightarrow 3^{32} \equiv 2^{32} \pmod{17} \Rightarrow$

17 é fator primo de $3^{32} - 2^{32}$.

Logo, 5, 13, 17 e 97 são fatores primos de $3^{32} - 2^{32}$.

3) (Rússia) Prove que se um inteiro n é primo com 10, a 101ª potência de n termina com os mesmo 3 dígitos de n. Por exemplo, 1233^{101} termina com os dígitos 233, e 37^{101} termina com os dígitos 037.

Solução:

Se mdc (n, 10) = 1 podemos aplicar o Teorema de Euler:

i) $\phi(8) = 2^3 - 2^2 = 4 \Rightarrow n^4 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (n^4)^{25} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow$

$n^{100} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 8 \mid n^{100} - 1$

ii) $\phi(125) = 5^3 - 5^2 = 100 \Rightarrow n^{100} \equiv 1 \pmod{125} \Rightarrow 125 \mid n^{100} - 1$

Como mdc (8, 125) = 1 segue que $8.125 \mid n^{100} - 1 \Rightarrow 1000 \mid n^{100} - 1 \Rightarrow$

$n^{100} - 1 \equiv 0 \pmod{1000} \Rightarrow n^{100} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow$

$n^{101} \equiv n \pmod{1000} \Rightarrow n^{101}$ termina com os mesmos 3 dígitos de n.

4) (Indonésia-2009) Determine todos os inteiros positivos $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2009\}$ tais que $4n^6 + n^3 + 5$ é divisível por 7.

Solução:

Inicialmente perceba que se n é divisível por 7 então:

$4n^6 + n^3 + 5 \equiv 5 \pmod{7}$

Suponhamos agora que n não é divisível por 7. Pelo Teorema de Fermat tem-se que $n^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

Assim, segue que $4n^6 + n^3 + 5 \equiv n^3 + 2 \pmod{7}$

Deste modo, deve-se procurar números n tais que $n^3 \equiv 5 \pmod{7}$

Se $n \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow n^3 \equiv 1 \pmod{7}$;
Se $n \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow n^3 \equiv 1 \pmod{7}$
Se $n \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow n^3 \equiv 6 \pmod{7}$;
Se $n \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow n^3 \equiv 1 \pmod{7}$
Se $n \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow n^3 \equiv 6 \pmod{7}$;
Se $n \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow n^3 \equiv 6 \pmod{7}$

Desta forma, não existe n de modo que $n^3 \equiv 5 \pmod{7}$, implicando que não existe n inteiro tal que $4n^6 + n^3 + 5$ é divisível por 7.

5) (OBM-91) Mostre que existe um número da forma $\underset{n \text{ noves}}{1999\ldots991}$ com mais de dois noves que é múltiplo de 1991.

Solução:

Notemos que $\underset{n\ 9's}{1999\ldots991} = \underset{n+1\ 0's}{2000\ldots00} - 9 = 2.10^{n+1} - 9 = 2000.10^{n-2} - 9$ e que $1991 = 11.181$.

Assim, como $2000 \equiv 9 \pmod{1991} \Rightarrow$
$\underset{n\ 9's}{1999\ldots991} \equiv 9(10^{n-2} - 1) \pmod{1991}$.

Para que $\underset{n \text{ noves}}{1999\ldots991}$ seja múltiplo de 1991, devemos ter:
$9(10^{n-2} - 1) \equiv 0 \pmod{1991} \Rightarrow$
$10^{n-2} \equiv 1 \pmod{1991}$, uma vez que 9 e 1991 são primos entre si.
Sendo 181 e 10 primos entre si, pelo teorema de Fermat:
$10^{180} \equiv 1 \pmod{181}$.
Analogamente, para 11 e 10: $10^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 10^{180} \equiv 1 \pmod{11}$.
Assim, temos que $10^{180} - 1$ é múltiplo de 181 e 11 e, portanto, múltiplo do mínimo múltiplo comum de 11 e 181, que é 1991.
Em outras palavras: $10^{180} \equiv 1 \pmod{1991}$.
Desta forma, para $n = 182 \Rightarrow \underset{182 \text{ noves}}{1999\ldots991} \equiv 0 \pmod{1991}$.

6) (OBM-2009) Considere um primo q da forma $2p + 1$, sendo $p > 0$ um primo. Prove que existe um múltiplo de q cuja soma dos algarismos na base decimal é menor ou igual a 3.

Solução:

Para $p = 2$ tem-se $q = 5$ e aí 10 satisfaz a questão.
Para $p > 2$, sabe-se pelo teorema de Fermat que $10^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow$
$q \mid 10^{q-1} - 1 \Rightarrow q \mid 10^{2p} - 1 \Rightarrow q \mid (10^p - 1)(10^p + 1)$
Se $q \mid 10^p + 1$ acabou a questão
Se $q \mid 10^p - 1$ então $10^p \equiv 1 \pmod{q}$

Se existir um número x menor que p tal que $10^x \equiv 1 \pmod{q}$, então n divide p. Entretanto p é primo, fazendo com que o menor número x tal que $10^x \equiv 1 \pmod{q}$ é $x = p$. Multiplicando p vezes a congruência $10^p \equiv 1 \pmod{q}$ por 10 tem-se:

$10^{p+1} \equiv 10 \pmod{q}$

$10^{p+2} \equiv 10^2 \pmod{q}$

$10^{p+3} \equiv 10^3 \pmod{q}$

...

$10^{2p} \equiv 10^p \pmod{q}$

Pelo fato de o menor número x tal que $10^x \equiv 1 \pmod{q}$ é $x = p$, então todos estes p restos são distintos. Além disso, por serem restos da divisão por $q = 2p + 1$, então estes restos devem ir de 1 até $q - 1 = 2p$, ou seja, assumem 2p valores possíveis. Observe também que não existem dois restos consecutivos.

Assim, dentre os valores dos p restos é possível escolher dois de modo que: $10^n \equiv x \pmod{q}$ e $10^m \equiv q - x - 1 \pmod{q}$

Somando: $10^n + 10^m \equiv q - 1 \pmod{q} \Rightarrow 10^m + 10^n + 1 \equiv 0 \pmod{q}$

7) (IMO-78) Considere que m e n são inteiros positivos com $m < n$. Os últimos 3 dígitos de 1978^m são os mesmos dos últimos 3 dígitos de 1978^n. Determine m e n tal que $m + n$ possui o menor valor possível.

Solução:

Nós queremos que $1978^n - 1978^m = 1978^m(1978^{n-m} - 1)$ seja múltiplo de $1000 = 8.125$.

Deste modo, 8 deve dividir 1978^m, sendo portanto $m \geq 3$, e 125 deve dividir $1978^{n-m} - 1$.

Como mdc $(125, 1978) = 1$, pelo Teorema de Euler:

$1978^{\phi(125)} \equiv 1 \pmod{125}$.

Como $\phi(125) = 125 - 25 = 100$, então $1978^{100} \equiv 1 \pmod{125}$.

Assim, o menor inteiro x tal que $1978^x \equiv 1 \pmod{125}$ deve ser um divisor de 100. Então existem 9 possibilidades para x: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100. Para reduzir o trabalho, podemos notar que o menor y tal que $1978^y \equiv 1 \pmod{5}$ é 4, e assim temos que x deve ser múltiplo de 4, restando testar 4, 20, 100.

Inicialmente notemos que $1978 \equiv 978 \pmod{125}$.

$978^2 \equiv 109 \pmod{125} \Rightarrow 978^4 \equiv 6 \pmod{125} \Rightarrow$

$978^{20} \equiv 6^5 \equiv 36.91 \equiv 26 \pmod{125}$.

Então, o menor valor de x tal que $1978^x \equiv 1 \pmod{125}$ é $x = 100$, implicando que a solução do problema é $m = 3$ e $n = 103$.

8.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

fazer) desigualdades são importantes

1) Seja n um inteiro positivo. Demonstre que $\varphi(n) \geq \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

2) Seja n um inteiro composto. Prove que $\varphi(n) \leq n - \sqrt{n}$.

3) Sejam p e q primos distintos. Demonstrar: $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1$ (mod. pq).

4) Determine todos os primos p tais que $2^p + p^2$ é também primo.

5) Prove que todo número natural que não é divisível por 2 ou por 5 possui um múltiplo positivo cujos dígitos (na base 10) são todos iguais a 1.

6) Se p e q são primos distintos tais que $a^p \equiv a$ (mod. q) e $a^q \equiv a$ (mod. p) demonstre que $a^{pq} \equiv a$ (mod. pq).

7) (Leningrado-90) Sejam a e n inteiros positivos e $\phi(n)$ o número de inteiros positivos menores que n e primos com n. Prove que $\phi(a^n - 1)$ é divisível por n.

8) (Kazaquistão-2000) Seja p um primo dividindo $2^{2^k} + 1$. Prove que 2^{k+1} divide $p - 1$.

9) (Bielo Rússia-98) Prove que existe uma infinidade de inteiros da forma $1998k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, tais que todos os dígitos de sua representação decimal são iguais.

10) (Rússia) Quais os possíveis resultados para os restos quando n^{100} é dividido por 125, quando n assume todos os valores inteiros positivos.

11) (Rússia-96) Mostre que na progressão aritmética com primeiro termo 1 e razão 729, existem infinitas potências de 10.

12) (Berkeley Math Circles-99) Prove que existem infinitos termos na progressão aritmética 8, 21, 34, 47, ... que são formados somente pelo dígito 9, ou seja, da forma 999...99.

13) (Putnam-85) Seja a_n a seqüência definida por $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3^{a_n}$. Seja b_n o resto quando a_n é dividido por 100. Quais valores de b_n ocorrem para infinitos valores de n?

14) (Coréia do Sul-99) Determine todos os números naturais x, y que satisfazem $xy = 2^x - 1$.

15) (Teste de Seleção China IMO-88) Define-se $x_n = 3x_{n-1} + 2$ para todos os inteiros positivos n. Prove que um valor inteiro pode ser escolhido para x_0 tal que 1988 divide x_{100}.

16) (Macedônia-2003) Sejam p, q, r números primos. Resolva a equação $p^{2q} + q^{2p} = r$.

17) (Iberoamericana-88 shortlist) Achar um número natural $N > 0$ tal que $N = a_p a_{p-1} \ldots a_1$ (a_i são os algarismos de N, $a_p \neq 0$), então, $2N = a_1 a_p a_{p-1} \ldots a_2$.

18) (Lista de Treinamento Cone Sul-99) Seja $p > 2$ um primo. Prove que os fatores de $2^p - 1$ são da forma $2kp + 1$, com $k \in \mathbb{N}$.

19) (OBM-2008) Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que $\dfrac{5^{n-2} - 1}{n}$ é um inteiro

20) (Tailândia-2005) Determine o menor inteiro n tal que:

$$2549 \mid (n^{2545} - 2541).$$

~~1275~~

X Ignore

21) (Hong Kong-2000) Prove que para todo inteiro n, $n^{30} - n^{14} - n^{18} + n^2$ é divisível por 46410.

22) (Bulgária-95) Determine o número de inteiros $n > 1$, para os quais o número $a^{25} - a$ é divisível por n, para todo a.

23) (Irã-95) Determine todos os primos p para os quais o número $\dfrac{2^{p-1} - 1}{p}$ é o quadrado de um inteiro?

LEGAL

Não sei nada

24) (OBM-2000) É possível encontrar duas potências de 2, distintas e com o mesmo número de algarismos, tais que uma possa ser obtida através de uma reordenação dos dígitos da outra?

25) Prove que existem infinitos números compostos n que satisfazem a relação $n \mid a^{n-1} - a$, para todo inteiro a.

Digitalizado com CamScanner

26) (Hong Kong-97) Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que $2^n + 1$ é divisível por n. Determine todos os n's que são números primos.

27) (Torneio das Cidades-2000) Demonstrar que existem infinitos inteiros positivos ímpares n para os quais o número $2^n + n$ é um número composto.

28) (Rússia) Escrevendo em ordem as potências consecutivas do número dois obtemos: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, ...Note que a seqüência dos dígitos da unidade se repete com período 4: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ...
Prove que, iniciando de algum ponto na seqüência, os últimos dez dígitos dos números da seqüência também se repetem periodicamente. Determine o comprimento do período e o número de inteiros na seqüência para os quais essa periodicidade observada ocorre.

29) (Cone Sul-2000) Existe um inteiro positivo divisível pelo produto de seus algarismos e tal que esse produto é maior que 10^{2000}?

30) (Iugoslávia-95) Seja p um número primo. Prove que o número

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\underbrace{33\ldots3}_{p}\underbrace{44\ldots4}_{p}\underbrace{55\ldots5}_{p}\underbrace{66\ldots6}_{p}\underbrace{77\ldots7}_{p}\underbrace{88\ldots8}_{p}\underbrace{99\ldots9}_{p} - 123456789$$

é divisível por p, onde os ... indicam que o correspondente dígito aparece p vezes consecutivamente.

31) (Bulgária-96) Determine todos os números primos p e q para os quais $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)/pq$ é um inteiro.

32) (Seleção da Romênia para IMO) Prove que não existe um inteiro $n > 1$ tal que n divida $3^n - 2^n$.

33) (IMO-71) Prove que é possível encontrar um conjunto infinito de inteiros positivos da forma $2^n - 3$ (onde n é um inteiro positivo) tal que todo par destes inteiros são primos relativos.

34) (IMO-93 shortlist) Um número natural n é dito que possui a propriedade P, se toda vez que n divide $a^n - 1$ para todo inteiro a, n^2 necessariamente também divide $a^n - 1$.
a) Mostre que todo número primo n possui a propriedade P.
b) Mostre que existem infinitos números compostos n que possuem a propriedade P.

35) (IMO-84) Determine um par de inteiros positivos a, b tais que $ab(a+b)$ não é divisível por 7, mas $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ é divisível por 7^7.

36) (IMO-99) Determine todos os pares (n, p) de inteiros estritamente positivos tais que:

- p é primo,
- $n \leq 2p$, e
- $(p-1)^n + 1$ é divisível por n^{p-1}.

37) (Turquia-95) Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
a) Para todo inteiro positivo a, $n \mid a^n - a$.
b) Para todo divisor primo p de n, p^2 não divide n e $p - 1 \mid n - 1$.

38) (Áustria-Polônia-88) Determine a soma de todos os divisores de $N = 19^{88} - 1$ que são da forma $d = 2^a.3^b$ com $a, b > 0$.

39) (Bulgária-95) Determine todos os números primos p e q tais que o número $2^p + 2^q$ é divisível por p.q. 2, 2 e (2,3) (3,2)

40) Prove que se p é um primo da forma $4k + 3$, então $2p + 1$ também é primo se e somente se $2p + 1$ divide $2^p - 1$.

41) (IMO-84 Shortlist) Prove que:
a) Existem infinitos triplas de inteiros positivos m, n e p tais que $4mn - m - n = p^2 - 1$?
b) Não existe inteiros positivos m, n e p tais que $4mn - m - n = p^2$?

8.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) Prove que $2^{1997.1996} - 1$ é divisível por 1997^2.

2) (Rússia) Seja N um número par não divisível por 10.
a) Qual é o dígito das dezenas de N^{20}, e
b) qual é o dígito nas unidades de N^{200}?

3) (Indonésia-2009) Determine todos os inteiros $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2009\}$ tais que $4n^6 + n^3 + 5$ é divisível por 7.

4) (Províncias do Atlântico-2000) Sem utilizar calculadoras, mostre que $3^{2701} \equiv 3 \pmod{2701}$. Note que $2701 = 37 \cdot 73$.

5) (Hong Kong-2000) a) Seja a, n, k inteiros positivos. Prove que a^{4n+k} e a^k possuem o mesmo dígito das unidades.
b) Determine o dígito das unidades do número $2^{1999} + 7^{1999} + 9^{1999}$.

6) Prove que para todo inteiro positivo $n > 1$, a soma dos inteiros positivos menores que n e que são primos com n é igual a $\frac{1}{2}n.\varphi(n)$.

7) (Canadá-83) Prove que para todo número primo p, existem infinitos inteiros positivos n tais que p divide $2^n - n$.

8) Mostre que se p é um primo da forma $4n + 3$ então não existe x tal que $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$

9) (Torneio das Cidades-99) Triplas de inteiros a, b, c para as quais $a + b + c = 0$ são consideradas. Para cada tripla calculamos o inteiro $d = a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}$.
a) Podemos ter $d = 2$?
b) Podemos ter d primo?

10) (México-91) Se n é inteiro não divisível por 5, demonstre que ao dividir $n^4 - 1991$ por 5, o resto é zero.

$n^4 \equiv 1 \pmod{5}$
-1991 -1991 . $n^4 - 1990 \equiv 0$

11) Mostrar que $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$

12) (Tcheco-Eslováquia-97) Vários inteiros são dados (alguns dos quais podem ser iguais) cuja soma é igual a 1492. Decida se a soma das sétimas potências destes números pode ser igual a:
a) 1996;
b) 1998.

13) Existe um inteiro positivo c menor do que 40, para o qual 41 divide $2^c - 1$?

14) (IMTS-2001) Calcule o resto quando $1776^{1492!}$ é dividido por 2000.
Obs. $n! = 1.2.3...n$.

15) Determine o menor número inteiro positivo n com a propriedade que $2^{2005} \mid 17^n - 1$.

16) Se n é um inteiro positivo arbitrário, o número:

$$3n^{13} + 4n^{11} + n^7 + 3n^5 + 3n$$

é divisível por 7?

17) (Estônia-2000) Mostre que para todo inteiro $a > 1$, existe um número primo p tal que $1 + a + a^2 + ... + a^{p-1}$ é composto.

✓ quadro

18) Prove que existe uma potência de 2 cujos os últimos mil dígitos são todos uns e dois.

19) Se p e q são primos ímpares tais que $2p = q + 1$, e a é primo com 2, p e q, demonstre que $a^{2(p-1)} \equiv 1$ (mod. 16pq).

20) Demonstrar que $\phi(n^2) = n.\phi(n)$ para todo inteiro positivo <u>n</u>.

21) (Turquia-2011) Qual o resto quando $2011^{2011^{2011^{2011^{2011}}}}$ é divisível por 19?

22) (Vietnã-75) Determine todos os termos da progressão aritmética $-1, 18, 37, 56, ...$ cujo único dígito é 5.

23) (Romênia-97) Seja $a > 1$ um número inteiro. Mostre que o conjunto $\{a^2 + a - 1, a^3 + a^2 - 1, ...\}$ contém um subconjunto infinito tal que todos seus membros são primos relativos.

24) (Bulgária-95) Prove que para todo inteiro positivo n a seguinte proposição é válida:
"O número 7 é um divisor de $3^n + n^3$ se e somente se 7 é um divisor de $3^n.n^3 + 1$."

25) Seja $n > 1$ um inteiro ímpar. Prove que n não divide $3^n + 1$.

26) (OBM-91 Jr.) Calcule a soma de todas as frações irredutíveis da forma $\dfrac{a}{1991}$ com a inteiro e $0 < \dfrac{a}{1992} < 1991$

[illegible]

27) (Mongólia-98) Prove que existem números naturais m, n e k tais que $31 \mid m^{100} + n^{100} + k^{100}$ mas 31 não divide mnk.

28) (Putnam-72) Mostre que dado um número primo p ímpar, existem infinitos números inteiros positivos n para os quais $p \mid n.2^n + 1$.

Podia ter feito melhor

AV

29) (Canadá-2003) Determine os últimos três dígitos do inteiro $2003^{2002^{2001}}$.

30) (IMO-2005) Considere a sequência a_1, a_2, ..., definida por $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ para todo inteiro positivo n. Determine todos os inteiros positivos que são primos relativos com todo termo da sequência.

31) (Canadá Preparação IMO-98) Seja $n \geq 3$ um número natural. Prove que $1989 \mid n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$.

32) (Coréia-98) Para um número natural n, seja $\varphi(n)$ a quantidade de números menores que n e primos com n, e seja $\psi(n)$ o número de fatores primos de n. Mostre que se $\varphi(n)$ divide $n - 1$ e $\psi(n) \leq 3$, então n é primo.

33) (Turquia-2010) Quantos inteiros positivos n com $0 \leq n < 840$ existem tais que 840 divide $n^8 - n^4 + n - 1$?

34) (Lista de Treinamento Cone Sul-2012) Ache todos os inteiros positivos n tais que vale $a^{n+1} \equiv a \pmod{n}$ para todo a inteiro.

35) (Lista de Treinamento Cone Sul-2012) Ache todos os primos p e q tais que $p^p + q^q + 1$ seja divisível por pq.

36) (Teste de Seleção Cone Sul-2010) Prove que se $\dfrac{2^n - 2}{n}$ é um inteiro, então $\dfrac{2^{2^n - 1} - 2}{2^n - 1}$ também é um inteiro. Já vi resolução e não tentei. Bacana

37) (IMO-2003 Shortlist) Determine o menor inteiro positivo k tal que existam inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_k$ com $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_k^3 = 2002^{2002}$.

38) (Unesco-95) Se $p \neq 2$ é um número primo, a e n são inteiros positivos tais que $a^p - 1$ é divisível por p^n, então prove que $a - 1$ é divisível por p^{n-1}.

39) (OBM-2002) Seja n um inteiro positivo. Definimos $\phi(n) = \left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{p_k}\right) \cdot n$, onde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são os fatores primos distintos de n. Prove que para todo $m \geq 1$, existe n tal que $\phi(n) = m!$.

FUNÇÃO MÁXIMO INTEIRO

9.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

Outro tópico bastante específico de olimpíadas de matemática, encontrado basicamente em provas de ensino médio. Da mesma forma, é muito raro encontrar sobre função máximo inteiros em olimpíadas regionais, sendo mais comum em olimpíadas nacionais e internacionais.

9.2. RESUMO TEÓRICO

Definição: Seja x um número real. Denota-se por [x] o maior inteiro menor ou igual a x. Esta função [x] é chamada de função máximo inteiro ou função degrau. Exemplos: $[2] = 2$, $[3{,}14] = 3$, $[-\sqrt{3}\,] = -2$

Propriedades:

(1) $x = [x] + \theta;\ \ 0 \le \theta < 1$

(2) $x - 1 < [x] \le x < [x] + 1,\ \ x \in \Re$

(3) $[n + \theta] = n,\ $ n inteiro e $0 \le \theta \le 1$

(4) $\left[\dfrac{x}{m}\right] = \left[\dfrac{[x]}{m}\right],\ \ x \in \Re,\ m \in Z;$

(5) $[n + x] = n + [x],\ \ n \in Z,\ x \in \Re$

(6) O inteiro mais próximo de x é $\left[x + \dfrac{1}{2}\right]$

Teorema: O expoente de um primo p na fatoração, em fatores primos, de n!, onde n é um número natural, é:

$$a = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

Número de dígitos: Seja n um inteiro positivo possuindo x dígitos. Assim, podemos afirmar que $10^x < n \le 10^{x-1}$.
Aplicando logaritmo na base 10 nesta última expressão: $x < \log n \le x - 1$.
Assim, podemos afirmar que $[\log n] = x - 1 \Rightarrow x = [\log n] + 1$.
Portanto, o número de dígitos x de um inteiro positivo n é $x = [\log n] + 1$.

9.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) (Furman University-96) Calcule: $\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt[3]{124}\right]$.

a) 401 b) 402 c) 403 d) 404 e) nda

Solução:

se $1 \le x \le 7 \Rightarrow [x^{1/3}] = 1$; se $8 \le x \le 26 \Rightarrow [x^{1/3}] = 2$;
se $27 \le x \le 64 \Rightarrow [x^{1/3}] = 3$; se $64 \le x \le 124 \Rightarrow [x^{1/3}] = 4$.
$S = 1.(7 - 1 + 1) + 2.(26 - 8 + 1) + 3.(64 - 27 + 1) + 4.(124 - 64 + 1) \Rightarrow$
$S = 7 + 38 + 114 + 244 \Rightarrow S = 403$.

2) Calcule o valor de $\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1.000.000}}\right]$.

Solução:

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

Para k = 1, 2, 3, ... temos $\sqrt{k+1} > \sqrt{k} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

Aplicando, para a inequação da esquerda, k = 0, 1, 2, ..., n − 1, e somando todas estas inequações, temos: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-1$

Aplicando, para a inequação da direita, k = 1, 2, ..., n, e somando todas estas inequações, temos: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1}-2$

Ou seja: $2\sqrt{n+1}-2 < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-1$

Como $\sqrt{1.000.001} \cong \sqrt{1.000.000} = 1.000$, para n = 1.000.000:

$1998 < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 1999$

Assim, podemos afirmar que $\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1.000.000}}\right] = 1998$

3) (Argentina-97) Achar todos os números naturais *n* tais que $[n^2/5]$ é um número primo. Observação: Os colchetes indicam a parte inteira do número que encerram. Por exemplo, $[100/5] = 20$, $[121/5] = 4$, etc.

Solução:

i) $n = 5k \Rightarrow [n^2/5] = [25k^2/5] = [5k^2] = 5k^2 \Rightarrow [n^2/5]$ é primo somente quando $k = 1 \Rightarrow [n^2/5] = 5$

ii) $n = 5k \pm 1 \Rightarrow [n^2/5] = [(25k^2 \pm 10k + 1)/5] = [5k^2 \pm 2k + 1/5] = 5k^2 \pm 2k = k(5k \pm 2) \Rightarrow [n^2/5]$ é primo quando $k = 1 \Rightarrow$

$[n^2/5] = 3$ ou $[n^2/5] = 3 \Rightarrow n = 6$ ou $n = 4$
iii) $n = 5k \pm 2 \Rightarrow [n^2/5] = [(25k^2 \pm 20k + 4)/5] = [5k^2 \pm 4k + 4/5] =$
$= 5k^2 \pm 4k = k(5k \pm 4) \Rightarrow$ nunca é primo
Assim temos somente as soluções $n = 4$ ou $n = 6$.

4) (Moldávia-99) Prove que a diferença entre o produto dos números naturais não nulos pares, que não são maiores de 2000, e o produto dos números naturais ímpares, que não são maiores que 1999, é divisível por 2001. Determine também a mais alta potência de 2001 que divide esta diferença.

Solução:
Pares $= 2.4.6.8...2000 = 2^{1000}.1000!$

Ímpares $= 1.3.5.7...1999 = \dfrac{2000!}{2^{1000}.1000!}$

Assim, $D = 2^{1000}.1000! - \dfrac{2000!}{2^{1000}.1000!} = \dfrac{2^{2000}(1000!)^2 - 2000!}{2^{1000}.1000!}$

Temos que $2001 = 3.23.29$
$\therefore a = [1000/3] + [1000/3^2] + [1000/3^3] + [1000/3^4] + [1000/3^5] +$
$+ [1000/3^6] = 498$
$\therefore b = [1000/23] + [1000/23^2] = 44$
$\therefore c = [1000/29] + [1000/29^2] = 35$
$\therefore a' = [2000/3] + [2000/3^2] + [2000/3^3] + [2000/3^4] + [2000/3^5] +$
$+ [2000/3^6] = 996$
$\therefore b' = [2000/23] + [2000/23^2] = 89$
$\therefore c' = [2000/29] + [2000/29^2] = 70$
Como existem menos números entre 1 e 1000 e entre 1 e 2000 divisíveis por 29 do que por 23 e 3, então basta analisar os expoente de 29. Notemos também que $c' = 2c$, ou seja, é possível tirar em evidência 29^{70} no numerador de D. Como a expressão de D está dividida por 1000!, o maior expoente de 29 que divide o denominador de D é igual a $c = 35$. Assim o maior expoente de 29 que divide D é $x = 70 - 35 \Rightarrow x = 35$. Deste modo, podemos afirmar que D é divisível por $(2001)^{35}$.

5) (Canadá-98) Determine o número de soluções reais a da equação: $\left[\dfrac{1}{2}a\right] + \left[\dfrac{1}{3}a\right] + \left[\dfrac{1}{5}a\right] = a$. Aqui, se $\underline{x}$ é um número real, então $[x]$ denota o maior inteiro que é menor ou igual que x.

Não traí

Solução:
Seja $a = 30k + r$, onde k é um inteiro qualquer e r é um número real entre 0 e 29. Então: $\left[\dfrac{1}{2}a\right] = \left[\dfrac{1}{2}(30k + r)\right] = 15k + \left[\dfrac{r}{2}\right]$.

Analogamente: $\left[\frac{1}{3}a\right] = 10k + \left[\frac{r}{3}\right]$ e $\left[\frac{1}{5}a\right] = 6k + \left[\frac{r}{5}\right]$

Portanto: $\left[\frac{1}{2}a\right] + \left[\frac{1}{3}a\right] + \left[\frac{1}{5}a\right] = a \Rightarrow$

$15k + \left[\frac{r}{2}\right] + 10k + \left[\frac{r}{3}\right] + 6k + \left[\frac{r}{5}\right] = 30k + r \Rightarrow \quad k = r - \left[\frac{r}{2}\right] - \left[\frac{r}{3}\right] - \left[\frac{r}{5}\right]$

Sabemos que r é um real qualquer entre 0 e 29. Por outro lado, como k é inteiro, então necessariamente temos que r deve também ser um inteiro. Observamos que para cada valor inteiro de r temos um valor inteiro para $r - \left[\frac{r}{2}\right] - \left[\frac{r}{3}\right] - \left[\frac{r}{5}\right]$, dando exatamente uma solução para k. Para cada r $(0 \le r \le 29)$, $a = 30k + r$ apresenta um resto diferente na divisão por 30, implicando que não existam dois valores diferentes de r dando o mesmo valor para a. Como temos 30 inteiros entre 0 e 29 (que são os valores possíveis de r), temos 30 valores possíveis para a.

9.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) Prove que $\left[\sqrt[k]{x}\right] = \left[\sqrt[k]{[x]}\right]$ $x \ge 0$, $k \in \mathbb{Z}_+^*$.

2) (Bélgica-99) $[x]$ designa o maior inteiro menor ou igual a x. O conjunto de soluções em $\Re$ da equação $[x+1] = \left[\frac{x+2}{2}\right]$ é:

a) um intervalo aberto b) um intervalo meio aberto
c) um intervalo fechado d) unitário
e) vazio

3) (OBM-2000) A notação $\lfloor x \rfloor$ significa o maior inteiro que não supera x. Por exemplo, $\lfloor 3,5 \rfloor = 3$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$. O número de inteiros positivos x para os quais $\left\lfloor x^{\frac{1}{2}} \right\rfloor + \left\lfloor x^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = 10$ é:

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

4) (University of South Carolina-95) O valor de $\log_{10} 2$ é $0,301...$ Quantos dígitos decimais possui 5^{80}?

a) 56 b) 57 c) 58 d) 59 e) 60

5) (OBM-95) O maior inteiro menor ou igual a $\dfrac{3^{31}+2^{31}}{3^{29}+2^{29}}$ é:

a) 4 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

6) Determine o maior inteiro x tal que 14^x divide 300!. x = 98

7) (OBM-2008) Se x é um número real, denotamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro que é menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ e $\lfloor -2{,}1 \rfloor = -3$. Calcule o valor da soma:

$$\left\lfloor \sqrt[4]{1} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[4]{2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[4]{3} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[4]{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \sqrt[4]{2008} \right\rfloor.$$

8) (Bélgica-99) A representação decimal de 2^{1999} consiste de m dígitos e a representação decimal de 5^{1999} de n dígitos. A soma m + n é:

a) menor que 1998 b) 1998 c) ~~1999~~ d) 2000 e) maior que 2000

9) (OBM-2007) Todo número real a pode ser escrito de forma única como $a = \lfloor a \rfloor + \{a\}$, em que $\lfloor a \rfloor$ é inteiro e $0 \le \{a\} < 1$. Chamamos $\lfloor a \rfloor$ *parte inteira* de a e $\{a\}$ *parte fracionária* de a. Se $x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 4{,}2$, $y + \lfloor z \rfloor + \{x\} = 3{,}6$ e $z + \lfloor x \rfloor + \{y\} = 2$, quanto vale $x - y + z$?

A) −1 **B)** −0,5 **C)** 0 **D)** 0,5 **E)** 1

Revisar solução depois

10) (Inglaterra-84) Seja N um inteiro positivo. Determine, com justificativa, o número de soluções x no intervalo $1 \le x \le N$ da equação $x^2 - [x^2] = (x - [x])^2$, onde [x] indica o maior inteiro $\le$ x.

11) Determine o número de zeros em que termina representação decimal de 1000!.

12) Ache todas as soluções reais de $[x] + \left[\sqrt{1998x}\right] = 1998$. ($[y]$ denota o único inteiro tal que $[y] \le y < [y] + 1$). não entendi

13) (Rio de Janeiro-87) Prove que, para cada inteiro positivo n, o menor inteiro que excede $\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n}$ é divisível por 2^{n+1}.

14) (OBM-92) Prove que existe um natural n tal que a expansão decimal de n^{1992} começa com 1992 algarismos iguais a 1.

15) (Argentina-97) Determinar o último dígito antes do conjunto de zeros na representação do número: $19! + 20! + 21! + \ldots + 96! + 97!$.

16) (Rússia-89) Qual é o menor número natural n para o qual a equação $\left[\frac{10^n}{x}\right] = 1989$ possui uma solução inteira x?

17) (Inglaterra-96) Para todo número real x, seja $[x]$ o maior inteiro que é menor ou igual a x. Define-se $q(n) = \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Determine todos os inteiros positivos n para os quais $q(n) > q(n+1)$.

18) (Cone Sul-98) Prove que, pelo menos para 30% dos naturais n entre 1 e 1.000.000, o primeiro dígito de 2^n é 1.

19) (Repúblicas Tcheca e Eslovaca-98) Determine todos os números reais x tais que $x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor = 88$.

20) (Índia-89) Determine todos os inteiros positivos n não quadrados perfeitos tais que $\left[\sqrt{n}\right]^3 \mid n^2$, onde $[x]$ denota a parte inteira de x.

21) (Alemanha-2007) Seja a um inteiro positivo. Quantas inteiros não negativos x satisfazem $\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a+1}\right]$?

22) (República Tcheca-2005) Determine todos os números reais x tais que $\frac{x}{x+4} = \frac{5[x]-7}{7[x]-5}$, onde $[x]$ denota o maior inteiro não excedendo x.

Entendi

23) (Rússia-2000) Determine a soma

$$\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{1000}}{3} \right\rfloor,$$

onde, como usual, $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que não supera x.

24) (Teste de Seleção Cone Sul-2008) Seja $x > 1$ um real que não é inteiro. Prove que

$$\left(\frac{x+\{x\}}{\lfloor x \rfloor} - \frac{\lfloor x \rfloor}{x+\{x\}}\right) + \left(\frac{x+\lfloor x \rfloor}{\{x\}} - \frac{\{x\}}{x+\lfloor x \rfloor}\right) > \frac{16}{3}$$

Gostei
Entendi

onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x e $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ denota a parte fracionária de x.

25) (Canadá-81) Prove que não existem soluções reais para:

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345.$$

26) (Canadá-87) Prove que

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+3} \right\rfloor$$

para todos os inteiros n.

27) (Aime-85) Quantos dos primeiros 1000 inteiros positivos podem ser expressos na forma $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor$, onde x é um número real e $\lfloor z \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a z?

9.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) Seja [x] o maior inteiro que não excede x. Por exemplo, [3,1] = 3 e [− 1,4] = − 2. Seja {x} a parte fracional do número real x (ou seja, {x} = x − [x]). Por exemplo, {3,1} = 0,1 e {− 1,4} = 0,6. Determine todos os números reais positivos x tais que $\left\{\dfrac{2x+3}{x+2}\right\} + \left[\dfrac{2x+1}{x+1}\right] = \dfrac{14}{9}$.

2) Seja [x] o maior inteiro menor ou igual a x. Determine todos os números reais x tais que $\left[\dfrac{1}{x}\right] + \left[\dfrac{3}{x}\right] = 4$.

3) (Balcânica-98) Determine o número de termos distintos da seqüência finita $[k^2/1998]$, onde $k = 1, 2, \ldots, 1997$ e $[x]$ denota a parte inteira de x.

4) (Itália-98) Se x é um número real positivo, denota-se com [x] a parte inteira de x, isto é, o máximo inteiro $n \le x$. Calcule o valor da soma:

$$\sum_{n=1}^{1000000} \left[\sqrt{n}\right] = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \ldots + \left[\sqrt{999999}\right] + \left[\sqrt{1000000}\right].$$

(Os alunos podem utilizar, se necessitarem, a seguinte fórmula: $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, cuja demonstração não será requerida.)

5) (Inglaterra-2001) Determine todas as soluções reais da equação $x+\left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor$, onde $\lfloor t \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual ao número real t.

6) (University of South Carolina-93) Se [x] representa o maior inteiro menor ou igual a x, determine o valor de:

$$[\log_2 2] + [\log_2 3] + [\log_2 4] + \dots + [\log_2 99] + [\log_2 100]$$

a) 480 b) 481 c) 482 d) 483 e) 484

7) (Moldávia-2002) Determine todas as soluções da equação:

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=2002.$$

8) (Manhattan-99) Consideremos o produto: 2000.2001.2002...3998. Qual é a maior potência de 2 que divide o produto?

9) (China-86) Calcule a soma $S=\sum_{k=1}^{502}\left\lfloor \frac{305k}{503} \right\rfloor$.

10) (Catalunha-92) Demonstre que o $\binom{1992}{1492}$ não é múltiplo de 500.

11) (IMO-88 Longlist) Caucle o total de distintos números inteiros que a função f(x) = [x] + [2x] + [5x/3] + [3x] + [4x] assume para $0 \le x \le 100$.

12) (Argentina-98) Determinar todos os valores possíveis da expressão x – [x/2] – [x/3] – [x/6] ao variar x nos números reais.

13) (Argentina-97) Achar todos os números reais x que verificam

$$[19x + 97] = 19 + 97x.$$

Observação: Os colchetes indicam a parte inteira do número que encerram, por exemplo, [3,27] = 3; [1,25] = 1; [– 2,7] = – 3; [5] = 5; etc.

14) (Espanha-90) Designa-se a parte inteira de um número real a, [a], ao maior inteiro menor ou igual que a. Demonstrar que a parte inteira de $(4+\sqrt{11})^n$, com n natural, é um número ímpar.

15) (APMO-2001) Determine o maior inteiro positivo N tal que o número de inteiros no conjunto {1, 2, ..., N} que são divisíveis por 3 é igual ao número de inteiros que são divisíveis por 5 ou 7 (ou ambos).

16) (IMO 83 Longlist) Mostre que se n > 2 é um inteiro e [x] denota o maior inteiro menor ou igual a x, então $\left[\frac{n(n+1)}{4n-2}\right]=\left[\frac{n+1}{4}\right]$.

17) (Vietnã-84) Determine todos os números reais positivos t tais que

$$\frac{9t}{10}=\frac{[t]}{t-[t]}.$$

18) (IMO-68) Para todo número natural n, calcule o valor da soma:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+4}{8}\right]+\left[\frac{n+8}{16}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\ldots$$

19) (Lista de Treinamento Cone Sul-95) Para cada x real, seja [x] o maior inteiro que é menor ou igual a x, {x} a parte fracionária de x ({x} = x − [x]) e (x) o inteiro mais próximo de x, definido por:

$$(x)=\begin{cases}[x], & \text{se } 0\le\{x\}<1/2\\ [x]+1, & \text{se } 1/2\le\{x\}<1\end{cases}.$$

Quantas soluções possui a equação $\{x\}=\frac{x+[x]+(x)}{1995}$?

20) (Lista de Treinamento Cone Sul-2008) Encontre todos os inteiros $n\ge 4$ para os quais $\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1$ divide n − 1 e $\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1$ divide n + 1.

21) (Irã-96) Prove que para todos os números naturais n:

$$\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right\rfloor=\left\lfloor\sqrt{9n+8}\right\rfloor.$$

22) (Canadá-75) Resolva a equação $[x]^2=\{x\}.x$.

23) (Suécia-82) Dado que n é um número natural, quantas soluções da equação $x^2-\lfloor x^2\rfloor=(x-\lfloor x\rfloor)^2$ estão no intervalo $1\le x\le n$?

24) (Lista de Treinamento Cone Sul-2007) Ache todas as soluções racionais de $\{x^2\}+\{x\}=\frac{99}{100}$, onde {x} é o menor real positivo tal que x − {x} seja um inteiro.

25) (Rússia-91) Resolva a equação $\lfloor x\rfloor\{x\}+x=2\{x\}+10$.

EQUAÇÕES DIOFANTINAS

10.1. RELEVÂNCIA E APLICAÇÃO

Semelhante aos casos dos tópicos sobre função máximo inteiro e os teoremas de Fermat e Euler, é mais comum encontrar questões sobre equações diofantinas em olimpíadas de matemática de Ensino Médio, bem como em competições nacionais ou internacionais. A exceção ocorre no caso de equações diofantinas de 1ª ordem, que costumam ser aplicadas nas primeiras fases de olimpíadas em geral. Porém, as equações diofantinas de ordem superior, principalmente as que envolvem equações de Pell, raramente são encontradas em provas de olimpíadas de matemática regionais.

10.2. RESUMO TEÓRICO

Equações Diofantinas Lineares: Uma equação diofantina linear é uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são inteiros dados. O tipo mais simples de equação diofantina é a equação diofantina linear de duas incógnitas $\underline{x}$ e $\underline{y}$: $ax + by = c$ onde $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ são inteiros dados, sendo $ab \neq 0$. Se um par de inteiros x_0, y_0 satisfaz $ax_0 + by_0 = c$ então denomina-se que x_0, y_0 é uma solução inteira ou apenas solução da equação $ax + by = c$.

Condição de Existência de Solução: A equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução se e somente se $\underline{d}$ divide $\underline{c}$, sendo $d = \text{mdc}(a, b)$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $ax + by = c$ tem uma solução, isto é, que existem inteiros x_0, y_0 tais que $ax_0 + by_0 = c$.

Por ser o $\text{mdc}(a, b) = d$, existem inteiros $\underline{r}$ e $\underline{s}$ tais que $a = dr$ e $b = ds$, e temos:

$c = ax_0 + by_0 = drx_0 + dsy_0 = d(rx_0 + sy_0)$, e como $rx_0 + sy_0$ é um inteiro, segue-se que $\underline{d}$ divide $\underline{c}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que d divide c, isto é, que $c = dt$, onde t é um inteiro.

Por ser o $\text{mdc}(a, b) = d$, existem inteiros x_0 e y_0 tais que $d = ax_0 + by_0$, o que implica:

$c = dt = (ax_0 + by_0)t = a(tx_0) + b(ty_0)$, isto é, o par de inteiros:

$x = tx_0 = (c/d)x_0$, $u = ty_0 = (c/d)y_0$

é uma solução da equação $ax + by = c$.

Soluções da Equação $ax + by = c$: Se $\underline{d}$ divide $\underline{c}$ ($d \mid c$), sendo $d =$ mdc (a, b), e se o par de inteiros x_0, y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, então todas as outras soluções desta equação são dadas pelas fórmulas:

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t, \qquad y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t$$

onde $\underline{t}$ é um inteiro arbitrário.

Demonstração:

Suponhamos que o par de inteiros x_0, y_0 é uma solução particular da equação $ax + by = c$, e seja x_1, y_1 uma solução qualquer desta equação.
Então, temos:

$ax_0 + by_0 = c = ax_1 + by_1 \Rightarrow a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$

Como mdc $(a, b) = d$, então existem inteiros $\underline{r}$ e $\underline{s}$ tais que $a = dr$ e $b = ds$, com $\underline{r}$ e $\underline{s}$ primos entre si.

Substituindo estes valores de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ na igualdade anterior e cancelando o fator comum $\underline{d}$, obtemos $r(x_1 - x_0) = s(y_0 - y_1)$

Assim sendo, $r \mid s(y_0 - y_1)$, e como o mdc $(r, s) = 1$, segue-se que $r \mid (y_0 - y_1)$, isto é: $y_0 - y_1 = rt$ e $x_1 - x_0 = st$

onde $\underline{t}$ é um inteiro. Portanto temos as fórmulas:

$$x_1 = x_0 + st = x_0 + (b/d)t \qquad y_1 = y_0 - rt = y_0 - (a/d)t$$

A equação $x^2 + y^2 = z^2$

Se os números $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ são números naturais e satisfazem a equação $x^2 + y^2 = z^2$ então dizemos que (x, y, z) é um Triângulo Pitagórico.

Uma solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$ é chamada primitiva se os números $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ são números naturais e não possuem nenhum divisor comum maior que 1. Se $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, $\underline{\theta}$ é um solução primitiva de $x^2 + y^2 = z^2$, e $\underline{d}$ é um número natural qualquer, então $x = d\alpha$, $y = d\beta$, $z = d\theta$ é também uma solução. De fato, se $\alpha^2 + \beta^2 = \theta^2$, então multiplicando ambos os lados por d^2, obtemos que $d\alpha$, $d\beta$, $d\theta$ também verificam a equação.

Como mdc $(x, y, z) = 1$, estes três valores não podem ser todos pares. Ou seja, pelo menos um dos valores $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ é da forma $2k - 1$. Como $(2k - 1)^2 = 4k(k - 1) + 1$ e $8 \mid 4k(k - 1)$ então dividindo o quadrado de um número natural ímpar por 8 o resto obtido é 1.

Como $(2k)^2 = 4k^2$ então dividindo o quadrado de um número natural par por 8 os restos possíveis são 0 e 4.

Portanto x e y não podem ser ambos ímpares, pois se fossem o resto de $x^2 + y^2$ por 8 seria 2, e não existe nenhum número natural cujo quadrado apresente resto 2 quando dividido por 8.

Então $\underline{x}$ deve ser ímpar e $\underline{y}$ deve ser par, implicando que $\underline{z}$ seja ímpar.

$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow y^2 = (z + x)(z - x)$

Os números $z + x$ e $z - x$ são a soma e a diferença de dois números ímpares, e, portanto, são ambos pares:

$z + x = 2a \quad z - x = 2b \Rightarrow z = a + b \quad x = a - b$

Se y é par $\Rightarrow y = 2c \quad \therefore$ Como $4c^2 = 4ab \Rightarrow c^2 = ab$

Como o mdc (a, b) = 1 e $c^2 = ab \Rightarrow$ a e b são quadrados perfeitos $\Rightarrow$

$a = m^2$ e $b = n^2$

Como mdc (a, b) = 1 $\Rightarrow$ mdc (m, n) = 1

$\therefore z = a + b \Rightarrow$ $\quad z = m^2 + n^2$

$\therefore x = a - b \Rightarrow$ $\quad x = m^2 - n^2$

$\therefore c^2 = ab = m^2n^2 \Rightarrow y = 2c \Rightarrow$ $\quad y = 2mn$

Onde m e n são números naturais com mdc (m, n) = 1 e, evidentemente, $m > n$.

Equações de Pell: Equações de Pell são equações diofantinas não lineares da forma $x^2 - Dy^2 = m$, onde D é um número natural e m um número inteiro.

Soluções da Equação de Pell: Seja d um inteiro positivo que não seja um quadrado. A equação $x^2 - dy^2 = 1$ admite infinitas soluções em inteiros positivos x, y. Ademais, existe uma solução em inteiros positivos x_1, y_1 tal que todas as demais soluções dessa equação são da forma $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$, onde n é um número natural.

Um método de justificar que uma dada Equação de Pell da forma $x^2 - Dy^2 = 1$ possui infinitas soluções naturais é observar uma menor solução inteira (x_0, y_0), que não seja a solução trivial (1, 0), e proceder da seguinte forma:

$x^2 - Dy^2 = 1 \Rightarrow (x - \sqrt{D}\,y)(x + \sqrt{D}\,y) = 1 \Rightarrow (x - \sqrt{D}\,y)^2(x + \sqrt{D}\,y)^2 = 1^2 \Rightarrow$

$(x^2 - 2\sqrt{D}\,xy + Dy^2)(x^2 + 2\sqrt{D}\,xy + Dy^2) = 1 \Rightarrow$

$((x^2 + Dy^2) - 2\sqrt{D}\,xy)((x^2 + Dy^2) + 2\sqrt{D}\,xy) = 1 \Rightarrow$

$(x^2 + Dy^2)^2 - D(2xy)^2 = 1 \Rightarrow X^2 - DY^2 = 1$

Notemos que a última equação obtida é da mesma forma que a equação de Pell inicial ($x^2 - Dy^2 = 1$). Ou seja, de posse de uma solução (x_0, y_0) da equação $x^2 - Dy^2 = 1$, podemos encontrar outra solução natural (x_1, y_1), que é $x_1 = x_0^2 + Dy_0^2$ e $y_1 = 2x_0y_0$.

Analogamente, podemos encontrar uma outra solução natural (x_2, y_2), fazendo $x_2 = x_1^2 + Dy_1^2$ e $y_2 = 2x_1y_1$. Como este procedimento pode ser feito para encontrar infinitos pares (x_i, y_i), temos infinitas soluções naturais para a Equação de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$.

Destaquemos que este método somente é válido se for observada uma solução natural (x_0, y_0) para a equação $x^2 - Dy^2 = 1$. O simples cálculo apresentado não implica em infinitas soluções, uma vez que este método é baseado em provar que a partir de uma solução inicial (que deve ser observada) pode-se encontrar infinitas soluções naturais.

Para provar que as Equações de Pell do tipo $x^2 - Dy^2 = m$, com $m \geq 2$, possuem infinitas soluções naturais, temos que usar a Equação de Pell $a^2 - Db^2 = 1$, ou seja, uma equação semelhante, obtida trocando m por 1. Sabemos que se encontrarmos uma menor solução natural (que não seja $a = 1$ e $b = 0$) para $a^2 - Db^2 = 1$, podemos obter infinitas soluções naturais para $a^2 - Db^2 = 1$. Para provar algo semelhante para $x^2 - Dy^2 = m$, vamos multiplicar estas duas equações.

$$(x^2 - Dy^2)(a^2 - Db^2) = (m).(1) \Rightarrow$$

$$(x - \sqrt{D}y)(x + \sqrt{D}y)(a - \sqrt{D}b)(a + \sqrt{D}b) = m \Rightarrow$$

$$[(x - \sqrt{D}y)(a - \sqrt{D}b)][(x + \sqrt{D}y)(a + \sqrt{D}b)] = m \Rightarrow$$

$$(ax - \sqrt{D}bx - \sqrt{D}ay + Dby)(ax + \sqrt{D}bx + \sqrt{D}ay + Dby) = m \Rightarrow$$

$$[(ax + Dby) - \sqrt{D}(bx + ay)][(ax + Dby) + \sqrt{D}(bx + ay)] = m \Rightarrow$$

$$(ax + Dby)^2 - D(bx + ay)^2 = m \Rightarrow X^2 - DY^2 = m$$

Representação de Números Naturais Como Soma de Potências Inteiras

Soma de Dois Quadrados: Um número natural n é a soma de dois quadrados de inteiros se e somente se a fatoração de n em fatores primos não contém algum primo da forma $4k + 3$ que possui expoente ímpar.

Demonstração:

Lema: Se um primo ímpar p divide a soma dos quadrados de primos relativos, então ele é da forma $4k + 1$.

Demonstração do Lema:

Sejam a e b dois primos relativos e p um primo ímpar tal que $p \mid a^2 + b^2$.

Então $a^2 \equiv - b^2 \pmod{p}$.

Elevando os dois lados da congruência a $(p - 1)/2$ temos:

$a^{p-1} \equiv (-1)^{(p-1)/2} b^{p-1} \pmod{p}$.

Desde que $mdc(a, b) = 1$, os números a e b não são divisíveis por p, portanto, pelo Teorema de Fermat:

$a^{p-1} \equiv b^{p-1} \pmod{p}$.

Deste modo, a congruência $a^{p-1} \equiv (-1)^{(p-1)/2} b^{p-1} \pmod{p}$ se transforma em $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow (p-1)/2 = 2k \Rightarrow p = 4k + 1$.

Suponha que o número n pode ser representado como a soma dos quadrados de 2 inteiros, $n = a^2 + b^2$.

Seja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ a fatoração de n em fatores primos. Seja p um divisor primo da forma $4k + 3$ do número n.

Sendo $d = mdc(a, b)$, temos que $a = da_1$, $b = db_1$, onde $mdc(a_1, b_1) = 1$. Como $n = a^2 + b^2$, então $d^2 \mid n \Rightarrow n = d^2 n_1$, onde n_1 é um número natural.

Suponhamos que o expoente de p na fatoração de n seja ímpar. Então, desde que $n = d^2n_1 \Rightarrow p \mid n_1 = a_1^2 + b_1^2$, que contradiz o lema. Assim, provamos que a condição do teorema é necessária.
Seja m o maior número natural cujo quadrado divide n. Então $n = m^2k$, onde k é igual a 1 ou igual a um produto de diferentes números primos entre os quais nenhum deles é da forma $4k + 3$. Assim, cada um destes primos é igual à soma dos quadrados de dois números naturais. A identidade $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ab + cd)^2 + (ad - bc)^2$ representa a produto de dois números naturais, cada um deles sendo igual à soma dos quadrados de dois inteiros, como a soma dos quadrados de dois inteiros. Consequentemente, k é igual à soma dos quadrados de dois inteiros. Então $k = u^2 + v^2$, implicando que $n = m^2k = (mu)^2 + (mv)^2$.
Isto prova que a condição do teorema é suficiente.

Soma de Três Quadrados: Um número natural n pode ser a soma de três quadrados somente se ele não é da forma $4^l(8k + 7)$, onde k e l são inteiros maiores ou iguais a 0.

Demonstração:
Suponhamos que existem números naturais da forma $4^l(8k + 7)$, onde k e l são inteiros ≥ 0 que são iguais a somas de quadrados de 3 inteiros. Seja n o menor deles. Assim nós temos $n = 4^l(8k + 7) = a^2 + b^2 + c^2$, onde a, b e c são inteiros.
Se entre os números a, b, c existe precisamente um número ímpar, então a soma dos 3 quadrados é da forma $4t + 1$, ou seja, diferente da forma de n. Se dois dos inteiros a, b, c são ímpares, então $a^2 + b^2 + c^2$ é da forma $4t + 2$, diferente de n. Se todos os inteiros são ímpares, então $a^2 + b^2 + c^2$ é da forma $8t + 3$, novamente diferente de n. Consequentemente a, b, c devem ser pares. Assim, $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$, onde a_1, b_1 e c_1 são inteiros. Assim, $4^{l-1}(8k + 7) = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$, contrário ao fato de que n é o menor natural que pode ser expresso como a soma de 3 quadrados. Assim, nenhum inteiro da forma $4^l(8k + 7)$ pode ser expresso como a soma dos quadrados de 3 inteiros.

Diferença de Dois Quadrados: Um inteiro k é representável como a diferença de dois quadrados se e somente se k não é da forma $4t + 2$, onde t é um inteiro.

Demonstração:
Se a e b são dois números pares, então $a^2 - b^2$ é divisível por 4; se ambos a e b são ímpares então $a^2 - b^2$ é divisível por 8; se finalmente um dos números a, b é par e o outro impar, então $a^2 - b^2$ é ímpar.
Assim, provamos que a condição do teorema é necessária.
Suponhamos que um inteiro k não é da forma $4t + 2$. Consequentemente k é divisível por 4 ou é ímpar.

Se k é impar, então $(k-1)/2$ e $(k+1)/2$ são inteiros.

Assim: $k = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2$.

Se k é divisível por 4 temos: $k = \left(\frac{k}{4}+1\right)^2 - \left(\frac{k}{4}-1\right)^2$.

Desta forma vemos que a condição do teorema é suficiente.

Soma de Dois ou Três Cubos: Todos os inteiros das formas $9k + 4$ e $9k + 5$ não podem ser expressos como a soma de dois ou três cubos.

Demonstração:

Inicialmente notemos que o cubo de todo inteiro é congruente a 0, 1 ou 8 módulo 9. Assim, para a soma de dois cubos somente podemos ter como resultado inteiros que sejam congruentes a 0, 1, 2, 7 ou 8 módulo 9. Para a soma de três cubos temos somente como resultado inteiros que seja congruentes a 0, 1, 2, 3, 6, 7 ou 8 módulo 9. Desta forma, nunca teremos inteiros que sejam soma de 2 ou 3 cubos e que deixem 4 ou 5 como resto na divisão por 9.

Pode-se provar também que um inteiro $\neq 0$ possui um número finito de representações como soma de dois cubos. Claramente é suficiente provar para os números naturais.

Suponhamos que $n = x^3 + y^3$, onde x e y são números inteiro, $x > 0$, $y < 0$.

Assim, temos que $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, onde $-xy > 0$.

Desde que $x + y > 0$, então $x + y \geq 1$, onde temos $x^2 - xy + y^2 \leq n$, que em virtude do fato de $-xy > 0$, prova que $x < \sqrt{n}$ e $0 < -y < \sqrt{n}$. Deste modo, o número de pares x, y é finito.

Pode-se provar também que 2 é o único primo que pode ser expresso como a soma de dois cubos de número naturais. De fato, se $p = x^3 + y^3$, onde x e y são números naturais, então $p = (x + y)[(x - y)^2 + xy]$, então, desde que $x + y \geq 2$, nós devemos ter $p = x + y$ e $(x - y)^2 + xy = 1$, que implica que $x = y$ e $xy = 1$, e então $x = y = 1$ e $p = 2$.

10.3. EXEMPLOS RESOLVIDOS

1) (OBM-98) Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem a equação $2x + 3y = 101$?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Solução:

Analisando a equação, notamos que a solução com menor valor positivo para x é $x_0 = 1$ e $y_0 = 33$.

$\therefore x = x_0 + (b/d)t \quad y = y_0 - (a/d)t \Rightarrow x = 1 + 3t \quad y = 33 - 2t$, t inteiro.

Evidentemente devemos aplicar $t \geq 0$, pois se $t < 0$ teremos $x < 0$.
Assim, o problema é saber até quando $33 - 2t > 0$, pois se $t > 0 \Rightarrow t + 37 > 0$.
$\therefore 33 - 2t > 0 \Rightarrow 2t < 33 \Rightarrow t < 16{,}5$
Como t é inteiro $\Rightarrow 0 \leq t \leq 16 \Rightarrow$ existem 17 pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem a equação $2x + 3y = 101$.

2) Determine todas as soluções inteiras e positivas da equação:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Solução:

Notemos inicialmente que um dos inteiros x, y, z deve ser menor do que 4, pois se tivéssemos todos os três maiores do que 4 o maior valor possível de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ seria $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$.

Assumindo que $x \leq y \leq z$, nós temos duas possibilidades:

i) $x = 2 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \Rightarrow yz - 2y - 2z = 0 \Rightarrow yz - 2y - 2z + 4 = 4 \Rightarrow (y - 2)(z - 2) = 4$

Desde que y e z não excedem 1, então $y - 2$ e $z - 2$ não podem ser negativos, e os únicos casos possíveis são:

I) $y - 2 = 2$ e $z - 2 = 2 \Rightarrow y = 4$ e $z = 4$

II) $y - 2 = 1$ e $z - 2 = 4 \Rightarrow y = 3$ e $z = 6$

ii) $x = 3 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2yz - 3y - 3z = 0 \Rightarrow 4yz - 6y - 6z = 9 \Rightarrow (2y - 3)(2z - 3) = 9$

Desde que $y \geq x = 3$, $2y - 3 \geq 3$, e $2z - 3 \geq 3$, existe somente uma possibilidade:

$2y - 3 = 3$ e $2z - 3 = 3 \Rightarrow y = 3$ e $z = 3$

Deste modo, todas as soluções do problema são dadas pela equação:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1; \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

3) Prove que em toda solução inteira da equação $x^2 + y^2 = z^2$, ao menos um dos números x, y, z é divisível por 5.

Solução:

Um número m não divisível por 5 pode ser escrito das seguintes formas:

$m = 5k \pm 1$ ou $m = 5k \pm 2$

Nestes casos: $m^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1$ e $m^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4$

Então, a divisão do quadrado de um inteiro não divisível por 5 apresenta resto igual a 1 ou 4.

Suponhamos que x e y são não divisíveis por 5. Então $x^2 + y^2$ pode apresentar os restos 2, 3 ou 0.

Restos 2 e 3 são impossíveis para z^2, sobrando apenas resto 0, implicando que z seja divisível por 5.

Desta forma, se x e y não forem divisíveis por 5, implica que z seja divisível por 5.

Evidentemente é possível que um dos valores de x ou y seja divisível por 5. Digamos que seja x. O resto da divisão por 5 de $x^2 + y^2$ será o resto de y^2 dividido por 5, sendo possíveis os valores 0, 1 ou 4. Como z^2 também pode apresentar os mesmos restos, confirmamos que x é divisível por 5.

MdC (X, Y) = 1

4) Prove que a equação $x^4 + y^4 = z^2$ não possui solução nos números naturais x, y, z.

Solução:

Suponhamos que exista uma solução e seja z o menor natural cujo quadrado é a soma das quartas potências de dois números naturais x, y.

Temos então que mdc $(x, y) = 1 \Rightarrow$ mdc $(x^2, y^2) = 1$

Então x^2, y^2, z formam uma solução primitiva da equação pitagórica $(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2$:

$x^2 = m^2 - n^2 \quad y^2 = 2mn \quad z = m^2 + n^2$ onde mdc $(m, n) = 1$

Um dos números m e n é par e o outro é ímpar

Se m fosse o par e n o ímpar, de $x^2 + n^2 = m^2$ teríamos que x e n seriam ímpares, que é impossível

Portanto m é ímpar e n é par $\Rightarrow n = 2k$

Como mdc $(m, n) = 1 \Rightarrow$ mdc $(m, k) = 1$

$y^2 = 2mn = 4mk \Rightarrow$ y é par $\Rightarrow y = 2u \Rightarrow u^2 = mk$

Como mdc $(m, k) = 1 \Rightarrow m = a^2$ e $k = b^2 \Rightarrow n = 2k = 2b^2$

Como $x^2 + n^2 = m^2$ e mdc $(m, n) = 1 \Rightarrow$ mdc $(x, n) = 1$

Logo, x, m, n formam uma solução primitiva de uma equação pitagórica:

$n = 2m_1n_1 \quad m = m_1^2 + n_1^2$

Desde que $n = 2b^2 \Rightarrow b^2 = m_1n_1$

Como mdc $(m_1, n_1) = 1 \Rightarrow m_1 = a_1^2$ e $n_1 = b_1^2$

$\therefore$ Como $m = a_2 \Rightarrow a^2 = m_1^2 + n_1^2 = a_1^4 + b_1^4$

Mas $a \leq a^2 = m < m^2 + n^2 = z \Rightarrow a < z$, contrariando a suposição de que z é o menor natural cujo quadrado é a soma das quartas potências de dois números naturais x, y.

5) (Venezuela-2006) Determine todas as soluções da equação $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$, onde m e n são inteiros positivos.

Solução:

Reescrevendo a equação tem-se: $\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \Rightarrow$

$$\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m + n - 1)(m - n - 2) = 0$$

Como m e n são inteiros positivos a única possibilidade é $m - n - 2 = 0$. Logo, as soluções da equação são da forma $(m , n) = (a + 2, a)$, com a sendo um inteiro positivo.

6) (Romênia-79) Determine todos os inteiros positivos x, y e z tais que $3^x + 4^y = 5^z$.

Solução:

Analisemos os restos módulo 4 dos termos da equação diofantina:

i) $3 \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow 3^x \equiv (-1)^x \pmod 4$ (1)

ii) $4 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 4^y \equiv 0 \pmod 4$ (2)

iii) $5 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 5^z \equiv 1 \pmod 4$ (3)

Deste modo, $3^x + 4^y \equiv 5^z \pmod 4 \Rightarrow (-1)^x + 0 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow$
$(-1)^x \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow$ x é par $(x = 2x_1)$

Analisemos agora os restos módulo 3: $3^x + 4^y \equiv 5^z \pmod 3 \Rightarrow$
$0 + 1 \equiv (-1)^z \pmod 3 \Rightarrow$ z é par $(z = 2z_1)$

Assim: $4^y = 5^{2z_1} - 3^{2x_1} \Rightarrow 2^{2y} = (5^{z_1} + 3^{x_1})(5^{z_1} - 3^{z_1})$.

Então: $5^{z_1} + 3^{x_1} = 2^s$ e $5^{z_1} - 3^{x_1} = 2^t$, com $s > t$ e $s + t = 2y$.

Resolvendo o sistema anterior: $5^{z_1} = 2^{t-1}(2^{s-t} + 1)$ e $3^{x_1} = 2^{t-1}(2^{s-t} - 1)$.

Desde que ambos os lados das igualdades são ímpares, devemos ter $t = 1$.

Denotemos $s - t = u \Rightarrow 3^{x_1} = 2^u - 1$.

Como $2 \equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow 2^u \equiv (-1)^u \pmod 3 \Rightarrow$ u é par $(u = 2u_1)$.

Repetindo o procedimento anterior obtemos:

$2^{u_1} + 1 = 3^\alpha$ e $2^{u_1} - 1 = 3^\beta$, $\alpha + \beta = x_1$.

Assim: $3^\alpha - 3^\beta = 2 \Rightarrow \alpha = 1$ e $\beta = 0$.

Consequentemente, $u_1 = 1$, $u = 2$, e a única solução é $x = y = z = 2$.

7) (Bielorússia-2000) Determine todos os pares de números inteiros (x, y) que satisfazem a equação:

$$y(x^2 + 36) + x(y^2 - 36) + y^2(y - 12) = 0$$

Solução:

Podemos escrever esta equação como sendo uma equação de 2º grau em x:

$yx^2 + x(y^2 - 36) + y^3 - 12y^2 + 36y = 0 \Rightarrow$
$yx^2 + x(y - 6)(y + 6) + y(y - 6)^2 = 0$ (1)

Para que esta equação possua soluções inteiras x, é necessário que o seu discriminante seja um quadrado perfeito:

$\Delta = (y - 6)^2(y + 6)^2 - 4y^2(y - 6)^2 = k^2 \Rightarrow (y - 6)^2[(y + 6)^2 - 4y^2] = k^2 \Rightarrow$
$(y - 6)^2(y^2 + 12y + 36 - 4y^2) = k^2 \Rightarrow (y - 6)^2(-3y^2 + 12y + 36) = k^2 \Rightarrow$

$-3(y-6)^2(y^2-4y-12)=k^2 \Rightarrow -3(y-6)^2(y-6)(y+2)=k^2$
Desde que $(y-6)^2$ é um quadrado perfeito: $-3(y-6)(y+2)=k_1^2$
Como $k_1^2 \geq 0 \Rightarrow -3(y-6)(y+2) \geq 0 \Rightarrow (y-6)(y+2) \leq 0 \Rightarrow$
$-2 \leq y \leq 6$
Aplicando em y os inteiros desde -2 até 6, nota-se que $-3(y-6)(y+2)$ é um quadrado perfeito somente quando $y=-2$, $y=0$, $y=4$ ou $y=6$.
Vamos testar cada caso e analisar se a equação (1) possui soluções inteiras para estes valores de y:
i) $y=-2 \Rightarrow -2x^2-32x-128=0 \Rightarrow x^2+16x+64=0 \Rightarrow$
$(x+8)^2=0 \Rightarrow x=-8$
ii) $y=0 \Rightarrow -36x=0 \Rightarrow x=0$
iii) $y=4 \Rightarrow 4x^2-20x+16=0 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow$
$(x-1)(x-4)=0 \Rightarrow x=1$ ou $x=4$
iv) $y=6 \Rightarrow 6x^2=0 \Rightarrow x=0$
Portanto, todas as soluções são:
$(x, y)=\{(-8,-2),(0,0),(1,4),(4,4),(0,6)\}$

8) (OBM-96) Mostre que a equação $x^2+y^2+z^2=3xyz$ tem infinitas soluções inteiras com $x>0$, $y>0$ e $z>0$.
Solução:
Fazendo $z=1$ temos: $x^2+y^2+1=3xy \Rightarrow 4x^2+4y^2+4-12xy=0 \Rightarrow$
$(2x-3y)^2-5y^2=-4$
Assim, fazendo $2x-3y=k$ temos: $k^2-5y^2=-4$ (1),
que é uma Equação de Pell.
Notemos que uma solução desta equação é $k=1$ e $y=1$.
Analisemos agora a equação $a^2-5b^2=1$ (2), onde $a=9$ e $b=4$ é uma solução.
Multiplicando (1) e (2) obtemos:
$(k^2-5y^2)(a^2-5b^2)=-4 \Rightarrow (ak)^2-5(bk)^2-5(ay)^2+(5by)^2=-4 \Rightarrow$
$(ak+5by)^2-5(bk+ay)^2=-4$
Deste modo, $(9k+20y)^2-5(4k+9y)^2=-4$, onde o par (k, y) é uma solução da equação $k^2-5y^2=-4$.
Assim, a partir de uma solução de $k^2-5y^2=-4$ (que pode ser $k=1$ e $y=1$), podemos calcular infinitas soluções desta equação, que podem ser obtidas pelas equações $k_{n+1}=9k_n+20y_n$ e $y_{n+1}=4k_n+9y_n$, com $k_1=1$ e $y_1=1$.
Como $k_{n+1}=2x_{n+1}-3y_{n+1}$ e $k_n=2x_n-3y_n \Rightarrow$
$9k_n+20y_n=2x_{n+1}-12k_n-27y_n \Rightarrow 21k_n+47y_n=2x_{n+1} \Rightarrow$
$42x_n-63y_n+47y_n=2x_{n+1} \Rightarrow x_{n+1}=21x_n-8y_n$, onde $x_1=2$ e $y_1=1$.
A expressão de y_{n+1} também pode ficar apenas em função de x_n e y_n:
$y_{n+1}=4k_n+9y_n \Rightarrow y_{n+1}=8x_n-12y_n+9y_n \Rightarrow y_{n+1}=8x_n-3y_n$, onde $x_1=2$ e $y_1=1$.

Assim, temos infinitos ternos de solução
$(x_{n+1}, y_{n+1}, z) = (21x_n - 8y_n, 8x_n - 3y_n, 1)$, com $x_1 = 2$ e $y_1 = 1$.

10.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE A

1) (México) Se A e B são números naturais e $\frac{A}{7} + \frac{B}{5} = \frac{31}{35}$ o valor de A é:

(a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

2) (British Columbia Colleges-98) Determine um conjunto de 3 inteiros positivos consecutivos tais que o menor deles é múltiplo de 5, o segundo é múltiplo de 7 e o maior é múltiplo de 9.

3) (Lituânia-95) Qual é o menor número de inteiros positivos tais que a soma dos seus quadrados seja igual a 1995?

4) (Lista de Treinamento Conc Sul-2001) As medidas dos lados de um triângulo são números inteiros. A medida da hipotenusa não é divisível por 5. Prove que a área do triângulo é um múltiplo de 10.

5) Prove que a equação $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = (z^2 + 1)^2$ possui infinitas soluções naturais $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$.

6) (Bélgica-94) Em um plano devem ser destacados 1994 pontos, não todos sobre uma mesma reta. É possível que a distância entre quaisquer dois destes pontos destacados seja um número inteiro?

7) Determine todas as soluções inteiras da equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$.

8) Os inteiros positivos a, b, c possuem as seguintes propriedades:
1. a é ímpar;
2. o máximo divisor comum de a, b, c é 1;
3. eles satisfazem a equação Diofantina $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

Prove que abc é um quadrado perfeito.

9) (International Mathematical Talent Search) Prove que existem infinitos ternos de inteiros positivos (x, y, z) tais que $x^3 + y^5 = z^7$.

10) Prove que não existem dois números naturais cuja soma e diferença de seus quadrados sejam quadrados.

11) Prove que a equação $x^2 + 12 = y^3$ não possui soluções inteiras.

12) Resolva $x^3 - y^3 = xy + 61$ nos inteiros positivos.

13) Determine todas as soluções inteiras positivas de $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$.

14) Prove que há infinitos inteiros n tais que $n^2 + (n + 1)^2$ seja um quadrado perfeito.

15) Prove que se $3n + 1$ e $4n + 1$ são quadrados perfeitos, então 56 divide n.

16) Prove que todos os termos da seqüência dada por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$ são inteiros.

17) (Suécia-93) Assuma que a e b são inteiros. Prove que a equação $a^2 + b^2 + x^2 = y^2$ possui uma solução inteira x, y se e somente se o produto ab é par.

18) (Itália-95) Determine todos os pares de inteiros positivos x, y tais que $x^2 + 615 = 2^y$.

Resolvi — Mind your declinations

19) Seja S(n) a soma dos primeiros n inteiros positivos. Nós dizemos que n é um número fantástico se ambos n e S(n) são quadrados perfeitos. Por exemplo, 49 é fantástico, pois $49 = 7^2$ e $S(49) = 1 + 2 + 3 + \ldots + 49 = 1225 = 35^2$. Determine mais outros dois inteiros $n > 49$ que são fantásticos.

20) (Polônia-97) Determine todos os ternos de números racionais positivos (x, y, z) tais que $x + y + z$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ e xyz são números inteiros.

21) (Balcânica Jr.-2001) Determine todos os números naturais a, b, c tais que $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$.

22) (Kurschak-69) Seja n um inteiro. Prove que se $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ é um inteiro, então também é um perfeito quadrado.

Resolvi na Pati

Tentei

23) (Irã-95) Determine todas as soluções inteiras de $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4}$.

24) (Grécia-97) Determine todas as soluções inteiras positivas de:

$$\frac{13}{x^2} + \frac{1996}{y^2} = \frac{z}{1997}.$$

X

25) (OBM-2008) Determine todos os inteiros positivos m e n tais que:

$$m^2 + 161 = 3^n$$

X - errei! Não deu certo

26) (OBM-2009) Encontre todos os inteiros $a > 0$ e $b > 0$ tais que:

$$4 \cdot 3^a = 11 + 5^b$$

Já fiz antes, acertei

27) (Espanha-2005) Prove que a equação $x^2 + y^2 - z^2 - x - 3y - z - 4 = 0$ possui infinitas soluções inteiras.

28) (IMO-95 Shortlist) Determine todos os inteiros x e y tais que

$$x + y^2 + z^3 = xyz,$$

onde z é o máximo divisor comum de x e y.

X AMEI

29) (Macedônia-2010) Resolva a equação $x^3 + 2y^3 - 4x - 5y + z^2 = 2012$ no conjunto dos inteiros.

30) (Lista de Treinamento Cone Sul-99) Prove que não existem racionais positivos x, y tais que $x^2 + xy + y^2 = 2$.

Sabe-se [illegible] Olimpíadas [illegible]

31) (Irlanda-2001) Determine todas as soluções da equação

$$2^n = a! + b! + c!$$

nos inteiros positivos a, b, c, n.

32) (Torneio das Cidades-97) Demonstrar que a equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1997$$

tem infinitas soluções inteiras.

33) (Lista de Treinamento Cone Sul-2011) Encontre todos os valores inteiros positivos k, n e p que satisfazem a seguinte equação: $5^k - 3^n = p^2$.

mas faltou [illegible] não [illegible]

(K=2 n=2 p=4

34) (Áustria-2004) Determine todos os inteiros a e b tais que

$$(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4.$$

35) (Rússia-91) Encontre todas as soluções inteiras do sistema

$$\begin{cases} xz - 2yt = 3 \\ xt + yz = 1 \end{cases}.$$

36) (Teste Seleção Cone Sul-2007) Encontre todas as quádruplas (x, y, z, k) de números inteiros com x, y, z > 0 e k ≥ 0, tais que

$$x^6 + y^6 + z^6 = 4826.7^k$$

10.5. EXERCÍCIOS PROPOSTOS – PARTE B

1) (Noruega-99) Assuma que m e n são inteiros tais que $5m + 6n = 100$. Então, o maior valor possível de m.n é:
a) 60 b) 70 c) 80 d) 90 e) nda

2) (Báltica-95) Os inteiros positivos a, b, c são dois a dois primos entre si. Sabe-se também que a e c são ímpares e os números satisfazem a equação $a^2 + b^2 = c^2$. Prove que $b + c$ é um quadrado de um inteiro.

3) (Hungria-1931) Seja $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2$, onde a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e b são inteiros. Prove que estes números não podem ser todos ímpares.

4) Determine todas as soluções de $x^2 - xy + y = 3$ em inteiros x, y.

5) Determine todas as soluções inteiras para a equação $x^2 + y^2 = z^2$, com mdc (x, y, z) = 1, no qual z e y são números consecutivos.

interessante

6) Existem soluções inteiras (x, y, z) da equação diofantina

$$(x - y - z)^3 = 27xyz$$

que não sejam (– a, a, a) ou tais que xyz = 0?

7) (Romênia Distrital-2001) Determine todos os inteiros m e n tais que:

$$9m^2 + 3n = n^2 + 8.$$

fácil

8) (Inglaterra-69) Determine todos os pares (a, b) de inteiros satisfazendo $a^2 - 3ab - a + b = 0$.

9) (Canadá-69) Mostre que não existem números inteiros a, b, c tais que:

$$a^2 + b^2 - 8c = 6.$$

10) (Inglaterra-89) Prove que se x e y são números racionais satisfazendo a equação $x^5 + y^5 = 2x^2y^2$, então $1 - xy$ é o quadrado de um número racional.

fácil 1

11) Prove que a equação $x^2 + y^2 = z^{1998}$ possui infinitas soluções inteiras positivas x, y e z.

12) (OBM-2007) Prove que não existem soluções inteiras e positivas para a equação $3^m + 3^n + 1 = t^2$. Já [illegible]

13) Prove que a equação diofantina

$$(x - y - z)(x - y + z)(x + y - z) = 8xyz$$

possui um número infinito de soluções inteiras positivas (x, y, z) tais que mdc (x, y, z) = 1.

14) (Cone Sul-94) Determinar infinitos ternos $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ de inteiros positivos que sejam soluções da equação $x^2 + y^2 = 2z^2$, tais que o máximo divisor comum de $\underline{x}$, $\underline{y}$, z seja 1.

15) Prove que em toda solução inteira da equação $x^2 + y^2 = z^2$, ao menos um dos números $\underline{x}$, $\underline{y}$ é divisível por 3.

16) (Báltica-94) Mostre que para todo inteiro $a \geq 5$ existem inteiros b e c, $c \geq b \geq a$, tais que a, b, c são os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

17) Prove que $x^4 + y^4 = 5z^2$ não possui soluções naturais x, y, z com mdc (x, y, z) = 1.

18) Mostre que existem infinitas soluções inteiras positivas (a, b, c) para a equação $a^2 + b^2 = c^2$ tal que c é da forma 333...33.
Por exemplo $108^2 + 315^2 = 333^2$.

19) (USAMO-79) Determine todas as soluções em inteiros não-negativos, se existirem, da equação Diofantina:

$$n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_{14}^4 = 1599.$$

Duas soluções em que $n_1, n_2, \ldots, n_{14}$ diferem somente pela permutação são consideradas as mesmas.

20) Determine todas as soluções de $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$ em inteiros x, y.

21) (IMO-85 Longlist) Determine todos os ternos (x, y, z) de inteiros positivos tais que: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{4}{5}$.

X [illegible]

Digitalizado com CamScanner

22) (OBM-2006) Encontre todos os pares ordenados $(x; y)$ de inteiros tais que $x^3 - y^3 = 3(x^2 - y^2)$.

23) (OBM-2009) Prove que não existem inteiros positivos x e y tais que:

$$x^3 + y^3 = 2^{2009}.$$

24) (Cone Sul-2010) Determine todos os pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem $x^3y + x + y = xy + 2xy^2$.

25) (Coréia do Sul-2010) Determine todas as triplas (x, y, z) de inteiros positivos satisfazendo $1 + 4^x + 4^y = z^2$.

26) (China South East-2009) Determine todos os pares de inteiros (x, y) tais que $x^2 - 2xy + 125y^2 = 2009$.

27) (Zhautykov-2009) Determine todos os pares de inteiros (x, y) tais que $x^2 - 2009y + 2y^2 = 0$.

28) (Singapura-2009) Determine todos os inteiros positivos m e n que satisfazem a equação $3.2^n + 1 = m^2$.

29) (Uzbequistão-2002) Para todos os inteiros positivos n e m satisfazendo $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 = m^3$, prove que $4 \mid (n + 1)$.

30) (Alemanha-2006) Prove que não existem inteiros x, y para os quais:

$$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1).$$

31) (Quirguistão-2010) Resolva nos inteiros não negativos

$$x^3 + 7x^2 + 35x + 27 = y^3.$$

32) (Lista de Treinamento Cone Sul-2011) Determine todos os conjuntos de inteiros não negativos x, y e z que satisfazem a equação $2^x + 3^y = z^2$.

33) (Lista de Treinamento Cone Sul-2013) Encontre todas as triplas de inteiros não negativos (k, m, n) tais que $2^k + 7^m - 9^n = 0$.

34) (Romênia-83) Determine todos os inteiros não negativos soluções da equação $3^x - y^3 = 1$.

35) (Lista de Treinamento Cone Sul-2010) Determine todos os inteiros positivos a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$ e $a + b - c = 20$.

SOLUÇÕES E DICAS

Digitalizado com CamScanner

REPRESENTAÇÃO DECIMAL

11.1. PARTE A

1)
Seja $N = (abc)_{10}$. Pelo enunciado temos que: $a.b.c = 126 = 2.3^2.7$ e $b + c = 11$.
A expressão $b + c = 9$ possui as seguintes possibilidades de resposta:
$2 + 9 = 11 \quad 3 + 8 = 11 \quad 4 + 7 = 11 \quad 5 + 6 = 11$
Como $a.b.c = 2.3^2.7$, então temos apenas duas possibilidades para os dígitos de N: $\{2, 9, 7\}$ ou $\{3, 6, 7\}$
Assim, para que $b + c = 11$ temos que duas possibilidades:
i) $b = 2$ e $c = 9 \Rightarrow a = 7$;
ii) $b = 9$ e $c = 2 \Rightarrow a = 7$

2)
Seja $N = 10a + b$. O número $10b + a$ (obtido invertendo-se os algarismos de N) é ímpar, logo a é ímpar.
Portanto $N = 16$ ou $N = 36$, pois 16 e 36 são os únicos quadrados perfeitos de dois dígitos cujo algarismo das unidades é ímpar.
Mas $61 - 16 = 45$, que não é um cubo perfeito, e $63 - 36 = 27 = 3^3$.
Então $N = 36$ e $3 + 6 = 9$.

3)
$x = (10^{100} - 5)^2 = 10^{200} - 10.10^{100} + 25 = 10^{200} - 10^{101} + 25$
Assim, x é um número da forma: 9999...9990000...0025, contendo 99 dígitos 9 e 99 dígitos 0.
Portanto: $S = 9.(99) + 2 + 5 = 898$

4)
$N = (400...001)^2 = (400...000 + 1)^2 = (4.10^{1996} + 1)^2 =$
$= 16.10^{3992} + 8.10^{1996} + 1 = 1600...00800...001$
Portanto, a soma dos algarismos de N é igual a $S(N) = 1 + 6 + 8 + 1 = 16$.
A soma dos algarismos de S(N) é igual a $S(S(N)) = 1 + 6 = 7$

5)
Digamos que os números escolhidos são a, b, c e d.
Digamos que todas as permutações destes 4 números é igual a $4! = 24$.
Sabemos que todas as permutações destes 4 números é igual a $4! = 24$.
Fixando um número por vez em cada posição, temos então a permutações dos outros 3, que é igual a $3! = 6$, ou seja, existem 6 números iniciando com 1, 6 terminando em b, 6 com c como segundo dígito e assim por diante.
Deste modo, podemos escrever a soma dos números da seguinte forma:

$S = abcd + abdc + acbd + acdb + \ldots + dcba \Rightarrow$
$S = 6(10^3 + 10^2 + 10 + 1)(a + b + c + d) \Rightarrow$
$S = 6666(a + b + c + d) = 193314 \Rightarrow a + b + c + d = 29$
Como o maior valor da soma dos 4 números é 30 ($9 + 8 + 7 + 6 = 30$), devemos subtrair 1 de algum dos números, sem que seja obtido dois números iguais. Notamos que isto só é possível quando escolhemos 5 no lugar de 6, implicando que os números escolhidos são $\{5, 7, 8, 9\}$.

6)
Seja $N = [abc]$. Estamos tentando resolver a equação $a + b + c = 25$, de modo que $1 \le a \le 9$ e $0 \le b, c \le 9$.
Desde que $8 + 8 + 8 = 24 < 25$ então necessariamente um dos dígitos deve ser igual a 9.
Desta forma, a soma dos outros dois dígitos deve ser igual a 16.
A menos da ordem, existem duas possibilidades para que a soma de dois dígitos seja igual a 16:
$8 + 8 = 16$ ou $9 + 7 = 16$.
Assim, os números que satisfazem o enunciado são:
$N_1 = 988$ $N_2 = 898$ $N_3 = 889$ $N_4 = 997$ $N_5 = 979$ $N_6 = 799$ $\Rightarrow$ um total de 6 números.

7)
Os números formados são da forma $a11$, $1a1$ ou $11a$, onde a é um dos nove algarismos restantes. Para um dado a, a soma dos três números acima é $aaa + 222 = 111 \times (a + 2)$. Logo, a sua soma para todos os nove valores possíveis de a é:
$S = 111\,[(0 + 2 + 3 + \ldots + 9) + (9 \times 2)] = 111 \times (44 + 18) = 6882.$

8)
Seja $(ab)_{10}$ um inteiro de dois algarismos.
Devemos ter $10a + b = 2ab \Leftrightarrow (2a - 1)(b - 5) = 5$.
Como a e b são inteiros com $a > 0$ e $0 \le b \le 9$, temos que $2a - 1 > 0$ e assim: $2a - 1 = 5$ e $b - 5 = 1 \Leftrightarrow a = 3$ e $b = 6$.
Logo o único inteiro satisfazendo as condições do enunciado é 36.

9)
Seja $n = 10x + y$, onde x é o algarismo das unidades e y é o número formado pelos outros algarismos de (algarismos das dezenas de n em diante). Assim: $n^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$
Portanto, somente o termo $20xy + y^2$ interfere no dígito das dezenas e somente y^2 interfere no dígito das unidades.
O termo para o dígito das dezenas que sai de $20xy$ é par.

Assim, quando o dígito das dezenas de y^2 é ímpar então o dígito das dezenas de n^2 é ímpar.
Para que o dígito das dezenas de y^2 seja ímpar temos apenas:
$4^2 = 16$ e $6^2 = 36$
Como nos dois casos o dígito das unidades de y^2 é 6, então o dígito das unidades de n^2 é 6 sempre que o dígito das dezenas de n^2 seja ímpar.

10)
Seja $N = [abc] = 100a + 10b + c$. Deseja-se saber o menor valor de:

$$X = \frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+c}$$

Note que na última expressão obtida o valor de c está presente somente no denominador. Assim, para minimizar o valor de X então c deve ser o maior possível, ou seja, $c = 9$.

Assim: $$X = \frac{100a+10b+9}{a+b+9} = 10 + \frac{90a-81}{a+b+9}$$

Agora temos uma expressão em que b aparece somente no denominador. Portanto, para minimizar X devemos ter $b = 9$.

Deste modo: $$X = \frac{100a+99}{a+18} = 100 - \frac{81}{a+18}$$

Note agora que a aparece no denominador, entretanto temos uma subtração, fazendo com que X seja mínimo quando $\frac{81}{a+18}$ for máximo, que ocorre quando $a + 18$ for mínimo, implicando que $a = 1$.
Desta forma, $N = 199$ é o número que possui menor valor da razão $N/S(N)$, onde $S(N)$ é a soma dos dígitos de N.

Este valor é: $$X = \frac{199}{1+9+9} = \frac{199}{19} = 10{,}473684\ldots$$

11)
$\underline{ab} + \underline{cd} = \underline{bc} \Rightarrow 10a + b + 10c + d = 10b + c \Rightarrow 10a - 9b + 9c + d = 0$
$b - c = d \Rightarrow 10a - 9(b - c) + d = 0 \Rightarrow 10a - 9d + d = 0 \Rightarrow$
$10a = 8d \Rightarrow 5a = 4d \Rightarrow a = 4$ e $b = 5$
$10a - 9b + 9c + d = 0 \Rightarrow 40 - 45 + 9c + d = 0 \Rightarrow 9c + d = 5$
$b - c = d \Rightarrow c + d = 5 \Rightarrow 8c = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow d = 5$
Conferindo:
$\underline{ab} + \underline{cd} = \underline{bc} \Rightarrow 45 + 05 = 50$ e $b - c = d \Rightarrow 5 - 0 = 5$

12)

Como o resultado da multiplicação tem o mesmo número de algarismos que o multiplicando, terá que ser $A = 1$. Assim, como o resultado termina em 1, somente podemos ter $D = 9$.
Deste modo, a multiplicação ficou da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccc} 1 & B & C & 9 \\ x & & & 9 \\ \hline 9 & C & B & 1 \end{array}$$

O produto 9.B não pode ser maior que 10, pois caso fosse o resultado da multiplicação teria 5 algarismos. Temos duas possibilidades para B, $B = 0$ ou $B = 1$. Se $B = 0$ então $8 + 9C$ termina em), implicando que $C = 8$, que produz uma solução do problema. Se $B = 1$ então $8 + 9C$ teria que terminar em 1, o que implica que $C = 7$. Entretanto esta solução não serve pois $(1179).(9) = 10611 \neq 1719$.
Portanto a solução é $A = 1$, $B = 0$, $C = 8$, $d = 9$.

13)
a) Como $9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 = 324 \Rightarrow$ o número deve possuir menos do que 4 dígitos, ou seja, $n = (xyz)_{10}$
$100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow (100 - x)x + (10 - y)y = z(z - 1)$
Como o valor máximo de z é 9, então o valor máximo de $z(z - 1)$ é 72.
Como $100 - x \geq 91$, temos que $x = 0 \Rightarrow (10 - y)y = z(z - 1)$.
Os valores possíveis de $(10 - y)y$ são: 0, 9, 16, 21, 24, 25
Os valores possíveis de $z(z - 1)$ são: 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72
Assim, $(10 - y)y = z(z - 1) = 0 \Rightarrow y = 0$ e $z = 1$.

14)
I) $N = abc \Rightarrow a + b + c = 21$ II) $N' = acb = N + 45 \Rightarrow$
$100a + 10c + b = 100a + 10b + c + 45 \Rightarrow 9(c - b) = 45 \Rightarrow c - b = 5$
Como $a + b + c = 21$, então $b + c \geq 12$, implicando que:
$c = 9$ e $b = 4 \Rightarrow a = 8$
Então, $N = 849$

15)
Notemos inicialmente que $3^1 = 03$, $3^2 = 09$, $3^3 = 27$, possuem dígitos das dezenas pares. Suponhamos que exista um inteiro positivo k tal que 3^k possua dígito das dezenas par, ou seja, $3^k = Mxy$, onde y é o dígito das unidades, x (que é par) o dígito das dezenas e M o número que contem os dígitos restantes de 3^k.
Notemos que y somente pode assumir os valores 1, 3, 7 ou 9.
Desta forma, quando multiplicamos 3^k por 3, devido a multiplicação de 3 por 1, 3, 7 ou 9, temos que vai 0 ou 2 para a casa das dezenas da conta desta multiplicação, e o dígito das unidades de 3x é par, pois x é par.

Como o dígito das dezenas de 3^{k+1} é igual a soma do dígito das unidades de $3x$ (que é par) mais o das dezenas de $3y$ (que é 0 ou 2), temos que o dígito das dezenas de 3^{k+1} é par. Assim, por indução, temos que o dígito das dezenas de 3^n é sempre par.

16)

Temos que contar quantos números possuem a propriedade:
$n = abc$, $a + b = 2c$ ou $a + c = 2b$ ou $b + c = 2a$, com $a \neq 0$.
i) $a + b = 2c$, como $1 \leq c \leq 9$, temos as possibilidades:
$a + b = 2$, $a + b = 4$, $a + b = 6$, $a + b = 8$
Para cada uma temos o seguinte número de possibilidades:
$a + b = 2$: $(1, 1), (2, 0) \Rightarrow$ 2 possibilidades
$a + b = 4$: $(2, 2), (3, 1), (1, 3), (4, 0) \Rightarrow$ 4 possibilidades
$a + b = 6$: $(3, 3), (2, 4), (4, 2), (1, 5), (5, 1), (6, 0) \Rightarrow$ 6 possibilidades
$a + b = 8$: $(4, 4), (5, 3), (3, 5), (6, 2), (2, 6), (1, 7), (7, 1), (8, 0) \Rightarrow$
8 possibilidades
No total temos 20 possibilidades
A análise para $a + c = 2b$ é idêntica, possuindo também 20 possibilidades.
A análise para $b + c = 2a$ é semelhante, entretanto também podemos ter os casos: $(0, 2)$, $(0, 4)$, $(0, 6)$ e $(0, 8)$, completando um total de 24 possibilidades.
Somando todas as possibilidades temos $x = 20 + 20 + 24 \Rightarrow x = 64$

17)

$n = xy = 10x + y \quad \therefore k = 10x + y - x^2 - y^2 = (10x - x^2) + (y - y^2)$
Temos que k é a soma de duas funções independentes, portanto o valor máximo de k vai coincidir com o valor máximo das duas funções
i) $f(x) = 10x - x^2 \Rightarrow x_{max} = 10/2 \Rightarrow x_{max} = 5 \Rightarrow$
$f(x)_{max} = f(5) \Rightarrow f(x)_{max} = 25$
ii) $g(x) = y - y^2 = y(1 - y) \Rightarrow$ se $y \geq 2$ temos $g(x) < 0$, ou seja, o valor máximo de $g(x)$ é $0 \Rightarrow y_{max} = 0$ ou 1
Então $n = xy \Rightarrow n = 50$ e $n = 51$

18)

$n = a_x a_{x-1} \ldots a_2 a_1 7 \Rightarrow 5n = 7 a_x a_{x-1} \ldots a_2 a_1 \Rightarrow (n - 7)/10 + 7.10^x = 5n \Rightarrow$
$n - 7 + 7.10^{x+1} = 50n \Rightarrow 49n = 7(10^{x+1} - 1) \Rightarrow 7n = 10^{x+1} - 1$
O número $10^{x+1} - 1$ é formado apenas por $x + 1$ dígitos iguais a 9.
Assim, analisando cada alternativa:
$x = 4$: 99999 não é divisível por 7.
$x = 5$: 999999 é divisível por 7 $\Rightarrow$ o número de dígitos de n é $x + 1 = 6$.

19)
Claramente $S(a + b) = S(a) + S(b)$ ocorre quando os números a e b possuem todas as somas dos dígitos de mesma ordem menor ou igual a 9, ou seja, não temos nenhum "vai 1 à esquerda" na soma dos números a e b. Quando na soma de $a + b$ temos algum "vai 1 à esquerda" então temos que $S(a + b) \leq S(a) + S(b)$ (1)
Portanto, fazendo $a = x$ e $b = x$ em (1) $\Rightarrow$ $S(2x) \leq 2S(x)$ (2)
Fazendo $x = 2n$ em (2) obtemos $\Rightarrow$ $S(4n) \leq 2S(2n)$ (3)
Fazendo $x = 2n$ em (3) obtemos $\Rightarrow$ $S(8n) \leq 2S(4n) \leq 4S(2n)$
Aplicando $a = 8n$ e $b = 2n$ em (1) $\Rightarrow$
$S(10n) \leq S(8n) + S(2n) \leq 4S(2n) + S(2n) = 5S(2n)$
Como $S(10n) = S(n)$ $\Rightarrow$ $S(n) \leq 5S(2n)$ $\Rightarrow$ $2S(n) \leq 10S(2n)$
Assim, concluímos que $S(2n) \leq 2S(n) \leq 10S(2n)$
Um exemplo com $S(n) = 1996S(3n)$ é $n = 1333...335$ (com 5968 3's)

20)
Como 11 possui 2 algarismos, então qualquer número que seja solução do problema tem que possuir pelo menos 2 algarismos.
Calculemos inicialmente todos os números x de dois dígitos que são iguais a 11 vezes a soma dos seus algarismos.
$x = [ab] = 10a + b = 11a + 11b$ $\Rightarrow$ $10b + a = 0$, o que só seria possível se $a = b = 0$.
Calculemos agora todos os números x de três dígitos que são iguais a 11 vezes a soma dos seus algarismos.
$x = [abc] = 100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$ $\Rightarrow$ $10c + b = 89a$.
Como $10c + b$ é sempre menor ou igual a 99 então necessariamente teremos $a = 1$.
$10c + b = 89$ $\Rightarrow$ $c = 8$ e $b = 9$ $\Rightarrow$ $x = 198$ satisfaz o enunciado.
Considere agora que x possui 4 dígitos. Note que a soma dos dígitos de x deve ser inferior ou igual a $9.4 = 36$, ou seja, 11 vezes a soma dos dígitos de x deve ser inferior ou igual a $11.36 = 396$.
Entretanto, como o menor número de 3 dígitos é 1000 (que é maior que 396), então não temos números de mais do que 3 dígitos que são iguais a 11 vezes a soma dos seus dígitos.
Assim, 198 é a única solução.

21)
Suponha que n possui $m > 1$ dígitos e que seu primeiro dígito (mais significativo) é d.
Inicialmente vamos provar que o produto dos dígitos decimais de n (P_n) é menor ou igual a n.
Note que P_n é máximo quando todos os dígitos de n (exceto o primeiro, que vale d) são iguais a 9 $\Rightarrow$

$P_n \leq d.9^{m-1}$. Por outro lado, n será mínimo se depois de seu primeiro dígito (que é d) existam $m - 1$ zeros $\Rightarrow$
$n \geq d.10^{m-1}$. Assim: $n \geq d.10^{m-1} \geq d.9^{m-1} \geq P_n$, para $m > 1$.
Deste modo, provamos que para todos os números naturais n com mais de um dígito, o produto dos dígitos decimais de n é sempre menor ou igual a n.
Assim: $P_n \leq n \Rightarrow n^2 - 10n - 22 \leq n \Rightarrow n^2 - 11n - 22 \leq 0 \Rightarrow$
$0 \leq n \leq 12$.
Entretanto sabemos que $P_n > 0 \Rightarrow n^2 - 10n - 22 > 0 \Rightarrow n \geq 12$.
Assim, $n = 12$ é a única possibilidade de solução.
Conferindo, vemos realmente que $P_{12} = (12)^2 - (10)(12) - 22 = 12$.

22)
Sabemos que toda progressão aritmética pode ser expressa da forma $a_n = a + nr$, a é o primeiro termo e r é a razão da PA. Sejam x o número de dígitos de a e y o número de dígitos de r.
Calculemos agora os termos de ordem 10^x e 10^{x+1}:
$a_{10^x} = (10^x)r + a$ e $a_{10^{x+1}} = (10^{x+1})r + a$.
Desde que a possui x dígitos e os últimos x dígitos de $(10^x)r$ são iguais a zero, então o número $a_{10^x} = (10^x)r + a$ é da forma $[ra]_{10}$, ou seja, os primeiros y dígitos são os dígitos de r e os últimos x dígitos são os dígitos de a.
Da mesma forma, como a possui x dígitos e os últimos x + 1 dígitos de $(10^{x+1})r$ são iguais a zero, então o número $a_{10^{x+1}} = (10^{x+1})r + a$ é da forma $[r0a]_{10}$, ou seja, os primeiros y dígitos são os dígitos de r, depois temos um zero e os últimos x dígitos são os dígitos de a.
Evidentemente, a soma dos dígitos de a_{10^x} e $a_{10^{x+1}}$ são iguais, uma vez que, com exceção de um dígitos zero em $a_{10^{x+1}}$, todos os outros dígitos destes números são todos iguais.
Na verdade, em uma PA de termos naturais existem infinitos termos com a mesma soma dos dígitos, uma vez que todos os termos da forma $a_{10^y} = (10^y)r + a$, com $y \geq x$ (x o número de dígitos de a), possuem a mesma soma dos dígitos.

23)
Sejam b o número formado pelos 3 algarismos das unidades, dezenas e centenas de N e a os outros três.
Assim: $1000a + b = 3.a.b \Rightarrow 18ab - 6b - 6000a = 0 \Rightarrow$
$(3a - 1)(6b - 2000) = 2000 = 2^4.5^3$

Como $a \geq 100$ então $3a - 1 \geq 299$. Assim, $3a - 1$ pode assumir os seguintes valores: 2000, 1000, 500, 400, 250

Destes, os únicos que deixam resto 2 por 3 são 2000 e 500. Assim, existem 2 possibilidades:

i) Se $3a - 1 = 2000$ então $6b - 2000 = 1$, o que é impossível, pois assim $b \neq IN$

ii) $6b - 2000 = 4 \Rightarrow b = 334 \Rightarrow 3a - 1 = 500 \Rightarrow a = 167$

Conferindo: $167334 = 3(334)(167)$

24)

Seja $n = abc = 100a + 10b + c$

- Inicialmente mudemos de lugar os dois últimos algarismos:

$n = abc$ e $n' = acb \Rightarrow n = 100a + 10b + c$ e $n' = 100a + 10c + b$:

$d = n - n' = 9(b - c)$, com $b > c$ e $b - c \geq 2$

$s = n + n' = 200a + 10(b + c) + (b + c)$

Se $s < 500$, temos que $a = 1$ ou $a = 2$

i) $a = 1 \Rightarrow s = 200 + 10(b + c) + (b + c) = 200 + 11(b + c)$

I) $b + c = 1 \Rightarrow b = 1$ e $c = 0$, que é impossível, pois todos são distintos.

II) $b + c = 13 \Rightarrow b = 8$ e $c = 5$, $b = 9$ e $c = 4 \Rightarrow s = 343$

ii) $a = 2$:

II) $b + c = 4 \Rightarrow b = 3$ e $c = 1 \Rightarrow n = 231$ e $s = 444$

II) $b + c = 15 \Rightarrow s = 200 + 11(b + c) = 200 + 11.15 = 625 > 500$, impossível.

- Agora mudemos de lugar os dois primeiros algarismos:

$n = abc = 100a + 10b + c$ e $n' = bac = 100b + 10a + c \Rightarrow$

$d = n - n' = 90(a - b)$

Como d é um número de dois algarismos, então $a - b = 1$.

$s = n + n' = 100(a + b) + 10(a + b) + 2c$

Como $s < 500$ temos que $a + b \leq 4$.

i) $a + b = 1$ e $a - b = 1 \Rightarrow a = 1$ e $b = 0$ impossível, pois $b \neq 0$.

ii) $a + b = 2$ e $a - b = 1 \Rightarrow$ impossível

iii) $a + b = 3$ e $a - b = 1 \Rightarrow a = 2$ e $b = 1$

$\therefore s = 330 + 2c$, que é impossível terminar em 3.

iv) $a + b = 4$ e $a - b = 1 \Rightarrow$ impossível

- Vamos mudar agora de lugar o primeiro dígito com o último:

$n = abc = 100a + 10b + c$ e $n' = cba = 100c + 10b + a$

$d = n - n' = 99(a - c) \Rightarrow a - c = 1$

$s = n + n' = 100(a + c) + 20b + (a + c)$

Como $s < 500$ temos que $a + c \leq 4$

i) $a + c = 2$ e $a - c = 1 \Rightarrow$ impossível

ii) $a + c = 3$ e $a - c = 1 \Rightarrow a = 2$ e $c = 1$

$s = 300 + 20b + 3 \Rightarrow$ I) $b = 3$: $n = 231$ e $s = 363$

II) $b = 4$: $n = 241$ e $s = 383$

iii) $a + c = 4$ e $a - c = 1$ $\Rightarrow$ impossível

Então os únicos palíndromos possíveis são 343, 444, 363 e 383.

25)

$n = 100a + 10b + c$

$n^2 - n = 1000k \Rightarrow (10000a^2 + 100b^2 + c^2 + 2000ab + 200ac + 20bc) -$
$- 100a - 10b - c = 1000k \Rightarrow$

$10000a^2 + 2000ab + 100(b^2 + ac - a) + 10(2bc - b) + c^2 - c = 1000k \Rightarrow$

$c(c - 1)$ acaba em $0 \Rightarrow c = 1$ ou $c = 5$ ou $c = 6$

i) $c = 1$: $10000a^2 + 2000ab + 100b^2 + 10b = 1000k \Rightarrow b = 0$ e $a = 1 \Rightarrow$
$n = 100$ confere o enunciado

ii) $c = 5$: $10000a^2 + + 2000ab + 100(b^2 + 4a) + 90b + 20 = 1000k \Rightarrow$
$90b + 20$ termina em $00 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow$

$10000a^2 + 4000a + 400(a + 1) + 200 = 1000k \Rightarrow 400(a + 1) + 200$
termina em $000 \Rightarrow a = 1$ e $a = 6 \Rightarrow$

$n = 125$ e $n = 625$ conferem o enunciado

iii) $c = 6$: $10000a^2 + 2000ab + 100(b^2 + 5a) + 110b + 30 = 1000k \Rightarrow$
$110b + 30$ termina em $00 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow$

$10000a^2 + 14000a + 100(58 + 5a) = 1000k \Rightarrow$

$100(58 + 5a)$ termina em $000 \Rightarrow 58 + 5a$ termina em 0, porém $58 + 5a$ termina em 8 ou 3, nunca em 0.

Assim, somente $n = 100$, $n = 125$ e $n = 625$ conferem o enunciado do problema

26)

A princípio, os possíveis valores para os dígitos de n são 1, 3, 5, 7 e 9.

Note agora que $5 \cdot 1 = 05$, $5 \cdot 3 = 15$, $5 \cdot 5 = 25$, $5 \cdot 7 = 35$ e $5 \cdot 9 = 45$.

Pelo enunciado, temos que todos os dígitos de m e n são ímpares. Como $n = 5m$, no cálculo de n, quando multiplicarmos por 5 cada dígito de m, como resultado devemos ter um número com dígito das dezenas par, para que o "vai à esquerda" mais o dígito das unidades de 5 vezes o próximo algarismo de n (que evidentemente é 5), seja ímpar.

Assim concluímos que os possíveis dígitos de n são os dígitos que quando multiplicados por 5 apresentam algarismo das dezenas par, ou seja, são os dígitos 1, 5 e 9.

Como n é divisível por 5, então um de seus algarismos (o das unidades) já está determinado e é igual a 5.

Os outros $k - 1$ dígitos de n podem ser 1, 5 ou 9, fazendo com que tenhamos 3^{k-1} possibilidades para n.

27)

Como a soma dos dígitos de qualquer ano antes de 1899 é menor que 27, então o aniversário mágico de uma pessoa que nasceu antes de 1899 foi antes de 1926. Deste modo, uma pessoa que possui aniversário mágico depois de 1926 nasceu depois de 1900. Para um ano da forma 19ab = 1900 + 10a + b a soma dos dígitos é igual a 10 + a + b, implicando que o aniversário mágico ocorreu em:

$$1900 + 10a + b + 10 + a + b = 1910 + 11a + 2b.$$

Analogamente, para alguém que nasceu no ano 19cd o aniversário mágico ocorreu em $1910 + 11c + 2d$.

Assim: $1910 + 11a + 2b = 1910 + 11c + 2d \Rightarrow 11(a - c) = 2(d - b) \Rightarrow$ $a - c$ é divisível por 11.

Entretanto, $a - c$ varia entre -9 e 9, ou seja, devemos ter $a - c = 0 \Rightarrow$ $d - b = 0 \Rightarrow$ não existem dois anos distintos da forma 19xy de modo que duas pessoas que nasceram nestes anos possuem o mesmo ano (também da forma 19xy) para aniversário mágico.

Para alguém que nasceu em 2000, o aniversário mágico ocorreu em 2002. Agora repare que 2002 também é o ano do aniversário mágico de alguém que nasceu em 1982. Assim, 2002 é o primeiro ano depois de 1926 no qual duas pessoas que nasceram em anos diferentes possuem ambos aniversários mágicos.

28)

Se todos os números pertencem à mesma dezena, então a soma dos dígitos são inteiros consecutivos. Portanto, se todos os números pertencem à mesma dezena, então o maior valor é 4, uma vez que entre 5 inteiros consecutivos pelo menos um deles é divisível por 5. Suponhamos que todos os números não pertençam à mesma dezena. Seja $x = (m9)_{10}$, onde o algarismo das unidades de m não é 9.

Assim, $x + 1 = ((m + 1)0)_{10} \Rightarrow$

$s(x) - s(x + 1) = s(m) + 9 - [s(m) + 1 + 0] = 8.$

Para maximizar a quantidade de números que não possuam soma dos dígitos divisível por 5, suponhamos que $s(x)$ deixe resto 4 na divisão por 5. Deste modo, $s(x - 3)$ deixa resto 1 na divisão por 5, $s(x - 2)$ deixa resto 2 na divisão por 5 e $s(x - 1)$ deixa resto 3 na divisão por 5.

Como $s(x) - s(x + 1) = 8$, então $s(x + 1)$ deixa resto 1 na divisão por 5. Conseqüentemente, $s(x + 2)$ deixa resto 2 na divisão por 5, $s(x + 3)$ deixa resto 3 na divisão por 5 e $s(x + 4)$ deixa resto 4 na divisão por 5

Portanto, todos os números da seqüência $x - 3, x - 2, x - 1, x, x + 1, x + 2, x + 3$ e $x + 4$ não possuem soma dos dígitos divisível por 5. Um exemplo desta seqüência é 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13. Desta forma, o maior número de inteiros consecutivos tais que nenhum deles têm a soma de seus dígitos divisível por 5 é 8.

29)

Suponha que n possua k dígitos. Se x = 2008000...00, onde existem k dígitos iguais a 0 no final do números, note que um dos números x + 1, x + 2, ..., x + n é divisível por n.

30)

Vamos separar o número de quatro dígitos em duas partes: os dois primeiros dígitos, da esquerda para a direita, formam o número x e os dois restantes formam o número y.

Então a propriedade significa que $100x + y = x^2 + y^2$. Esta igualdade pode ser considerada uma equação do segundo grau em x:

$$x^2 - 100x + y^2 - y = 0. \qquad (3)$$

Resolvendo encontramos $x = 50 \pm \sqrt{2500 - (y^2 - y)}$. $\qquad (4)$

Com o exemplo do enunciado, $y = 33$ resulta em $x = 12$ com o sinal (−) na expressão:

$$x = 50 - \sqrt{1444} = 50 - 38 = 12.$$

Naturalmente outra solução aparece quando colocamos o sinal (+) na mesma expressão:

$$x_1 = 50 + \sqrt{1444} = 50 + 38 = 88.$$

Então outro número com a mesma propriedade é $8833 = 88^2 + 33^2$.

31)

Não. Vamos mostrar que, qualquer que seja n, existe m para o qual S(mn) é múltiplo de 2007. Mais precisamente, vamos exibir um múltiplo de $n = (a_1...a_k)_{10}$ formado por 2007 cópias de n dispostas lado a lado:

$$mn = \underbrace{(a_1...a_k)_{10}(a_1...a_k)_{10}...(a_1...a_k)_{10}}_{2007 \text{ vezes}}$$

Para isso, basta tomar $m = 10^{2006k} + 10^{2005k} + ... + 10^k + 1$.

32)

$n_1 = abc = 100a + 10b + c$

$n_2 = cba = 100c + 10b + a$

$n_1 + n_2 = 92(a + b + c) \Rightarrow$

$100a + 10b + c + 100c + 10b + a = 92a + 92b + 92c \Rightarrow$

$9a - 72b + 9c = 0 \Rightarrow 8b = a + c$

Sendo $a \neq 0$ e $c \neq 0$:

i) $b = 1 \Rightarrow a + c = 8 \Rightarrow$

$(a, c) = \{(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1)\} \Rightarrow$

$n_1 = 117, 216, 315, 414, 513, 612, 711$

ii) $b = 2 \Rightarrow a + c = 16 \Rightarrow (a, c) = \{(7, 9), (8, 8), (9, 7)\} \Rightarrow$

$n_2 = 729, 828, 927$

iii) se $b \geq 3$ então $a + c \geq 24$ e assim um dos algarismos seria maior que 9, que é impossível

33)

Seja $n = 10^{k+1} - 2 = \underbrace{999...99}_{k}8 \Rightarrow S(n) = 9k + 8$

Suponha que na adição $2^n + n$ existam t "vai um". Como o dígito das unidades de 2^n é igual a 2, 4, 6 ou 8, já na definição do dígito das unidades de $2^n + n$ existirá um "vai um". Posteriomente, como todos os demais dígitos de n são iguais a 9, conclui-se que ocorrerá "vai um" correspondente a cada dígito de n. Assim, segue que $t \geq k + 1$.

Deste modo,

$S(2^n + n) = S(2^n) + S(n) - 9t \leq S(2^n) + 9k + 8 - 9(k + 1) \leq S(2^n) - 1 \Rightarrow$

$S(2^n + n) < S(2^n)$

34)

Seja $S(n)$ e soma dos dígitos decimais do inteiro positivo n.

Observe que: $S(1996) = 25$ e $S(2 \times 1996) = S(3992) = 23$.

Notemos que é possível escrever 1996 da forma $25a + 23b$ (onde a e b são inteiros positivos) uma vez que $1996 = 25 \times 78 + 2 \times 23$. Desta forma podemos montar o seguinte número inteiro n que possui soma dos dígitos igual a 1996: $n = 19961996...199639923992$, onde temos 78 termos 1996 e 2 termos 3992.

Como $n = 3992 + 3992.10^4 + 1996.10^8 + ... + 1996.10^{4.79} \Rightarrow$

$n = 1996(2 + 2.10^4 + 10^8 + ... + 10^{4.79})$

implicando que n é múltiplo de 1996.

35)

Se $n = 1011111111$ então $n^2 = 1022345678989876 54321$.

Percebа que n satisfaz o problema.

36)

Desde que $7! > 1000$ então $a, b, c < 7$. Como $6! = 720$ então se um dos valores de a, b ou c valer 6 teremos $a = 7, 8$ ou 9, que é impossível. Assim, todos os dígitos devem ser menores ou iguais a 5. Note que $5! + 5! + 5! = 360 < 500$, ou seja, os dígitos não podem ser todos iguais a 5 e $a \neq 5$. Além disso, tem-se que não existe a de modo que $\overline{a55} = a! + 240$. Assim, exatamente um dos dígitos será igual a 5.

Desta maneira: $\overline{abc} \leq 5! + 4! + 4! < 200$, ou seja, $a = 1$.

Assim, temos dois casos a considerar:

i) $\overline{15c} = 1! + 5! + c! \Rightarrow 150 + c = 1 + 120 + c! \Rightarrow c! - c = 29$, que não possui solução

ii) $\overline{1b5} = 1! + b! + 5! \Rightarrow 105 + 10b = 1 + b! + 120 \Rightarrow 10b - b! = 16 \Rightarrow$
$b = 4$
Logo, a única solução é $145 = 1! + 4! + 5!$

11.2. PARTE B

1) 27

2) Diminui em 540

3) c

4) c

5) 28 e 39

6) 101, 212, 323, 434, 545, 656, 767, 878 e 989.

7) 474

8) c

9) 7744

10) 47

11) R$ 15,45

12) 25 de agosto de 1977

13) 21 e 16

14) 350 e 105

15) 17 e 34

16) 14

17) 22

18) 6984

19) a) 2417; b) 36

20) 1999 e 2017

21) 342

22) 9: (83;89), (84;88), (85;87), (86;86), (87;85), (88;84), (89;83), (90;91) e (91;90).

23) 370 e 371

24) 35961

25) 1996

26) 28 e 39

27) 153846

28) a) 1, 4, 9, 49, 64, 81; b) 1, 4, 9, 49, 64, 81.

29) 102, 204, 306 e 408.

30) Dica: Veja a solução do problema proposto 29 da parte A.

31) Sim. a = 9444555555, b = 5555554445, c = 5554445555

32) Dica: Use o fato que $\underbrace{111\ldots11}_{k-1}\underbrace{222\ldots22}_{k}5$ é um quadrado perfeito, onde a soma dos dígitos é $3k + 4$.

33) Dica: Demonstre que o número de dígitos deveria ser par.

34) 2700. Dica: Use o fato que $9 \mid n - S(n)$ para provar que $2700 \mid n$.

35) Não é possível.

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

12.1. PARTE A

1)

a) i) Para que $67xy$ seja divisível por 5, y deve ser 0 ou 5.

ii) Se $y = 0 \Rightarrow 67x0$ para ser divisível por 11 então:

$0 - x + 7 - 6 = 11k \Rightarrow 1 - x = 11k$

para $k = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 6710$ é divisível por 5 e por 11

para $k = -1 \Rightarrow x = 12$ que é impossível

iii) Se $y = 5 \Rightarrow 67x5$ para ser divisível por 11 então

$5 - x + 7 - 6 = 11k \Rightarrow 6 - x = 11k$

para $k = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow 6765$ é divisível por 5 e por 11

para $k = -1 \Rightarrow x = 17$ que é impossível

b) i) Por 11: $y - 8 + 5 - x + x - 4 + 3 = 11k \Rightarrow y - 4 = 11k$

$k = 0 \Rightarrow y = 4$

ii) Por 9: $3 + 4 + 2x + 5 + 8 + 4 = 9k \Rightarrow 2x + 24 = 9k \Rightarrow$

$2x + 6 = 9(k - 2)$

$k = 3 \Rightarrow 2x + 6 = 9 \Rightarrow x = 3/2$ impossível

$k = 4 \Rightarrow 2x + 6 = 18 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow 3466584$ é divisível por 9 e por 11

2)

Sendo $x = a_na_{n-1}...a_2a_1a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0 = 100(a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2) + a_1.10 + a_0$ e como 100 é divisível por 4, basta analisar se $a_1.10 + a_0$ é divisível por 4. Como $a_1.10 + a_0 = 8a_1 + 2a_1 + a_0$ e $8a_1$ é divisível por 4, então para que x seja divisível por 4, basta que $a_0 + 2a_1$ seja divisível por 4.

3)

Sendo

$x = a_na_{n-1}...a_1a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_3.10^3 + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0 = 1000(a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_3.10^3) + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$ e como 1000 é divisível por 8, basta analisar se $a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$ é divisível por 8. Como $100.a_2 + 10.a_1 + a_0 = (8.12.a_2 + 4a_2) + (8a_1 + 2a_1) + a_0 = 8(12.a_2 + a_1) + (4.a_2 + 2.a_1 + a_0)$, e $8(12.a_2 + a_1)$ é divisível por 8, então para que x seja divisível por 8, basta que $a_0 + 2.a_1 + 4.a_2$ seja divisível por 8.

4)

Como $396 = 4.9.11$ então $xy243z$ deve ser divisível por 4, por 9 e por 11.

i) Para que seja divisível por 4 basta que o número $3z$ seja divisível por $4 \Rightarrow z = 2$ ou 6

ii) Façamos $z = 2$.

Para que $xy2432$ seja divisível por 11 temos que:

$2 - 3 + 4 - 2 + y - x = 11k \Rightarrow y - x + 1 = 11k$

$\therefore k = 1 \Rightarrow y - x = 10$

Para que $xy2432$ seja divisível por 9 temos:

$x + y + 2 + 4 + 3 + 2 = x + y + 11 = 9k' \Rightarrow x + y + 2 = 9(k' - 1)$

$\therefore k' = 2 \Rightarrow x + y = 7 \Rightarrow 2y = 19$ que é impossível

$\therefore k = 0 \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$

432432 é divisível por 396.

iii) Façamos $z = 6$.

Para que $xy2436$ seja divisível por 11 temos que:

$6 - 3 + 4 - 2 + y - x = 11k \Rightarrow y - x + 5 = 11k$

$\therefore k = 1 \Rightarrow y - x = 6$

Para que $xy2436$ seja divisível por 9 temos:

$x + y + 2 + 4 + 3 + 6 = x + y + 15 = 9k' \Rightarrow x + y + 6 = 9(k' - 1)$

$\therefore k' = 2 \Rightarrow x + y = 12 \Rightarrow 2y = 18 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$

392436 é divisível por 396.

$\therefore k = 0 \Rightarrow x - y = 5 \Rightarrow 2x = 17$ que é impossível

Então as 2 únicas respostas são 432432 e 392436

5)

A soma dos dígitos dos 2 números é igual a $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, ou seja, os 2 números deixam resto 1 quando divididos por 9, ou seja, $A = 9x + 1$ e $B = 9y + 1$.

Se $A/B = n \Rightarrow A = nB = 9k + n = 9x + 1 \Rightarrow n = 10$, que é impossível pois os 2 números possuem o mesmo número de dígitos.

6)

A única possibilidade é que a soma dos algarismos de ordem ímpar menos a soma dos algarismos de ordem par seja igual a 0.

Assim, temos somente a seguinte possibilidade: $(1 + 4) - (2 + 3) = 0$

Portanto, temos o esquema: $a_1a_2a_3a_4$

Quando $\{a_1, a_3\} = \{1, 4\}$ temos $\{a_2, a_4\} = \{2, 3\}$ e vice-versa.

Assim: $N = 2.2.2 = 8$

7)

Se $5y3$ é divisível por 3 então a soma dos seus dígitos deve ser divisível por 3.

Desta forma, y pode ser igual a 1, 4 ou 7.

Como $329 + 2x4 = 5y3 \Rightarrow 3 + x = y$ implicando que o maior valor possível de x equivale ao maior valor possível de y.
Desde que $y_{max} = 7 \Rightarrow x_{max} = 4$.

8)
Sabemos o resto da divisão de um número por 9 é igual ao resto da divisão da soma dos dígitos deste número por 9. Como a soma dos dígitos de N é igual a 300, então $N = 9k + 3$.
Notemos que:
$n = 9k \Rightarrow n^2 = 9k$
$n = 9k \pm 1 \Rightarrow n^2 = 9k + 1$
$n = 9k \pm 2 \Rightarrow n^2 = 9k + 4$
$n = 9k \pm 3 \Rightarrow n^2 = 9k$
$n = 9k + 4 \Rightarrow n^2 = 9k + 7$
Assim, nenhum número da forma $9k + 3$ pode ser um quadrado perfeito.

9)
Para que $65x1y$ seja divisível por 4, então o número $1y$ deve ser divisível por 4. Assim $y = 2$ ou $y = 6$.
Para $y = 2$ temos que $65x12$ é divisível por 3 se e somente se:
$6 + 5 + x + 1 + 2 = 3k \Rightarrow x + 14 = 3k \Rightarrow$
$x + 2 = 3(k - 4) \quad \therefore k = 5 \Rightarrow x = 1 \quad \therefore k = 6 \Rightarrow x = 4$
$\therefore k = 7 \Rightarrow x = 7$
Então, 65112, 65412 e 65712 são divisíveis por 12.
Para $y = 6$ temos que $65x16$ é divisível por 3 se e somente se:
$6 + 5 + x + 1 + 6 = 3k \Rightarrow x + 18 = 3k \Rightarrow x = 3(k - 6)$
$\therefore k = 6 \Rightarrow x = 0 \quad \therefore k = 7 \Rightarrow x = 3 \quad \therefore k = 8 \Rightarrow x = 6$
$\therefore k = 9 \Rightarrow x = 9$
Então, 65016, 65316, 65616 e 65916 são divisíveis por 12.

10)
$n = abba$ é a forma geral de um número palíndromo de 4 dígitos.
Como os dígitos de ordem ímpar menos os dígitos de ordem par são nulos: $a - b + b - a = 0$, então todos os números palíndromos de 4 dígitos são divisíveis por 11.

11)
$x = 3.(10!) + 12.(5!) + 4.(7!) =$
$= 3.1.2.3.2^2.5.2.3.7.2^3.3^2.2.5 + 3.2^2.1.2.3.2^2.3.5 + 2^2.1.2.3.2^2.5.2.3.7 \Rightarrow$
$x = 2^8.3^5.5^2.7 + 2^5.3^3.5 + 2^6.3^2.5.7 = 5(2^8.3^5.5.7 + 2^5.3^3 + 2^6.3^2.7)$

O dígito das unidades de $2^8.3^5.5.7$ é 0. O dígito das unidades de $2^5.3^3$ é 4. O dígito das unidades de $2^6.3^2.7$ é 2.
Assim o dígito das unidades de $2^8.3^5.5.7 + 2^5.3^3 + 2^6.3^2.7$ é 6, implicando que este número não é divisível por 5.
Então a maior potência de 5 que divide 3.(10!) + 12.(5!) + 4.(7!) é 1.

12)
Se 1x9y9z55 é divisível por 33, devemos aplicar a este número os critérios de divisibilidade por 3 e 11.
Assim, aplicando o critério de divisibilidade por 3:
$3k_1 = 1 + x + 9 + y + 9 + z + 5 + 5 = 29 + x + y + z \Rightarrow$
$x + y + z = 3(k_1 - 10) + 1 = 3k_2 + 1$ (*)
Aplicando agora o critério de divisibilidade por 11:
$11k_3 = (5 + z + y + x) - (5 + 9 + 9 + 1) = 5 + x + y + z - 24 = 11k_3 \Rightarrow$
$x + y + z = 11(k_3 + 1) + 8 = 11k_4 + 8$ (**)
Como $z > y > x$ e $z \leq 9$ então $x + y + z \leq 7 + 8 + 9 = 24$.
Os números naturais menores ou iguais a 24 que deixam resto 8 na divisão por 11 (**) são 8 e 19. Destes dois somente 19 é da forma 3k + 1 (*), ou seja, necessariamente devemos ter $x + y + z = 19$.
Analisemos todas as soluções naturais da equação $x + y + z = 19$ com a restrição $x < y < z$:
$2 + 8 + 9 = 3 + 7 + 9 = 4 + 6 + 9 = 4 + 7 + 8 = 5 + 6 + 8$.
Portanto, temos exatamente 5 soluções naturais possíveis, produzindo os seguintes números que são divisíveis por 33:
12989955, 13979955, 14969955, 14979855, 15969855.
Deste modo, existem 5 números.

13)
Seja N = [abc]. Como N é divisível por 11 então $a - b + c = 11.k_1$ (*)
Pelo enunciado a soma dos algarismos também deve ser divisível por 11:
$a + b + c = 11.k_2$ (**)
Subtraindo (**) de (*): $2b = 11(k_2 - k_1) \Rightarrow 11 \mid b \Rightarrow$
$b = 0$ uma vez que $0 \leq b \leq 9$.
(*) + (**): $2(a + c) = 11(k_1 + k_2) \Rightarrow 11 \mid a + c \Rightarrow$
$(a, c) = \{(2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2)\} \Rightarrow$
$N = \{209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902\}$

14)
Como $198 = 9 \times 11 \times 2$, o número N é múltiplo de 9, 11 e 2. Sejam x e y o primeiro e último algarismos de N. Como N é divisível por 9, a soma de seus algarismos é múltipla de 9. Logo, a soma $x + y$ é igual 7 ou 16. Da divisibilidade por 11, decorre que a diferença entre as somas dos algarismos de ordem par e dos de ordem ímpar é múltipla de 11. Logo, a

diferença x-y é igual a 6 ou -5. Como a soma e a diferença têm a mesma paridade, os casos possíveis são $x + y = 7$ e $x - y = -5$ (que fornece $x = 1$ e $y = 6$) e $x + y = 16$ e $x - y = 6$ (que fornece $x = 11$ e $y = 5$, que não atende a condição de x ser um algarismo). Logo, $N = 15399846$ que é par, satisfazendo, portanto, a última condição de divisibilidade por 198. O último algarismo de $N/198$ pode ser 2 ou 7. Como N não é múltiplo de 4, este último algarismo só pode ser 7.

15)

Suponha que exista M e N tais que a = M/N. Note que a soma dos algarismos de M é $0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ e a soma dos algarismos de N é $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Como um número e sua soma dos algarismos deixam o mesmo resto na divisão por 9, então $M = 9x + 2$ e $N = 9y + 7$.

Assim: $a = \dfrac{9x+2}{9y+7} = 9z + r \;\; \Rightarrow$

$9x + 2 = 81yz + 9yr + 63z + 7r = 9(9xy + yr + 7z) + 7r = 9q + 7r \;\; \Rightarrow$

$7r - 2$ é divisível por 9 (*)

Como $0 \le r \le 8$, o único número neste intervalo que satisfaz a condição (*) é $r = 8 \;\Rightarrow\; a = 9z + 8 \;\Rightarrow\; a \ge 8$.

Como $N \ge 13579$ então $M = aN \ge 8(13579) > 99999$, que é uma contradição.

Assim, não existem dois números que satisfazem o enunciado.

16)

Como $3 \mid 3x$ então $3 \mid S(3x)$. Se $S(3x) = S(x)$ então $3 \mid S(x)$ e assim conclui-se que $3 \mid x$.

Se $3 \mid x$ então $9 \mid 3x$ e daí segue que $9 \mid S(3x)$, ou seja, $9 \mid S(x) \;\Rightarrow\; 9 \mid x$

17)

Como n deve ser divisível por 6 então necessariamente deve ser par, fazendo com que o algarismo 8 seja obrigatoriamente escolhido para o local das unidades. Falta agora escolher 9 ou 5 para algum outro espaço vazio. O número atualmente está da forma __4__1__6__3 8.

Se acrescentarmos 9 a soma dos algarismos (independentemente do espaço vazio onde será colocado) será $s(n) = 4 + 1 + 6 + 3 + 8 + 9 = 31$ e se acrescentarmos 5 a soma dos algarismos será:

$s(n) = 4 + 1 + 6 + 3 + 8 + 5 = 27$.

Como n deve ser divisível por 3, então a soma dos seus dígitos deve ser divisível por 3. Assim, entre $s(n) = 31$ e $s(n) = 27$, obrigatoriamente devemos ter $s(n) = 27$, fazendo com que o número que deve ser acrescentado é 5. De modo a obter o maior número possível devemos colocar 5 antes do 4, formando o número 541638.

18)

Calculemos a soma dos dígitos de N:

$S(N) = 1 + 9 + 10(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + 3.9 + 7(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 1 + 2 \Rightarrow S(N) = 705$

Como $3 \mid S(N)$ então N é divisível por 3. Como 9 não divide S(N) então 9 não divide N.

Desta forma, $k = 1$.

19)

Queremos que o número seja múltiplo de 6, portanto deve ser de 2 e de 3. Ao pedir que a soma de suas cifras seja 21 o número já será múltiplo de 3. O número deverá também ser par, restringindo as possibilidades para sua última cifra. O número não pode terminar em 0 e nem 2 porque não teremos possibilidades para as primeiras duas cifras de forma que a sua soma alcance 21. Se a última cifra é 4, as duas primeiras devem somar 17, ou seja, devem ser 8 e 9, e existem duas combinações possíveis: 984 e 894. Se a última cifra é 6, as primeiras podem ser 8 e 7, ou 9 e 6, com os quais podem-se formar quatro números: 876, 786, 966 e 696. Se a última cifra é 8, as possibilidades para as primeiras são 6 e 7, 5 e 8 ou 4 e 9; e existem 6 números: 768, 678, 588, 858, 498, 948. No total existem 12 números.

20)

Seja $x = a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$ o número procurado

Pelo enunciado devemos ter:

a_1a_2 divisível por 2

$a_1a_2a_3$ divisível por 3

$a_1a_2a_3a_4$ divisível por 4

$a_1a_2a_3a_4a_5$ divisível por 5

$a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ divisível por 6

$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$ divisível por 7

$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$ divisível por 8

$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$ divisível por 9

Assim:

a_2 é par

$3 \mid a_1 + a_2 + a_3$

a_4 é par e $4 \mid a_3a_4$

$a_5 = 5$

a_6 é par e $3 \mid a_4 + a_5 + a_6$

a_8 é par e $8 \mid a_6a_7a_8$

$9 \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$

Como $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ e 9 divide 45, a última restrição ($9 \mid a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9$) é satisfeita diretamente.
Como a_2, a_4, a_6 e a_8 são todos pares, e somente existem 4 pares entre (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) então a_1, a_3, a_5, a_7 e a_9 são todos ímpares.
Como a_4 e a_6 são pares e $3 \mid a_4+5+a_6$, temos os seguintes pares possíveis (a_4, a_6):
(2, 8), (8, 2), (4, 6) ou (6, 4)
Como $4 \mid a_3a_4$ então se $a_4 = 8$ somente temos a_3 par (28, 48, 68 e 88)
Como $4 \mid a_3a_4$ então se $a_4 = 4$ somente temos a_3 par (24, 44, 64 e 84)
Assim, somente poderemos ter $a_4 = 6$ ou $a_4 = 2$
i) $a_4 = 6 \Rightarrow a_6 = 4$
Como $4 \mid a_3a_4$ os possíveis valores para a_3a_4 são (16, 36, 56, 76 e 96)
Como $8 \mid a6a7a8 \Rightarrow (a7, a8) = (1, 6), (3, 2), (5, 6), (7, 2), (9, 6)$
Como $a_4 = 6 \Rightarrow a_8 = 2 \Rightarrow a_7 = 3$ ou $a_7 = 7 \Rightarrow a_2 = 8$

21)
Desde que $72 = 9.8$, apliquemos, separadamente, os critérios de divisibilidade para 8 e para 9.
i) por 8: se $a1989b$ é divisível por 8, então $89b$ deve ser divisível por 8. Analisando os possíveis valores de b ($0 \le b \le 9$) concluímos que apenas 896 é divisível por 8, implicando que $b = 6$.
ii) por 9: se $a19896$ é divisível por 9 então $a+1+9+8+9+6 = 9k_1 \Rightarrow$
$a = 9k_1 - 33 = 9(k_1 - 4) + 3 \Rightarrow a = 9k_2 + 3$
Como $1 \le a \le 9$, então $k_2 = 0 \Rightarrow a = 3$.
Desta forma, teremos $a = 3$ e $b = 6$.

22)
Se N possui 1962 dígitos, então o valor máximo da soma dos dígitos de N é igual a $x_{max} = 9.1962 = 17658$.
Para x, o valor máximo da soma dos seus dígitos é quando $x = 16999$, fazendo com que $y_{max} = 1+6+9+9+9 = 34$. Para y, o maior valor possível da soma dos dígitos de y ocorre quando $y = 29$, implicando que $z_{max} = 11$.
Como x é divisível por 9, então y e z também são divisíveis por 9. Como z é divisível por 9 e seu valor máximo é 11, então $z = 9$.

23)
Suponhamos que $x = [abcdef] = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f$ é divisível por 37.
Seja y o número obtido através de x trocando de lugar o primeiro e o quarto dígitos (troca I).
Assim, $y = [dbcaef] = 10^5d + 10^4b + 10^3c + 10^2a + 10e + f$.

$x - y = 10^2(10^3 - 1)(a - d) \Rightarrow x - y = 100.999.(a - d)$

Desde que 37 divide 999 $\Rightarrow 37 \mid x - y \Rightarrow 37 \mid y$.

Analogamente, podemos conseguir outros múltiplos de 37 se trocarmos o segundo pelo quinto dígito (troca II) ou trocando o terceiro pelo sexto dígito (troca III).

Evidentemente podemos fazer estas trocas (I, II e III) uma a cada vez ou simultaneamente, obtendo assim vários números.

Enumeremos estes números através das permutações possíveis entre as trocas:

1) troca I: [dbcaef]; 2) troca II: [aecdbf]; 3) troca III: [abfdec]; 4) troca I e troca II: [decabf]; 5) troca I e troca III: [dbfaec];
6) troca II e troca III: [aefdbc]; 7) troca I, troca II e troca III: [defabc].

Podemos conseguir outros números permutando ciclicamente os dígitos.

Passando o primeiro dígito para último obtemos

$z = [bcdefa] = 10^5b + 10^4c + 10^3d + 10^2e + 10f + a$.

Como $10x - z = 10^6a - a = (10^3 + 1)(10^3 - 1)a = 1001.999.x$ e $37 \mid 999 \Rightarrow$
$37 \mid 10x - z \Rightarrow 37 \mid z$

Aplicando novamente todas as trocas sobre z obtemos:

1) troca I: [ecdbfa]; 2) troca II: [bfdeca]; 3) troca III: [bcaefd]; 4) troca I e troca II: [efdbca]; 5) troca I e troca III: [ecabfd];
6) troca II e troca III: [bfaecd]; 7) troca I, troca II e troca III: [efabcd].

Permutando ciclicamente mais uma vez obtemos w = [cdefab].

Aplicando novamente todas as trocas sobre w obtemos:

1) troca I: [fdecab]; 2) troca II: [caefdb]; 3) troca III: [cdbfae]; 4) troca I e troca II: [faecdb]; 5) troca I e troca III: [fdbcae];
6) troca II e troca III: [cabfde]; 7) troca I, troca II e troca III: [fabcde].

Se aplicarmos mais uma vez a permutação cíclica obtemos m = [defabc], que já foi obtido anteriormente (troca I, II e III em x), implicando que todas as suas trocas também já tenham ocorrido

O mesmo acontece com as outras duas permutações cíclicas, que são n = [efabcd] (troca I, II e III em y) e p = [fabcde] (troca I, II e III em z).

Deste modo, temos outros 23 inteiros que podem ser obtidos através do rearranjo dos dígitos x e que são divisíveis por 37, que são y, z e os 21 obtidos através das trocas (I, II e III e suas permutações) em x, y e z.

24)

A resposta é 3456. Sendo I um número interessante então a soma dos dígitos de I é igual a $1 + 2 + ... + 9 = 45$, fazendo com que I seja divisível por 9. Logo, $I = 99999.N = (10^5 - 1).N$ para algum número natural N de 5 algarismos.

Digamos,

$N = a_1a_2a_3a_4a_5$ logo, $I = 10^9a_1 + ... + 10^5a_5 - 10^4a_1 - ... - 10a_4 - a_5 \Rightarrow$
$I = 10^9a_1 + ... + 10^6a_4 + 10^5(a_5 - 1) + 10^4(9 - a_1) + ... + 10(9 - a_4) + 10 - a_5$.

Sejam $d_1, d_2, ..., d_9, d_{10}$ os dígitos de I, nesta ordem, então:
$d_1 + d_6 = 9$, $d_2 + d_7 = 9$, $d_3 + d_8 = 9$, $d_4 + d_9 = 9$ e $d_5 + d_{10} = 9$.
Como os únicos pares de dígitos cuja soma é 9 são (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6) e (4, 5) o número de possibilidades para $d_1, d_2, ..., d_9, d_{10}$ é $9.8.6.4.2.1.1.1.1.1 = 3456$.

25)

É claro que $d = \underbrace{333...333}_{100 \text{ três}} = 3 \cdot \left(\underbrace{111...111}_{100 \text{ uns}}\right) = 3n$. Portanto, o número procurado $N = \underbrace{111...111}_{k \text{ uns}}$ deve ser divisível por n e por 3 (n não é divisível por 3 porque a soma dos seus algarismos é igual a 100 que não é divisível por 3). Se k é um número da forma
$k = 100q + r$ onde $0 \le r < 100$ então obviamente $N = \underbrace{111...111}_{100q \text{ uns}}\underbrace{000...00}_{r \text{ zeros}} + \underbrace{111...11}_{r \text{ uns}} = \mathrm{M} + \mathrm{R}$. Como M é divisível por n então, N é divisível por n se, e somente se, $R = 0$ ou seja, se $r = 0$ e consequentemente se, e somente se, k for divisível por 100.
Se $k = 100q$ então a soma dos algarismos de N é igual a $100q$ e esta soma será divisível por 3 (e consequentemente também o número N)se, e somente se, q for divisível por 3. Portanto, o menor número $\mathrm{N} = \underbrace{111...111}_{k \text{ uns}}$ divisível por d consiste em 300 uns.

26)

$1998 = 2 \times 999 = 2 \times 3^3 \times 37$. Um número formado apenas pelos algarismos 0 e 3 é múltiplo de 3^3 se e somente se o número de algarismos 3 é múltiplo de 9 (pois ao dividi-lo por 3 obtemos um número que possui apenas os algarismos 0 e 1 que deve ser múltiplo de 9, o que ocorre se e só se o número de algarismos 1 é múltiplo de 9). Assim, o número desejado deve ter pelo menos 9 algarismos 3, e deve terminar por 0, por ser par. O menor número com essas propriedades é 3333333330, que é múltiplo de 1998 pois é par, é múltiplo de 3^3 e é múltiplo de 37 por ser múltiplo de 111 (é igual a 111×30030030).

27)

Como N possui 1994 dígitos e 14 são iguais a zero, sobram 1980 dígitos não nulos.
Como estes demais dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, estão na razão
1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8: 9, então:
$1980/(1 + 2 + 3 + ... + 9) = 1980/45 = 44$
Assim, existem:
$1.44 = 44$ dígitos 1 em N

$2.44 = 88$ dígitos 2 em N
$3.44 = 132$ dígitos 3 em N
$4.44 = 176$ dígitos 4 em N
$5.44 = 220$ dígitos 5 em N
$6.44 = 308$ dígitos 6 em N
$7.44 = 252$ dígitos 7 em N
$8.44 = 352$ dígitos 8 em N
$9.44 = 396$ dígitos 9 em N
Deste modo, a soma dos dígitos de N é
$S_N = 1.44 + 2.88 + 3.132 + 4.176 + \ldots + 9.396 \Rightarrow$
$S_N = 44(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81) \Rightarrow S_N = 12540 \Rightarrow$
$S_N = 2^2.3.11.19$
Como a soma dos dígitos S_N de N é divisível por 3 e não por 9, então N é divisível por 3 e não por 9, implicando que N não é um quadrado perfeito, pois para que N seja quadrado perfeito, o expoente de 3 em N deveria ser igual a 2.

12.2. PARTE B

1) a) $x = 4$; b) $x = 0, 3, 6$ ou 9; c) $x = 4$

2) Dica: Prove que $3 \mid (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0)$ e $2 \mid a_0 \Leftrightarrow$
$6 \mid [4(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0) - 3a_0]$

3) Não existe. Dica: Mostre que a soma não pode ser igual a 0.

4) 324561

5) 5. Dica: Aplique o critério de divisibilidade por 50.

6) 6374214

7) 45 divide $10(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1) + a_0$

8) d

9) 1

10) a) 8; b) O critério de 11 resulta em $11 \mid 10 - x$, que não possui solução para $0 \le x \le 9$.

11) b

12) $a = 2, 5$ ou 8

13) 20

14) a) No lugar do 8 aparece 2; b) 927654321

15) 532. Dica: Note que a diferença relativa entre um dígito de ordem par e um de ordem ímpar é 5, 0 ou -5.

16) 77776776. Dica: Note que o nº deve acabar em 76 e que $7 \mid 1001$.

17) b) 106.

18) 123654 ou 321654

19) 73. Dica: Se $N = (abcba)_{10}$ então $11 \mid N \Leftrightarrow 11 \mid [2(a-b)+c]$. Para cada valor de c analise quantos valores possíveis de a e b existem para que $[2(a-b)+c]$ seja igual a -11, 0, 11 e 22.

20) a) 2; b) 50, 05, 61, 16, 72, 27, 83, 38, 94 e 49; c) 100

21) 523152 ou 523656.

22) Dica: Demonstre que $12033\ldots3308 = 19 \times 633\ldots332$

23) 9731999999997.

DIVISIBILIDADE

13.1. PARTE A

1)

Como $4n + 1$ sempre é ímpar, então para que 5 divida $4n + 1$, seu dígito das unidades deve ser 5. Se o dígito das unidades de $4n + 1$ é 5 então o dígito das unidades de $4n$ é 4. Observe agora o seguinte:

i) se n termina em 0 então 4n termina em 0;
ii) se n termina em 1 então 4n termina em 4;
iii) se n termina em 2 então 4n termina em 8;
iv) se n termina em 3 então 4n termina em 2;
v) se n termina em 4 então 4n termina em 6;
vi) se n termina em 5 então 4n termina em 0;
vii) se n termina em 6 então 4n termina em 4;
viii) se n termina em 7 então 4n termina em 8;
ix) se n termina em 8 então 4n termina em 2;
x) se n termina em 9 então 4n termina em 6;

Deste modo, para que 4n termine em 4 teremos que n deve terminar em 1 ou 6. Como em cada dezena temos dois números terminando em 1 ou 6 e entre 500 e 1000 temos $(1000 - 500)/10 = 50$ dezenas, então existem $2.50 = 100$ números n entre 500 e 1000 que são bons.

2)

Sabemos que a combinação de x elementos tomados y a y ($x \geq y$) é dada por $C_{x,y} = \dfrac{x!}{y!(x-y)!}$, onde $C_{x,\ y}$ é um valor inteiro positivo. Assim, fazendo $x = a + b$ e $y = a$, temos que $C_{a+b,a} = \dfrac{(a+b)!}{a!b!}$, e como este valor é inteiro temos que $a!b! \mid (a + b)!$.

3)

Temos que $P = (a + 1)(a + 2)\ldots(a + k) = (a + k)!/a!$

Do exercício anterior, fazendo $k = b$, tiramos que $b! \mid (a + k)!/a! \Rightarrow$ $k! \mid (a + 1)(a + 2)\ldots(a + k)$

Este exemplo demonstra uma das propriedades mais interessantes dos números naturais, que afirma que a multiplicação de n números naturais consecutivos, é divisível por n!.

Desta forma, entre os 11 números naturais:

$a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5, a + 6, a + 7, a + 8, a + 9, a + 10, a + 11$

$(a \geq 1)$ podemos afirmar que existe um que é divisível por 11, um que é divisível por 10, um que é divisível por 9, um que é divisível por 8, um que é divisível por 7, um que é divisível por 6, 2 que são divisíveis por 5, 2 que são divisíveis por 4, 3 que são divisíveis por 3 e 5 que são divisíveis por 2.

4)

$$\frac{\overline{A0B}}{\overline{AB}} = \frac{100x+y}{10x+y} = 10 - \frac{9y}{10x+y} \Rightarrow 10x+y \mid 9y$$

Assim, basta listar, para cada valor de y, os divisores de dois dígitos de 9y e depois verificar se algum deles termina com o algarismo y:

$y = 0 \Rightarrow x = 1, 2, \ldots, 9 \Rightarrow AB = 10, 20, \ldots 90$

$y = 1 \Rightarrow 10x + 1 > 9 \Rightarrow$ não existe solução

$y = 2 \Rightarrow 18$ (nenhum termina em 2)

$y = 3 \Rightarrow 27$ (nenhum termina em 3)

$y = 4 \Rightarrow 36, 18$ e 12 (nenhum termina em 4)

$y = 5 \Rightarrow 45$ e $15 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 1 \Rightarrow AB = 45$ ou 15

$y = 6 \Rightarrow 54, 27, 18$ (nenhum termina em 6)

$y = 7 \Rightarrow 63$ e 21 (nenhum termina em 7)

$y = 8 \Rightarrow 72, 36, 24, 18$ e $12 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 18$

$y = 9 \Rightarrow 81$ e 27 (nenhum termina em 9)

Assim, o conjunto solução é dado por:

$\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 15, 18, 45\}$

5)

Enumeremos todos os múltiplos de 17 e 23 que possuem dois dígitos:

17, 34, 51, 68, 85, 23, 46, 69, 92

Entre estes 9 números temos algumas características interessantes:

– Não temos nenhum dígito 0;

– Com exceção de 0 e 7, todos os outros dígitos ocupam a posição das dezenas em algum número;

– 6 é o único dígito que ocupa em dois números a posição de dígito das dezenas;

– Com exceção de 0, todos os outros dígitos ocupam uma só vez a posição de dígito das unidades.

Iniciando com 6 temos duas possibilidades:

i) $68 \rightarrow 685 \rightarrow 6851 \rightarrow 68517$ parou pois nenhum dos múltiplos começa por 7;

ii) $69 \rightarrow 692 \rightarrow 6923 \rightarrow 69234 \rightarrow 692346$ a partir daqui é só repetir

Assim, temos um número de 1996 dígitos que é formado escrevendo (da esquerda para a direita) lado a lado o número 69234. Como 69234 possui

5 dígitos e $1996 = 5k + 1$, então o dígito das unidades é igual ao primeiro dígito do período, ou seja, vale 6.

6)

Se $a^2 + b^2$ é divisível por $ab \Rightarrow a^2 + b^2 = kab \Rightarrow a^2 - a(kb) + b^2 = 0$.
Para que esta equação de 2º grau possua raízes inteiras seu discriminante deve ser um quadrado perfeito:
$\Delta = (kb)^2 - 4b^2 = x^2 \Rightarrow b^2(k^2 - 4) = x^2$
Desde que a multiplicação $b^2(k^2 - 4)$ deve ser um quadrado perfeito e b^2 é um quadrado perfeito, então:
$k^2 - 4 = y^2 \Rightarrow k^2 - y^2 = 4 \Rightarrow (k - y)(k + y) = 2^2$
Como $k - y$ e $k + y$ possuem a mesma paridade teremos: $k - y = 2$ e $k + y = 2 \Rightarrow k = 2$ e $y = 0$.
Deste modo $y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow k^2 - 4 = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$

7)

Sejam a e b os números dos andares onde moram, respectivamente, Eduardo e Augusto, e x e y os números dos apartamentos de cada um.
Assim, podemos escrever que:
$x = 12(a - 1) + r_1$, onde $1 \le r_1 \le 12$ $y = 12(b - 1) + r_2$, onde $1 \le r_2 \le 12$.
Do enunciado temos que: $a = y$ e $x + y = 2164$
Assim: $x = 12y - 12 + r_1$ e $y = 12b - 12 + r_2$
$x + y = 13y - 12 + r_1 \Rightarrow 2164 = 13y - 12 + r_1 \Rightarrow 2176 = 13y + r_1$
Notemos que esta equação é semelhante à divisão Euclidiana, pois $1 \le r_1 \le 12$. Quando dividimos 2176 por 13, o quociente é $y = 167$ e o resto é $r_1 = 5$
Desta forma, como $x + y = 2164 \Rightarrow x = 1997$

8)

$ab + 1 \mid (a+1)(b+1) \Rightarrow ab + 1 \mid ab + a + b + 1 \Rightarrow ab + 1 \mid (ab + a + b + 1) - (ab + 1) \Rightarrow$
$ab + 1 \mid a + b \Rightarrow ab + 1 \le a + b \Rightarrow a(b - 1) \le b - 1$. Desta última desigualdade, observamos que, se $b > 1$, então $a \le 1 \Rightarrow a = 1$, ou seja, um dentre os inteiros a e b vale 1. Suponha, então, sem perda de generalidade, que $a = 1$. Substituindo, obtemos $a = 1 \Rightarrow b + 1 \mid 2(b + 1)$, o que é válido para todo inteiro positivo b. As soluções são, então, $(1, b)$ e $(a, 1)$.

9)

Seja $N = abcxyz$ um número afortunado, ou seja, $a + b + c = x + y + z$
Notemos que para cada número afortunado $N = abcxyz$ temos um outro $M = xyzabc$ também afortunado.
Sejam $P = xyz$ e $Q = abc$.

Assim: $N + M = 1000Q + P + 1000P + Q = 1001(P + Q) = 7.11.13(P + Q)$

Assim, podemos organizar aos pares a soma de todos os números afortunados de modo que cada par seja divisível por 13, implicando que a soma total é divisível por 13.

10)

Como $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{(n+1)n}{2}\right]^2$ e $1^3.2^3.3^3 \ldots n^3 = (n!)^3$, os números $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, n^3$ satisafazem o enunciado.

11)

Repare inicialmente que todos os anos desde 1901 até 1931 possuem datas interessantes, uma vez que basta observar a data N/01/N, onde $1 \le N \le 31$. Repare agora que os anos pares de 1932 até 1956 possuem datas interessantes, uma vez que $\dfrac{N}{2}/02/N$, com $32 \le N \le 56$, é uma data interessante. Em 1958 não tivemos uma data interessante pois a única possibilidade seria 29/02/58, que não existiu pois 1958 não foi um ano bissexto (58 não é divisível por 4).

Na verdade, repare que um ano N possui uma data interessante se N ($01 \le N \le 99$) pode ser decomposto da forma $N = x.y$, onde $1 \le x \le 28$ e $1 \le y \le 12$. Note que os números primos maiores que 31 (37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97) não podem ser decompostos desta maneira. Os números pares N entre 60 e 99 que são iguais duas vezes um primo (62, 74, 78, 82, 86, 94) também não apresentam datas interessantes. Analisando a divisibilidade por 3, como $100/3 = 33,33\ldots$, os únicos casos a serem levados em consideração seriam $N = 93$ (exemplo do enunciado) e $N = 99$, que possui as datas interessantes 11/09/99 e 09/11/99.

Portanto, os anos que não possuíram datas interessantes foram: 1937, 1941, 1943, 1947, 1953, 1958, 1959, 1961, 1962, 1967, 1971, 1973, 1974, 1978, 1979, 1982, 1983, 1986, 1989, 1994 e 1997.

12)

$x = q_1.d + 4$ e $14x = q_2.d + 17$

$q_1 d = x - 4$ e $q_2 d = 14x - 17 \Rightarrow d \mid x - 4$ e $d \mid 14x - 17 \Rightarrow$

$d \mid (14x - 17) - 14(x - 4) \Rightarrow d \mid 39 \Rightarrow d = 39$

Como $210 = 14.15 \Rightarrow 15.14x = 15q_2.39 + 15.17 \Rightarrow$

$210x = q_3.39 + 255 \Rightarrow 210x = q_3.39 + 6.39 + 21 \Rightarrow$

$210x = 39(q_3 + 6) + 21 \Rightarrow 210x = q_4.39 + 21 \Rightarrow r = 21$

13)

Podemos escrever os números da forma: $c - 2, c - 1, c, c + 1, c + 2$

Assim, temos que $a + b + c + d + e = 5c = x^3$ e $b + c + d = 3c = y^2 \Rightarrow$
$3x^3 = 5y^2 \Rightarrow 5 \mid x$ e $3 \mid y \Rightarrow$
$x = 5x_1$ e $y = 3y_1 \Rightarrow 5^2x_1^3 = 3y_1^2 \Rightarrow 3 \mid x_1$ e $5 \mid y_1 \Rightarrow$
$x_1 = 3x_2$ e $y_1 = 5y_2 \Rightarrow 3^2x_2^3 = y_2^2 \Rightarrow$
$x_2 = 1$ e $y_2 = 3 \Rightarrow x_1 = 3$ e $y_1 = 15 \Rightarrow x = 15$ e $y = 45$
Como $5c = x^3 \Rightarrow 5c = 3^3.5^3 \Rightarrow c = 3^3.5^2$

14)
Notemos que $517 = 11.47$
Os números devem ser da forma: a, ab, abc, abcd, abcde
Deste forma:
$a + ab + abc + abcd + abcde = a(1 + b + bc + bcd + bcde) = 11.47$
i) $a = 11 \Rightarrow 1 + b + bc + bcd + bcde = 47 \Rightarrow b + bc + bcd + bcde = 46 \Rightarrow$
$b(1 + c + cd + cde) = 2.23 \Rightarrow$
$b = 2 \Rightarrow 1 + c + cd + cde = 23 \Rightarrow c(1 + d + de) = 2.11 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow$
$d(1 + e) = 2.5 \Rightarrow d = 2 \quad e = 4$
Ou seja, podemos colocar os números: 11, 22, 44, 88, 352

15)
Se após a vírgula existem k casas decimais antes do período tem-se que:

$$\frac{m}{n} = \frac{A}{10^k} + \frac{0,43564356\ldots}{10^k} = \frac{A}{10^k} + \frac{4356}{9999.10^k} = \frac{9999A + 4356}{9999.10^k} \Rightarrow$$

$9999.10^k.m = (9999A + 4356)n$
Como $101 \mid 9999$ e 101 não divide $9999A + 4356$ então segue direto que $101 \mid n$.

16)
Para que N seja divisível por 4, temos que o número formado pelos os dois últimos dígitos de N deve ser divisível por 4. Como o dígito das dezenas é 2, temos que o dígito das unidades de N deve ser 0, 4, ou 8.
i) N acaba em 20:
Como $20 = 3.6 + 2$, basta encontrar a quantidade de números entre 0 e 99 que deixam resto 1 quando divididos por 3. Estes números formam uma PA de razão 3, $a_1 = 1$ e $a_n = 97$
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 97 = 1 + 3(n - 1) \Rightarrow n = 33$
ii) N acaba em 24:
Como $24 = 3.8$, basta encontrar a quantidade de números entre 0 e 99 que são divisíveis por 3.
Estes números formam uma PA de razão 3, $a_1 = 0$ e $a_n = 99$
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 99 = 0 + 3(n - 1) \Rightarrow n = 34$
iii) N acaba em 28:

Como $28 = 3.9 + 1$, basta encontrar a quantidade de números entre 0 e 99 que deixam resto 2 quando divididos por 3. Estes números formam uma PA de razão 3, $a_1 = 2$ e $a_n = 98$

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 98 = 2 + 3(n-1) \Rightarrow n = 33$

Assim, a quantidade total de números é igual a $33 + 34 + 33 = 100$

17)

Observa-se que

$(k+1)^3 - 2k^3 + (k-1)^3 = (k+1)^3 + (-k^3) + (-k^3) + (k-1)^3 = 6k$.

Desta forma, todo inteiro múltiplo de 6 pode ser escrito como soma de 4 cubos.

Pode-se escrever também todo inteiro n das seguintes formas:

i) $n = 6q = 6x + 0^3$

ii) $n = 6q + 1 = 6x + 1^3$

iii) $n = 6q + 2 = 6(x+1) + 2 = 6x + 8 = 6x + 2^3$

iv) $n = 6q + 3 = 6(x+4) + 3 = 6x + 27 = 6x + 3^3$

v) $n = 6q + 4 = 6(x-2) + 4 = 6x - 8 = 6x + (-2)^3$

vi) $n = 6q + 5 = 6(x-1) + 5 = 6x - 1 = 6x + (-1)^3$

Assim, podemos escrever que todo inteiro n é da forma: $n = 6x + j^3$, onde $j = -2$ ou -1 ou 0 ou 1 ou 2 ou 3.

Sendo $6x = n - j^3 \Rightarrow (k+1)^3 + (-k^3) + (-k^3) + (k-1)^3 = n - j^3 \Rightarrow$

$n = (k+1)^3 + (-k^3) + (-k^3) + (k-1)^3 + j^3$

18)

Como 1976 é par, poderíamos imaginar que a decomposição de 1976
como soma de inteiros positivos que possui o maior produto seja 1976 =
2 + 2 + 2 + 2 + ... + 2, onde temos 988 2's. Entretanto, notemos que se
no lugar da soma de três números dois (2 + 2 + 2 = 6) escrevermos 3 + 3
(= 6), temos que 2.2.2 < 3.3 (8 < 9), onde concluímos que devemos
substituir cada conjunto de 3 números 2 por 2 números 3 para
maximizar o produto. Se fizermos o mesmo para 4, notamos que desta
vez não seria melhor substituir 4 números 3 por 3 números 4, pois
3.3.3.3 > 4.4.4 (81 > 64), o mesmo raciocínio valendo para 5, uma vez
que 3.3.3.3.3 > 5.5.5 (243 > 125). Desta forma, concluímos que a
decomposição de qualquer inteiro n como soma de inteiros positivos tal
que o produto destes inteiros seja o maior possível deve possuir o maior
número possível de 3's, completando com 2's (se necessário).

Assim, podemos separar em 3 casos:

i) se $n = 3k$: $n = 3 + 3 + 3 + ... + 3 \Rightarrow P_n = 3^k$

ii) se $n = 3k + 1$: $n = 3 + 3 + 3 + ... + 3 + 2 + 2 \Rightarrow P_n = 2^2.3^{k-1}$

iii) se $n = 3k + 2$: $n = 3 + 3 + 3 + ... + 3 + 2 \Rightarrow P_n = 2.3^k$

Como $1976 = 3.658 + 2$, a decomposição de 1976 como soma de inteiros positivos que possui maior produto destes inteiros é

$$1976 = 3 + 3 + 3 + 3 + \ldots + 3 + 3 + 2,$$

onde temos 658 números 3, e o produto é igual a $P_{1976} = 2.3^{658}$.

19)

Sabe-se que $a^2 + 2nb^2 = k^2$, onde a e k possuem a mesma paridade.

Assim: $nb^2 = \dfrac{k^2 - a^2}{2}$.

Logo: $a^2 + nb^2 = \dfrac{k^2 + a^2}{2} = \left(\dfrac{a+k}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-k}{2}\right)^2$

20)

Notemos que $1.1.(-1).(-1) = 1$ e $1 + 1 + (-1) + (-1) = 0$, ou seja, estes valores multiplicados ou somados, respectivamente, não alteram o valor da conta.

Para $n = 4k + 1$ a separação é simples, bastando separar o $4k + 1$ (pois para infinitos k temos que $4k + 1$ é primo) e colocar um igual número (par) de 1 e (-1), para garantir que a soma destes termos dê 0 e a multiplicação dê 1.

$4k + 1 = (4k + 1) + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + (-1) + (-1) + \ldots + (-1)$

$4k + 1 = (4k + 1).1.1\ldots1.1.(-1).(-1)\ldots(-1)$

onde temos 2k números 1 e 2k números -1.

O maior problema para $n = 4k$ é organizar a conta da soma dos 4k termos. Portanto vamos partir de uma soma inicial, onde todos os 4k termos são iguais a 1: $4k = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$.

Desejamos inserir os número 4, k e alguns (-1), de modo a não mudar o valor da soma.

Tirando um 1 e colocando um 4 e tirando um 1 e colocando um k, alteramos a conta em $(4 + k) - 2 = k + 2$

Assim trocando $(k - 2)/2$ números 1 por (-1) temos novamente a soma dando 4k.

Assim, para k par, podemos escrever a soma e a multiplicação dos termos das seguintes formas:

$4k = (4.k.1).1.1\ldots1.1.(-1).(-1)\ldots(-1)$

$4k = (4 + k + 1) + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + (-1) + (-1) + \ldots + (-1)$

onde temos $(k - 2)/2$ números 1 e $(7k - 6)/2$ números 1.

Para conseguir $4(k + 1) = 4k + 4$ (k par) bons, basta pegar a expressão da soma de 4k (k par), separar 4 em 2 + 2, juntar o k com um número 1 e adicionar à soma os quatro números $(1 + 1 + 1 + 1)$:

$4k + 4 = 2 + 2 + (k + 1) + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + (-1) + (-1) + \ldots + (-1) + (1 + 1 + 1 + 1)$

$4k + 4 = 2.2.(k + 1).1.1\ldots1.1.(-1).(-1)\ldots(-1).1.1.1.1$

21)

Sim, existe. Como $2008 = 2^3.251$ basta fazer:
$x_1 = x_2 = ... = x_{10} = 1$, $x_{11} = x_{12} = x_{13} = 4$ e $x_{14} = 250$.

22)

$BABABA = BA.10000 + BA.100 + BA = BA(10101) = (10101)(10B + A) =$
$= 3.7.13.37.(10B + A)$
$AAA = (111)A = 3.37.A$
$BBB = (111)B = 3.37.B$
$AB = 10A + B$
Como $BBB \mid BABABA \Rightarrow 3.37.B \mid 3.7.13.37.(10B + A) \Rightarrow$
$B \mid 7.13.(10B + A)$
Como $10B + A$ não é múltiplo de B e $1 \le B \le 9$, temos que $B = 7$
$\therefore AAA \mid BABABA \Rightarrow 3.37.A \mid 3.7.13.37.(70 + A) \Rightarrow A \mid 7.13.(70 + A)$
i) $A = 2$; ii) $A = 5$;
Analisemos cada caso:
i) $A = 2 \Rightarrow 222 \mid 727272$, $777 \mid 727272$, $27 \mid 727272$, 72 não é múltiplo de 7
Então $A = 2$ e $B = 7$ é uma resposta
ii) $A = 5 \Rightarrow 555 \mid 757575$, $777 \mid 757575$, 57 não divide 757575 $\Rightarrow$
$A = 5$ e $B = 7$ não serve

23)

$$\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12} \Rightarrow 12(4m + n) = mn \Rightarrow mn - 48m - 12n = 0 \Rightarrow$$
$(m - 12)(n - 48) = 576 \Rightarrow (m - 12)(n - 48) = 2^6.3^2$
Como n é ímpar, tem-se as seguintes possibilidades:

$$\text{i)} \begin{cases} m - 12 = 576 \\ n - 48 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 588 \text{ e } n = 49$$

$$\text{ii)} \begin{cases} m - 12 = 192 \\ n - 48 = 3 \end{cases} \Rightarrow m = 204 \text{ e } n = 51$$

$$\text{iii)} \begin{cases} m - 12 = 64 \\ n - 48 = 9 \end{cases} \Rightarrow m = 76 \text{ e } n = 57$$

24)

$$(n+1)(n+2)...(3n) = \frac{1.2.3...n(n+1)(n+2)...(3n)}{1.2.3...n} =$$
$$= \frac{1.2.(1.3).4.5.(2.3).7.8.(3.3)...(3n-2)(3n-1)(3.n)}{1.2.3...n} =$$

$$= \frac{3^n[1.2.4.5.7.8...(3n-2)(3n-1)]\cancel{(1.2.3...n)}}{\cancel{1.2.3...n}} = 3^n[1.2.4.5.7.8...(3n-2)(3n-1)]$$

Como entre os números 1, 2, 4, 5, 7, 8, ..., 3n − 2 e 3n − 1 não existem nenhum número múltiplo de 3, então a maior potência de 3 que divide (n + 1)(n + 2)...(3n) é 3^n. Logo, o menor inteiro positivo n tal que 3^{2003} é um divisor de (n + 1)(n + 2)...(3n) é n = 2003.

25)

Suponhamos que 40...09 é um quadrado perfeito, ou seja, $4.10^n + 9 = t^2$.

Como 409 não é quadrado perfeito então $n \geq 3 \Rightarrow t \geq 64$.

$4.10^n + 9 = t^2 \Rightarrow 4.10^n = t^2 - 9 \Rightarrow 2^{n+2}.5^n = (t-3)(t+3)$

Perceba que se $d \mid t - 3$ e $d \mid t + 3$ então $d \mid [(t+3) - (t-3)] \Rightarrow d \mid 6$

Assim, t − 3 e t + 3 não podem ser simultaneamente divisíveis por 5.

Logo, tendo em vista que $t \geq 64$, temos somente as seguintes possibilidades:

i) $\begin{cases} t-3 = 2.5^n \\ t+3 = 2^{n+1} \end{cases} \Rightarrow 2^{n+1} - 2.5^n = 6 \Rightarrow 2^n - 5^n = 3$ que não possui soluções naturais

ii) $\begin{cases} t-3 = 2^{n+1} \\ t+3 = 2.5^n \end{cases} \Rightarrow 2.5^n - 2^{n+1} = 6 \Rightarrow 5^n - 2^n = 3 \Rightarrow n = 1$, que é impossível

26)

Considere n = 1000x + y, onde y é o número formado pelos últimos 3 dígitos de n.

Assim, tem-se que $\sqrt[3]{n} = x \Rightarrow x^3 = 1000x + y \Rightarrow y = x(x^2 - 1000)$

Como $y > 0$ então $x^2 > 1000 \Rightarrow x \geq 32$

i) $x = 32 \Rightarrow y = 768 \Rightarrow n = 32768$

ii) $x = 33 \Rightarrow y = 2937$, que possui mais de 3 dígitos.

Assim, a única possibilidade é n = 32768.

27)

$$\left(4-\frac{2}{1}\right)\left(4-\frac{2}{2}\right)\left(4-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(4-\frac{2}{n}\right) = \frac{2.6.10.14...(4n-2)}{1.2.3...n} =$$

$$= \frac{(2.1)(2.3)(2.5)(2.7)...2(2n-1)}{1.2.3...n} =$$

$$= \frac{2^n[1.3.5.7...(2n-1)]}{1.2.3...n} = \frac{2^n[1.3.5.7...(2n-1)](2.4.6.8...2n)}{(1.2.3...n)(2.4.6.8...2n)} =$$

$$= \frac{\cancel{2^n}[1.2.3.4.5.6.7.8...(2n-1)(2n)]}{\cancel{2^n}(1.2.3...n)^2} = \frac{(2n)!}{n!.n!} = \binom{2n}{n}.$$

Como $\binom{2n}{n}$ sempre representa um número inteiro, então a expressão proposta sempre é inteira.

28)

Note que $\left(\frac{m^k}{k^m}\right)^n = \left(\frac{m^n}{n^m}\right)^k \left(\frac{n^k}{k^n}\right)^m$. Como m^n é divisível por n^m e n^k é divisível por k^n então $\left(\frac{m^n}{n^m}\right)^k \left(\frac{n^k}{k^n}\right)^m$ é um número inteiro. Logo, conclui-se que $\left(\frac{m^k}{k^m}\right)^n$ é inteiro assim segue diretamente que k^m divide m^k.

29)

$n^2 + 2n + 12 = 121k \Rightarrow (n+1)^2 = 121k - 11 \Rightarrow (n+1)^2 = 11(11k-1) \Rightarrow$
$11 \mid (n+1)^2 \Rightarrow 11^2 \mid (n+1)^2 \Rightarrow 11 \mid 11k - 1$, que é absurdo

30)

$n^2 + n + 1 = k^2 \Rightarrow n^2 - k^2 + n + 1 = 0 \Rightarrow 4n^2 - 4k^2 + 4n + 4 = 0 \Rightarrow$
$(2n - 2k + 1)(2n + 2k + 1) = -3$

i) $\begin{cases} 2n-2k+1=1 \\ 2n+2k+1=-3 \end{cases} \Rightarrow 4n+2=-2 \Rightarrow n=-1$

ii) $\begin{cases} 2n-2k+1=-1 \\ 2n+2k+1=3 \end{cases} \Rightarrow 4n+2=2 \Rightarrow n=0$

iii) $\begin{cases} 2n-2k+1=3 \\ 2n+2k+1=-1 \end{cases} \Rightarrow 4n+2=2 \Rightarrow n=0$

iv) $\begin{cases} 2n-2k+1=-3 \\ 2n+2k+1=1 \end{cases} \Rightarrow 4n+2=-2 \Rightarrow n=-1$

Note que nenhum destes valores possíveis para n são inteiros positivos.

31)

De modo que $1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3} \mid 2^{2000}$ deve-se ter

$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=2^k$, para $0 \le k \le 2000$.

Desde que $1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\dfrac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$ então

$(n+1)(n^2-n+6)=3.2^{k+1}$

Fazendo $m = n+1$, para $m \ge 4$, tem-se que $m(m^2-3m+8)=3.2^{k+1}$

Existem duas possibilidades:

i) $m=2^s \Rightarrow 2^{2s}-3.2^s+8=3.2^t \Rightarrow 2^{2s}-3.2^s=3.2^t-8$

Se $s \ge 4$ então $16 \mid 2^{2s}-3.2^s$ e assim $16 \mid 3.2^t-8 \Rightarrow 2^t=8 \Rightarrow t=3 \Rightarrow$

$m^2-3m+8=24 \Rightarrow$

$m^2-3m-16=0$, que não possui soluções inteiras.

Logo, segue que $s \le 3$. Se $s=3$ então $m=8$, $t=4$ e $n=7$.

Se $s=2$ tem-se que $m=4$, $t=2$ e $n=3$.

Se $s=1$ não há solução inteira.

ii) $m=3.2^u \Rightarrow 9.2^{2u}-9.2^u+8=2^v \Rightarrow 9.2^{2u}-9.2^u=2^v-8$

Se $u \ge 4$ então $16 \mid 9.2^{2u}-9.2^u$ e assim segue que $16 \mid 2^u-8 \Rightarrow$

$2^u=8 \Rightarrow u=3 \Rightarrow m(m-3)=0$

Note que $m=0$ não é da forma 3.2^u e $m=3 \Rightarrow u=0$, que é impossível

Assim, conclui-se que $u \le 3$.

$u=1$ ou $u=2$ não fornecem soluções inteiras.

$u=3$ tem-se $m=24$, $v=9$, $n=23$.

Assim, as soluções são $n = 3, 7$ ou 23.

32)

$2a^2=3b^3 \Rightarrow 3 \mid a$ e $2 \mid b \Rightarrow a=3a_1$ e $b=2b_1$

Substituindo: $2(3a_1)^2=3(2b_1)^3 \Rightarrow 3a_1^2=4b_1^3 \Rightarrow 2 \mid a_1$ e $3 \mid b_1 \Rightarrow$

$a_1=2a_2$ e $b_1=3b_2$

$3(2a_2)^2=4(3b_2)^3 \Rightarrow a_2^2=9b_2^3 \Rightarrow 3 \mid a_2 \Rightarrow a_2=3a_3$

$(3a_3)^2=9b_2^3 \Rightarrow a_3^2=b_2^3=k^6 \Rightarrow a_3=k^3$ e $b_2=k^2$

Assim: $a=3a_1=6a_2=18a_3=18k^3$ e $b=2b_1=6b_2=6k^2$

33)

Demonstrar que $\dfrac{n^4}{12}-\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{5n^2}{12}-\dfrac{n}{6}=\dfrac{n^4-4n^3+5n^2-2n}{12}$ é inteiro é equivalente a provar que 12 divide $n^4-4n^3+5n^2-2n$.

Fatorando obtemos $n^4 - 4n^3 + 5n^2 - 2n = n(n-1)^2(n-2)$. Uma vez que $12 = 2^2.3$ então basta provar que a expressão é divisível, separadamente, por 3 e 4.

i) divisível por 3: no meio da fatoração de $n^4 - 4n^3 + 5n^2 - 2n$ é possível destacar a expressão $(n-2)(n-1)n$, que nada mais é que a multiplicação de três inteiros consecutivos, sendo um deles divisível por 3, fazendo com que 3 divida $(n-2)(n-1)n$, $n \in \mathbb{N}$.

ii) divisível por 4:

1º caso: se n é ímpar, então $n - 1$ é par e conseqüentemente $(n-1)^2$ é múltiplo de 4

2º caso: se n é par, $n - 2$ também é par, implicando que 4 divide $n(n-2)$

Logo, como 3 e 4 dividem $n^4 - 4n^3 + 5n^2 - 2n$ então 12 divide $n^4 - 4n^3 + 5n^2 - 2n$.

34)

Os produtos são da forma $P_n = n(2160 - n) = 2160n - n^2$. Como $2160n$ sempre é múltiplo de 2160, o produto P_n será múltiplo de 2160 se, e somente se, n^2 é múltiplo de 2160.

Como $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$, n^2 é múltiplo de 2160 se, e somente se, n é múltiplo de $2^2.3^2.5$. Temos que, entre 1 e 2160, há $\dfrac{2160}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 12$ múltiplos de tal número. Portanto, já que P_0 também é múltiplo, há 13 múltiplos de 2160 dentre os produtos.

35)

Observe que $21.2^2 - 9^2 = 84 - 81 = 3$, portanto só nos resta verificar se é possível obter os inteiros 1 e 2. Se $21m^2 - n^2 = 2$, precisamos ter m e n com a mesma paridade. Se ambos forem pares, o resultado será divisível por 4. Se ambos forem ímpares, o resultado também será divisível por 4, pois $21(2a+1)^2 - (2b+1)^2 = 84a^2 + 84a - 4b^2 - 4b + 20$, portanto nunca poderá ser 2. Se $21m^2 - n^2 = 1 \Leftrightarrow 3.7.m^2 = n^2 + 1$, teríamos que $n^2 + 1$ é múltiplo de 3, mas nenhum número dessa forma é múltiplo de 3:

$n = 3k \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 1$

$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2$

$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 5$

Isso nos permite dizer que o menor valor positivo é 3.

36)

$x^2 + y^2 - x = k(2xy) \Rightarrow y^2 - (2kx)y + x^2 - x = 0$

$\Delta = t^2 \Rightarrow 4k^2x^2 - 4(x^2 - x) = t^2 \Rightarrow 4x[(k^2-1)x + 1] = t^2$

Como $x \mid (k^2 - 1)x$ então $mdc[(k^2-1)x + 1, x] = 1 \Rightarrow$ x é um quadrado perfeito

37)

(a) É possível. Divida os números nos grupos A e B seguindo as regras:

– se o número for da forma $8k + 1$, $8k + 4$, $8k + 6$ ou $8k + 7$, coloque-o em A;

– se o número for da forma $8k + 2$, $8k + 3$, $8k + 5$ ou $8k + 8$, coloque-o em B.

Desde que 40000 é um múltiplo de 8, existem 5000 seqüências de 8 números naturais consecutivos.

Para cada umas destas seqüências note que:

$(8k + 1)^2 + (8k + 4)^2 + (8k + 6)^2 + (8k + 7)^2 =$

$= 4.(8k)^2 + 16k(1 + 4 + 6 + 7) + (1 + 16 + 36 + 49) =$

$= 4(8k)^2 + 16k(2 + 3 + 5 + 8) + (4 + 9 + 25 + 64) =$

$= (8k + 2)^2 + (8k + 3)^2 + (8k + 5)^2 + (8k + 8)^2$, para $0 \le k \le 4999$.

Assim, se os números forem divididos seguindo estas regras, os quadrados dos números em cada grupo possuem a mesma soma.

(b) Não é possível. Suponha, por absurdo, que é possível a divisão dos números de 1 até 40002 (inclusive) em dois conjuntos A e B como requerido.

Seja S o valor da soma dos quadrados dos termos de cada grupo.

Desta forma: $2S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, implicando que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ é par.

Sabemos que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Fazendo $n = 40002$ nesta fórmula temos que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ é ímpar, que é um absurdo, pois se fosse possível separar os números como requerido no enunciado então $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ deveria ser par.

38)

$(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = m^3 \Rightarrow 3n^3 + 6n = m^3 \Rightarrow 3n(n^2 + 2) = m^3 \Rightarrow$ $3 \mid m$

Fazendo $m = 3k$ tem-se que $n(n^2 + 2) = 9k^3$

Se m for ímpar então n é ímpar. Suponha que $d \mid n$ e $d \mid n^2 + 2$.

Assim, $d \mid (n^2 + 2 + (-n)n) \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d = 1$ ou $d = 2$

Entretanto, como n é ímpar então $d = 1$. Deste modo, temos dois casos a considerar:

i) $n^2 + 2$ é um cubo perfeito e 9 divide n:

Se $n = 3k + r \Rightarrow n^3 = 27k^3 + 27k^2r + 9kr^2 + r^3 \Rightarrow n^3 = 9x + r^3$

Como r pode valer 0, 1 ou 2, todo cubo perfeito deixa resto 0, 1 ou 8 na divisão por 9.

Como $n^2 + 2 = 9q + 2$ então tem-se uma contradição.

ii) $n^2 + 2$ é divisível por 9 n é um cubo perfeito: Se 9 divide $n^2 + 2$ então $n = 9k \pm 4$, que é uma contradição pois n é divisível por 9.

Desta forma demonstramos que n é par. Se n for par então m é par: $m = 2a$ e $n = 2b$
$6b(4b^2 + 2) = 8a^3 \Rightarrow 3b(2b^2 + 1) = 2a^3 \Rightarrow 2 \mid b(2b^2 + 1)$
Entretanto, como $2b^2 + 1$ é ímpar, então segue que $2 \mid b \Rightarrow 4 \mid n$

39)
Suponha que $a_m = t^2$. Logo,
$a_{2kt+k^2r+m} = a_m + (2kt + k^2r + m - m)r = t^2 + 2ktr + (kr)^2 = (t + kr)^2$,
$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

40)
Ao menos um de seis elementos consecutivos deve ser divisível por 5. Como os elementos devem ser divididos em dois conjuntos e um dos produtos será divisível por 5, é necessários que dois elementos sejam divisíveis por 5, que são os elementos n e n + 5. Assim, n e n + 5 devem pertencer a conjuntos diferentes. Como a multiplicação dos dois menores números $n(n + 1)$ é estritamente maior que o maior número $n + 5$, então a quantidade de números em cada partição é mesma. Como n, n + 2 e n + 4 possuem a mesma paridade e n + 1, n + 3 e n + 5 também possuem a mesma paridade, então existem, portanto, duas possibilidades:
i) $A = \{n, n + 1, n + 4\}$ e $B = \{n + 2, n + 3, n + 5\}$
Como $n + 2 > n$, $n + 3 > n + 1$ e $n + 5 > n + 4$ então
$(n + 2)(n + 3)(n + 5) > n(n + 1)(n + 4)$
ii) $A = \{n, n + 3, n + 4\}$ e $B = \{n + 1, n + 2, n + 5\} \Rightarrow$
$n(n + 3)(n + 4) = (n + 1)(n + 2)(n + 5) \Rightarrow$
$n^2 + 5n + 10 = 0$, que não possui soluções naturais.
Assim, não existe n que satisfaço o enunciado.

41)
Se $a = 0$ tem-se que $a^b + b$ divide $a^{2b} + 2b$ qualquer que seja b.
Se $b = 0$ tem-se que $a^b + b$ divide $a^{2b} + 2b$ qualquer que seja a.
Se $a = 1$ e $b \geq 1$ tem-se que $b + 1 \mid 2b + 1 \Rightarrow b + 1 \mid b$ que não possui solução.
Se $a \geq 2$ e $b \geq 1$: $a^b + b \mid a^{2b} + 2b \Rightarrow a^b + b \mid [(a^b + b)(a^b - b) + b^2 + 2b] \Rightarrow$
$a^b + b \mid b^2 + 2b \Rightarrow a^b \leq b^2 + b$
Se $a = 2 \Rightarrow 2^b \leq b^2 + b \Rightarrow b \leq 5$
Substituindo b = 1, 2, 3, 4 e 5 encontra-se apenas b = 1 como solução.
Se $a \geq 3 \Rightarrow a^b \leq b^2 + b$ não possui soluções naturais.
Assim, as soluções são (0, b), (a, 0), (2, 1), com $a, b \in \mathbb{N}$.

42)
a) Sejam $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ e

$q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$

Se k é um número inteiro ímpar sabe-se que c_ik^i e c_i possuem a mesma paridade.

Logo, a paridade de p(k) é a mesma de $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$, enquanto que a paridade de q(k) é a mesma de $b_n + b_{n-1} + \ldots + b_1 + b_0$. Como $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = b_n + b_{n-1} + \ldots + b_1 + b_0$ então p(k) e q(k) possuem a mesma paridade, implicando que 2 divide $p(k) - q(k)$ quando k é ímpar.

Como 2007 é ímpar então $2 \mid p(2007) - q(2007)$.

b) Existe únicos i e j tais que $a_i = b_j$. Suponhamos que $i \geq j$ (o caso em que $i < j$ é análogo):

$a_ik^i - b_jk^j = a_ik^i - a_ik^j = a_ik^j(k^{i-j} - 1) = a_ik^j(k - 1)(k^{i-j-1} + k^{i-j-2} + \ldots + k + 1)$

Assim, conclui-se que $k - 1 \mid a_ik^i - b_jk^j$. Logo, pode-se escrever $p(k) - q(k)$ como a soma de $n + 1$ parcelas, todas divisíveis por $k - 1$, implicando que $k - 1 \mid p(k) - q(k)$.

Em particular, $2006 \mid p(2007) - q(2007)$

43)

A demonstração será feita por indução em k.

Note que $P(1) = (n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1) + (n + 1)n^3 = (n^5 + 1)(n^2 - n + 1)$.

Logo, segue que $n^5 + 1 \mid P(1)$

Suponhamos que existe $k > 0$ tal que $n^5 + 1 \mid P(k)$

$P(k + 1) = (n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k(n^3 - n^2 + n - 1) + (n + 1)n^{4k+3} \Rightarrow$

$P(k + 1) = [P(k) - (n + 1)n^{4k-1}](n^3 - n^2 + n - 1) + (n + 1)n^{4k+3} \Rightarrow$

$P(k + 1) = P(k)(n^3 - n^2 + n - 1) + (n + 1)n^{4k-1}(n^4 - n^3 + n^2 - n + 1) \Rightarrow$

$P(k + 1) = P(k)(n^3 - n^2 + n - 1) + (n^5 + 1)n^{4k-1} \Rightarrow n^5 + 1 \mid P(k + 1)$

44)

Notemos que 36^m sempre termina em 6 e 5^n sempre termina em 5, implicando que $36^m - 5^n$ termina em 1, se $36^m > 5^n$, ou termina em 9 se $36^m < 5^n$.

Façamos inicialmente $6^{2m} - 5^n = 1 \Rightarrow 6^{2m} - 1 = 5^n \Rightarrow$

$(6^m - 1)(6^m + 1) = 5^n \Rightarrow 6^m - 1 = 5^k$ e $6^m + 1 = 5^{n-k} \Rightarrow$

$2.6^m = 5^k + 5^{n-k}$

que é impossível pois 2.6^m termina em 2 e $5^k + 5^{n-k}$ termina em 5 ou 6.

Façamos agora $6^{2m} - 5^n = 9 \Rightarrow 6^{2m} - 3^2 = 5^n \Rightarrow$

$(6^m - 3)(6^m + 3) = 5^n \Rightarrow 6^m - 3 = 5^k$ e $6^m + 3 = 5^{n-k} \Rightarrow$

$2.6^m = 5^k + 5^{n-k}$

que é impossível novamente pois 2.6^m termina em 2 e $5^k + 5^{n-k}$ termina em 5 ou 6.

Façamos agora $6^{2m} - 5^n = 11 \Rightarrow m = 1$ e $n = 2$ é solução, ou seja, o menor valor de $36^m - 5^n$ é 11.

45)

Suponha que existam tais inteiros. Suponha que $a \geq b \geq c$ satisfaçam o enunciado.
Desde que $b \mid a^2 - 1$. Assim, existem $k \in \mathbb{N}$ tal que $a^2 - 1 = k.b$
Seja $d \in \mathbb{N}$ tal que $d \mid a$ e $d \mid b$. Logo, $d \mid (a.a - k.b) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$
Desta maneira, a e b não possuem divisores comuns maiores que 1.
Assim, como a e b dividem $c^2 - 1$ então ab dividem $c^2 - 1 \Rightarrow c^2 - 1 \geq ab$
Entretanto, $a \geq c$ e $b \geq c \Rightarrow ab \geq c^2$, que é uma contradição.
Assim, não existem naturais maiores que 1 que satisfaçam a condição do enunciado.

46)

Observando que $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz$,

$$\begin{cases} x + y + z = 77 \\ xy + yz + zx + xyz = 946 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 77 \\ 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz = 1024 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+x)+(1+y)+(1+z) = 80 \\ (1+x)(1+y)(1+z) = 1024 = 2^{10} \end{cases}$$

Como x, y e z são inteiros não negativos, $1 + x$, $1 + y$ e $1 + z$ são potências de 2. Considerando que $80 = 2^6 + 2^4 > 3 \cdot 2^4$, $80 < 2^7$ e $x \leq y \leq z$, temos $2^4 < 1 + z < 2^7$, ou seja, $1 + z = 2^5 = 32$ ou $1 + z = 2^6 = 64$.
Se $1 + z = 32$, temos $1 + x + 1 + y = 48$ e $(1 + x)(1 + y) = 2^5 = 32$. Mas, sendo $1 + x$ e $1 + y$ potências de 2 com soma par, temos $1 + x \geq 2$ e, portanto, $1 + y \leq 16$. Então $1 + x \leq 16$ e $1 + x + 1 + y \leq 32 < 48$, e não há soluções nesse caso.
Se $1 + z = 64$, temos $1 + x + 1 + y = 16$ e $(1 + x)(1 + y) = 2^4 = 16$. Desse modo, $1 + x$ e $1 + y$ são soluções da equação do segundo grau $t^2 - 16t + 16 = 0$, que não tem soluções inteiras.
Logo não há soluções.

47)

Sabe-se que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$
Fatorando 2005 obtém-se $2005 = 5.401 \Rightarrow 2005^2 = 5^2.401^2$
Perceba agora que $25 = 3^2 + 4^2$
No caso de 401^2, inicialmente deve-se observar que $401 = 1^2 + 20^2$
Assim: $401^2 = 401.401 = (20^2 + 1^2)(20^2 + 1^2) =$
$= (20.20 - 1.1)^2 + (20.1 + 20.1)^2 = 399^2 + 40^2$
Deste modo: $2005^2 = 5^2.401^2 = (3^2 + 4^2)(399^2 + 40^2)$
Logo, pode-se fazer $(a, b) = \{(3, 4), (4, 3)\}$ e $(c, d) = \{(399, 40), (40, 399)\}$
Substiutindo obtém-se:
$2005^2 = 1037^2 + 1716^2 = 1203^2 + 1604^2 = 1995^2 + 200^2 = 1357^2 + 1476^2$

48)
A resposta é sim. Suponha que $a = 2012.x^2 - 2012$ e $b = c = 2012.n$, com $n > 10^{10}$.
Deste modo tem-se que $abc = 2012^3.n^2(n + 1)(n - 1)$
Desde que $a + 2012 = 2012.n^2$ e $b + 2012 = c + 2012 = 2012(n + 1)$, cada um dos números somados a 2012 divide abc.

49)
Seja $n = m^3 + 1$. Assim $y = (m + 1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$
Notemos que
$y - n = 3m^2 + 3m = 3m(m+ 1) \leq 2n = 2(m^3 + 1) = 2(m+ 1)(m^2 - m + 1) \Rightarrow 3m + 3 \leq 2m^2 - 2m + 2 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 1 \geq 0 \Rightarrow 2m^2 \geq 5m + 1$ que vale para todo m inteiro
Assim, mesmo escolhendo para n o valor mais longe do próximo cubo, temos que somando 2n para este número sempre passamos deste próximo cubo.

50)
Temos que $a^2 + b + c = b^2 + c + a \Leftrightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0$. Então, a = b ou a + b = 1. Da mesma forma, a = c ou a + c = 1 e b = c ou b + c = 1. Note que não podemos ter simultaneamente a + b = 1, a + c = 1 e b + c = 1 (pois *a*, *b*, *c* são inteiros). Então, podemos supor sem perdas que a = b.
Agora, temos dois casos a considerar: a = b = c ou a = b e c = 1 − a.
No primeiro caso, $k = a^2 + 2a \Leftrightarrow k + 1 = (a + 1)^2$. Então, estamos interessados na quantidade de quadrados perfeitos de 2 a 2013, pois $1 \leq k \leq 2012$. Como $44^2 < 2013 < 45^2$, temos 44 quadrados perfeitos de 1 a 2013. Como 1 é quadrado perfeito e deve ser descontado, temos 43 quadrados perfeitos de 2 a 2013. Logo, há 43 valores possíveis para *k*.
No segundo caso, $k = a^2 + 1$. Como não há dois quadrados perfeitos diferindo de 2, não há interseções entre o primeiro caso e o segundo. Aqui, estamos interessados na quantidade de quadrados perfeitos de 0 a 2011. Agora, há 45 possíveis valores para *k*.
Logo, o total de valores é 45 + 43 = 88.

51)
Note que $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$. Assim, basta fazer $a = 10^{66}$, $b = 2.10^{66}$, $c = 3.10^{66}$ e $d = 4.10^{66}$.

52)
Suponha que b = kd, para algum inteiro positivo k, Assim, segue que a + kc = kd e ka + c = 2998kd.
Resolvendo este sistema obtém-se:

$a = \dfrac{kd(2008k-1)}{k^2-1}$ e $c = \dfrac{kd(k-2008)}{k^2-1}$.

Fazendo $d = k^2 - 1$ tem-se que $b = k(k^2 - 1)$, $a = k(2008k - 1)$ e $c = k(k - 2008)$, para $k \geq 2009$.

Fazendo $k = 2009$ tem-se: $a = 8104448639$, $b = 8108484720$, $c = 2009$ e $d = 4036080$.

53)

Como o lado direito é uma unidade maior que um quadrado perfeito não é possível que $x = y$.

Supondo que $x > y$: $2^{x+y} - 2^x - 2^y = 2^{2^z} \Rightarrow 2^y\left(2^x - 2^{x-y} - 1\right) = 2^{2^z}$

Como o termo entre parênteses é ímpar então deve ser igual a 1:

$2^x - 2^{x-y} - 1 = 1 \Rightarrow 2^x - 2^{x-y} = 2 \Rightarrow 2^{x-1} - 2^{x-y-1} = 1 \Rightarrow$

$\begin{cases} x-1=1 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (2, 1) \Rightarrow z = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (2, 1, 0)$

54)

Se $(x + 1)/y \in N \Rightarrow x + 1 = ky \Rightarrow x = ky - 1$

Assim: $(y + 1)/x = (y + 1)/(ky - 1)$

Como $2y - 1 \geq y + 1 \Rightarrow k = 0$ ou 1

i) $k = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$ um par que satisfaz é $(-1, y)$, entretanto -1 não é natural

ii) $k = 1 \Rightarrow x = y - 1 \quad \therefore (y + 1)/(y - 1) = 1 + (2)/(y - 1) \Rightarrow y - 1 \mid 2$

$\therefore y = 0 \Rightarrow x = -1$ impossível

$\therefore y = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 2)$

$\therefore y = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 3)$

55)

Se $\dfrac{a^2b + a + b}{ab^2 + b + 7}$ é inteiro então $\dfrac{b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7)}{ab^2 + b + 7} = \dfrac{b^2 - 7a}{ab^2 + b + 7}$ é inteiro.

Como $b^2 - 7a < b^2 < ab^2 + b + 7$ temos que $\dfrac{b^2 - 7a}{ab^2 + b + 7} < 1$.

Se $\dfrac{b^2 - 7a}{ab^2 + b + 7} = 0$ teremos $b^2 = 7a$, donde b é múltiplo de 7 (digamos $b = 7t$), e $(7t)^2 = 7a$ nos dá $a = 7t^2$.

É fácil ver que $(a, b) = (7t^2, 7t)$ satisfaz as condições do enunciado para todo t inteiro positivo (temos nesse caso $\dfrac{a^2b + a + b}{ab^2 + b + 7} = t$).

Se $\frac{b^2-7a}{ab^2+b+7}<0$ devemos ter $b^2<7a$ e $\frac{b^2-7a}{ab^2+b+7}\le -1$ (pois é inteiro), e portanto $7a>7a-b^2\ge ab^2+b+7\Rightarrow 7a>ab^2\Rightarrow b^2<7\Rightarrow b=1$ ou $b=2$.

Se $b=1$, $\frac{b^2-7a}{ab^2+b+7}=\frac{1-7a}{a+8}=-7+\frac{57}{a+8}$, e devemos ter que $a+8$ divide 57, com a inteiro positivo $\Rightarrow$ $a+8=19$ ou $a+8=57\Rightarrow a=11$ ou $a=49$. Para $a=11$ e $b=1$ temos $\frac{a^2b+a+b}{ab^2+b+7}=\frac{133}{19}=7$, e para $a=49$ e $b=1$ temos $\frac{a^2b+a+b}{ab^2+b+7}=\frac{2451}{57}=43$.

Se $b=2$, $\frac{b^2-7a}{ab^2+b+7}=\frac{4-7a}{4a+9}$. Como $4-7a>-18-8a=-2(4a+9)$, se $\frac{4-7a}{4a+9}$ é inteiro negativo, tem-se $\frac{4-7a}{4a+9}=-1\Rightarrow 4-7a=-4a-9\Rightarrow a=\frac{13}{3}\notin \mathbb{N}$.

Assim, as soluções são dadas por $(a,b)=(7t^2,7t), t\in \mathbb{N}$; $(a,b)=(11,1)$ e $(a,b)=(49,1)$.

56)

Se $x<0 \Rightarrow 1+2^x+2^{2x+1}$ é inteiro somente se $x=-1 \Rightarrow$
$1+2^x+2^{2x+1}=2$, que não é quadrado perfeito

Se $x=0 \Rightarrow 1+2^x+2^{2x+1}=4 \Rightarrow y=\pm 2$

Se $x>0 \Rightarrow 2^x(1+2^{x+1})=(y-1)(y+1)$

Como y é ímpar e mdc $(y-1,y+1)=1$, tem-se que $y=2^{x-1}k+1$ ou $y=2^{x-1}k-1$, com $k>0$ e ímpar.

i) $y=2^{x-1}k+1 \Rightarrow 1+2^{x+1}=2^{x-2}k^2+k \Rightarrow 2^{x-2}=\frac{k-1}{8-k^2} \Rightarrow$

$8-k^2 \mid k-1 \Rightarrow |8-k^2|\le|k-1| \Rightarrow$

$k=3 \Rightarrow 2^{x-2}=-2$, que é impossível

ii) $y=2^{x-1}k-1 \Rightarrow 1+2^{x+1}=2^{x-2}k^2-k \Rightarrow 2^{x-2}=\frac{k+1}{k^2-8} \Rightarrow$

$k^2-8\mid k+1 \Rightarrow |k^2-8|\le|k+1| \Rightarrow$

$k=3 \Rightarrow 2^{x-2}=4 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=\pm 23$

Assim, as únicas soluções são $(0,2)$, $(0,-2)$, $(4,23)$ e $(4,-23)$

57)

Como $a+1\mid a^3+1$ e $a+1\mid a^3b-1 \Rightarrow a+1\mid[(a^3+1)+(a^3b-1)] \Rightarrow$

$a+1\mid a^3(b+1) \Rightarrow a+1\mid b+1$

Como $b-1\mid b^3-1$ e $b-1\mid b^3a+1 \Rightarrow b-1\mid[(b^3-1)+(b^3a+1)] \Rightarrow$

$b-1\mid b^3(a+1) \Rightarrow b-1\mid a+1$

Desta forma: $b - 1 \mid a + 1$ e $a + 1 \mid b - 1 \Rightarrow b - 1 \mid b + 1 \Rightarrow$
$b - 1 \mid [(b + 1) - (b - 1)] \Rightarrow b - 1 \mid 2$
Existem duas possibilidades: $b = 2$ ou $b = 3$
i) $b = 2 \Rightarrow a + 1 \mid 3 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow (a, b) = (2, 2)$
ii) $b = 3 \Rightarrow a + 1 \mid 4 \Rightarrow a = 1$ ou $a = 3 \Rightarrow (a, b) = \{(1, 3), (3, 3)\}$
Logo, os pares (a, b) valem $(2, 2)$, $(2, 3)$ ou $(3, 3)$

58)
$n = 12$ satisfaz o enunciado. Considere as progressões:

$$2n + 2,\ 3n + 3,\ 4n + 5,\ 6n + 7 \text{ e } 12n + 11$$

Sabe-se que todos os números inteiros, na divisão por 12, deixam os restos 0, 1, 2, ..., 11. Assim:
i) os números que deixam restos 0, 2, 4, 6, 8 ou 10 na divisão por 12 pertencem à progressão $2n + 2$;
ii) os números que deixam restos 3 ou 9 na divisão por 12 pertencem à progressão $3n + 3$;
iii) os números que deixam restos 1 ou 5 na divisão por 12 pertencem à progressão $4n + 5$;
iv) os números que deixam resto 7 na divisão por 12 pertencem à progressão $6n + 7$;
v) os números que deixam resto 11 na divisão por 12 pertencem à progressão $12n + 11$.

13.2. PARTE B

1) Dica: Fatore $a^3 - b^3$ e observe a paridade de $a^2 + ab + b^2$.

2) e

3) Dica: Prove que todos os elementos da seqüência deixam resto 3 na divisão por 4.

4) Dica: Mostre que todos os números da forma xyxy são divisíveis por 101.

5) 83

6) Dica: Prove que não existem dois restos de um quadrado perfeito por 7 que somados sejam divisíveis por 7

7) Dica: Demonstre que todos os números bons são da forma $6k + 3$.

8) Dica: Note que 23 deixa resto 3 na divisão por 4.

9) 784913526. Dica: Liste todos os múltiplos de 7 e 13 de dois dígitos.

10) 6741. Dica: Liste todos os múltiplos de 1992 com 4 dígitos.

11) 202. Dica: Demonstre que k termina em 1.

12) Dica: Prove que se $31 \mid (a^2 + b^2)$ então $31 \mid a$ e $31 \mid b$.

13) $n = 280$. Dica: Se $n + 9 = x^2$ $16n + 9 = y^2$ então $16x^2 - y^2 = 15.9$

14) Dica: Aplique $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$

15) Dica: Se n não é divisível nem por 2 e nem por 3, então n é da forma $n = 6k \pm 1$.

16) Dica: Fatore e obtenha $m(m + 1)(m + 2)/6$

17) $(63 ; 58)$, $(459 ; 58)$, $(-63 ; -58)$ e $(-459 ; -58)$. Dica: Note $9xy - x^2 - 8y^2 = (x - y)(8y - x)$

18) 1735. Dica: Note $2a - 5 = 2(a+1) - 7 = 2(a+2) - 9 = 2(a+3) - 11$ é múltiplo de 5, 7, 9 e 11

19) 2. Dica: Faça $n = 3k$, $3k + 1$ e $3k + 2$.

20) Dica: Mostre que os sistemas: 1) $a + b = 1$ e $a^2 + b^2 = 2001$; 2) $a + b = 3$ e $a^2 + b^2 = 667$; 3) $a + b = 23$ e $a^2 + b^2 = 87$ e 4) $a + b = 29$ e $a^2 + b^2 = 69$ não possuem soluções inteiras.

21) $(x, y) = (2, -1), (-1, 2), (3, 0), (0, 3)$ e (a, a), $\forall a \in \mathbb{Z}$. Dica: Resolva uma equação de 2º grau em x.

22) Não é possível. Dica: Prove que todo número quadrado perfeito ímpar deixa 1 na divisão por 8.

23) Dica: Prove que $(n + 1)(n + 2)\ldots(2n - 1)(2n)$ é igual a 2^n vezes um multiplicação de números ímpares.

24) Dica: Faça $a = n^2 + 2$, $b = n^2 + n + 1$ e $c = n^2 + 1$.

25) (4, 5), (5, 4), (10, 3), (3, 10). Dica: Mostre que a expressão dada é equivalente a $(2m - 5)(2n - 5) = 15$.

26) Dica: Prove que a, b e c são múltiplos de 4.

27) Dica: Prove que se $a + 2b = x^2$ e $b + 2a = y^2$ então $3 \mid x$ e $3 \mid y$.

28) Dica: Eleve ao quadrado e chegue em uma contradição pelo fato de x e y serem menores que 1980^2.

29) $n = 1$. Dica: Prove que $n + 2009 \mid 2010.2009$ e $n + 2010 \mid 2010.2011$. Depois prove que $n + 2010 = 2011k$.

30) (1, 2) e (2, 1). Dica: Mostre que $(x + y)^2 - 2(xy)^2 = 1 \Leftrightarrow$ $(x^2 - 1)(y^2 - 1) + (xy - 1)^2 = 1$

31) (0, n), (m, 0), (4, 11), (11, 4), (5, 7), (7, 5), (3, − 5), (− 5, 2), (1, − 1), (− 1, 1). Dica: Após desenvolver os dois membros da expressão e cancelar os termos m e n obtenha $(m - 3)(n - 3) = 8$.

32) Dica. Suponha que $3x^2 + 4y^2 = a^2$ e $4x^2 + 3y^2 = b^2$. Somando conclua que $7 \mid a$ e $7 \mid b$. Conclua depois que $7 \mid x$ e $7 \mid y$, chegando numa contradição.

33) Dica: Use a fatoração de $a^5 + b^5$.

34) $n = -19$ ou $n = -40$. Dica: Note que $4(n^2 + 59n + 881) = k^2 \Leftrightarrow$ $(k - 2n - 59)(k + 2n + 59) = 43$

35) $n = 1$. Dica: Demonstre que se $S_n = 3^n + 5^n$ então $S_n = 8S_{n-1} - 15.S_{n-2}$.

36) Dica: Desenvolva $(a + b + c)^{13}$ e analise as parcelas que não contém abc.

37) Sim, existe. Dica: Faça: $a_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 - 9k^2$, $k = 1, 2, \dots, 9$.

38) a) dois algarismos: 49, quatro algarismos: 1681; b) Sim, existem 5 números "finos" de seis algarismos: 144400, 225625, 256036, 324900 e 576081; c) O número de 20 dígitos $24999000019999800001 = (4999900001)^2$ é "fino", uma vez que $2499900001 = (49999)^2$ e $(9999800001) = (99999)^2$.

39) Sim. $n = 598\underbrace{999...99}_{18}$

40) (5, 8, 11). Dica: Encontre a maior potência de 2 que divide 2336.

41) 144 e 1444. Dica: Analise todos os casos em que $100 \mid n^2 - 12^2$.

42) a) $n = 4k + 3$; b) Não existe n.

43) Dica. Faça $k = n + 1$ e desenvolva em binômio de Newton $(n + 1)^n - 1$.

44) Dica: Demonstre que todo quadrado perfeito deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4.

45) 6 valores de n: 538, 1209, 1231, 1902, 780 ou 109. Dica: Observe que $n^4 + 2n^3 - 20n^2 + 2n - 21 = (n^2 + 1)(n^2 + 2n - 21)$

46) 42

47) 109

48) $d - r = 179 - 164 = 15$. Dica: Escreva $1059 = d.q_1 + r$, $1417 = d.q_2 + r$, $2312 = d.q_3 + r$ e subtraia as equações

49) $n = -16$. Dica: Faça $n + 19 = 3^x$ e $n + 97 = 3^y$ e depois subtraia as equações.

50) 80. Dica: Reescreva a equação na forma $y^2 - (x + 42)^2 = 244$.

51) Dica: Use indução matemática.

52) 9993. Dica: Demonstre que os restos das divisões de $2^n + n$ formam uma seqüência de período 20

53) $a = b = 1$.

54) $n = 1$ e $n = 2$. Dica: Prove que $n - 1 < \dfrac{(n+1)!}{1! + 2! + ... + n!} < n$, para $n \geq 3$.

55) 900. Dica: Prove que a é divisível por 10, b é divisível por 6 e c é divisível por 15.

NÚMEROS PRIMOS

14.1. PARTE A

1)

Como os números devem ser compostos e ter dois algarismos, eles devem ser múltiplos de 7, mas não múltiplos de 2, de 3 nem de 5. Só podem ser $7\times7 = 49$, $7\times11 = 77$ e $7\times13 = 91$.

2)

O conjunto dado tem 11 números. Os números com quantidade par de zeros são divisíveis por 11. Por exemplo, 1001 é igual a 91×11 (na verdade, basta aplicar o critério de divisibilidade por 11). Há 5 números nessas condições; além disso, o número 101 é primo, logo a quantidade de números compostos é maior do que 4 e menor do que 11. (na verdade, 101 é primo e os dez outros números são compostos).

3)

Seja <u>n</u> o número primo dado, possuindo os dígitos iguais a 1

Suponhamos, por absurdo, que o número de dígitos <u>s</u>, seja um número composto $\Rightarrow$ $s = ab$

$n = 111...111 \Rightarrow 9n = 999...999 = 10^s - 1 \Rightarrow n = (10^{ab} - 1)/9$

Como $10^a - 1 \mid 10^{ab} - 1 \Rightarrow (10^a - 1)/9 \mid (10^{ab} - 1)/9 \Rightarrow$

$(10^a - 1)/9 \mid n \Rightarrow$ n não é primo, contrariando o enunciado do exercício.

Portanto <u>s</u> deve ser primo.

4)

Como p e $p + 2$ são ímpares e primos, então nenhum deles é divisível por 2 ou 3.

Desde que p e $p + 2$ são primos ímpares, temos que $p + 1$ é par.

Como p, $p + 1$, $p + 2$ são três números consecutivos, então um deles é divisível por 3.

Como p e $p + 2$ não são divisíveis por 3, então $p + 1$ é divisível por 3, implicando que $p + 1$ é divisível por 6.

5)

Observe que todos os membros do conjunto $S_n = \{n + 1, n + 2, \dots , n + 30\}$ podem ser expressos na forma $30N + i$, onde N é um inteiro não negativo e i varia de 0 até 29. Note que $30N + i$ é múltiplo de 2 para $i = 0, 2, 4, \dots, 28$; é múltiplo de 3 para $i = 0, 3, 6, \dots, 27$; é múltiplo de 5 para $i = 0, 5, 10, \dots, 25$. Ou seja, para $n > 5$, os únicos valores de i para os quais $30N + i$ pode ser primo são os inteiros positivos menores que trinta e tais que mdc $(30, i) = 1$, que são os valores 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 29. Portanto, para $n > 5$, existem no máximo 8 primos em S_n.

6)

Seja $p_3 = p_1p_2 + 2$.
Observe que:
$A = (p_1^2p_2^2 + 2p_1p_2 + 1)^2 - 12 =$
$= (p_1^2p_2^2 + 2p_1p_2 + 1 - 1)(p_1^2p_2^2 + 2p_1p_2 + 1 + 1) =$
$A = p_1p_2(p_1p_2 + 2)(p_1^2p_2^2 + 2p_1p_2 + 2) \Rightarrow A = p_1p_2p_3(p_1p_2p_3 + 2)$
Suponhamos que $p_3 \mid p_1$. Desde que $p_3 = p_1p_2 + 2$ teremos $p_3 \mid 2$, que é falso por p_3 é ímpar e maior que 1.
Assim, p_3 não divide p_1. Analogamente temos que p_3 não divide p_2.
Temos agora dois casos:
i) p_3 composto $\Rightarrow$ $p_1p_2p_3$ possui ao menos 4 divisores primos $\Rightarrow$ A possui ao menos 4 divisores primos.
ii) p_3 primo:
Seja $p_4 = p_1p_2p_3 + 2$. Novamente teremos que p_4 não divide nenhum dos números p_1, p_2 ou p_3, pois se dividisse então teríamos $p_4 \mid 2$, que é falso uma vez que p_4 é impar e maior que 1.
Logo p_4 contribui com pelo menos mais um divisor primo, implicando que A possua ao menos 4 divisores primos.

7)

Considere inicialmente $p = 2$:
Como $n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$ então para $p = 2$ temos sempre que $n^{p^p} + p^p$ é sempre composto.
Agora considere $p > 2$, ou seja, p um primo ímpar.
Desde que $n^{p^p} + p^p = \left(n^{p^{p-1}}\right)^p + p^p = \left(n^{p^{p-1}} + p\right).K$, implicando que $n^{p^p} + p^p$ seja composto.

8)

Vamos assumir que $y > x \geq 2$ e $p > y$. Subtraindo as duas equações obtemos:
$p^2 - p = 2y^2 - 2x^2 \Rightarrow p(p-1) = 2(y-x)(y+x)$
Desde que $p > y - x$ e $2p > y + x$ então $p = x + y$ e $p - 1 = 2(y - x)$.
Eliminando y destas equações segue que: $p + 1 = 4x$.
Como $p + 1 = 2x^2 \Rightarrow 4x = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow p = 7$.

9)

Evidentemente: $\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_n}\right)=\frac{(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_n+1)}{p_1.p_2\ldots p_n}$.

Deste modo temos necessariamente que $p_n \mid (p_i + 1)$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Desde que $p_i + 1 \le p_n$, então $p_n = p_i + 1$. Como os dois únicos primos consecutivos são 2 e 3, temos que $n = 2$, $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$.

Conferindo: $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)=2$.

10)

$p^n = m^2 - 144 = (m-12)(m+12) \Rightarrow \begin{cases} m-12=p^a \\ m+12=p^b \end{cases}$

1º caso: $a = 0 \Rightarrow m = 13 \Rightarrow m = 13, n = 2$ e $p = 5$

2º caso: $a \ge 1 \Rightarrow p^b - p^a = 24 \Rightarrow p^a(p^{b-a} - 1) = 24 \Rightarrow p \mid 24 \Rightarrow$

$p = 2$ ou $p = 3$

i) $p = 2 \Rightarrow 2^a(2^{b-a} - 1) = 2^3.3 \Rightarrow a = 3$ e $b = 5 \Rightarrow m = 20$ e $n = 8$

ii) $p = 3 \Rightarrow 3^a(3^{b-a} - 1) = 2^3.3 \Rightarrow a = 1$ e $b = 3 \Rightarrow m = 15$ e $n = 4$

Logo, todas as soluções são $(m, n, p) \in \{(13, 2, 5), (20, 8, 2), (15, 4, 3)\}$

11)

Os primeiros números palíndromos são:

1, 2, 3, ..., 9, 11, 22, 33, ..., 99, 101, 111, ..., 191, 202, 212, ...

Note que:

$22 - 9 = 2$; $101 - 99 = 2$; $33 - 22 = 11$; $44 - 33 = 11$; $99 - 88 = 11$

Vamos provar que estes são os únicos valores primos que y_i pode assumir.

Se x_i e x_{i+1} possuem diferentes números de dígitos, então x_i é da forma 99...9 e x_{i+1} é da forma 10...01, então $y_i = x_{i+1} - x_i = 2$.

Se x_i e x_{i+1} possuem o mesmo número de dígitos e terminam no mesmo dígito então 10 divide y_i.

Se x_i e x_{i+1} possuem o mesmo número de dígitos e terminam em dígitos diferentes, digamos r e s, então temos que $s = r + 1$, x_i é da forma r999...9r, e x_{i+1} é da forma (r + 1)0...0(r + 1)

Então $y_i = x_i - x_{i+1} = \{r + 1\} - \{10 - r\} = 11$.

Portanto somente dois primos pertencem ao conjunto $\{y_1, y_2, \ldots\}$

12)

Como temos ao todo 6 números, caso alguns dos números seja divisível por um primo p maior que 5, este número será o único entre os 6 dados que será divisível por p, sendo impossível o particionamento do conjunto. Assim, os únicos primos que podem dividir os números do conjunto devem ser 2, 3 ou 5. Exatamente 3 destes números devem ser ímpares.

No máximo um dos números ímpares pode ser divisível por 3 e também no máximo um número ímpar pode ser divisível por 5. Na melhor das hipóteses estes números são distintos, implicando que sobra um outro número ímpar que não é divisível por 3 ou por 5, sendo divisível por um primo ímpar maior ou igual a 7, que é uma contradição. Assim, não existe tal conjunto.

13)

Se $2000 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, então $x = a + b$ e $y = a - b$ são divisores de 2000, tais que $xy = 2000$ e $a = \frac{x+y}{2}$ e $b = \frac{x-y}{2}$. Se x e y tivessem paridades diferentes, a e b não seriam inteiros, e se x e y fossem ambos ímpares, seriam impossível que $xy = 2000$. Logo x e y têm que ser ambos pares. As únicas 3 possibilidades então são:

$x = 1000$ e $y = 2$, o que dá: $2000 = 501^2 - 499^2$;
$x = 500$ e $y = 4$, o que dá: $2000 = 252^2 - 248^2$;
$x = 250$ e $y = 8$, o que dá: $2000 = 129^2 - 121^2$.

14)

Seja $n^2 - 11n + 63 = k^2 \Rightarrow 4n^2 - 44n + 252 = 4k^2 \Rightarrow$
$(2n - 11)^2 + 131 = (2k)^2 \Rightarrow (2k)^2 - (2n - 11)^2 = 131 \Rightarrow$
$(2k + 2n - 11)(2k - 2n + 11) = 131$.

Como 131 é primo temo somente duas possibilidades:

i) $2k + 2n - 11 = 131$ e $2k - 2n + 11 = 1 \Rightarrow n = 38$
ii) $2k + 2n - 11 = 1$ e $2k - 2n + 11 = 131 \Rightarrow n = -27$

15)

Suponha que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2001} \Rightarrow x < 2001$ e $y < 2001$.

Deste modo $\sqrt{x} = \sqrt{2001} - \sqrt{y} \Rightarrow x = 2001 + y - 2\sqrt{2001y} \Rightarrow$

$4.2001y = (2001 + y - x)^2 \Rightarrow (2001 + y - x)^2 = 2^2.3.23.29.y$

Assim, para que $2^2.3.23.29.y$ seja um quadrado perfeito então y deve ser divisível por 3, 23 e 29, ou seja, divisível por 2001, que é uma contradição, pois $y < 2001$. Portanto não existem soluções inteiras para a equação.

16)

Suponhamos que seja possível. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{1995}$ os números, colocados no círculo no sentido horário. Então a_{k-1}/a_k é um primo ou igual ao recíproco de um primo para $k = 1, 2, \ldots, 1995$, com $a_0 = a_{1995}$. Suponhamos que m destes números sejam primos e que $1995 - m$ sejam recíprocos de primos.

Desde que $\left(\frac{a_0}{a_1}\right)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\ldots\left(\frac{a_{1994}}{a_{1995}}\right)=1$, então o produto de m primos é igual ao produto de $1995 - m$ primos. Como a fatoração em fatores primos de um número é única, então os m primos são iguais (a menos da ordem) aos outros $1995 - m$ primos.
Ou seja: $m = 1995 - m \Rightarrow 2m = 1995$, que é impossível pois 1995 é ímpar.

17)
Desenvolvendo obtém-se $9mn = 3.2008(m + n) \Rightarrow$
$(3m - 2008)(3n - 2008) = 2008^2 = 2^6.251^2$
Assim, as soluções são da forma $\begin{cases} 3m = a + 2008 \\ 3n = b + 2008 \end{cases}$, onde $a.b = 2^6.251^2$ e $b > a$.
Como 2008 deixa resto 1 na divisão por 3 deve-se escolher os números a e b de modo que ambos deixem resto 2 na divisão por 3. Dividindo por 3 todos os divisores de 2008^2 conclui-se que os que os possíveis valores de a são: $2,\ 2^3,\ 251,\ 2^4.251$ e $2^6.251$
Assim, existem 5 pares (m, n)

18)
Basta fazer $x = 1$ e $y = n! + 1$, uma vez que $j + 1 \mid (n! + j + 1),\ j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

19)
Suponhamos que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p$, onde p é um número primo.
$p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a^2 + 2ad + d^2) + (b^2 + c^2 - 2ad) =$
$(a + d)^2 + b^2 + c^2 - 2(b^2 + c^2 + bc) = (a + d)^2 - (b^2 + 2bc + c^2) =$
$(a + d)^2 - (b + c)^2 = (a - b - c + d)(a + b + c + d)$
Como p é primo a única possibilidade é
$a - b - c + d = 1$ e $a + b + c + d = p$.
Entretanto, se $a - b - c + d = 1$ então $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a + b + c + d$.
Como $a, b, c, d \geq 1$, a única possibilidade é $a = b = c = d = 1$, que contraria $ad = b^2 + bc + c^2$.
Desta forma, segue que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ é um número composto.

20)
Claramente os elementos de C são todos os inteiros positivos da forma $4a + 1$, incluindo, portanto, também todos os primos da forma $4a + 1$, e nenhum primo da forma $4a - 1$.
Do exemplo anterior sabemos que:
$(4n_1 - 1)(4n_2 - 1) = 4(4n_1n_2 - n_1 - n_2) + 1 = 4k + 1$

$(4n_1 - 1)(4n_2 + 1) = 4(4n_1n_2 + n_1 - n_2) - 1 = 4k - 1$
$(4n_1 + 1)(4n_2 + 1) = 4(4n_1n_2 + n_1 + n_2) + 1 = 4k + 1$
Desta forma, um número n da forma $4a - 1$ é primo relativo a C, pois qualquer inteiro da forma $4a - 1$ vai necessariamente possuir um fator primo da forma $4x - 1$, que não pertence a C.
Desde que $4389 = 3.7.11.19$, então 4389 é o produto de 4 primos da forma $4a - 1$. Assim, se arrumarmos estes primos aos pares, teremos 4389 sendo representado como o produto de dois números da forma $4a + 1$. Podemos fazer isto de 3 maneiras:
$4389 = 21.209 = 33.133 = 57.77$
De fato, como o produto de quaisquer 3 dos números 3, 7, 11, 19 é primo relativo a C, então existem 4 formas de expressar 4389 como um produto de dois números da forma $4a - 1$:
$4389 = 3.1463 = 7.627 = 11.399 = 19.231$.
b) Para conseguir outro número com esta propriedade basta substituir um dos fatores primos de 4389 por outro primo da forma $4a - 1$. Por exemplo, trocar 19 por 23, obtendo $3.7.11.23 = 5313$.

21)
Inicialmente notemos que quando $n = 13$, podemos construir uma seqüência satisfazendo as condições (i) e (ii) que não contem números primos. Este pode ser provado escolhendo os seguintes 13 números:
$2 \times 101 = 202$, $3 \times 97 = 291$, $5 \times 89 = 445$, $7 \times 83 = 581$, $11 \times 79 = 869$, $13 \times 73 = 949$, $17 \times 71 = 1207$, $19 \times 67 = 1273$, $23 \times 61 = 1403$, $29 \times 59 = 1711$, $31 \times 53 = 1643$, $37 \times 47 = 1739$, $41 \times 43 = 1763$.
Suponha que existe uma seqüência de 14 números que satisfaz (i) e (ii). Note que cada a_i contem ao menos dois números primos e que não existem dois a_i's com o mesmo fator primo. Tomemos dois fatores primos para cada ai, e sejam estes $x_1, x_2, \ldots, x_{28}$ tal que $x_1 < x_2 < \ldots < x_{28}$.
Seja p_i o i-ésimo número primo. Note que $x_{14} \geq p_{14} = 43$ e $x_{15} \geq p_{15} = 47$.
Deste modo, como $x_{14}.x_{15} \geq 42.47 = 2021 > 1995$, então cada um dos primos $x_{14}, x_{15}, \ldots, x_{28}$ possui um e somente um par entre os números $x_1, x_2, \ldots, x_{13}$, pois senão teríamos o produto $p_i.p_j > 1995$ para $i, j \geq 14$, $i \neq j$.
Entretanto existem 15 números no primeiro grupo e 13 no segundo, impossibilitando formar estes pares.
Assim, toda seqüência de 14 números satisfazendo (i) e (ii) deve conter um número primo.

22)
$2(m^2 + n^2) - 1 = (m + n)^2 + (m - n)^2 - 1 =$
$= (m + n + 1)(m + n - 1) + (m - n)^2$
Como $m + n + 1$ divide $2(m^2 + n^2) - 1$ então $m + n + 1$ divide $(m - n)^2$

Porém, como $m + n + 1$ é primo, então conclui-se que $m + n + 1$ divide $m - n \Rightarrow m + n + 1 > m - n \Rightarrow m - n = 0 \Rightarrow m = n$

23)
Inicialmente note que $(1.2.3.....915) + (2.3.4.....916) = (2.3.4...915.917) =$
$= (2.3.4...916.917)/(916)$
Novamente: $(2.3.4...917)/(916) + (3.4.5...917) =$
$= (3.4.5...917.(2 + 916))/(916) = (3.4.5...917.918)/(916)$
Mais uma vez: $(3.4.5...918)/(916) + (4.5.6...918) =$
$= (4.5.6...918.(3 + 916))/(916) = (4.5.6...918.919)/(916)$
Desta forma:
$k(k + 1)(k + 2)...(914 + k + 1)/(916) + (k + 1)(k + 2)...(914 + k + 1) =$
$= (k + 1)(k + 2)...(914 + k + 2)/(916)$
Fazendo $k = 1065 \Rightarrow N = (1...915) + (2...1996) + (1066...1980) =$
$= (1066)(1067)(1068)...(1981)/(916) \Rightarrow 916.N = (1066)(1067)...(1981)$
Como $916 = 2^4.57$ é menor que 1066 e entre os fatores de $(1066)(1067)...(1981)/(916)$ existe 24 e 57, então n é divisível por todos os números inteiros de 1066 até 1981.

24)
Observemos que $p_2 = 3$ pois 3 é o maior divisor primo de $p_1 + 1 = 3$
Analogamente, $p_3 = 7$, pois 7 é o maior divisor primo de $p_1p_2 + 1 = 7$.
Outro fato que pode ser observado é que $p_1p_2p_3...p_{i-1} + 1$ sempre vai ser ímpar, implicando que o maior fator primo deste número também vai ser ímpar, ou seja, o único p_n par é $p_1 = 2$.
Notemos que para $i \geq 4$, implica que $p_1p_2p_3...p_{i-1} + 1 = 6k + 1$, ou seja, p_i não pode valer 2 ou 3, pois $6k + 1 = 2.3.k + 1$ não é divisível por 2 ou 3.
Suponhamos, por absurdo que algum p_n seja igual a 5.
Assim, para que 5 seja o maior divisor primo de $p_1p_2p_3...p_{i-1} + 1$, então $p_1p_2p_3...p_{i-1} + 1$ dever ser igual a uma potência de 5.
Deste modo, $p_1p_2p_3...p_{i-1} + 1 = 5^x \Rightarrow p_1p_2p_3...p_{i-1} = 5^x - 1 = 4k$, que é um absurdo, pois o único p_n par é $p_1 = 2$, implicando que $p_1p_2p_3...p_{i-1}$ não é divisível por 4, apenas por 2.

25)
Como os primos $2m + n$ e $m + 2n$ são maiores que dois, temos que ambos são ímpares e consequentemente $2m + n + m + 2n = 3m + 3n$ é um número par. Assim $m + n$ é par e $m + n - 18$ é um primo par, ou seja, dois. O único par de primos (m, n) que cumpre $m + n = 20$ e satisfaz o enunciado é $(m, n) = (3, 17)$

26)

Se n = 10a + b, sendo b é dígito das unidades, então a operação transforma n para n' = a + 4b.
Notemos que 10n' = 10a + 40b = (10a + b) + 39b ⇒ n = 10n' − 39b ⇒ n = 10.n' − 3.13.b.
Assim, se n é divisível por 13 então n' é divisível por 13, reciprocamente, se n' é divisível por 13, n também é divisível por 13.
Desta forma, se a seqüência contem 1001 = 13.77, então todo termo da seqüência deve ser divisível por 13.
Ou seja, se existe um número primo na seqüência, então este número deve ser 13.
Note que o número 13 não pode vir antes de 1001 porque a operação transforma 13 para 4.3 + 1 = 13, implicando que todo termo subsequente de 13 na seqüência é igual a 13.
Por outro lado, 13 não pode vir depois de 1001 pois a operação transforma 1001 para 4.1 + 100 = 104, e depois 4.4 + 10 = 26, e depois 4.6 + 2 = 26, e assim todo termo depois de 26 é igual a 26.
Concluímos, portanto, que se a seqüência contem 1001, então não contem 13, implicando que não existe nenhum número primo na seqüência.

27)
Por absurdo, suponhamos a inexistência da seqüência satisfazendo o item *b*.
Seja p um número primo maior que 2005003. Seja uma seqüência a progressão aritmética de primeiro termo p e a razão p:
$A = \{p, 2p, 3p, ..., 2002p\}$
Assim qualquer soma é do tipo $n \cdot p$ com $n < p$ até mesmo para a soma total: $p \cdot \frac{(1+2002) \cdot 2002}{2} = p \cdot 2005003$
Garante-se assim, que a soma não é potência perfeita, quaisquer que sejam as parcelas desta.
Como este exemplo não confere com a suposição, esta é um absurdo e, portanto existem seqüências satisfazendo os itens *a* e *b* simultaneamente.

28)
Sejam os números
$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{109} + \frac{1}{110} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{111} + \frac{1}{112} + \frac{1}{113} + \ldots + \frac{1}{119} + \frac{1}{120}.$$
Note que
$$y = \left(\frac{1}{111} + \frac{1}{120}\right) + \left(\frac{1}{113} + \frac{1}{119}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{115} + \frac{1}{116}\right) = \frac{231}{111.120} + \frac{231}{113.119} + \ldots + \frac{231}{115.116} \Rightarrow$$

$$y = 11\left(\frac{21}{111.120} + \frac{21}{113.119} + \ldots + \frac{21}{115.116}\right) = 11\frac{p}{q}.$$

Como entre 111 e 120 não existe nenhum múltiplo de 11, então q não múltiplo de 11, fazendo com que o numerador da fração irredutível de y é múltiplo de 11.

Agora $x + y =$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{119} + \frac{1}{120} = \left(1 + \frac{1}{120}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{119}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{118}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{61}\right) \Rightarrow$$

$$x + y = \frac{121}{1.120} + \frac{121}{2.119} + \frac{121}{3.118} + \ldots + \frac{121}{60.61} =$$

$$= 11^2\left(\frac{1}{120} + \frac{1}{2.119} + \frac{1}{3.118} + \ldots + \frac{1}{60.61}\right) = 11^2\frac{a}{b}.$$

Como entre 1 e 120 não existe nenhum múltiplo de 11^2 (somente múltiplos de 11), então b não é múltiplo de 11^2, somente de 11.

Desta forma: $x + y = 11^2\frac{a}{11.c} \Rightarrow x + y = 11\frac{a}{c}$, como c não é múltiplo de 11 então o numerador da fração irredutível de $x + y$ é múltiplo de 11.

Como $x + y = \frac{11.a}{c} \Rightarrow x + \frac{11.p}{q} = \frac{11.a}{c} \Rightarrow x = \frac{11.a}{c} - \frac{11.p}{q} \Rightarrow$

$$x = \frac{11(aq - cp)}{cq}.$$

Desde que c e q não são múltiplos de 11, então o numerador da fração irredutível de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{109} + \frac{1}{110}$ é um múltiplo de 11.

29)

Como existe apenas um terno de números ímpares primos consecutivos (3, 5 e 7), de $p_4 - p_1 = 8$ e $q_4 - q_1 = 8$ conclui-se que as duas sequências são dadas por $p_1, p_1 + 2, p_1 + 6, p_1 + 8$ e $q_1, q_1 + 2, q_1 + 6, q_1 + 8$.

Sabe-se que todos os números primos maiores que 3 são da forma $6k \pm 1$.

Se $p_1 = 6k + 1$ então $p_1 + 2 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ não pode ser primo.

Logo, conclui-se que p_1 e q_1 são ambos da forma $6k - 1$, fazendo com que

$6 \mid (p_1 - q_1)$ (1)

Se $p_1 = 5k + 2$ então $5 \mid (p_1 + 8)$

Se $p_1 = 5k + 3$ então $5 \mid (p_1 + 2)$

Se $p_1 = 5k + 4$ então $5 \mid (p_1 + 6)$

Assim, conclui-se que p_1 e q_1 são ambos da forma $5k + 1$, fazendo com que

$5 \mid (p_1 - q_1)$ (2)

Desta maneira, de (1) e (2) tem-se que $30 \mid (p_1 - q_1)$.

30)

Perceba que $n = 1$ é solução para qualquer primo p. Assim, deve-se fazer a ressalva $n > 1$.

Além disso, como $n \mid p - 1$ segue que $n \le p - 1 \Rightarrow p > n$

Sabe-se que $p \mid n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$.

Como $p > n - 1$ e p é primo conclui-se que $p \mid (n^2 + n + 1)$

Como $n \mid (p - 1) \Rightarrow p = kn + 1$

Se $k > n + 1 \Rightarrow p > (n + 1)n + 1 = n^2 + n + 1$, que é falso pois $p \mid (n^2 + n + 1)$

Se $k < n + 1 \Rightarrow p \mid [(n^2 + n + 1) - p] = n(n + 1 - k) \Rightarrow p > n$, que é uma contradição

Logo, segue que $k = n + 1$ e então $p = n^2 + n + 1$.

Portanto: $4p - 3 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$.

31)

Seja $p, p + d, p + 2d, p + 3d, p + 4d, p + 5d, p + 6d$ a progressão aritmética, que podemos supor crescente sem perda de generalidade. Então:

1) $p \neq 2$

De fato, se $p = 2$, $p + 2d$ é par e maior do que 2 e, portanto, não é primo.

2) d é múltiplo de 2.

Caso contrário, como p é ímpar, $p + d$ seria par e maior do que 2.

3) $p \neq 3$

Senão, teríamos $p + 3d$ múltiplo de 3, maior do que 3.

4) d é múltiplo de 3

Caso contrário, $p + d$ ou $p + 2d$ seria múltiplo de 3 e maior do que 3.

5) $p \neq 5$

Senão teríamos $p + 5d$ múltiplo de 5, maior do que 5.

6) d é múltiplo de 5.

Caso contrário, $p + d$, $p + 2d$, $p + 3d$ ou $p + 4d$ seria múltiplo de 5, maior do que 5.

De 1), 2), 3), 4), 5) e 6), $p \ge 7$ e d é múltiplo de 30.

Se $p = 7$, observando que $187 = 11.17$ então $d \ge 120$

Para $d = 120$, a seqüência é 7, 127, 247, 367, 487, 607, 727 a qual não serve, pois $247 = 13 \cdot 19$.

Para $d = 150$, a seqüência é 7, 157, 307, 457, 607, 757, 907 e satisfaz as condições do problema.

Finalmente, se $p \neq 7$então d é múltiplo de 210 e o menor último termo possível para tais seqüências é $11 + 6 \cdot 210 = 1271$.

Portanto a resposta é 907.

32)

a) Se $x = p \Rightarrow p^{2001} = y^p \Rightarrow p^{3.23.29} = y^p$ temos 3 possibilidades:

i) $x = p = 3 \Rightarrow 3^{3.23.29} = y^3 \Rightarrow y = 3^{23.29}$

ii) $x = p = 23 \Rightarrow 23^{3.23.29} = y^{23} \Rightarrow y = 23^{3.29}$

iii) $x = p = 29 \Rightarrow 29^{3.23.29} = y^{29} \Rightarrow y = 29^{3.23}$

b) Determinemos agora todos os inteiros x e y satisfazendo $x^{2001} = y^x$ (1)

Como no item a) já analisamos o caso em que x é primo, calculemos agora os x que não são primos.

A expressão (1) garante que qualquer primo que divida x também divide y. Sejam: $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_m^{a_m}$ e $y = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_m^{b_m}$.

Aplicando em (1):

$$p_1^{a_1\cdot 3.23.29} p_2^{a_2\cdot 3.23.29} \ldots p_m^{a_m\cdot 3.23.29} = p_1^{b_1\cdot p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\ldots p_m^{a_m}} p_2^{b_2\cdot p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\ldots p_m^{a_m}} \ldots p_m^{b_m\cdot p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\ldots p_m^{a_m}}$$

Assim, temos que: $a_i.3.23.29 = b_i.p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_m^{a_m}$ (2) para cada i tal que $1 \le i \le m$.

De (2) concluímos que $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_m^{a_m} \mid a_i.3.23.29$ (3)

Note que se $a_i > 1$ então teremos um primo p_i cujo expoente em $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_m^{a_m}$ é maior que em $a_i.3.23.29$, fazendo com que $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_m^{a_m}$ não divida $a_i.3.23.29$.

Portanto, para todo inteiro i tal que $1 \le i \le m$, teremos $a_i = 1$.

Aplicando em (2) temos que: $3.23.29 = b_i.p_1 p_2 \ldots p_m$

Analisemos agora todas as possibilidades, com x não sendo primo (já analisado no item a):

i) $p_1 = 3 \quad p_2 = 23 \quad b_1 = b_2 = 29 \Rightarrow x = 3.23 \quad y = (3.23)^{29}$

ii) $p_1 = 23 \quad p_2 = 29 \quad b_1 = b_2 = 3 \Rightarrow x = 23.29 \quad y = (23.29)^3$

iii) $p_1 = 3 \quad p_2 = 29 \quad b_1 = b_2 = 23 \Rightarrow x = 3.29 \quad y = (3.29)^{23}$

iv) $p_1 = 3 \quad p_2 = 23 \quad p_3 = 29 \quad b_1 = b_2 = 1 \Rightarrow x = 3.23.29 \quad y = 3.23.29$

33) $1 + p + p^2 + p^3 + p^4$ é sempre ímpar.

Inicialmente note que $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ que não é um

Se $p = 2 \Rightarrow 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$

quadrado perfeito.

Se $p = 3 \Rightarrow 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121 = 11^2$

Vamos demonstrar que $p = 3$ é a única solução. Suponha que exista $p > 3$

tal que $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2 \Rightarrow 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4n^2$

Note que, para $p > 3$:

i) $(2p^2 + p)^2 = 4p^4 + 4p^3 + p^2 < 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4$

ii) $(2p^2 + p + 1)^2 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1 > 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4$

Assim: $(2p^2 + p)^2 < 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 < (2p^2 + p + 1)^2$

Assim, para $p > 3$ tem-se que o valor de $4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4$ está entre dois quadrados perfeitos perfeitos. Logo, a única solução é $p = 3$, que implica em $n = 11$.

34)

A fração $\frac{a}{b}$ é irredutível se e só se $\frac{a}{b-a}$ é irredutível (se a e b tem um fator comum, então a e $b-a$ têm um fator comum, e reciprocamente).

O problema se transforma em achar o menor valor de n tais que as frações $\frac{19}{n+2}, \frac{20}{n+2}, \ldots, \frac{91}{n+2}$ sejam todas irredutíveis.

Se $n + 2$ é primo, maior que 91, todas as frações são irredutíveis. Assim, um valor possível de n é 95. Verifiquemos que é o menor possível.

Se $n + 2 < 97$ e $n + 2$ é par (n é par) há frações redutíveis, por exemplo $\frac{20}{n+2}$. Se $19 \leq n + 2 \leq 91$, obviamente há uma fração redutível.

Se $n + 2 < 19$, então $n + 2$ tem um múltiplo entre 19 e 91, e portanto, há uma fração redutível.

Se $n + 2 = 93 = 3 \cdot 31$, então $\frac{31}{n+2}$ é redutível.

Se $n + 2 = 95 = 5 \cdot 19$, então $\frac{19}{n+2}$ é redutível.

Então, o valor mínimo de $n + 2$ é 97, que corresponde a $n = 95$.

35)

Suponha $p = q \Rightarrow \dfrac{p^2 + q^2}{p+q} = \dfrac{2q^2}{2q} = q \Rightarrow r = q \Rightarrow r$ é primo.

Caso contrário, $\dfrac{p^2 + q^2}{p+q} = \dfrac{p^2 - q^2 + 2q^2}{p+q} = p - q + \dfrac{2q^2}{p+q} \in \mathbb{Z} \Rightarrow p + q \mid 2q^2$.

Analogamente, $p + q \mid 2p^2$.

Como $p \neq q, mdc(p,q) = 1 \Rightarrow mdc(2p^2, 2q^2) = 2mdc(p^2, q^2) = 2$.

Logo $p + q \mid (2p^2, 2q^2) \Rightarrow p + q \mid 2 \Rightarrow p + q \leq 2$.

Mas $p, q \geq 2$, absurdo. Logo, $p = q$, e portanto r é primo.

36)

Inicialmente vamos provar que $n > m$.

$(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 > xy$.

Como $(x^2 + y^2)^m = (xy)^n \Rightarrow n > m$.

Seja p um divisor primo de x e y, e sejam α e β os menores inteiros tais que $p^\alpha \mid x$ e $p^\beta \mid y$.

Assim temos que $p^{2\alpha} \mid x^2$ e $p^{2\beta} \mid y^2$ e também que $p^{(\alpha+\beta)n} \mid (xy)^n = (x^2+y^2)^m$.
Suponhamos que $\alpha < \beta$. Então $p^{2\alpha} \mid x^2 + y^2 \Rightarrow p^{2\alpha m} \mid (x^2+y^2)^m$.
Como $p^{(\alpha+\beta)n} \mid (x^2+y^2)^m \Rightarrow 2\alpha m = (\alpha+\beta)n > 2\alpha n \Rightarrow m > n$, que é uma contradição pois já provamos que $n > m$.
Assim a suposição feita está incorreta, ou seja, $\alpha \geq \beta$.
Entretanto, se fizermos $\alpha > \beta$ chegaremos novamente a uma contradição.
Assim temos que $\alpha = \beta \Rightarrow x = y$.
Desta forma $(x^2+y^2)^m = (xy)^n \Rightarrow 2^m x^{2m} = x^{2n} \Rightarrow x^{2n-2m} = 2^m$
Como x é inteiro $\Rightarrow (2n - 2m) \mid m$, lembrando que mdc $(m, n) = 1$.
Fazendo $n = m + k \Rightarrow 2n - 2m = 2m + 2k - 2m = 2k \Rightarrow 2k \mid m$.
Notamos então que o problema somente possui solução se m for par $\Rightarrow k \mid m$.
Para todos os números pares m que podem ser dados no enunciado, somente teremos um k que divida todos eles (fora o inteiro 2) se $k = 1 \Rightarrow n = m + 1$.
Finalmente, todas as soluções são dadas por $(n, x, y) = (m + 1, 2^{m/2}, 2^{m/2})$.

37)
Como os dígitos de B são todos ímpares então o primo 2 não pode dividir B. Como entre os dígitos de B não está 5, então B também não é divisível por 5. Entre os primos menores que 11 ainda temos 3 e 7.
Deste modo, vamos provar que B não pode ser da forma $B = 3^a.7^b$.
Inicialmente vamos enunciar e demonstrar um lema que será bastante útil:
Lema 1: "O dígito das dezenas de 3^n, n um inteiro positivo, é sempre par"
Demonstração:
Notemos inicialmente que $3^1 = 03$, $3^2 = 09$, $3^3 = 27$, possuem dígitos das dezenas pares.
Suponhamos que exista um inteiro positivo k tal que 3^k possua dígito das dezenas par, ou seja, $3^k = Mxy$, onde y é o dígito das unidades, x (que é par) o dígito das dezenas e M o número que contem os dígitos restantes de 3^k. Notemos que y somente pode assumir os valores 1, 3, 7 ou 9.
Desta forma, quando multiplicamos 3^k por 3, devido a multiplicação de 3 por 1, 3, 7 ou 9, temos que vai 0 ou 2 para a casa das dezenas da conta desta multiplicação, e o dígito das unidades de 3x é par, pois x é par.
Como o dígito das dezenas de 3^{k+1} é igual a soma do dígito das unidades de 3x (que é par) mais o das dezenas de 3y (que é 0 ou 2), temos que o dígito das dezenas de 3^{k+1} é par. Assim, por indução, temos que o dígito das dezenas de 3^n é sempre par.
Vamos agora a um segundo lema, semelhante ao primeiro.
Lema 2: "O dígito das dezenas de 7^n, n um inteiro positivo, é sempre par"

Demonstração:

Notemos inicialmente que $7^1 = 07$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, possuem dígitos das dezenas pares

Suponhamos que exista um inteiro positivo k tal que 7^k possua dígito das dezenas par, ou seja, $7^k = Mxy$, onde y é o dígito das unidades, x (que é par) o dígito das dezenas e M o número que contem os dígitos restantes de 7^k.

Notemos que y somente pode assumir os valores 1, 3, 7 ou 9.

Desta forma, quando multiplicamos 7^k por 7, devido a multiplicação de 7 por 1, 3, 7 ou 9, temos que vai 0, 2, 4 ou 6 para a casa das dezenas da conta desta multiplicação, e o dígito das unidades de 7x é par, pois x é par.

Como o dígito das dezenas de 7^{k+1} é igual a soma do dígito das unidades de 7x (que é par) mais o das dezenas de 7y (que é 0, 2, 4 ou 6), temos que o dígito das dezenas de 7^{k+1} é par. Assim, por indução, temos que o dígito das dezenas de 7^n é sempre par.

Assim, pelos lemas 1 e 2 temos que 3^a e 7^b possuem dígitos das dezenas pares. Sabemos também que tanto 3^a quanto 7^b possui 1, 3, 7 ou 9 como algarismos das unidades.

Note agora que: $1.1 = 01$, $1.3 = 03$, $1.7 = 07$, $1.9 = 09$, $3.3 = 09$, $3.7 = 21$, $3.9 = 27$, $7.7 = 49$, $7.9 = 63$, ou seja, todas estas multiplicações possuem dígito das dezenas par.

Para ficar mais claro, entenda $B = 3^a.7^b$ como sendo a multiplicação de 7^b por 3^a.

Sejam $3^a = Mxy$ e $7^b = Nzw$, assim:

$3^a.7^b = (100M + 10x + y)(100N + 10z + w) = \ldots + 10(xw + yz) + yw.$

Como x e z são pares então xw + yz é um número par. Como o dígito das dezenas de yw é par, então teremos necessariamente que o dígito das dezenas de $3^a.7^b$ seja par.

Portanto, B não pode ser da forma $3^a.7^b$, implicando que B possua somente primos maiores ou iguais a 11.

Portanto, quando multiplicamos o dígito das unidades de 3a com o dígito das unidades de 7b, teremos um número cujo dígito das dezenas é par.

38)

Sabemos que existe uma seqüência de n inteiros positivos compostos:

$(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, (n + 1)! + 4, \ldots, (n + 1)! + r, \ldots, (n + 1)! + n + 1$

Cada um destes números é divisível por r.

Se formarmos a seqüência: $(n + 1)!^2 + 2, (n + 1)!^2 + 3, (n + 1)!^2 + 4, \ldots, (n + 1)!^2 + r, \ldots, (n + 1)!^2 + n + 1$

Cada um destes números também é divisível por r

Notemos que: $[(n + 1)!^2 + r]/r = (n + 1)!.[(n + 1)!/r] + 1$

Como $(n + 1)!.[(n + 1)!/r]$ é inteiro, e $(n + 1)!$ é divisível por r, então r não divide $(n + 1)!.[(n + 1)!/r] + 1$, pois se r dividisse este valor, então r deveria dividir 1, e somente 1 e -1 dividem 1.

Como para cada r podemos escolher um primo p que divide r, então $(n + 1)!^2 + r$ é divisível por p, mas não por uma potência de p.

39)

Sabe-se que entre os números $2004! + 2$, $2004! + 3$, ..., $2004! + 2004$ não existe nenhum número primo. Seja $p(n)$ a quantidade de números primos no conjunto $n, n + 1, ..., n + 2001$.

Desde que existem 168 primos menores que 1000 segue que $p(1) \geq 168$

Além disso, sabe-se que $p(2004! + 2) = 0$.

Como $|p(n) - p(n + 1)| \leq 1$, partindo de $p(1) \geq 168$ até chegar em $p(2004! + 2) = 0$, variando em no máximo uma unidade o valor de $p(n)$, em algum momento deve-se ter $p(n) = 150$, com $1 < n < 2004! + 2$

40)

Se os números iniciais são $a = w$, $b = x$, $c = y$, $d = z$, então depois de 4 passos os números vão ser:

$a = 2(w - 2x + 3y - 2z)$, $b = 2(x - 2y + 3z - 2w)$,

$c = 2(y - 2z + 3w - 2x)$, $d = 2(z - 2w + 3y - 2z)$.

A partir deste ponto a, b, c, d vão ser todos pares, pois a subtração de dois números pares dá como resultado um número par.

Portanto, $|bc - ad|$, $|ac - bd|$, $|ab - cd|$ serão todos divisíveis por 4, e assim não serão primos.

41)

$p = x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) \Rightarrow$

$x - y = 1$ e $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = p \Rightarrow$

$p = x^4 + x^3(x - 1) + x^2(x - 1)^2 + x(x - 1)^3 + (x - 1)^4 \Rightarrow$

$p = 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1 \Rightarrow$

$4p + 1 = 20x^4 - 40x^3 + 40x^2 - 20x + 5 \Rightarrow$

$\frac{4p+1}{5} = 4x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1 = (2x^2 - 2x + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{4p+1}{5}} = 2x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{4p+1}{5}} = \frac{4x^2 - 4x + 2}{2} = \frac{(4x^2 - 4x + 1) + 1}{2} = \frac{(2x-1)^2 + 1}{2}$$

42)

Seja $n = 3^k.m$, com mdc $(m, 3) = 1$.

Sabe-se que, se $m > 1$:

$$2^{3^{k+1}.m} - 1 = \left(2^{3^{k+1}} - 1\right)\left(2^{3^{k+1}(m-1)} + 2^{3^{k+1}(m-2)} + ... + 2^{3^{k+1}} + 1\right) \Rightarrow$$

$2^{3^{k+1}}-1 \mid 2^{3^{k+1}.m}-1$

Tem-se também que:

$2^{3^{k+1}.m}-1=\left(2^{3^k.m}-1\right)\left(4^{3^k.m}+2^{3^k.m}+1\right) \Rightarrow 2^{3^k.m}-1 \mid 2^{3^{k+1}.m}-1$

Além disso: $2^{3^{k+1}}-1=\left(2^{3^k}-1\right)\left(4^{3^k}+2^{3^k}+1\right) \Rightarrow 2^{3^k}-1 \mid 2^{3^{k+1}}-1$

Se m > 1 segue que: $2^{3^k.m}-1=\left(2^{3^k}-1\right)\left(2^{3^k(m-1)}+2^{3^k(m-2)}+...+2^{3^k}+1\right) \Rightarrow$

$2^{3^k}-1 \mid 2^{3^k.m}-1$.

Porém, como $2^{3^{k+1}}-1$ não divide $2^{3^k.m}-1$, existe um primo p que divide $2^{3^{k+1}}-1$ e não divide $2^{3^k.m}-1$. Pelas conclusões acima tem-se que p divide tanto $4^{3^k}+2^{3^k}+1$ quanto $4^{3^k.m}+2^{3^k.m}+1$.

Deste modo conclui-se que $4^{3^k}+2^{3^k}+1$ e $4^{3^k.m}+2^{3^k.m}+1$ possuem um divisor comum maior que 1.

Como $4^{3^k}+2^{3^k}+1<4^{3^k.m}+2^{3^k.m}+1$, segue que $4^{3^k.m}+2^{3^k.m}+1$ não pode ser primo se m > 1.

Assim, a única possibilidade é m = 1 e $n = 3^k$.

43)

Inicialmente notemos que fazendo $x = 5^{25}$ temos

$$N=\frac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1.$$

Então: $N = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2 - 5x(x + 1)^2 =$
$= [(x^2+3x+1)-\sqrt{5x}(x+1)][(x^2+3x+1)+\sqrt{5x}(x+1)]$.

Como $x = 5^{25}$ temos: $N = [(5^{50} + 3.5^{25} + 1) - 5^{13}(5^{25} + 1)][(5^{50} + 3.5^{25} + 1) + 5^{13}(5^{25} + 1)]$, ou seja, N é a multiplicação de dois inteiros maiores que 1, implicando que N é composto.

44)

Como $A^{19} \mid B^{93}$ e $B^{19} \mid A^{93}$ então todo primo p que divide A deve dividir B e vice-versa.

Também, se $p^x \mid A$ então $p^{\frac{93}{19}x}$ é a maior potência de p que pode dividir B e vice-versa. (*)

Inicialmente vamos provar que $AB \mid (A^4 + B^8)^2$. (1)

Sejam $A=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$ e $B=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_n^{\beta_n}$.

Notemos que $(p_i^{4\alpha_i}+p_i^{8\beta_i})^2=p_i^{8\alpha_i}+p_i^{16\beta_i}+2p_i^{4\alpha_i+8\beta_i}$, onde i = 1, 2, ..., n.

De (*) temos que $\beta_i < 5\alpha_i$ e $\alpha_i < 5\beta_i \Rightarrow$

$\alpha_i + \beta_i < 6\alpha_i < 8\alpha_i \quad \alpha_i + \beta_i < 6\beta_i < 16\beta_i \quad \alpha_i + \beta_i < 4\alpha_i + 8\beta_i$.

Deste modo concluímos que $p_i^{\alpha_i+\beta_i} \mid (p_i^{4\alpha_i} + p_i^{8\beta_i})^2$, para cada i = 1, 2, ..., n.

Assim segue diretamente que $AB \mid (A^4 + B^8)^2$.

Provemos agora que $(AB)^2 \mid (A^4 + B^8)^3 = A^{12} + B^{24} + k.(AB)^2$, k um inteiro. (2)

Assim, resta provar que $(AB)^2 \mid A^{12} + B^{24}$, que eqüivale provar que $p_i^{2\alpha_i+2\beta_i} \mid p_i^{12\alpha_i} + p_i^{24\beta_i}$, i = 1, 2, ..., n.

Devido a (*) temos que $2\alpha_i + 2\beta_i < 2\alpha_i + 2(5\beta_i) = 12\alpha_i$ e

$2\alpha_i + 2\beta_i < 24\beta_i$, i = 1, 2, ..., n.

Portanto, segue diretamente que $(AB)^2 \mid (A^4 + B^8)^3$.

Provamos já que $(A^4+B^8)^{F_{n+1}}$ é divisível por $(AB)^{F_n}$ para n = 1 e n = 2.

Assumamos por indução que existe um n tal que

$(AB)^{F_n} \mid (A^4+B^8)^{F_{n+1}}$ e $(AB)^{F_{n+1}} \mid (A^4+B^8)^{F_{n+2}}$.

Multiplicando estas duas equações:

$(AB)^{F_n+F_{n+1}} \mid (A^4+B^8)^{F_{n+1}+F_{n+2}} \Rightarrow (AB)^{F_{n+2}} \mid (A^4+B^8)^{F_{n+3}}$.

Desta forma provamos por indução que $(AB)^{F_n} \mid (A^4+B^8)^{F_{n+1}}$ para todo n natural.

45)

Suponhamos que $R(p,q,r) = \dfrac{pqr-1}{(p-1)(q-1)(r-1)}$, 1 < p < q < r, e que p, q, r e R(p, q, r) são todos inteiros.

Notemos que

$$R(p,q,r) = 1 + \frac{1}{(p-1)} + \frac{1}{(q-1)} + \frac{1}{(r-1)} + \frac{1}{(p-1)(q-1)} + \frac{1}{(p-1)(r-1)} + \frac{1}{(q-1)(r-1)}$$

, onde concluímos que $R(p, q, r) > 1$ que $R(p, q, r) \leq R(p', q', r')$ se $p \geq p' \geq 1$, $q \geq q' \geq 1$, $r \geq r' \geq 1$.

Note também que $pqr - 1$ é ímpar a não ser que cada p, q, r seja ímpar e que $(p-1)(q-1)(r-1)$ é par a não ser que cada p, q, r seja par.

Desde que R(p, q, r) é inteiro, devemos ter que p, q, r são todos pares ou todos ímpares.

Se $p \geq 4$, então $1 < R(p, q, r) \leq R(4, 6, 8) = \dfrac{4.6.8-1}{3.5.7} = \dfrac{191}{105} < 2$,

implicando que R(p, q, r) não pode ser inteiro.

Se p = 3 então $1 < R(p, q, r) \leq R(3, 5, 7) = \dfrac{3.5.7-1}{2.4.6} = \dfrac{104}{48} < 3$, implicando

que: $R(p, q, r) = R(3, q, r) = \dfrac{3qr-1}{2(q-1)(r-1)} = 2 \Rightarrow$

$3qr - 1 = 4(qr - q - r - 1) \Rightarrow qr - 4q - 4r + 5 = 0 \Rightarrow (q-4)(r-4) = 11$

Como 11 é primo e $5 \le q < r$, temos que $q = 5$ e $r = 15$.

Se $p = 2$, então $1 < R(p, q, r) \le R(2, 4, 6) = \dfrac{2.4.6-1}{1.3.5} = \dfrac{47}{15} < 4 \Rightarrow$

$R(p, q, r) = R(2, q, r) = 2$ ou 3.

i) $R(2, q, r) = 2 \Rightarrow 2qr - 1 = 2(q-1)(r-1)$, que é impossível pois o número da direita é ímpar e o da esquerda é par.

ii) $R(2, q, r) = 3 \Rightarrow 2qr - 1 = 3(q-1)(r-1) \Rightarrow$

$qr - 3q - 3r + 4 = 0 \Rightarrow (q-3)(r-3) = 5$.

Desde que 5 é primo e $4 \le q < r$, temos que $q = 4$ e $r = 8$.

Deste modo temos as soluções $(p, q, r) = (3, 5, 15)$ e $(p, q, r) = (2, 4, 8)$.

46)

Sejam x_1, x_2, x_3 os dígitos escolhidos por Maxi. Note que $x_1 \ne x_2$, $x_1 \ne x_3$, $x_2 \ne x_3$ pois as 6 reordenações: $x_1x_2x_3, \ldots, x_3x_2x_1$ são distintas. Agora faremos a lista de todos os números de 3 dígitos quadrados perfeitos:

$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$
$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$
$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	
$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	
$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	
$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	
$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	
$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	
$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	
$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	

Perceba que:

- Os números que têm algum zero não satisfazem o enunciado: $10^2, 20^2, 30^2$.
- Reordenando 1, 6, 9 podemos obter $13^2, 14^2, 31^2$.

Assim, $13^2, 14^2, 31^2$ não satisfazem o enunciado.

- O número deverá apresentar no mínimo 2 dígitos ímpares, pois se tiver no máximo um, teremos (se tivermos) no máximo 2 números primos.

Assim; $16^2, 17^2, 18^2, 25^2, 28^2, 29^2$ não satisfazem o enunciado.

• Os dígitos são distintos. Assim, $11^2, 12^2, 15^2, 21^2, 22^2, 26^2$ não satisfazem o enunciado.

Nos restam os números: $19^2, 23^2, 24^2, 27^2$. Reordenando:

$19^2 = 361; 136, 163, 316, 361, 613, 631.$

$23^2 = 529; 259, 295, 529, 592, 925, 952.$

$24^2 = 576; 567, 576, 657, 675, 756, 765.$

$27^2 = 729; 279, 297, 729, 792, 927, 972.$

Perceba que os dígitos:

• 1, 3, 6 satisfazem o enunciado, pois, 163, 613, 631 (apenas) são primos e 361 (apenas) é quadrado perfeito.

• 2, 5, 9 não satisfazem o enunciado, pois, 295, 592, 925, 952 são compostos e 529 (apenas) é quadrado perfeito, assim teremos no máximo um primo.

• 5, 6, 7 não satisfazem o enunciado pelo mesmo raciocínio acima: 675, 765, 756 e 576 são compostos.

• 2, 7, 9 não satisfazem o enunciado pois todas as suas reordenações são múltiplos de 9.

Portanto, os dígitos que Maxi escolheu foram 1, 3, 6.

14.2. PARTE B

1) Dica: Analise divisibilidade por 3.

2) $S = \{(5, 6), (-6, -5), (-3, 4), (-4, 3)\}$

3) Dica: Todo número primo é da forma $6k \pm 1$.

4) 101. Dica: Prove que $z_n = \dfrac{(10^{n+1}+1)(10^{n+1}-1)}{99}$. Depois prove que $10^{n+1}+1 = p$ e $10^{n-1}-1 = 99$.

5) $k = 9$

6) Dica: Todo primo maior que 5 é da forma $6k \pm 1$.

7) Dica: Use soma e produto das raízes de uma equação de 2^o grau.

8) 1, 2 e 4

9) Dica: $n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$

10) Todos os números compostos, exceto 4.

11) Dica: Faça $a = mn$ $b = xy$ $c = mx$ $d = ny$

12) Dica: Faça $b = 3a - 1$.

13) 1 e 49

14) Dica: Demonstre que $p = 3$ ou $p = 11$.

15) Dica: Transforme a equação em $(2x - p)(2y - p) = p^2$

16) 1

17) Dica: Faça $a = x - 1$ $b = y - 1$ $c = 1$.

18) Dica: Veja a solução do problema 3 da parte A.

19) Dica: Conclua que se $10^n + 1$ é primo então n é potência de 2.

20) Dica. Use indução finita, partindo do fato que $p_{k+1} \geq p_k + 2$ e $p_k \geq 3k + 1$.

21) $p = 5$. Dica: Mostre que para $p > 5$ tem-se que $4p^2 + 1$ ou $6p^2 + 1$ são múltiplos de 5.

22) 2025.

23) Dica: Leia a solução do problema 3 da parte A.

24) Dica: Todo número composto possui um divisor primo menor que sua raiz quadrada.

25) Não. Dica: Mostre que é divisível por 11.

26) a) Não; b) Não. Dica: Demonstre que é divisível por 47.

27) $n = -19$ ou $n = -40$. Dica: Suponha que $n^2 + 59n + 881 = k^2$ e prove que $(k - 2n - 59)(k + 2n + 59) = 43$.

28) a

29) a) Sim; b) Não

30) Dica: Cecília deve escolher o número inteiro $b = p_1p_2p_3 - a$

31) Dica: Use $n^4 + 4r^4 = (n^2 + 2r.n + 2r^2)(n^2 - 2r.n + 2r^2)$

32) Dica: Demonstre, por indução, que $n = 3^n$ divide $2^n + 1$.

33) Dica: Veja a solução do problema 28 da parte A.

34) Dica: Demonstre que $r \neq 0$ então algum termo será divisível por a_1.

35) Dica: Observe que $n = 6k$ e $n = 5k \pm 2$.

36) $p^3 + p^2 + p + 1$

37) Dica: Use o fato que $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

38) $p = 5$ e $m = 8$.

39) Dica: Mostre que a relação dada é equivalente a $(a - c)(b^2 - ac) = 0$.

40) $(p, q, r) = (7, 5, 2)$. Dica: Demonstre que $r = 2$.

41) $(p, q, r) = \{(71, 2, 5), (23, 13, 2), (71, 11, 2), (167, 5, 2)\}$

42) 7 triplas. Dica: Demonstre que $p = 5$ ou $p = q$.

43) $b = 7$. Dica: Prove que $\overline{5654_b} = (b + 1)(5b^2 + b + 4)$ e depois, analisando a paridade, demonstre que as duas parcelas devem ser potências de 2.

44) Dica: Faça $n = 500!$

45) Dica: Faça $5n + 3 = 4(2n + 1) - (3n + 1) = 4x^2 - y^2$.

46) $p = 2$, 3 ou 7. Dica: Mostre que $(x + y)(xy - p) = 5p$.

MDC E MMC

15.1. PARTE A

1)

Dois números deixam o mesmo resto quando divididos por n se e só se sua diferença é múltipla de n. Logo, as diferenças $238 - 154 = 84$ e $334 - 238 = 96$ são ambas múltiplas de n. Como n é o maior possível, concluímos que n deve ser o maior divisor comum de 84 e 96, que é 12.

2)

O mínimo múltiplo comum de 7 e 8 é 56. Entre dois múltiplos consecutivos de 56 há sete múltiplos de 7 e seis múltiplos de 8. Assim, os múltiplos de 56 são os elementos de ordem 14, 28, 42, ... da seqüência. Portanto, o 98° elemento da seqüência é igual a $56 \times 7 = 392$ e o 100° é $392 + 8 = 400$.

3)

a) O elevador B pára nos múltiplos de 5. O elevador C pára nos múltiplos de 7. O elevador D pára nos múltiplos de 17.
O elevador E pára nos múltiplos de 23.
Como 5, 7, 17 e 23 são números primos, para que todos parem num mesmo andar, este tem que ser múltiplo de
$5 \times 7 \times 17 \times 23 = 13685$ e o prédio só tem 1000 andares.
b) Para que num andar parem exatamente quatro elevadores, devem parar A, que pára em todos, e três dos restantes.
B, C e D param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 17 = 595$
B, C e E param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 23 = 805$
B, D e E param nos múltiplos de $5 \times 17 \times 23 = 1955$
C, D e E param nos múltiplos de $7 \times 17 \times 23 = 2737$
Logo, os andares onde param 4 elevadores são o 595 e o 805.

4)

O mdc de dois números é divisor de cada um dos dois números, ou seja, cada um dos dois números é múltiplo de seu mdc. Logo queremos o maior valor de d que tem dois múltiplos positivos menores ou iguais a 2011. O maior dos dois múltiplos de d é maior ou igual a $2d$, logo $2d \le 2011 \Leftrightarrow d \le 1005$. Como 1005 e $2 \cdot 1005 = 2010$ são ambos menores do que 2011, o valor procurado é 1005.

5)

I) $\text{mdc}(a, b) \,.\, \text{mmc}(a, b) = ab \Rightarrow [\text{mdc}(a, b)][336] = 4032 \Rightarrow$

mdc (a, b) = 12

Se mdc (a, b) = 12 então existem os inteiros p e q, primos entre si, tais que $a = 12p$ e $b = 12q$

II) $ab = 4032 \Rightarrow 144pq = 4032 \Rightarrow pq = 28$

Como p e q são primos entre si, então existem duas possibilidades:

$p = 4$ e $q = 7$ ou $p = 1$ e $q = 28$

Então: $p = 48$ e $q = 84$ ou $p = 12$ e $q = 336$

6)

I) $2 \mid a \Rightarrow a = 2x_1$ II) $3 \mid (a + 1) \Rightarrow a + 1 = 3x_2 \Rightarrow a = 3x_2 - 1 \Rightarrow$
$a = 3(x_2 - 1) + 2$

III) $4 \mid (a + 2) \Rightarrow a + 2 = 4x_3 \Rightarrow a = 4x_3 - 2 \Rightarrow a = 4(x_3 - 1) + 2 \Rightarrow$
$a - 2 = 4(x_3 - 1)$

IV) $5 \mid (a + 3) \Rightarrow a + 3 = 5x_4 \Rightarrow a = 5x_4 - 3 \Rightarrow a = 5(x_4 - 1) + 2 \Rightarrow$
$a - 2 = 5(x_4 - 1)$

V) $6 \mid (a + 4) \Rightarrow a + 4 = 6x_5 \Rightarrow a = 6x_5 - 4 \Rightarrow a = 6(x_5 - 1) + 2 \Rightarrow$
$a - 2 = 5(x_5 - 1)$

Como $a - 2$ é divisível por 4, 5 e 6, então o menor valor que pode assumir $a - 2$ é o mínimo múltiplo comum entre 4, 5 e 6.

Portanto: $a - 2 = \text{mmc}(4, 5, 6) \Rightarrow a - 2 = 60 \Rightarrow a = 62.$

7)

Seja d o mdc entre $2^m - 1$ e $2^n + 1$.

Como d é ímpar e $2^m - 1 = kd$ $2^n + 1 = pd \Rightarrow 2^m = kd + 1$ $2^n = pd - 1$

$(2^m)^n = 2^{mn} = (kd + 1)^n = (kd)^n + n(kd)^{n-1} + \ldots + n(kd) + 1 =$

$= d[k^n d^{n-1} + nk^{n-1}d^{n-2} + \ldots + nk] + 1 \Rightarrow 2^{mn} = td + 1$

$(2^n)^m = 2^{mn} = (pd - 1)^m = ud - 1$ pois m é ímpar

Então $td + 1 = ud - 1 \Rightarrow d(u - t) = 2 \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow$
$d = 1$, pois d é ímpar

8)

Seja $d = \text{mdc}[(a + b), (a^2 + b^2)] \Rightarrow a + b = k_1.d$ e $a^2 + b^2 = k_2.d$

Como a e b são primos entre si $\Rightarrow$ mdc (a, b) = 1.

Se $d \mid (a + b)$ e $d \mid a^2 + b^2 \Rightarrow d \mid (a + b)(a - b) + (a^2 + b^2) \Rightarrow$
$d \mid (a^2 - b^2 + a^2 + b^2) \Rightarrow d \mid 2a^2$

Analogamente, $d \mid -(a + b)(a - b) + (a^2 + b^2) \Rightarrow d \mid (b^2 - a^2 + a^2 + b^2) \Rightarrow$
$d \mid 2b^2$

Se $d \mid 2a^2$ e $d \mid 2b^2$ e como mdc (a, b) = 1, então $d \mid 2 \Rightarrow d = 1$ ou $d = 2$

9)

Dividamos inicialmente a e b por p: $a = xp + r_1$ e $b = yp + r_2$

Assim: $am + bn = mxp + mr_1 + nyp + nr_2 = p(mx + ny) + mr_1 + nr_2$

Seja $d = \text{mdc}(r_1, r_2) \Rightarrow \text{mdc}(r_1/d, r_2/d) = 1 \Rightarrow \text{mdc}(-r_1/d, r_2/d) = 1$
Fazendo $m = r_2/d$ e $n = -r_1/d$, temos que $mr_1 + nr_2 = 0 \Rightarrow$
$am + bn = p(mx + ny) \Rightarrow p \mid am + bn$, onde $\text{mdc}(m, n) = 1$.

10)
Seja $d = \text{mdc}[(a + b), (a^2 + b^2 - nab)] \Rightarrow a + b = k_1.d$ e
$a^2 + b^2 - nab = k_2.d$
Se $d \mid (a + b)$ e $d \mid (a^2 + b^2 - nab) \Rightarrow d \mid (a + b)^2 - (a^2 + b^2 - nab) \Rightarrow$
$d \mid ab(n + 2)$
Como a e b são primos entre si e $d \mid (a + b)$, então d não divide nem a e nem b
Deste modo, temos que $d \mid (n + 2)$

11)
Sendo d o mdc destes números, temos que $d \mid 2332 - 1221 = 1111 = 11 \times 101$. Como 101 é primo, 101 não divide 1221 e 11 divide todos os 8 números, 11 é o *mdc* procurado.

12)
Temos $3^a \cdot 6^b \cdot 9^c \cdot 12^d = 2^{b+2d} \cdot 3^{a+b+2c+d}$. Para (a, b, c, d) dados, o maior n possível é $\text{mdc}\{b+2d, a+b+2c+d\} \le b+2d$. Note que b + 2d é máximo (com b e d elementos distintos de {3, 6, 9, 12}) quando d = 12 e b = 9. Neste caso, b + 2d = 33, e a + b + 2c + d = 21 + a + 2c. Tomando a = 6 e c = 3, temos também a + b + 2c + d = 33, que é obviamente o maior valor possível para n, obtido para (a, b, c, d) = (6, 9, 3, 12).

13)
Seja $d = \text{mdc}(a_n, a_{n+1}) \Rightarrow d \mid a_n$ e $d \mid a_{n+1}$ sendo $a_n = 20 + n^2$ e
$a_{n+1} = 20 + n^2 + 2n + 1$
Assim, $d \mid (a_{n+1} - a_n) \Rightarrow d \mid 2n + 1 \Rightarrow d \mid 4n^2 + 4n + 1$
$d \mid (4n^2 + 4n + 1) - (4n^2 + 80) \Rightarrow d \mid 4n - 79$
$d \mid (4n - 79) - (4n + 2) \Rightarrow d \mid 81 = 3^4 \Rightarrow d = 1, 3, 9, 27$ e 81

14)
Denotaremos por a_{ij} o número que está na interseção da *i*-ésima linha com a *j*-ésima coluna. Se $i \neq j$, temos que $a_{ij}a_{ji} = \text{mdc}(i,j)\text{mmc}(i,j) = ij$ e temos que $a_{ii} = i$. Assim, o produto de todos os números da tabela é

$$100!\left(\prod_{1 \le i < j \le 100} ij\right) = 100! \cdot (100!)^{99} = (100!)^{100}.$$

15)

Inicialmente calculemos os possíveis valores de

$d = \text{mdc}\,(n^2 + 2,\ 2 + 2001.n)$.

Desde que $d \mid n^2 + 2$ e $d \mid 2 + 2001.n \Rightarrow$

$d \mid (2 + 2001.n)^2 - 2001(n^2 + 2) \Rightarrow$

$d \mid 4 + 4.2001.n + 2001^2.n^2 - 2001^2.n^2 - 2.2001^2 \Rightarrow$

$d \mid 4.2001.n - 2.2001^2 + 4$

Assim: $d \mid 4(2 + 2001.n) - (4.2001.n - 2.2001^2 + 4) \Rightarrow$

$d \mid 2(2001^2 + 2) \Rightarrow d \mid 2.19.83.2539$

Como $n^2 + 2 \mid 2 + 2001.n$ então $\text{mdc}\,(n^2 + 2,\ 2 + 2001.n) = n^2 + 2 \Rightarrow$

$n^2 + 2 \mid 2.19.83.2539$

Por outro lado, devemos ter $n^2 + 2 \leq 2 + 2001.n \Rightarrow n \leq 2001$.

Portanto, temos as seguintes possibilidades para $n^2 + 2$:

i) $n^2 + 2 = 2 \Rightarrow n = 0$

ii) $n^2 + 2 = 19 \Rightarrow$ não existe n natural que satisfaz

iii) $n^2 + 2 = 83 \Rightarrow n = 9$

iv) $n^2 + 2 = 2.19 \Rightarrow n = 6$

v) $n^2 + 2 = 2.83 \Rightarrow$ não existe n natural que satisfaz

vi) $n^2 + 2 = 19.83 \Rightarrow$ não existe n natural que satisfaz

vii) $n^2 + 2 = 19.83.2539 \Rightarrow n = 2001$

viii) $n^2 + 2 = 2.19.2539 \Rightarrow$ não existe n natural que satisfaz

ix) $n^2 + 2 = 2.83.2539 \Rightarrow$ não existe n natural que satisfaz

x) $n^2 + 2 = 19.2539 \Rightarrow$ não existe n natural que satisfaz

xi) $n^2 + 2 = 83.2539 \Rightarrow$ não existe n natural que satisfaz

xii) $n^2 + 2 = 2.2539 \Rightarrow$ não existe n natural que satisfaz

Portanto: $n = \{0, 6, 9, 2001\}$

16)

Notemos que para todos os números naturais k nós temos que:

$2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$ (1) e $2k = (2k + 1)(8k + 1) - (4k + 1)^2$ (2).

Desde que $\text{mdc}\,(k, k + 1) = 1$, a expressão (1) mostra uma representação (como a diferença de dois números inteiros compostos primos entre si) de todos os inteiros ímpares maiores que 3. Entretanto, $1 = 9 - 8$ e $3 = 25 - 22$, e assim provamos que existe uma representação para todos os inteiros positivos ímpares.

Notemos que $-(8k + 4)[(2k + 1)(8k + 1)] + (8k + 5)[(4k + 1)^2] = 1$.

Como para cada k inteiro positivo existem inteiros a e b tais que $a[(2k + 1)(8k + 1)] + b[(4k + 1)^2] = 1$, concluímos diretamente que $\text{mdc}\,((2k + 1)(8k + 1), (4k + 1)^2) = 1$.

Assim, (2) mostra uma representação possível para todos os números pares positivos.

17)

Seja $S_n = 3^n + 5^n$. Assim estamos procurando os inteiros positivos n tais que S_{n-1} divide S_n.

Note que $S_n - 3.S_{n-1} = 2.5^{n-1}$ e $5.S_{n-1} - S_n = 2.3^{n-1}$.

Desta forma, se S_{n-1} divide S_n então também deve dividir 2.5^{n-1} e 2.3^{n-1}, implicando que divida também o máximo divisor comum entre 2.5^{n-1} e 2.3^{n-1}, que vale 2.

Assim, S_{n-1} divide 2. Entretanto, $S_{n-1} > 2$ para $n > 1$. Portanto a única possibilidade é para n = 1, onde concluímos que $3^0 + 5^0 = 2$ divide $3^1 + 5^1 = 8$.

18)

Dados dois números inteiros positivos distintos (a e b; a > b), tais que um é múltiplo do outro, temos que m.d.c. (a, b) = b e a ≥ 2b. Assim, é fácil ver que:

a) As bolas de números 2, 4, 8, 16 e 32 devem estar em caixas diferentes. Suponhamos, então, que essas bolas estejam respectivamente na primeira, segunda, terceira, quarta e quinta caixa;

b) Entre 32 e 63; 16 e 31; 8 e 15; 4 e 7, e entre 2 e 3 não existem dois números tais que um seja múltiplo do outro.

Logo, uma maneira fácil de repartir essas bolas, de acordo com o enunciado, seria:

Caixas	Bolas	
1ª	2, 3	⇒ 2 bolas
2ª	4, 5, 6, 7	⇒ 4 bolas
3ª	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	⇒ 8 bolas
4ª	16, 17, 18, 19, ..., 30, 31	⇒ 16 bolas
5ª	32, 33, 34, 35, ..., 50, 51	⇒ 20 bolas

Obs.: Note que poderíamos modificar as posições de algumas dessas bolas retirando 6 bolas da 4ª caixa e 10 da 5ª, completando as demais, deixando, assim, 10 bolas em cada caixa. Para isso, observe que:

a) Os números primos 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47 podem completar qualquer das 3 primeiras caixas;

b) Na 1ª caixa não podemos acrescentar bolas múltiplos de 2 e 3;

c) Na 2ª caixa não podemos acrescentar bolas múltiplo de 3, 4, 5 e 7;

d) O 46 não é múltiplo de nenhum dos números das bolas já na 3ª caixa.

Assim, uma possível maneira onde todas as caixas teriam uma mesma quantidade de bolas seria:

Caixas	Bolas	
1ª	2, 3, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37	⇒ 10 bolas
2ª	4, 5, 6, 7, 33, 34, 38, 39,41, 43	⇒ 10 bolas
3ª	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 46, 47	⇒ 10 bolas
4ª	16, 18, 20,21, 22, 24, 26,27,28, 30	⇒ 10 bolas
5ª	32, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 49, 50,51	⇒ 10 bolas

19)

Considere que m é um número natural menor que n e primo com n, tal que $m < n/2$.
Como $\text{mdc}(m, n) = \text{mdc}(n - m, n) = 1$, então para cada número natural m ($m < n/2$) que é primo com n temos outro número natural $n - m$ que é maior que $n/2$ e que também é primo relativo com n.
Seja S a soma dos cubos de todos estes números naturais primos relativos com n e menores que n.
Organize esta soma agrupando os termos m e $n - m$.
Desde que $m^3 + (n - m)^3 = n^3 - 3n^2m + 3nm^2 = n(n^2 + 3nm + 3m^2)$, então cada parcela $m^3 + (n - m)^3$ de S é divisível por n, implicando que S é divisível por n.
Note que este fato não ocorre somente para a soma dos cubos, mas para qualquer potência ímpar destes naturais.

20)

Notemos que:

$$T_n - 2 = 2^{2^n} - 1 = 2^{2.2^{n-1}} - 1 = (T_{n-1} - 1)^2 - 1 = T_{n-1}^2 - 2T_{n-1} = T_{n-1}(T_{n-1} - 2) =$$
$$= T_{n-1}T_{n-2}(T_{n-2} - 2) = \ldots = T_{n-1}T_{n-2}\ldots T_1T_0(T_0 - 2) = T_{n-1}T_{n-2}\ldots T_1T_0$$

para todo n. Desta forma, todo divisor comum de T_m e T_n deve dividir 2.
Mas como cada T_n é ímpar, então T_m e T_n são primos entre si.

21)

Seja n o menor inteiro tal que $\text{mdc}(s, n) > 1$ para todo s em S. Note que obviamente n não possui fatores primos repetidos, pois se assim fosse existiria outro inteiro menor que n tal que o mdc com s seria maior que 1.
Pela condição do enunciado, existe um $s \in S$ tal que s divide n.
Por outro lado, se p é um divisor primo de s, então pela escolha de n, temos que n/p é um primo relativo com todo elemento de S.
Desde que n não pode ser primo relativo com t, t é divisível por p, mas não por todos os outros divisores primos de n, pois senão n/p não seria primo relativo com t, que pertence a S. Deste modo, $\text{mdc}(s, t) = p$, que é primo.

22)

Seja p um número primo ímpar, então $f(2p) = f(2).f(p)$.
Como, $f(2p) = f(p) + f(p) = 2f(p) \Rightarrow f(2) = 2$.
Além disso, $f(4) = f(2) + f(2) = 4 \Rightarrow f(12) = 4f(3)$.
Por outro lado
$f(12) = f(7) + f(5) \Rightarrow f(12) = 2f(2) + f(3) + f(2) + f(3) = 6 + 2f(3) \Rightarrow f(3) = 3$.
Finalmente,
$f(5) = f(2) + f(3) = 5 \Rightarrow f(15) = 15 \Rightarrow f(13) = 13 \Rightarrow f(26) = 26 \Rightarrow f(23) = 23$.
Mas, $f(13) = 13 \Rightarrow f(11) = 11 \Rightarrow f(33) = 33 \Rightarrow f(31) = 31 \Rightarrow f(29) = 29$.
Logo: $f(2001) = f(3).f(23).f(29) = 2001 \Rightarrow f(1999) = 1999$.

23)

Como os denominadores das frações são primos entre si, seu *MMC* é *BD* e assim, a fração resultante é $\frac{AD + CB}{BD}$. Suponhamos que esta fração não seja irredutível isto é, que exista algum número primo p que divida o numerador e o denominador desta fração. Como o produto *BD* é divisível por *p*, um dos seus termos, digamos *B* sem perda de generalidade o seja. Entretanto, uma das parcelas da soma $AD + CB$ é divisível por *p* e como a soma, por hipótese, é divisível por *p* a parcela *AD* é também divisível por *p*. Portanto *A* ou *D* é divisível por *p*. No primeiro caso temos uma contradição com o fato da fração $\frac{A}{B}$ ser irredutível, no outro casos a contradição está no fato de que os denominadores das frações iniciais sempre são primos entre si.

24)

Se um número a está no intervalo $\frac{1000}{m} < a \leq \frac{1000}{m+1}$, então existem m inteiros que são múltiplos de a e que não excedem 1000, que são exatamente: a, 2a, 3a, ..., ma.
Seja k_1 o número destes múltiplos que pertencem aos intervalo $(\frac{1000}{2}, 1000]$, k_2 o número destes múltiplos em $(\frac{1000}{3}, \frac{1000}{2}]$, k_3 o número destes múltiplos em $(\frac{1000}{4}, \frac{1000}{3}]$, etc. Então existem $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots$ inteiros, não maiores que 1000, que são múltiplos de ao menos um dos números: a, 2a, 3a, ..., ma.
De acordo com as condições do problema, os múltiplos são distintos, implicando que: $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots < 1000$.

Assim, temos que:

$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots < 1000 \Rightarrow 2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + \ldots =$
$= (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots) + (k_1 + k_2 + k_3 + \ldots) < 1000 + n < 2000.$

Portanto,

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n} \le k_1\frac{2}{1000}+k_2\frac{3}{1000}+k_3\frac{4}{1000}+\ldots=\frac{2k_1+3k_2+4k_3+\ldots}{1000}<\frac{2000}{1000}=2.$$

25)

Seja $d = \text{mdc}(m, n)$, ou seja, $m = dm_1$ e $n = dn_1$, para m_1 e n_1 inteiros primos entre si.

Como $\text{mmc}(m, n).\text{mdc}(m, n) = m.n \Rightarrow \text{mmc}(m, n).d = d^2m_1n_1 \Rightarrow$
$\text{mmc}(m, n) = dm_1n_1$

Assim: $\text{mmc}(m, n) + \text{mdc}(m, n) = m + n \Rightarrow m_1n_1d + d = m_1d + n_1d \Rightarrow$
$m_1n_1 + 1 = m_1 + n_1 \Rightarrow m_1n_1 - m_1 - n_1 + 1 = 0 \Rightarrow (m_1 - 1)(n_1 - 1) = 0.$

Assim, temos duas opções:

i) $m_1 = 1 \Rightarrow m = d \Rightarrow$ m divide n

ii) $n_1 = 1 \Rightarrow n = d \Rightarrow$ n divide m

26)

Seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Observe que $a = \dfrac{(10^{40}-1)}{9}$ e $b = \dfrac{(10^{12}-1)}{9}$.

Note que $10^4 - 1 = (10^{40} - 1) - (10^{28} + 10^{16} + 10^4)(10^{12} - 1)$ (1)

Como $d \mid \dfrac{(10^{40}-1)}{9}$ e $d \mid \dfrac{(10^{12}-1)}{9}$, de (1) segue que $d \mid \dfrac{10^4-1}{9}$ (2)

Além disso, como $10^{40} - 1 = (10^4)^{10} - 1$ e $10^{12} - 1 = (10^4)^3 - 1$ então ambos são divisíveis por $10^4 - 1$. Desta forma conclui-se que a e b são divisíveis por $\dfrac{10^4-1}{9}$ e assim tem-se que $\dfrac{10^4-1}{9} \mid d$ (3)

De (2) e (3) tem-se que $d = \dfrac{10^4-1}{9} = 1111$.

27)

Seja $z = x - y \Rightarrow y = x - z$

Assim: $3x^2 + x = 4x^2 - 8xz + 4z^2 + x - z \Rightarrow x^2 - (8z)x + 4z^2 - z = 0$

Para que esta equação de 2º grau em x tenha soluções inteiras é necessário que seu Δ seja um quadrado perfeito:

$\Delta = 64z^2 - 16z^2 + 4z = 48z^2 + 4z = 4z(12z + 1)$

Desde que $\text{mdc}(3, 12z + 1) = 1$ então $\text{mdc}(4z, 12z + 1) =$
$= \text{mdc}(12z, 12z + 1) = 1$, pois $12z$ e $12z + 1$ são dois inteiros consecutivos.

Desta forma, para que $4z(12z + 1)$ seja um quadrado perfeito, então existem inteiros a e b tais que $4z = a^2$ e $12z + 1 = b^2$. Como 4 é quadrado perfeito, para que 4z seja um quadrado perfeito então $z = x - y$ é quadrado perfeito.

28)

Seja $P(n) = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$. Então $P(1) = 2^3 x 3$, e assim, n = 1 não é uma solução. Analisemos agora $n \geq 2$. Note inicialmente que para todo $k \in N$ temos $mdc(k, k + 1) = mdc(2k - 1, 2k + 1) = 1$. Portanto, se n é ímpar então cada um dos valores n, n + 1 e n + 2 deve ser uma potência distinta de um número primo, pois no caso contrário teríamos um número composto entre n, n + 1 e n + 2 e somente entre estes 3 números iniciais já teríamos 4 primos distintos.

Separemos em dois casos:

a) n ímpar:

Como n é ímpar e n + 1 é par então teremos que $n = p^a$, $n + 1 = 2^b$ e $n + 2 = q^c$, onde a, b, c, p, $q \in N$, com p e q sendo primos ímpares distintos. Consequentemente: $n + 3 = 2^b + 2 = 2(2^{b-1} + 1)$, onde $b \geq 2$. Para que P(n) possua exatamente 3 fatores primos então os únicos divisores de n + 3 devem ser 2, p ou q. Assim:

i) $2^{b-1} + 1 = p^\alpha$, para algum $\alpha \in N$ ou

ii) $2^{b-1} + 1 = q^\beta$, para algum $\beta \in N$.

No caso i) nós temos que $2p^\alpha = n + 3 = p^\alpha + 3 \Rightarrow p^\alpha = 3 \Rightarrow$ $p = 3$ e $\alpha = 1 \Rightarrow b = 2$ e $n = 3$.

Neste caso, n = 3 é uma solução pois $P(3) = 2^3 x 3^2 x 5$.

b) n par:

Pelo mesmo argumento, como n + 1 é ímpar, devemos ter $n + 1 = p^a$, $n + 2 = 2^b$ e $n + 3 = q^c$, a, b, c, p, $q \in N$, com p e q sendo primos ímpares distintos. Consequentemente: $n = 2^b - 2 = 2(2^{b-1} - 1)$, onde $b \geq 2$. Se b = 1 então n = 2, que é uma solução, uma vez que $P(2) = 2^3 x 3 x 5$. Se $b > 2$, para que P(n) possua exatamente 3 fatores primos então os únicos divisores de n devem ser 2, p ou q. Assim:

iii) $2^{b-1} - 1 = p^\alpha$, para algum $\alpha \in N$ ou

iv) $2^{b-1} - 1 = q^\beta$, para algum $\beta \in N$.

No caso iii) temos que $2p^\alpha = n = p^\alpha - 1 \Rightarrow p\alpha = 1$ que é impossível

No caso iv) temos que $2q^\beta = n = q^c - 3$. Como $\beta \leq c$ então $q^\beta \mid 3 \Rightarrow$ $q = 3$ e $\beta = 1 \Rightarrow b = 3$ e $n = 6$, que também é uma solução, pois $P(6) = 2^4 x 3^3 x 7$.

Resumindo, $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ possuem exatamente 3 divisores primos se e somente se n = 2, 3 ou 6.

29)

Separemos em dois casos:
i) n ímpar: $n = 2k + 1$
Assim: $n.2^{n-1} = (2k + 1)2^{2k} = (2k + 1)(2^k)^2$
Como mdc $(2k + 1, 2^{2k}) = 1$, então para que seu produto seja um quadrado perfeito então os dois números tem que ser quadrados perfeitos. Como 2^{2k} já é quadrado perfeito então $n = 2k + 1$ tem que ser um quadrado perfeito.
ii) n par: $n = 2^{\alpha}.(2k + 1)$, $k \geq 1$ é um inteiro ímpar e $\alpha \geq 1$.

Assim: $n = n.2^{n-1} = k.2^{\alpha+2^{\alpha}k-1}$.

Como mdc $(k, 2^{\alpha+2^{\alpha}k-1}) = 1$ e seu produto é um quadrado perfeito então ambos devem ser quadrados perfeitos.
Assim tiramos diretamente que k deve ser um quadrado perfeito.
Para que $2^{\alpha+2^{\alpha}k-1}$ seja um quadrado perfeito basta que $\alpha + 2^{\alpha}k - 1$ seja par, implicando que α seja ímpar.
Resumindo, $n.2^{n-1}$ é um quadrado perfeito se e somente se $n = x^2$, x ímpar, ou $n = 2^{\alpha}.y^2$, sendo que α é ímpar e y é ímpar.

30)
Seja mdc (x, y) o máximo divisor comum de x e y. Inicialmente notemos que aplicando a regra a) o mdc entre as coordenadas fica o mesmo ou é dobrado. Aplicando a regra b) o mdc entre as coordenadas se mantém o mesmo.
Assim, se partimos de (a, b) e chegamos a (x, y), então:
mdc $(x, y) = 2^n$.mdc (a, b), para um inteiro não-negativo n.
Como $a = b = 1$, então mdc $(x, y) = 2^n$.
Provamos, então, que uma condição necessária para que, partindo de (1, 1), cheguemos a (x, y) é mdc $(x, y) = 2^n$.
Tentemos provar que esta também é uma condição suficiente.
Para isto vamos fazer o raciocínio inverso, ou seja, partindo de um ponto qualquer (x, y), com mdc $(x, y) = 2^n$, tentemos chegar ao ponto (1, 1).
Para tanto vamos utilizar os movimentos ao contrário, ou seja, se c ou d são pares, podemos ir de (c, d) para (c/2, d) ou (c, d/2); e do ponto (c, d) podemos ir para (c + d, d) ou (c, c + d).
A seqüência de movimentos (partindo de (x, y)), será escolhida de modo a minimizar a soma a + b.
Portanto, se c ou d for par, então de (c, d) vamos para (c/2, d) ou (c, d/2), com uma diminuição do valor da soma das coordenadas.
Notemos que podemos fazer seguidamente esta regra de modo a alcançar um ponto (a, b) tal que a e b são números ímpares.
Neste par (a, b), a e b ímpares, se a > b devemos ir para (a + b, b), e como a + b é par, devemos ir depois para ((a + b)/2, b), onde novamente houve uma diminuição do valor da soma das coordenadas.

Se neste par (a, b), a e b ímpares, tivermos $a < b$, inicialmente devemos ir para $(a, a + b)$ e depois para $(a, (a + b)/2)$, onde observamos novamente uma diminuição do valor da soma das coordenadas.
Notemos que sempre podemos chegar a pontos (a, b) tais que a e b são ímpares, e, de (a, b) podemos chegar a outro ponto (c, d), com c e d ímpares, e tal que $c + d < a + b$.
Como estes passos podem ser realizados indefinidamente, devemos chegar alguma hora no par (a, b), a e b ímpares, tal que $a + b$ possua menor soma. Evidentemente este par é $(a, b) = (1, 1)$.
Assim, provamos que se $\text{mdc}(x, y) = 2^n$, então é possível sair de (1, 1) e chegar a (x, y).

31)

Inicialmente notemos que $x = y = 1$ satisfazem (1), (2) e (3).
Se (x, y) é solução tal que $y \geq x$, então consideremos um par (x_1, y), onde $y^2 + m = x.x_1$. (4)
Como $\text{mdc}(x, y) = 1$ temos que x_1 divide $y^2 + m$.
Todo divisor comum de x_1 e y de (4) é um divisor de m e por (2) de x.
Contudo, $\text{mdc}(x, y) = 1$, implicando que $\text{mdc}(x_1, y) = 1$.
A expressão $x^2(x_1^2 + m) = (y^2 + m)^2 + x^2m = y^4 + 2my^2 + m(x^2 + m)$ é divisível por y de acordo com (2) e (4).
Desde que $\text{mdc}(x, y) = 1$, y divide $x_1^2 + m$, implicando que (x_1, y) é um par satisfazendo (1), (2) e (3).
Por (4), $x_1 > y$, e repetindo este procedimento nós podemos obter infinitos pares satisfazendo o enunciado.

32)

Desde que todo número maior que 6 pode ser expresso como uma soma de dois números primos entre si, então todo número par maior que 6 pode ser expresso como uma soma de dois números primos entre si, os dois números sendo ímpares. Se somarmos 2 a cada uma destas expressões, nós vemos que todo números par maior que 8 pode ser expresso como a soma de 3 números primos entre si (dois números ímpares primos entre si e 2).
Todo número ímpar pode ser expresso da forma $18N + k$, onde N é um inteiro não-negativo e k é um número ímpar menor que 18.
Note que:

$18N + 1 = (6N - 3) + (6N - 1) + (6N + 5)$ para $N \geq 1$
$18N + 3 = (6N - 1) + (6N + 1) + (6N + 3)$ para $N \geq 1$
$18N + 5 = (6N - 1) + (6N + 1) + (6N + 5)$ para $N \geq 1$
$18N + 7 = (6N - 1) + (6N + 3) + (6N + 5)$ para $N \geq 1$
$18N + 9 = (6N + 1) + (6N + 3) + (6N + 5)$ para $N \geq 1$
$18N + 11 = (6N + 1) + (6N + 3) + (6N + 7)$ para $N \geq 1$

$18N + 13 = (6N + 1) + (6N + 5) + (6N + 7)$ para $N \geq 1$
$18N + 15 = (6N + 3) + (6N + 5) + (6N + 7)$ para $N \geq 0$
$18N + 17 = (6N + 1) + (6N + 7) + (6N + 9)$ para $N \geq 1$

Claramente cada um dos pares de termos em cada expressão são primos entre si, desde que se existe um número que divide cada termo então deve dividir a sua diferença, e esta diferença vale 2, 4, 6 ou 8, e nenhum dos divisores de 2, 4, 6 ou 8 divide simultaneamente os termos dos pares que se pode formar em cada expressão.

A restrição para N é para garantir que cada termo é maior que 1.

Pode-se verificar claramente que 9, 11 e 13 não podem ser escritos desta forma, implicando que o menor inteiro ímpar que pode ser escrito desta forma é $M = 18(0) + 15 \Rightarrow M = 15$.

Desta forma, todos os inteiros maiores que 14 podem ser escritos como uma soma de 3 números primos entre si, cada um deles maior que 1.

33)

Seja p um primo ímpar. Inicialmente vamos demonstrar a seguinte proposição:

"Existe $k \in N$ tal que $P(p^{2^k} + 1) > p$".

Suponhamos, por absurdo, que para todo $k \in N$ temos $P(p^{2^k} + 1) \leq p$. Como a quantidade de valores que pode assumir k é infinito (lembre-se k pode assumir qualquer valor natural) e a quantidade de valores que pode assumir $P(p^{2^k} + 1)$ é finito (pois está entre 2 e p), então existem $k_1, k_2 \in N$ $(k_2 > k_1)$ tal que $P(p^{2^{k_1}} + 1) = P(p^{2^{k_2}} + 1)$.

Seja $d = mdc(p^{2^{k_1}} + 1, p^{2^{k_2}} + 1)$, ou seja, $p^{2^{k_1}} + 1 = d.q_1$ e $p^{2^{k_2}} + 1 = d.q_2$, com mdc $(q_1, q_2) = 1$.

Assim: $p^{2^{k_2}} = d.q_2 - 1 \Rightarrow (p^{2^{k_1}})^{2^{k_2 - k_1}} = (d.q_1 - 1)^{2^{k_2 - k_1}}$.

Entretanto sabemos que qualquer potência par de $(d.q_1 - 1)$ é da forma $d.t + 1$, ou seja, $d.q_2 - 1 = d.t + 1 \Rightarrow d(q_2 - t) = 2 \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d = 2$ pois ambos os números são pares.

Desta forma provamos que $mdc(p^{2^{k_1}} + 1, p^{2^{k_2}} + 1) = 2$.

Seja q o primo tal que $q = P(p^{2^{k_1}} + 1) = P(p^{2^{k_2}} + 1)$. Assim, q é um divisor comum de ambos os números, implicando que q deve estar presente no $mdc(p^{2^{k_1}} + 1, p^{2^{k_2}} + 1)$. Como este mdc vale 2, então $q = 2$, fazendo com que o maior primo que divide tanto $p^{2^{k_1}} + 1$ quanto $p^{2^{k_2}} + 1$ é 2, ou seja, ambos são potências de 2: $p^{2^{k_1}} + 1 = 2^{m_1}$ e $p^{2^{k_2}} + 1 = 2^{m_2}$, $m_2 > m_1$.

Desta forma: $mdc(p^{2^{k_1}} + 1, p^{2^{k_2}} + 1) = mdc(2^{m_1}, 2^{m_2}) = 2^{m_1} = p^{2^{k_1}} + 1$.

Portanto: $p^{2^{k_1}}+1=2 \Rightarrow p^{2^{k_1}}=1$, que é um absurdo.

Deste modo, a suposição feita (para todo $k \in N$ temos $P(p^{2^k}+1)\leq p$) é falsa, ou seja, existe $k \in N$ tal que $P(p^{2^k}+1)>p$.

Consideremos, então, o menor $k \in N$ tal que $P(p^{2^k}+1)>p$.

Assim, para todos os naturais x menores que k teremos $P(p^{2^x}+1)\leq p$.

Evidentemente temos que $P(p^{2^k})=p$, uma vez que p é o único primo que o divide. Para $p^{2^k}-1$ podemos fazer a seguinte análise:

$p^{2^k}-1=(p-1)(p+1)(p^2+1)(p^4+1)...(p^{2^{k-1}}+1)$

Como para cada inteiro x menor que k temos $P(p^{2^x}+1)\leq p$, e a fatoração acima de $p^{2^k}-1$ contem exatamente todos estes termos, então o maior primo de divide $p^{2^k}-1$ deve ser menor do que o, ou seja, $P(p^{2^k}-1)<p$.

Desde que $P(p^{2^k}+1)>p$, $P(p^{2^k})=p$ e $P(p^{2^k}-1)<p$, então $P(p^{2^k}-1)<P(p^{2^k})<P(p^{2^k}+1)$.

Como p pode ser qualquer primo e existem infinitos primos, então existem infinitos números naturais n tais que $P(n) < P(n + 1) < P(n + 2)$.

34)

Vamos, primeiramente, provar a proposição:

Lema: $3^n | 2^{3^n}+1$ e $2^{3^n}+1$ tem pelo menos "n" fatores primos distintos:

Esse lema será provado por indução:

Quando n = 1 ou n = 2, a proposição é verdadeira pois

$2^3 + 1 = 9 = 3^2$ e $2^{3^2}+1=513=3^3\cdot 19$

Suponha que seja válido, também, para um certo "p" ($p \geq 2$). Vamos provar que também é verdadeiro para "p + 1".

$^*3^p | 2^{3^p}+1 \Leftrightarrow \exists k \in Z | 2^{3^p}+1=k\cdot 3^p \Leftrightarrow 2^{3^p}=-1+k\cdot 3^p \Leftrightarrow (2^{3^p})^3=$

$=(-1+k\cdot 3^p)^3 \Leftrightarrow 2^{3^{p+1}}=-1+k\cdot 3^{p+1}-k^2\cdot 3^{2p+1}+k^3\cdot 3^{3p} \Leftrightarrow 2^{3^{p+1}}+1=$

$=(k-k^2\cdot 3^p+k^3\cdot 3^{2p-1})\cdot 3^{p+1} \Rightarrow 3^{p+1} | 2^{3^{p+1}}+1.$

$^{**}2^{3^{p+1}}+1=(2^{3^p})^3+1^3=(2^{3^p}+1)[(2^{3^p})^2-(2^{3^p})+1]$, pois $\forall a,b \in R$ temos:

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Só que $2^{2\cdot 3^p}-2^{3^p}+1=(2^{3^p}+1)^2-3(2^{3^p}+1)+3 \Rightarrow$

$mdc\ (2^{3^p}+1;2^{2\cdot 3^p}-2^{3^p}+1)=mdc(2^{3^p}+1;3)=3$ pois $3^p|2^{3^p}+1 \Rightarrow 3|2^{3^p}+1.$

Logo deve existir um fator primo "j" tal que $j \mid (2^{2\cdot 3^p} - 2^{3^p} + 1)$ e $j \nmid (2^{3^p} + 1)$.

Logo $2^{3^{p+1}} + 1 = (2^{3^p} + 1)(2^{2\cdot 3^p} - 2^{3^p} + 1)$ tem pelo menos 1 fator primo a mais que $2^{3^p} + 1$, implicando que $2^{3^{p+1}} + 1$ tem pelo menos "p + 1" fatores primos em sua decomposição.

Logo a proposição é válida para "p + 1", também.

Pelo princípio da indução finita, provamos que a proposição é verdadeira para todo natural "n".

Sabemos que ímpar $2^{3^{2000}} + 1$ tem pelo menos 2000 fatores primos e pegamos 1999 fatores primos que são diferentes de 3 e os chamamos de $p_1; p_2; p_3; \ldots; p_{1999}$. Temos que $3^{2000} \mid 2^{3^{2000}} + 1$ e $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{1999} \mid 2^{3^{2000}} + 1$

Assim, basta escolhermos o inteiro ímpar $n = 3^{2000} \cdot p_1 \cdots p_{1999}$, pois:

$3^{2000} \mid n \Rightarrow 2^{3^{2000}} + 1 \mid 2^n + 1$ e como $n \mid 2^{3^{2000}} + 1 \Rightarrow n \mid 2^n + 1$.

Logo existe um "n" de 2000 fatores primos, tal que $n \mid 2^n + 1$.

35)

a) Provemos inicialmente que n = 3 não é possível. Suponhamos que x é o maior número do conjunto $\{x - 2, x - 1, x\}$.

Como x deve dividir o mmc $(x - 2, x - 1)$, então x não pode ser divisível por 3 ou por outro primo maior que 3, uma vez que se x for divisível por um primo p maior ou igual a 3, então $x - 2$ e $x - 1$ não vão ser divisíveis por estes primos, e estes valores não vão estar presentes no mmc $(x - 2, x - 1)$, implicando que x não dividiria mmc $(x - 2, x - 1)$.

Assim, x deve ser uma potência de 2 $\Rightarrow$

$x = 2^m \quad x - 1 = 2^m - 1 \quad x - 2 = 2^m - 2$.

Entretanto, como $x - 1 = 2^m - 1$ é ímpar e $x - 2 = 2(2^{m-1} - 1)$ é par, então a maior potência de 2 que divide mmc $(x - 1, x - 2)$ é 2, implicando que 2^m não o divide.

Analisemos agora para $n \geq 4$. Para $k \geq 2$, o conjunto $2k - 1, 2k, \ldots, 4k - 2$ satisfaz o enunciado, pois o maior elemento do conjunto é igual a $2(2k - 1)$, e como $2k - 1$ e $2k$, pertencem ao conjunto, então $2(2k - 1)$ divide o mmc entre os outros números do conjunto.

Assim, provamos que para $n = 2k$, $k \geq 2$, existe um conjunto que satisfaz o enunciado.

Para $k \geq 3$ temos o conjunto $2k - 5, 2k - 4, 2k - 3, \ldots, 4k - 6$ que satisfaz o enunciado, pois como o terceiro elemento do conjunto é $2k - 3$ e existem números pares no conjunto, então o mmc dos $n - 1$ primeiros termos é divisível por $2(2k - 3) = 4k - 6$.

Este é outro exemplo para $n = 2k$, $k \geq 3$.

Para $k \geq 2$, o conjunto $2k - 2, 2k - 1, \ldots, 4k - 2$ satisfaz o enunciado, pois como $2k - 1$ pertence ao conjunto e existem também números pares neste conjunto, então o mmc dos $n - 1$ termos é div isível por $2(2k - 1) = 4k - 2$.

Acabamos de provar a existência de um conjunto para $n = 2k + 1$, $k \geq 2$.

Para $n = 2k + 1$, $k \geq 4$, também temos o conjunto $2k - 6, 2k - 5, \ldots, 4k - 6$ que satisfaz o enunciado.

Assim, para todo inteiro $n \geq 4$ existe um conjunto que satisfaz o enunciado.

b) No item anterior mostramos a existência de ao menos dois conjuntos para todo inteiro $n \geq 4$, exceto para $n = 4, 5, 7$, onde só foram mostrados um conjunto. Para $n = 5$ temos um segundo conjunto: $\{8, 9, 10, 11, 12\}$, e para $n = 7$ temos o conjunto $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Falta analisar $n = 4$. Suponhamos que x é o maior inteiro no conjunto. Notemos que x não pode ser divisível por 5, pois como $n = 4$, no máximo um dos elementos do conjunto é divisível por 5, e se x o for, então o mmc dos primeiros 3 elementos do conjunto não vai ser divisível por 5, implicando que x não o divide. Analogamente, x não pode ser divisível por outro primo maior que 5. Analogamente x não pode ser divisível por 4, pois assim $x - 1$ e $x - 3$ seriam ímpares e $x - 2$ seria divisível exatamente por 2 (não por 4). Similarmente, x não pode ser divisível por 9. Assim, as únicas possibilidades são 1, 2, 3, 6. Porém, como $x \geq 4$, eliminamos as 3 primeiras. Chegamos então ao conjunto $\{3, 4, 5, 6\}$, que é exatamente o mesmo encontrado no item a) para $n = 4$. Finalmente concluímos que $n = 4$ é o único inteiro maior que 2 que possui somente um conjunto que satisfaz o enunciado.

36)

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} = n^2 \Rightarrow \left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right) = pn^2 \Rightarrow pn^2 = p^{2k+1}p_1^{2a_1}p_2^{2a_2}\ldots p_r^{2a_r},$$

onde $p_1, p_2, \ldots p_r$ são primos ímpares.

Como $\text{mdc}\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1, 2^{\frac{p-1}{2}}-1\right) = 1$ então um dos termos $2^{\frac{p-1}{2}}+1$ ou $2^{\frac{p-1}{2}}-1$ é igual a $p^{2k+1}.a^2$ e o outro igual a b^2.

i) $2^{\frac{p-1}{2}}+1 = b^2 \Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}}+1 = (2x+1)^2 \Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}}+1 = 4x^2+4x+1 \Rightarrow$
$2^{\frac{p-1}{2}} = 4x(x+1) \Rightarrow x(x + 1)$ é uma potência de 2 $\Rightarrow x = 1 \Rightarrow$
$2^{\frac{p-1}{2}}+1 = 9 \Rightarrow \frac{p-1}{2} = 3 \Rightarrow p = 7.$

ii) $2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = b^2 \Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = (2x+1)^2 \Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow$
$2^{\frac{p-1}{2}} = 2(2x^2 + 2x + 1)$

Como $2x^2 + 2x + 1$ é ímpar $\Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$
$2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 1 \Rightarrow \dfrac{p-1}{2} = 1 \Rightarrow p = 3.$

37)
Suponha que d seja o mdc de todos estes números. Assim, d divide a soma de todos os números:

$$\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \binom{2n}{5} + \ldots + \binom{2n}{2n-1} = 2^{2n-1}$$

Logo, d deve ser uma potência de 2: $d = 2^a$.
Suponhamos que $n = 2^k.r$, onde r é ímpar.

Como $\binom{2n}{1} = 2^{k+1}.r$ então $a \leq k + 1$.

Perceba agora que $\binom{2n}{m} = \binom{2^{k+1}.r}{m} = \dfrac{2^{k+1}.r}{m}\binom{2^{k+1}r-1}{m-1}$.

Como todos os termos binomiais são inteiros e m é ímpar segue que $m \mid r$. Assim, conclui-se que $\binom{2n}{m} = 2^{k+1}.M$, onde M é um inteiro.

Desta forma, 2^{k+1} é o mdc dos números dados.

38)
Se d = mdc (x, y, z), existem a, b e c tais que x = ad, y = bd e z = cd, com mdc (a, b, c) = 1.
Assim:

$$\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x} = \frac{x^2z + xz + y^2x + yx + z^2y + zy}{xyz} =$$

$$= \frac{d^3(a^2c + b^2a + c^2b) + xy + yz + zx}{d^3abc}$$

Como esta expressão é um número inteiro conclui-se que:
$d^3 \mid [d^3(a^2c + b^2a + c^2b) + xy + yz + zx] \Rightarrow d^3 \mid xy + yz + zx \Rightarrow$
$d^3 \leq xy + yz + zx \Rightarrow d \leq \sqrt[3]{xy + yz + zx}$

39)
Fazendo m = i e n = 2i: mdc (a_i, a_{2i}) = mdc (i, 2i) = i $\Rightarrow i \mid a_i \Rightarrow$
$a_i = k.i$

Fazendo m = i e n = k.i:
$i = mdc(i, k.i) = mdc(a_i, a_{k.i}) = mdc(k.i, k.i^2) = k.i \Rightarrow k = 1 \Rightarrow a_i = i$

40)
Seja d = mdc (x, y) $\Rightarrow$ $x = d.x_0$ e $y = d.y_0$, com mdc $(x_0, y_0) = 1$

$$a = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{d^2.x_0^2 + d^2.y_0^2}{d.x_0.d.y_0} = \frac{x_0^2+y_0^2}{x_0.y_0} \Rightarrow x_0 \mid x_0^2 + y_0^2 \Rightarrow x_0 \mid y_0^2$$

Analogamente demonstra-se que $y_0 \mid x_0^2$.
Porém, como mdc $(x_0, y_0) = 1$ então segue que $x_0 = y_0 = 1$.
Assim, tem-se que a = 2.

15.2. PARTE B

1) 396. Dica: Note que todos os inteiros devem ser divididos por mmc(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) = 2520.

2) Dica: Use o fato que mdc (a, b) = mdc (a, a – b)

3) Dica: Se d = mdc (a, b), faça n = kd + 1, k = 1, 2, 3, 4, ...

4) $n \neq p^m$, onde p é primo e $m \geq 1$. Dica: Analise casos pequenos.

5) (2, 7), (3, 4), (6, 9). Dica: Se d = mdc (a, b), faça a = dx, b = dy, com mdc (x, y) = 1, e aplique em mdc (a, b).mmc (a, b) = a.b

6) $\frac{70}{37}$

7) $n \geq 37$. Dica: Fatore 1998.

8) 6009. Dica: Observe que 57 – 24 = 106 – 73 = 159 – 126.

9) A = 31 e B = 120. Dica: Demonstre que mdc (A, B) = 1.

10) 16. Dica: Divida 100 por 6.

11) Dica: Mostre que mdc (x, x + 5) = 1 ou 5. Depois demonstre que mdc (a, a + 5) = mdc (b, b + 5).

12) Não. Dica: Demonstre que se $n \neq p^k$, p primo, então mmc (1, 2, 3, ..., n − 1, n) = mmc (1, 2, 3, ..., n − 1), e se $n = p^k$ então mmc (1, 2, 3, ..., n − 1, n) = p.mmc (1, 2, 3, ..., n − 1)

13) Dica: Use o fato que mdc (aA, aB, bA, bB) = mdc (mdc(aA, aB), mdc (bA, bB))

14) n = 1, 2 ou 6. Dica: Prove que n + 2 deve ser potência de 2, n + 1 e n + 3 devem ser ambos primos ou deles primo e o outro potência de 3.

15) 42. Dica: 801 = 3 + 42 + 42 + ... + 42.

16) 7981. Dica: Use o fato que de $d \mid a$ e $d \mid b$ então $d \mid ax + by$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

17) Dica: Faça $a_k = k(101!) + 1$ para k = 1, 2, . . . , 100.

18) Dica: Prove que a + b + c = d ou a + b + c = 2d. Analise cada caso.

19) 63. Dica: Todos os mdc's maiores que 19 múltiplos 37 ou 27 (ou ambos em apenas um caso: 999).

20) Se m + n é par: mdc = 12, se m + n é ímpar: mdc = 2. Dica: Se $s_n = 5^n + 7^n$, demonstre que, caso $n \geq 2m$, tem-se que $s_n = s_m s_{n-m} - 5^m 7^m s_{n-2m}$. Analise o que ocorre quando $m < n < 2m$.

21) Dica: Prove que o número ímpar central é primo com todos os outros.

22) 1, 2, 3, 4, 7, 11, 13, 14, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Dica: Prove que $d \mid 11$ ou $d \mid a + b + c$.

23) n = 13. Dica: Suponha que $\frac{4n-2}{n+5} = \frac{a^2}{b^2}$ e conclua que $4b^2 - a^2$ divide 22.

24) k = 2n, com mdc (n, 6) = 1, ou k = 6n, com mdc (n, 6) = 1, ou k = 18n, com mdc (n, 6) = 1, ou k = 54n, com mdc (n, 6) = 1.

25) (a, b) = (2, 170), (10, 34), (34, 10), (170, 2). Dica: Demonstre que $d \mid 2^k$, $k \leq 5$.

26) 3999999. Dica: Observe que 2000(2000m + n) − (m + 2000n) = = 3999999.m

27) 19. Dica: Utilize o algoritmo de Euclides e demonstre que mdc (x_{n+2}, x_{n+1}) = mdc (x_{n+1}, x_n)

28) 15/16. Dica: Demonstre que para maximizar S deve-se ter $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ e $d = 8$.

29) $p = 109$

30) Dica. Fazendo mdc $(a, b) = d$ mostre que $n = d\left(\frac{a}{d} - 1\right)\left(\frac{b}{d} - 1\right)$ e depois analise as paridades de a e b.

31) Dica: Demonstre que mdc $(n, n^2 - 1) = 1$ e assim deveria ocorrer que $n = a^k$ e $n^2 - 1 = b^k$, com $k > 1$ e $a.b = m$.

32) 70

33) Sim, é possível. Fica: Tome uma PA na qual $a_1 = 100! + 1$ e $r = 100!$.

34) Dica: Demonstre que $a + b$ é divisível por d^2.

DIVISORES

16.1. PARTE A

1)

Observando que no ano n é realizada a $(n - 1978)$-ésima OBM, temos que o ano n é super-olímpico se, e somente se, $n - 1978$ divide n. Assim, $n - 1978$ divide $n - (n - 1978) = 1978$. Como os divisores positivos de 1978 são 1, 2, 23, 43, 46, 86, 989 e 1978, os anos super-olímpicos são 1979, 1980, 2001, 2021, 2024, 2064, 2967 e 3956.

2)

Seja p um número primo maior que 3. Vamos mostrar que $n = 6p$ satisfaz o enunciado.

Os divisores positivos de 6p, excluindo o próprio 6p, são: 1, 2, 3, p, 6, 2p, 3p.

Note agora que a soma destes divisores é igual a $6p + 12$ e como existem infinitos números primos então temos infinitos números naturais n com a propriedade requerida.

3)

Digamos que x pode assumir qualquer valor inteiro positivo. Seja n um número ambicioso, e designemos por k a quantidade de dígitos de n. Assim, escrever n à direita de x é o mesmo que escrever $[xn] = x.10^k + n$.

Como $n \mid (x.10^k + n) \Rightarrow n \mid x.10^k$

Entretanto x pode assumir qualquer valor inteiro positivo, implicando que não exista um $n \geq 2$ que divida todos os valores que x pode assumir.

Assim: $n \mid x.10^k \Rightarrow n \mid 10^k \Rightarrow n \mid 2^k5^k$

Concluímos, então, que os números ambiciosos são os divisores positivos de 2^k5^k, k um inteiro positivo. A forma geral de um número ambicioso seria $n = 2^x5^y$, x e y números naturais.

Os 10 primeiros são 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 200, ...

4)

Considere o número $N = [x1995]$, onde x representa os primeiros dígitos de N.

Assim: $N = x.10^4 + 1995$.

Como $x \mid N$ e $1995 = N - x.10^4$ então $x \mid 1995$.

Desde que $1995 = 3.5.7.19$ então temos 16 divisores positivos de 1995, que são todos os valores que podem assumidos por x.

Portanto, os 16 inteiros N que satisfazem o enunciado são:

11995, 31995, 51995, 71995, 191995, 151995, 211995, 571995, 351995, 951995, 1331995, 1051995, 2851995, 66514995, 3991995, 19951995.

5)

Como $d(n^2) = 63 = (8 + 1)(6 + 1) = (20 + 1)(2 + 1) = (62 + 1) =$
$= (2 + 1)(2 + 1)(6 + 1)$, podemos ter as seguintes possibilidades:
$n^2 = (83)^6.2^8$ ou $n^2 = (83)^2.(2)^{20}$ ou $n^2 = (83)^{62}$ ou $n^2 = 2^6.3^2.83^2$
Assim, o menor valor de n é $n = 2^3.3.83$

6)

Trabalhemos, inicialmente com os menores primos
Como entre os divisores de n temos 10 inteiros consecutivos, então entre eles existe um múltiplo de 7, dois múltiplos de 5, 3 múltiplos somente de 3, um múltiplo de 9
Tentemos organizar n de modo que estes inteiros consecutivos sejam os menores inteiros consecutivos:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Assim, temos que $n = 2^x.3^y.5^z.7^w$.
Para satisfazer ii) temos que os valores mínimos dos expoentes devem ser: $w_{min} = 1$, $z_{min} = 1$, $x_{min} = 3$, $y_{min} = 2$
Lembrando que $144 = 2^4.3^2$, podemos agora organizar a conta dos divisores positivos de n, de modo que n tenha o menor valor possível, das seguintes formas:

i) $d(n) = (1 + 3)(1 + 3)(1 + 2)(1 + 2) \Rightarrow n = 2^3.3^3.5^2.7^2 = 264600$
ii) $d(n) = (1 + 5)(1 + 5)(1 + 1)(1 + 1) \Rightarrow n = 2^5.3^5.5.7 = 272160$
iii) $d(n) = (1 + 8)(1 + 3)(1 + 1)(1 + 1) \Rightarrow n = 2^8.3^3.5.7 = 241920$
iv) $d(n) = (1 + 11)(1 + 2)(1 + 1)(1 + 1) \Rightarrow n = 2^{11}.3^2.5.7 = 321930$
v) $d(n) = (1 + 7)(1 + 2)(1 + 2)(1 + 1) \Rightarrow n = 2^7.3^2.5^2.7 = 201600$
vi) $d(n) = (1 + 5)(1 + 3)(1 + 2)(1 + 1) \Rightarrow n = 2^5.3^3.5^2.7 = 151200$

Outras decomposições são possíveis, entretanto levam a maiores valores de n. Assim, o menor valor de n é $n = 151200$

7)

Um quadrado perfeito sempre tem um número ímpar de divisores, pois há pares de números cujo produto é o quadrado perfeito dado e mais um número, a sua raiz.

Se o quadrado perfeito n for ímpar, então todos os seus divisores são ímpares, e assim será sua soma. Logo a soma não pode ser $2n$, pois $2n$ é par.

Se o quadrado perfeito n for par, então é igual a uma potência de 2 vezes o quadrado de um ímpar. Os divisores ímpares de n são divisores desse quadrado e, como já vimos, sua soma (de todos os divisores ímpares de n) é ímpar e logo a soma de todos os divisores de n também é ímpar, não podendo ser igual a $2n$, que é par.

Portanto nenhum quadrado perfeito tem a propriedade P.

8)
Façamos $n = 2^k \cdot b$, com b ímpar. Seja $d(m)$ a quantidade de divisores de m. Queremos resolver a equação $d(n \cdot 2^n) = 2008 + d(n)$. Um divisor de $n \cdot 2^n$ é um número da forma $2^\alpha \cdot x$, em que $0 \le \alpha \le k + n$ e x é um divisor de b. Há $(k + n + 1)$ modos de escolhermos α e $d(b)$ modos de escolhermos x. Logo, $d(n \cdot 2^n) = (k + n + 1) \cdot d(b)$. De modo análogo, cada divisor de n é da forma $2^\beta \cdot y$. Podemos escolher β de $k + 1$ modos e escolher y de $d(b)$ modos. Com isso, obtemos:
$d(n \cdot 2^n) = \mathbf{(k + n + 1) \cdot d(b)} = 2008 + d(n) = \mathbf{2008 + (k + 1) \cdot d(b)}$.
Daí, $n \cdot d(b) = 2008$, de onde concluímos que n é um divisor de $2008 = 2^3 \cdot 251$. Além disso, como b é um divisor ímpar de n, devemos ter $b = 1$ ou $b = 251$ (pois os fatores primos de n estão dentre os de 2008).
- Se $b = 1$, ficamos com $d(b) = 1$ e $n = 2008$. Neste caso, $n = 2^3 \cdot 251^1$ possui $4 \cdot 2 = 8$ divisores e $n \cdot 2^n = 2^{2011} \cdot 251$, que possui $2012 \cdot 2 = 4024$ divisores, possuindo 4016 divisores a mais que n (absurdo).
- Se $b = 251$, obtemos $d(b) = 2$ e $n = 1004$. Neste caso, $n = 2^2 \cdot 251^1$ possui $3 \cdot 2 = 6$ divisores e $n \cdot 2^n = 2^{1006} \cdot 251$, que possui $1007 \cdot 2 = 2014$ divisores, possuindo 2008 divisores a mais que n.

Portanto, $n = 1004$ e a soma de seus dígitos é $1 + 4 = 5$.

9)
a) Sabemos que se n é dado na forma canônica $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$ então $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_r + 1)$.
Para que d(n) seja ímpar então cada termo $a_i + 1$ deve ser ímpar, implicando que a_i é sempre par.
Como os expoentes de cada p_i na fatoração de n é par, então uma condição necessária e suficiente para que d(n) seja ímpar é que n seja um quadrado perfeito.
b) Se n não é um quadrado perfeito então d(n) é par. Como $44^2 < 2002 < 45^2$, então entre 1 e 2002 existem 44 quadrados perfeitos. Assim, a expressão $d(1) + d(2) + d(3) + \ldots + d(2002)$ é composto de 44 termos ímpares e 1948 termos pares. Como existe uma quantidade par de termos ímpares, então $d(1) + d(2) + d(3) + \ldots + d(2002)$ é par.
c) Pelo raciocínio do item anterior, $d(1) + d(2) + d(3) + \ldots + d(n)$ vai ser par quando existir um número par de termos d(k) ímpares, ou seja, quando existir entre 1 e n uma quantidade par de quadrados perfeitos. Em outras palavras, $d(1) + d(2) + d(3) + \ldots + d(n)$ vai ser par quando a parte inteira do número $\sqrt{n}$ for par.

10)
Suponhamos que <u>n</u> é um número natural tal que s(n) seja ímpar.

Seja $n = 2^{a}k$, onde k é um número ímpar e a é um número não negativo. Assim $s(n) = (2^{a+1} - 1)s(k)$ e consequentemente $s(k)$ deve ser um número ímpar.

Como k é um número ímpar então cada divisor de k é ímpar, e para que a sua soma seja ímpar o seu número de divisores $d(k)$ também deve ser ímpar.

Como $d(k) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_n + 1)$, para que este valor seja ímpar então cada α_i deve ser par

Assim, k deve ser o quadrado de um número natural, $k = m^2 \Rightarrow$
$k = 2^{a}m^2$

Se a é par, $a = 2\beta \Rightarrow n = (2^{\beta}m)^2$

Se a é ímpar, $a = 2\beta + 1 \Rightarrow n = 2(2^{\beta}m)^2$

Deste modo, para que a soma dos divisores positivos de n seja ímpar, então n deve ser o quadrado de um número natural ou duas vezes o quadrado de um número natural.

11)

Seja $n = 2^{a1}.3^{a2}.5^{a3}\ldots p_r^{ar}$, onde $a_i \geq 0$, ou seja, se $a_i = 0$ então o primo p_i não pertence à fatoração de n.

Sabemos que $\sigma(n) = (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{a1})(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{a2})(1 + 5 + \ldots + 5^{a3})\ldots(1 + p_i + \ldots + p_i^{ar})$

Analisando somente os termos com primos ímpares, notamos que para $\sigma(n)$ ser ímpar a quantidade de termos ímpares no somatório deve ser ímpar. Como esta quantidade é igual a $a_i + 1$ (note que começamos a contar de 1, ou seja, p_i^0), assim temos que os expoentes a_i dos primos ímpares são pares (inclusive podendo valer 0).

Notemos que n não pode ser uma potência de 2, uma vez que se
$n = 2^k \Rightarrow \sigma(n) = 2^{k+1} - 1 = 2n - 1$.

Assim temos que certamente existem primos ímpares na fatoração de n.

Sendo $n = 2^{a1}.3^{a2}.5^{a3}\ldots p_r^{ar}$, temos que $\sigma(n) = (2^{a1+1} - 1)m^2$, onde m é ímpar.

Suponhamos que n seja divisível por 2, ou seja, que $a_1 \geq 1$.

Desde que $m^2 = 4y + 1$, $2^{a1+1} - 1 = 4x - 1$ e $(4x - 1)(4y + 1) = 4k - 1$, então o termo $2^{a1+1} - 1$ faria com que o produto total fosse da forma $4k - 1$ (ou $4k' + 3$).

Para que $2n + 1$ seja da forma $4k' + 3$ temos que n tem que ser ímpar, que é um absurdo, pois supomos que n é par.

Assim n não possui 2 como fator e todos os fatores primos ímpares possuem expoentes pares, implicando que n é o quadrado de um inteiro ímpar.

12)

Os divisores comuns de $10^{40} = 2^{40}.5^{40}$ e $20^{30} = 2^{60}.5^{30}$ dividem o mdc entre esses números.
Como mdc $(10^{40}, 20^{30}) = 2^{40}.5^{30}$ a quantidade de divisores positivos comuns é $(40 + 1)(30 + 1) = 1271$

13)
Seja n um número natural ímpar. Vamos calcular o número de triângulos retângulos de lados inteiros nos quais n é medida de um dos catetos. Para isso, devemos ter $n^2 + x^2 = y^2 \Rightarrow n^2 = (y - x)(y + x)$, com x e y inteiros positivos, $x < y$.
Observe que $(y - x) < (y + x)$. Se fizermos $(y - x) = d$, com d um divisor de n^2, d será menor que n e $(y + x) = n^2/d$ será maior que n. Para qualquer d satisfazendo estas condições, podemos encontrar uma solução:

$$\begin{cases} y - x = d \\ y + x = \dfrac{n^2}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n^2}{d} - d\right) \\ \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n^2}{d} + d\right) \end{cases}$$

Estas soluções são inteiras e positivas, pois n é ímpar (logo d também), e $d < n$. Portanto, o número de triângulos retângulos é o número de divisores de n^2 menor que n. Mas para cada divisor de n^2 menor que n, corresponde um divisor maior que n. Lembrando que n é também um divisor, concluímos que o número procurado é $1/2\,(d(n^2) - 1)$, onde $d(n)$ é o número de divisores positivos de n. Portanto, é necessário e suficiente que n^2 seja um número ímpar com $d(n^2) = 2 \times 1997 + 1 = 3995$ divisores.
Uma das várias possibilidades para n^2 ter 3995 divisores é ser da forma p^4q^{798}, com p e q primos distintos. Neste caso, $n = p^2q^{399}$, possui $d(n) = (2 + 1)\times(399 + 1) = 1200$ divisores.

14)
Se n possui somente um fator primo, então $n = p^a$, onde p é um primo ímpar.

Assim, $\sigma(n) = \dfrac{p^{a+1} - 1}{p-1} = \dfrac{p^{a+1}}{p-1} - \dfrac{1}{p-1} < \dfrac{p^{a+1}}{p-1} = p^a\left(\dfrac{p}{p-1}\right) < 2p^a = 2n$, que é absurdo, pois para que n seja um número perfeito temos que $\sigma(n) = 2n$.
Se n possui somente dois fatores primos ímpares p e q, então $n = p^a.q^b$, nós temos:

$$\sigma(n) = \sigma(p^a).\sigma(q^b) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1}.\frac{q^{b+1}-1}{q-1} = \left(\frac{p^{a+1}}{p-1} - \frac{1}{p-1}\right)\left(\frac{q^{b+1}}{q-1} - \frac{1}{q-1}\right) < \frac{p^{a+1}}{p-1}.\frac{q^{b+1}}{q-1}$$

Assim:

$$\sigma(n) < p^a\left(\frac{p}{p-1}\right)q^b\left(\frac{q}{q-1}\right) = p^a q^b\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{q}{q-1}\right) \le n\left(\frac{3}{3-1}\right)\left(\frac{5}{5-1}\right) = \frac{15n}{8} < 2n$$

Onde surgiu novamente um absurdo, pois se n é um número perfeito, $\sigma(n) = 2n$

Deste modo, se n é um número perfeito ímpar, então ele possui ao menos 3 fatores primos distintos.

15)

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n} \Rightarrow xy = nx + ny \Rightarrow xy - nx - ny + n^2 = n^2 \Rightarrow$

$(x - n)(y - n) = n^2$.

Portanto, o número de pares ordenados (x, y) de inteiros positivos tais que $1/x + 1/y = 1/n$ é igual ao número de formas de fatorarmos n^2 como $d_1.d_2$ (d_1 e d_2 inteiros positivos que são divisores de n^2) de modo que $x - n = d_1$ e $y - n = d_2$.

Por outro lado sabemos que o número de formas de encontrarmos d_1 (note que depois de escolhermos d_1 o valor de d_2 já está determinado) é igual ao número de divisores positivos de n^2. Assim, $p(n) = d(n^2)$.

Para $n = 1995 = 3.5.7.19 \Rightarrow n^2 = 3^2.5^2.7^2.19^2 \Rightarrow$

$p(1995) = d(1995^2) = (2 + 1)(2 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 3^4 = 81$.

b) Se n for composto, ou seja, $n = a.b$, temos que $n^2 = a^2b^2$, implicando que $d(n^2) \ge 9$.

Portanto, necessariamente n deve ser primo, uma vez que se $n = p$, $d(p^2) = 3$.

16)

Note que, para p primo e α inteiro positivo, a única solução para $p^\alpha = \alpha + 1$ é $p = 2$ e $\alpha = 1$.

Assim, sendo n dado pela sua fatoração canônica $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ tem-se que $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_r + 1)$

Logo, tem-se $d(n) = n$ apenas quando $n = 2$. Para $n > 2$ tem-se que $d(n) < n$, ou seja, a sequência n, d(n), d(d(n)), ... é estritamente decrescente se $n > 2$, enquanto que é constante se $n = 2$.

Além disso, 2 é o limite inferior da sequência para $n > 2$. Assim, a partir de um certo termo a sequência ficará constante, da forma: ..., 2, 2, 2, 2, 2, ...

Por outro lado, sabe-se que um número inteiro positivo possui exatamente dois divisores positivos somente quando é primo. Assim, o

termo anterior ao primeiro 2 da sequência deve ser um número primo ímpar: ..., p, 2, 2, 2, 2, 2, ...
O termo anterior de p é tal que $d(m) = p$. Sabe-se que um número inteiro positivo possui um número ímpar de divisores positivos somente quando é um quadrado perfeito. A sequência fica da forma:
..., k^2, p, 2, 2, 2, 2, 2, ...
Portanto, a sequência n, $d(n)$, $d(d(n))$, ... não possui um quadrado perfeito somente quando n é um número primo.

17)
Evidentemente sabemos que $T(n) = n(n + 1)/2$.
Considere a expressão:
$D(2^n) = d(1) + d(3) + \ldots + d(2^n - 1) + d(2) + d(4) + \ldots + d(2^n) \Rightarrow$
$D(2^n) = 1 + 3 + \ldots + (2^n - 1) + d(1) + d(2) + \ldots + d(2^{n-1}) \Rightarrow$
$D(2^n) = 1 + 3 + \ldots + (2^n - 1) + D(2^{n-1})$
Assim: $1 + 3 + \ldots + (2^n - 1) = (2^n - 1 + 1)(2^n - 1 + 1)/4 \Rightarrow$
$1 + 3 + \ldots + (2^n - 1) = 2^{2n-2}$.
Desta forma $D(2^n) = D(2^{n-1}) + 2^{2n-2}$.
Agora, $D(2^1) = 2$ e vamos provar por indução que $D(2^n) = (2^{2n} + 2)/3$, $n \geq 0$.
Notemos que é válido para $n = 0$ e $n = 1$. Suponhamos que é válido para $n = k$, ou seja, existe um k tal que
$D(2^k) = (2^{2k} + 2)/3$.
Então: $D(2^{k-1}) = D(2^k) + 2^{2k} = (2^{2k} + 2)/3 + 2^{2k} = [4(2^{2k}) + 2]/3 \Rightarrow$
$D(2^{k+1}) = (2^{2k+2} + 2)/3$, e assim o resultado segue por indução.
Considere agora $D(2^n - 2)$
$\therefore D(2^n - 2) = D(2^n) - d(2^n - 1) - d(2^n) = (2^{2n} + 2)/3 - (2^n - 1) - 1 =$
$= (2^{2n} + 2)/3 - 2^n = [2^{2n} - 3(2^n) + 2]/3 \Rightarrow D(2^n - 2) = (2^n - 1)(2^n - 2)/3$.
Desta forma, para $x = 2^n - 2$ temos que $D(x) = x(x + 1)/3 \Rightarrow$
$3D(x) = 2x(x + 1)/2 \Rightarrow 3D(x) = 2T(x)$
Ou seja, existem infinitos números que satisfazem $3D(x) = 2T(x)$.

18)
Suponhamos que $a = p^i.q^j.r^k$ e $b = p^x.q^y.r^z$. Assim, deve-se ter:
$(i + 1)(j + 1)(k + 1) = (x + 1)(y + 1)(z + 1)$ e
$(2i + 1)(2j + 1)(2k + 1) = (2x + 1)(2y + 1)(2z + 1)$
Fazendo $i = 1$, $j = 8$ e $k = 12$, tem-se:
$(i + 1)(j + 1)(k + 1) = 2.9.13 = 2.3^2.13$
$(2i + 1)(2j + 1)(2k + 1) = 3.17.25 = 3.5^2.25$
Logo, pode-se fazer $x = 2$, $y = 2$ e $z = 25$, onde
$(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 3.3.26 = 2.3^2.13$
$(2x + 1)(2y + 1)(2z + 1) = 5.5.51 = 3.5^2.25$
Além disso, $d(a^3) = 3700$ e $d(b^3) = 3724$.

Assim, $a = p.q^8.r^{12}$ e $b = p^2.q^2.r^{25}$ satisfaz o enunciado.

19)

Note que $n^{d(n)}$ sempre é um quadrado perfeito, uma vez que $d(n)$ é ímpar somente quando n é um quadrado perfeito e quando $d(n)$ é par segue diretamente que $n^{d(n)}$ é um quadrado perfeito.

Assim, $n^{d(n)} = m^2 \Rightarrow (m-1)(m+1) = p^k$

i) Se $p = 2$: $m - 1 = 2^a$ e $m + 1 = 2^b \Rightarrow 2^b - 2^a = 2 \Rightarrow 2^{b-1} - 2^{a-1} = 1 \Rightarrow b = 2$ e $a = 1 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow n^{d(n)} = 9 = 3^2 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow (n, k, p) = (3, 3, 2)$

ii) Se p é ímpar: $m - 1 = 1$ e $m + 1 = p^k \Rightarrow p^k - 1 = 2 \Rightarrow p^k = 3 \Rightarrow p = 3$ e $k = 1 \Rightarrow n^{d(n)} = 4 = 2^2 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow (n, k, p) = (2, 1, 3)$

20)

Suponhamos inicialmente que n é par.

Vamos usar o seguinte resultado:

"Se <u>n</u> é um número perfeito par, então $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ onde $2^k - 1$ é primo."

Como 7 é primo, então $2^k - 1 = 7 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow n = 28$, que não serve pois $n > 28$.

Analisemos agora o caso em que n é ímpar.

Escrevendo n na forma fatorada: $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}$, sabemos que a soma dos divisores positivos de n é igual a

$\sigma(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + ... + p_1^{k_1})(1 + p_2 + p_2^2 + ... + p_2^{k_2})...(1 + p_r + p_r^2 + ... + p_r^{k_r})$.

Para que um número seja perfeito temos que $\sigma(n) = 2n$.

Se n é divisível por 7 e não por 49, fazendo $p_1 = 7$, então $\sigma(n) = (1 + 7).K = 8K$, onde K é um inteiro positivo. Como $\sigma(n) = 2n \Rightarrow 8K = 2n \Rightarrow n = 4K$, que é um absurdo, pois n é ímpar.

Deste modo, se n é divisível por 7, então n é divisível por 49.

21)

a) $n = 7 \Rightarrow n^2 - 1 = 48 = 2^4.3 \Rightarrow d(n^2 - 1) = (4 + 1)(1 + 1) = 10$

b) Apenas os números da forma p^9 e $p^4.q$, com p e q primos, possuem número de divisores positivos igual a 10.

Suponhamos que $n^2 - 4 = p^9 \Rightarrow (n-2)(n+2) = p^9$

Como mdc $(n - 2, n + 2) = 1$ ou 2 ou 4 então necessariamente $p = 2 \Rightarrow n^2 - 4 = 2^9 \Rightarrow n^2 = 516 \Rightarrow n \notin IN$

Suponha agora que $n^2 - 4 = p^4.q \Rightarrow (n-2)(n+2) = p^4.q$

Se n é par então $n - 2$ é par e $n + 2$ é par $\Rightarrow p = 2 \Rightarrow n - 2 = 4$ e $n + 2 = 4q \Rightarrow 4q - 4 = 4 \Rightarrow q = 2$, que é uma contradição, pois $q \neq 2$.

Se n é ímpar então mdc (n − 2, n + 2) = 1 e assim tem-se duas possibilidades:

i) $n - 2 = p$ e $n + 2 = q^4 \Rightarrow q^4 - p = 4 \Rightarrow p = (q^2 - 2)(q^2 + 2) \Rightarrow$
$q^2 - 2 = 1 \Rightarrow q \notin \mathbb{N}$

ii) $n + 2 = p$ e $n - 2 = q^4 \Rightarrow p - q^4 = 4 \Rightarrow$
$p = q^4 + 4 = (q^2 - 2q + 2)(q^2 + 2q + 2) \Rightarrow q^2 - 2q + 2 = 1 \Rightarrow$
$(q - 1)^2 = 0 \Rightarrow q = 1$, que é um absurdo, pois q é primo

22)

Seja p o menor divisor primo de n. Assim, tem-se que $p \geq n - 20$ e $\frac{n}{p} \leq n - 10$.

Desde que p é o menor divisor primo de p e n é composto tem-se que
$p + 20 \geq n \geq p^2 \Rightarrow p^2 - p - 20 \leq 0 \Rightarrow (p + 4)(p - 5) \leq 0 \Rightarrow$
$-4 \leq p \leq 5 \Rightarrow p = 2, 3$ ou 5

i) $p = 2$:

$n \leq p + 20 \Rightarrow n \leq 22$

$\frac{n}{p} \leq n - 10 \Rightarrow \frac{n}{2} \leq n - 10 \Rightarrow n \geq 20$

Testando, conclui-se que n = 20 e n = 22 satisfazem o enunciado

ii) $p = 3$:

$n \leq p + 20 \Rightarrow n \leq 23$

$\frac{n}{p} \leq n - 10 \Rightarrow \frac{n}{3} \leq n - 10 \Rightarrow n \geq 15$

Testando, conclui-se que n = 15 e n = 21 satisfazem o enunciado

iii) $p = 5$:

$n \leq p + 20 \Rightarrow n \leq 25$

$\frac{n}{p} \leq n - 10 \Rightarrow \frac{n}{5} \leq n - 10 \Rightarrow n \geq 12{,}5$

Testando, conclui-se que n = 25 satisfaz o enunciado

Desta forma, os números 15, 20, 21, 22 e 25 satisfazem o enunciado

23)

$N = m + (m + 1) + (m + 2) + \ldots + (m + 1989) = 995(2m + 1989) \Rightarrow$
$5 \mid N$, $199 \mid N$ e N é ímpar

$N = n + (n + 1) + (n + 2) + \ldots + (n + k) \Rightarrow 2N = (k + 1)(2n + k)$

Desde que N é ímpar então 2 divide exatamente um dos valores k + 1 ou 2n + k.

Claramente tem-se que $k + 1 < 2n + k$. Sabe-se que todo número composto pode ser fatorado como produto de dois números, sendo um

deles menor ou igual a sua raiz quadrada. Desta forma, tem-se que $k+1 \le \sqrt{2N}$.
Logo, o número de maneiras de fatorar 2N como $(k+1)(2n+k)$ é igual a $\frac{d(2N)}{2} - 1$.

Assim: $\frac{d(2N)}{2} - 1 = 1990 \Rightarrow d(2N) = 3982 = 2.11.181 \Rightarrow$

2N possui no máximo 3 divisores primos

Uma vez que 2, 5 e 199 dividem 2N então $2N = 2^a.5^b.199^c$.

Como N é ímpar tem-se que a = 1: $2N = 2.5^b.199^c$.

Como $d(2N) = (1+1)(10+1)(180+1)$ então tem-se duas possibilidades: $N = 5^{10}.199^{180}$ e $N = 5^{180}.199^{10}$.

24)

Seja $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_m^{a_m}$ onde $p_1, p_2, ..., p_m$ são os m fatores primos de n e $a_1, a_2, ..., a_m$ são os expoentes destes primos.

Assim, o número de divisores positivos é $d(n) = (a_1+1)(a_2+1)...(a_m+1)$

Pelo enunciado $n = [(a_1+1)(a_2+1)...(a_m+1)]^4$, ou seja, cada expoente a_i $(1 \le i \le m)$ é divisível por 4.

Façamos $a_i = 4b_i$ $(1 \le i \le m) \Rightarrow$

$n = p_1^{4b_1}p_2^{4b_2}...p_m^{4b_m} = [(4b_1+1)(4b_2+1)...(4b_m+1)]^4 \Rightarrow$

$n = p_1^{b_1}p_2^{b_2}...p_m^{b_m} = (4b_1+1)(4b_2+1)...(4b_m+1)$ (*)

Notemos que o número de termos em cada lado da igualdade é igual a m.

Note também que p_i é diferente de 2, pois $(4b_1+1)(4b_2+1)...(4b_m+1)$ é ímpar.

Observe agora que:

i) $3^1 < 4.1+1$ $3^2 = 4.2+1$ $3^3 > 4.3+1$ se $\alpha \ge 3$ então $3^\alpha > 4.\alpha+1$

ii) $5^1 = 4.1+1$ $5^2 > 4.2+1$ se $\beta \ge 2$ então $5^\beta > 4.\beta+1$

iii) se p um primo maior ou igual a 7 e k um inteiro positivo temos que $p^k > 4.k+1$

Como o número de termos de cada lado da expressão (*) é igual, para que o lado esquerdo não seja maior que o lado direito, as únicas possibilidades são:

i) $m = 1$ $p_1 = 3$ $b_1 = 2 \Rightarrow n = 3^8 \Rightarrow d(n) = 9 \Rightarrow [d(n)]^4 = 3^8$

ii) $m = 1$ $p_1 = 5$ $b_1 = 1 \Rightarrow n = 5^4 \Rightarrow d(n) = 5 \Rightarrow [d(n)]^4 = 5^4$

iii) $m = 2$, $p_1 = 2$ $b_1 = 2$ $p_2 = 5$ $b_2 = 1 \Rightarrow n = 3^8 5^4 \Rightarrow d(n) = 9.5 \Rightarrow [d(n)]^4 = 3^8 5^4$

Desta forma, temos que $n = \{3^8, 5^4, 3^8 5^4\}$.

25)

I) $d(n) = 16 = 2^4 = (1+1)^4 = (3+1).(3+1) = (3+1)(1+1)(1+1)$

Assim o número n pode ser de uma das seguintes formas:
i) n = a.b.c.d, com a, b, c e d primos.
Entretanto, $d_6 = 18 = 2.3^2$, implicando que 3^2 divide n, que é impossível para este caso.
ii) $n = a^3.b^3$, a e b primos, a > b.
Como um divisor é $d_6 = 2.3^2$, temos que a = 2 e b = 3, implicando que $n = 2^3.3^3 = 216$:
Conferindo os divisores temos: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 6$, $a_6 = 8$ que é impossível.
iii) $n = a^3.b.c$, com a, b e c primos:
Como um divisor é $d_6 = 2.3^2$, temos que a = 3 e b = 2. Assim, temos $n = 2.3^3.c$
Escrevendo os divisores de n temos:
1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, c, 2c, 3c, 6c, 9c, 18c, 27c, 54c
Notemos que para 18 ser o d_6, então c deve ser maior que 18 e primo com 2 e 3.
I) $19 \le c \le 26$: 1, 2, 3, 6, 9, 18, c, 27, 2c, 54, 3c, 6c, 9c, 18c, 27c, 54c
Assim, $d_9 - d_8 = 17 \Rightarrow 2c - 27 = 17 \Rightarrow 2c = 44 \Rightarrow c = 22$, impossível pois 22 não é primo.
II) $28 \le c \le 53$: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, c, 54, 2c, 3c, 6c, 9c, 18c, 27c, 54c
Assim, $d_9 - d_8 = 17 \Rightarrow 54 - c = 17 \Rightarrow c = 37 \Rightarrow n = 2.3^3.37 \Rightarrow$
n = 1998.
III) $c \ge 55$: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, c, 2c, 3c, 6c, 9c, 18c, 27c, 54c
Assim, $d_9 - d_8 = 17 \Rightarrow c - 54 = 17 \Rightarrow c = 71 \Rightarrow n = 2.3^3.71 \Rightarrow$
n = 3834.

26)
Observemos inicialmente que se $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ (p_i primos distintos) então $d(n) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_k)$.

Assim, $d(n^2)/d(n) = \dfrac{(1+2\alpha_1)(1+2\alpha_2)\dots(1+2\alpha_k)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_k)}$. Como o numerador é ímpar, se o resultado for inteiro deve ser ímpar (e todos os α_i devem ser pares).
Vamos mostrar que qualquer número natural ímpar é da forma desejada. Para isso, devemos mostrar que todo número ímpar pode ser escrito como produto de frações da forma $\dfrac{2r+1}{r+1}$, $r \in N$, não necessariamente distintas. Faremos isso por indução. Seja m um número ímpar, e seja 2^s a maior potência de 2 que divide m + 1.
Temos portanto $m = 2^{s+1}q + 2^s - 1$ para algum $q \in N$, donde

$$m = \frac{m(2^s - 1)}{2^s - 1} = \frac{2^{2s}(2q+1) - 2^{s+1}(q+1) + 1}{2^s - 1} = \frac{2^{2s}(2q+1) - 2^{s+1}(q+1) + 1}{2^{2s-1}(2q+1) - 2^s(q+1) + 1} \times$$
$$\times \frac{2^{2s-1}(2q+1) - 2^s(q+1) + 1}{2^{2s-2}(2q+1) - 2^{s-1}(q+1) + 1} \times \cdots \times \frac{2^{s+1}(2q+1) - 4(q+1) + 1}{2^s(2q+1) - (2q+1)} \times (2q+1).$$

Como $2q + 1 < 2^{s+1} q + 2s - 1 = m$, por hipótese de indução, $2q + 1$ se escreve como produto de frações da forma $\frac{2r+1}{r+1}$, e portanto m também.

27)

$n = d_{13} + d_{14} + d_{15} \Rightarrow \frac{1}{\frac{n}{d_{13}}} + \frac{1}{\frac{n}{d_{14}}} + \frac{1}{\frac{n}{d_{15}}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, onde $x = \frac{n}{d_{13}}$, $y = \frac{n}{d_{14}}$ e $z = \frac{n}{d_{15}}$ são inteiros, pois d_{13}, d_{14} e d_{15} são divisores de n.

Como x, y e z são distintos somente temos a solução: $x = 2, y = 3, z = 6$

Assim, $n = 2.3.d_{13}$, $n = 3.d_{14}$ e $n = 2.d_{15}$

Como $n = 2.d_{15}$, e o maior divisor de n depois do próprio n é $n/2$, temos que o número de divisores positivos de n é 16 ($n = d_{16}$).

Como $d_{13} = \frac{n}{2.3}$, então a potência de 2 em n é 1, pois senão o d_{13} seria igual a $d_{13} = \frac{n}{2^2}$.

Podemos escrever o número de divisores positivos d(n) das seguintes formas:

$d(n) = 16 = (1 + 3)(1 + 3) = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 3) = (1 + 1)(1 + 7) = (1 + 15)$

Ou seja, n pode ser das seguintes formas: $n = a^3.b^3$ ou $a.b.c.d$ ou $a.b.c^3$ ou $a.b^7$ ou a^{15}

Como 2 e 3 são fatores primos de n então não pode ser da forma a^{15}

Como a potência de 2 em n é 1 então $a^3.b^3$ também não é possível.

i) $n = a.b.c.d$, onde podemos fazer, sem perda de generalidades,
$a = 2$ e $b = 3 \Rightarrow n = 2.3.c.d$

Separemos agora em dois casos:

I) $c = 5$, onde os divisores positivos de n podem ser colocados em ordem crescente, da seguinte forma:

$d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 5$, $d_5 = 6$, ..., $d_{15} = n/2 = 15d$, $d_{16} = n = 2.3.5.d$

Assim, $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1 \Rightarrow 7^3 = 343 = 15d + 1 \Rightarrow 15d = 342 \Rightarrow$ d não pertence aos inteiros

II) $c > 5$, onde os divisores positivos de n podem ser colocados em ordem crescente, da seguinte forma:

$d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 6$, $d_5 = c$, ..., $d_{15} = n/2 = 3cd$, $d_{16} = n$
Assim, $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1 \Rightarrow (c + 1)^3 = 3cd + 1 \Rightarrow 3cd = c^3 + 3c^2 + 3c \Rightarrow$ $c^2 + 3c - 3(d - 1) = 0 \Rightarrow$ c é divisível por 3, que é impossível, pois c é um primo maior que 5.

ii) $n = a.b.c^3$, onde podemos fazer $a = 2$. Temos que separar novamente em outros casos:

I) $b = 3$ e $c = 5$, onde os divisores positivos de n podem ser colocados em ordem crescente, da seguinte forma:
$d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 5$, $d_5 = 6$, ..., $d_{15} = n/2 = 3.5^3$, $d_{16} = n = 2.3.5^3$
Assim, $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1 \Rightarrow 7^3 = 343 = 3.5^3 + 1 \Rightarrow 343 \neq 376 \Rightarrow$ $n = 2.3.5^3$ não satisfaz o enunciado.

II) $b = 3$ e $c > 5$, onde os divisores positivos de n podem ser colocados em ordem crescente, da seguinte forma:
$d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 6$, $d_5 = c$, ..., $d_{15} = n/2 = 3.c^3$, $d_{16} = 2.3.c^3$
Assim, $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1 \Rightarrow (c + 1)^3 = 3c^3 + 1 \Rightarrow c^3 + 3c^2 + 3c = 3c^3 \Rightarrow$ $2c^2 - 3c - 3 = 0 \Rightarrow$ c não é inteiro

III) $c = 3$ e $b = 5$, onde os divisores positivos de n podem ser colocados em ordem crescente, da seguinte forma:
$d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 5$, $d_5 = 6$, ..., $d_{15} = n/2 = 3^3.5$, $d_{16} = n = 2.3^3.5$
Assim, $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1 \Rightarrow 7^3 = 343 = 3^3.5 + 1 \Rightarrow 343 \neq 136 \Rightarrow$ $n = 2.3^3$ não satisfaz o enunciado.

IV) $c = 3$ e $b = 7$, onde os divisores positivos de n podem ser colocados em ordem crescente, da seguinte forma:
$d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 6$, $d_5 = 7$, ..., $d_{15} = n/2 = 3^3.7$, $d_{16} = 2.3^3.b$
Assim, $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1 \Rightarrow 8^3 = 27.7 + 1 \Rightarrow 512 \neq 190 \Rightarrow n = 2.3^3.7$ não satisfaz o enunciado

V) $c = 3$ e $b > 7 \Rightarrow$ onde os divisores positivos de n podem ser colocados em ordem crescente, da seguinte forma:
$d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 6$, $d_5 = 9$, ..., $d_{15} = n/2 = 3^3.b$, $d_{16} = 2.3^3.b$
Assim, $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1 \Rightarrow 10^3 = 3^3b + 1 \Rightarrow 27b = 999 \Rightarrow c = 37 \Rightarrow$ $n = 2.3^3.37 = 1998$ satisfaz o enunciado

iii) $n = a.b^7 \Rightarrow n = 2.3^7$, pois n é divisível por 2 e 3, sendo a potência de 2 em n igual a 1.
Os divisores positivos de n podem ser colocados em ordem crescente, da seguinte forma:
$d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 6$, $d_5 = 9$, ..., $d_{15} = n/2 = 3^7$, $d_{16} = n = 2.3^7$
Assim, $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1 \Rightarrow 10^3 = 3^7 + 1 \Rightarrow 1000 \neq 3^7 + 1 \Rightarrow$ $n = 2.3^7$ não satisfaz o enunciado
Desta forma, $n = 1998$ é o único inteiro positivo que satisfaz o enunciado.

28)

Sabe-se que $d_1 = \dfrac{n}{d_k}$, $d_2 = \dfrac{n}{d_{k-1}}$, ..., $d_k = \dfrac{n}{d_1}$.

Assim:

$$S = d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k = \frac{n^2}{d_kd_{k-1}} + \frac{n^2}{d_{k-1}d_{k-2}} + \ldots + \frac{n}{d_2d_1} =$$

$$= n^2\left(\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \ldots + \frac{1}{d_kd_{k-1}}\right) \Rightarrow$$

$$S \le n^2\left(\frac{d_2 - d_1}{d_1d_2} + \frac{d_3 - d_2}{d_2d_3} + \ldots + \frac{d_k - d_{k-1}}{d_{k-1}d_k}\right) =$$

$$= n^2\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}} - \frac{1}{d_k}\right) = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$S \le n^2 - n \Rightarrow S < n^2$

Suponhamos agora que $S \mid n^2$. Note que não poderemos ter $S = n^2$ uma vez que $S < n^2$.

Como $S \mid n^2$ segue que $x = \dfrac{n^2}{S}$ é também divisor de n^2.

Uma vez que d_2 é o menor divisor de n^2 maior que 1:

$$1 < d_2 \le x = \frac{n^2}{S} \le \frac{n^2}{d_{k-1}d_k} = \frac{n}{d_{k-1}} = d_2 \Rightarrow x = d_2 \Rightarrow S = d_{k-1}d_k = d_1d_2 \Rightarrow$$

$k = 2 \Rightarrow n$ é primo

Assim, se $S \mid n^2$ então n é pirmo.

16.2. PARTE B

1) Dica: Lembre-se que entre 12 inteiros consecutivos existe um que é divisível por 12.

2) 6, 8, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 27.

3) Dica: Como n e $n - 1$ são números consecutivos então um deles é par, tendo como divisores 2 e sua metade.

4) 60, 98, - 18, - 20

5) Dica: Prove que $d(n) = 2k$

6) 3. Dica: Demonstre que $12 \mid p^2 + 11$ para $p > 3$

7) 432

8) 240

9) 189

10) Dica: Note que todos os divisores de $24k - 1$ são da forma $24k \pm 1$, $24k \pm 5$, $24k \pm 7$, $24k \pm 11$.

11) 1680

12) Dica: Substitua $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$

13) 2301. Dica: Observe que os divisores positivos de 20^{30} que não dividem 10^{40} possuem a forma 2^m5^n com $41 \leq m \leq 60$ e $0 \leq n \leq 30$

14) Dica: Prove que $\sigma(25n^2) = \sigma(16n^2) = 31\sigma(n^2)$, com mdc $(n, 10) = 1$.

15) Dica: Faça $n = m^{m-1}$, $m \in IN^*$

16) 130. Dica: Prove que $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = p$ e $d_4 = 2p$.

17) Dica: Suponha que p^α está na fatoração do mmc. Demonstre que existe $2\alpha + 1$ possibilidades de distribuir p^α nas fatorações canônicas de u e v.

18) Todos os números primos, 4, 6, 8 e 9. Dica: Suponha que p é o menor divisor primo de n. Analise $n < 5p$.

19) Dica: Se $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$, demonstre que a soma dos divisores unitários é igual a $(p_1^{\alpha_1} + 1)(p_2^{\alpha_2} + 1)...(p_r^{\alpha_r} + 1)$.

20) 486. Dica: Para cada valor de b analise os possíveis valores de a.

21) 9. Dica: Demonstre que b é da forma $p_1.p_2$.

22) 672. Dica: Demonstre que $1! \times 2! \times 3! \times ... \times 9! = 2^{30} \times 3^{13} \times 5^5 \times 7^3$

23) 6, 8 e 12. Dica: Inicialmente demonstre que n deve ser par. Depois analise $\frac{n}{2} - 2 \mid n$.

24) 100, 200 ou 400.

25) Dica: Prove que a é par e que $n = 2^k$. Depois fatore $a^{2^k} - 1$ e mostre que cada parcela contribui com um distinto divisor primo.

26) 14

27) 112

28) 9. Dica: Demonstre que $a = p^2$ e $b = p.q$.

CONGRUÊNCIA

17.1. PARTE A

1)
$333...331 = a_n = (10^n - 7)/3$
$10^2 \equiv -2 \pmod{17} \Rightarrow 10^8 \equiv -1 \pmod{17} \Rightarrow 10^9 \equiv 7 \pmod{17}$ (1)
e $10^{16} \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow 10^{16k} \equiv 1 \pmod{17}$ (2)
Desta forma, multiplicando (1) e (2): $10^{16k+9} \equiv 7 \pmod{17}$

2)
i) $4 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 4^n \equiv (-1)^n \pmod{5}$
ii) $3 \equiv -2 \pmod{5} \Rightarrow 3^n \equiv (-2)^n \pmod{5}$
Então: $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1 + 2^n + (-2)^n + (-1)^n \pmod{5} \Rightarrow$
$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv [1 + (-1)^n] + [2^n + (-2)^n] \pmod{5}$
Se n é ímpar, então temos que $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ é divisível por 5.
Se n é da forma $n = 4k$, temos:
$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1 + 1 + 16^k + 16^k \pmod{5} \Rightarrow$
$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 2 + 2.16^k \pmod{5} \Rightarrow$
$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 2(1 + 16^k) \pmod{5}$
Como 16^k sempre termina em 6, então $16^k + 1$ sempre termina em 7, implicando que $(1 + 16^k)$ nunca vai ser divisível por 5.
Se n é da forma $n = 4k + 2$, temos:
$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1 + 1 + 4^{2k+1} + 4^{2k+1} \pmod{5} \Rightarrow$
$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 2 + 4.4^{2k} + 4.4^{2k} \pmod{5} \Rightarrow$
$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 2 + 8.16^k \pmod{5} \Rightarrow$
$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 2(1 + 4.16^k) \pmod{5}$
Como 16^k sempre termina em 6, implica que 4.16^k sempre termina em 4, implicando que $1 + 4.16^k$ termine em 5, implicando, finalmente, que $2(1 + 4.16^k)$ termine em 0, ou seja, $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ é divisível por 5 se n deixar resto 2 quando dividido por 4.
Assim, para $n = 1990$, $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ é divisível por 5.

3)
Calculando $1^2, 2^2, ..., 30^2$ mod. 31 temos que a soma de dois destes restos vai dar zero se e somente se os dois restos forem 0.
Ou seja, se 31 divide $a^2 + b^2 \Rightarrow a = 31a_1$ e $b = 31b_1 \Rightarrow$
$31^{1995} \mid 31^2(a_1^2 + b_1^2) \Rightarrow 31^{1993} \mid a_1^2 + b_1^2$
Analogamente $a_1 = 31a_2$ e $b_1 = 31b_2 \Rightarrow 31^{1993} \mid 31^2(a_2^2 + b_2^2) \Rightarrow$
$31^{1991} \mid a_2^2 + b_2^2$
Deste modo, chegaremos a uma hora em que $a = (31p)^{998}$ e

$b = (31p)^{998} \Rightarrow 31^{1996} \mid ab$

4)

Inicialmente observemos que $3840 = 2^2.3.317$

Como $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$, então $6 \mid n^3 - n$, faltando provar que $2.317 \mid 5^{8n+4} + 3^{4n+2}$

Como $5^{8n+4} + 3^{4n+2}$ é a soma de dois números ímpares, então $2 \mid 5^{8n+4} + 3^{4n+2}$

Como $5^4 + 3^2 = 634 = 2.317 \Rightarrow 5^4 + 3^2 \equiv 0 \pmod{317} \Rightarrow$

$5^4 \equiv -3^2 \pmod{317} \Rightarrow$

$(5^4)^{2n+1} \equiv (-3^2)^{2n+1} \pmod{317} \Rightarrow 5^{8n+4} \equiv -3^{4n+2} \pmod{317} \Rightarrow$

$5^{8n+4} + 3^{4n+2} \equiv 0 \pmod{317}$

5)

Notemos que $n^{n-1} - 1 = (n-1)(n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + \ldots + n^2 + n + 1)$

Basta provar agora que $n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + \ldots + n^2 + n + 1$ é divisível por $n - 1$.

Notemos que:

i) $n \equiv 1 \pmod{n-1} \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{n-1}$ $\quad n^3 \equiv 1 \pmod{n-1}$

$n^4 \equiv 1 \pmod{n-1}$ ...

$n^{n-3} \equiv 1 \pmod{n-1}$ $\quad n^{n-2} \equiv 1 \pmod{n-1}$

Então, somando estas congruências:

$n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + \ldots + n^2 + n + 1 \equiv 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + 1 \pmod{n-1} \Rightarrow$

$n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + \ldots + n^2 + n + 1 \equiv n - 1 \pmod{n-1} \Rightarrow$

$n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + \ldots + n^2 + n + 1 \equiv 0 \pmod{n-1}$

6)

$1 \equiv 1 \pmod{100}$

$11 \equiv 11 \pmod{100} \Rightarrow 11^{11} \equiv 11^{11} \pmod{100}$

$111 = 100.1 + 11 \Rightarrow 111 \equiv 11 \pmod{100} \Rightarrow 111^{111} \equiv 11^{111} \pmod{100}$

$1111 = 100.111 + 11 \Rightarrow 1111 \equiv 11 \pmod{100} \Rightarrow$

$1111^{1111} \equiv 11^{1111} \pmod{100}$ e assim por diante:

$1 + 11^{11} + 111^{111} + \ldots + 111111111^{111111111} \equiv$

$\equiv 1 + 11^{11} + 11^{111} + 11^{1111} + \ldots + 11^{111111111} \pmod{100}$

$\therefore 11^2 \equiv 21 \pmod{100} \Rightarrow (11^2)^2 \equiv 441 \pmod{100} \Rightarrow$

$11^4 \equiv 41 \pmod{100} \Rightarrow (11^4)^2 \equiv (41)^2 \pmod{100} \Rightarrow$

$11^8 \equiv 1681 \pmod{100} \Rightarrow 11^8 \equiv 81 \pmod{100} \Rightarrow$

$11^3(11^8) \equiv (1331)(81) \pmod{100} \Rightarrow$

$11^{11} \equiv 107811 \pmod{100} \Rightarrow 11^{11} \equiv 11 \pmod{100}$

$\therefore (11^{11})^{10} \equiv (11)^{10} \pmod{100} \Rightarrow 11^{110} \equiv 11^{10} \pmod{100} \Rightarrow$

$11(11^{110}) \equiv 11(11^{10}) \pmod{100} \Rightarrow 11^{111} \equiv 11^{11} \pmod{100} \Rightarrow$

$11^{111} \equiv 11 \pmod{100}$ e assim por diante. Portanto:

$11^{1111} \equiv 11 \pmod{100}$ $11^{11111} \equiv 11 \pmod{100}$ ... $11^{111111111} \equiv 11 \pmod{100}$

$1 + 11^{11} + 111^{111} + ... + 111111111^{111111111} \equiv$

$\equiv 1 + 11^{11} + 11^{111} + 11^{1111} + ... + 11^{111111111} \pmod{100} \Rightarrow$

$1 + 11^{11} + 111^{111} + ... + 111111111^{111111111} \equiv$

$\equiv 1 + 11 + 11 + 11 + ... + 11 \pmod{100} \Rightarrow$

$1 + 11^{11} + 111^{111} + ... + 111111111^{111111111} \equiv 1 + 9(11) \equiv 100 \pmod{100} \Rightarrow$

$1 + 11^{11} + 111^{111} + ... + 111111111^{111111111} \equiv 0 \pmod{100}$

7)

Sabemos que $2000 = 2.10^3$, implicando que $\sqrt{2000^{2000}} = 2000^{1000} = (2.10^3)^{1000} = 2^{1000}.10^{3000}$

Assim, $\sqrt{2000^{2000}}$ termina em 3000 zeros e o último dígito distinto de zero é igual ao dígito das unidades de 2^{1000}.

$2^1 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^2 \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow 2^3 \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow$
$2^4 \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 2^5 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^6 \equiv 4 \pmod{10}$

Assim, se $n = 4k$ (que é o caso de 2000) o dígito das unidades de 2^n é 6.
Portanto, andando da direita para a esquerda, o primeiro dígito não nulo de $\sqrt{2000^{2000}}$ é 6.

8)

I) $2222 \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 2222^{5555} \equiv 3^{5555} \pmod{7}$

$3^3 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow (3^3)^{1851} \equiv (-1)^{1851} \pmod{7} \Rightarrow$

$3^{5553} \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 3^{5553}.3^2 \equiv (-1).3^2 \pmod{7} \Rightarrow$

$3^{5555} \equiv -9 \pmod{7} \Rightarrow 2222^{5555} \equiv -9 \pmod{7}$

II) $5555 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 5555^{2222} \equiv 4^{2222} \pmod{7}$

$4^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow (4^3)^{740} \equiv (1)^{740} \pmod{7} \Rightarrow$

$4^{2220} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 4^{2220}.4^2 \equiv 1.4^2 \pmod{7} \Rightarrow 4^{2222} \equiv 16 \pmod{7} \Rightarrow$

$5555^{2222} \equiv 16 \pmod{7}$

Somando as duas congruências: $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv -9 + 16 \pmod{7} \Rightarrow$

$2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 7 \pmod{7}$

Ou seja, $7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$

9)

Veja que n é da forma 6k, pois $n - 1$ e $n + 1$ são primos maiores que 3, portanto da forma $6k - 1$ e $6k + 1$, respectivamente.

Logo, $n^2(n^2 + 16) = 144(9k^4 + 4k^2)$.

Resta provar que $9k^4 + 4k^2$ é um múltiplo de 5. Vamos analisar a igualdade acima módulo 5.

i) Se $k \equiv 0$, 2 ou 3 (mod 5), temos $9k^4 + 4k^2 \equiv 0 \pmod 5$;

ii) Se $k \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow n \equiv 1 \pmod 5$, temos $n - 1 \equiv 0 \pmod 5$, um absurdo;

iii) Se $k \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow n \equiv 4 \pmod 5$, temos $n + 1 \equiv 0 \pmod 5$, novamente um absurdo.
Isso conclui a demonstração. A recíproca não é verdadeira. Basta tomar, por exemplo, $n = 90$.

10)
Desde que 2^b é par então b também deve ser par.
$2^4 \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4k} \equiv 6^k \pmod{10} \Rightarrow 2^{4k} \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow$
$2^{4k+1} \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4k+2} \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4k+3} \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow$
$2^{4k+4} \equiv 6 \pmod{10}$.
Desde que $2^{4k} \equiv 2^{4k+4} \pmod{10}$, então o algarismo das unidades de 2^x se repetem de 4 em 4, ou seja, os números 2^4, 2^8, 2^{12}, ... possuem sempre os mesmos algarismos das unidades, que é 6.
Com relação aos expoentes pares, temos que 2^{4k} sempre termina em 6 e 2^{4k+2} sempre termina em 4.
Os números da forma 4k que terminam em 6 são:
16, 36, 56, 76, ..., $16 + 20(n - 1)$, ... n inteiro positivo
Os números da forma 4k + 2 que terminam em 4 são:
14, 34, 54, 74, ..., $14 + 20(n - 1)$, ... n inteiro positivo
Assim, os números escritos por Wei são:
14, 16, 34, 36, 54, 56, 74, 76, ..., $14 + 20(n - 1)$, $16 + 20(n - 1)$, ... n inteiro positivo
Assim, os termos de ordem ímpar são calculados pela expressão $14 + 20(n - 1)$ e os termos de ordem par são calculados pela expressão $16 + 20(n - 1)$.
Como 1998 é par, então o 1998º termo pode ser calculado fazendo $n = 999$ na expressão $16 + 20(n - 1) \Rightarrow a_{1998} = 16 + 20(999 - 1) \Rightarrow a_{1998} = 19976$.

11)
Notemos que $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001} = 2^{1999}(1 + 2 + 4) = 2^{1999}.7$
$\therefore 2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} \equiv 24 \pmod{100} \Rightarrow 2^{20} \equiv 76 \pmod{100} \Rightarrow$
$(2^{20})^{99} \equiv (76)^{99} \pmod{100} \Rightarrow 2^{1980} \equiv 76 \pmod{100} \Rightarrow$
$(2^{10})(2^{1980}) \equiv (24)(76) \pmod{100} \Rightarrow 2^{1990} \equiv 24 \pmod{100} \Rightarrow$
$(2^9)(2^{1990}) \equiv (512)(24) \pmod{100} \Rightarrow 2^{1999} \equiv 88 \pmod{100} \Rightarrow$
$2^{1999}.7 \equiv 16 \pmod{100}$
Desde modo concluímos que os dois últimos dígitos de $2^{1999}.7$ são 16.
Como $2^{1999}.7$ é divisível por 8, e um número é divisível por 8 se e somente se o número formado pelos seus três últimos algarismos é divisível por 8, os últimos 3 dígitos de $2^{1999}.7$ podem ser 216, 416, 616 ou 816, ou seja, o algarismo das centenas é par.

12)

Observemos inicialmente que $7^3 \equiv -1 \pmod{43}$ e que $6^3 \equiv 1 \pmod{43}$.
Assim: $7^{3k} \equiv (-1)^k \pmod{43}$ e $6^{3k} \equiv 1 \pmod{43}$ $\Rightarrow$
$7^{3k+1} \equiv 7(-1)^k \pmod{43}$ e $6^{3k+1} \equiv 6 \pmod{43}$ $\Rightarrow$
$7^{3k+2} \equiv 49(-1)^k \pmod{43}$ e $6^{3k+2} \equiv 36 \pmod{43}$.
Como p é primo, então p pode ser das formas $3k + 1$ (k par) ou $3k + 2$ (k ímpar).
Se $p = 3k + 1$ $\Rightarrow$ $7^p - 6^p - 1 \equiv 7(-1)^k - 6 - 1 \pmod{43}$ $\Rightarrow$
$7^p - 6^p - 1 \equiv 7(-1)^k - 7 \pmod{43}$.
Como k é par $\Rightarrow$ $7^p - 6^p - 1 \equiv 0 \pmod{43}$.
Se $p = 3k + 2$ $\Rightarrow$ $7^p - 6^p - 1 \equiv 49(-1)^k - 36 - 1 \pmod{43}$ $\Rightarrow$
$7^p - 6^p - 1 \equiv 49(-1)^k - 37 \pmod{43}$.
Como k é ímpar $\Rightarrow$ $7^p - 6^p - 1 \equiv -86 \pmod{43}$ $\Rightarrow$
$7^p - 6^p - 1 \equiv 0 \pmod{43}$.

13)
a)
I) Notemos que $2^3 = 8 = 7 - 1$ $\Rightarrow$ $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ $\Rightarrow$ $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$ $\Rightarrow$
$2^{3k} - 1$ é divisível por 7 $\Rightarrow$
se n é divisível por 3, então $2^n - 1$ é divisível por 7.
II) $2^{3k} - 1 = 7x$ $\Rightarrow$ $2(2^{3k} - 1) = 2(7x)$ $\Rightarrow$ $(2^{3k+1} - 1) - 1 = 7y$ $\Rightarrow$
$2^{3k+1} - 1 = 7y + 1$ $\Rightarrow$
se n é da forma $n = 3k + 1$, então 7 não divide $2^n - 1$.
III) $2(2^{3k+1} - 1) = 2(7y + 1)$ $\Rightarrow$ $3^{3k+2} - 2 = 14y + 2$ $\Rightarrow$
$3^{3k+2} - 1 = 7z + 3$ $\Rightarrow$
se n é da forma $n = 3k + 2$, então 7 não divide $2^n - 1$.
b)
I) $2^{3k} - 1 = 7x$ $\Rightarrow$ $2^{3k} + 1 = 7x + 2$
II) $2^{3k+1} - 1 = 7y + 1$ $\Rightarrow$ $2^{3k+1} + 1 = 7y + 3$
III) $3^{3k+2} - 1 = 7z + 3$ $\Rightarrow$ $3^{3k+2} + 1 = 7z + 5$
Assim, 7 nunca divide $2^n + 1$.

14)
Temos que $3^2 = 9 = 10 - 1$. Graças a esta expressão, a fórmula do binômio de Newton nos permite simplificar os cálculos:
$3^{2004} \equiv (10 - 1)^{1002} \pmod{10^4}$
$3^{2004} \equiv -C_{1002,3}.10^3 + C_{1002,2}.10^2 - C_{1002,1}.10 + 1 \pmod{10^4}$
Note que:
$$C_{1002,3}.10^3 = \frac{1002.1001.1000}{6}.10^3 = 167(1000+1)10^6$$
$$C_{1002,2}.10^2 = \frac{1002.1001}{2}.10^2 = (500+1)(1000+1)100$$

$C_{1002,1}.10 = 1002.10 = (1000 + 2)10 = 10^4 + 20$

$3^{2004} \equiv 100 - 20 + 1 \pmod{10^4} \Rightarrow 3^{2004} \equiv 81 \pmod{10^4}$, ou seja, os últimos quatro dígitos de 3^{2004} são 0081

15)

a) Análise do resto de 2^x por 7:

$2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2^{3k} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow$

$2^{3k+1} \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow 2^{3k+2} \equiv 4 \pmod 7$

Análise do resto de x^2 por 7:

$x \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 7$

$x \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod 7$

$x \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv 2 \pmod 7$

$x \equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 7$

$x \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 7$

$x \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv 2 \pmod 7$

$x \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod 7$

b) Para que 7 divida $2^x - x^2$ deve ocorrer que o resto da divisão por 7 de 2^x e de x^2 devem ser iguais.

1º caso: restos iguais a 1 em 2^x e x^2

2^x deixa resto 1 na divisão por 7 quando x é múltiplo de 3 e x^2 deixa resto 1 na divisão por 7 quando x deixa resto 1 ou 6 na divisão por 7: $x = 3a$ e $x = 7b \pm 1 \Rightarrow 3a = 7b \pm 1 \Rightarrow 3a - 7b = \pm 1 \Rightarrow a = 7k \pm 2$ e $b = 3k \pm 1 \Rightarrow$ $x = 21k \pm 6$

Logo, se x deixar resto 6 ou 15 na divisão por 21, então 7 divide $2^x - x^2$. Como $20.000 = 21.952 + 8$, então entre 1 e 20.000 existem 953 números que deixam resto 6 na divisão por 21 e 952 números que deixam resto 15 na divisão por 21. Assim, neste caso, existem 1905 números que satisfazem o enunciado.

2º caso: restos iguais a 2 em 2^x e x^2

2^x deixa resto 2 na divisão por 7 quando x é deixa resto 1 na divisão por 3 e x^2 deixa resto 2 na divisão por 7 quando x deixa resto 3 ou 4 na divisão por 7: $x = 3a + 1$ e $x = 7b \pm 3 \Rightarrow 3a + 1 = 7b \pm 3$

i) $3a - 7b = 2 \Rightarrow a = 7k + 3$ e $b = 3k + 1 \Rightarrow x = 21k + 10$

ii) $3a - 7b = -4 \Rightarrow a = 7k + 1$ e $b = 3k + 1 \Rightarrow x = 21k + 4$

Logo, se x deixar resto 4 ou 10 na divisão por 21, então 7 divide $2^x - x^2$. Como $20.000 = 21.952 + 8$, então entre 1 e 20.000 existem 953 números que deixam resto 4 na divisão por 21 e 952 números que deixam resto 10 na divisão por 21. Assim, neste caso, existem 1905 números que satisfazem o enunciado.

3º caso: restos iguais a 4 em 2^x e x^2

2^x deixa resto 4 na divisão por 7 quando x é deixa resto 2 na divisão por 3 e x^2 deixa resto 2 na divisão por 7 quando x deixa resto 2 ou 5 na divisão por 7: $x = 3a + 2$ e $x = 7b \pm 2 \Rightarrow 3a + 2 = 7b \pm 2$

i) $3a - 7b = 0 \Rightarrow a = 7k$ e $b = 3k \Rightarrow x = 21k + 2$

ii) $3a - 7b = -4 \Rightarrow a = 7k + 1$ e $b = 3k + 1 \Rightarrow x = 21k + 5$

Logo, se x deixar resto 1 ou 5 na divisão por 21, então 7 divide $2^x - x^2$.

Como $20.000 = 21.952 + 8$, então entre 1 e 20.000 existem 953 números que deixam resto 2 na divisão por 21 e 953 números que deixam resto 5 na divisão por 21. Assim, neste caso, existem 1906 números que satisfazem o enunciado.

Portanto, existem $1903 + 1903 + 1904 = 5716$ números inteiros positivos menores que 20.000 tais que 7 divide $2^x - x^2$.

16)

Inicialmente note que:

$5^2 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 5^{2k} \equiv (-1)^k \pmod{13} \Rightarrow$

$5^{4k} \equiv 1 \pmod{13}$ $\quad 5^{4k+1} \equiv 5 \pmod{13}$ $\quad 5^{4k+2} \equiv -1 \pmod{13}$

$5^{4k+3} \equiv -5 \pmod{13}$

Por 13:

se $n \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv 0 \pmod{13}$

se $n \equiv \pm 1 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv 1 \pmod{13}$

se $n \equiv \pm 2 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv -1 \pmod{13}$

se $n \equiv \pm 3 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv 1 \pmod{13}$

se $n \equiv \pm 4 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv 1 \pmod{13}$

se $n \equiv \pm 5 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv -1 \pmod{13}$

se $n \equiv \pm 6 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv -1 \pmod{13}$

Pelos valores encontrados, teremos resto 0 quando tivermos um resto 1 de 5^n com um -1 de n^6 ou um resto -1 de 5^n com um 1 de n^6.

Vejamos as possibilidades:

i) $n = 4a$ e $n = 13b \pm 2 \Rightarrow n = 52k + 24$ ou $n = 52k + 28$

ii) $n = 4a$ e $n = 13b \pm 5 \Rightarrow n = 52k + 8$ ou $n = 52k + 44$

iii) $n = 4a$ e $n = 13b \pm 6 \Rightarrow n = 52k + 20$ ou $n = 52k + 32$

iv) $n = 4a + 2$ e $n = 13b \pm 1 \Rightarrow n = 52k + 38$ ou $n = 52k + 14$

v) $n = 4a + 2$ e $n = 13b \pm 3 \Rightarrow n = 52k + 10$ ou $n = 52k + 42$

vi) $n = 4a + 2$ e $n = 13b \pm 4 \Rightarrow n = 52k + 30$ ou $n = 52k + 22$

17)

Analisemos a expressão módulo 3.

i) $2 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 2^x \equiv (-1)^x \pmod{3}$

ii) $3 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 3^y \equiv 0 \pmod{3}$
iii) $7 \equiv 1 \pmod{3}$
Assim, $2^x - 3^y = 7 \Rightarrow 2^x - 3^y \equiv 7 \pmod{3} \Rightarrow (-1)^x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$ x é par
Analisemos agora a expressão módulo 8.
i) $3^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 3^{2k} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 3^{2k+1} \equiv 3 \pmod{8}$
ii) $7 \equiv -1 \pmod{8}$
Como $2^x - 3^y = 7 \Rightarrow 2^x - 3^y \equiv -1 \pmod{8}$
Se $x = 0 \Rightarrow 2^x \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 3^y \equiv 2 \pmod{8}$ que é impossível
Se $x = 2 \Rightarrow 2^x \equiv 4 \pmod{8} \Rightarrow 3^y \equiv 5 \pmod{8}$ que é impossível
Se $x \geq 4 \Rightarrow 2^x \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow 3^y \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow$ y é par
Deste modo concluímos que x e y são pares, $x \geq 4$. Portanto, $x = 2n$ e $y = 2m$, n e m números naturais.
Assim: $2^x - 3^y = 7 \Rightarrow 2^{2n} - 3^{2m} = 7 \Rightarrow (2^n - 3^m)(2^n + 3^m) = 7 \Rightarrow$
$2^n - 3^m = 1$ e $2^n + 3^m = 7 \Rightarrow$
i) $2.2^n = 8 \Rightarrow 2^{n+1} = 8 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow x = 4$.
ii) $2.3^m = 6 \Rightarrow 3^m = 3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow y = 2$
Assim, $x = 4$ e $y = 2$ é a única solução.

18)

Com os dígitos 1 e 2 podemos formar exatamente 2^n números inteiros distintos de n dígitos. Provemos agora que estes números formam um sistema completo de restos módulo 2^n.
Sejam N_1 e N_2 dois destes números, formados pelos dígitos 1 e 2. Contando da direita para a esquerda, considere o primeiro dígito onde N_1 e N_2 diferem, ou seja, quando acontece pela primeira vez que um deles possui o dígito 1 e o outro 2. Considere esta como sendo a k-ésima posição, $0 \leq k \leq n - 1$. Como os primeiros $k - 1$ dígitos de N_1 e N_2 são iguais, então quando calcularmos $N_1 - N_2$ obteremos um número que inicial com $k - 1$ zeros, e o dígito de ordem k é 1.
Assim, $N_1 - N_2 = ...1000...000 \Rightarrow N_1 - N_2 \equiv 10^k \pmod{10^{k+1}} \Rightarrow$
$N_1 - N_2 = q.10^{k+1} + 10^k = (q.5^{k+1})(2^{k+1}) + 2^k.5^k \Rightarrow$
$N_1 - N_2 \equiv 2^k5^k \pmod{2^{k+1}}$, entretanto 2^k5^k não é divisível por 2^{k+1}, implicando que N_1 e N_2 não deixam o mesmo resto na divisão por 2^n.
Como N_1 e N_2 são dois números aleatórios entre os 2^n números de n dígitos que podemos formar com os dígitos 1 e 2, então todos estes 2^n números deixam restos diferentes na divisão por 2^n. Como existem 2^n restos módulo 2^n (0, 1, 2, ..., 2^n), estes números formam um sistema completo de restos módulo 2^n. Assim, algum deles (e somente um) apresenta resto 0 na divisão por 2^n.

19)

Seja $k_n = (a_na_{n-1}\ldots a_1)_{10}$ o número que estamos procurando.
$n = 1$: tome $k_1 = 5$.
$n = 2$: tome $k_2 = 75$.
$n = 3$: tome $k_3 = 375$.
Observe que, até agora, k_{n+1} está sendo obtido a partir de k_n inserindo-se apenas um algarismo ímpar no início. Vamos provar por indução que é sempre possível fazer isso. Suponha que $5^n | k^n = (a_na_{n-1}\ldots a_1)_{10}$, onde cada a_i é ímpar. Queremos achar $a_{n+1} \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ tal que $5^{n+1} | k^{n+1}$.
Temos dois casos:
(i) Se k_n já for divisível por 5^{n+1}, tome $a_{n+1} = 5$.
De fato: $k_{n+1} = (5a_n\ldots a_1)_{10} = 5.10^n + k_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$, pois cada parcela acima é múltipla de 5^{n+1}.
(ii) Se k_n não é divisível por 5^{n+1}, então $k_n = 5^n.b$, b não é divisível por 5.
Daí, queremos uma solução ímpar para a congruência abaixo:
$a_{n+1}.10^n + k_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}} \Leftrightarrow a_{n+1}.10^n + 5^nb \equiv 0 \pmod{5^{n+1}} \Leftrightarrow$
$a_{n+1}.2^n + b \equiv 0 \pmod 5$.
Veja que os números $\{1.2^n + b, 3.2^n + b, 5.2^n + b, 7.2^n + b, 9.2^n + b\}$ são incongruentes entre si. Logo, existe um deles que deixa resto zero módulo 5. Assim, é sempre possível escolhermos a_{n+1}.

20)

$12^m + 9^m + 8^m + 6^m = 2^{2m}.3^m + 3^{2m} + 2^{3m} + 2^m.3^m =$
$= 3^m(2^{2m} + 3^m) + 2^m(2^{2m} + 3^m) = (2^{2m} + 3^m)(2^m + 3^m)$, $m = 10k + 5$
Fatorando obtém-se: $1991 = 11.181$
$2^5 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10k} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow$
$2^{10k+5} \equiv -1 \pmod{11}$
$3^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 3^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 3^{10k} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow$
$3^{10k+5} \equiv 1 \pmod{11}$
Assim, $2^{10k+5} + 3^{10k+5} \equiv 0 \pmod{11}$
$4^5 \equiv 119 \pmod{181} \Rightarrow 4^{10} \equiv 43 \pmod{181} \Rightarrow 4^{10k} \equiv (43)^k \pmod{181} \Rightarrow$
$4^{10k+5} \equiv 119.(43)^k \pmod{181}$
$3^5 \equiv 62 \pmod{181} \Rightarrow 3^{10} \equiv 43 \pmod{181} \Rightarrow 3^{10k} \equiv (43)^k \pmod{181} \Rightarrow$
$3^{10k+5} \equiv 62.(43)^k \pmod{181}$
Logo: $4^{10k+5} + 3^{10k+5} \equiv 181.(43)^k \pmod{181} \Rightarrow$
$4^{10k+5} + 3^{10k+5} \equiv 0 \pmod{181}$

21)

Suponhamos que n é um número natural tal que $6^n - 1 \mid 7^n - 1$
$6 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 6^n - 1 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow 5 \mid 7^n - 1$
$7 \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow 7^2 \equiv -1 \pmod 5 \Rightarrow 7^3 \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow$
$7^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 7^{4k} - 1 \equiv 0 \pmod 5$
Assim, $5 \mid 7^n - 1$ se e somente se $4 \mid n$, em particular, n deve ser par.

$6^2 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow 7 \mid 6^n - 1$ se n for par.
Como 7 não divide $7^n - 1$, temos uma contradição, ou seja, $7^n - 1$ nunca é múltiplo de $6^n - 1$

22)

i) $3^2 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 3^{2k} \equiv (-1)^k \pmod{10} \Rightarrow$
$3^{2k+1} \equiv 3(-1)^k \pmod{10}$
ii) $17^2 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 17^{2k} \equiv (-1)^k \pmod{10} \Rightarrow$
$17^{2k+1} \equiv 17(-1)^k \pmod{10}$
I) $3^{2k} + 2.17^{2k} \equiv (-1)^k + 2.(-1)^k \pmod{10} \Rightarrow$
$3^{2k} + 2.17^{2k} \equiv 3(-1)^k \pmod{10}$
Como não existe quadrado perfeito que termine em 3 ou 7, então $3^{2k} + 2.17^{2k}$ nunca vai ser um quadrado
II) $3^{2k+1} + 2.17^{2k+1} \equiv 3(-1)^k + 34(-1)^k \pmod{10} \Rightarrow$
$3^{2k+1} + 2.17^{2k+1} \equiv 37(-1)^k \pmod{10} \Rightarrow$
$3^{2k+1} + 2.17^{2k+1} \equiv 3(-1)^k \pmod{10}$
Analogamente ao caso anterior, temos que não existe quadrado perfeito da forma $3^{2k+1} + 2.17^{2k+1}$

23)

Notemos inicialmente que $1998 = 2.3^3.37$
$\therefore 760 - 20 = 740 = 2^2.5.37 \Rightarrow 760 \equiv 20 \pmod{2.37} \Rightarrow$
$760^{1998} \equiv 20^{1998} \pmod{2.37} \Rightarrow$
$760^{1998} - 20^{1998} \equiv 0 \pmod{2.37}$
$\therefore 1910 - 652 = 1258 = 2.17.37 \Rightarrow 1910 \equiv 652 \pmod{2.37} \Rightarrow$
$1910^{1998} \equiv 652^{1998} \pmod{2.37} \Rightarrow$
$1910^{1998} - 652^{1998} \equiv 0 \pmod{2.37}$
Assim: $760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998} \equiv 0 \pmod{2.37} \Rightarrow$
$2.37 \mid 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998}$
$\therefore 760 - 652 = 108 = 2^2.3^3 \Rightarrow 760 \equiv 652 \pmod{3^3} \Rightarrow$
$760^{1998} \equiv 652^{1998} \pmod{3^3} \Rightarrow$
$760^{1998} - 652^{1998} \equiv 0 \pmod{3^3}$
$\therefore 1910 - 20 = 1890 = 2.33.5.7 \Rightarrow 1910 \equiv 20 \pmod{3^3} \Rightarrow$
$1910^{1998} \equiv 20^{1998} \pmod{3^3} \Rightarrow$
$1910^{1998} - 20^{1998} \equiv 0 \pmod{3^3}$
Assim: $760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998} \equiv 0 \pmod{3^3} \Rightarrow$
$3^3 \mid 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998}$
Como $2.37 \mid 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998}$ e
$3^3 \mid 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998} \Rightarrow$
$2.3^3.37 \mid 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998} \Rightarrow$
$1998 \mid 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998}$

24)

Observemos os restos dos quadrados perfeitos módulo 4:

$x \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{4}$

$x \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{4}$

$x \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{4}$

$x \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{4}$

Assim, se $a \equiv 3 \pmod{4}$ então é impossível expressar a como a soma de dois quadrados perfeitos.

Analisemos agora os restos dos cubos módulo 7:

$x \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow x^3 \equiv 0 \pmod{7}$

$x \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow x^3 \equiv 1 \pmod{7}$

$x \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow x^3 \equiv 1 \pmod{7}$

$x \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow x^3 \equiv 6 \pmod{7}$

$x \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow x^3 \equiv 1 \pmod{7}$

$x \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow x^3 \equiv 6 \pmod{7}$

$x \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow x^3 \equiv 6 \pmod{7}$

Novamente se $a \equiv 3 \pmod{7}$ é impossível expressar a como a soma de dois cubos. Desta forma a seqüência $b_0 = 3$,
$b_{n+1} = b_n + 28$ possui todos os termos satisfazendo: $b_n \equiv 3 \pmod{4}$ e $b_n \equiv 3 \pmod{7}$ e assim nenhum b_n pode ser expresso como a soma de dois quadrados e nem a soma de dois cubos.

25)

Sabemos que $16^n \equiv 6 \pmod{10}$, pois $6^n \equiv 6 \pmod{10}$.

Assim o dígito das unidades de 16^n será sempre 6.

Temos então: $2^{4n} \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n} \equiv 2^4.k \pmod{10}$ pois $\text{mdc}(10.000, 2^{4n}) = 2^4$.

Temos que $2^4.k \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow k = 5q + 1$.

$\therefore 2^{4n} \equiv 2^4(5q + 1) \pmod{10.000} \Rightarrow 2^{4n} \equiv 10(8q + 1) + 6 \pmod{10.000}$

Temos que $8q + 1$ deve ter dígitos maiores ou iguais a 6. Em particular, $8q + 1$ termina por 7 ou 9. Temos então as seguintes possibilidades para os seus últimos 3 dígitos: 999, 997, 987, 977, 887, 877, 777.

Os únicos que são da forma $8q + 1$ são 977 e 777. Como 2^5 divide 7776, 16^n não termina em 77776 nem em 97776.

$16^n \equiv 87776 \pmod{10^5} \Rightarrow 16^n \equiv 987776 \pmod{10^6}$.

Como 2^7 divide 987776, 16^n não termina em 9987776.

Como 2^6 divide 99776, 16^n não termina em 999776 $\Rightarrow$

16^n tem no máximo 6 dígitos, e basta verificar os casos.

Como para nenhum caso haverá solução, 16^n nunca é descendente.

26)

Sejam $d_1(m)$, $d_3(m)$, $d_7(m)$, $d_9(m)$ os números de divisores positivos de m terminando em 1, 3, 7, 9 respectivamente.
Portanto, $f(n) = d_1(m) + d_9(m)$ e $g(n) = d_3(m) + d_7(m)$.
Como 1 divide todo inteiro positivo então temos que $d_1(m) \geq 1$.
Consideremos inicialmente os casos em que n é um primo ímpar:
i) se $n \equiv \pm 1 \pmod{10} \Rightarrow f(n) = 2$ e $g(n) = 0$
ii) se $n \equiv \pm 3 \pmod{10} \Rightarrow f(n) = 1$ e $g(n) = 1$
Consideremos agora os casos em que n é uma potência de primo ímpar:
i) se $p \equiv \pm 1 \pmod{10} \Rightarrow p^x \equiv \pm 1 \pmod{10} \Rightarrow f(n) \geq 2$ e $g(n) = 0$
ii) se $p \equiv \pm 3 \pmod{10} \Rightarrow p^{2k} \equiv \pm 1 \pmod{10}$ e $p^{2k+1} \equiv \pm 3 \pmod{10}$
Portanto, se $n = 2k \Rightarrow f(n) - g(n) = 1$ e se $n = 2k + 1 \Rightarrow f(n) = g(n)$.
Para o caso em que n é composto, façamos $n = pq$, com p e q primos entre si.
Note que:
$$d_1(n) = d_1(p)d_1(q) + d_9(p)d_9(q) + d_3(p)d_7(q) + d_7(p)d_3(q)$$
$$d_3(n) = d_1(p)d_3(q) + d_3(p)d_1(q) + d_7(p)d_9(q) + d_9(p)d_7(q)$$
$$d_7(n) = d_1(p)d_7(q) + d_7(p)d_1(q) + d_3(p)d_9(q) + d_9(p)d_3(q)$$
$$d_9(n) = d_1(p)d_9(q) + d_9(p)d_1(q) + d_7(p)d_7(q) + d_3(p)d_3(q)$$
Assim: $f(n) - g(n) = d_1(n) + d_9(n) - d_3(n) - d_7(n) = (d_1(p) + d_9(p) - d_3(p) - d_7(p))(d_1(q) + d_9(q) - d_3(q) - d_7(q)) \Rightarrow$
$f(p.q) - g(p.q) = (f(p) - g(p))(f(q) - g(q))$, onde mdc $(p, q) = 1$.
Deste modo, para um número n inteiro qualquer, dado por sua fatoração em fatores primos $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}$ podemos afirmar que:
$$f(n) - g(n) = f(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}) - g(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}) =$$
$$= (f(p_1^{k_1}) - g(p_1^{k_1}))(f(p_2^{k_2}) - g(p_2^{k_2}))\ldots(f(p_r^{k_r}) - g(p_r^{k_r}))$$
Desde que, para cada primo p_i $(1 \leq i \leq k)$, temos $f(p_i^{k_i}) - g(p_i^{k_i}) \geq 0$, implicando que $f(n) \geq g(n)$.

27)
Seja n um inteiro de 4 dígitos. Temos que n é auto-replicante se e somente se $n^2 - n$ é divisível por 10000, isto é, $2^4 \mid n(n-1)$ e $5^4 \mid n(n-1)$.
Como n e $n - 1$ são primos entre si, temos 4 possibilidades:

- $2^4 \mid n$ e $5^4 \mid n$
- $2^4 \mid n - 1$ e $5^4 \mid n - 1$
- $2^4 \mid n$ e $5^4 \mid n - 1$
- $2^4 \mid n - 1$ e $5^4 \mid n$

A primeira possibilidade implica que $10^4 \mid n$ o que é impossível pois $1000 \leq n \leq 9999$ Da mesma forma, a segunda não ocorre.
Na terceira possibilidade, de $5^4 \mid n - 1$ temos que $n = 625k + 1$ para algum k inteiro e que:
$625k + 1 \equiv 0 \pmod{16} \Leftrightarrow k + 1 \equiv 0 \pmod{16} \Leftrightarrow k \equiv 1 \pmod{16}$

Assim, $k = 16 + 16\ell$ para algum ℓ inteiro e:

$n = 625(15 + 16\ell) + 1 = 9376 + 10000\ell$

E como $1000 \le n \le 9999$ a única possibilidade é $n = 9376$.
Finalmente, para a quarta possibilidade, temos que $n = 625k$, k inteiro, e que $n - 1 \equiv 0 \pmod{16} \Leftrightarrow k \equiv 1 \pmod{16}$.
Assim, $k = 1 + 16\ell$, ℓ inteiro, e $n = 625(1 + 16\ell) = 625 + 10000\ell$. Como $1000 \le n \le 9999$ não há soluções neste caso. Logo o único número auto-replicante de 4 dígitos é 9376.

28)
Um quadrado perfeito pode terminar com os números 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.
Assim, os últimos 4 dígitos podem ser:
0000, 1111, 4444, 5555, 6666 ou 9999.
Como um número ímpar quadrado perfeito é da forma $4k + 1$, então os número com as terminações 1111, 5555 e 9999 são impossíveis pois os números que terminam destas formas deixam resto 3 quando divididos por 4.
Sobram as terminações 0000, 4444 ou 6666.
Como um número par quadrado perfeito é da forma $4k$, então os número com as terminações 6666 são impossíveis pois os números que terminam com 6666 deixam resto 2 quando divididos por 4.
Sobram as terminações 0000 e 4444.
Analisemos a divisibilidade por 16:

$x \equiv 0 \pmod{16} \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{16}$
$x \equiv \pm 1 \pmod{16} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{16}$
$x \equiv \pm 2 \pmod{16} \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod{16}$
$x \equiv \pm 3 \pmod{16} \Rightarrow x^2 \equiv 9 \pmod{16}$
$x \equiv \pm 4 \pmod{16} \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{16}$
$x \equiv \pm 5 \pmod{16} \Rightarrow x^2 \equiv 9 \pmod{16}$
$x \equiv \pm 6 \pmod{16} \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod{16}$
$x \equiv \pm 7 \pmod{16} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{16}$
$x \equiv 8 \pmod{16} \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{16}$

Como um número que termina em 4444 deixa resto 12 quando dividido por 16, e não existe nenhum quadrado perfeito que deixe resto 12 quando dividido por 16, então é impossível a terminação 4444.
Desta forma, somente podemos ter a terminação 0000.

29)
Vamos provar que $1997^{2^x} - 1$ é divisível por 2^{x+2}.
Inicialmente note que:
i) $1997 \equiv 5 \pmod{8} \Rightarrow 1997^2 \equiv 25 \pmod{8} \Rightarrow 1997^2 \equiv 1 \pmod{8}$

ii) $1997 \equiv 13 \pmod{16} \Rightarrow 1997^2 \equiv 169 \pmod{16} \Rightarrow 1997^2 \equiv 9 \pmod{16}$
Portanto, a maior potência de 2 que divide $1997^2 - 1$ é 2^3.

Observe agora que $1997^{2^{x+1}} - 1 = \left(1997^{2^x} - 1\right)\left(1997^{2^x} + 1\right)$.

$\therefore 1997^{2^x} + 1 \equiv (-1)^{2^x} + 1 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow$ a maior potência de 2 que divide $1997^{2^x} + 1$ é 2.

Assim, quando aumentamos x em uma unidade, o expoente de 2 que divide $1997^{2^x} - 1$ também aumenta em uma unidade.

Como $2^3 \mid 1997^{2^1} - 1 \Rightarrow 2^4 \mid 1997^{2^2} - 1 \Rightarrow 2^5 \mid 1997^{2^3} - 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2^{x+2} \mid 1997^{2^x} - 1$.

Desta forma, $2^{1998} \mid 1997^{2^{1996}} - 1$.

30)

Observe que $1 + 2 + 3 + \ldots + 2005 = \dfrac{2005 \cdot (2005 + 1)}{2} = 2005 \cdot 1003$

Seja $E = 1^{2005} + 2^{2005} + \ldots + 2005^{2005}$

Vamos provar que $2005 \mid E$

Vendo E módulo 2005 temos:

$E \equiv 1^{2005} + 2^{2005} + 3^{2005} + \ldots + 1001^{2005} + 1002^{2005} + (-1002)^{2005} + (-1001)^{2005} + \ldots + (-2)^{2005} + (-1)^{2005} + 0^{2005}$ (mod. 2005)

Como $a^{2005} \equiv -(-a)^{2005} \pmod{2005} \Rightarrow a^{2005} + (-a)^{2005} \equiv 0 \pmod{2005}$

Temos que o n-ésimo termo da expressão acima irá se anular com o $(2005 - n)$° e, portanto: $E \equiv 0 \pmod{2005} \Rightarrow 2005 \mid E$.

Vamos provar agora que 1003 divide E. Vendo E módulo 1003 temos:

$E \equiv 1^{2005} + 2^{2005} + \ldots + 1001^{2005} + 1002^{2005} + 0^{2005} + (-1002)^{2005} + (-1001)^{2005} + \ldots + (-2)^{2005} + (-1)^{2005}$ (mod. 1003) como

$a^{2005} \equiv -(-a)^{2005} \pmod{1003} \Rightarrow a^{2005} + (-a)^{2005} \equiv 0 \pmod{1003} \Rightarrow$ cada n-ésimo termo irá se anular com o $(2006 - n)$° termo e o 1003°. já é múltiplo de 1003 pois é igual a 1003^{2005} temos que $E \equiv 0 \pmod{1003} \Rightarrow 1003 \mid E$

com o $1003 \mid E$ e $2005 \mid E$ e

$mdc(1003, 2005) = 1 \Rightarrow 1003 \cdot 2005 \mid E \Rightarrow$

$1 + 2 + \ldots + 2005 \mid 1^{2005} + 2^{2005} + \ldots + 2005^{2005}$

31)

Note que $2548 \equiv 1 \pmod{3}$, $-2005 \equiv 2 \pmod{3}$ e $-543 \equiv 0 \pmod{3}$

Logo: $2548^x \equiv 1 \pmod{3}$, $(-2005)^y \equiv 2^y \pmod{3}$ e $(-543)^z \equiv 0 \pmod{3}$

$2548^x + (-2005)^y \equiv (-543)^z \pmod{3} \Rightarrow 1 + 2^y \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow$

y é ímpar
Assim, a equação original fica da forma $2548^x + (-2005)^{2k-1} = (-543)^z$
Note agora que $2548 \equiv 0 \pmod{4}$, $-2005 \equiv -1 \pmod{4}$ e $-543 \equiv 1 \pmod{4}$ $\Rightarrow$ $2548^x \equiv 0 \pmod{4}$, $(-2005)^{2k-1} \equiv -1 \pmod{4}$ e $(-543)^z \equiv 1 \pmod{4}$
$2548^x + (-2005)^y \equiv (-543)^z \pmod{4}$ $\Rightarrow$ $0 - 1 \equiv 1 \pmod{4}$, que é uma contradição
Assim, não existem inteiros que satisfaçam o enunciado.

32)
Não. Sabemos que um número é congruente à soma de seus algarismos módulo 9. Daí, temos que
$n + n^2 + n^3 \equiv 0 + 1 + 2 + \cdots + 9 \pmod 9$ $\Rightarrow$ $n + n^2 + n^3 \equiv 45 \pmod 9$ $\Rightarrow$ $n + n^2 + n^3 \equiv 0 \pmod 9$.
Analisando todos os possíveis casos, concluímos que a congruência acima ocorre se e somente se $n \equiv 0 \pmod 9$. Observe agora que $n < 32$.
Caso contrário, $n \geq 32$ $\Rightarrow$ $n^2 \geq 1024$ $\Rightarrow$ $n^3 \geq 32768$, de modo que necessitaríamos usar mais do que 10 algarismos, absurdo.
Assim $n < 32$ $\Rightarrow$ $n = 9$, 18 ou 27. Analisando os três casos, concluímos que a condição do enunciado não pode ocorrer.

33)
$A_0 = 1 + 9 + 25 = 35 = 5 \cdot 7$
Assim, o mdc de todos os números da sequência pode valer 1, 5, 7 ou 35.
Analisando a sequência módulo 5, segue que:
$A_n \equiv 2^{3n} + 9^{3n+1} \equiv 8^n + (-1)^{3n+1} \pmod{5}$
Portanto, para $n = 1$ tem-se que $A_1 \equiv 8 + 1 \pmod{5}$ $\Rightarrow$ $A_1 \equiv 4 \pmod{5}$
Assim, o mdc é diferente de 5 e 35.
Analisando módulo 7:
$A_n \equiv 8^n + 9.9^{3n} + 25.25^{3n} \equiv 1 + 2.2^{3n} + 4.4^{3n} \equiv 1 + 2.8^n + 4.64^n \equiv$
$\equiv 1 + 2 + 4 \equiv 0 \pmod{7}$
Logo, o mdc entre todos os números da sequência é 7.

34)
Inicialmente podemos perceber que 2 divide $2^n + 2$, para qualquer valor inteiro positivo de n.
Note agora que:
i) $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ $\Rightarrow$ $2^{10k+5} \equiv -1 \pmod{11}$ $\Rightarrow$
$2^{10k+6} \equiv -2 \pmod{11}$ $\Rightarrow$ $2^{10k+6} + 2 \equiv 0 \pmod{11}$
ii) $2^7 \equiv -1 \pmod{43}$ $\Rightarrow$ $2^{14k+7} \equiv -1 \pmod{43}$ $\Rightarrow$
$2^{14k+8} \equiv -2 \pmod{43}$ $\Rightarrow$ $2^{14k+8} + 2 \equiv 0 \pmod{43}$

Observe que $n = 2.11.43 = 946 = 10.94 + 6 = 14.67 + 8$. Assim, conclui-se que 946 divide $2^{946} + 2$.

35)

Seja $P_k = 111...11711...11$, onde o 7 está na posição de ordem k.
Inicialmente note a soma dos dígitos de P_k vale $n + 6$, fazendo com que se $3 \mid n$ ($x \in IN^*$) então $3 \mid P_k$.
Note agora que: $P_k = 111...11111...11 + 6.10^k =$

$$= \frac{999...99}{9} + 6.10^k = \frac{10^n + 54.10^k - 1}{9}, \text{ com } k \le n.$$

Como $1001 = 7.143$ segue que $10^3 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 10^6 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow$
$10^{6m} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow$
$10^{6m+1} \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 10^{6m+2} \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 10^{6m+4} \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow$
$10^{6m+5} \equiv 5 \pmod{7}$

Além disso sabe-se que $10^n + 54.10^k - 1 \equiv 10^n - 2.10^k - 1 \pmod{7}$
Analisando cada caso de n (não divisível por 3):
Se $n = 6m + 1$ basta tomar $k = 6m$:
$10^n + 54.10^k - 1 \equiv 3 - 2.1 - 1 \pmod{7} \Rightarrow 10^n + 54.10^k - 1 \equiv 0 \pmod{7}$
Se $n = 6m + 2$ basta tomar $k = 6m - 3$:
$10^n + 54.10^k - 1 \equiv 2 - 2.4 - 1 \pmod{7} \Rightarrow 10^n + 54.10^k - 1 \equiv 0 \pmod{7}$
Se $n = 6m + 4$ basta tomar $k = 6m - 2$:
$10^n + 54.10^k - 1 \equiv 4 - 2.5 - 1 \pmod{7} \Rightarrow 10^n + 54.10^k - 1 \equiv 0 \pmod{7}$
Se $n = 6m + 5$ basta tomar $k = 6m + 2$:
$10^n + 54.10^k - 1 \equiv 5 - 2.2 - 1 \pmod{7} \Rightarrow 10^n + 54.10^k - 1 \equiv 0 \pmod{7}$

Desde que $m \ge 0$, dos casos listados acima deve-se ainda analisar $n = 2$ e $n = 4$, uma vez que $k < 0$ para $m = 0$ em ambos os casos. Verificando caso a caso, apenas para $n = 2$ o número formado é sempre primo, uma vez que 17 e 71 são primos.

17.2. PARTE B

1) 4. Dica: Analise a sequência módulo 4.

2) Dica: Prove que $(m, n) \equiv (1, 7), (7, 1), (3, 5), (5, 3) \pmod{8}$ e que $(m, n) \equiv (2, 1), (1, 2) \pmod{3}$

3) Dica: Demonstre que $29 \mid x, y, z$.

4) Dica: Use a expansão, em Binômio de Newton, de $(8 + 1)^{N+1}$.

5) Dica: Use o fato que $(n - i)^k + (i + 2)^k \equiv 0$ (mod. $n + 2$), para k ímpar e $i = 0, 1, 2, \ldots$

6) Dica: Toda potência de 5 e 6 termina em 5 e 6, respectivamente.

7) Dica: Analise n par e n ímpar.

8) Não. Dica: Use o fato que $n \equiv s(n)$ (mod. 9)

9) Dica: Demonstre que $n \equiv 3$ (mod. 9)

10) Dica: Use o fato que $111..11 = (10^{81} - 1)/9$

11) Dica: Veja a solução do problema 23 da parte A.

12) 32 e 64. Dica: Se x é primeiro dígito de 2^n, demonstre que $2^n - 2^m = x.10^k$ somente tem solução se $k = 1$.

13) Dica: Analise os dois últimos dígitos de 4^n, para n ímpar.

14) $n = 10k + 1$ ou $n = 10k + 6$. Dica: Encontre um período para o algarismo das unidades de n^2.

15) 9

16) a) $n = 10k + 1$; b) $n = 50k + 1$. Dica: Use a expansão, em binômio de Newton, de $(10 + 1)^n$.

17) 2. Dica: Analise e período do algarismo das unidades de 2^n.

18) 5. Dica: Observe que $7 \mid 111111$.

19) 1. Dica: Expanda, em binômio de Newton, $(10 - 1)^{999}$.

20) Dica: Observe que $46^2 \equiv 13^2$ (mod. 1947)

21) 0. Dica: Prove que os restos de a_i^2 por 8 formam uma sequência de período 6.

22) 2001. Dica: Prove que $k!.(k^2 + 3k + 1) = (k + 2)! - k!$.

23) Dica: Demonstre que $2^{49} \equiv - 19$ (mod. 343)

24) 1984. Dica: Note que $529^2 \equiv 132^2$ (mod. 262417)

25) m = 335. Dica: Demonstre que $11 \mid (19^{10k+5} + 92^{10k+5})$

26) $n = 6k + 1$ ou $n = 6k + 2$

27) 0

28) Dica: Demonstre que $1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 1983^{1983} = 8k + 4$

29) Dica: Veja a solução do problema 23 da parte A.

30) 5. Dica: Resolva a equação diofantina $4n + 3 = 11x$

31) Dica: Analisando a equação módulo 7, prove que x e y devem ser divisíveis por 7.

32) Dica: Prove que m e n são ambos pares ou ambos ímpares.

33) n = 2013. Dica: Calcule o valor do somatório.

34) Dica: Demonstre que se $n = 6k + 4$ então $n^n \equiv 1$ (mod. 3) e $(n + 1)^{n+1} \equiv 2$ (mod. 3)

35) Dica: Separe nos casos p par e p ímpar.

36) 7. Dica: Use o fato que $S(n) \equiv n$ (mod. 9)

Digitalizado com CamScanner

TEOREMAS DE EULER E FERMAT

18.1. PARTE A

1)

I) Seja $n = 2^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots p_r^{k_r}$ a fatoração em fatores primos do inteiro positivo n. Sabemos também que para todo número natural a > 2 temos $a - 1 > \sqrt{a}$ e que para todo número natural $b - \frac{1}{2} \geq \frac{b}{2}$.

Deste modo

$$\varphi(n) = 2^{k_1-1} p_2^{k_2-1} p_3^{k_3-1} \ldots p_r^{k_r-1} (p_2 - 1)(p_3 - 1) \ldots (p_r - 1) \geq$$

$$\geq 2^{k_1-1} p_2^{k_2-1} p_3^{k_3-1} \ldots p_r^{k_r-1} p_2^{\frac{1}{2}} p_3^{\frac{1}{2}} \ldots p_r^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\varphi(n) = 2^{k_1-1} p_2^{k_2-\frac{1}{2}} p_3^{k_3-\frac{1}{2}} \ldots p_r^{k_r-\frac{1}{2}} \geq 2^{k_1-1} p_1^{\frac{k_1}{2}} p_2^{\frac{k_2}{2}} \ldots p_r^{\frac{k_r}{2}} \Rightarrow \varphi(n) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

2)

Seja n um inteiro composto e p_1 o menor divisor primo de n. Deste modo, temos que $p_1 \leq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{n}{p_1} \leq \sqrt{n}$.

Assim, $\varphi(n) \leq n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) = n - \frac{n}{p_1} \Rightarrow \varphi(n) \leq n - \sqrt{n}$.

3)

$p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow q \mid p^{q-1} - 1$

$q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow p \mid q^{p-1} - 1$

Logo: $pq \mid (p^{q-1} - 1)(q^{p-1} - 1) = pq^{p+q-2} - (p^{q-1} + q^{p-1}) + 1$

Como $pq \mid pq^{p+q-2} \Rightarrow pq \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$

4)

p = 2 tem-se $2^2 + 2^2 = 8$, que não é primo

p = 3 tem-se que $2^3 + 3^2 = 17$, é primo

p = 5 tem-se que $2^5 + 5^2 = 57$, que não é primo

p = 7 tem-se que $2^7 + 7^2 = 177$, que não é primo

...

Sabe-se que todo primo maior que 2 é ímpar, ou seja, p = 2k + 1. Por outro lado:

$2^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{2k} \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{2k+1} \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$

$2^p \equiv 2 \pmod{3}$

Além disso, se mdc(p, 3) = 1 então $p^2 \equiv 1 \pmod 3$
Assim: $2^p + p^2 \equiv 3 \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid (2^p + p^2)$, para todo $p > 3$.

5)
Se mdc (n, 10) = 1 $\Rightarrow$ mdc (9n, 10) = 1 $\Rightarrow$ $10^{\phi(9n)} \equiv 1 \pmod{9n}$ $\Rightarrow$
$10^{\phi(9n)} - 1 = 9nk$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Desta forma: $nk = \dfrac{10^{\phi(9n)} - 1}{9}$, e vemos que todos os dígitos decimais de nk são iguais a 1.

6)
Pelo Teorema de Fermat temos: $(a^q)^p \equiv a^q \pmod p$ e $a^{(p)q} \equiv a^q \pmod q$.
Como $a^p \equiv a \pmod q$ e $a^p \equiv a \pmod q$, então $a^{pq} \equiv a \pmod p$ e
$a^{pq} \equiv a \pmod q$ $\Rightarrow$ $p \mid (a^{pq} - a)$ e $q \mid (a^{pq} - a)$
Como mdc (p, q) = 1, temos que $pq \mid (a^{pq} - a)$, isto é: $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$

7)
Como mdc $(a, a^n - 1) = 1$, pelo Teorema de Euler $a^{\phi(a^n-1)} \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$.
Seja a congruência $a^t \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$. Notemos que o menor valor inteiro positivo para t que satisfaz a congruência é t = n.
Assim, como existe um inteiro n menor do que $\phi(a^n - 1)$ que satisfaz a congruência $a^t \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$, então $n \mid \phi(a^n - 1)$.

8)
$2^{2^k} \equiv -1 \pmod p \Rightarrow 2^{2^{k+1}} \equiv 1 \pmod p$
Pelo teorema de Fermat sabe-se que $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$
Suponha que t é o menor inteiro positivo tal que $2^t \equiv 1 \pmod p$
Logo, segue que t divide $p - 1$ e t divide 2^{k+1}. Como $2^{2^k} \equiv -1 \pmod p$ conclui-se que t não divide 2^k. Assim, tem-se que $t = 2^{k+1}$. Desde que t divide $p - 1$ $\Rightarrow$ $2^{k+1} \mid p - 1$.

9)
$1998k + 1 = (10^n - 1)/9 \Rightarrow (1998)(9)k + 9 = 10^n - 1 \Rightarrow$
$(1998)(9)k = 10^n - 10 \Rightarrow 2.3^5.k = 10(10^{n-1} - 1) \Rightarrow 3^5.37.k = 5(10^{n-1} - 1)$
Fazendo $k = 5k'$ $\Rightarrow$ $3^5.37.k' = (10^{n-1} - 1)$
Pelo Teorema de Euler: $\phi(3^5.37) = 5832 \Rightarrow 10^{5832} \equiv 1 \pmod{3^5.37} \Rightarrow$
$10^{(5832)x} \equiv 1 \pmod{3^5.37} \Rightarrow 3^5.37 \mid 10^{(5832)x} - 1$

10)
I) Se $n = 5k \Rightarrow 125 \mid n^{100} \Rightarrow$ resto = 0

II) Se mdc (n, 125) = 1 temos que $\phi(125) = \phi(5^3) = 5^3(1 - 1/5) \Rightarrow$
$\phi(125) = 100$
Assim, pelo Teorema de Euler, $n^{100} \equiv 1 \pmod{125} \Rightarrow$ resto = 1

11)
O termo geral da PA é $a_n = a_0 + nr \Rightarrow a_n = 1 + 729n$.
Desta forma $a_n = 10^x \Rightarrow 1 + 729n = 10^x \Rightarrow 10^x - 1 = 729n \Rightarrow$
729 divide $10^x - 1$.
Como $729 = 3^6 \Rightarrow \phi(3^6) = 3^6(1 - 1/3) \Rightarrow \phi(3^6) = 486$.
Pelo Teorema de Euler $10^{486} \equiv 1 \pmod{729} \Rightarrow 10^{486y} \equiv 1 \pmod{729} \Rightarrow$
729 divide $10^{486y} - 1$, ou seja, existem infinitos valores inteiros positivos de x tais que 729 divide $10^x - 1$, implicando que para infinitos valores inteiros positivos de n temos que $a_n = 729n + 1$ é uma potência de 10.

12)
Inicialmente, verificamos que progressão aritmética dada é
$a_m = 8 + 13m$, m = 0, 1, 2, ...
Sabemos, também, que todo número formado somente por n dígitos 9 pode ser escrito da forma $10^n - 1$.
Portanto, devemos provar que a equação $8 + 13m = 10^n - 1$ possui infinitas soluções para os inteiros positivos n e m.
Assim: $13m = 10^n - 9 \Rightarrow 10^n \equiv 9 \pmod{13}$
Note que n = 2 é uma solução, uma vez que $10^2 \equiv 9 \pmod{13}$ (1)
Pelo Teorema de Fermat: $10^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow$
$10^{12k} \equiv 1 \pmod{13}$ (2)
Multiplicando as congruências (1) e (2) $\Rightarrow 10^{12k+2} \equiv 9 \pmod{13}$, k = 1, 2, 3, ...
Deste modo, para todo inteiro positivo k, temos que todos os números formados por 12k + 2 dígitos 9's fazem parte da progressão aritmética $a_m = 8 + 13m$, m = 0, 1, 2, ...

13)
Inicialmente tentemos encontrar o menor valor inteiro de x tal que
$3^x \equiv 1 \pmod{100}$.
Como $100 = 2^2.5^2 \Rightarrow \phi(100) = 40$.
Pelo Teorema de Euler: $3^{40} \equiv 1 \pmod{100}$.
Portanto, se existir um inteiro menor que 40 tal que $3^x \equiv 1 \pmod{100}$ então x divide 40.
Como $3^{10} = 59049 \Rightarrow 3^{10} \equiv 49 \pmod{100} \Rightarrow 3^{20} \equiv 49^2 \pmod{100} \Rightarrow$
$3^{20} \equiv 2401 \pmod{100} \Rightarrow 3^{20} \equiv 1 \pmod{100}$.
Deste modo, 20 é o menor valor de x tal que $3^x \equiv 1 \pmod{100}$.
Sabemos que $a_1 = 3 \Rightarrow a_2 = 3^3 = 27 \Rightarrow b_2 = 27$.

Assim: $a_3 = 27^{27} = 3^{27}$

$3^{27} \equiv (3^{20})(3^7) \equiv 3^7 \equiv 2187 \equiv 87 \ (\text{mod. } 100) \Rightarrow b_3 = 87$

Como $a_4 = 3^{3^{27}} \Rightarrow b_4 \equiv 3^{3^{27}} \ (\text{mod. } 100)$

Como $3^{27} \equiv 87 \ (\text{mod. } 100) \Rightarrow$

$3^{27} = 100x + 87 = 20(5x) + 87 = 20y + 87 \Rightarrow 3^{27} \equiv 87 \ (\text{mod. } 20)$

Desta forma:

$b_4 \equiv 3^{3^{27}} \equiv 3^{20y+87} \equiv (3^{20})^y(3^{87}) \equiv 3^{87} \equiv (3^{20})^4(3^7) \equiv 3^7 \equiv 87 \ (\text{mod. } 100) \Rightarrow$
$b_4 = 87$.

Desde que este mesmo mecanismo vai ser repetido indefinidamente, então $b_n = 87$ para $n > 2$.

14)

Lema: Se $\underline{n}$ é um inteiro maior que 1, então que $\underline{n}$ não divide $2^n - 1$.

Demonstração:

Seja $\underline{p}$ o menor divisor primo de $\underline{n}$. Então $\text{mdc}(n, p-1) = 1$, o que implica que existem inteiros $\underline{x}$ e $\underline{y}$ tais que
$xn + y(p-1) = 1$. Suponhamos que $p \mid (2^n - 1)$, ou seja, $2^n \equiv 1 \ (\text{mod. } p)$.

Pelo teorema de Fermat temos $2^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod. } p)$.

$2 = 2^{xn + y(p-1)} = 2(^n)^x(2^{p-1})^y \equiv 1 \ (\text{mod. } p)$ que é uma contradição, ou seja, $\underline{n}$ não divide $2^n - 1$.

Desde que $xy = 2^x - 1$ então $x \mid 2^x - 1$.

Pelo teorema anterior temos que se $x > 1$ então x não divide $2^x - 1$. Desta forma $x = 1 \Rightarrow y = 1$, que é a única solução.

15)

$x_n = 3x_{n-1} + 2 \Rightarrow (x_n + 1) = 3(x_{n-1} + 1)$, ou seja, a seqüência $x_n + 1$ é uma progressão geométrica de razão 3 e primeiro termo igual a $x_0 + 1$.

Deste modo: $x_n + 1 = (x_0 + 1)3^n \Rightarrow x_n = (x_0 + 1)3^n - 1 \Rightarrow$
$x_{100} = (x_0 + 1)3^{100} - 1$.

Sabemos que $1988 = 2^2.7.71$.

Como $\text{mdc}(3, 1988) = 1$, pelo Teorema de Euler:

$\phi(2^2.7.71) = 2^2.7.71(1 - 1/2)(1 - 1/7)(1 - 1/71) = 840 \Rightarrow$

$3^{840} \equiv 1 \ (\text{mod. } 1988) \Rightarrow (3^{740})(3^{100}) \equiv 1 \ (\text{mod. } 1988)$

Deste modo, fazendo $x_0 = 3^{740} - 1$, teremos que $1988 \mid x_{100}$.

16)

Se p e q forem ambos pares ou ambos ímpares então r deverá ser par maior que 2, que é uma contradição. Logo, p e q não podem possuir a mesma paridade. Suponhamos que $p = 2$ e q é ímpar. A equação fica da forma $q^4 + 4^q = r$.

Pelo Teorema de Fermat, para $q \neq 5$, tem-se que $q^4 \equiv 1 \pmod{5}$

Por outro lado: $4 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 4^q \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow$

$q^4 + 4^q \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow r = 5$, que é impossível

Portanto, a única possibilidade seria $q = 5$, que testando na equação verifica-se que não satisfaz.

Deste modo, não existem primos p, q e r tal que $p^{2q} + q^{2p} = r$.

17)

Sendo $N = a_pa_{p-1}...a_2a_1 \Rightarrow N = (a_pa_{p-1}...a_2).10 + a_1 \Rightarrow$

$$\frac{N - a_1}{10} = a_pa_{p-1}...a_2 \Rightarrow 2N = a_1.10^{p-1} + \frac{N - a_1}{10} \Rightarrow$$

$$19N = a_1(10^p - 1) \Rightarrow N = \frac{a_1(10^p - 1)}{19}.$$

Como $0 \leq a_1 \leq 9$ e 19 é primo, devemos ter $19 \mid 10^p - 1$.

Como mdc $(19, 10) = 1$ e $\phi(19) = 18$, pelo Teorema de Euler:

$10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$.

Provemos que 18 é o menor inteiro x tal que $10^x \equiv 1 \pmod{19}$.

Sabemos que se existir outro inteiro x menor do que 18 tal que $10^x \equiv 1 \pmod{19}$, temos que x deve dividir 18, ou seja, os possíveis valores de x são 2, 3, 6 e 9.

Como $10^2 \equiv 5 \pmod{19}$, $10^3 \equiv 12 \pmod{19}$, $10^6 \equiv 11 \pmod{19}$ e $10^9 \equiv -1 \pmod{19}$, então realmente 18 é o menor inteiro x que satisfaz $10^x \equiv 1 \pmod{19}$.

Como N e 2N tem p dígitos ($a_p \neq 0$), então $a_1 \geq 2$.

Tomando $a_1 = 2$ teremos $N = 2\left(\frac{10^{18} - 1}{19}\right) = 105263157894736842$.

18)

Como $(2xp + 1)(2yp + 1) = 2kp + 1$, basta provar que os fatores primos de $2^p - 1$ são da forma $2kp + 1$, pois os outros fatores (não primos) serão obtidos pela multiplicação destes primos, sendo todos forma $2kp + 1$.

Seja q um divisor primo de $2^p - 1$, ou seja, $2^p \equiv 1 \pmod{q}$ (1)

Como q é primo ímpar: $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ (2)

As congruências (1) e (2) são semelhantes, entretanto não podemos ter $p = q - 1$, pois assim a congruência (1) se transformaria em $2^{p+1} \equiv 1 \pmod{p + 1}$, que é falso pois $p + 1$ é par, e na divisão de dois números pares temos um resto par, nunca 1.

Concluímos então que $p \neq q - 1$.

Assim, q não é raiz primitiva de 2 e aí $2^{\phi(q)} = 2^{q-1}$ não é a menor potência de 2 que deixa resto 1 quando dividida por q. Sabe-se que se $2^p \equiv 1$ (mod. q) e x é o menor inteiro positivo tal que $2^x \equiv 1$ (mod. q), então x | p.

Como p é primo, temos que x = p. Portanto, 2^p é a primeira potência de 2 que deixa resto 1 quando dividida por q.

Assim, a congruência (2) pode ser obtida através da congruência (1) elevando esta última a potências inteiras.

Como p é ímpar e q – 1 é par, devemos inicialmente elevar ao quadrado a congruência (1).

Assim, $2^p \equiv 1$ (mod. q) $\Rightarrow$ $2^{2p} \equiv 1$ (mod. q) (3)

A partir desta congruência (3) podemos obter os valores de q – 1, bastando para isto elevar (3) a valores inteiros.

Ou seja, $2^{2p} \equiv 1$ (mod. q) $\Rightarrow$ $2^{2kp} \equiv 1$ (mod. q)

Para determinados valores de k obtemos os fatores primos de $2^p - 1$ (lembre-se que os fatores não primos também são da mesma forma que os fatores primos).

Assim, temos que $q - 1 = 2kp \Rightarrow q = 2kp + 1$.

19)

Seja p um primo ≥ 3 e diferente de 5.

Temos $\dfrac{5^{2p-2}-1}{2p} = \dfrac{5^{2(p-1)}-1}{2p} = \dfrac{(5^{(p-1)}-1)}{p}\dfrac{(5^{(p-1)}+1)}{2}$.

Analisando módulo p, pelo pequeno Teorema de Fermat, $5^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p) \Leftrightarrow 5^{p-1} - 1 \equiv 0(\text{mod } p)$ e

$5^{p-1} \equiv 1(\text{mod } 2) \Rightarrow 5^{p-1} + 1 \equiv 0(\text{mod } 2)$.

Assim, $\dfrac{5^{p-1}-1}{p}$ é inteiro e $\dfrac{5^{p-1}+1}{2}$ é inteiro $\Rightarrow$ $\dfrac{5^{n-2}-1}{n}$ é inteiro quando $n = 2p$. Como existem infinitos primos p, existem infinitos n que satisfazem a condição do enunciado.

20)

Perceba que $2549 \mid (n^{2545} - 2541) \Leftrightarrow n^{2545} \equiv -8$ (mod. 2549) $\Rightarrow$
$2549 \mid (n^{2545} + 8)$

Note que 2549 é um número primo. Como n^{2545} não é múltiplo de 2549 então n não é múltiplo de 2549.

Pelo teorema de Fermat segue que: $n^{2548} \equiv 1$ (mod. 2549) $\Rightarrow$
$2549 \mid (n^{2548} - 1) \Rightarrow 2549 \mid (8n^{2548} - 8) \Rightarrow$
$2549 \mid (8n^{2548} - 8 + n^{2545} + 8) \Rightarrow 2549 \mid n^{2545}(8n^3 + 1) \Rightarrow$
$2549 \mid 8n^3 + 1 \Rightarrow (-2n)^3 \equiv 1 \equiv n^{2548}$ (mod. 2549)

Como 2548 não é divisível por 3 então: $-2n \equiv 1$ (mod. 2549) $\Rightarrow$
$2549 \mid (2n + 1)$

Digitalizado com CamScanner

O menor valor de n ocorre quando $2n + 1 = 2549 \Rightarrow n = 1274$

21)

Notemos inicialmente que $X = n^{30} - n^{14} - n^{18} + n^2 = n^2(n^{12} - 1)(n^{16} - 1)$ e que $46410 = 2.3.5.7.13.17$.

É suficiente mostrar que p divide $n^{30} - n^{14} - n^{18} + n^2$ para $p = 2, 3, 5, 7, 13$ e 17.

Como n^2 ou $n^{12} - 1$ é par, então $2 \mid X$. (1)

Se p divide n, a conclusão é direta, para $p = 2, 3, 5, 7, 13$ ou 17.

Se mdc $(n, p) = 1$, pelo Teorema de Fermat temos que $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Assim: $n^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ e $n^{16} \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow$

$13.17 \mid (n^{12} - 1)(n^{16} - 1) \Rightarrow 13.17 \mid X$ (2)

Como $n^{30} - n^{14} - n^{18} + n^2 = n^2(n^{12} - 1)(n^{16} - 1) =$

$= n^2(n^6 - 1)(n^6 + 1)(n^4 - 1)(n^4 + 1)(n^8 + 1)$.

Analogamente, sendo mdc $(n, p) = 1$, temos pelo Teorema de Fermat:

$n^6 \equiv 1 \pmod{7}$ e $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$

Deste modo $5.7 \mid (n^4 - 1)(n^6 - 1) \Rightarrow 5.7 \mid X$ (3)

Fatorando: $n^{30} - n^{14} - n^{18} + n^2 = n^2(n^{12} - 1)(n^{16} - 1) =$

$= n^2(n^3 - 1)(n^3 + 1)(n^6 + 1)(n^4 - 1)(n^4 + 1)(n^8 + 1)$.

Pelo Teorema de Fermat $n^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 3 \mid (n^2 - 1) \Rightarrow 3 \mid X$ (4)

De (1), (2), (3) e (4) concluímos que $2.3.5.7.13.17 \mid n^{30} - n^{14} - n^{18} + n^2$.

22)

Seja n o número procurado. Notemos que p^2 não divide n, pois p^2 não divide $p^{25} - p$.

Então n é o produto de distintos fatores primos. Por outro lado temos:

$2^{25} - 2 = 2(2^{24} - 1) = 2(2^{12} - 1)(2^{12} + 1) =$

$= 2(2^6 - 1)(2^6 + 1)(2^4 + 1)(2^8 - 2^4 + 1) = 2.63.65.17.241 \Rightarrow$

$2^{25} - 2 = 2.3^2.5.7.13.17.241$

$3^5 \equiv 5 \pmod{17} \Rightarrow 3^{25} \equiv 5^5 \pmod{17} \Rightarrow$

$5^5 = 3125 = 17(183) + 1\,4 \Rightarrow 3^{25} \equiv -3 \pmod{17}$

$3^5 \equiv 2 \pmod{241} \Rightarrow 3^{25} \equiv 32 \pmod{241}$

Deste modo n não é divisível por 17 e 241

$a^2 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow (a^2)^{12} \equiv (1)^{24} \pmod{2} \Rightarrow a^{24} \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow$

$a^{25} \equiv a \pmod{2} \Rightarrow 2 \mid a^{25} - a$

$a^3 \equiv a \pmod{3} \Rightarrow (a^3)^8 \equiv a^8 \pmod{3} \Rightarrow a^{24} \equiv a^8 \pmod{3} \Rightarrow$

$a^{25} \equiv a^9 \equiv a^3 \equiv a \pmod{3} \Rightarrow 3 \mid a^{25} - a$

$a^5 \equiv a \pmod{5} \Rightarrow a^{25} \equiv a^5 \equiv a \pmod{5} \Rightarrow 5 \mid a^{25} - a$

$a^7 \equiv a \pmod{7} \Rightarrow a^{21} \equiv a^3 \pmod{7} \Rightarrow a^{25} \equiv a^7 \equiv a \pmod{7} \Rightarrow$

$7 \mid a^{25} - a$

$a^{25} - a = a(a^{12} - 1)(a^{12} + 1)$

Pelo Teorema de Fermat temos que $13 \mid a^{25} - a$

Assim n deve ser igual ao número de divisores positivos de 2.3.5.7.13, excetuando o valor 1, ou seja: $n = 2^5 - 1 \Rightarrow n = 31$

23)

Inicialmente vamos enunciar a demonstrar dois lemas que serão usados posteriormente nesta solução:

Lema 1: A única solução natural de $2^n = x^2 - 1$ é $n = 3$, $x = 3$.

Prova: $2^n = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$. Como os únicos fatores de 2^n que diferem por 2 são 4 e 2 temos que $x = 3 \Rightarrow n = 3$

Lema 2: As únicas soluções naturais (x, n) de $2^n = x^2 + 1$ são $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

Prova: Se $n = 0 \Rightarrow x = 0$. Se $n = 1 \Rightarrow x = 1$.

Para $n \geq 2$ temos que $2^n \equiv 0 \pmod{4}$.

Se $x \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow x^2 + 1 \equiv 1 \pmod{4}$

Se $x \equiv \pm 1 \pmod{4} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow x^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$

Se $x \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow x^2 + 1 \equiv 1 \pmod{4}$

Como para $n \geq 2$ temos que 2^n é sempre divisível por 4 e $x^2 + 1$ nunca é divisível por 4, então não temos soluções naturais (x, n) para $n \geq 2$, sendo $(0, 0)$ e $(1, 1)$ as únicas soluções.

Vamos agora ao problema proposto.

Se $p = 2 \Rightarrow (2^{p-1} - 1)/2 = 1/2$, implicando que p é um primo ímpar $\Rightarrow$ $p = 2k + 1$.

Então $\dfrac{2^{p-1}-1}{p} = \dfrac{2^{2k}-1}{2k+1} = \dfrac{(2^k+1)(2^k-1)}{2k+1}$, que é inteiro devido ao Teorema Simples de Fermat.

Desde que $2k + 1$ é primo temos que $2k + 1 \mid 2^k + 1$ ou $2k + 1 \mid 2^k - 1$.

Como $2k + 1$ é primo e $\text{mdc}(2k + 1, 2k - 1) = 1 \Rightarrow$

$\text{mdc}\left(\dfrac{2^k+1}{2k+1}, 2^k - 1\right) = 1$ e $\text{mdc}\left(2^k + 1, \dfrac{2^k-1}{2k+1}\right) = 1$.

Assim, para que $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ seja um quadrado perfeito, temos que $\dfrac{2^k+1}{2k+1}$ e $2^k - 1$ são quadrados perfeitos ou $2^k + 1$ e $\dfrac{2^k-1}{2k+1}$ são quadrados perfeitos.

Caso 1: $2^k - 1 = x^2$. Pelo Lema 2 temos que $k = 0$ ou $k = 1$. Se $k = 0$ temos que $\dfrac{2^k+1}{2k+1} = 2$, que não serve pois 2 não é um quadrado perfeito.

Se $k = 1$ temos que $\dfrac{2^k+1}{2k+1} = 1 \Rightarrow p = 3$.

Caso 2: $2^k + 1 = x^2$. Pelo Lema 1 temos que $k = 3 \Rightarrow \dfrac{2^k-1}{2k+1} = 1 \Rightarrow$

$p = 7$. Desta forma, $p = 3$ e $p = 7$ são as únicas soluções.

24)
Como mdc $(2, 9) = 1$ podemos aplicar o Teorema de Euler:
$\phi(9) = 6 \Rightarrow 2^6 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 2^{6n} \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 2^{6n+1} \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow$
$2^{6n+2} \equiv 4 \pmod{9} \Rightarrow 2^{6n+3} \equiv 8 \pmod{9} \Rightarrow 2^{6n+4} \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow$
$2^{6n+5} \equiv 5 \pmod{9}$
Deste modo, para que duas potências de 2 tenham o mesmo resto na divisão por 9, devemos ter que a diferença entre os seus expoentes deve ser múltiplo de 6, ou seja, a menor diferença dos expoentes é 6.
Como as duas potências de 2 do enunciado são obtidas pela reordenação dos dígitos da outra, a soma dos dígitos das duas são iguais, implicando que o resto da divisão por 9 dos dois números é igual.
Notemos também que o número máximo de potências de 2 com um mesmo número de dígitos é 4, que acontece quando o primeiro dígito de x é 1, e as outras potências são 2x, 4x e 8x. Logo, é impossível existir duas potências de 2 distintas com o mesmo número de dígito tais que uma possa ser obtida através de uma reordenação dos dígitos da outra, pois a distância entre os expoentes das duas é no máximo 3, que torna impossível que as duas tenham o mesmo resto na divisão por 9 (a distância entre os expoentes teria que ser igual a 6).

25)
Seja p um número primo ímpar.
Pelo Teorema de Fermat, se mdc $(a, p) = 1$ temos que
$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow (a^{p-1})^2 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow$
$a^{2p-2} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a(a^{2p-2}) \equiv a \pmod{p} \Rightarrow$
$a^{2p-1} - a \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p \mid a^{2p-1} - a$.
Como a^{2p-1} e a tem a mesma paridade, $a^{2p-1} - a$ é par, e como p é ímpar:
$2p \mid a^{2p-1} - a$.
Se mdc $(a, p) \neq 1 \Rightarrow$ mdc $(a, p) = p$, pois p é primo.
Assim, temos diretamente que $2p \mid a^{2p-1} - a$.
Deste modo, fazendo $n = 2p$ (p um primo ímpar) temos sempre que $n \mid a^{n-1} - a$, para todo inteiro a.

26)
I) Vamos mostrar que $n = 3^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ divides $2^n + 1$.

Notemos que vale para $k = 0$, desde que $3^0 = 1$ divides $2^{3^0} + 1 = 2$.

Suponhamos que exista k tal que, $2^{3^k} + 1 = A \cdot 3^k$, onde A é um inteiro.

Então: $2^{3^{k+1}} + 1 = \left(2^{3^k}\right)^3 + 1 = (A \cdot 3^k - 1)^3 + 1 = A^3 \cdot 2^{3^{k+1}} - 3A^2$.

II) $n = 2$ não é solução, pois 2 não divide 5

Além disso, como $2^n + 1$ é sempre ímpar, então n não pode ser par $\Rightarrow$ $n = 2k + 1$, onde n é primo

Pelo Teorema de Fermat: $2^{2k} \equiv 1 \pmod{n}$ $\Rightarrow$ $2^{2k+1} \equiv 2 \pmod{n}$ $\Rightarrow$ $2^{2k+1} + 1 \equiv 3 \pmod{n}$ $\Rightarrow$ $2^n + 1 \equiv 3 \pmod{n}$ $\Rightarrow$ se n divide $2^n + 1$, então n divide 3, implicando que $n = 3$.

27)

Sendo p um primo ímpar, pelo Teorema de Fermat temos que

$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ $\Rightarrow$ $2^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$ $\Rightarrow$

$2^{k(p-1)} + k(p-1) \equiv 1 + k(p-1) \pmod{p}$ $\Rightarrow$

$2^{k(p-1)} + k(p-1) \equiv -k + 1 \pmod{p}$ $\Rightarrow$

$2^{k(p-1)} + k(p-1) + (k-1) \equiv 0 \pmod{p}$

Fazendo $n = k(p-1)$ temos que $2^n + n = 2^{k(p-1)} + k(p-1)$

Como $p \mid [2^{k(p-1)} + k(p-1) + (k-1)]$, para que $p \mid 2^{k(p-1)} + k(p-1)$ $\Rightarrow$ $p \mid k-1$

Ou seja, basta fazer $k - 1 = x.p$ $\Rightarrow$ $k = xp + 1$

Em outras palavras, para cada número primo p, p divide $2^n + n$ se $n = k(p-1)$ e $k = xp + 1$, $x \in N$.

28)

Como mdc $(2, 5^{10}) = 1$, podemos aplicar o Teorema de Euler:

$\phi(5^{10}) = 4.5^9 = 7812500$ $\Rightarrow$ $2^{7812500} \equiv 1 \pmod{5^{10}}$

Multipliquemos esta última congruência por 2^n, onde $n \geq 10$.

$2^n 2^{7812500} \equiv 2^n \pmod{10^{10}}$ $\Rightarrow$ $2^{7812500+n} \equiv 2^n \pmod{10^{10}}$

Desta última congruência concluímos que os últimos 10 dígitos de $2^{7812500+n}$ e 2^n são iguais ($n \geq 10$), ou seja, 7812500 é um período para a repetição dos últimos 10 dígitos de 2^n.

Provemos que este é o menor período de repetição.

Provar que 7812500 é o menor período de repetição dos últimos 10 dígitos de 2^n é a equivalente a provar que $7812500 = 4.5^9$ é raiz primitiva de 2 módulo 5^{10}.

Para tanto vamos provar a seguinte proposição:

Proposição: Se p é um número primo ímpar e a é raiz primitiva módulo p^2 então a é raiz primitiva módulo p^k para todo $k \in N$.

Demonstração: temos $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, mas a^{p-1} não é congruente a 1 (mod. p^2), portanto $a^{p-1} = 1 + b_1 p$, onde p não divide b_1. Vamos mostrar por indução que $a^{p^{k-1}(p-1)} = 1 + b_k p^k$, onde p não divide b_k, para todo $k \geq 1$:

Temos $a^{p^k(p-1)} = (a^{p^{k-1}(p-1)})^p = (1 + b_k p^{k-1})^p =$

$= 1 + b_k p^{k+1} + C_p^2 b_k^2 p^{2k} + \ldots \equiv 1 + b_k p^{k-1} \pmod{p^{k+2}}$.

Logo $a^{p^k(p-1)} = 1 + b_k p^{k+1}$, com $b_{k+1} \equiv b_k$ (módulo p). Segue-se que p não divide b_{k+1}.
Vamos agora mostrar por indução que a é raiz primitiva módulo p^k para todo $k \geq 2$. Suponha que a seja raiz primitiva módulo p^k. Então temos $p^{k-1}(p-1) = \varphi(p^k) = ord_{p^k} a \mid ord_{p^{k+1}} a \mid \varphi(p^{k+1}) = p^k(p-1)$.

Portanto, $ord_{p^{k+1}} a = p^{k-1}(p-1)$ ou $ord_{p^{k+1}} a = p^k(p-1) = \varphi(p^{k+1})$, mas o primeiro caso é impossível, pois $a^{p^{k-1}(p-1)} = 1 + b_k p^k$, que não é congruente a 1 módulo p^{k+1}, pois p não divide b_k.
Portanto $ord_{p^{k+1}} a = \varphi(p^{k+1})$ e a é raiz primitiva módulo p^{k+1}.

Assim, fazendo p = 5, notando que 2 é raiz primitiva módulo 5, e, como $2^4 = 16 \neq 1$ (módulo 25), temos que 2 é raiz primitiva módulo $25 = 5^2$. Portanto, pela proposição, 2 é raiz primitiva módulo 5^k, $\forall k \in N$.
Concluímos, então, que 7812500 é o menor período de repetição dos últimos 10 dígitos de 2^n.

29)
Primeiramente vamos provar que 10 é raiz primitiva no módulo 7^n.
*Sabemos que quando n = 1 ou n = 2, isto é verdadeiro.
** Suponhamos que 10 seja uma raiz primitiva no módulo $7^n (n \geq 2)$
Seja "a" uma raiz primitiva no módulo 7^{n+1} (ela existe pois 7^{n+1} é uma potência de um primo), isto é: a^j percorre todas as classes de congruência que são primas com 7, no módulo 7^{n+1}, consequentemente "a" também é raiz primitiva no módulo 7^n.
Pela definição de "a", existe um $x \in N$ e um $y \in N$, tais que:
$a^x \equiv 10(\text{mod}\, 7^n) \quad a^y \equiv 10(\text{mod}\, 7^{n+1})$
Temos que $\text{mdc}(x; \phi(7^n)) = 1$, pois 10 também é raiz primitiva no módulo 7^n. Se $\text{mdc}(y; \phi(7^{n+1})) = d \neq 1$, teríamos:

$$a^y \equiv 10(\text{mod}\, 7^{n+1}) \Rightarrow \begin{cases} a^y \equiv 10(\text{mod}\, 7^n) \\ a^x \equiv 10(\text{mod}\, 7^n) \end{cases} \Rightarrow a^x \equiv a^y(\text{mod}\, 7^n) \Rightarrow x \equiv y(\text{mod}\, \phi(7^n)) \Rightarrow$$

y é primo com $\phi(7^n)$ (pois x também é)
Chegamos a uma contradição, pois $\text{mdc}(y; \phi(7^{n+1})) = d$ e $\text{mdc}(y; \phi(7^n)) = 1$, isto quer dizer:
$\text{mdc}(y; 6 \cdot 7^n) \neq 1$ e $\text{mdc}(y; 6 \cdot 7^{n-1}) = 1$ (com $n \geq 2$), que é um absurdo.
Daí concluímos que $\text{mdc}(y; \phi(7^{n+1})) = 1$.
Logo 10 também é uma raiz primitiva no módulo 7^{n+1}, e por indução concluímos que: $\forall n \in IN$; 10 é raiz primitiva no módulo 7^n.

Agora vamos achar um exemplo:

Considere a, tal que: $7^a > 10^{2000}$ e como 10 é raiz primitiva no módulo 7^a, considere b > a, tal que:

$10^b \equiv 7 - 6 \cdot 10^a \pmod{7^a}$, temos que:

$$x = \left(\frac{10^a - 1}{9} \cdot 7\right) + \frac{10^b - 10^a}{9} \equiv 0 \pmod{7^a} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{7^a}$$

mas: $x = \underbrace{11111...1}_{b-a\ 1's}\underbrace{1000...00}_{a\ 0's} + \underbrace{777...77}_{a\ 7's} = \underbrace{11111...1}_{b-a\ 1's}\underbrace{1777...77}_{a\ 7's}$

Ou seja x é divisível pelo produto de seus dígitos.

30)

Seja n o número dado e seja c = 123456789.

Inicialmente temos que se p = 3 então diretamente p | n pois os dois termos de n são divisíveis por 3.

Assuma agora que p ≠ 3. Assim:

$$n = \left(\sum_{k=0}^{p-1} 10^{8p+k} + 2\sum_{k=0}^{p-1} 10^{7p+k} + 3\sum_{k=0}^{p-1} 10^{6p+k} + \ldots + 8\sum_{k=0}^{p-1} 10^{p+k} + 9\sum_{k=0}^{p-1} 10^{k}\right) - c \Rightarrow$$

$$n = \frac{1}{9}(10^p - 1)(10^{8p} + 2.10^{7p} + 3.10^{6p} + \ldots + 8.10^p + 9.10^0) - c \Rightarrow$$

$$n = \frac{1}{9}(10^{9p} + 10^{8p} + 10^{7p} + \ldots + 10^p - 9) - c.$$

Desde que p | n se e somente se 9p | 9n, é suficiente provar que $9p \mid 10^{9p} + 10^{8p} + 10^{7p} + \ldots + 10^p - 9 - 9c$.

Como $9 + 9c = 1111111110 = 10^9 + 10^8 + 10^7 + \ldots + 10$ então:

$9p \mid (10^{9p} + 10^{8p} + 10^{7p} + \ldots + 10^p) - (10^9 + 10^8 + 10^7 + \ldots + 10)$.

Pelo Teorema de Fermat: $10^p \equiv 10 \pmod{p} \Rightarrow 10^{mp} \equiv 10^m \pmod{p}$, m = 1, 2, ..., 9, onde mdc (p, 9) = 1 pois p ≠ 3.

Aplicando m = 1, 2, ..., 9 obtemos:

$10^p \equiv 10 \pmod{p}$

$10^{2p} \equiv 10^2 \pmod{p}$

$10^{3p} \equiv 10^3 \pmod{p}$

...

$10^{9p} \equiv 10^9 \pmod{p}$

Somando estas 9 equações:

$10^{9p} + 10^{8p} + 10^{7p} + \ldots + 10^p \equiv 10^9 + 10^8 + \ldots + 10 \pmod{p} \Rightarrow$

$(10^{9p} + 10^{8p} + 10^{7p} + \ldots + 10^p) - (10^9 + 10^8 + 10^7 + \ldots + 10) \equiv 0 \pmod{p}$

31)

Seja p um número primo e $p \mid (5^p - 2^p)$

Pelo corolário do Teorema de Fermat temos que:

$5^p \equiv 5 \pmod{p}$ e $2^p \equiv 2 \pmod{p}$ $\Rightarrow$ $5^p - 2^p \equiv 3 \pmod{p}$ $\Rightarrow$ $p = 3$
Então se p e q são números primos tal que $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)/pq$ é um inteiro e se $p \mid (5^p - 2^p)$, então $p = 3$.
Como $5^3 - 2^3 = 3^2.13$ e $q \mid (5^q - 2^q)$, então $q = 3$ ou $q = 13$
Assim os pares (3, 3), (3, 13), (13, 3) satisfazem o enunciado
Analisemos agora para $p \neq 3$ e $q \neq 3$
Agora $p \mid (5^q - 2^q)$ e $q \mid (5^p - 2^p)$ $\therefore$ assumamos que $p > q$ e claramente mdc $(p, q - 1) = 1$.
Assim existem inteiros positivos a e b tais que $ap - b(q - 1) = 1$
Desde que mdc $(q, 5) =$ mdc $(q, 2) = 1$ $\Rightarrow$ $5^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ e
$2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ $\Rightarrow$ $5^{q-1} \equiv 2^{q-1} \pmod{q}$
Como $5^p \equiv 2^p \pmod{q}$ $\Rightarrow$ $5^{ap} \equiv 2^{ap} \pmod{q}$ $\Rightarrow$
$5^{b(q-1)+1} \equiv 2^{b(q-1)+1} \pmod{q}$ (1)
$\therefore 5^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ $\Rightarrow$ $5^{b(q-1)} \equiv 1 \pmod{q}$ $\Rightarrow$
$5^{b(q-1)+1} \equiv 5 \pmod{q}$ (2)
$\therefore$ Do mesmo modo $2^{b(q-1)+1} \equiv 2 \pmod{q}$ (3)
(1), (2) e (3) $\Rightarrow$ $q = 3$ que é uma contradição
Então as únicas respostas são (3, 3), (3, 13), (13, 3).

32)
Suponha o contrário, isto é, que para algum inteiro $n > 1$ tenhamos $3^n - 2^n \equiv 0 \pmod{n}$. Obviamente 2 e 3 não dividem n. Seja agora p o menor fator primo de n e $n = pm$ (aqui é que usamos ser $n > 1$, para garantir que n tem fator primo). Nossa hipótese, juntamente com o pequeno teorema de Fermat, nos dão:
$3^n \equiv 2^n \pmod{n}$ $\Rightarrow$ $3^{mp} \equiv 2^{mp} \pmod{p}$ $\Rightarrow$ $3^m \equiv 2^m \pmod{p}$ (*)
Se $d = \text{mdc}(m, p - 1)$, temos em particular que d divide n. Portanto, o fato de ser p o menor divisor primo de n implica que $d = 1$. Tome então inteiros positivos x e y satisfazendo $mx = (p - 1)y + 1$.
O pequeno teorema de Fermat de novo, juntamente com (*), nos dão
$3 \equiv 3^{(p-1)y+1} = 3^{mx} \equiv 2^{mx} = 2^{(p-1)y+1} \equiv 2 \pmod{p}$, o que é um absurdo.

33)
Vamos mostrar um método de como construir um conjunto infinito $(a_1, a_2, \ldots)$ de inteiros da forma $2^n - 3$ tal que todo par possui máximo divisor comum igual a 1.
Inicialmente escolhemos um inteiros n_1 qualquer para montar o primeiro elemento do conjunto, que é $a_1 = 2^{n_1} - 3$.
Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_k$ todos os fatores primos de a_1. Pelo Teorema de Fermat temos que $2^{p_i} \equiv 1 \pmod{p_i}$, para $i = 1, 2, \ldots, k$.
Seja $n_2 = 1 + (p_1 - 1)(p_2 - 1)\ldots(p_k - 1)$. Desta forma, fazendo $a_2 = 2^{n_2} - 3$, temos que:

$2^{n_2} \equiv 2.2^{(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_k-1)} \equiv 2$ (mod. p_i), $i = 1, 2, \ldots, k$, ou seja,
$2^{n_2} - 3 \equiv -1$ (mod. p_i), implicando que mdc $(a_1, a_2) = 1$.
Para obter a_3, basta enumerar todos os fatores primos de a_1 e a_2 ($p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}, \ldots, p_r$) e fazer $a_3 = 2^{n_3} - 3$, onde $n_3 = 1 + (p_1 - 1)(p_2 - 1)\ldots(p_r - 1)$. Desta forma, analogamente ao caso anterior, teremos mdc (a_1, a_3) = mdc $(a_2, a_3) = 1$. Continuando com este procedimento, para obter os outros termos a_i do conjunto, podemos encontrar um conjunto com infinitos elementos, uma vez que o número de primos é infinito.

34)

a) Seja $n = p$ um número primo tal que $p \mid a^p - 1$. Então mdc $(a, p) = 1$.
Deste modo $p \mid a(a^{p-1} - 1) + (a - 1)$.
Pelo Teorema de Fermat temos que $p \mid a^{p-1} - 1$, pois mdc $(a, p) = 1$.
Assim, para que $p \mid a^p - 1$ temos que $p \mid (a - 1) \Rightarrow a \equiv 1$ (mod. p).
Elevando a congruência anterior a potências inteiras $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, p - 1$ obtemos:
$1 \equiv 1$ (mod. p) $\quad a \equiv 1$ (mod. p) $\quad a^2 \equiv 1$ (mod. p) $\quad a^3 \equiv 1$ (mod. p) $\ldots$
$a^{p-1} \equiv 1$ (mod. p).
Somando todas estas congruências temos:
$a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1 \equiv p$ (mod. p) $\Rightarrow$
$a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1 \equiv 0$ (mod. p)
Sendo $a^p - 1 = (a - 1)(a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1)$ e como $p \mid a - 1$ e $p \mid a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1$, temos que $p^2 \mid a^p - 1$.
b) Sejam p e q dois números primos distintos com $p, q \geq 3$.
Assumamos que $a^{pq} \equiv 1$ (mod. pq).
Então de $(a^p)^q \equiv 1$ (mod. q) e do item a) temos que $(a^p)^q \equiv$ (mod. q^2).
Analogamente $(a^q)^p \equiv 1$ (mod. p) $\Rightarrow (a^q)^p \equiv 1$ (mod. p^2).
Assim, concluímos que $a^{pq} \equiv 1$ (mod. p^2q^2), desde que mdc $(p^2, q^2) = 1$.
Como existem infinitos números primos temos infinitos números compostos da forma pq que satisfazem o enunciado.

35)

Fatorando obtemos que: $(a + b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^2$.
Para que $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ seja divisível por 7^7, basta que $a^2 + ab + b^2$ seja divisível por 7^3.
Notemos que $a^2 + ab + b^2 = (a^3 - b^3)/(a - b)$, ou seja, para que $a^2 + ab + b^2$ seja divisível por 7^3 devemos ter $a^3 \equiv b^3$ (mod. 7^3).
Como $ab(a + b)$ não é divisível por 7, então mdc $(a, b) = 1$. Assim, pelo Teorema de Euler:
$x^{\varphi(7^3)} \equiv 1$ (mod. 7^3) $\Rightarrow x^{2.3.49} \equiv 1$ (mod. 7^3) $\Rightarrow (x^{98})^3 \equiv 1$ (mod. 7^3).
Deste modo temos $y^3 \equiv 1$ (mod. 7^3) se $y = a^{98}$, com mdc $(n, 7) = 1$.

Assim, fazendo $a = 2^{98}$ e $b = 1$, temos $(2^{98})^3 \equiv (1)^3$ (mod. 7^3), ou seja, $a = 2^{98}$ $b = 1$ satisfaz o enunciado.
Entretanto é possível encontrar um valor menor para a.
Como $2^{10} = 3.7^3 - 5 \Rightarrow 2^{10} \equiv -5$ (mod. 7^3) $\Rightarrow 2^{40} \equiv 625$ (mod. 7^3) $\Rightarrow$ $2^{40} \equiv 61$ (mod. 7^3) $\Rightarrow 2^{80} \equiv 3721$ (mod. 7^3) $\Rightarrow 2^{80} \equiv -52$ (mod. 7^3) $\Rightarrow$ $(2^8)(2^{10})(2^{80}) \equiv (256)(-5)(-52)$ (mod. 7^3) $\Rightarrow 2^{98} \equiv 66560$ (mod. 7^3) $\Rightarrow$ $2^{98} \equiv 18$ (mod. 7^3)
Desde que:
$(2^{98})3 \equiv 1$ (mod. 7^3) e $2^{98} \equiv 18$ (mod. 7^3) então $(18)^3 \equiv 1$ (mod. 7^3)
Portanto o par a = 18 e b = 1 satisfaz o enunciado.

36)

Analisando os casos:
$p = 2$: temos que as únicas soluções são para $n = 1$ e $n = 2$.
$p = 3$: temos que as únicas soluções são para $n = 1$ e $n = 3$.
$p > 3$: se $n < p - 1$, temos: (Caso trivial $n = 1 \Rightarrow p$ é divisível por 1).
n é ímpar, pois, $(p - 1)^n + 1$ é ímpar, logo n não pode ser par.
Lema: Seja $a > b \geq 3$, então: $a^b < b^a$

Prova: Basta provar que: $b \cdot \ln a < a \cdot \ln b \Rightarrow \dfrac{b}{\ln b} < \dfrac{a}{\ln a}$, mas isto é obvio para a, $b \geq 3$, pois a função $t(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ é crescente a partir de e. ($t'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \geq 0$ para $x \geq e$.)

Afirmação: Se $p - 1 > n \geq 3$ (pois n é ímpar), então: $(p-1)^n + 1 < n^{p-1}$.
$(p-1)^n < n^{p-1} \Rightarrow (p-1)^n + 1 = n^{p-1}$ ou $(p-1)^n + 1 < n^{p-1}$.
Como $(p-1)^n + 1 \neq n^{p-1}$ (pois $(p-1)^n + 1$ é múltiplo de p e n^{p-1} não é, temos $(p-1)^n + 1 < n^{p-1}$.
Portanto n não pode ser menor que $p - 1$.
Afirmação: Se $n > p$, então n não é primo:
Prova: se n for primo temos:
$(p-1)^n + 1 \equiv 0 (\bmod n) \Rightarrow [a^n \equiv a (\bmod n)]$
$(p-1) + 1 \equiv 0 (\bmod n) \Rightarrow p \equiv 0 (\bmod n)$ (um absurdo!).
Logo, n é composto: $n = a.b$ (a é o menor fator primo de n).
Então:
$(p-1)^{ab} + 1 \equiv 0 (\bmod (ab)^{p-1}) \Rightarrow (p-1)^{ab} + 1 \equiv 0 (\bmod a^{p-1}) \Rightarrow (p-1)^{ab} \equiv -1 (\bmod a^{p-1})$
$(p-1)^{ab} + 1 \equiv 0 (\bmod (ab)^{p-1}) \Rightarrow (p-1)^{k} \equiv 1 (\bmod a^{p-1})$.
Seja K o menor natural tal que $(p-1)^k \equiv 1 (\bmod a^{p-1})$.
Devemos ter $K \mid 2ab$ (pois $2ab = K \cdot q + r \Rightarrow (p-1)^r \equiv 1$ (mod. a^{p-1}) $\Rightarrow$ $r = 0$)
Além disso devemos ter $K \mid \phi(a^{p-1}) \Rightarrow K \mid a^{p-2}(a-1)$.

Então $K = 2^{\alpha}\cdot a^{c}$, onde $\alpha \in \{0, 1\}$ (pois se K tivesse um outro fator primo além do 2 que dividisse $(a-1)$, esse fator também teria que dividir 2ab que implica que esse fator dividiria ab, mas como o menor fator primo de $n = ab$ é o a, teríamos absurdo).

K é par, pois se não fosse teríamos $K \mid ab \Rightarrow (p-1)^{ab} \equiv 1 \equiv -1 \pmod{a^{p-1}}$, um absurdo pois é ímpar. Logo $K = 2 \cdot a^{c}$.

Temos $(p-1)^{2\cdot a^{c}} \equiv 1 \pmod{a^{p-1}} \Rightarrow ((p-1)^{a^{c}})^{2} \equiv 1 \pmod{a^{p-1}} \Rightarrow$

$(p-1)^{a^{c}} \equiv -1 \pmod{a^{p-1}} \Rightarrow (p-1)^{a^{c}} \equiv -1 \pmod{a} \Rightarrow$

$p-1 \equiv -1 \pmod{a}$, pois $b^{a} \equiv b \pmod{a}) \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{a}$, um absurdo pois $p \neq a$, porque $p < n < 2p$). Logo não podemos ter $n > p$.

As únicas possibilidades que restam é $n = p - 1$ ou $n = p$.

$n = p - 1$ é falsa pois $p - 1$ é par. Se $n = p$ temos: $(p-1)^{p} + 1 \equiv 0 \pmod{p^{p-1}}$ e como $p > 3$, temos:

$$[p^{p} + \binom{p}{1}p^{p-1}(-1)^{1} + \ldots + \binom{p}{3}p^{3}\cdot(-1)^{p-3} + \binom{p}{2}p^{2}\cdot(-1)^{p-2} + \binom{p}{1}p^{1}(-1)^{p-1} + (-1)^{p}] + 1 \equiv 0 \pmod{p^{3}} \Rightarrow$$

$p^{2} \equiv 0 \pmod{p^{3}}$.

(Um absurdo pois p^3 não divide p^2). Logo as soluções são:

$S = \{(1, 2); (2, 2); (1, 3); (3, 3)\} \cup \{ (1, p) \mid p \text{ é primo}\}$

37)

(1) Assuma que o item a) é verdadeiro, ou seja, que $n \mid a^{n} - a$.

Suponha, por absurdo, que $p^2 \mid n$, para algum primo p.

Fazendo $a = p + 1$ e $n = p^2$, tem-se que $p^2 \mid (p+1)^{p^2} - (p+1)$.

Entretanto, note que: $(p+1)^{p^2} - (p+1) = p^2 - p + \sum_{k=2}^{p^2}\binom{p^2}{k}p^{k}$

Como p^2 divide todos os termos de $\sum_{k=2}^{p^2}\binom{p^2}{k}p^{k}$, então segue que $p^2 \mid p$, que é um absurdo. Assim, p^2 não divide n.

Além disso, se a é raiz primitiva módulo p, então $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p}$, fazendo com que $p - 1 \mid n - 1$.

(2) Assuma agora que p^2 não divide n e que $p - 1 \mid n - 1$ para todos os primos p tais que $p \mid n$.

Assim, conclui-se que $p \mid a$ ou $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Em ambos os casos tem-se que $a^{n} \equiv a \pmod{p}$ para todo primos p que divide n.

Loogo, conclui-se que as proposições são equivalentes.

38)

Note que: $19^{88} - 1 = (19^{11} - 1)(19^{11} + 1)(19^{22} + 1)(19^{44} + 1)$

I) Primeiro analisemos a potência de 3.

$19 \equiv -1 \pmod{9} \Rightarrow 19^{11} \equiv -1 \pmod{9} \Rightarrow 19^{22} \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow$
$19^{44} \equiv 1 \pmod{9}$

Pelo Teorema de Euler: $\phi(27) = 18 \Rightarrow 19^{18} \equiv 1 \pmod{27}$

Provemos que 18 é o menor inteiro x tal que $19^x \equiv 1 \pmod{27}$.

Sabemos que se existir outro inteiro x menor do que 18 tal que $19^x \equiv 1 \pmod{27}$, temos que x deve dividir 18, ou seja, os possíveis valores de x são 2, 3, 6 e 9.

i) $19^2 \equiv 10 \pmod{27}$

ii) $19^3 \equiv 1 \pmod{27}$

Assim, 19 não é raiz primitiva de 27.

Como $19^3 \equiv 1 \pmod{27} \Rightarrow 19^9 \equiv 1 \pmod{27} \Rightarrow 19^{11} \equiv 10 \pmod{27} \Rightarrow$
$19^{22} \equiv 19 \pmod{27} \Rightarrow 19^{44} \equiv 10 \pmod{27}$

Como a maior potência de 3 que divide algum dos termos $19^{11} - 1$, $19^{11} + 1$, $19^{22} + 1$ ou $19^{44} + 1$ é $3^2 \mid 19^{11} + 1$, então temos que a maior potência de 3 que divide $19^{88} - 1$ é 3^2.

II) Analisemos agora a potência de 2.

$19 \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow 19^{11} \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow 19^{22} \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow$
$19^{44} \equiv 1 \pmod{4}$

$19 \equiv 3 \pmod{8} \Rightarrow 19^{11} \equiv 3^{11} \equiv 9^5.3 \equiv 3 \pmod{8} \Rightarrow$
$19^{22} \equiv 3^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 19^{44} \equiv 1 \pmod{8}$

Assim, as maiores potências de 2 que dividem os fatores destacados são:

$2^2 \mid 19^{11} + 1$, $2 \mid 19^{11} - 1$, $2 \mid 19^{22} + 1$, $2 \mid 19^{44} + 1$

Portanto, $2^5 \mid 19^{88} - 1$

Concluímos assim que o maior divisor da forma $2^a.3^b$ que dividem $19^{88} - 1$ é $2^5.3^2$

Então, $S(2^5.3^2) = (2 + 4 + 8 + 16 + 32)(3 + 9) = 744$

39)

Inicialmente vamos demonstrar o seguinte lema: "Se k é um inteiro positivo, $k > 1$, então $2^{k-1} \not\equiv -1 \pmod{k}$"

Demonstração:

Suponhamos que $k \mid 2^{k-1} + 1 \Rightarrow$ k é ímpar. Assim, se $k = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$, então todos os p_i são primos ímpares.

Logo, pode-se fazer $p_i - 1 = 2^{m_i}.t_i$, com t_i ímpar.

Suponhamos que $m_1 \leq m_2 \leq ... \leq m_r$.

Assim: $p_1^{\alpha_1} \equiv 1 \pmod{2^{m_1}}$, $p_2^{\alpha_2} \equiv 1 \pmod{2^{m_1}}$, ..., $p_r^{\alpha_r} \equiv 1 \pmod{2^{m_1}} \Rightarrow$
$p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r} \equiv 1 \pmod{2^{m_1}} \Rightarrow$
$k \equiv 1 \pmod{2^{m_1}} \Rightarrow k - 1 = 2^{m_1}.u$

Porém: $2^{k-1} \equiv -1 \pmod{k} \Rightarrow 2^{2^{m_1}.u} \equiv -1 \pmod{k} \Rightarrow$

$2^{2^{m_1}.u} \equiv -1 \pmod{p_1} \Rightarrow 2^{2^{m_1}.u.t_1} \equiv (-1)^{t_1} \pmod{p_1} \Rightarrow$

$2^{2^{m_1}.u.t_1} \equiv -1 \pmod{p_1} \Rightarrow 2^{(p_1-1)u} \equiv -1 \pmod{p_1}$

Contudo, pelo Teorema de Fermat:

$2^{p_1-1} \equiv 1 \pmod{p_1} \Rightarrow 2^{(p_1-1)u} \equiv 1 \pmod{p_1}$

Assim, a expressão $2^{(p_1-1)u} \equiv -1 \pmod{p_1}$ é uma contradição.

Deste modo, não existe k inteiro tal que $2^{k-1} \equiv -1 \pmod{k}$

Separemos a análise em 3 casos:

i) p e q ímpares: $2^p + 2^q \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 2^q + 2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow$
$2^q \equiv -2 \pmod{p} \Rightarrow (2^q)^p \equiv (-2)^p \pmod{p} \Rightarrow 2^{pq} \equiv -2 \pmod{p}$

Analogamente conclui-se que $2^{pq} \equiv -2 \pmod{q} \Rightarrow$
$2^{pq} \equiv -2 \pmod{pq} \Rightarrow 2^{pq-1} \equiv -1 \pmod{pq}$, que contradiz o lema demonstrado anteriormente.

ii) $p = 2$ e $q > 2$: $4 + 2^q \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow 4 + 2 \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow$
$6 \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow q = 3$

iii) $p = q = 2$: $2^2 + 2^2 = 8$, que é divisível por 4

Portanto, as soluções são (2, 2), (2, 3) e (3, 2)

40)

Se $2p + 1$ também é primo, temos:

$2^{\phi(2p+1)} \equiv 1 \pmod{2p+1} \Rightarrow 2^{2p} \equiv 1 \pmod{2p+1} \Rightarrow$

$2^p \equiv \pm 1 \pmod{2p+1}$, só que $2p+1$ é da forma $8k+7$, logo

$2^p \equiv 1 \pmod{2p+1} \Rightarrow 2p+1 \mid 2^p - 1$

Se $2^p \equiv 1 \pmod{2p+1}$, como p é primo então:

$p = \text{ord}_{2p+1}2$, só que $(2, 2p+1) = 1 \Rightarrow \phi(2p+1) = kp$, com $k \le 2$.

Não podemos ter $k = 1$, pois $\phi(n)$ é par para todo $n \ge 3$.

Assim, $\phi(2p+1) = 2p \Rightarrow 2p+1$ é primo.

41)

a) Fazendo $m = t(t-1)/2$ e $n = t(t+1)/2$:

$4mn - m - n + 1 = t^2(t^2-1) - (t^2 - t + t^2 + t)/2 + 1 = t^4 - t^2 - t^2 + 1 =$
$= (t^2-1)^2$

b) $4mn - m - n = p^2 \Rightarrow 16mn - 4m - 4n = 4p^2 \Rightarrow$
$(4m-1)(4n-1) = 4p^2 + 1 \quad (1)$

Desde que o produto de dois termos da forma $4k + 1$ resulta em um número também da forma $4k + 1$, o número $4m - 1$ deve possuir um divisir primo q da forma $4k - 1$. Da equação (1) conclui-se que $q \mid 4p^2 + 1$:

$$4p^2 \equiv -1 \pmod{q} \quad (2)$$

Da equação (1) segue que p e q são primos entre si. Assim, pelo Teorema de Fermat: $(2p)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow \left(4p^2\right)^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow$ $\left(-1\right)^{2k-1} \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow -1 \equiv 1 \pmod{q}$, que é uma contradição

Assim, não existem os inteiros positivos m, n, p tais que $4mn - m - n = p^2$

18.2. PARTE B

1) Dica: Como 1997 é primo: $\phi(1997^2) = 1997^2(1 - 1/997) = 1996.1997$

2) a) 7; b) 6. Dica: Demonstre que $N^{20} \equiv 1 \pmod{25}$ e a partir do critério de divisisbilidade por 4 conclua que os dois últimos dígitos de N^{20} devem ser 76.

3) Não existe solução. Dica: Demonstre que $n^6 \equiv 0$ ou $1 \pmod{7}$ e $n^3 \equiv 0$, 1 ou $-1 \pmod{7}$

4) Dica: Demonstre que $37 \mid (3^{36} - 1)$ e $73 \mid (3^{36} - 1)$

5) b) 0. Dica: Aplique o teorema de Fermat para p = 5.

6) Dica: De mdc $(a, n) = 1 \Leftrightarrow$ mdc $(n - a, n) = 1$, faça $a_1 + a_2 + \ldots + a_{\phi(n)} = (n - a_1) + (n - a_2) + \ldots + (n - a_{\phi(n)})$

7) Dica: Prove que para cada número primo p, p divide $2^n - n$ se $n = k(p - 1)$ e $k = xp - 1$, $x \in N$.

8) Dica: Suponha que $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ e prove que $x^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$

9) a) Não; b) Não. Dica: a) Prove que $a^{1999} + b^{1999} + c^{1999} \equiv a + b + c \pmod{1999}$; b) Observe que $a + b + c$ é um número par.

10) Dica: Aplique o teorema de Fermat

11) Dica: Use o fato que $2^{10} \equiv 1 \pmod{31}$ e $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

12) a) Sim; b) Não. Dica: a) Considere 1492 1's, 4 2's e 8 – 1's. b) Aplique $x^7 \equiv x \pmod{7}$

13) Sim, $c = 20$.

14) 1376. Dica: Demonstre que $1776^{[illegible]} \equiv 1 (\text{mod } 125)$ e depois analise a divisibilidade por 16.

15) $n_{min} = 2^{2001}$. Dica: Demonstre, aplicando Euler, que $n = 2^k$ e note que $17^{2^k} - 1 = (17-1)(17+1)(17^2+1)\ldots(17^{2^{k-1}}+1)$.

16) Sim, para todo n. Dica: Pelo teorema de Fermat: $n^7 \equiv n$ (mod. 7), $n^{13} \equiv n$ (mod. 7) e $n^{11} \equiv n^5$ (mod. 7)

17) Dica: Para $a = 2$ faça $p = 11$. Para $a > 2$ prove que se $p \mid a - 1$ então $p \mid 1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$.

18) Dica: Use indução finita.

19) Dica: Observe que $2(p - 1) = q - 1$.

20) Dica: Observe que n^2 e n possuem os mesmo dvisores primos.

21) 5

22) $\underbrace{555\cdots55}_{18k+5\ 5's}$. Dica: Demonstre que $10^{18k+3} \equiv 3$ (mod. 19).

23) Dica: Use indução, baseado no fato que se N é o produto de todos os elementos do subconjunto, então $x = a^{\phi(N)+1} + a^{\phi(N)} - 1 \equiv a$ (mod. N). Acrescente x no subconjunto.

24) Dica: Use que $3^n.n^3 + 1 = (n^3 - 1)(3^n - 1) + (n^3 + 3^n)$ e $3^n.n^3 + 1 = (n^3 + 1)(3^n + 1) - (n^3 + 3^n)$

25) Dica: Prove que se $p \mid n$ então $3^{2n} \equiv 1$ (mod. p) e $3^{\text{mdc}(2n,\, p-1)} \equiv 1$ (mod. p). Conclua que $p \mid 8$, que é um absurdo.

26) $(1991)^2 \times 900$. Dica: Use o resultado do problema 6 da parte B e demonstre que, para cada n, a soma de todas as frações irredutíveis da forema $\dfrac{a}{n}$ no intervalo $1 < \dfrac{a}{n} < n$ vale $S = \dfrac{n^2\phi(n)}{2}$.

27) Dica: Faça $m = 1$, $n = 3$ e $k = 9$.

28) Dica: Faça $n = (p-1)^{2k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

29) 241. Dica: Inicialmente observe que $2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{2002^{2001}}$. Como $\phi(1000) = 400$, prove que $2002^{2001} \equiv 352 \pmod{400}$. Depois faça $3^{352} = 9^{176} = (10-1)^{176}$ e expanda em binômio de Newton.

30) 1. Dica: Note que 2 e 3 dividem $a_2 = 48$. Depois demonstre que $6a_{p-2}$ é divisível por p, onde p é primo ≥ 5.

31) Dica: Note que $n^{n^{n^n}} - n^{n^n} = n^{n^n}\left[n^{n^n(n^{n^n-n}-1)} - 1\right]$ e prove a divisibilidade por 9, 13 e 17.

32) Dica: Inicialmente prove que os expoentes de todos os fatores primos de n devem ser iguais a 1. Depois demonstre que não existem n da forma p_1p_2 ou $p_1p_2p_3$ de modo que $\varphi(n)$ divide $n - 1$.

33) Existem dois valores de n: 1 e 605.

34) 2, 6, 42, 1806. Dica: Inicialmente prove n é livre de quadrados e depois prove que se $p \mid n$ então $p - 1 \mid n$.

35) (2, 5), (5, 2). Dica: Supondo $p < q$, conclua que $p \mid q - 1$ ou $p \mid q + 1$ e $q \mid p + 1$.

36) Dica: Observe que o menor valor de t de modo que $2^t \equiv 1 \pmod{2^n - 1}$ é n. Portanto, t pode assumir qualquer valor divisível por n, inclusive $2^n - 2$.

37) k = 4. Dica: Prove que $x^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod{9}$ e $2002^{2002} \equiv 4 \pmod{9}$. Depois observe que $2002^{2002} = (10.2002^{667})^3 + (10.2002^{667})^3 + (2002^{667})^3 + (2002^{667})^3$.

38) Dica: Inicialmente prove que $a \equiv 1 \pmod{p}$. De $a^p - 1 = (a-1)(a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1)$, demonstre que $p \mid a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1$, entretanto, p^2 não divide $a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1$.

39) Dica: Analise casos pequenos e depois use indução.

FUNÇÃO MÁXIMO INTEIRO

19.1. PARTE A

1)

Seja m um número inteiro tal que: $m^k \le [x] \le x < (m+1)^k \Rightarrow$
$m \le \sqrt[k]{[x]} \le \sqrt[k]{x} < m+1 \Rightarrow \left[\sqrt[k]{x}\right] = \left[\sqrt[k]{[x]}\right]$

2)

Notemos que:
$[x+1] = [x/2+1] \Rightarrow [x]+1 = [x/2]+1 \Rightarrow [x] = [x/2] \Rightarrow$
$-1 \le x < 1 \Rightarrow [-1, 1[$
Ou seja, temos um intervalo meio aberto.

3)

Para $x \le 48$, temos $\lfloor x^{1/2} \rfloor \le 6$ e $\lfloor x^{1/3} \rfloor \le 3$. Para $49 \le x \le 63$, temos $\lfloor x^{1/2} \rfloor = 7$ e $\lfloor x^{1/3} \rfloor = 3$. Para $x \ge 64$, temos $\lfloor x^{1/2} \rfloor \ge 8$ e $\lfloor x^{1/3} \rfloor \ge 4$. Assim, as soluções são todos os inteiros entre 49 e 63, que são 15 ao todo

4)

$n = [\log 5^{80}] + 1 = [\log (10/2)^{80}] + 1 = [\log 10^{80} - \log 2^{80}] + 1 =$
$= [80 - 80(0{,}301)] + 1 = [80(0{,}699)] + 1 = 55 + 1 = 56$

5)

Seja $X = \dfrac{3^{21}+2^{31}}{3^{29}+2^{29}} = \dfrac{3^{21}+4.2^{29}}{3^{29}+2^{29}} = 3^2 - \dfrac{5.2^{29}}{3^{29}+2^{29}}$
Como $5.2^{29} < 3^{29} + 2^{29}$ então $X = 9 - y$, onde $0 < y < 1$.
Desta forma, $[X] = 8$.

6)

Como existem mais números, entre 1 e 300, divisíveis por 2 do que divisíveis por 7, o maior inteiro x tal que 14^x divide 300! é igual ao expoente de 7 na fatoração em fatores primos de 300!.
Assim, $x = \left[\dfrac{300}{7}\right] + \left[\dfrac{300}{7^2}\right] + \left[\dfrac{300}{7^3}\right] \Rightarrow x = 42 + 6 + 1 \Rightarrow x = 49.$

7)

Observe que para $i \ge 1$ temos

$\left\lfloor \sqrt[4]{n} \right\rfloor = i \Leftrightarrow i \le \sqrt[4]{n} < i+1 \Leftrightarrow i^4 \le n < (i+1)^4$ e assim há $(i+1)^4 - i^4$ números n tais que $\left\lfloor \sqrt[4]{n} \right\rfloor = i$.

Portanto a soma pedida é:

$$1\cdot\left(2^4-1^4\right)+2\cdot\left(3^4-2^4\right)+3\cdot\left(4^4-3^4\right)+4\cdot\left(5^4-4^4\right)+5\cdot\left(6^4-5^4\right)+6\cdot\left(2008-6^4+1\right)=9779.$$

8)

i) $m = [\log 2^{1999}] + 1 = [1999.\log 2] + 1$

ii) $n = [\log 5^{1999}] + 1 = [1999.\log 5] + 1 = [1999.\log (10/2)] + 1 =$
$=[1999(\log 10 - \log 2)] + 1 = [1999 - 1999.\log 2] + 1 =$
$= 1999 + [- 1999.\log 2] + 1$

Como $[- x] = - [x] + 1 \Rightarrow n = 2000 - [1999.\log 2] - 1 =$
$= 1999 - [1999.\log 2]$

iii) $m + n = [1999.\log 2] + 1 + 1999 - [1999.\log 2] \Rightarrow m + n = 2000$

9)

Somando as equações e juntando partes fracionárias com partes inteiras obtemos $x+y+z=4,9$. Extraindo as possíveis partes fracionárias das equações dadas e dessa nova obtida, temos as seguintes possibilidades: $\{x\}+\{z\}=0,2$ ou $1,2$; $\{y\}+\{x\}=0,6$ ou $1,6$; $\{z\}+\{y\}=0$ ou 1; $\{x\}+\{y\}+\{z\}=0,9$ ou $1,9$ ou $2,9$.

Se $\{z\}+\{y\}=0$, teríamos $\{y\}=\{z\}=0$, o que não fornece solução. Assim, $\{z\}+\{y\}=1 \Rightarrow \{x\}=0,9$; $\{y\}=0,7$; $\{z\}=0,3$. Reescrevendo o sistema para as variáveis, temos $x + y = 4,6$; $x + z = 2,2$; $y + z = 3$; $\Rightarrow$
$x-y+z=1,9-2,7+0,3=-0,5$.

10)

Suponhamos que x é um inteiro, ou seja, $[x] = x$. Desta forma, tanto $x^2 - [x^2]$ quanto $(x - [x])^2$ vão ser iguais a zero. Assim, x inteiro é uma solução da equação. Como $1 \le x \le N$, temos N soluções para este caso.

Suponhamos agora que x não é inteiro, ou seja, $[x] = n$, onde n é o maior inteiro menor que x. Então $x = n + r$, onde $0 < r < 1$.

Assim:

$(x - [x])^2 = (n + r - n)^2 = r^2$

$x^2 - [x^2] = n^2 + 2nr + r^2 - [x^2]$

Como $x^2 - [x^2] = (x - [x])^2 \Rightarrow n^2 + 2nr + r^2 - [x^2] = r^2 \Rightarrow$

$[x^2] = n^2 + 2nr$

Analisemos esta expressão para alguns valores de n:

i) $n = 1 \Rightarrow [x^2] = 1 + 2r$, como $0 < r < 1$, teremos $1 + 2r$ inteiro somente quando $r = 1/2$

Portanto, para n = 1 temos somente uma solução, que é $x = 1 + 1/2 = 1,5$

ii) $n = 2 \Rightarrow [x^2] = 2 + 4r$, como $0 < r < 1$, teremos $2 + 4r$ inteiro quando $r = 1/4$ ou $r = 1/2$ ou $r = 3/4$

Portanto, para n = 2 temos três soluções, que são

$x = 2,25$ $x = 2,5$ $x = 2,75$

iii) $n = 3 \Rightarrow [x^2] = 3 + 6r$, como $0 < r < 1$, teremos $3 + 6r$ inteiro quando $r = 1/6$ ou $r = 1/3$ ou $r = 1/2$ ou $r = 2/3$ ou $r = 5/6$

Portanto, para n = 3 temos cinco soluções.

No caso geral (para um inteiro n qualquer), $[x^2] = n^2 + 2nr$ é inteiro quando $2nr$ for inteiro, que ocorre quando $1/r$ divide $2n$.

Como $\frac{1}{r} > 1$, os valores que pode assumir $\frac{1}{r}$ são: $\frac{1}{r} = \frac{2n}{i}$, onde $1 \le i \le 2n - 1$, onde existem exatamente $2n - 1$ valores possíveis para $1/r$, e, consequentemente, $2n - 1$ valores possíveis para r.

Assim, notamos que para um inteiro n qualquer, existem $2n - 1$ soluções para a equação $[x^2] = n^2 + 2nr$.

Portanto, como $1 \le x \le N$, temos um total de soluções que é dado por:

$S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2N - 1 + N \Rightarrow S = N^2 + N$.

11)

A fatoração de 1000! em fatores primos é da forma: $1000! = 2^a.3^b.5^c\ldots$

O expoente a de 2 na fatoração de 1000! é dado por:

$$a = \left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{2^2}\right] + \left[\frac{1000}{2^3}\right] + \left[\frac{1000}{2^4}\right] + \left[\frac{1000}{2^5}\right] + \left[\frac{1000}{2^6}\right] + \left[\frac{1000}{2^7}\right] +$$

$$+ \left[\frac{1000}{2^8}\right] + \left[\frac{1000}{2^9}\right] \Rightarrow$$

$a = 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 \Rightarrow a = 994$

O expoente c de 5 na fatoração de 1000! é dado por:

$$c = \left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{1000}{5^2}\right] + \left[\frac{1000}{5^3}\right] + \left[\frac{1000}{5^4}\right] \Rightarrow c = 200 + 40 + 8 + 1 \Rightarrow$$

$c = 249$

Como para conseguir um zero no final da representação decimal de 1000! teremos que juntar um termo 2 com um termo 5, e existem menos termos 5 do que termos 2, o número de zeros que termina 1000! é igual ao expoente de 5 na fatoração de 1000!.

Assim, 1000! termina em 249 zeros.

Note que partindo do fato de existirem mais números, entre 1 e 1000, divisíveis por 2 do que divisíveis por 5, poderíamos ter calculado diretamente o expoente c de 5 na fatoração de 1000!, que este valor é o número de zeros que termina 1000!.

12)

$[x]+[\sqrt{1998x}]$ é sempre inteiro. Seja x_0 a solução de $x-\sqrt{1998x}=1998$, ou seja $x_0 = 999(3-\sqrt{5})=763{,}1\ldots$ e $\sqrt{1998x_0}=1998-x_0=999(\sqrt{5}-1)=1234{,}8\ldots$ Temos $[x_0]+[\sqrt{1998x_0}]=1997$. A função $f(x)=[x]+[\sqrt{1998x}]$ aumenta de uma unidade quando x ou $\sqrt{1998x}$ torna-se inteiro. Os próximos valores de x maiores que x_0 para os quais x e $\sqrt{1998x}$ são inteiros são respectivamente 764 e $1235^2/1998 < 764$.

Assim, $f(1235^2/1998) = 763 + 1235 = 1998$ e

$f(764) = 764 + 1235 = 1999$

(de fato $\sqrt{1998\cdot 764} < 1236$). Como $f(x)$ é não-decrescente, o conjunto das soluções é o intervalo $\left[\frac{1235^2}{1998}, 764\right) = [763{,}3758758758\ldots, 764)$.

13)

Seja o número $I_n = (\sqrt{3}+1)^{2n}+(\sqrt{3}-1)^{2n}$. Quando expandimos I_n pela fórmula do Binômio de Newton, notamos que todos os termos irracionais são cancelados, sobrando apenas os termos inteiros, fazendo com que I_n seja inteiro.

Como $(\sqrt{3}-1)<1 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{3}-1)^{2n}<1$, ou seja, I_n é o menor inteiro maior que $(\sqrt{3}+1)^{2n}$.

Sendo $I_n = (4+2\sqrt{3})^n+(4-2\sqrt{3})^n$, e sabendo que $4+2\sqrt{3}$ e $4-2\sqrt{3}$ são raízes da equação $x^2 - 8x + 4 = 0$, estes números também satisfazem polinômio $x^{n+2} - 8x^{n+1} + 4x^n = 0$, que é a equação característica da seqüência $I_{n+2} = 8I_{n+1} - 4I_n$.

Desde que $I_1 = 8$ e $I_2 = 56$, (evidentemente $4 \mid 8$ e $8 \mid 56$), provemos por indução que $2^{n+1} \mid I_n$

Suponhamos que 2^{n+1} divide I_n, para $n = 1, 2, \ldots, m$. Assim, $4I_{m-1}$ e $8I_m$ são múltiplos de 2^{m+2}.

Deste modo, $I_{m+1} = 8I_m + 4I_{m-1}$ é divisível por 2^{m+2}.

14)

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^{1992} = \underbrace{111..11}_{1992 \text{ algarismos}}\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p$; onde α_i é tal que $0 \le \alpha_i \le 9$; $i = 1, 2, 3, \ldots, p$. Seja também $k = 111\ldots11$, daí:

$k.10^s \le n^{1992} \le k\,\underbrace{9999\ldots9}_{s \text{ algarismos}}$, logo $k.10^s \le n^{1992} < (k+1).10^s$.

Precisamos garantir que há algum $n \in \mathbb{N}$ que satisfaça a desigualdade acima; seja então $s = 1992.p$:

$k.10^{1992.p} \leq n^{1992} < (k+1).10^{1992.p} \Rightarrow \sqrt[1992]{k}.10^p \leq n < \sqrt[1992]{k+1}.10^p \Rightarrow$
$\sqrt[1992]{k} \leq \dfrac{n}{10^p} < \sqrt[1992]{k+1}.$

Observe que se tomarmos $n = \left\lfloor 10^p.\sqrt[1992]{k} \right\rfloor + 1$; onde $\lfloor z \rfloor =$ maior inteiro menor ou igual a z, e p suficientemente grande satisfaremos a condição do enunciado.
Conclusão: $\exists\, n \in IN$ tal que n^{1992} é escrito como no enunciado.

15)
Evidentemente, como na fatoração de n! existem mais potências de 2 do que de 5, o número de zeros de n! corresponde à potência de 5 de n!.
Calculemos, inicialmente, o número de zeros em que terminam 19! e 20!:
$\therefore x_{19!} = [19/5] = 3 \quad \therefore x_{20!} = [20/5] = 4$
Assim, temos que 19! termina em 3 zeros e 20! termina em 4 zeros.
Portanto, na soma fornecida todos os números depois de 19! terminam em mais do que 3 zeros, implicando que o último dígito de
$19! + 20! + 21! + \ldots + 96! + 97!$ é igual ao último dígito de 19!.
Determinemos a fatoração de 19!, ou seja, $19! = 2^a.3^b.5^3.7^c.11^d.13^e.17^f.19^g$.
$a = [19/2] + [19/2^2] + [19/2^3] + [19/2^4] = 9 + 4 + 2 + 1 = 16$
$b = [19/3] + [19/3^2] = 6 + 2 = 8$
$c = [19/7] = 2$
$d = [19/11] = 1$
$e = [19/13] = 1$
$f = [19/13] = 1$
$g = [19/19] = 1$
Deste modo, $19! = 2^{16}.3^8.5^3.7^2.11.13.17.19 \Rightarrow$
$19! = 2^{13}.3^8.7^2.11.13.17.19.(2^3.5^3) \Rightarrow 19! = (2^{13}.3^8.7^2.11.13.17.19)(1000)$
Assim, o último dígito diferente de 0 de 19! é igual ao dígito das unidades de $N = 2^{13}.3^8.7^2.11.13.17.19$.

i) $2^6 \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow 2^{12} \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 2^{13} \equiv 2 \pmod{10}$
ii) $3^2 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 3^6 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 3^8 \equiv -9 \pmod{10} \Rightarrow$
$3^8 \equiv 1 \pmod{10}$
iii) $7^2 \equiv 9 \pmod{10}$
iv) $11 \equiv 1 \pmod{10}$
v) $13 \equiv 3 \pmod{10}$
vi) $17 \equiv 7 \pmod{10}$
vii) $19 \equiv 9 \pmod{10}$

Multiplicando estas congruências:
$2^{13}.3^8.7^2.11.13.17.19 \equiv 2.1.9.1.3.7.9 \pmod{10} \Rightarrow N \equiv 2 \pmod{10}$

Portanto, o último dígito diferente de 0 de 19! + 20! + 21! + ... + 97! é igual a 2.

16)
A equação dada é eqüivalente a:

$$1989 \le \frac{10^n}{x} < 1990 \Rightarrow \frac{10^n}{1990} < x \le \frac{10^n}{1989} \Rightarrow$$

$10^n.(0{,}0005025...) < x \le 10^n.(0{,}005027...)$
Desta forma, 1/990 e 1/1989 possuem, depois da vírgula, o primeiro dígito somente na sétima cada decimal.
Assim, para $n \ge 7$ a equação possui solução. Para $n = 7$ temos duas soluções: $x_1 = 5026$ e $x_2 = 5027$.

17)
Seja n um inteiro positivo qualquer. Evidentemente n está entre dois quadrados perfeitos, ou seja, existe um inteiro positivo m tal que $m^2 \le n < (m + 1)^2$. Assim, $m \le \sqrt{n} < m+1 \Rightarrow [\sqrt{n}] = m$.
Para todos estes n no intervalo $m^2 \le n < (m + 1)^2$, o valor de $q(n) = [n/m]$ depende de onde n está neste intervalo.

i) se $m^2 \le n < m^2 + m \Rightarrow q(n) = \left[\frac{n}{m}\right] = \left[\frac{m^2 + x.m}{m}\right] = [m + x] = m$, pois

$0 \le x < 1$.
ii) se $m^2 + m \le n < m^2 + 2m \Rightarrow$
$q(n) = \left[\frac{n}{m}\right] = \left[\frac{m^2 + x.m}{m}\right] = [m + x] = m + 1$, pois $1 \le x < 2$.

iii) se $n = m^2 + 2m \Rightarrow q(n) = \left[\frac{n}{m}\right] = \left[\frac{m^2 + 2m}{m}\right] = [m + 2] = m + 2$

Desta forma notamos que para todo inteiro positivo entre dois quadrados perfeitos q(n) é crescente.
Notemos agora que: $q((m+1)^2) = \left[\frac{(m+1)^2}{m+1}\right] = m + 1$, ou seja,

$q(m^2 + m) > q(m^2 + 2m + 1)$.
Para o próximo intervalo, que são os inteiros n tal que $(m + 1)^2 \le n < (m + 2)^2$, teremos novamente q(n) crescente.
Portanto, os únicos inteiros positivos n que satisfazem $q(n) > q(n + 1)$ são os inteiro da forma $n = m^2 + m$, m = 1, 2, 3, ...

18)

Vamos provar que para cada inteiro positivo k existe uma potência de 2 com exatamente k dígitos (na base 10) e cujo primeiro dígito é 1. De fato, se considerarmos a menor potência de 2 maior que 10^{k+1}, devemos ter $2^n < 10^{k+1} \leq 2^{n+1}$, ou $10^{k+1} \leq 2^{n+1} < 2 \times 10^{k+1}$.
Portanto basta calcular quantos dígitos possui 2^{10^6}.
Assim, $N = [\log_{10} 2^{10^6}] + 1 = [10^6 \log_{10} 2] + 1 \approx [(10^6)(0{,}301030)] + 1 = 301031$, donde segue que 2^{10^6} tem mais de 300.000 algarismos e segue que no mínimo $300.000/1.000.000 = 30\%$ de tais potências começam com o algarismo 1.

19)

$\lfloor x \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor \rfloor = \dfrac{88}{x} \Rightarrow$ x é da forma $\dfrac{88}{k}$ com $k \leq x^3$.

1) Se $x \geq 0$ então $x \geq 3$ pois, se $x < 3$ teríamos $x \lfloor x \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor \rfloor < 3^4 = 81$

Como $\dfrac{88}{3} = 29\dfrac{1}{3}$ tem-se que $29 \geq x \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor \geq 27$ e daí :

$\lfloor x \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor \rfloor = 27 \Rightarrow x = \dfrac{88}{27}$ (não serve)

$\lfloor x \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor \rfloor = 28 \Rightarrow x = \dfrac{88}{28} = \dfrac{22}{7}$

$\lfloor x \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor \rfloor = 29 \Rightarrow x = \dfrac{88}{29}$ (não serve)

2) Se $x \leq 0$ então $x < -3 \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq -4 \Rightarrow x \lfloor x \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor \rfloor \geq 3^3 \cdot 4 > 88$

por outro lado, $x \geq -3 \Rightarrow \lfloor x \rfloor \geq -3 \Rightarrow x \lfloor x \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor \rfloor \leq 3^4 = 81$ e portanto, não há soluções negativas.

Assim, a resposta é $\dfrac{22}{7}$.

20)

Se $[(n)^{1/2}] = 1$ então certamente a condição é satisfeita.
Desta forma todos os inteiros entre 1^2 e 2^2 satisfazem o enunciado, ou seja, $n = 2$ e $n = 3$ satisfazem.
Desde que n não é um quadrado perfeito, então ele deve estar entre dois quadrados consecutivos:

$m^2 < n < (m+1)^2 \quad \Rightarrow \quad [(n)^{1/2}] = m \quad \Rightarrow \quad m^3 \mid n^2 \quad \Rightarrow \quad m \mid n$

Como entre m^2 e $(m+1)^2$ existem somente 2 inteiros que são múltiplos de m: $m^2 + m$ e $m^2 + 2m$, então:

i) $n^2 = (m^2 + m)^2 = m^2(m+1)^2$; ii) $n^2 = (m^2 + 2m)^2 = m^2(m+2)^2$

Notemos que também que estes números devem ser divisíveis por m^3:

i) $m^3 \mid m^2(m+1)^2 \Rightarrow m \mid (m+1)^2 \Rightarrow m = 1$ que já foi analisado
ii) $m^3 \mid m^2(m+2)^2 \Rightarrow m \mid m^2 + 4m + 4 \Rightarrow m \mid 4 \Rightarrow m = 1, 2$ ou 4
$\therefore m = 2 \Rightarrow n$ é par tal que $2^2 < n < 3^2 \Rightarrow n = 8$ ($n = 6$ não serve pois 8 não divide 36)
$m = 4 \Rightarrow n$ é múltiplo de 4 tal que $4^2 < n < 5^2 \Rightarrow$
$n = 24$ ($n = 20$ não serve pois 64 não divide 400)
Assim, temos os números $n = 2, 3, 8$ e 24.

21)

Dividindo x por $a(a+1)$ tem-se $x = qa(a+1) + r$, onde $r < a(a+1)$.

Substituindo na equação original: $\left[\frac{qa(a+1)r}{a}\right] = \left[\frac{qa(a+1)+r}{a+1}\right] \Rightarrow$

$$\left[qa + q + \frac{r}{a}\right] = \left[qa + \frac{r}{a+1}\right] \Rightarrow qa + q + \left[\frac{r}{a}\right] = qa + \left[\frac{r}{a+1}\right] \Rightarrow$$

$$q + \left[\frac{r}{a}\right] = \left[\frac{r}{a+1}\right] \quad (1)$$

Desde que $\frac{r}{a} \geq \frac{r}{a+1}$ tem-se que $\left[\frac{r}{a}\right] \geq \left[\frac{r}{a+1}\right]$. Logo, a equação (1) somente pode ser satisfeita se $q = 0$.

Assim, o número pedido é igual à quantidade de elementos $r \in A$ com $A = \{0, 1, 2, \ldots, a(a+1) - 1\}$ tais que $\left[\frac{r}{a}\right] = \left[\frac{r}{a+1}\right]$.

Para todo $r \in A$ existe um único $k \in \{0, 1, 2, \ldots, a\}$ que satisfaz $ka \leq r \leq (k+1)a$ e então $\left[\frac{r}{a}\right] = k$.

Observando que tal r satisfaz $\frac{r}{a+1} < \frac{(k+1)a}{a+1} < k+1$, tem-se que r é uma solução se e somente se:

$$\frac{r}{a+1} \geq k \Rightarrow r \geq ka + k \Rightarrow ka \leq r < (k+1)a \Leftrightarrow k \leq a - 1.$$

Desta forma, as soluções são $ka + k, ka + k + 1, \ldots, ka + a - 1$.

Logo, para cada $k \in \{0, 1, 2, \ldots, a-1\}$ tem-se $a - 1 - (k - 1) = a - k$ soluções. Portanto, o número de soluções é

$$(a - 0) + (a - 1) + \ldots + (a - (a - 1)) = \frac{a(a+1)}{2}$$

22)

Resolvendo para x obtém-se $x = \frac{10[x] - 14}{[x] + 1}$

Desde que $[x] \le x \le [x] + 1$ tem-se que:

i) $[x] \le x \Leftrightarrow \dfrac{[x]^2 + [x] - 10[x] + 14}{[x]+1} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{([x]-2)([x]-7)}{[x]+1} \le 0 \Rightarrow$

$[x] \in (-\infty, -1) \cup [3, 7]$ (1)

ii) $[x] + 1 > x \Leftrightarrow \dfrac{[x]^2 + 2[x] + 1 - 10[x] + 14}{[x]+1} > 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{([x]-3)([x]-5)}{[x]+1} > 0 \Rightarrow [x] \in (-1, 3) \cup [5, +\infty]$ (2)

Os únicos inteiros que pertencem aos intervalos (1) e (2) são:

i) $[x] = 2 \Rightarrow x = 2$;

ii) $[x] = 6 \Rightarrow x = \dfrac{46}{7}$;

iii) $[x] = 7 \Rightarrow x = 7$

23)

Seja $a_n = [2^n/3]$

Note que: $2 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{2k+1} \equiv -1 \pmod{3}$ e $2^{2k} \equiv 1 \pmod{3}$

Portanto $3 \mid 2^{2x+1} - 2$ e $3 \mid 2^{2x} - 1$, implicando que:

$$a_{2x+1} = \left\lfloor \frac{2^{2x+1}}{3} \right\rfloor = \frac{2^{2x+1} - 2}{3} \quad \text{e} \quad a_{2x} = \left\lfloor \frac{2^{2x}}{3} \right\rfloor = \frac{2^{2x} - 1}{3}$$

Vamos separar agora a seqüência a_n em duas seqüências, a dos termos de ordem ímpar $b_x = a_{2x+1}$ e a seqüência dos termos de ordem par $c_x = a_{2x}$.

Portanto: $b_x = \dfrac{2^{2x+1} - 2}{3} = \dfrac{2.4^x - 2}{3}$, $x = 0, 1, \ldots, 499$.

Analogamente: $c_x = \dfrac{2^{2x} - 1}{3} = \dfrac{4^x - 1}{3}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, 500$.

Portanto:

$$B = \sum_{x=0}^{499} b_x = \sum_{x=0}^{499} \frac{2.4^x - 2}{3} = \frac{2}{3}\left(\sum_{x=0}^{499} 4^x - \sum_{x=0}^{499} 1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{4^{500} - 1}{3} - 500\right) =$$

$$= \frac{2(4^{500} - 1501)}{9} = \frac{2^{1001} - 3002}{9}$$

$$C = \sum_{x=0}^{500} c_x = \sum_{x=0}^{500} \frac{4^x - 1}{3} = \frac{1}{3}\left(\sum_{x=0}^{500} 4^x - \sum_{x=0}^{500} 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{4^{501} - 1}{3} - 501\right) = \frac{4^{501} - 1504}{9} =$$

$$= \frac{2^{1002} - 1504}{9}$$

Assim, a soma $S = \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{1000}}{3} \right\rfloor$ é igual a:

$$S = B + C = \frac{2^{1001} - 3002}{9} + \frac{2.2^{1001} - 1504}{9} = \frac{3.2^{1001} - 4506}{9} = \frac{2^{1001} - 1502}{3}$$

24)

Sejam $n = [x]$ e $a = \{x\}$. Então $x = n + a$ e $0 \le a < 1 \le n$. Em particular, $a \neq n$. O primeiro membro é igual a

$$E = \frac{x+a}{n} - \frac{n}{x+a} + \frac{x+n}{a} - \frac{a}{x+n} = \frac{(x+a)^2 - n^2}{n(x+a)} + \frac{(x+n)^2 - a^2}{a(x+n)} =$$

$$= \frac{(x+a+n)(x+a-n)}{n(x+a)} + \frac{(x+n+a)(x+n-a)}{a(x+n)} =$$

$$= \frac{2x.2a}{n(n+2a)} + \frac{2x.2n}{a(2n+a)} = 4x\left[\frac{a}{n(n+2a)} + \frac{n}{a(2n+a)}\right] = 4x\left[\frac{2a^2n + a^3 + n^3 + 2an^2}{an(n+2a)(2n+a)}\right] =$$

$$= 4x\left[\frac{2an(n+a) + (n+a)(a^2 - an + n^2)}{an(2a^2 + 5an + 2n^2)}\right] = 4x^2\left[\frac{a^2 + an + n^2}{an(2a^2 + 5an + 2n^2)}\right]$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos que $a^2 + n^2 > 2an$ (1)

Logo, tem-se que: $3(a^2 + an + n^2) = 2a^2 + 2n^2 + 3an + (a^2 + n^2) >$
$> 2a^2 + 2n^2 + 3an + 2an = 2a^2 + 5an + 2n^2 \Rightarrow$

$$\frac{a^2 + an + n^2}{2a^2 + 5an + 2n^2} > \frac{1}{3}$$

Logo: $E > \frac{4x^2}{3an} = \frac{4(n+a)^2}{3an} > \frac{4.4an}{3an} = \frac{16}{3}$

25)

Seja $f(x) = [x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x]$

Suponhamos que exista x tal que $f(x) = 12345$. Desde que $f(195) = 12285$ e $f(196) = 12348$, então conclui-se que $195 < x < 196 \Rightarrow x = 195 + a$, onde $0 < a < 1$.

$f(a) = f(x - 195) = [x - 195] + [2x - 390] + [4x - 780] + [8x - 1560] +$
$+ [16x - 3120] + [32x - 6240] \Rightarrow$
$f(a) = [x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] - 195 - 390 - 780 - 1560 -$
$- 3120 = 12345 - 12285 = 60$

Por outro lado, como $0 < a < 1$: $0 < 2a < 2$, $0 < 4a < 4$, $0 < 8a < 8$,
$0 < 16a < 16$ e $0 < 32a < 32 \Rightarrow$
$[a] = 0$, $[2a] \le 1$, $[4a] \le 3$, $[8a] \le 7$, $[16a] \le 15$, $[32a] \le 31 \Rightarrow$
$f(a) \le 0 + 1 + 3 + 7 + 15 + 31 = 57$

que é uma contradição.

26)

Inicialmente note que $(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$

Para $n \geq 1$ tem-se que $n < \sqrt{n(n+1)} < n+1$, ou seja:

$4n+1 < (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 < 4n+3 \Rightarrow \sqrt{4n+1} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+3}$ (1)

Considere o número k tal que $k^2 \leq 4n+1 \leq (k+1)^2$. Como um quadrado perfeito nunca é congruente a 2 ou 3 módulo 4, segue que:

$k^2 \leq 4n+1 < 4n+2 < 4n+3 \leq (k+1)^2 \Rightarrow$

$k \leq \sqrt{4n+1} < \sqrt{4n+2} < \sqrt{4n+3} < k+1$ (2)

De (1) e (2) segue que: $k \leq \sqrt{4n+1} < \left\{ \begin{matrix} \sqrt{4n+2} \\ \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \end{matrix} \right\} < \sqrt{4n+3} < k+1 \Rightarrow$

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+3}\right] = k$$

27)

Seja $N = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor$ e sendo $x = n + t$, com $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq t < 1$. Então, segue que $N = 20n + \lfloor 2t \rfloor + \lfloor 4t \rfloor + \lfloor 6t \rfloor + \lfloor 8t \rfloor \leq 1000$.

Conclui-se, portanto, que $0 \leq n \leq 50$.

Para $0 \leq n \leq 49$ tem-se que N assume valores distintos para $t = 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$ e também para $t = \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$. Assim, existem 12 diferentes valores de N para cada n = 1, 2, 3, ..., 49. Para n = 0 existem 11 valores possíveis de N, pois para n = 0 tem-se $t \neq 0$. Entretanto, para n = 50 tem-se apenas um valor possível para N.

Logo, a quantidade de valores inteiros positivos de $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor$ menores ou iguais a 1000 é:

$11 + 49 \times 12 + 1 = 600$.

19.2. PARTE B

1) $x = 1/4$. Dica: Prove que $[(2x+3)/(x+2)] = 1$ e $[(2x+1)/(x+1)] = 1$.

2) $3/4 < x \leq 1$. Dica: Faça $y = 1/x$.

3) 1498

4) 666167500. Dica: Demonstre que

$S = 1(2^2 - 1^2) + 2(3^2 - 2^2) + 3(4^2 - 3^2) + \ldots + 999(1000^2 - 999^2) + 10^3$

5) $x = 6k$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ ou $6k + 5$. Dica: Escreva $x = 6k + r$, de depois faça $r = 0, 1, 2, 3, 4$ ou 5.

6) a. Dica: Se $2^k \leq n < 2^{k+1} \Rightarrow [\log_2 n] = k$

7) $667 + \frac{1}{3} \leq x < 667 + \frac{1}{2}$. Dica: Faça $x = [x] + \{x\}$ e separe nos casos $0 \leq \{x\} > 1/3$, $1/3 \leq \{x\} < 1/2$ e $1/2 \leq x\,\{x\} < 1$.

8) 1999. Dica: Faça $2000.2001.2002 \ldots 3998 = \frac{3998!}{1999!}$

9) 76304. Dica: Demonstre que $\left\lfloor \frac{305k}{503} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{305(503-k)}{503} \right\rfloor = 304$.

10) Dica: Demonstre que o espoente de 5 em $\binom{1992}{1492}$ é igual a 1.

11) 734. Dica: Demonstre que em cada um dos intervalos $[0, 3)$, $[3, 6)$, $[6, 9)$, ..., $[96, 99)$ existem 22 valores possíveis para $f(x)$ e que no intervalo $[99, 100]$ existem 8 valores possíveis para $f(x)$.

12) 0, 1, 2. Dica: Escreva $x = 6k + r$, $r = 0, 1, 2, 3, 4$ ou 5.

13) 1, 96/97. Dica: Faça $y = x - 1$.

14) Dica: Faça $I_n = (4 + \sqrt{11})^n + \left(4 - \sqrt{11}\right)^n$. Prove que $\left\lfloor (4 + \sqrt{11})^n \right\rfloor = I_n - 1$ e justifique que I_n é par.

15) 65. Dica: Deve-se resolver $\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{35} \right\rfloor$.

Fazendo $N = 35k + r$, prove que $k \leq 1$.

16) Dica: Note que $\frac{n(n+1)}{4n-2} = \frac{n+1}{4} + \frac{n+1}{8n-4}$

17) $t = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{9n^2 - 40n}}{6}$, t = 1, 2, 3, ..., 8. Dica: Faça t = [t] + {t} e resolva equação de 2º grau em [t].

18) n. Dica: Demonstre que [a + 1/2] = [2a] – [a].

19) 666. Dica: Separe nos casos $0 \le \{x\} < 1/2$ e $1/2 \le \{x\} < 1$ e demonstre que cada caso possui 333 soluções.

20) 4, 7, 9, 13 e 31. Dica: Faça $n = a^2 + r$, com $0 \le r \le 2a$. Depois conclua que r = a + 1 ou r = 0.

21) Dica: Elevando ao quadrado, demonstre que $\sqrt{9n+8} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} < \sqrt{9n+9}$.

22) 0 ou $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dica: Prove que [x] = 0 ou 1.

23) $n^2 - n + 1$. Dica: Demonstre que $\{x\} = 0, \frac{1}{2\lfloor x \rfloor}, \frac{2}{2\lfloor x \rfloor}, \frac{3}{2\lfloor x \rfloor}, \ldots, \frac{2m-1}{2\lfloor x \rfloor}$, para m = 1, 2, 3, ..., n – 1.

24) $x = \frac{50k+13}{10}$ ou $x = \frac{50k+27}{10}$. Dica: Se $x = \frac{a}{b}$, prove que b = 10 e que $25 \mid (a-13)(a+23)$

25) 10, $\frac{15}{2}, \frac{73}{8}, \frac{58}{7}, \frac{34}{5}$. Dica: Transforme a equação em $([x] - 1)(\{x\} + 1) = 9$. Depois, fazendo {x} = m/n, demonstre que $(m + n) \mid 9$ e analise todas as possibilidades.

EQUAÇÕES DIOFANTINAS

20.1. PARTE A

1)
Multiplicando a expressão por 35: $5A + 7B = 31 \Rightarrow 5A = 31 - 7A$.
Para que $31 - 7A$ seja múltiplo de 5, o algarismo das unidades de 7A deve ser 1 ou 6. Assim, o algarismo das unidades de A deve ser 3 ou 8.
Desde que A e B devem ser naturais, se $B = 3 \Rightarrow 5A = 31 - 21 \Rightarrow B = 2$.

2)
Sejam x, $x + 1$, $x + 2$ os inteiros, sendo que $x = 5a$, $x + 1 = 7b$, $x + 2 = 9c$.
Assim: $(x + 1) - x = 1 \Rightarrow 7b - 5a = 1$, onde uma solução inicial é $b_0 = 3$
$a_0 = 4 \Rightarrow b = 3 + 5r \quad a = 4 + 7r$
Desta forma $x = 5a = 5(4 + 7r) \Rightarrow x = 20 + 35r$
$(x + 2) - x = 2 \Rightarrow 9c - 20 - 35r = 2 \Rightarrow 9c - 35r = 22$, onde $c_0 = 18$
$r_0 = 4 \Rightarrow c = 18 + 35t \quad r = 4 + 9t$
Portanto: $x = 5a = 5(4 + 7r) = 5(4 + 7(4 + 9t)) = 20 + 35(4 + 9t) \Rightarrow$
$x = 160 + 315t$.
Deste modo os inteiros $160 + 315t$, $161 + 315t$, $162 + 315t$ formam a solução geral do problema.

3)
Inicialmente notemos que $1995 = 3.5.7.19$.
Lembremos agora alguns teoremas sobre a representação de um número como soma de quadrados:
1. Um número natural n é a soma de dois quadrados de inteiros se e somente se a fatoração de n em fatores primos não contem algum primo da forma $4k + 3$ que possui expoente ímpar.
2. Um número natural n pode ser a soma de três quadrados somente se ele não é da forma $4^l(8k + 7)$, onde k e l são inteiros ≥ 0.
3. Cada número natural ímpar é a soma dos quadrados de 4 inteiros, dois dos quais são números consecutivos.
Em vista dos teoremas acima explanados, o número mínimo é 3 e a representação é dada por $1995 = 1^2 + 25^2 + 37^2$.
Como curiosidade, uma expressão para representar 1995 como soma dos quadrados de 4 inteiros é $1995 = 13^2 + 24^2 + 25^2 + 25^2$.

4)
Sejam x, y, z as medidas dos lados do triângulo, onde x e y são os catetos e z é a hipotenusa, implicando que $x^2 + y^2 = z^2$.

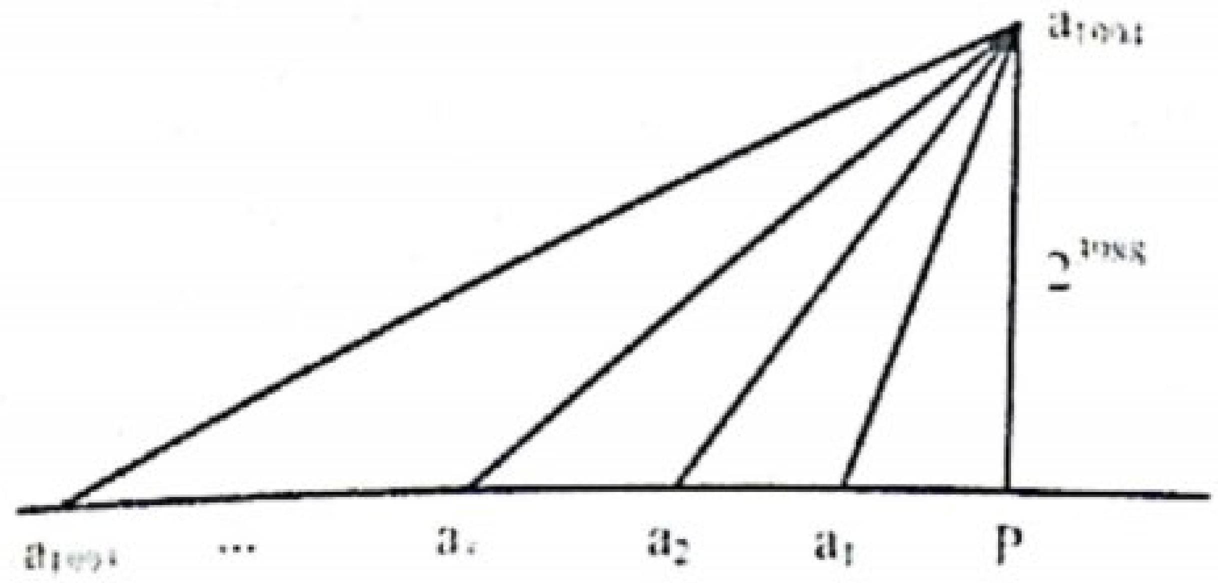
Sabe-se que um dos números x, y, z é divisível por 5. Entretanto, pelo enunciado temos que z não é divisível por 5, implicando que um dos valores x ou y é divisível por 5.
Como a área é dada por $S = (x.y)/2$, então $5 \mid S$.
Sabemos que as soluções de $x^2 + y^2 = z^2$ são dadas por
$x = k(2mn)$ $y = k(m^2 - n^2)$ $z = k(m^2 + n^2)$.
Portanto: $S = (x.y)/2 \Rightarrow S = k^2mn(m^2 - n^2)$.
Se algum dos valores de m ou n for par então $2 \mid S$.
Se m e n forem ímpares temos que $2 \mid m^2 - n^2 \Rightarrow 2 \mid S$.
Como $2 \mid S$ e $5 \mid S \Rightarrow 10 \mid S$.

5)

$x^2 - 1$, $y^2 - 1$, $z^2 + 1$ formam a solução de uma equação pitagórica:
$x^2 - 1 = u^2 - v^2$ $y^2 - 1 = 2uv$ $z^2 + 1 = u^2 + v^2$
Fazendo $v = 1 \Rightarrow x = u$ $z = u$ $y^2 = 2u + 1$
Como $2u + 1$ é um número ímpar e é igual ao quadrado de um número natural, então $2u + 1$ é o quadrado de um número ímpar $\Rightarrow$
$2u + 1 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow 2u + 1 = 4n(n + 1) + 1 \Rightarrow$
$u = 2n(n + 1)$
$y^2 = (2n + 1)^2 \Rightarrow y = 2n + 1$
$x = u \Rightarrow x = 2n(n + 1) \Rightarrow x = 2n^2 + 2n$
$z = u \Rightarrow z = 2n(n + 1) \Rightarrow z = 2n^2 + 2n$
Ou seja: $[(2n^2 + 2n)^2 - 1]^2 + [(2n + 1)^2 - 1]^2 = [(2n^2 + 2n)^2 + 1]^2$

6)

Comecemos analisando a seguinte equação diofantina: $2mn = 2^{3988}$.
Desde que m e n devem ser potências de 2, temos ao todo 1994 pares de soluções inteiras positivas (m, n), com $m > n$:
$(2^0, 2^{3987})$, $(2^1, 2^{3986})$, $(2^2, 2^{3985})$, ..., $(2^{1993}, 2^{1994})$.
Sabemos que as soluções inteiras positivas da equação $x^2 + y^2 = z^2$ são dadas por $x = 2mn$ $y = m^2 - n^2$ $z = m^2 + n^2$.
Assim, com cada uma das 1994 soluções da equação $2mn = 2^{3988}$, $m > n$, podemos construir uma solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$, obtendo assim 1994 ternos pitagóricos (x_i, y_i, z_i), $1 \leq i \leq 1994$.
Note que $x_1 = x_2 = \ldots = x_{1994} = x = 2mn = 2^{3988}$.
Agora coloquemos 1993 pontos sobre uma mesma reta e coloquemos o 1994º ponto a uma distância 2^{3988} desta reta, sendo P o pé da perpendicular traçada de a_{1994} até a reta. O esquema pode ser analisado melhor abaixo:



Definindo as distâncias entre P e cada um dos a_i ($1 \leq i \leq 1993$) sobre a reta como sendo iguais a cada y_i solução de $x^2 + y^2 = z^2$, temos diretamente que as distâncias entre os pontos da reta são números inteiros, uma vez que y_i é inteiro. As distância entre a_{1994} e os pontos da reta também serão números inteiro, pois estas distâncias são calculadas da seguinte forma:
$d(a_{1994}, a_i)^2 = d(a_{1994}, P)^2 + d(a_i, P)^2 \Rightarrow d(a_{1994}, a_i)^2 = x^2 + y_i^2 \Rightarrow$
$d(a_{1994}, a_i) = z = m^2 + n^2$, onde m e n são inteiros.

7)

Como $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z} \Rightarrow (x + y)z = xy \Rightarrow x + y \mid xy$

Seja $d = \text{mdc}(x, y) \Rightarrow x = dm$ e $y = dn$ onde $\text{mdc}(m, n) = 1$

Como $x + y = d(m + n)$ e $xy = d^2mn$, para que $x + y \mid xy \Rightarrow$

$d(m + n) \mid d^2mn \Rightarrow m + n \mid dmn$

Desde que $\text{mdc}(m, n) = 1 \Rightarrow \text{mdc}(m + n, mn) = 1 \Rightarrow m + n \mid d \Rightarrow$

$d = k(m + n)$

Como $x = dm \Rightarrow x = km(m + n)$

Como $y = dn \Rightarrow y = kn(m + n)$

Como $z = xy/(x + y) \Rightarrow z = kmn$

8)

A equação pode ser desenvolvida:

$\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c} \Rightarrow 2bc = a(b - c) \Rightarrow 4bc = 2ab - 2ac \Rightarrow$

$2bc = 2ab - 2ac - 2bc \Rightarrow$

$2bc + a^2 + b^2 + c^2 = 2ab - 2ac - 2bc + a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$

$a^2 + (b + c)^2 = (a + b - c)^2$.

Pela condição 3 temos que $b > c$, ou seja, $a + b - c$ é um inteiro positivo.

Desta forma $(a,\ b + c,\ a + b - c)$ é uma solução da equação pitagórica.

Vamos mostrar agora que esta solução é primitiva, ou seja, que a, $b + c$ e $a + b - c$ são primos relativos.

Seja $d = \text{mdc}(a,\ b + c,\ a + b - c) \Rightarrow d \mid a \quad d \mid (b + c) \quad d \mid (a + b - c)$.

Assim, $d \mid [(a) + (b + c) - (a + b - c)] \Rightarrow d \mid 2c$

Também: $d \mid [(a) - (b + c) - (a + b - c)] \Rightarrow d \mid 2b$

Como a é ímpar então d também é ímpar. Assim temos que $d \mid c$ e $d \mid b$ (lembre-se que $d \mid a$).

Como $mdc(a, b, c) = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow mdc(a, b + c, a + b - c) = 1$.

Desde que $(a, b + c, a + b - c)$ é uma solução primitiva da equação pitagórica então:

$a = m^2 - n^2 \quad b + c = 2mn \quad a + b - c = m^2 + n^2$.

Resolvendo este sistema linear obtemos:

$a = m^2 - n^2 \quad b = n(m + n) \quad c = n(m - n)$

Portanto: $abc = (m^2 - n^2)n(m + n)n(m - n) \Rightarrow abc = [n(m^2 - n^2)]^2$

9)

Seja $3^2 + 4^2 = 5^2$ uma solução da equação pitagórica.

Multiplicando por $3.k^3$ os termos desta equação obtemos:

$(3k)^3 + 3.4^2k^3 = 3.5^2.k^3$

Multiplicando por $3^9.4^3.k^{12}$ os termos desta equação obtemos:

$(3^4.4.k^5)^3 + (3^2.4.k^3)^5 = (3^{10}.4^3.5^2.k^{15})$

Multiplicando por $3^{60}.4^{60}.5^{75}.k^{120}$ os termos desta equação obtemos:

$(3^{24}.4^{21}.5^{25}.k^{65})^3 + (3^{14}.4^{13}.5^{18}.k^{27})^5 = (3^{10}.4^9.5^{11}.k^{35})^7$

Assim, existe, infinitos ternos (x, y, z) de inteiros positivos que satisfazem $x^3 + y^5 = z^7$.

10)

Suponhamos que existam números naturais x e y tais que $x^2 + y^2 = z^2$ e $x^2 - y^2 = t^2$

Dentro todos estes pares (x, y), peguemos o menor, obviamente $mdc(x, y) = 1$

$2x^2 = z^2 + t^2 \Rightarrow$ z e t são ambos pares ou ambos ímpares $\Rightarrow$

$z - t$ e $z + t$ são ambos pares

Então $(z - t)/2$ e $(z + t)/2$ são ambos números naturais

Se $d \mid (z + t)/2$ e $d \mid (z - t)/2$ e também se $d > 1 \Rightarrow d \mid z$

Como $x^2 = [(z + t)/2]^2 + [(z - t)/2]^2 \Rightarrow d^2 \mid x^2 \Rightarrow d \mid x$

Como $x^2 + y^2 = z^2$ e $d \mid x \Rightarrow d \mid y$ que é impossível pois $mdc(x, y) = 1$

Então $mdc[(z + t)/2, (z - t)/2] = 1$

Como $x^2 = [(z + t)/2]^2 + [(z - t)/2]^2$ é uma solução de uma equação pitagórica, temos os dois casos:

i) $(z - t)/2 = m^2 - n^2$ e $(z + t)/2 = 2mn$ e também $x = m^2 + n^2$

ii) $(z + t)/2 = m^2 - n^2$ e $(z - t)/2 = 2mn$ e também $x = m^2 + n^2$

Nos dois casos temos: $2y^2 = z^2 - t^2 = (z - t)(z + t) = 2(m^2 - n^2)4mn \Rightarrow$

$y^2 = (m^2 - n^2)4mn$

Como y é par $\Rightarrow y = 2k \Rightarrow k^2 = (m^2 - n^2)mn$

Desde que $mdc(m, n) = 1 \Rightarrow mdc(m \pm n, m) = 1 \Rightarrow$

$mdc(m^2 - n^2, m) = 1$ e $mdc(m^2 - n^2, n) = 1$

Desta forma $\Rightarrow m = a^2 \quad n = b^2 \quad m^2 - n^2 = c^2$

Do fato de que $mdc(m, n) = 1$ e que um dos números m, n é par e o outro é ímpar $\Rightarrow$ $mdc(m+n, m-n) = 1$

$\therefore$ Como $(m+n)(m-n) = m^2 - n^2 = c^2$ e $mdc(m+n, m-n) = 1$ $\Rightarrow$ $m+n$ e $m-n$ são quadrados

$\therefore$ Como $m = a^2$ e $n = b^2$ $\Rightarrow$ $a^2 + b^2$ e $a^2 - b^2$ são quadrados

Como $a^2 + b^2 = m + n < 2m \leq 2mn \leq (z+t)/2 < z \leq z^2 = x^2 + y^2$ $\Rightarrow$ $a^2 + b^2 < x^2 + y^2$

Esta desigualdade contraria o fato de que x e y são os menores valores que satisfazem as equações

$x^2 + y^2 = z^2$ e $x^2 - y^2 = t^2$

Portanto não existem valores de x e y cuja soma e diferença de seus quadrados sejam quadrados

11)

Suponhamos que existam inteiros x, y satisfazendo a equação

$x^2 + 12 = y^3$.

Se o número x é par $(x = 2x_1)$ então o número y é par $(y = 2y_1)$ $\Rightarrow$

$x_1^2 + 3 = 2y_1^3$ $\Rightarrow$ x_1 é ímpar

$x_1 = 2t + 1$ $\Rightarrow$ $x_1^2 = 4t(t+1) + 1$ $\Rightarrow$ $x_1^2 = 8k + 1$

Como $2y_1^3 = x_1^2 + 3$ $\Rightarrow$ $2y_1^3 = 8k + 4$ $\Rightarrow$ $y_1^3 = 4k + 2$

Entretanto não existe cubo desta forma, pois o cubo de um número par é da forma $8k$.

Assim concluímos que x e y devem ser ímpares

$\therefore x^2 + 4 = y^3 - 8 = (y-2)(y^2 + 2y + 4) = (y-2)((y+1)^2 + 3)$

Como y é ímpar $\Rightarrow$ $x^2 + 4 = 4t + 3$ $\Rightarrow$ $x^2 = 4t - 1$ $\Rightarrow$

$x^2 = 4(t-1) + 3$ $\Rightarrow$ $x^2 = 4k + 3$

Entretanto isto é impossível, pois como x é ímpar $\Rightarrow$ $x = 2q + 1$ $\Rightarrow$

$x^2 = 4q(q+1) + 1$ $\Rightarrow$ $x^2 = 4k + 1$

Portanto $x^2 + 12 = y^3$ não possui soluções inteiras

12)

$x = d + y$ $\Rightarrow$ $(3d - 1)y^2 + (3d^2 - d)y + d^3 = 61$

Notemos que $d \leq 3$, pois se $d \geq 4$ temos que $d^3 \geq 81 > 61$

$d = 1$ $\Rightarrow$ $2y^2 + 2y - 60 = 0$ $\Rightarrow$ $y = 5$ e $x = 6$

$d = 2$ e $d = 3$ não possuem soluções inteiras.

13)

Multiplicando por $(xyz)^2$ $\Rightarrow$ $(yz)^2 + (xz)^2 = (xy)^2$

Assim, $yz = u^2 - v^2$ $xy = 2uv$ $xy = u^2 + v^2$ $\Rightarrow$ $kx = 2uv(y^2 + v^2)$

$ky = (u^2 + v^2)(u^2 - v^2)$ $kz = 2uv(u^2 - v^2)$, onde $k = xyz$.

14)

Notemos que: $n^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 1 = y^2$ $(\times 2)$ $\Rightarrow$
$4n^2 + 4n + 2 = 2y^2$ $\Rightarrow$ $(2n+1)^2 + 1 = 2y^2$ $\Rightarrow$
$(2n+1)^2 - 2y^2 = -1$ $\Rightarrow$ $x^2 - 2y^2 = -1$, onde x é ímpar, que é uma Equação de Pell com menor solução $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$. Analisando a Equação de Pell semelhante, $a^2 - 2b^2 = 1$, notamos que esta possui $a_0 = 3$ e $b_0 = 2$ como menor solução natural. Assim, podemos montar as seqüências $x_k = a_0x_{k-1} + 2.b_0y_{k-1}$ e $y_k = b_0x_{k-1} + a_0y_{k-1}$, que oferecem todas as infinitas soluções naturais para $x^2 - 2y^2 = -1$.
Obtemos, desta forma, $x_k = 3x_{k-1} + 4y_{k-1}$ e $y_k = 2x_{k-1} + 3y_{k-1}$, que implica em infinitos valores de n soluções da Equação
$(2n+1)^2 - 2y^2 = -1$, uma vez que $2n + 1 = x_k$ e x_k sempre é ímpar, pois o termo $3x_{k-1}$ sempre é ímpar e o termo $4y_{k-1}$ sempre é par, fazendo que a soma seja sempre ímpar.
Os primeiros valores de n são:

i) $x_1 = 3x_0 + 4y_0 = 7$ $\Rightarrow$ $2n_1 + 1 = 7$ $\Rightarrow$ $n_1 = 3$ $\Rightarrow$
$n_1^2 + (n_1+1)^2 = 25 = 5^2$
$y_1 = 2x_0 + 3y_0 = 5$

ii) $x_2 = 3x_1 + 4y_1 = 41$ $\Rightarrow$ $2n_2 + 1 = 41$ $\Rightarrow$ $n_2 = 20$ $\Rightarrow$
$n_2^2 + (n_2+1)^2 = 841 = 29^2$
$y_2 = 2x_1 + 3y_1 = 29$

E assim por diante.

15)

TOP

Analisando temos que:
$3n + 1 = x^2$ $4n + 1 = y^2$ $\Rightarrow$ $y^2 - x^2 = n$ $\Rightarrow$ y é ímpar $\Rightarrow$ n é par $\Rightarrow$
x é ímpar $\Rightarrow$ $8 \mid n$
$\therefore 4(3n+1) - 3(4n+1) = 4x^2 - 3y^2 = 1$ $\Rightarrow$ $4x^2 - 3y^2 = 1$
$\therefore w = 2x$ $\Rightarrow$ $w^2 - 3y^2 = 1$ $\Rightarrow$ $w_0 = 2$ $y_0 = 1$
Seja $a^2 - 3b^2 = 1$ $\Rightarrow$ $(aw + 3by)^2 - 3(ay + bw)^2 = 1$ $\Rightarrow$
$w_{n+1} = aw_n + 3by_n$ $\quad y_{n+1} = ay_n + bw_n$
Se $a^2 - 3b^2 = 1$ vamos usar a solução $a_1 = 7$ e $b_1 = 4$ $\Rightarrow$
$w_{n+1} = 7w_n + 12y_n$ $\quad y_{n+1} = 7y_n + 4w_n$
Como $w_n = 2x_n$ $\Rightarrow$ $2x_{n+1} = 14x_n + 12y_n$ $\quad y_{n+1} = 7y_n + 8x_n$
$x_{n+1} = 7x_n + 6y_n \pmod 7$ $\Rightarrow$ $x_{n+1} \equiv -y_n \pmod 7$
$y_{n+1} = 7y_n + 8x_n \pmod 7$ $\Rightarrow$ $y_{n+1} \equiv x_n \pmod 7$
Como $y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2 \equiv x_n^2 - y_n^2 \equiv n \equiv 0 \pmod 7$ $\Rightarrow$ $7 \mid n$

16)

Podemos escrever a relação de recorrência da seguinte forma:
$a_{n+1} - 2a_n = (3a_n^2 - 2)^{1/2}$ $\Rightarrow$ $(a_{n+1} - 2a_n)^2 = 3a_n^2 - 2$ $\Rightarrow$
$(a_{n+1} - 2a_n)^2 - 3a_n^2 = -2$

Assim, basta mostrar que se (b_n, a_n) é uma solução da equação de Pell $x^2 - 3y^2 = -2$, então $b_n = a_{n+1} - 2a_n$

Seja a equação de Pell $a^2 - 3b^2 = 1$, cuja menor solução inteira é $a_0 = 2$ e $b_0 = 1$

Notemos que a equação de Pell $x^2 - 3y^2 = -2$ possui menor solução inteira para $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$

$(a^2 - 3b^2)(x^2 - 3y^2) = -2 \Rightarrow$

$(a - \sqrt{3}\,b)(x - \sqrt{3}\,y)(a + \sqrt{3}\,b)(x + \sqrt{3}\,y) = -2 \Rightarrow$

$[(ax + 3by) - \sqrt{3}\,(bx + ay)][(ax + 3by) + \sqrt{3}\,(bx + ay)] = -2 \Rightarrow$

$(ax + 3by)^2 - 3(bx + ay)^2 = -2$

Usando os menores valores de a e b temos: $(2x + 3y)^2 - (x + 2y)^2 = -2$

Deste modo, fazendo $x = b_n$ e $y = a_n$, temos que outra solução da equação é $b_{n+1} = 2b_n + 3a_n$ e $a_{n+1} = b_n + 2a_n \Rightarrow b_n = a_{n+1} - 2a_n$

17)

i) Inicialmente notemos que ao menos dois dos valores x, a, b devem ser pares.

Suponhamos que, ao contrário, todos os três números x, a, b são ímpares, da forma $(2k \pm 1) \Rightarrow y^2$ é ímpar

$\therefore (2k \pm 1)^2 = 4(k^2 \pm k) + 1 \Rightarrow y^2$ seria da forma $4k + 3$, que é impossível, pois o quadrado de um natural ímpar é da forma $4k + 1$.

Suponhamos agora que apenas um dos valores x, a, b é par $\Rightarrow y^2$ é par

Assim y^2 seria da forma $4k + 2$, que é impossível pois o quadrado de um número par é da forma $4k$.

ii) Supondo que os números a e b são pares $\Rightarrow a = 2l \quad b = 2m$

$\therefore$ Como $y > x \Rightarrow y - x = u \Rightarrow y = (x + u)$

$\therefore (x + u)^2 = x^2 + 4l^2 + 4m^2 \Rightarrow x^2 + 2xu + u^2 = x^2 + 4l^2 + 4m^2 \Rightarrow$

$u^2 = 4l^2 + 4m^2 - 2xu \Rightarrow$ u é par

Para simplificar faremos u = 2.

$\therefore u = 2 \Rightarrow 4n^2 = 4l^2 + 4m^2 - 4x \Rightarrow 1 = l^2 + m^2 - x \Rightarrow$

$\mathbf{x = (l^2 + m^2 - 1)}$

$\therefore y = x + u = x + 2 \Rightarrow \mathbf{y = (l^2 + m^2 + 1)} \quad \mathbf{a = 2l} \quad \mathbf{b = 2m}$

Assim, dados os inteiros a e b pares, ou seja, $a = 2l$ e $b = 2m$, implicando que o produto ab seja par, temos uma solução x, y da equação $a^2 + b^2 + x^2 = y^2$, que é $x = (l^2 + m^2 - 1)$ e $y = (l^2 + m^2 + 1)$ e dado que a equação $a^2 + b^2 + x^2 = y^2$ possui uma solução inteira x, y devemos ter a $= 2l$ e $b = 2m$, ou seja, o produto ab par.

18)

Inicialmente notemos que:

I) $2^4 \equiv 1$ (mod. 5) $\Rightarrow 2^{4k} \equiv 1$ (mod. 5) $\Rightarrow 2^{4k+1} \equiv 2$ (mod. 5) $\Rightarrow$

$2^{4k+2} \equiv 4$ (mod. 5) $\Rightarrow 2^{4k+3} \equiv 3$ (mod. 5)

II) se $x \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{5}$
se $x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{5}$
se $x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod{5}$
se $x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod{5}$
se $x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{5}$

Como na equação dada tanto x^2 quanto 2^y deixam o mesmo resto na divisão por 5, então necessariamente y deve ser par ($4k$ ou $4k + 2$), enquanto que x não deve ser divisível por 5.
Fazendo $y = 2z \Rightarrow x^2 + 615 = 2^{2z} \Rightarrow 2^{2z} - x^2 = 615 \Rightarrow$
$(2^z - x)(2^z + x) = 3.5.41$.
Levando em consideração que se x e z são positivos então $2^z + x > 2^z - x$, temos 4 possibilidades:
i) $2^z + x = 615$ e $2^z - x = 1$;
ii) $2^z + x = 205$ e $2^z - x = 3$;
iii) $2^z + x = 123$ e $2^z - x = 5$;
iv) $2^z + x = 41$ e $2^z - x = 15$.
Claramente os casos i), ii) e iv) não possuem soluções inteiras.
No caso iii) temos que $2^{z+1} = 128 \Rightarrow z = 6 \Rightarrow y = 12$ e $x = 59$.

19)
Seja $n = k^2$. Sabemos que a soma dos n primeiros inteiros positivos é dada por $S(n) = n(n + 1)/2 = k^2(k^2 + 1)/2$.
Como k^2 é um quadrado perfeito para que S(n) seja um quadrado perfeito temos que $(k^2 + 1)/2$ deve ser quadrado perfeito.
$(k^2 + 1)/2 = m^2 \Rightarrow k^2 + 1 = 2m^2 \Rightarrow k^2 - 2m^2 = -1$ (*), que é uma Equação de Pell.
A equação semelhante, trocando -1 por 1, é $a^2 - 2b^2 = 1$ (**), cuja solução inicial é $a_0 = 3$ $b_0 = 2$.
Multiplicando (*) e (**): $(k^2 - 2m^2)(a^2 - 2b^2) = -1 \Rightarrow$
$(k - \sqrt{2}m)(k + \sqrt{2}m)(a - \sqrt{2}b)(a + \sqrt{2}b) = -1 \Rightarrow$
$[(k - \sqrt{2}m)(a - \sqrt{2}b)][(k + \sqrt{2}m)(a + \sqrt{2}b)] = -1 \Rightarrow$
$[(ak + 2bm) - \sqrt{2}(am + bk)][(ak + 2bm) + \sqrt{2}(am + bk)] = -1 \Rightarrow$
$(ak + 2bm)^2 - 2(am + bk)^2 = -1$.
Como $a_0 = 3$ e $b_0 = 2$ é uma solução de $a^2 - 2b^2 = 1 \Rightarrow$
$(3k + 4m)^2 - 2(2k + 3m)^2 = -1$.
Desta forma provamos que a Equação de Pell $k^2 - 2m^2 = -1$ possui infinitas soluções inteiras positivas, todas dadas por:
$k_n = 3k_{n-1} + 4m_{n-1}$ e $m_n = 2k_{n-1} + 3m_{n-1}$
Como $k_0 = 7$ e $m_0 = 5 \Rightarrow k_1 = 3k_0 + 4m_0 = 21 + 20 = 41 \Rightarrow n = 41^2$ é outro número fantástico.

$m_1 = 2k_0 + 3m_0 = 14 + 15 = 29$
$k_2 = 3k_1 + 4m_1 = 3(41) + 4(29) = 123 + 116 = 239 \Rightarrow n = 239^2$ é outro número fantástico.

20)

Sejam $x + y + z = n_1$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=n_2$ e $xyz = n_3$, onde n_1, n_2 e n_3 são inteiros. Então $yz + zx + xy = n_2n_3$ e x, y, z são raízes da equação de terceiro grau $t^3 - n_1t^2 + n_2n_3t - n_3 = 0$.
Sabemos que se uma equação de terceiro possui uma solução racional, então esta solução é igual a p/q, onde p é um fator do coeficiente de t^0 (que é $- n_3$) e q é um fator do coeficiente de t^3 (que é 1). Como os únicos fatores de 1 são 1 e − 1, então q = 1 ou q = − 1, implicando que todas as soluções de $t^3 - n_1t^2 + n_2n_3t - n_3 = 0$ são fatores de n_3, ou seja, as soluções são todas inteiras. Como as soluções de $t^3 - n_1t^2 + n_2n_3t - n_3 = 0$ são x, y e z, então x, y e z são inteiros positivos.
Como $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=n_2 \Rightarrow \frac{1}{x.n_2}+\frac{1}{y.n_2}+\frac{1}{z.n_2}=1 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Sabemos que as únicas soluções inteiras positivas de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ são

(a, b, c) = [(3, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 6)].
Analisando cada solução:
i) $x.n_2 = 3$ $y.n_2 = 3$ $z.n_2 = 3$:
Podemos ter duas possibilidades: $n_2 = 1$ ou $n_2 = 3$.
Se $n_2 = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (3, 3, 3)$
Se $n_2 = 3 \Rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1)$
ii) $x.n_2 = 2$ $y.n_2 = 4$ $z.n_2 = 4$:
Temos novamente duas possibilidades: $n_2 = 1$ ou $n_2 = 2$.
Se $n_2 = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (2, 4, 4)$
Se $n_2 = 2 \Rightarrow (x, y, z) = (1, 2, 2)$
iii) $x.n_2 = 2$ $y.n_2 = 3$ $z.n_2 = 6$
Temos somente uma possibilidade: $n_2 = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (2, 3, 6)$.

21)
Como a, b, c são naturais e $13^3 > 2001$, então temos que $1 \le a, b, c \le 12$.
Suponhamos, sem perda de generalidades que $a \ge b \ge c$, uma vez que a equação é simétrica.
Assim: $2001 = a^3 + b^3 + c^3 \le 3a^3 \Rightarrow a \ge 9 \Rightarrow 9 \le a \le 12$.
Desta forma temos 4 casos a considerar:
i) $a = 9 \Rightarrow b^3 + c^3 = 1272$
Como $9 \le b \le 8$ então não temos soluções neste caso.

ii) $a = 10 \Rightarrow b^3 + c^3 = 1001$

Desde que $10 \le b \le 8$ temos somente uma solução, que é $b = 10$, $c = 1$.

iii) $a = 11 \Rightarrow b^3 + c^3 = 670$

Como $8 \le b \le 7$ novamente não temos solução para este caso.

iv) $a = 12 \Rightarrow b^3 + c^3 = 273$

Como $6 \le b \le 5$ então não temos solução para este caso.

Desta forma, as únicas soluções são

$(a, b, c) = \{(10, 10, 1), (10, 1, 10), (1, 10, 10)\}$

22)

$2 + 2(28n^2 + 1)^{1/2} = m \Rightarrow 4(28n^2 + 1) = m^2 - 4m + 4$

Assim, m deve ser par $\Rightarrow m = 2k \Rightarrow 28n^2 + 1 = k^2 - 2k + 1 \Rightarrow$

$28n^2 = k^2 - 2k \Rightarrow k = 2q \Rightarrow$

$28n^2 = 4q^2 - 4q \Rightarrow 7n^2 = q(q - 1)$

Como mdc $(q, q - 1) = 1$ temos que:

i) $q = 7x^2$ $q - 1 = y^2 \Rightarrow 7x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 7x^2 - 1$ que não possui solução pois não existem nenhum quadrado perfeito que deixe resto -1 na divisão por 7.

ii) $q = x^2$ $q - 1 = y^2 \Rightarrow m = 2k = 4q = 4x^2 = (2x)^2$

Notemos também que existe solução para a equação uma vez que $x^2 - 7y^2 = 1$ é uma equação de Pell, com solução inicial $x_0 = 8$ e $y_0 = 3$, implicando que existem infinitas soluções (x, y) que satisfazem.

23)

Note que $m, n \neq 0$. Deixando m em função de n temos que:

$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow m = \frac{4(n+1)(n-1)}{n(3n-4)} \Rightarrow n \mid 4(n + 1)(n - 1)$

Como mdc $(n, n + 1) =$ mdc $(n, n - 1) = 1 \Rightarrow n \mid 4 \Rightarrow n = \pm 1, \pm 2, \pm 4$.

i) $n = \pm 1 \Rightarrow m = 0$, que é impossível.

ii) $n = -2 \Rightarrow m = 3/5$, que não é inteiro.

iii) $n = 2 \Rightarrow m = 3$.

iv) $n = -4 \Rightarrow m = 15/16$, que não é inteiro.

v) $n = 4 \Rightarrow m = 15/8$, que não é inteiro.

Portanto, a única solução é $(n, m) = (2, 3)$.

24)

Seja $d =$ mdc (x, y), ou seja $x = dx_1$ e $y = dy_1$.

A equação é equivalente a: $1997(13)y_1^2 + 1997(1996)x_1^2 = d^2zx_1^2y_1^2$.

Desde que x_1 e y_1 são primos entre si e $1996 = 2^2.499 \Rightarrow x_1^2 \mid 1997.13$ e $y_1^2 \mid 1997.2^2.499$

Como 1997, 13, 2 e 499 são todos números primos e mdc $(x_1, y_1) = 1$, então temos duas possibilidades: $(x_1, y_1) = (1, 1)$ ou $(1, 2)$.

Analisemos inicialmente $(x_1, y_1) = (1, 1)$:

$\therefore d^2z = 1997(13) + 1997(1996) \Rightarrow d^2z = 1997.7^2.41$

Como 1997 é primo relativo a 7 e 41 então temos duas possibilidades, $d = 1$ ou $d = 7$, que dão as soluções:

$(x, y, z) = \{(1, 1, 4011973), (7, 7, 81877)\}$

Seja agora $(x_1, y_1) = (1, 2)$:

$\therefore d^2z = 1997(13) + 1997(1996)(2^2) \Rightarrow d^2z = 1997.2^9$

Assim temos as possibilidades $d = 1, 2, 4, 8, 16$, que dão as soluções:

$(x, y, z) = \{1, 2, 1022464), (2, 4, 255616), (4, 8, 63904), (8, 16, 15976), (16, 32, 3994)\}$

25)

Olhando a equação módulo 7, temos: $m^2 \equiv 3^n$, porém m^2 só poderá ser congruente a 0, 1, 2, 4 enquanto que se n for ímpar 3^n só poderá ser congruente a 3, 5, 6, então n deverá ser par. Logo existe $n_0 \in Z$ tal que $n = 2n_0$. Voltando à equação original temos:

$$m^2 + 161 = 3^{2n_0} \Leftrightarrow 3^{2n_0} - m^2 = 161 \Leftrightarrow \left(3^{n_0} - m\right)\left(3^{n_0} + m\right) = 161.$$

Como m e n são inteiro positivos, logo o módulo de $\left(3^{n_0} - m\right)$ é menor que $\left(3^{n_0} + m\right)$, e como $\left(3^{n_0} - m\right)$ é positivo e $161 = 7.23$então temos as opções:

- $3^{n_0} - m = 1$ e $3^{n_0} + m = 161 \Leftrightarrow 3^{n_0} = 81$ e $m = 80 \Leftrightarrow n_0 = 4$ e $m = 80 \Leftrightarrow n = 8$ e $m = 80$
- $3^{n_0} - m = 7$ e $3^{n_0} + m = 23 \Leftrightarrow 3^{n_0} = 15$ e $m = 8$ Não há solução inteira.

Logo $m = 80$ e $n = 8$ é a única solução.

26)

Vamos analisar os restos das divisões de 2^n e n por 5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
2^n	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1
$2^n + n$	3	1	1	0	2	0	0	4	1	4	4	3	0	3	3	2	4	2	2	1

Veja que os restos das divisões de 2^n por 5 formam uma seqüência de período 4, enquanto que os restos das divisões de n por 5 formam uma seqüência de período 5. Logo, os restos das divisões de $2^n + n$ formam uma seqüência de período 20, dada pela última linha da tabela acima. Dessa forma, tomando os números de 1 a 10000 em intervalos de tamanho 20, o maior n tal que $2^n + n$ deixa resto zero na divisão por 5 é o 13º termo do ultimo intervalo, ou seja, o número 9980 + 13 = 9993.

27)

$x^2 + y^2 - z^2 - x - 3y - z - 4 = 0 \iff x^2 - x - 6 = z^2 + z + \frac{1}{4} - y^2 + 3y - \frac{9}{4} \iff$

$(x-3)(x+2) = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \iff (x-3)(x+2) = (z+y-1)(z-y+2)$

Fazendo $x = \alpha$, onde α é um número inteiro, pode-se fazer então:

$$\begin{cases} z + y - 1 = \alpha - 3 \\ z - y + 2 = \alpha + 2 \end{cases} \Rightarrow y = -1 \text{ e } z = \alpha - 1$$

Assim, pode-se obter infinitas soluções $(x, y, z) = (\alpha, -1, \alpha - 1)$, onde α é um inteiro arbitrário.

28)

Sejam $x = zc$ e $y = zb$, onde b e c são primos relativos. Então a equação diofantina transforma-se em: $c + zb^2 + z^2 = z^2cb$.

Fazendo $c = za$, para algum inteiro a, nós temos que $a + b^2 + z = z^2ab$, ou seja, $a = \frac{b^2 + z}{z^2b - 1}$.

Se $z = 1$, então $a = \frac{b^2 + 1}{b - 1} = b + 1 + \frac{2}{b - 1}$.

Assim temos duas possibilidades:

i) $b = 2 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow x = 5$ e $y = 2$

ii) $b = 3 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow x = 5$ e $y = 3$

Fazendo $z = 2$ temos: $16a = \frac{16b^2 + 32}{4b - 1} = 4b + 1 + \frac{33}{4b - 1}$.

Novamente temos duas possibilidades:

i) $b = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow x = 4$ e $y = 2$

ii) $b = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow x = 4$ e $y = 6$

Em geral, $z^2a = \frac{z^2b^2 + z^2}{z^2b - 1} = b + \frac{b + z^2}{z^2b - 1}$. Para que esta expressão seja inteira, devemos ter $\frac{b + z^2}{z^2b - 1} \geq 1$ ou $b \leq \frac{z^2 - z + 1}{z - 1}$.

Se $z \geq 3$, então $\frac{z^2 - z + 1}{z - 1} < z + 1$, onde $b \leq z$.

Isto implica que $a \leq \frac{z^2 + z}{z^2 - 1} < 2 \Rightarrow a = 1$.

Desta forma b é uma solução inteira de $w^2 - z^2w + z + 1 = 0$, implicando que o discriminante $z^4 - 4z - 4$ é um quadrado.

Entretanto $z^4 - 4z - 4$ está entre $(z^2 - 1)^2$ e $(z^2)^2$, que é uma contradição.

Deste modo, temos somente as soluções: (4, 2), (4, 6), (5, 2) e (5, 3).

29)

Pelo Teorema de Fermat segue que $x^3 \equiv x \pmod{3} \Rightarrow$
$x^3 \equiv 3x + x \pmod{3} \Rightarrow x^3 - 4x \equiv 0 \pmod{3}$
Analogamente $y^3 \equiv y \pmod{3} \Rightarrow 2y^3 \equiv 2y \pmod{3} \Rightarrow$
$2y^3 \equiv 3y + 2y \pmod{3} \Rightarrow 2y^3 - 5y \equiv 0 \pmod{3}$
Substituindo na equação original conclui-se que $z^2 \equiv 2 \pmod{3}$, que é uma contradição.
Assim, não existem inteiros x, y e z tais que
$x^3 + 2y^3 - 4x - 5y + z^2 = 2012$.

30)

Multiplicando a equação por 4: $4x^2 + 4xy + 4y^2 = 8 \Rightarrow$
$(2x + y)^2 + 3y^2 = 8 \Rightarrow z^2 + 3y^2 = 8$.
Se z e y são racionais positivos então existem os inteiros positivos p, q, m, n tais que $z = p/q$ e $y = m/n$.
Podemos supor também que estas fração que definem y e z estão na forma mais fatorada possível, ou seja, temos simultaneamente que mdc (p, q) = 1 e mdc (m, n) = 1.

$$\frac{3p^2}{q^2} + \frac{m^2}{n^2} = 8 \Rightarrow 3p^2n^2 + m^2q^2 = 8q^2n^2 \Rightarrow 3a^2 + b^2 = 8c^2$$

(1) a e b ímpares $\Rightarrow a^2 = 8k_1 + 1$ e $b^2 = 8k_2 + 1 \Rightarrow 3a^2 + b^2 = 8k + 4$, ou seja, se a e b forem ímpares então $3a^2 + b^2$ não é divisível por 8, que é uma contradição. Assim, para a e b ímpares não temos solução.
(2) a par e b ímpar $\Rightarrow 3a^2 + b^2$ é ímpar, ou seja, não temos solução.
(3) a ímpar e b par $\Rightarrow 3a^2 + b^2$ é ímpar, ou seja, novamente não temos solução.
(4) a par e b par $\Rightarrow a^2 = 4a_1^2 \quad b^2 = 4b_1^2 \Rightarrow 4(3a_1^2 + b_1^2) = 8c^2 \Rightarrow$
$3a_1^2 + b_1^2 = 2a^2 \Rightarrow a_1$ e b_2 possuem a mesma paridade.
i) a_1 e b_1 pares $\Rightarrow a_1^2 = 4a_2^2 \quad b_1^2 = 4b_2^2 \Rightarrow 4(3a_2^2 + b_2^2) = 2c^2 \Rightarrow$
$2(3a_2^2 + b_2^2) = c^2 \Rightarrow$ c é par
Entretanto, se a, b e c forem pares então não teremos mdc (p, q) = 1 e mdc (m, n) = 1, que é uma contradição.
ii) a_1 e b_1 ímpares $\Rightarrow a_1^2 = 8k_1 + 1 \quad b_1^2 = 8k_2 + 1 \Rightarrow$
$4(6k_1 + 2k_2) + 4 = 2c^2 \Rightarrow 2(6a_2^2 + 2b_2^2 + 1) = c^2 \Rightarrow$ c é par, que é a mesma contradição do item anterior.
Desta forma, não existem racionais x, y, z tais que $x^2 + xy + y^2 = 2$.

31)

Inicialmente notemos a, b, c não podem todos serem simultaneamente maiores ou iguais que 3, pois assim a soma $a! + b! + c!$ vai ser divisível por 3, que é impossível.
Assim, pelo menos um dos valores a, b ou c (digamos a) é igual a 1 ou 2.
Inicialmente façamos $a = 1$.
Assim: $1 + b! + c! = 2^n$.
Para que $1 + b! + c!$ seja par temos que impor $b = 1 \Rightarrow 2 + c! = 2^n \Rightarrow c! = 2^n - 2 \Rightarrow c! = 2(2^{n-1} - 1)$
Deste modo a maior potência de 2 que divide $c!$ é 2, implicando que temos dois casos possíveis: $c = 2$ e $c = 3$.
Aplicando $c = 2$ temos que $1! + 1! + 2! = 4 = 2^2$ e aplicando $c = 3$ temos que $1! + 1! + 3! = 8 = 2^3$, ou seja, temos as soluções:
$(a, b, c, n) = \{(1, 1, 2, 2), (1, 2, 1, 2), (2, 1, 1, 2), (1, 1, 3, 3), (1, 3, 1, 3), (3, 1, 1, 3)\}$
Considere agora $a = 2$.
Portanto: $2 + b! + c! = 2^n \Rightarrow b! + c! = 2(2^{n-1} - 1)$, ou seja, a maior potência de 2 que divide $b! + c!$ é 2, fazendo com que um dos valores b e/ou c seja igual a 2 ou 3.
Façamos $b = 2 \Rightarrow c! = 2^n - 4 \Rightarrow c! = 2^2(2^{n-2} - 1)$, implicando que a maior potência de 2 que divide $c!$ é 2^2.
Entretanto não existe nenhum fatorial que seja divisível exatamente por 4. Façamos $b = 3 \Rightarrow c! = 2^n - 8 \Rightarrow c! = 2^3(2^{n-3} - 1)$, implicando que a maior potência de 2 que divide $c!$ é 2^3.
Desta forma temos duas possibilidades, $c = 4$ e $c = 5$:
i) $c = 4 \Rightarrow a! + b! + c! = 2 + 6 + 24 = 32 = 2^5$
ii) $c = 5 \Rightarrow a! + b! + c! = 2 + 6 + 120 = 128 = 2^7$
Temos agora as soluções:
$(a, b, c, n) = \{(2, 3, 4, 5), (2, 4, 3, 5), (3, 2, 4, 5), (3, 4, 2, 5), (4, 2, 3, 5), (4, 3, 2, 5), (2, 3, 5, 7), (2, 5, 3, 7), (3, 2, 5, 7), (3, 5, 2, 7), (5, 2, 3, 7), (5, 3, 2, 7)\}$

32)
Façamos $y = 6a$ e $z = 8a \Rightarrow x^2 + 6^2a^2 - 8^2a^2 = 1997 \Rightarrow x^2 - a^2(8^2 - 6^2) = 1997 \Rightarrow x^2 - 28a^2 = 1997$ que é uma Equação de Pell, que possui a solução inteira positiva $x_0 = 45$ $a_0 = 1$, que produz a solução $x_0 = 45$, $y_0 = 6$ e $z_0 = 8$.
Como uma Equação que possui uma solução inteira positiva possui infinitas soluções então temos infinitas solução para a equação $x^2 + y^2 - z^2 = 1997$.

33)
Analisando módulo 3:
$5^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 5^{2x} \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 5^{2x+1} \equiv 2 \pmod{3}$

Assim: $5^k - 3^n \equiv 1$ ou $2 \pmod{3}$
Porém, todo quadrado perfeito, na divisão por 3, deixa restos 0 ou 1. Logo, conclui-se que k é par.
Analisando módulo 4:
$5 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 5^k \equiv 1 \pmod{4}$
$3 \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow 3^n \equiv (-1)^n \pmod{4}$
Assim: $5^k - 3^n \equiv 0$ ou $2 \pmod{4}$
Como todo quadrado perfeito, na divisão por 4, deixa restos 0 (quando par) ou 1 (quando ímpar) segue que n é par e p é par.
Suponha que $k = 2x$ e $n = 2y$: $5^{2x} - 3^{2y} = p^2 \Rightarrow 5^{2x} - p^2 = 3^{2y} \Rightarrow$

$(5^y - p)(5^y + p) = 3^{2y} \Rightarrow \begin{cases} 5^x - p = 3^a \\ 5^x + p = 3^b \end{cases}$, com $a + b = 2y$, sendo $b > a$

Somando as duas equações: $2.5^x = 3^a + 3^b \Rightarrow 2.5^x = 3^a(3^{b-a} + 1) \Rightarrow$
$a = 0 \Rightarrow 2.5^x = 3^{2y} + 1 \Rightarrow 2.5^x = 9^y + 1$
Se $x > 1$ tem-se que $25 \mid 9^y + 1$
Analisando as potências de 9 módulo 25:
$9^5 \equiv -1 \pmod{25} \Rightarrow 9^{10m} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 9^{10m+5} \equiv -1 \pmod{25} \Rightarrow$
$9^{5(2m+1)} + 1 \equiv 0 \pmod{25}$
Desta última congruência conclui-se que para $9^y + 1$ ser divisível por 25 deve-se ter $y = 5z$, onde z é ímpar.
Assim: $2.5^x = 9^{5z} + 1$ e como $9^5 + 1 \mid 9^{5z} + 1$ segue que $9^5 + 1 \mid 2.5^x$, que é uma contradição, uma vez que $9^5 + 1 = 59050 = 50.1181$ e 1181 não divide uma potência de 5.
Logo, a única possibilidade é $x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow k = 2$ e $n = 2$
Assim, a única solução de $5^k - 3^n = p^2$ é $(k, n, p) = (2, 2, 4)$

34)
Inicialmente observe que (0, k) e (k, 0) são soluções triviais.
Suponhamos agora que $ab \neq 0$.
Desenvolvendo a equação:
$a^4 + a^3b^3 + ab + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \Rightarrow$
$ab(a^2b^2 + 1) = ab(4a^2 + 4b^2 + 6ab) \Rightarrow a^2b^2 + 1 = 4a^2 + 4b^2 + 6ab \Rightarrow$
$a^2b^2 + 2ab + 1 = 4a^2 + 4b^2 + 8ab \Rightarrow (ab + 1)^2 = (2a + 2b)^2$
i) $ab + 1 = 2a + 2b \Rightarrow (a - 2)(b - 2) = -3 \Rightarrow$
$(a, b) = \{(1, -1), (-1, 1), (-5, -3), (-3, -5)\}$
ii) $ab + 1 = -2a - 2b \Rightarrow (a + 2)(b + 2) = 3 \Rightarrow$
$(a, b) = \{(1, -1), (-1, 1), (-5, -3), (-3, -5)\}$

35)
Elevando ao quadrado as duas equações:

$$\begin{cases} x^2z^2 - 4xyzt + 4y^2t^2 = 9 \\ x^2t^2 + 2xyzt + y^2z^2 = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a 2ª equação por 2 e somando com a 1ª:

$x^2(z^2 + 2t^2) + 2y^2(z^2 + 2t^2) = 11 \Rightarrow (x^2 + 2y^2)(z^2 + 2t^2) = 11$

i) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 11 \\ z^2 + 2t^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z, t) = (\pm 3, \pm 1, \pm 1, 0)$

ii) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ z^2 + 2t^2 = 11 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z, t) = (\pm 1, 0, \pm 3, \pm 1)$

36)

Pelo Teorema de Fermat: $x^6, y^6, z^6 \equiv 0$ ou $1 \pmod{7}$

Como na equação dada tem-se $x^6 + y^6 + z^6 \equiv 0 \pmod{7}$ tem-se que x, y e z são múltiplos de 7: $x = 7x_1$, $y = 7y_1$ e $z = 7z_1$

$(7x_1)^6 + (7y_1)^6 + (7z_1)^6 = 4826.7^k \Rightarrow 7^6(x_1^6 + y_1^6 + z_1^6) = 4826.7^k \Rightarrow$

$7^6 \mid 4826.7^k \Rightarrow k \geq 6 \Rightarrow k = k_1 + 6$, com $k_1 \geq 0$.

A equação fica da forma: $x_1^6 + y_1^6 + z_1^6 = 4826.7^{k_1}$

Desta forma, se (x, y, z, k) é solução, tem-se que $\left(\frac{x}{7}, \frac{y}{7}, \frac{z}{7}, k-6\right)$ também é solução. Este procedimento pode ser repetido para cada nova solução da equação, sempre dividindo os valores de x_i, y_i, z_i por 7 e diminuindo k_i em 6 unidades. É lógico que não é possível continuar indefinidamente com esta procedimento. Assim, existe um inteiro positivo n tal que $k = 6n$, $x = 7^n.x_n$, $y = 7^n.y_n$, $z = 7^n.z_n$ e $x_n^6 + y_n^6 + z_n^6 = 4826$.

Como $4^6 = 4096 < 4826 < 5^6 = 15625$, tem-se $1 \leq x_n, y_n, z_n \leq 4$

Testando pequenos valores encontra-se a solução $1^6 + 3^6 + 4^6 = 4826$.

Logo, as soluções na equação original são da forma $(7^n, 3.7^n, 4.7^n, 6n)$, $n \geq 0$, e suas permutações nas três primeiras coordenadas.

20.2. PARTE B

1) c. Dica: Demonstre que $m = 20 + 6t$ e $n = -5t$

2) Dica: Observe que $b = 2mn$ $c = m^2 + n^2$

3) Dica: Analise a equação módulo 8.

4) $(-1, 1)$, $(2, -1)$, $(0, 3)$, $(3, 3)$. Dica: Resolva a equação de 2º grau em x e force o Δ ser um quadrado perfeito.

5) $x = 2n + 1$, $y = 2n(n + 1)$, $z = 2n(n + 1) + 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dica: Sendo $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ e $z = m^2 + n^2$ as soluções primitivas da equação pitagórica, demonstre que $m = n + 1$.

6) Dica: Demonstre que $x = (v + w)^3$, $y = v^3$, $z = w^3$ formam uma família de infinitas soluções inteiras.

7) $(2, -4)$, $(2, 7)$. Dica: Interprete como uma equação de 2º grau em n.

8) $(0, 0)$, $(1, 0)$. Dica: Interprete como uma equação de 2º grau em a e force o Δ ser um quadrado perfeito.

9) Dica: Se a e b pares analise a equação módulo 4 e se a e b ímpares analise a equação módulo 8.

10) Dica: Se $z = x/y$ prove que $1 - xy = [(z^5 - 1)/(z^5 + 1)]^2$

11) Dica: $(x, y, z) = (3.5^{998}.k^{999},\ 4.5^{998}.k^{999},\ 5k)$ é uma família de soluções para a equação dada.

12) Dica: Analise a equação módulo 8.

13) Dica: $x = (m + n)^2$, $y = m^2$, $z = n^2$ formam um conjunto de infinitas soluções (x, y, z) para a equação.

14) Dica: $x = m^2 - n^2 + 2mn \quad y = m^2 - n^2 - 2mn \quad z = m^2 + n^2$

15) Dica: Suponha, por absurdo, que x e y não são divisíveis por 3.

16) Dica: Sendo $a = 2^s.x$, $(s \in N)$ onde x é ímpar, demonstre que $b = 2^{s-1}(x + 1)(x - 1)$ e $c = 2^{s-1}(x^2 + 1)$

17) Dica: Analise a equação módulo 5.

18) Dica: Multiplique a expressão $108^2 + 315^2 = 333^2$ por números da forma 1001001...001001.

19) Dica: Analise a equação módulo 16.

20) $(0, 0)$ e $(1, 2)$. Dica: Faça $(x + 1)(x^2 + 1) = 2^y$ e prove que $x = 0$ ou $x = 1$.

Digitalizado com CamScanner

21) a menos da ordem, as soluções são (2, 4, 20) e (2, 5, 10). Dica: Veja a solução do exemplo resolvido 1.

22) $(2,-1),(-1,2),(3,0),(0,3)$ e (a,a). Dica: Após analisar o caso x = y, escreva a equação como uma de 2º grau em x.

23) Dica: Analise a equação módulo 7.

24) (0, 0), (1, 1) e (2, 2). Dica: Prove que x = y.

25) $(2k-1, k, 2^{2k-1}+1)$ ou $(k, 2k, 2^{2k-1}+1)$, $k \in Z^+$. Dica: Faça $z = 2m + 1$ e depois verifique que $4^{y-1}(4^{x-y}+1) = m(m+1)$

26) $(x, y) = \{(-7, -4), (-1, -4), (1, 4), (7, 4)\}$. Dica: Demonstre que $0 \le y^2 \le 16$.

27) $(x, y) = \{(0, 0), (-588, 784), (588, 784)\}$. Dica: Interprete a equação como sendo de 2º grau em y.

28) (3, 5) e (4, 7). Dica: Reescreva a equação da forma
$3.2^{m-2} = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

29) Dica: Troque n + 1 por n, encontrando a expressão $n(n^2+2) = 9t^3$. Depois conclua que $n = 9x^3$ e $n^2 + 2 = y^3$ e mostre que n deve ser par.

30) Dica: Prove que $4 = (x + y)(x^2 - 5xy + y^2)$ e analise os casos $x + y = \pm 4, \pm 2$ e ± 1.

31) (0, 3) e (4, 7). Dica: Demonstre que $(x+2)^3 < x^3 + 7x^2 + 35x + 27 < (x+4)^3$.

32) (0, 1, 2), (3, 0, 3), (4, 2, 5). Dica: Após analisar os casos em que x = 0 ou y = 0, demonstre que x e y devem ser pares.

33) (3, 0, 1) e (1, 1, 1). Dica: Analise a equação módulo 3 e 8.

34) x = y = 0 e x = y = 2. Dica: Fatore a equação da forma
$3^x = (y+1)(y^2 - y + 1)$.

35) (22, 120, 122), (28, 45, 53), (70, 10, 60), (220, 21, 131), (24, 70, 74), (120, 22, 122), (60, 25, 65), (30, 40, 50). Dica: Substitua a = k(2mn), $b = k(m^2 - n^2)$ e $c = k(m^2 + n^2)$, obtendo $kn(m - n) = 10$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Olimpíadas Paraenses de Matemática - 2000 a 2009, Marcelo Rufino, VestSeller, 2010.

[2] Olimpíadas Brasileiras de Matemática: 9ª a 16ª, Carlos Moreira, Edmilson Motta, Eduardo Tengan, Luiz Amâncio, Nicolau Saldanha, Paulo Rodrigues, Sociedade Brasileira de Matemática, 2003

[3] Olimpíadas de Matemática do Cone Sul V a XII, A. Caminha, M. Mendes & P. Rodrigues, Papel Virtual, 2002.

[4] 10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática, Eduardo Wagner & Carlos Gustavo T. A. Moreira , OEI, 1996.

[5] Treinamento Cone Sul 2007, Bruno Holanda, Carlos Augusto, Samuel Barbosa & Yuri Lima, Realce, 2007.

[6] Treinamento Cone Sul 2008, Bruno Holanda, Cícero Magalhães, Samuel Barbosa & Yuri Lima, Realce, 2010.

[7] Problem Solving-Strategies, Arthur Engel, Springer, 1998.

[8] The IMO Compendium, A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004, Djuiki´c, D.; Jankovi´c, V.; Mati´c, I.; Petrovi´c, N., Springer, 2006.

[9] Mathematical Olympiads: Problems and Solutions From Around the World 1998-1999, T. Andreescu & Z. Feng, MAA, 2000.

[10] Mathematical Olympiads: Problems and Solutions From Around the World 1999-2000, T. Andreescu & Z. Feng, MAA, 2002.

[11] Mathematical Olympiads: Problems and Solutions From Around the World 2000-2001, T. Andreescu, Z. Feng, G. Lee Jr, MAA, 2003.

[12] Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from around the World, 2001–2002, Andreescu, T.; Feng, Z.; Lee, G.; Loh, P., Mathematical Association of America, 2004.

[13] Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, D. Fomin & A. Kirichenko, Math Pro Press, 1994.

[14] The Mathematical Olympiad Handbook: An Introduction to Problem Solving Based on the First 32 British Mathematical Olympiads 1965-1996, A. Gardner, Oxford Science Publications, 1997.

[15] Problems in Algebra: From the Training of the USA IMO Team, T. Andreescu, Z. Feng, Australian Mathematics Trust, 2001.

[16] 102 Combinátorial Problems: From the Training of the USA IMO Team, T. Andreescu, Z. Feng, Birkäuser, 2003.

[17] 103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team, T. Andreescu, Z. Feng, Birkäuser, 2005.

[18] Number Theory Problems (From the Training of the USA IMO Team), Titu Andreescu, Dorin Andrica & Zuming Feng, Birkhäuser, 2007.

[19] The URSS Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematicals, D. O. Shklarsky, N. N. Chentsov & I. M. Yaglom, Dober Books, 1993.

[20] Five Hundred Mathematical Challenges, E. Barbeau, M. S. Klamklin & W. Moser, MAA, 1995.

[21] Mathematical Circles (Russian Experience), Dmitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg, AMS, 1991.

[22] Mathematical Olympiad Challenges, Titu Andreescu e Razvan Gelca, Birkhauser, 2000.

[23] Mathematical Olympiads Treasures, T. Andreescu & B. Enescu, Birkäuser, 2004.

[24] Winning Solutions, Edward Lozansky e Cecil Rousseau, Springer, 1996.

[25] Number Theory - Structures, Examples, and Problems, Titu Andreescu & Dorin Andrica, Birkhäuser; 2009.

[26] Hungarian Problem Book, volumes I & II, New Mathematical, K¨ursch´ak, J., Library, Vols. 11 & 12, Mathematical Association of America, 1967.

[27] The Asian Pacific Mathematics Olympiad 1989–1993, Australian, Lausch, H., Mathematics Trust, 1994.

[28] Tournament of Towns 1980–1984, Taylor, P. J., Australian Mathematics Trust, 1993.

[29] Tournament of Towns 1984–1989, Taylor, P. J., Australian Mathematics Trust, 1992.

[30] Tournament of Towns 1989–1993, Taylor, P. J., Australian Mathematics Trust, 1994.

[31] Tournament of Towns 1993–1997, Taylor, P. J.; Storozhev, A., Australian Mathematics Trust, 1998.

[32] Tournament of Towns 1997–2002, J.; Storozhev, A., Australian Mathematics Trust, 2006.

[33] USSR Mathematical Olympiads 1989–1992, Slinko, A., Australian Mathematics Trust, 1997.

[34] Chinese Mathematics Competitions and Olympiads 1981–1993, Liu, A., Australian Mathematics Trust, 1998.

[35] Chinese Mathematics Competitions and Olympiads 1983–2001, Liu, A., Australian Mathematics Trust, 2005.

[36] The Canadian Mathematical Olympiad 1969–1993, Doob, M., University of Toronto Press, 1993.

[37] Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses – For Junior Section Vol. 1, World Scientific, Xu Jiagu, 2010.

[38] Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses – For Junior Section Vol. 2, World Scientific, Xu Jiagu, 2010.

[39] Inequalities – A Mathematical Olympiad Approach, Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega & Rogelio Valdez Delgado, Birkhäuser, 2009.