DOM BOSCO
by Pearson

PRÉ-VESTIBULAR
EXTENSIVO

1

MATERIAL DO PROFESSOR

Matemática

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

DOM BOSCO - SISTEMA DE ENSINO
PRÉ-VESTIBULAR 1
Matemática e suas tecnologias.

Vice-presidência de Educação	Juliano Melo Costa
Gerência editorial nacional	Alexandre Mattioli
Gerência de produto	Silvana Afonso
Autoria	Vinícius Piloto Amaro Fernandes, Allan Roberto Fabossi e Edilson Sousa
Coordenação editorial	Luiz Molina Luz
Edição de conteúdo	Paulo Roberto de Jesus
Leitura crítica	Fernando Manenti e Alessandro Coelho
Preparação e revisão	Igor Debiasi e Sérgio Nascimento
Gerência de Design	Cleber Figueira Carvalho
Coordenação de Design	Diogo Mecabo
Edição de arte	Alexandre Silva
Assistência de arte	Débora Lima
Coordenação de pesquisa e licenciamento	Maiti Salla
Pesquisa e licenciamento	Cristiane Gameiro, Heraldo Colon, Andrea Bolanho, Sandra Sebastião, Shirlei Sebastião
Ilustrações	Carla Viana
Cartografia	Allmaps
Projeto Gráfico	Apis design integrado
Diagramação	Editorial 5
Capa	Apis design integrado
Imagem de capa	mvp64/istock
Produtor multimídia	Cristian Neil Zaramella
PCP	George Baldim

Av. Santa Marina. 1193 - Água Branca
São Paulo, SP – CEP 05036-001
Tel. (11) 3521-3500

www.pearson.com.br

APRESENTAÇÃO

Um bom material didático voltado ao vestibular deve ser maior que um grupo de conteúdos a ser memorizado pelos alunos. A sociedade atual exige que nossos jovens, além de dominar conteúdos aprendidos ao longo da Educação Básica, conheçam a diversidade de contextos sociais, tecnológicos, ambientais e políticos. Desenvolver as habilidades a fim de obterem autonomia e entenderem criticamente a realidade e os acontecimentos que os cercam são critérios básicos para se ter sucesso no Ensino Superior.

O Enem e os principais vestibulares do país esperam que o aluno, ao final do Ensino Médio, seja capaz de dominar linguagens e seus códigos; construir argumentações consistentes; selecionar, organizar e interpretar dados para enfrentar situações-problema em diferentes áreas do conhecimento; e compreender fenômenos naturais, processos histórico-geográficos e de produção tecnológica.

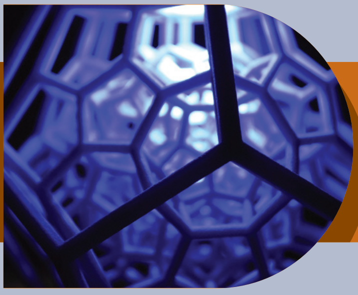
O Pré-Vestibular do Sistema de Ensino Dom Bosco sempre se destacou no mercado editorial brasileiro como um material didático completo dentro de seu segmento educacional. A nova edição traz novidades, a fim de atender às sugestões apresentadas pelas escolas parceiras que participaram do Construindo Juntos – que é o programa realizado pela área de Educação da Pearson Brasil, para promover a troca de experiências, o compartilhamento de conhecimento e a participação dos parceiros no desenvolvimento dos materiais didáticos de suas marcas.

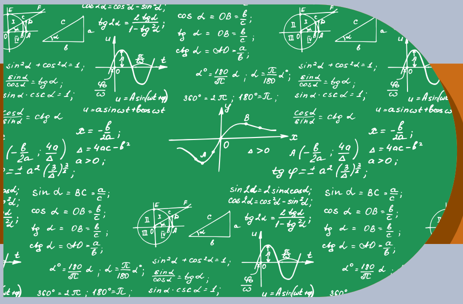
Assim, o Pré-Vestibular Extensivo Dom Bosco by Pearson foi elaborado por uma equipe de excelência, respaldada na qualidade acadêmica dos conhecimentos e na prática de sala de aula, abrangendo as quatro áreas de conhecimento com projeto editorial exclusivo e adequado às recentes mudanças educacionais do país.

O novo material envolve temáticas diversas, por meio do diálogo entre os conteúdos dos diferentes componentes curriculares de uma ou mais áreas do conhecimento, com propostas curriculares que contemplem as dimensões do trabalho, da ciência, da tecnologia e da cultura como eixos integradores entre os conhecimentos de distintas naturezas; o trabalho como princípio educativo; a pesquisa como princípio pedagógico; os direitos humanos como princípio norteador; e a sustentabilidade socioambiental como meta universal.

A coleção contempla todos os conteúdos exigidos no Enem e nos vestibulares de todo o país, organizados e estruturados em módulos, com desenvolvimento teórico associado a exemplos e exercícios resolvidos que facilitam a aprendizagem. Soma-se a isso, uma seleção refinada de questões selecionadas, quadro de respostas e roteiro de aula integrado a cada módulo.

SUMÁRIO





WITTAYAYUT/SHUTTERSTOCK

MATEMÁTICA 1

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

1 POTENCIAÇÃO

- Potenciação

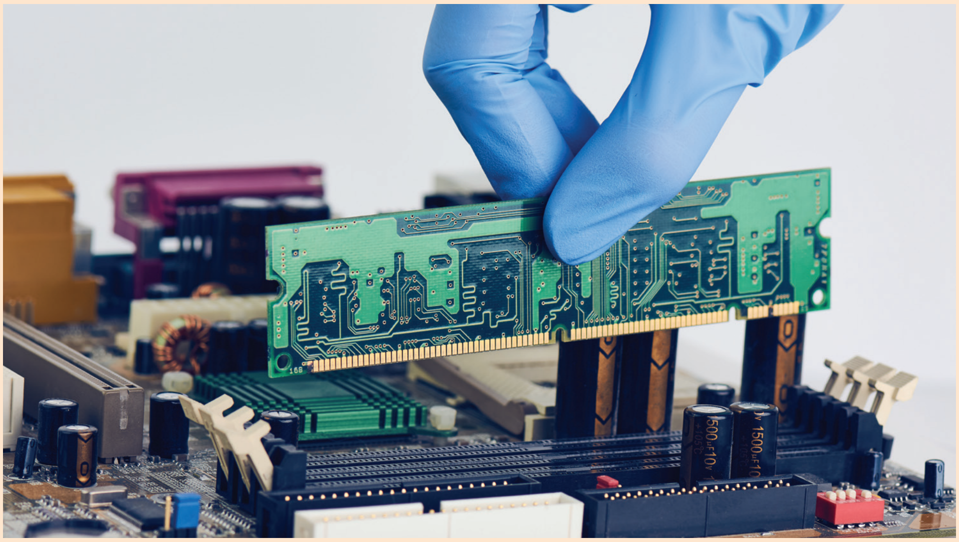
HABILIDADES

- Operar com potenciação.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações — naturais, inteiros, racionais ou reais.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

O processo de contagem teve um grande avanço após o desenvolvimento do cálculo de potenciação.

A potenciação, também conhecida como exponenciação, é altamente utilizada em áreas como a da Física, a da Química, a da Astronomia e a da Biologia por tratarem de números muito grandes. Dentro da Matemática temos diversas áreas de aplicação, como nas finanças (cálculo de juros compostos), no cálculo de áreas, nos volumes, logaritmos e em muitas outras.

IVANMOLLOV/DREAMSTIME



Na computação, todos os dados são armazenados em memórias que trabalham com potências de 2.

Na Grécia Antiga, Arquimedes resolveu calcular quantos grãos de areia eram necessários para encher o universo. Ele considerou a Terra esférica e, após determinar o diâmetro dessa esfera, calculou seu volume e o volume médio de um grão de areia.

Arquimedes fez a divisão final e obteve como resultado um número enorme. Ele não pôde escrevê-lo, pois este resultaria em uma extensa e incompreensível quantidade de algarismos. O matemático então elaborou um método para escrever números grandes, utilizando algarismos especiais, que chamou de "miríades" — hoje conhecidos por expoentes.

Definições

Considere **a** um número real e **n** um número natural diferente de zero:

Para **n** maior que 1, a^n é igual ao produto de **n** fatores idênticos a **a**, isto é:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\mathbf{n}\text{ vezes}}$

Para $n = 1$, define-se: $a^1 = a$

Para $n = 0$ e $a \neq 0$, define-se: $a^0 = 1$

Para $n = 0$ e $a = 0$, temos um problema matemático em relação ao qual, por raciocínios matemáticos diferentes, temos diferentes resultados. Para identidades matemáticas, por convenção, $0^0 = 1$, mas essa expressão pode ser, muitas vezes, considerada uma **forma indeterminada** na Matemática.

Expoente inteiro e negativo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, com $a \neq 0$

Exemplos:

- $10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000$
- $2^1 = 2$
- $\pi^0 = 1$
- $5^{-1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$
- e) $1^{1\,024} = 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 = 1$

Notação: o elemento **a** é chamado de **base** e **n** é chamado de *expoente*. Assim, a^n é denominada **potência**.

Base $\leftarrow a^{n \rightarrow \text{Expoente}}$

PROPRIEDADES

Considere números reais **a** e **b** e números naturais **m** e **n**. Existem algumas propriedades da potenciação envolvendo números reais que facilitam na hora de resolver problemas matemáticos. São válidas as propriedades a seguir.

Produto de potências de mesma base

Para multiplicar potências de mesma base, conserva-se a **base** e somam-se os **expoentes**.

Para dois números inteiros **m** e **n**, temos que:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Justificativa:

Temos que $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\textbf{m} \text{ vezes}}$ e $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\textbf{n} \text{ vezes}}$

Então, $a^{m+n} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a)}_{\textbf{m} \text{ vezes}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a)}_{\textbf{n} \text{ vezes}}$

Logo, temos **m** vezes a base **a** e mais **n** vezes a mesma base **a**.

Portanto, $a^m \cdot a^n = (a \cdot a \cdot ... \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot ... \cdot a) = a^{m+n}$

Exemplos:

- $10^5 \cdot 10^2 = 10^7 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000\,000$
- $5^{10} \cdot 5^{(-10)} = 5^{10+(-10)} = 5^0 = 1$

Na história da Matemática, a palavra "potência" foi utilizada pela primeira vez pelo matemático **Hipócrates de Quios** (470 a.C – 410 a.C.) ao designar o quadrado de um segmento pela palavra grega *dynamis*, que significa "potência", "poder", "força".

Acredita-se que muitas informações dos estudos de Hipócrates foram utilizadas para a escrita de uma das obras mais importantes na Matemática, **Os Elementos de Euclides**.

Quociente de potências de mesma base

Para dividir potências de mesma base, conserva-se a base e subtraem-se os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0$$

Justificativa:

Temos que $a^m = a \cdot a \cdot ... \cdot a$

Se $m > n$, temos: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{(a \cdot a \cdot .... \cdot a\ .... \cdot a)}{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)} =$

$= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{(\textbf{m} - \textbf{n}) \text{ vezes}} = a^{m-n}$

Se $m = n$, temos: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{(a \cdot a \cdot .... \cdot a)}{(a \cdot a \cdot .... \cdot a)} =$

$= 1 = a^0 = a^{m-n}$

Se $m < n$, temos: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{(a \cdot a \cdot .... \cdot a)}{(a \cdot a \cdot .... \cdot a .... \cdot a)} =$

$\frac{1}{\underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{(\textbf{m} - \textbf{n}) \text{ vezes}}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$

Exemplos:

- $\frac{5^8}{5^6} = 5^{8-6} = 5^2 = 25$
- $\frac{10^3}{10^4} = 10^{3-4} = 10^{-1} = 0{,}1$
- $\frac{2^3}{2^x} = 2^{3-x}$

Produto de potências de mesmo expoente

Para multiplicar potências de mesmo expoente, conserva-se o **expoente** e multiplicam-se as **bases**.

Justificativa:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\textbf{n} \text{ vezes}}$ e $b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \ldots \cdot b}_{\textbf{n} \text{ vezes}}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot a \cdot ... \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot ... \cdot b) = \underbrace{(ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \ldots \cdot ab)}_{\textbf{n} \text{ vezes}}$

Portanto, $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Exemplos:

- $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\,000$
- $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = (a \cdot b \cdot c)^3$

Quociente de potências de mesmo expoente

Para dividir potências de mesmo expoente, conserva-se o **expoente** e dividem-se as **bases**.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\ b \neq 0$$

Justificativa:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\textbf{n} \text{ vezes}}$ e $b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \ldots \cdot b}_{\textbf{n} \text{ vezes}}$

$\frac{a^n}{b^n} = \frac{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}{(b \cdot b \cdot ... \cdot b)} = \underbrace{\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot ... \cdot \frac{a}{b}\right)}_{\textbf{n} \text{ vezes}}$

Portanto, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Exemplos:

- $\frac{2^2}{10^2} = \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$
- $\left(\frac{a^n}{b^n \cdot c^n}\right) = \left(\frac{a^n}{(b \cdot c)^n}\right) = \left(\frac{a}{b \cdot c}\right)^n$

Potência de uma potência

Para elevar uma potência a um novo expoente, conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Justificativa:

$$(a^m)^n = \left(a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m\right) = a^{\overbrace{(m+m+m+\ldots+m)}_{\text{n vezes}}}$$

Portanto, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplos:

- $(2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2} = 2^{10} = 1\,024$
- $((2^2)^3)^4 = 2^{2 \cdot 3 \cdot 4} = 2^{24}$

Observação:
As propriedades apresentadas podem ser estendidas para os expoentes **m** e **n** inteiros.

Exemplos:

- $\frac{10^2}{10^{-3}} = 10^{2-(-3)} = 10^5 = 10\,000$
- $5^{-3} \cdot 2^{-3} = (5 \cdot 2)^{-3} = 10^{-3}$
- $\left(\frac{7^{-3}}{5^{-3}}\right) = \left(\frac{7}{5}\right)^{-3}$
- $(2^{-2})^{-4} = 2^{(-2) \cdot (-4)} = 2^8 = 256$

SITUAÇÕES ESPECIAIS

As potências $(-a)^n$ e $-a^n$ apresentam diferentes resultados caso o número **n** seja par.

Exemplos:

- $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4 = 2^2$
- $-2^2 = -(2) \cdot (2) = -4$

As potências $(a^m)^n$ e a^{m^n} em geral apresentam diferentes resultados, pois:

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m = a^{(m \cdot n)} \text{ e } a^{m^n} = a^{\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{\text{n vezes}}}$$

Exemplos:

- $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$
- $2^{3^2} = 2^{3 \cdot 3} = 2^9 = 512$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Mackenzie – A fração $\frac{2^{98} + 4^{50} - 8^{34}}{2^{99} - 32^{20} + 2^{101}}$ é igual a:

a) 1
b) $-\frac{11}{6}$
c) 2
d) $-\frac{5}{2}$
e) $\frac{7}{4}$

Resolução

Transformando todos os termos da fração em potências de 2, temos que

$$\frac{2^{98} + 4^{50} - 8^{34}}{2^{99} - 32^{20} + 2^{101}} = \frac{2^{98} + (2^2)^{50} - (2^3)^{34}}{2^{99} - (2^5)^{20} + 2^{101}} = \frac{2^{98} + 2^{100} - 2^{102}}{2^{99} - 2^{100} + 2^{101}} =$$
$$= \frac{2^{98}\,(1 + 2^2 - 2^4)}{2^{99}\,(1 - 2^1 + 2^2)} = \frac{(1 + 4 - 16)}{2\,(1 - 2 + 4)} = \frac{-11}{2 \cdot 3} = \frac{-11}{6}$$

Alternativa correta: B

2. UEL – Simplificando-se a expressão:
$\frac{3^{3-n} + 3 \cdot 3^{2-n} - 9 \cdot 3^{1-n}}{9 \cdot 3^{2-n}}$, para $n \in \mathbb{R}$ obtém-se:

a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $6 \cdot 3^{n-1}$
d) $1 - 3^{1-n}$
e) -3^{n+1}

Resolução

Transformando todos os termos da fração em potências de 3, temos que

$$\frac{3^{3-n} + 3^{1+(2-n)} - 3^{2+(1-n)}}{3^{2+(2-n)}} = \frac{3^{3-n} + 3^{3-n} - 3^{3-n}}{3^{4-n}} =$$
$$\frac{3^{3-n}}{3^{4-n}} = 3^{3-n-(4-n)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

POTÊNCIA DE DEZ

É comum o uso da **notação científica**, isto é, escrita de um número com o auxílio de potências de base 10, geralmente no seguinte formato:

$$A \cdot 10^n$$

Nessa fórmula, **A** é um número maior ou igual a 1 e menor que 10; **n** é um número inteiro, expoente de 10.

Alguns instrumentos, como calculadoras e programas de computador, utilizam a notação **E** para representar potências de 10.
Por exemplo:
$6{,}02 \cdot 10^{23}$ corresponde a 6,02e23 ou 6,02E23

Números muito grandes

Para escrever um número muito grande em notação científica, procede-se à divisão sucessiva por 10 até que se encontre um resultado maior ou igual a 1 e menor que 10. Ao dividir um número por 10, há o deslocamento da vírgula para a esquerda. A quantidade de divisões efetuadas, ou seja, a quantidade de deslocamentos de vírgula é o expoente de 10.

Exemplo:

No planeta Terra há cerca de 7 bilhões de habitantes, ou seja:

7 bilhões = 7 000 000 000

7 000 000 000 : 1 000 000 000 = 7

Então,

7 bilhões é igual a $7 \cdot 10^9$.

Números muito pequenos

Para escrever um número muito pequeno em notação científica, procede-se à multiplicação sucessiva por 10 até que se encontre um resultado maior ou igual a 1 e menor que 10. Quando se multiplica um número por 10, há o deslocamento da vírgula para a direita. A quantidade de multiplicações efetuadas, ou seja, a quantidade de deslocamentos de vírgula, é representada por um número com sinal negativo, que é o expoente de 10.

Exemplo:

Na Química, a massa de uma molécula de água é aproximadamente 0,00000000000000000000003 g. Para representar esse número em notação científica, pode-se pensar o cálculo da seguinte forma:

$$\frac{3}{100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000} = 3 \cdot 10^{-23} \text{ g}$$

ROTEIRO DE AULA

POTENCIAÇÃO

Definição

- $n > 1$, $a^2 =$ $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n vezes}}$
- $a^1 =$ a
- Para $a \neq 0$, $a^0 =$ 1
- Para $a \neq 0$, $a^{-n} =$ $\frac{1}{a}$

Propriedades

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Casos Especiais

- As potências a^{mn} e $(a^m)^n$ geralmente apresentam resultados pares
- As potências $(-a)^n$ e $-a^n$ apresentam resultados diferentes para **n** diferentes

Notação Científica

$A \cdot 10^n$

Sendo $1 \leq A < 10$ e n inteiro

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFSP – Leia o trecho adaptado abaixo para responder à questão.

A perereca-macaco-de-cera, encontrada na América do Sul e Central, é capaz de aguentar mais tempo no sol forte do que outras espécies de anfíbios, devido à secreção de cera que reduz a perda de água por evaporação, protegendo sua pele.

Fonte: <http://biologiavida-oficial.blogspot.com.br/2014/04/phyllomedusasauvagii.html>.

IVKUZMIN/DREAMSTIME

A área territorial da América Central é de, aproximadamente, 523 000 km². Assinale a alternativa que apresenta a área em potência de base 10.

a) $523 \cdot 10^2$
b) $52{,}3 \cdot 10^4$
c) $5{,}23 \cdot 10^2$
d) $523 \cdot 10^4$
e) $5{,}23 \cdot 10^3$

Transformando 523 000 em potência de 10, temos
$523\,000 = 523 \cdot 10^3 = 52{,}3 \cdot 10^4$

2. UFRGS – 2014 – O algarismo das unidades de 9^{10} é

a) 0
b) 1
c) 3
d) 6
e) 9

Sabemos que 9^n termina em 1, se n for par, e termina em 9, se n for ímpar. Portanto, 9^{10} termina em 1.

3. Enem C1-H3

Computadores utilizam, por padrão, dados em formato binário, em que cada dígito, denominado de *bit*, pode assumir dois valores (0 ou 1). Para representação de caracteres e outras informações, é necessário fazer uso de uma sequência de bits, o *byte*. No passado, um *byte* era composto de 6 bits em alguns computadores, mas atualmente tem-se a padronização que o *byte* é um octeto, ou seja, uma sequência de 8 *bits*. Esse padrão permite representar apenas 2^8 informações distintas.

Se um novo padrão for proposto, de modo que um *byte* seja capaz de representar pelo menos 2560 informações distintas, o número de bits em um *byte* deve passar de 8 para

a) 10
b) 12
c) 13
d) 18
e) 20

Temos que $2^{11} = 2\,048$ e $2^{12} = 4\,096$. Como $2\,048 < 2\,560 < 4\,096$ então seriam necessários, no mínimo, 12 *bits* em um *byte*.

4. CFTMG – Sendo $y = \dfrac{4^{10} \cdot 8^{-3} \cdot 16^{-2}}{32}$, a metade do valor de y é

a) 2^{-3}
b) 2^{-4}
c) 2^{-5}
d) 2^{-6}

Vamos transformar os termos de y em potências de 2

$$y = \frac{(2^2)^{10} \cdot (2^3)^{-3} \cdot (2^4)^{-2}}{2^5} = \frac{2^{20} \cdot 2^{-9} \cdot 2^{-8}}{2^5} = 2^{20-9-8-5} = 2^{-2}$$

A metade de y é dada por $\dfrac{2^{-2}}{2} = 2^{-3}$

5. IFSP – O valor da expressão $\dfrac{2^{-2} - 2^{-3}}{2^2}$ é igual a

a) $\dfrac{1 - 2^5}{2^4}$
b) 2^{-3}
c) -2^{-5}
d) 2^{-5}
e) $\dfrac{2^5 - 1}{2^4}$

$$\frac{2^{-2} - 2^{-3}}{2^2} = 2^{-4} - 2^{-5} = 2^{-4} - \frac{1}{2} \cdot 2^{-4} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-4} = 2^{-5}$$

6. IFSP (adaptado) – Considere que:

- a distância média da Terra à Lua é de cerca de 400 000 km; e

- a distância média da Terra ao Sol é de cerca de 150 milhões de quilômetros.

Com base nessas informações, em relação à Terra, o Sol está N vezes mais longe do que a Lua. Calcule o valor de N.

Temos que $\frac{150 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^5} = 37,5 \cdot 10 = 375$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. IFCE (adaptado) – Calcule o valor da expressão $\frac{18^n \cdot 4}{2 \cdot (6^n \cdot 3^n)}$

8. IFSUL – Em Matemática, potências são valores que representam uma multiplicação sucessiva de um número. Usando as propriedades de potenciação, qual dos números a seguir é o maior?

a) 3^{45}
b) 9^{21}
c) 243^8
d) 81^{12}

9. ESPM – A expressão numérica $2 \cdot 81^3 + 3 \cdot 9^6 + 4 \cdot 27^4$ equivale a:

a) 3^{15}
b) 9^7
c) 27^4
d) 3^{21}
e) 9^{12}

10. Sistema Dom Bosco – Se $x = 1\,000$, então o valor de $\frac{10^{-3} \cdot (0,001)^{-2}}{1\,000^{-4}}$ é

a) x^{-7}
b) x^{-3}
c) x^{-2}
d) x
e) x^5

11. Albert Einstein – Medicina – A tabela a seguir permite exprimir os valores de certas grandezas em relação a um valor determinado da mesma grandeza tomado como referência. Os múltiplos e submúltiplos decimais das unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI) podem ser obtidos direta ou indiretamente dos valores apresentados e têm seus nomes formados pelo emprego dos prefixos indicados.

Nome	Símbolo	Fator pelo qual a unidade é multiplicada
tera	T	$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$
giga	G	$10^{9} = 1\,000\,000\,000$
mega	M	$10^{6} = 1\,000\,000$
quilo	K	$10^{3} = 1\,000$
hecto	h	$10^{2} = 100$
deca	da	$10^{1} = 10$
deci	d	$10^{-1} = 0{,}1$
centi	c	$10^{-2} = 0{,}01$
mili	m	$10^{-3} = 0{,}001$
micro	µ	$10^{-6} = 0{,}000\,001$
nano	n	$10^{-9} = 0{,}000\,000\,001$
pico	p	$10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$

Fonte: Quadro geral de Unidades de Medida, 2a. ed. – INMETRO, Brasília, 2000.

Por exemplo, se a unidade de referência fosse o ampère (A), teríamos:

$$152\,000\ \mu A = 152\,000 \cdot 10^{-6}\ A = \frac{152 \cdot 10^{3}}{10^{6}}\ A = 0{,}152\ A$$

Se o grama (g) for a unidade de referência e

$x = \dfrac{(12\,500 \cdot 10^{9}\ Gg) \cdot (0{,}0006\ ng)}{0{,}000\,012\ Tg}$, então o valor de X, em gramas, é tal que:

a) $x < 500$
b) $500 < x < 1\,000$
c) $1\,000 < x < 1\,500$
d) $x > 500$

12. Sistema Dom Bosco – Qual das alternativas é mais próxima de $\dfrac{(4{,}25)^{3} \cdot (9{,}8)^{2}}{(10{,}1)^{4}}$?

a) 0,064.
b) 0,64.
c) 6,4.
d) 64.
e) 640.

13. UFRGS – A expressão $(0{,}125)^{15}$ é equivalente a

a) 5^{45}
b) 5^{-45}
c) 2^{45}
d) 2^{-45}
e) $(-2)^{45}$

14. CFTMG (adaptado) – Calcule o valor da expressão numérica $\dfrac{(1{,}25)^{-2} + 4 \cdot 5^{-1}}{(0{,}999...)^{2} - 2 \cdot (-10)^{-1}}$.

15. UPE – Analise as sentenças a seguir:

I. Se $2^{3a} = 729$ o resultado de 2^{-a} é igual a $\frac{1}{3}$.

II. O resultado da operação $(1{,}25 \cdot 10^{-4} - 1{,}16 \cdot 10^{-7})$ é igual a $1{,}19 \cdot 10^{-4}$.

III. Se $x^2 = 25^{12}$; $y^6 = 25^{12}$; $w^7 = 25^{63}$. O valor da expressão $(x \cdot y \cdot w)^{12}$ é igual a 25^{168}.

Com base nelas, é CORRETO afirmar que

a) apenas I é falsa
b) apenas II é verdadeira
c) apenas I e II são verdadeiras
d) apenas I e III são verdadeiras
e) I, II e III são falsas

16. UFRGS – O algarismo das unidades de $9^{99} - 4^{44}$ é

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

17. ESPCEX (adaptado) – O derramamento de dez mil litros de óleo em uma bacia hidrográfica, provocou um desastre ambiental que comprometeu a fauna e a flora da região.

Se o óleo que se espalhou na superfície da água atingiu uma área de 150 000 m², calcule a ordem de grandeza da espessura da camada de óleo, estimada em milímetros.

18. Fuvest **C1H3**

De 1869 até hoje, ocorreram as seguintes mudanças de moeda no Brasil: (1) em 1942, foi criado o cruzeiro, cada cruzeiro valendo mil-réis; (2) em 1967, foi criado o cruzeiro novo, cada cruzeiro novo valendo mil cruzeiros; em 1970, o cruzeiro novo voltou a se chamar apenas cruzeiro; (3) em 1986, foi criado o cruzado, cada cruzado valendo mil cruzeiros; (4) em 1989, foi criado o cruzado novo, cada um valendo mil cruzados; em 1990, o cruzado novo passou a se chamar novamente cruzeiro; (5) em 1993, foi criado o cruzeiro real, cada um valendo mil cruzeiros; (6) em 1994, foi criado o real, cada um valendo 2 750 cruzeiros reais. Quando morreu, em 1869, Brás Cubas possuía 300 contos. Se esse valor tivesse ficado até hoje em uma conta bancária, sem receber juros e sem pagar taxas, e se, a cada mudança, o depósito tivesse sido normalmente convertido para a nova moeda, o saldo hipotético dessa conta seria, aproximadamente, de um décimo de:

Dados: um conto equivalia a um milhão de réis. Um bilhão é igual a 10^9 e um trilhão é igual a 10^{12}.

a) real
b) milésimo de real
c) milionésimo de real
d) bilionésimo de real
e) trilionésimo de real

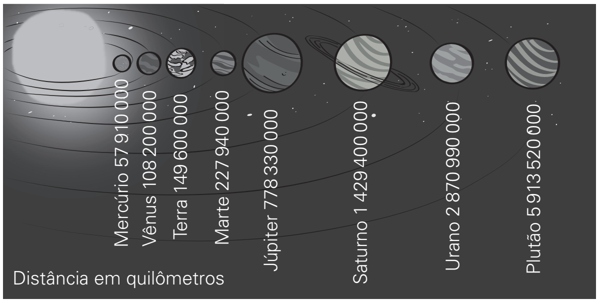
19. Enem **C1-H1**

Uma das principais provas de velocidade do atletismo é a dos 400 metros rasos. No Campeonato Mundial de Sevilha, em 1999, o atleta Michael Johnson venceu essa prova, com a marca de 43,18 segundos. Esse tempo escrito em notação científica é

a) $0,4318 \cdot 10^{2}$
b) $4,318 \cdot 10^{1}$
c) $43,18 \cdot 10^{0}$
d) $431,8 \cdot 10^{-1}$
e) $4318 \cdot 10^{-2}$

20. Uema **C1-H3**

Os planetas do sistema solar do qual nosso planeta Terra faz parte realizam órbitas em torno do Sol, mantendo determinada distância, conforme mostra a figura a seguir.



Disponível em: <http://webciencia.com>. Acesso em: 27 ago. 2014. (Adaptado.)

O valor, em metros, da distância da Terra ao Sol em potência é

a) $14,96 \cdot 10^{-11}$
b) $1,496 \cdot 10^{-10}$
c) $14,96 \cdot 10^{-10}$
d) $1,496 \cdot 10^{11}$
e) $14,96 \cdot 10^{11}$

02 RADICIAÇÃO

- Radiciação

HABILIDADES

- Diferenciar conceitos de potenciação e radiciação.
- Operar com radiciação.
- Verificar que as operações de potenciação e radiciação são inversas entre si.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações de operações e números (naturais, inteiros, racionais ou reais).
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

A radiciação é a operação inversa da potenciação. É muito utilizada para solucionar equações e simplificar expressões aritméticas e algébricas. Vamos definir essa operação e analisar suas propriedades.

MARQUES/SHUTTERSTOCK

A origem do símbolo utilizado na radiciação ($\sqrt{\ }$) é muito incerta. Alguns dizem que a descoberta foi feita pelo matemático **Al-Qalasadi** no século XIV. Porém, os primeiros registros de aplicações dos radicais foram feitos pelos hindus. A origem da palavra **radical** vem do latim *radix* ou *radicis*, que significa "raiz". O símbolo $\sqrt{\ }$ foi utilizado pela primeira vez pelo matemático alemão **Christoff Rudolff** em 1525, no livro *Die Coss*.

Definições

Considere **a** um número real não negativo e **n**, um número natural diferente de zero. O símbolo $\sqrt[n]{a}$ representa um número real **b**, não negativo, que satisfaz à igualdade $b^n = a$.

Notação:

O número **a** é chamado de radicando, **n** é denominado índice e $\sqrt[n]{a}$ é a raiz n-ésima de **a**.

$$\text{Índice} \leftarrow \sqrt[n]{a} \rightarrow \text{Radicando}$$

Observação:

O símbolo $\sqrt{a}$ sem o índice representa a raiz quadrada $\sqrt[2]{a}$.

Exemplos:

- $\sqrt{49} = 7$, pois $7^2 = 49$ (raiz quadrada de 49)
- $\sqrt[1]{3} = 3$, pois $3^1 = 3$ (raiz primeira de 3)
- $\sqrt[3]{0} = 0$, pois $0^3 = 0$ (raiz cúbica de zero)

CASO PARTICULAR

Considere **a** um número real e **n**, um número natural ímpar. O símbolo $\sqrt[n]{a}$ representa um número real **b** que satisfaz à igualdade $b^n = a$.

Justificativa:

Seja **n** um número natural ímpar. Logo, podemos escrevê-lo como $n = 2k - 1$, sendo **k** um número natural qualquer.

Assim,

$$b^n = b^{2k-1} = \frac{b^{2k}}{b^1}$$

Se $b > 0$, temos que $b^n > 0$.
Se $b < 0$, temos que $b^n < 0$.

Exemplos:

- $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$

RAIZ QUADRADA DO QUADRADO DE UM NÚMERO REAL

Como mostrado no caso particular, temos que:

- $\sqrt{a^2} = a$, se **a** for número real não negativo;
- $\sqrt{a^2} = -a$, se **a** for número real negativo.

Costuma-se indicar: $\sqrt{a^2} = |a|$ (valor absoluto de **a**).

Exemplos:

- $\sqrt{5^2} = |5| = 5$
- $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$
- $\sqrt{(5-\sqrt{5})^2} = 5 - \sqrt{5}$, pois $5 - \sqrt{5} > 0$
- $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$, pois $2 - \sqrt{5} < 0$

Observação:

Não se deve confundir $\sqrt{4} = 2$ com $\sqrt{4} = \pm 2$, pois é falso, de acordo com a definição $2 = \sqrt{4}$ e $-2 = -\sqrt{4}$.

Se for considerada a equação $x^2 = 4$, têm-se como solução as raízes 2 e -2, pois $2^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$.

POTÊNCIAS COM EXPOENTE RACIONAL

Dado um número real **a**, tal que $a > 0$, além de **n** inteiro e **k** inteiro positivo, então $a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}$.

Exemplos:

- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$
- $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

Observação:

Todas as propriedades apresentadas para potências de expoentes inteiros do módulo anterior são válidas para expoentes racionais.

Nem sempre se consegue encontrar um valor inteiro como resultado de uma raiz de um número natural. Por exemplo, $\sqrt{5}$.

É preciso achar um número que, elevado ao quadrado, resulte em 5. Em casos como esse, podem-se utilizar métodos matemáticos para atribuir uma aproximação ao resultado pretendido. Usando uma calculadora, podemos obter um valor com uma boa aproximação para números como esse.

Números com essa característica pertencem ao conjunto dos irracionais, isto é, não podem ser escritos em forma de fração.

PROPRIEDADES

Considere os números reais **a** e **b** não negativos e os naturais não nulos **m**, **n** e **p**. Assim, é possível provar as propriedades a seguir.

Produto de radicais de mesmo índice

Para multiplicar radicais com o mesmo índice, conserva-se o índice e multiplicam-se os radicandos:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Justificativa:

Temos que $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Logo, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

Exemplos:

- $\sqrt[5]{5^2} \cdot \sqrt[5]{5^3} = \sqrt[5]{5^2 \cdot 5^3} = \sqrt[5]{5^5} = 5$
- $\sqrt[9]{1\,024 \cdot 256} = \sqrt[9]{1\,024} \cdot \sqrt[9]{256} = \sqrt[9]{2^{10}} \cdot \sqrt[9]{2^8} =$
$= \sqrt[9]{2^9 \cdot 2} \cdot \sqrt[9]{2^8} = 2\sqrt[9]{2} \cdot \sqrt[9]{2^8} = 2 \cdot \sqrt[9]{2 \cdot 2^8} = 2 \cdot \sqrt[9]{2^9} =$
$= 2 \cdot 2 = 4$

Divisão de radicais de mesmo índice

Para dividir radicais de mesmo índice, conserva-se o índice e dividem-se os radicandos:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

Justificativa:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Exemplos:

- $\dfrac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{\dfrac{128}{4}} = \sqrt[5]{32} = 2$
- $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

Potência de uma raiz

Para elevar uma raiz a um expoente, basta elevar o radicando a esse expoente:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Justificativa:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Observação:

Essa propriedade também é válida quando o expoente **m** é inteiro negativo.

Exemplos:

- $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5^2} = 5$
- $(\sqrt[3]{2})^{-6} = \sqrt[3]{2^{-6}} = 2^{-\frac{6}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Raiz de outra raiz

Para calcular a raiz de outra raiz, basta conservar o radicando e multiplicar os índices:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

Justificativa:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{\left(\frac{1}{m}\right)}{n}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

Exemplos:

- $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[2\cdot 3\cdot 4]{2} = \sqrt[24]{2}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{6}} = \sqrt[3\cdot 5]{6} = \sqrt[15]{6}$

Simplificação de radicais

Ao se multiplicarem o índice e o expoente de seu radicando por um mesmo número natural não nulo, o valor da raiz não se altera:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} \quad (p \neq 0)$$

Justificativa:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m\cdot p}{n\cdot p}} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$$

Exemplos:

- $\sqrt{3^3} = \sqrt[2\cdot 2]{3^{3\cdot 2}} = \sqrt[4]{3^6}$
- $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4\cdot 3]{2^{5\cdot 3}} = \sqrt[12]{2^{15}}$

> **Observação:**
> O valor de uma raiz não se altera ao se dividirem o índice do radical e o expoente do radicando por um fator comum natural não nulo:
> $$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n/p]{a^{m/p}} \quad (p \neq 0)$$

Justificativa:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:p}{n:p}} = \sqrt[n/p]{a^{m/p}}$$

Exemplos:

- $\sqrt[6]{10^4} = \sqrt[6/2]{10^{4/2}} = \sqrt[3]{10^2}$
- $\sqrt[4]{5^{16}} = \sqrt[4/4]{5^{16/4}} = 5^4$
- $\sqrt[16]{3^{24}} = \sqrt[16/8]{3^{24/8}} = \sqrt{3^3}$

Simplificar um radical significa transformá-lo numa expressão equivalente ao valor dado, porém escrita de forma que seja mais fácil para a compreensão. Obtém-se essa transformação por meio da aplicação das propriedades anteriormente apresentadas.

Exemplos:

- $\sqrt[3]{27\cdot x^3\cdot y^5\cdot z^2} = \sqrt[3]{3^3\cdot x^3\cdot y^5\cdot z^2} =$
$= \sqrt[3]{3^3\cdot x^3\cdot y^3\cdot y^2\cdot z^2} = \sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{y^3}\cdot\sqrt[3]{y^2\cdot z^2} =$
$= 3\cdot x\cdot y\cdot\sqrt[3]{y^2\cdot z^2}$
- $\sqrt{a^2b^3c^4} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^3}\cdot\sqrt{c^4} = abc\sqrt{bc^2}$
- $\sqrt[5]{7776} = \sqrt[5]{32\cdot 243} = \sqrt[5]{2^5\cdot 3^5} = 2\cdot 3 = 6$

REDUÇÃO DE DOIS OU MAIS RADICAIS AO MESMO ÍNDICE

Calcula-se um múltiplo comum aos índices. Em seguida, aplica-se a propriedade: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$ $(p \neq 0)$.

Exemplos:

- $\sqrt[3]{xy^2}$; $\sqrt[4]{x^3}$; e $\sqrt[2]{y}$

Logo, $\sqrt[3]{xy^2} = \sqrt[12]{x^4y^8}$, $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^9}$ e $\sqrt[2]{y} = \sqrt[12]{y^6}$.

- $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{5}$

Logo, $\sqrt[6]{2} = \sqrt[12]{2^2}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4}$ e $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$.

> **Observação:**
> A multiplicação e a divisão de raízes só devem ser efetuadas se os radicais tiverem índices iguais.

Essa propriedade nos permite facilitar o cálculo em operações que envolvam radicais com índices diferentes.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{5^4}\cdot\sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{5^4\cdot 2^6\cdot 3^3}$$

Para comparação de raízes, os índices devem ser iguais. A maior raiz será aquela que tiver o maior radicando.

Exemplos:

- $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot 2]{2^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{4}$
- $\sqrt[2]{3} = \sqrt[2\cdot 3]{3^{1\cdot 3}} = \sqrt[6]{27}$, logo $\sqrt[2]{3} > \sqrt[3]{2}$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Queremos eliminar o radical do denominador; para isso, devemos transformar a fração em outra sem radicais irracionais no denominador, facilitando o cálculo da divisão.

A racionalização pode ser feita multiplicando-se numerador e denominador por um mesmo fator, chamado de **fator de racionalização** ou **racionalizante**, obtendo, assim, uma fração equivalente à anterior.

1º caso: denominadores $\sqrt[n]{a^m}$.

Observa-se que:

$$\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Portanto, nas frações que têm um denominador do tipo $\sqrt[n]{a^m}$, basta multiplicar o termo por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ (fator de racionalização). Com isso, eliminamos o radical (número irracional).

Exemplos:

- $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$
- $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}$

> **Observação:**
> Se no denominador aparecer uma raiz quadrada, o fator de racionalização é outra raiz quadrada igual à existente no denominador da fração.

2º caso: denominadores $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$.

Nesse caso, vale relembrar o produto notável $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$. Note que esse produto notável, aplicado aos denominadores, produz um resultado racional.

Ou seja:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$$

Portanto, se for necessário racionalizar denominadores do tipo $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, basta multiplicar numerador e denominador da fração pelo "conjugado" do denominador, eliminando assim o radical (número irracional).

Denominador: $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ → **"conjugado":** $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
Denominador: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ → **"conjugado":** $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Exemplos:

- $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$
- $\dfrac{1}{3\sqrt{3}-3}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}-3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}+3}{3\sqrt{3}+3}=\dfrac{3\sqrt{3}+3}{9\cdot 3-9}=$
  $=\dfrac{3\sqrt{3}+3}{18}=\dfrac{\sqrt{3}+}{6}$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. CPCAR – Ao se resolver a expressão numérica:

$$\left[\sqrt[3]{\frac{(25\cdot 10^{-6})\cdot 0{,}000075}{10}}\right]:\left[\frac{5\sqrt[3]{1{,}5}}{10^4}\right]\cdot(-0{,}0010)^0$$

O valor encontrado é:

a) $\sqrt[3]{2}$
b) $\sqrt[3]{3}$
c) 1
d) 0,1

Resolução

$$\left[\sqrt[3]{\frac{(25\cdot 10^{-6})\cdot 0{,}000075}{10}}\right]:\left[\frac{5\sqrt[3]{1{,}5}}{10^4}\right]\cdot(-0{,}0010)^0=$$

$$=\left[\sqrt[3]{\frac{(5^2\cdot 10^{-6})\cdot 75\cdot 10^{-6}}{2\cdot 5}}\right]:\left[5\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt[3]{\frac{15}{10}}\right]\cdot 1=$$

$$=\left[\sqrt[3]{\frac{5^2\cdot 25\cdot 3\cdot 10^{-12}}{2\cdot 5}}\right]:\left[5\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right]=$$

$$=\left[\sqrt[3]{\frac{5^2\cdot 3\cdot 10^{-12}}{2}}\right]:\left[5\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right]=$$

$$=\left[5\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right]:\left[5\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right]=1$$

2. ESA-RJ – Simplificando $2\sqrt{8}-4\sqrt{18}+\sqrt{32}$, obtemos:

a) $\sqrt{2}$
b) $-\sqrt{8}$
c) $\sqrt{8}$
d) $-4\sqrt{2}$
e) $-2\sqrt{2}$

Resolução

$$2\sqrt{8}-4\sqrt{18}+\sqrt{32}=2\sqrt{4\cdot 2}-4\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{16\cdot 2}=$$
$$=2\cdot 2\sqrt{2}-4\cdot 3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$$

ROTEIRO DE AULA

RADICIAÇÃO

Definição

No símbolo $\sqrt[n]{a} = b$, n é o índice, a é o radicando e b é a raiz n-ésima de a.
Define-se:

1. Se n é um número natural par não nulo, a e b são números reais não negativos: $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$.
2. Se n é um número natural ímpar, a e b são números reais: $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$.

Satisfeitas as condições do índice e do radicando, define-se: $c^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{c^k}$.

Propriedades

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

$\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UTFPR – Considere as seguintes expressões:

IV. $\dfrac{3\sqrt{12}}{2} = 3\sqrt{2}$

V. $(2\sqrt{3})^{-1} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

VI. $(2^4)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

É(são) verdadeira(s) somente:

a) I
b) II
c) III
d) I e II
e) I e III

I. $\dfrac{3\sqrt{12}}{2} = 3\sqrt{2}$

FALSA, pois $\dfrac{3\sqrt{12}}{2} = \dfrac{3\sqrt{4\cdot 3}}{2} = \dfrac{3\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

II. $(2\sqrt{3})^{-1} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

VERDADEIRA, pois $\dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

III. $(2^4)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

FALSA, pois $(2^4)^{\frac{1}{2}} = 2^{4\cdot\frac{1}{2}} = 2^2 = 4$

2. UTFPR – Simplificando a expressão $\dfrac{2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}$, obtemos:

a) $\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$
b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+3$
c) $\dfrac{7}{2}+2\sqrt{2}$
d) $3+\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
e) $\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{2+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2\sqrt{2}+2+1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2-1} = 3+2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}} =$$
$$= 3+2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = 3+\frac{4\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = 3+\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

3. Unesp (adaptado) C1-H3

Uma fórmula matemática para se calcular aproximadamente a área, em metros quadrados, da superfície corporal de uma pessoa é dada por: $S(p) = \dfrac{11}{100}\cdot p^{\frac{2}{3}}$, em que p é a massa da pessoa em quilogramas. Considerando uma criança de 8 kg. Qual é área corporal desta criança e qual massa que ele terá quando a área de sua superfície corporal duplicar? (Use a aproximação $\sqrt{2} = 1,4$.)

a) 0,53 m² e 32,4 kg
b) 0,44 m² e 22,5 kg
c) 0,54 m² e 24,6 kg
d) 0,44 m² e 22,4 kg
e) 0,52 m² e 28,4 kg

Calculando a área corporal da criança, temos:

$$S(8) = \frac{11}{100}\cdot 8^{\frac{2}{3}} = 0,11\cdot(2^3)^{\frac{2}{3}} = 0,11\cdot 2^2 = 0,44 \rightarrow 0,44\ m^2$$

Calculando a massa quando sua superfície corporal duplicar, temos:

$$0,88 = 0,11\cdot p \rightarrow p^{\frac{2}{3}} = 8 = 2^3 \rightarrow (p^{\frac{2}{3}})^3 = (2^3)^3 = 2^9 \rightarrow$$
$$\rightarrow p = \sqrt{2^9} = \sqrt{2^8\cdot 2} = 2^4\cdot\sqrt{2} = 16\cdot 1,4 = 22,4 \rightarrow 22,4\ kg$$

4. PUC-Rio – O valor de $\sqrt{(-3)^2}+(-1)^6-(-1,2)^0+\sqrt[3]{4^6}$ é:

a) 13
b) 15
c) 17
d) 19
e) 21

Temos que $\sqrt{(-3)^2}+(-1)^6-(-1,2)^0+\sqrt[3]{4^6} = \sqrt{9}+1-1+\sqrt[3]{(2^2)^6} = 3+2^{\frac{12}{3}} =$
$= 3+2^4 = 3+16 = 19$

5. IFCE – O número $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{2^5}}}\cdot\sqrt[3]{2}$ é igual a

a) 0
b) $\sqrt{2}$
c) 1
d) $\sqrt{3}$
e) $1+\sqrt{2}$

Temos que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{2^5}}}\cdot\sqrt[3]{2}=\frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^5}}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\frac{\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[6]{2^5}}=1$

6. Ifal (adaptado) – Calcule o valor exato da raiz cúbica de 1 728.

Fatorando o número 1 728, temos que:

$1\,728 = 3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 3^3\cdot2^6$

Portanto, $\sqrt[3]{1\,728}=\sqrt[3]{3^3\cdot2^6}=3\cdot2^2=12$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. PUC-Rio – Quanto vale $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$?

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}-1$
b) $\sqrt{2}+1$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}-1$
d) $\frac{5}{2}$
e) 1

8. UEM – Assinale o que for correto.

01) $2^{2016}-2^{2015}=2^{2015}$
02) $\frac{2}{5}+\frac{5}{2}=1$
04) $\sqrt{25\%}=5\%$
08) $-\frac{3}{4}\cdot\left(2-\frac{7}{2}\right)=\frac{9}{8}$
16) $\sqrt{16}=\pm4$

9. PUC-Campinas (adaptado) – Usando a tecnologia de uma calculadora, podemos calcular a divisão de 2 por $\sqrt[3]{4}$ e obter qual resultado?

10. PUC-Rio – Quanto vale $\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}}$?

a) $\sqrt[3]{3}$
b) $\sqrt[3]{9}$
c) $1+\sqrt[3]{3}$
d) $1+\sqrt[3]{9}$
e) $2\sqrt[3]{3}$

11. UTFPR – O valor da expressão $\sqrt{50}-\sqrt{18}+\sqrt{98}$ é:

a) $\sqrt{130}$
b) $-5\sqrt{2}$
c) $9\sqrt{2}$
d) $5\sqrt{13}$
e) $15\sqrt{2}$

12. PUC-Rio – Considere x, y e z reais positivos, tais que $\sqrt{x} = 2015^3$, $\sqrt[3]{y^2} = 2015^4$, $z^3 = 2015^6$.

A expressão $\dfrac{1}{\sqrt{x \cdot y \cdot z}}$ vale:

a) 2015^{-7}
b) 2015^{-13}
c) 2015^{-17}
d) 2015^{5}
e) 2015^{7}

13. IME – Assinale a alternativa verdadeira:

a) $\sqrt{2016}-\sqrt{2015}<\sqrt{2017}-\sqrt{2016}<(2\sqrt{2016})^{-1}$
b) $\sqrt{2017}-\sqrt{2016}<\sqrt{2016}-\sqrt{2015}<(2\sqrt{2016})^{-1}$
c) $\sqrt{2017}-\sqrt{2016}<(2\sqrt{2016})^{-1}<\sqrt{2016}-\sqrt{2015}$
d) $\sqrt{2016}-\sqrt{2015}<(2\sqrt{2016})^{-1}<\sqrt{2017}-\sqrt{2016}$
e) $(2\sqrt{2016})^{-1}<\sqrt{2017}-\sqrt{2016}<\sqrt{2016}-\sqrt{2015}$

14. Sistema Dom Bosco – Colocando os números $a = \sqrt{8}$, $b = 3$ e $c = \sqrt[3]{25}$ em ordem crescente, obtemos a sequência:

a) a, b e c.
b) a, c e b.
c) b, a e c.
d) b, c e a.
e) c, b e a.

15. EPCAR (adaptado) – Analise as afirmativas seguintes e classifique cada uma em (**V**) verdadeira ou (**F**) falsa.

I. Se $A = \dfrac{5 - 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{5 - 5^{\frac{1}{2}}}$, então A é irracional.

II. O valor da expressão $\left[\dfrac{(0{,}001)^4 \cdot 100^7}{10^5}\right] \cdot (0{,}1)^{-4}$ é $100^{\frac{1}{2}}$.

III. Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*$, uma forma simplificada para a expressão $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$ é a^{-4}.

IV. A sequência correta é

a) V – V – V
b) V – V – F
c) V – F – V
d) F – V – F

16. Colégio Naval – Calcule o valor de

$$X = \left(\frac{\sqrt{1^{1\,256}} + 8\,943^0 + \dfrac{3\,125}{5^5} + \sqrt[7]{1}}{1{,}5 - 2^{-1} + (-1)^{2\,058}}\right)^{\sqrt[7]{\frac{3^{21}+3^{23}}{10}}}$$

e assinale a opção correta.

a) 2^{16}
b) 2^{20}
c) 2^{24}
d) 2^{26}
e) 2^{27}

17. Sistema Dom Bosco – A expressão numérica $5\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16}$ é igual a:

a) $\sqrt[3]{1458}$
b) $\sqrt[3]{729}$
c) $2\sqrt[3]{70}$
d) $2\sqrt[3]{38}$

18. UPE C1-H3

Se um ano-luz corresponde à distância percorrida pela luz em um ano, qual é a ordem de grandeza, em metros, da distância percorrida pela luz em 2 anos, levando-se em consideração um ano tendo 365 dias e a velocidade da luz igual a 300 000 km/s.

a) 10^8
b) 10^{10}
c) 10^{13}
d) 10^{15}
e) 10^{16}

19. UEL C1-H1

Leia o texto a seguir.

O processo de decomposição do corpo começa alguns minutos depois da morte. Quando o coração para, ocorre o *algor mortis* ou o frio da morte, quando a temperatura do corpo diminui até atingir a temperatura ambiente.

Fonte: <http://diariodebiologia.com/2015/09/o-que-acontece-como-corpo-logo-apos-a-morte/>. Acesso em: 29 maio 2017. (Adaptado).

Suponha que um cadáver é analisado por um investigador de polícia às 5 horas da manhã do dia 28, e este detalha as seguintes informações em seu bloco de anotações:

Imediatamente após escrever, o investigador utiliza a Lei de Resfriamento

$$T = (T_n - T_s) \cdot (\sqrt[6]{2})^{-t} + T_s$$

para revelar a todos os presentes que faz t horas que a morte ocorreu. Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a hora e o dia da morte, segundo o investigador.

a) 11 horas da noite do dia 27
b) 8 horas da noite do dia 27
c) 2 horas da manhã do dia 28
d) 4 horas da manhã do dia 28
e) 10 horas da manhã do dia 27

20. Enem C1-H3

Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área A da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua massa m pela fórmula $A = k \cdot m^{\frac{2}{3}}$, em que k é uma constante positiva.

Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

a) $\sqrt[3]{16}$
b) 4
c) $\sqrt{24}$
d) 8
e) 64

3 PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO

- Produtos notáveis
- Fatoração

HABILIDADES

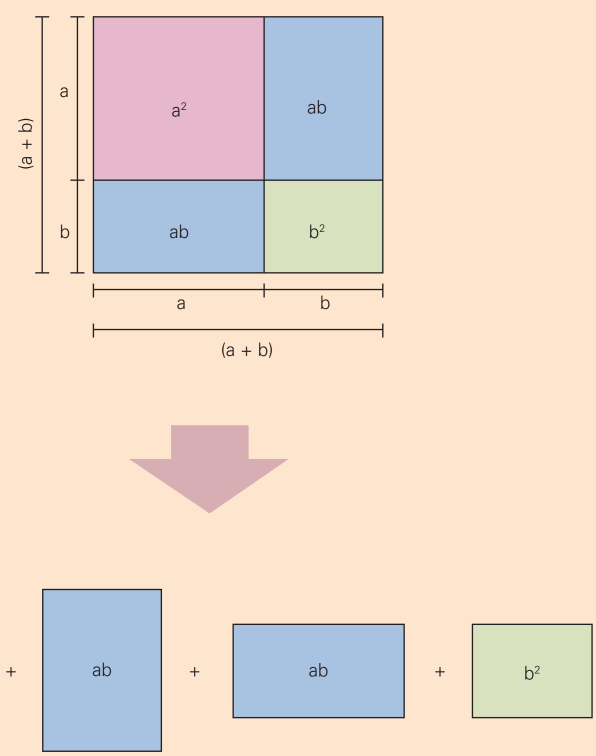
- Desenvolver com rapidez e eficiência produtos notáveis.
- Simplificar uma expressão algébrica usando produtos notáveis.
- Determinar a forma fatorada de um número ou uma expressão algébrica.
- Decompor um número composto de produto de fatores primos.
- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Produtos notáveis

Produtos notáveis são expressões utilizadas para facilitar cálculos algébricos (como a fatoração de polinômios) e evitar erros com sinais. Obedecem às leis especiais de formação e, por isso, sua utilização possibilita agilizar determinados tipos de cálculos que, pelas regras normais da multiplicação de expressões, ficariam mais longos. Apresentam-se em grande número e dão origem a um conjunto de identidades de ampla aplicação. Os produtos notáveis são ferramentas poderosas ao se desenvolverem longos cálculos algébricos.

QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

Ao determinar a área do quadrado de lado (a + b), temos:



Portanto, a área do quadrado pode ser expressa de duas maneiras:

- $(a + b)^2$
- $(a^2 + 2ab + b^2) \rightarrow$ Soma das áreas das partes que formam o quadrado.

Então, o quadrado da soma de dois termos é dado por:

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

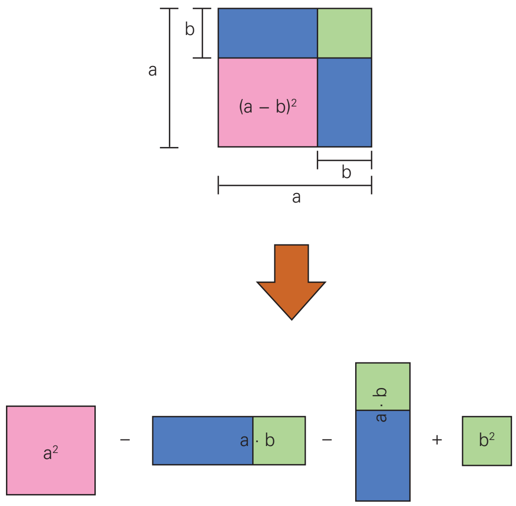
Exemplo:

Desenvolvimento do produto notável $(4x + 3y)^2$

$(4x + 3y)^2 = (4x)^2 + 2 \cdot (4x) \cdot (3y) + (3y)^2 = 16x^2 + 24xy + 9y^2$

QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

Ao determinar a área do quadrado de lado $(a - b)$, temos:



Retirando dois retângulos $a \cdot b$, automaticamente exclui-se b^2 duas vezes. Ao final do cálculo, é necessário somar b^2.

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

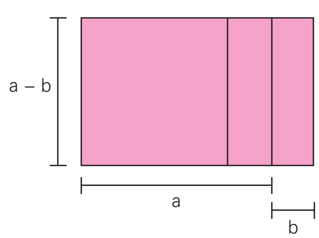
Exemplo:

Desenvolvimento do produto notável $(4x - y)^2$

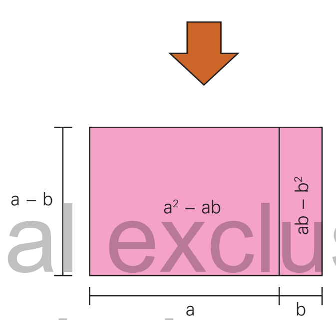
$(4x - y)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot (4x) \cdot (y) + (y)^2 =$
$= 16x^2 - 8xy + y^2$

PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE MESMOS TERMOS

O produto da soma pela diferença $(a + b) \cdot (a - b)$ é dado geometricamente por:



Área colorida = $(a + b) \cdot (a - b)$



Área colorida = $a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Assim, temos:

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Algebricamente, temos:

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab +$
$+ ab - b^2 = a^2 - b^2$

Exemplos:

- Desenvolvimento do produto notável: $(3xy + 4) \cdot (3xy - 4) = (3xy)^2 - (4)^2 = 9x^2y^2 - 16$
- Desenvolvimento do produto notável $(3x + 7y) \cdot (3x - 7y) = (3x)^2 - (7y)^2 = 9x^2 - 49y^2$
- Desenvolvimento do produto notável $\left(x\sqrt{y}+4\right)\cdot\left(x\sqrt{y}-4\right)=\left(x\sqrt{y}\right)^2-(4)^2=x^2y-16$

CUBO DA SOMA DE DOIS TERMOS

O cubo da soma de dois termos $(a + b)^3$ em sua forma desenvolvida é: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Justificativa:

$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a +$
$+ b) = a^3 + 2a^2b + a^2b + ab^2 + 2ab^2 + b^3 =$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Exemplo:

$(2x + 3y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot (3y) + 3 \cdot (2x) \cdot (3y)^2 +$
$+ (3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

CUBO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

O cubo da diferença de dois termos $(a - b)^3$ em sua forma desenvolvida é:

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Justificativa:

$(a - b)^3 = (a - b)^2 \cdot (a - b) = (a^2 - 2ab +$
$+ b^2) \cdot (a - b) = a^3 - 2a^2b - a^2b + ab^2 + 2ab^2 - b^3 =$
$= a^3 - 3ab^2 + 3ab^2 - b^3$

Exemplo:

$(x - 2)^3 = (x)^3 - 3 \cdot (x)^2 \cdot (2) + 3 \cdot (x) \cdot (2)^2 - (2)^3 =$
$= x^3 - 6x^2 - 12x - 8$

QUADRADO DA SOMA DE TRÊS TERMOS

O quadrado da soma de três termos $(a + b + c)^2$ em sua forma desenvolvida é:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Justificativa:

$(a + b + c)^2 = (a + b + c) \cdot (a + b + c) = a^2 +$
$+ ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 = a^2 +$
$+ b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Exemplo:

$(3x + y + 1)^2 = (3x)^2 + (y)^2 + (1)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot$
$\cdot (y) + 2 \cdot (3x) \cdot (1) + 2 \cdot (y) \cdot (1) = 9x^2 + y^2 + 1 +$
$+ 6xy + 6x + 2y$

Fatoração

DEFINIÇÃO

Fatoração é um processo que consiste em representar um número ou uma expressão como produto de fatores, ou seja, obter uma nova expressão:

- que seja equivalente à expressão dada;
- cuja forma equivalente se apresente na forma de produto.

CASOS DE FATORAÇÃO

Considere **a**, **b**, **c**, **x** e **y** expressões não fatoráveis.

Fator comum

Deve-se reconhecer o fator comum, numérico, literal ou misto. Coloca-se em evidência esse fator comum e simplifica-se a expressão, deixando o produto da soma algébrica com esse fator comum.

$(ab + ac) = a \cdot (b + c)$

Exemplo:

$3x^2y - 6x^2y^2 = 3x^2y \cdot (1 - 2y)$

Agrupamento

Devem-se dispor os termos da expressão algébrica de modo a formar dois ou mais grupos, entre os quais haja um fator comum a ser colocado em evidência.

$ax + ay + bx + by = a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) =$
$= (x + y) \cdot (a + b)$

Diferença de dois quadrados

Uma das técnicas de fatoração mais utilizadas é a fatoração pelo método de **diferença de quadrados**. Ela é empregada sempre que há diferença entre dois monômios cujas partes literais tenham expoentes pares. A fatoração algébrica de tais expressões é obtida com os seguintes passos:

1º Extraem-se raízes quadradas dos monômios.
2º Escreve-se a expressão como produto da soma pela diferença dos novos monômios obtidos.

Exemplo:

A expressão $a^2 - b^2$ seria fatorada da seguinte forma:
$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Trinômio quadrado perfeito

Essa técnica de fatoração muitas vezes facilita o cálculo de algum problema envolvendo equações do 2º grau.

Uma expressão algébrica pode ser identificada como **trinômio quadrado perfeito** sempre que resultar no quadrado da soma ou na diferença entre dois monômios (expressões algébricas que têm multiplicações entre números e incógnitas).

São trinômios quadrados perfeitos todas as expressões da forma $a^2 \pm 2ab + b^2$, fatoráveis conforme os exemplos:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ e $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Soma de dois cubos

A soma de dois cubos $(a + b)^3$ na sua forma fatorada é $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$.

Justificativa:

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3(a + b)^3 = a^3 + b^3 +$
$+ 3ab(a + b) \rightarrow (a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 +$
$+ b^3(a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = a^3 + b^3 \rightarrow$
$\rightarrow (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) = a^3 + b^3 \rightarrow$
$\rightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Exemplo:

$y^3 + 27 = y^3 + 3^3 = (y + 3)(y^2 - 3y + 9)$

Diferença de dois cubos

A diferença de dois cubos $(a^3 + b^3)$ na sua forma fatorada é $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$.

Justificativa:

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \rightarrow (a - b)^3 =$
$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \rightarrow (a - b)^3 + 3ab(a - b) =$
$= a^3 - b^3 \rightarrow (a - b)[(a - b)^2 + 3ab] = a^3 - b^3 \rightarrow$
$\rightarrow (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = a^3 - b^3 \rightarrow$
$\rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
$\therefore a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Exemplo:

$8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. IFCE – Para cada número real positivo m, a expressão

$(m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}})^2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$ é igual a

a) $m^{\frac{1}{2}}$
b) $m + 1$
c) $m + 2$
d) $m + 3$
e) $m + \frac{1}{m}$

Resolução

$$\left(m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) =$$

$$= \left(m^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 \cdot \left(m^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(m^{-\frac{1}{2}}\right) + \left(m^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + 1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2 =$$

$$= m + 2 \cdot m^0 + m^{-1} + 1 - m^{-1} = m + 3$$

ROTEIRO DE AULA

PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO

Produtos notáveis

- $(a + b) \cdot (a - b) =$ $a^2 - b^2$
- $(a + b)^2 =$ $a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^3 =$ $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a + b)^3 =$ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a + b + c)^2 =$ $a^2 + b^2 + c^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Fatoração

- $(ab + ac) =$ $a \cdot (b^2 + c)$
- $(a + b)^2 =$ $(a + b) \cdot (a - b)$
- $ax + ay + bx + by =$ $(x + y) \cdot (a + b)$
- $a^2 + 2ab + b^2 =$ $(a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 =$ $(a - b)^2$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFPE – Efetuando-se $(2341)^2 - (2340)^2$, obtém-se

a) 6489
b) 1
c) 4681
d) 2681
e) 8689

Temos uma diferença de quadrados, da forma $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.
Portanto, podemos reescrever a expressão como:
$(2341)^2 - (2340)^2 = (2341 + 2340) \cdot (2341 - 2340) = 4681 \cdot 1 = 4681$.

2. UEPB – Dado $x - \frac{1}{x} = 13$, o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$ é igual a:

a) 171
b) 169
c) 167
d) 130
e) $\frac{168}{13}$

Elevando $x - \frac{1}{x}$ ao quadrado, temos:

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 13^2 = 169$

Logo, $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 169 \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 171$.

3. UTFPR C1-H2

Um fazendeiro possui dois terrenos quadrados de lados a e b, sendo $a > b$. Represente na forma de um produto notável a diferença das áreas destes quadrados.

a) $(a + b) \cdot (a + b)$
b) $(a + b) \cdot (a - b)$
c) $(a - b) \cdot (a - b)$
d) $(a + b)^2$
e) $(a - b)^2$

Sendo a área do quadrado o produto de seus lados, temos:
Área do terreno 1 $= a \cdot a$
Área do terreno 1 $= a^2$
Área do terreno 2 $= b \cdot b$
Área do terreno 2 $= b^2$

Logo, como $a > b$, a diferença entre as áreas é dada por:
Área do terreno 1 − Área do terreno 2 $= a^2 - b^2$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

4. UFRGS – Se $x + y = 13$ e $x \cdot y = 1$, então, calcule $x^2 + y^2$.

Se $x + y = 13 \rightarrow (x + y)^2 = 13^2 \rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 169$
Como $xy = 1$, temos $x^2 + y^2 + 2 = 169$.
Logo, $x^2 + y^2 = 167$

5. Ifal – Determine o valor do produto $(3x + 2y)^2$, sabendo que $9x^2 + 4y^2 = 25$ e $xy = 2$.

a) 27
b) 31
c) 38
d) 49
e) 54

Aplicando o quadrado da soma:
$(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$
Como $9x^2 + 4y^2 = 25$ e $xy = 2$,
então $(3x + 2y)^2 = 25 + 12 \cdot 2 = 25 + 24 = 49$.

6. IFSUL (adaptado) – Se $a^{2x} = 3$ e $a > 0$, calcule o valor da expressão $A = \dfrac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^{x} + a^{-x}}$.

$\sqrt{a^{2x}} = \sqrt{3} \rightarrow a^x = \sqrt{3}$. Então $A = \dfrac{(a^x)^3 + (a^{3x})^{-1}}{a^x + (a^x)^{-1}} =$

$$= \frac{3\sqrt{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}}}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{9}}{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{28\sqrt{3}}{9}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{28\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{7}{3}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Fuvest – A igualdade correta para quaisquer **a** e **b** números reais maiores do que zero é

a) $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$

b) $\dfrac{1}{a - \sqrt{a^2 + b^2}} = -\dfrac{1}{b}$

c) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - b$

d) $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

e) $\dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = a - b$

8. IFSC – Após analisar as afirmações a seguir sobre produtos notáveis e fatoração, marque com (V) o que for verdadeiro e com (F) o que for falso.

( ) $(3a^2 - 2b)^2 = 9a^4 - 12a^2b + 4b^2$

( ) $(a - b)^3 = a^3 - b^3$

( ) $64a^2 - 49b^2 = (8a - 7b) \cdot (8a + 7b)$

( ) $4a^2 - 16b^2 = (2a - 4b)^2$

( ) $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

Assinale a alternativa que contém a ordem CORRETA de preenchimento dos parênteses, de cima para baixo.

a) V – F – V – F – V
b) V – V – F – F – F
c) V – F – V – V – F
d) F – F – V – V – V
e) F – V – F – V – V

9. IFCE (adaptado) – Calcule o valor da expressão $(a + b)^2 - (a - b)^2$.

10. UTFPR – Simplificando a expressão $\dfrac{(x+y)^2 - 4xy}{x^2 - y^2}$, com $x \neq y$, obtém-se:

a) $2x - 4xy$

b) $\dfrac{x-y}{x+y}$

c) $\dfrac{2xy}{x+y}$

d) $-2xy$

e) $\dfrac{-4xy}{x-y}$

11. UPE – Quando resolvemos a expressão $(7777)^2 - (2223)^2$, encontramos o seguinte resultado:

a) $5{,}554 \cdot 10^0$

b) $5{,}554 \cdot 10^2$

c) $5{,}554 \cdot 10^4$

d) $5{,}554 \cdot 10^7$

e) $5{,}554 \cdot 10^8$

12. Colégio Naval – O produto das idades de quatro irmãos é 180. Além disso, todos os irmãos têm idades diferentes. Se o mais velho tem menos de 12 anos, é correto afirmar que a maior soma possível dessas quatro idades é igual a

a) 16

b) 19

c) 20

d) 22

e) 25

13. Uece (adaptado) – Se x é um número real, tal que $x+\frac{1}{x}=3$, então calcule o valor de $x^3+\frac{1}{x^3}$.

14. CFTMG – Simplificando a expressão $\frac{x^3-1}{x^2-x}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+x}$ para $x \in R-\{-1,0,1\}$, obtém-se

a) x

b) x^2

c) $x - 1$

d) $x^2 - 1$

15. Insper – Se $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz = 6$, então um possível valor para a soma $x + y + z$ é

a) $\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{2}$

e) $3\sqrt{3}$

16. ESPM (adaptado) – O par ordenado (x, y), sendo x e y números naturais, é solução da equação $x^3 + x^2y - 8x - 8y = 7$. O valor de $x - y$ é:

a) 1

b) 2

c) -1

d) 0

e) -2

17. EPCAR – O valor da expressão $\left(\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}\right)$, em que x e y são não nulos e, além de $x \neq y$ e $x \neq -y$, é:

a) -1
b) -2
c) 1
d) 2

ESTUDO PARA O ENEM

18. UFSC (adaptado) C1-H3

Guardadas as condições de existência, determine o valor numérico da expressão $\dfrac{(x^3-14x^2+49x)\cdot(ax-bx+7a-7b)}{(x^2-49)\cdot(2a-2b)\cdot(7x-49)}$ para $x = 966$.

a) 35
b) 69
c) 36
d) 138
e) 483

19. IFSC C1-H2

Considere x o resultado da operação $525^2 - 523^2$. Assinale a alternativa CORRETA, que representa a soma dos algarismos de x.

a) 18
b) 13
c) 02
d) 17
e) 04

20. UPE C1-H2

Na sequência de quadros a seguir, o valor da primeira célula de cada quadro é a soma dos valores das duas últimas células do quadro anterior.

1	2	3

⇨

5	4	3

⇨

7	8	9

⇨

17	16	15

⇨ • • •

Se o número da célula central do último quadro dessa sequência é 2^{2013}, quanto vale o produto dos números das duas outras células?

a) $2^{2013} - 1$
b) $2^{2013} + 1$
c) 2^{2013+1}
d) $2^{4026} + 1$
e) $2^{4026} - 1$

4

MÚLTIPLOS E DIVISORES

- Múltiplos
- Divisores

HABILIDADES

- Determinar a forma fatorada de um número ou uma expressão algébrica.
- Resolver situações-problema que envolvem múltiplos e divisores.
- Decompor um número composto em produto de fatores primos.
- Aplicar propriedades de MMC e MDC de dois ou mais números.
- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Múltiplos e divisores

MÚLTIPLOS DE UM NÚMERO INTEIRO

Considere dois números inteiros **d** e **n**, em que **n** é um múltiplo de **d** se existir um número inteiro **k**, satisfazendo a **n = k · d**.

Exemplos:

- 42 é múltiplo de 7, pois 42 = 7 · 6.
- 10 é múltiplo de 5, pois 10 = 5 · 2.
- 0 (zero) é múltiplo de qualquer número, pois 0 = 0 · d, para qualquer valor de **d**.

Indicam-se por M(d) todos os múltiplos inteiros do número inteiro **d**.

Outras notações:

$M_+(d)$: múltiplos inteiros não negativos (ou naturais) do número inteiro **d**.

$M_-(d)$: múltiplos inteiros não positivos do número inteiro **d**.

$M^*_+(d)$: múltiplos inteiros positivos do número inteiro **d**.

$M^*_-(d)$: múltiplos inteiros negativos do número inteiro **d**.

PARIDADE DE NÚMEROS INTEIROS

Números pares:

Diz-se que um número inteiro **a** é **par** se, e somente se, **a** ∈ M(2). Ou seja, **a** é um múltiplo de 2.

A forma geral de apresentação de um número par é **a = 2 · k**, em que k ∈ Z.

Números ímpares:

Diz-se que um número inteiro **b** é **ímpar** se, e somente se, **b** ∉ M(2). Ou seja, **b** não é um múltiplo de 2.

A forma geral de apresentação de um número ímpar é **b = 2 · k + 1**, em que k ∈ Z.

DIVISORES DE UM NÚMERO INTEIRO

Considere dois números inteiros, **d** e **n**, sendo **d** um divisor ou fator de **n** se existir um número inteiro **k**, satisfazendo a: $\frac{n}{d} = k$ ou **n = k · d**, que são equivalentes.

Exemplos:

- 2 é um divisor de 6, pois $\frac{6}{2} = 3$.
- 7 é um divisor de 42, pois $\frac{42}{7} = 6$.
- Note que 0 (zero) não é divisor de 7, pois não existe um inteiro k, tal que 0 · k = 7.
- O número 1 é divisor de qualquer inteiro **k**, pois sempre vai existir um número inteiro **k**, tal que 1 · k = k.
- Indicam-se por D(n) todos os divisores inteiros do número inteiro **n**.

Outras notações:

- $D^*_+(n)$: divisores inteiros positivos (ou naturais não nulos) do número inteiro **n**.
- $D^*_-(n)$: divisores inteiros negativos do número inteiro **n**.

NÚMEROS PRIMOS E COMPOSTOS

Um número inteiro **p** é primo se tem somente dois divisores: **±1**, **±p**. Um número natural **p** primo tem unicamente dois divisores naturais: 1, p.

Um número inteiro é dito composto quando, na sua relação de divisores inteiros, tiver mais de quatro divisores positivos.

Para reconhecer se um número natural é primo, deve-se dividi-lo, sucessivamente, pelos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... até obter um quociente menor ou igual ao divisor. Então, se não houver divisão exata, diz-se que o número é primo.

Exemplo:

Vamos detectar se o número 673 é primo.

$\begin{array}{r|l} 673 & 2 \\ \hline 1 & 336 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 673 & 3 \\ \hline 1 & 224 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 673 & 5 \\ \hline 3 & 134 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 673 & 7 \\ \hline 1 & 96 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 673 & 11 \\ \hline 2 & 61 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 673 & 13 \\ \hline 10 & 51 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 673 & 17 \\ \hline 10 & 39 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 673 & 19 \\ \hline 8 & 35 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 673 & 23 \\ \hline 6 & 29 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 673 & 29 \\ \hline 6 & 23 \end{array}$

Na última divisão, o quociente é menor que o divisor, e ainda não se obteve divisão exata. Portanto, 673 é um número primo.

> Números −1, 0 e 1 não são classificados nem como primos nem como compostos.
>
> Todo número composto pode ser fatorado ou decomposto em um produto de fatores primos.
>
> Por exemplo, o número 42:
>
> $42 = 7 \cdot 6 = 7^1 \cdot 3^1 \cdot 2^1$

DIVISIBILIDADE ARITMÉTICA

Existem critérios que possibilitam reconhecer a divisibilidade entre dois números sem que se faça a divisão. Eles se aplicam aos principais e aos mais usados divisores. Acompanhe.

- **Divisibilidade por 2:** quando o número for par.
- **Divisibilidade por 3**: quando a soma dos algarismos do número resultar em múltiplo de 3.
  - **Exemplo:** 3210 é divisível por 2, pois é **par**, e também é divisível por 3, porque a soma dos algarismos 3 + 2 + 1 + 0 = 6 é divisível por 3.
- **Divisibilidade por 4:** quando os dois últimos algarismos da direita formam um número divisível por 4.
  - **Exemplo:** 1840 é divisível por 4, pois os dois últimos algarismos formam o número 40, que é divisível por 4.
- **Divisibilidade por 5:** quando o algarismo da unidade for zero ou cinco.
- **Divisibilidade por 6:** quando for divisível, separadamente, por 2 e por 3.
- **Divisibilidade por 8:** quando os três últimos algarismos da direita formam um número divisível por 8.
  - **Exemplo:** 35 712 é divisível por 8, pois 712 é divisível por 8.
- **Divisibilidade por 9:** quando a soma dos algarismos que formam o número resultar em um múltiplo de 9.
  - **Exemplo:** 18 711 é divisível por 9, pois 1 + 8 + 7 + + 1 + 1 = 18 é múltiplo de 9.
- **Divisibilidade por 10:** quando o algarismo da unidade for zero.
- **Divisibilidade por 11:** quando a diferença entre a soma dos valores absolutos dos algarismos de posição ímpar e a soma dos algarismos de posição par for divisível por 11.
  - **Exemplo**: 83 765 é divisível por 11, pois a diferença entre a soma dos algarismos de posição ímpar (5 + 7 + 8 = 20) e a soma dos algarismos de posição par (3 + 6 = 9) é 20 − 9 = 11, cujo resultado é divisível por 11.
- **Divisibilidade por 12:** quando for divisível, separadamente, por 3 e por 4.

FATORAÇÃO NUMÉRICA

Todo número composto pode ser decomposto ou fatorado em um produto de números primos.

Veja como os números 90, 300 e 72 podem ser decompostos.

Exemplos:

$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$

> **Regra**
>
> Para decompor um número natural em fatores primos, divide-se o número dado pelo menor divisor primo. Divide-se então o quociente obtido pelo menor divisor primo e procede-se da mesma maneira com os demais quocientes encontrados, até chegar a um quociente igual a 1.
>
> O produto indicado de todos os fatores primos obtidos representa o número fatorado.

MÁXIMO DIVISOR COMUM

O máximo divisor comum (MDC) de dois ou mais números é o maior divisor comum dos números dados.

Acompanhe o exemplo.

Considere:

- o número 18 e seus divisores naturais
  $D_+(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
- o número 24 e seus divisores naturais
  $D_+(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Podem-se descrever os divisores comuns a 18 e 24 da seguinte forma: $D_+(18) \cap D_+(24) = \{1, 2, 3, 6\}$.

Observando os divisores comuns, é possível identificar o maior divisor comum de 18 e 24: MDC(18, 24) = 6.

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

O mínimo múltiplo comum (MMC) de dois ou mais números é o menor número positivo que é múltiplo comum dos números dados.

Uma sequência de etapas é estabelecida para determinar o valor do mínimo múltiplo comum de dois ou mais números.

Acompanhe o exemplo.

Considere:

- o número 6 e seus múltiplos positivos
  $M_+^*(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...\}$
- o número 8 e seus múltiplos positivos
  $M_+^*(8) = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, ...\}$

Podem-se descrever os múltiplos positivos comuns da seguinte forma: $M_+^*(6) \cap M_+^*(8) = \{24, 48, 72, \ldots\}$.

Observando os múltiplos comuns, é possível identificar o mínimo múltiplo comum de 6 e 8: MMC(6, 8) = 24.

MDC E MMC PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO ISOLADA

Para determinar o MDC e o MMC de vários números, deve-se colocar todos na forma fatorada. Após esse procedimento, pode-se estabelecer o seguinte:

- O **MDC** dos números é o produto de todos os fatores comuns às fatorações, com os menores expoentes, com os quais eles se apresentam nas respectivas decomposições.
- O **MMC** dos números é o produto de todos os fatores existentes nas decomposições, comuns ou não, considerados com maiores expoentes, com os quais eles se apresentam nas respectivas decomposições.

Por exemplo, considere os números **A**, **B** e **C**, já fatorados:

$A = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

$B = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$

$C = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

$MDC(A, B, C) = 2^2 \cdot 5$

$MMC(A, B, C) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$

PROPRIEDADE DO MDC E DO MMC

$MDC(A, B) \cdot MMC(A, B) = A \cdot B$

Observações:

I. Dois números naturais são considerados primos entre si se o MDC deles for igual a 1.

II. Dois números naturais consecutivos são, sempre, primos entre si.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. UTFPR – Três vendedores viajam a serviço para uma empresa. O primeiro viaja de 12 em 12 dias, o segundo, de 16 em 16 dias e o terceiro, de 20 em 20 dias. Se todos viajarem hoje, calcule daqui a quantos dias eles voltarão a viajar no mesmo dia.

a) 220 dias
b) 120 dias
c) 240 dias
d) 250 dias
e) 180 dias

Resolução

Considere o dia "zero" a data em que os três vendedores viajaram. Os múltiplos não negativos de 12, 16 e 20 são, respectivamente, os dias em que o primeiro, o segundo e o terceiro vendedores viajaram.

$M_+(12) = \{0, 12, 24, 36, ..., x, ...\}$.

$M_+(16) = \{0, 16, 32, 48, ..., x, ...\}$.

$M_+(20) = \{0, 20, 40, ..., x, ...\}$.

O dia **x** é a data em que os três vendedores voltaram a viajar no mesmo dia, sendo:

$x = MMC(12, 16, 20)$.

$12 = 2^2 \cdot 3$;

$16 = 2^4$;

$20 = 2^2 \cdot 5$.

$\therefore x = MMC(12,16, 20) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 16 \cdot 15 = 240$.

2. UTFPR – Fernanda estava com uma forte inflamação na garganta e foi consultar um especialista. O médico receitou-lhe dois antibióticos. O primeiro deve ser tomado a cada uma hora e trinta minutos e o segundo, a cada duas horas e trinta minutos. Sabendo que Fernanda iniciou o tratamento às 7h30min da manhã, tomando os dois medicamentos ao mesmo tempo, então ela tomará à noite os dois medicamentos juntos às:

a) 20h
b) 21h
c) 21h30min
d) 22h
e) 22h30min

Resolução

Considere o minuto "zero" o horário (7h30min) em que Fernanda tomou os dois antibióticos. Os múltiplos positivos de 90 e 150 são, respectivamente, o tempo, em minutos, em que Fernanda tomará o primeiro e o segundo antibióticos após 7h30min.

$M_+^*(90) = \{90, 180, 270, ..., x, ...\}$.

$M_+^*(150) = \{150, 300, 450, ..., x, ...\}$.

O minuto "x" é o tempo, em minutos, após 7h30min, em que Fernanda tomará os dois antibióticos, sendo **x** = MMC(90,150).

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$;

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$;

$\therefore x = MMC(90, 150) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 18 \cdot 25 = 450$.

O próximo horário em que Fernanda tomará os dois antibióticos será: 7h30min + 450 min = 7h30min + + 7h30min = 15h, ou seja, à tarde. Após 450 min (7h30min), Fernanda tomará, novamente, os dois antibióticos, ou seja: 15h + 7h30min = 22h30min (à noite).

ROTEIRO DE AULA

MATEMÁTICA BÁSICA 2

Múltiplos

Sendo **m**, **n** e **k** inteiros, se **m** é múltiplo de **n**, tem-se $m = k \cdot n$.

Se **m** é par, tem-se $m = 2 \cdot k$;

Se **m** é ímpar, tem-se $m = 2 \cdot k + 1$

ou $m = 2 \cdot k - 1$.

Qualquer número composto pode ser escrito como produto de números primos.

O menor múltiplo comum (MMC) de dois ou mais números naturais é um número natural positivo determinado pelo produto dos fatores primos desses números com seus maiores expoentes.

Divisores

Sendo **m**, **n** e **k** inteiros, se **n** é divisor de **m**, tem-se $\frac{m}{n} = k$.

Um número inteiro **m** é primo se seus divisores são somente 1, –1 , **m** e $-m$.

Um número inteiro **m** é composto se a quantidade de divisores inteiros de **m** for maior que 4.

O maior divisor comum (MDC) de dois ou mais números naturais é um número natural positivo determinado pelo produto dos fatores primos comuns desses números com seus menores expoentes.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFSP – De 1 até 100, a quantidade de números primos que terminam com o algarismo 9 é

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

Os números primos com o último algarismo igual a 9, de 1 até 100, são: 19, 29, 59, 79 e 89.
Portanto, há cinco números primos com último algarismo igual a 9.

2. UPE – Três colegas caminhoneiros, Santos, Yuri e Belmiro, encontraram-se numa sexta-feira, 12 de agosto, em um restaurante de uma BR, durante o almoço. Santos disse que costuma almoçar nesse restaurante de 8 em 8 dias, Yuri disse que almoça no restaurante de 12 em 12 dias, e Belmiro, de 15 em 15 dias.

Com base nessas informações, analise as afirmativas seguintes:

V. Os três caminhoneiros voltarão a se encontrar novamente no dia 13 de dezembro.
VI. O dia da semana em que ocorrerá esse novo encontro é uma sexta-feira.
VII. Santos e Yuri se encontrarão 4 vezes antes do novo encontro dos três colegas.

Está CORRETO o que se afirma, apenas, em

a) I
b) II
c) III
d) I e II
e) II e III

I. Os três caminhoneiros voltarão a se encontrar novamente no dia 13 de dezembro. FALSO, pois o próximo encontro entre os três ocorrerá após: MMC(8, 12, 15) = 120, ou seja, 120 dias, no dia 10 de dezembro.
II. O dia da semana em que ocorrerá esse novo encontro é uma sexta-feira. FALSO, pois, como $120 = 17 \cdot 7 + 1$, o dia 10 de dezembro cai num sábado.
III. Santos e Yuri se encontrarão 4 vezes antes do novo encontro dos três colegas. VERDADEIRO, pois os encontros entre Santos e Yuri ocorrem a cada MMC(8, 12) = 24, ou seja, 24 dias. Portanto, observando que $96 = 4 \cdot 24$ é o maior múltiplo de 24 menor do que 120, concluímos que Santos e Yuri se encontrarão 4 vezes antes do novo encontro entre os três colegas.

3. IFSC C1-H3

Roberto e João são amigos de infância e, sempre que podem, saem para pedalar juntos. Um dia, empolgados com a ideia de saberem mais sobre o desempenho da dupla, resolveram cronometrar o tempo que gastavam andando de bicicleta. Para tanto, decidiram pedalar numa pista circular, próxima à casa deles.

Constataram, então, que Roberto dava uma volta completa em 24 segundos, enquanto João demorava 28 segundos para fazer o mesmo percurso. Diante disso, João questionou:

– Se sairmos juntos de um mesmo local e no mesmo momento, em quanto tempo voltaremos a nos encontrar, pela primeira vez, neste mesmo ponto de largada?

a) 3min8s
b) 2min48s
c) 1min28s
d) 2min28s
e) 1min48s

O tempo procurado (x), em segundos, é o mínimo múltiplo comum (MMC) entre 24 e 28, ou seja, x = MMC (24, 28).
$24 = 2^3 \cdot 3$; $28 = 2^2 \cdot 7 \therefore x = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 168$
168s = 120s + 48s = 2min48s.

4. Fuvest – Sejam **a** e **b** dois números inteiros positivos. Diz-se que **a** e **b** são equivalentes se a soma dos divisores positivos de **a** coincide com a soma dos divisores positivos de **b**.

Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

a) 8 e 9
b) 9 e 11
c) 10 e 12
d) 15 e 20
e) 16 e 25

Calculando os divisores:
D(8) = {1,2,4,8} → Soma = 15
D(9) = {1,3,9} → Soma = 13
D(10) = {1,2,5,10} → Soma = 18
D(11) = {1,11} → Soma = 12
D(12) = {1,2,3,4,6,12} → Soma = 28
D(15) = {1,3,5,15} → Soma = 24
D(16) = {1,2,4,8,16} → Soma = 31
D(25) = {1,5,25} → Soma = 31
Logo, 16 e 25 são dois inteiros positivos equivalentes.

5. ESPM – Dividindo-se o número natural **N** por 13 obtém-se quociente **Q** e resto **R**. Aumentando-se 2 unidades no dividendo e mantendo-se o divisor, o quociente aumenta 1 unidade e a divisão é exata.

Sabendo-se que Q + R = 16, podemos afirmar que os divisores primos de N são:

a) 2 e 19
b) 2, 3 e 13
c) 3 e 17
d) 3, 5 e 7
e) 5 e 11

Como R = 16 − Q e N = 13Q = R, temos que: N = 13Q + 16 − Q → → N = 12Q + 16.

Então, se N + 2 = 13(Q + 1), temos: 12Q + 16 + 2 = 13Q + 13 → Q = 5.

Portanto, R = 11 e N = 76.

Escrevendo $76 = 2^2 \cdot 19$, podemos concluir que os divisores primos de N são 2 e 19.

6. Fatec (adaptada) – Os termos da sequência $\left(\frac{11}{2}; \frac{17}{3}; \frac{35}{6}; 6; \frac{37}{6}; \frac{19}{3}; \frac{13}{2}; \ldots\right)$ obedecem a um critério de formação.

Calcule o oitavo termo dessa sequência.

$$\left(\frac{11}{2}; \frac{17}{3}; \frac{35}{6}; 6; \frac{37}{6}; \frac{19}{3}; \frac{13}{2}; \ldots\right) = \left(\frac{33}{6}; \frac{34}{6}; \frac{35}{6}; \frac{36}{6}; \frac{37}{6}; \frac{38}{6}; \frac{39}{6}; \ldots\right)$$

Portanto, o oitavo termo será $\frac{40}{6} = \frac{20}{3}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UFSJ – Considerando os polinômios

$P_1 = x^2 - 4$
$P_2 = x^3 - 8$
$P_3 = x^2 - 4x + 4$

e sabendo que MDC significa máximo divisor comum e MMC, mínimo múltiplo comum, é CORRETO afirmar que

a) $MDC(P_1, P_2, P_3) = (x - 2)$
b) $MDC(P_1, P_2, P_3) = (x - 2)^2$
c) $MMC(P_1, P_2, P_3) = (x - 2)^4 \cdot (x + 2)^3$
d) $MMC(P_1, P_2, P_3) = (x - 2)^4$

8. Sistema Dom Bosco – O produto de dois números naturais, que não são primos entre si, é igual a 825. Então, o máximo divisor desses dois números é:

a) 1
b) 3
c) 5
d) 11
e) 15

9. PUC-SP (adaptada) – Se n é um número inteiro positivo, chama-se indicador de n o número de elementos do conjunto

$\varnothing(\mathbf{n}) = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant \mathbf{n}$ e $\text{mdc}(x, \mathbf{n}) = 1\}$. Com base nessa definição, calcule o indicador do número 24.

10. Col. Pedro II – Antônio é um botânico que desenvolveu em seu laboratório três variedades de uma mesma planta, V_1, V_2 e V_3. Esses exemplares se desenvolvem cada um a seu tempo, de acordo com a tabela a seguir.

Variedade	Tempo de germinação (em semanas, após o plantio)	Tempo de floração (em semanas, após a germinação)	Tempo para uma única colheita (em semanas, após a floração)
V_1	5	3	1
V_2	3	2	1
V_3	2	1	1

Considere um experimento em que as três variedades serão plantadas inicialmente no mesmo dia e que, a cada dia de colheita, outra semente da mesma variedade será plantada.

Com base nos dados da tabela, o número mínimo de semanas necessárias para que a colheita das três variedades ocorra simultaneamente será

a) 36

b) 24

c) 18

d) 16

11. Fac. Albert Einstein – Medicina – Um torneio de xadrez terá alunos de 3 escolas. Uma das escolas levará 120 alunos; outra, 180 alunos; e outra, 252 alunos. Esses alunos serão divididos em grupos, de modo que cada grupo tenha representantes das três escolas, e o número de alunos de cada escola seja o mesmo em cada grupo. Dessa maneira, o maior número de grupos que podem ser formados é

a) 12
b) 23
c) 46
d) 69

12. Sistema Dom Bosco – O número 432a7b, com a e b como algarismos não nulos, é divisível por 15. Se $a < b$, Então $b - a$ vale:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

13. ESPM – Em relação ao número $N = 2^{48} - 1$, pode-se afirmar que:

a) ele é primo
b) ele é par
c) ele é múltiplo de 7
d) ele não é múltiplo de $2^{24} + 1$
e) ele não é divisível por 9

14. UEL – Os povos indígenas têm uma forte relação com a natureza. Uma certa tribo indígena celebra o Ritual do Sol de 20 em 20 dias, o Ritual da Chuva de 66 em 66 dias e o Ritual da Terra de 30 em 30 dias. A partir dessas informações, responda aos itens a seguir.

a) Considerando que, coincidentemente, os três rituais ocorram hoje, determine a quantidade mínima de dias para que os três rituais sejam celebrados juntos novamente.

Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

b) Hoje é segunda-feira. Sabendo que, daqui a 3 960 dias, os três rituais acontecerão no mesmo dia, determine em que dia da semana ocorrerá essa coincidência.

Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

15. UEPG – Considerando o número natural **a**, tal que MMC(a, 15) = 120 e MDC(a, 15) = 5, e o número natural **b**, tal que MMC(b, 20) = 140 e MDC(b, 20) = 4, assinale o que for correto.

01) MMC(a, b) = 280

02) MDC(a, b) = 4

04) **a** e **b** são números pares.

08) a > b

16. IFBA – Observe as seguintes expressões:

$$E_1 = \frac{\sqrt{1 \cdot \sqrt{12 - \sqrt[3]{8-(-19)}}}}{3-\sqrt{3}}$$

$$E_2 = (0,01)^{-\frac{1}{2}} + 5^{12} \div (0,\ 2)^{-9} \text{ e}$$

$$E_3 = 10 + 10 : 2$$

Considerando que os valores numéricos de E_1, E_2 e E_3 são, respectivamente, n_1, n_2 e n_3, é correto afirmar que

a) MDC(n_2, n_3) = 5

b) MMC(2, n_2, n_3) = 270

c) n_2 é divisor de n_3

d) n_1 é um número inteiro

e) $\frac{n_3 n_1 n_2}{27} = 30$

17. Unigranrio – Medicina (adaptado) – Uma mulher tem três filhas matriculadas regularmente no ensino fundamental. O produto da sua idade com as idades de suas filhas é 37 037. Dessa forma, calcule a diferença entre as idades de sua filha mais velha e de sua filha mais nova.

ESTUDO PARA O ENEM

18. PUC-PR C1-H2

Um estagiário recebeu a tarefa de organizar documentos em três arquivos. No primeiro arquivo, havia apenas 42 contratos de locação; no segundo arquivo, apenas 30 contratos de compra e venda; no terceiro arquivo, apenas 18 laudos de avaliação de imóveis. Ele foi orientado a colocar os documentos em pastas, de modo que todas as pastas devem conter a mesma quantidade de documentos. Além de não poder mudar algum documento do seu arquivo original, deveria colocar na menor quantidade possível de pastas. O número mínimo de pastas que ele pode usar é:

a) 13

b) 15

c) 26

d) 28

e) 30

19. Acafe (adaptado) C1-H3

Um feirante deseja distribuir 576 goiabas, 432 laranjas e 504 maçãs entre várias famílias de um bairro carente. A exigência do feirante é que a distribuição seja feita de modo que cada família receba o mesmo e o menor número possível de frutas de uma mesma espécie.

A quantidade total de frutas recebida pelas famílias, uma a uma, representa um número

a) divisível por 9

b) múltiplo de 7

c) múltiplo de 12

d) entre 40 e 50

e) divisível por 53

20. Enem C1-H3

O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 27 fev. 2013.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número

a) 32

b) 34

c) 33

d) 35

e) 31

05 CONJUNTOS

- Introdução à teoria dos conjuntos
- Notação, representação e listagem dos elementos
- Diagrama de Euler-Venn
- Relação de pertinência
- Relação de inclusão
- Conjuntos especiais
- Conjunto de partes
- Igualdade de conjuntos

HABILIDADES

- Conhecer os conceitos principais da teoria dos conjuntos.
- Representar conjuntos e subconjuntos por meio de notações matemáticas.
- Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações de operações e números (naturais, inteiros, racionais ou reais).
- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

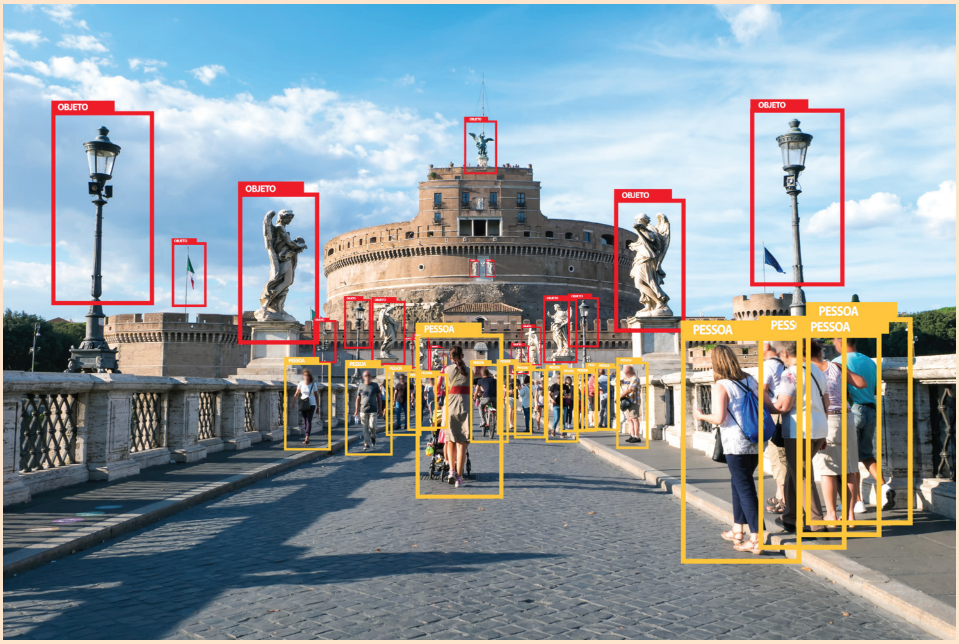
Introdução aos conjuntos

A **teoria dos conjuntos** representa um instrumento de grande utilidade em diversos ramos da Matemática, bem como em outros setores das ciências físicas e humanas.

Para seu desenvolvimento, é necessário inicialmente aceitar a existência de alguns conceitos primitivos, noções adotadas sem definição e que estabelecem a linguagem do estudo da **teoria dos conjuntos**.

Neste material, adota-se a existência de três conceitos primitivos: **elemento**, **conjunto** e **pertinência**. Assim, por exemplo, é preciso entender que cada pessoa é um elemento do conjunto de moradores desta cidade, ou, melhor, é um **elemento** que **pertence** ao **conjunto** de habitantes da cidade, mesmo que não se tenha definido o que é conjunto, o que é elemento e o que é pertinência.

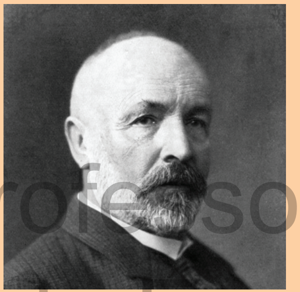
ZAPP2PHOTO/SHUTTERSTOCK



O reconhecimento de imagem classifica elementos nos conjuntos de pessoas e objetos.

O estudo sobre a teoria dos conjuntos é atribuído a **George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor**. Filósofo, físico e matemático, interessou-se pelo infinito. Por meio de estudos mais aprofundados envolvendo conjuntos numéricos, verificou que o conjunto dos números reais tinha mais elementos que o dos números racionais. Assim, ele estabeleceu uma hierarquia entre conjuntos numéricos infinitos, instituindo um novo ramo de estudos na Matemática, denominado teoria dos conjuntos.

INTERFOTO / ALAMY STOCK PHOTO



George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor.

NOTAÇÃO, REPRESENTAÇÃO E LISTAGEM DOS ELEMENTOS

A notação dos conjuntos geralmente utiliza uma letra maiúscula do alfabeto. Relacionam-se todos os elementos de um conjunto por meio de uma listagem envolvida por um par de chaves. Elementos de um conjunto, quando apresentados na forma de listagem, devem ser separados por vírgula ou ponto e vírgula, caso haja números decimais.

Exemplo:

- Seja A o conjunto das cores da bandeira do Brasil
  Então, A = {verde, amarelo, azul, branco}.
- Seja B o conjunto de talheres em uma mesa de jantar:
  Então, B = {garfo, faca, colher}.
- Seja C o conjunto dos algarismos do sistema decimal de numeração
  Então, C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Cardinalidade

A **cardinalidade** de um conjunto n(X) é o número de elementos que um conjunto X tem.

Exemplo:

O conjunto A = {1, 2, 3, 4} contém 4 elementos. Portanto, tem cardinalidade 4, ou seja, n(A) = 4.

Uma propriedade dos elementos do conjunto

Podemos fazer a apresentação do conjunto por meio de uma propriedade (ou mais) desses elementos. Nesses casos, representa-se da seguinte maneira:

A = {x | x tem determinada propriedade P}

Exemplos:

- Seja B o conjunto das vogais do alfabeto
  Então, B = {x | x é vogal do alfabeto}.
- Seja C o conjunto dos algarismos do sistema decimal de numeração
  Então, C = {x | x é algarismo do sistema decimal de numeração}.

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Quando se quer indicar que determinado elemento **x** pertence a um conjunto **A**, diz-se que **x** é elemento do conjunto A: $x \in A$.

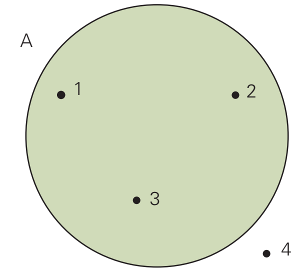
Observação: o símbolo $\in$ é uma versão da letra grega *épsilon* (ε) e está consagrado em toda a Matemática como indicativo de **pertinência**.

Em outro caso, para indicar que um elemento **x** não pertence ao conjunto **A**, ou seja, não é elemento do conjunto **A**, utiliza-se a representação $x \notin A$.

Exemplos:

- A = {1, 2, 3, 4, 5}
  O número 1 pertence ao conjunto A: $1 \in A$.
  O número 10 não pertence ao conjunto A: $10 \notin A$.

- Considere o conjunto a seguir:



Com base na representação, pode-se afirmar que

$1 \in A$

$2 \in A$

$3 \in A$

$4 \notin A$

Definição: quando todo elemento de um conjunto **A** é também elemento de um conjunto **B**, dizemos que **A** é um **subconjunto** ou uma parte de **B**.

Exemplo: sendo A = {1,2} e B = {0,1,2,3,4}, tem-se que **A** é um subconjunto de **B**.

CONJUNTOS ESPECIAIS

Conjunto unitário

É chamado **conjunto unitário** aquele formado por um só elemento.

Exemplo:

Sendo **K** o conjunto dos satélites naturais da Terra:

K = {Lua}

Conjunto vazio

É chamado **conjunto vazio** aquele formado por nenhum elemento. Conjunto vazio pode ser representado pela letra norueguesa $\varnothing$ ou pelo símbolo { }. Não se deve usar as duas notações juntas, representando o conjunto vazio por {$\varnothing$}, pois, nesse caso, se está apresentando um conjunto unitário cujo elemento é $\varnothing$.

Um conjunto vazio está contido em qualquer conjunto e, por isso, é considerado subconjunto de qualquer conjunto, inclusive dele mesmo.

Demonstração

Admita que o conjunto vazio não esteja contido num dado conjunto **A**. Nesse caso, existe um elemento **x** que pertence ao conjunto vazio e que não pertence ao conjunto **A**, o que é um absurdo, pois o conjunto vazio não tem elemento algum.

Conclusão: o conjunto vazio sempre está contido no conjunto **A**, qualquer que seja **A**.

Conjunto universo

Quando se desenvolve certo assunto na Matemática, é preciso admitir um conjunto ao qual pertencem os elementos que serão utilizados. Esse conjunto é chamado de conjunto universo, representado pela letra maiúscula **U**.

Determinada equação pode ter diversos conjuntos solução de acordo com o conjunto universo estabelecido.

Exemplo:

- A equação $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$ apresenta:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -1 \text{ e } x_3 = 3, \text{ se } U = \mathbb{R}$$

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 3, \text{ se } U = \mathbb{Z}$$

$$x = 3, \text{ se } U = \mathbb{N}$$

CONJUNTO DE PARTES

O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto dado **A** é chamado de conjunto de partes (ou conjunto potência) de **A**, representado por P(A).

Determinação do conjunto de partes

Observe no exemplo a seguir o procedimento que se deve adotar para determinar o conjunto de partes de dado conjunto **A**.

Considere o conjunto: A = {2, 3, 5}.

Para obter o conjunto de partes do conjunto A(P(A)), basta escrever todos os seus subconjuntos:

1. Subconjunto vazio: {∅}, pois ele é subconjunto de qualquer conjunto.
2. Subconjuntos com um elemento: {2}, {3}, {5}.
3. Subconjuntos com dois elementos: {2, 3}, {2, 5}, {3, 5}.
4. Subconjuntos com três elementos: A = {2, 3, 5}, pois todo conjunto é subconjunto dele mesmo.

RELAÇÃO DE INCLUSÃO

O conjunto **A** está contido no conjunto **B** se todo elemento que pertencer a **A** também pertencer a **B**. Indica-se que o conjunto **A** é um subconjunto de **B** por meio da seguinte simbologia:

> $A \subset B$ (lê-se: **A** está contido em **B**, ou **A** é subconjunto de **B**).

O conjunto **A** não está contido em **B** quando existe pelo menos um elemento de **A** que não pertence a **B**. Indica-se que o conjunto **A** não está contido em **B** por meio da seguinte simbologia:

> $A \not\subset B$ (lê-se: **A** não está contido em **B**, ou **A** não é subconjunto de **B**).

> **A** é subconjunto de **A**, para todo conjunto **A**.
> ∅ é subconjunto de **A**, para todo conjunto **A**.

Importante

A **relação de pertinência** associa um elemento a um conjunto, e a **relação de inclusão** refere-se sempre a dois conjuntos.

Exemplos:

São afirmações falsas:

a ⊂ {a; e; i; o; u}

{a} ∈ {a; e; i; o; u}

São afirmações verdadeiras:

{a} ∈ {a; e; i; o; u}

a ⊂ {a; e; i; o; u}

{a} ∈ {{a}; e; i; o; u}

Existe uma diferença entre a e {a}. O primeiro denota o elemento **a**, e o segundo denota o conjunto formado pelo elemento **a**.

Um conjunto pode ser um elemento de outro conjunto. Uma cidade é um conjunto de pessoas. Ele representa os moradores desse lugar. Porém, uma cidade é um elemento do conjunto de cidades que formam um estado.

No exemplo {{a}, e, i, o, u}, um dos elementos é o conjunto {a}.

IGUALDADE DE CONJUNTOS

Dois conjuntos são iguais se, e somente se, tiverem os mesmos elementos, em qualquer ordem e independentemente do número de vezes que cada elemento se apresenta.

Exemplo:

{1, 3, 7} = {1, 1, 1, 3, 7, 7, 7, 7} = {7, 31}

Se o conjunto **A** está contido em B ($A \subset B$) e **B** está contido em A ($B \subset A$), pode-se afirmar que A = B.

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

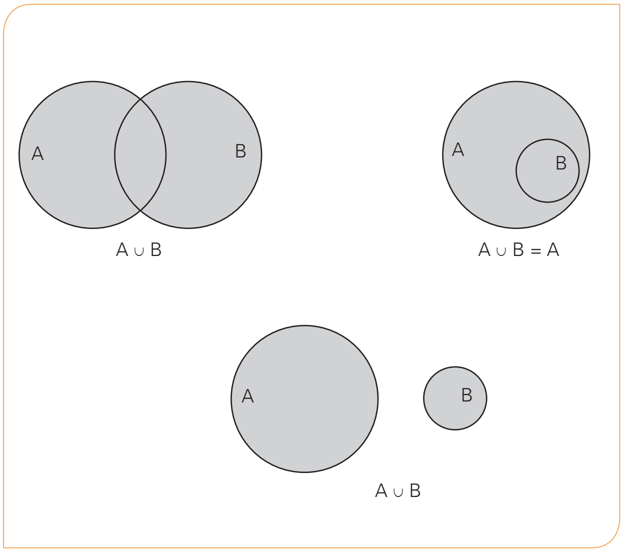
União de conjuntos

Dados os conjuntos **A** e **B**, diz-se que a união entre eles é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a **A** ou **B**.

Notação: $A \cup B$ (lê-se: **A** união **B**).

Pode-se representar a união de dois conjuntos pela seguinte sentença:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$



Exemplo: sendo A = {0, 1, 2} e B = {2, 3, 4, 5}, então A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

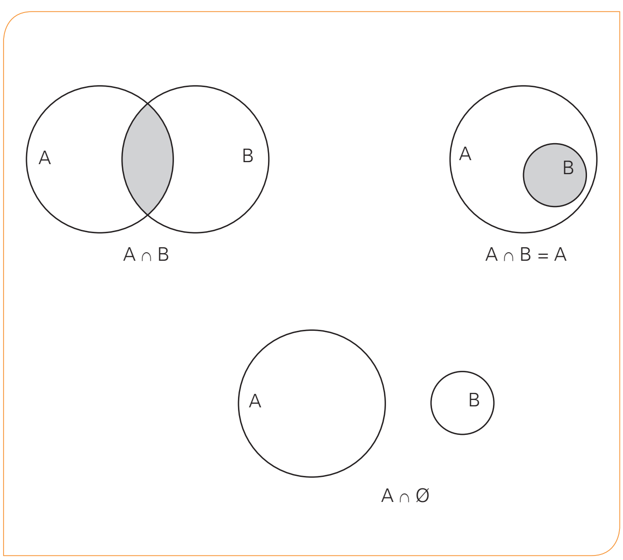
Interseção de conjuntos

Dados os conjuntos **A** e **B**, diz-se que a interseção dos conjuntos **A** e **B** é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a **A** e **B**, simultaneamente.

Notação: $A \cap B$ (lê-se **A** interseção **B**).

Pode-se representar a interseção de dois conjuntos pela seguinte sentença:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$



Exemplo: sendo A = {0, 1, 2} e B = {2, 3, 4, 5}, então A ∩ B = {2}.

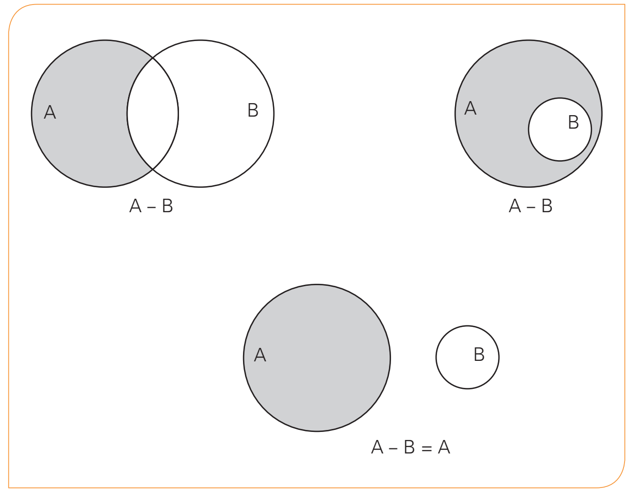
Diferença de conjuntos

Dados os conjuntos **A** e **B**, a diferença entre os conjuntos **A** e **B**, nessa ordem, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a **A**, e não pertencem a **B**.

Notação: A − B (lê-se: **A** menos **B**).

Pode-se representar a diferença de dois conjuntos por meio da seguinte sentença:

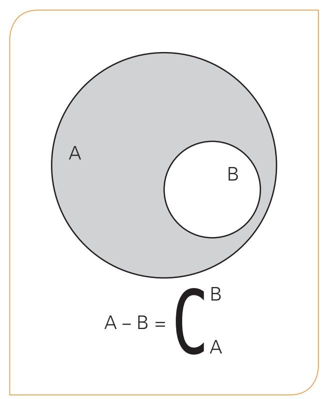
$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$



Exemplo: sendo A = {0, 1, 2} e B = {2, 3, 4, 5}, então A − B = {0,1} e B − A = {3, 4, 5}.

Conjunto complementar

Quando dois conjuntos **A** e **B** são de tal maneira que **B** é subconjunto de **A**, $B \subset A$, diz-se que a diferença A − B é o conjunto complementar de **B** em relação a **A**, cuja representação se encontra a seguir:



Exemplo:

Dados A = {0, 1, 3, 4}, B = {2, 3, 4, 5}, C = {4, 5} e D = {5, 6, 7}, calcule:

1. $(A \cup C) \cap B = \{0, 1, 3, 4, 5\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 5\}$.

2. $(B \cap C) \cup D = \{4, 5\} \cup \{5, 6, 7\} = \{4, 5, 6, 7\}$.

3. $(B - A) \cap C = \{2, 5\} \cap \{4, 5\} = \{5\}$.

4. $\complement_B^C \cup (A \cap B) = \{2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{2, 3, 4\}$

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Conjunto dos números naturais

O conjunto dos **números naturais** é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$, em que:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Observação: alguns autores podem não incluir o número zero no conjunto dos naturais.

Conjunto dos números inteiros

O conjunto dos **números inteiros** é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$, em que:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Conjunto dos números inteiros não negativos

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$

Por convenção, para qualquer conjunto numérico que, em sua representação, tiver acrescentado o símbolo * (asterisco), este ficará sem o elemento 0 (zero).

Exemplos:

- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}^* = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$

Conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Com relação aos **números racionais**, eles podem ser encontrados de três maneiras:

- número inteiro;
- número decimal exato;
- número decimal periódico (dízimas periódicas).

Conjunto dos números irracionais

Números que não podem ser colocados na forma de fração com numerador inteiro e denominador inteiro não nulo são chamados de **irracionais**.

O conjunto dos números irracionais é representado pelo símbolo $\mathbb{I}$.

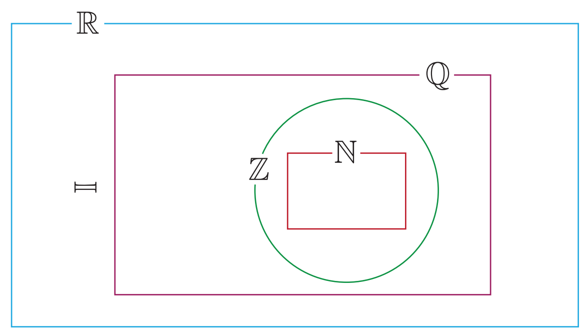
Exemplos:

- $\sqrt{2}$
- π
- $\sqrt[3]{7}$

Conjunto dos números reais

O conjunto dos **números reais** é representado pelo símbolo $\mathbb{R}$, em que: $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\} = (x|x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I})$.

Representação de todos os conjuntos numéricos pelo diagrama de Euler-Venn.



ROTEIRO DE AULA

TEORIA DOS CONJUNTOS

Conjuntos numéricos

Naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Inteiros: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Racionais: $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Irracionais: $\mathbb{I}$. Números que não podem ser escritos na forma de fração com numerador inteiro e denominador inteiro não nulo.

Reais: $\mathbb{R} = \{$ x|x é racional ou x é irracional$\}$.

Simbologia

$x \in A$: o elemento x pertence ao conjunto A.

$x \notin A$: o elemento x não pertence ao conjunto A.

$A \subset B$: o conjunto A está contido no conjunto B.

$A \not\subset B$: o conjunto A não está contido no conjunto B.

Operações com conjuntos

União: $(A \cup B)$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou B.

Intersecção: $(A \cap B)$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e B simultaneamente.

Diferença: $(A - B)$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

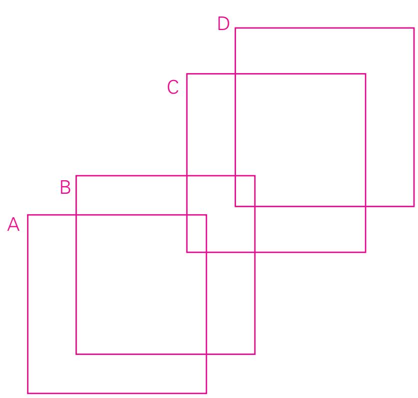
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Sistema Dom Bosco – Se A = {x ∈ ℤ | x ≤ 6}, B = {x ∈ ℤ | x > −5} e C = {x ∈ ℤ | 4 < x ≤ 8}, então n[(A ∩ B) − C] é:

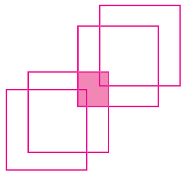
a) 10
b) 9
c) 8
d) 7
e) 6

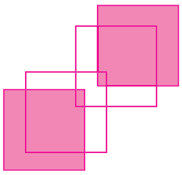
A = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; B = {−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...} e C = {5, 6, 7, 8}.
A ∩ B = {−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}.
A ∩ B − C = {−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4}.

2. CFTMG (adaptado) – Na figura a seguir, os conjuntos A, B, C e D estão representados por 4 quadrados que se interceptam. Determine a região hachurada que representa (B ∩ C) − (A ∪ D).

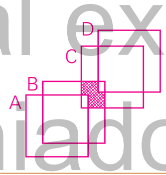


Considere os diagramas:


(B ∩ C)


(A ∪ D)

A região hachurada que representa (B ∩ C) – (A ∪ D) é:



3. IFCE C1-H1

O matemático indiano Madhava de Sangamagrama viveu durante os séculos 14 e 15. A ele são atribuídos muitos feitos, dentre os quais citamos ter sido o primeiro a calcular o valor de π com mais de 10 casas decimais corretas, a saber: 3,14159265359. Na aproximação $\pi = \frac{22}{7}$, o primeiro algarismo diferente do valor exato é o

a) primeiro depois da vírgula
b) segundo depois da vírgula
c) terceiro depois da vírgula
d) quarto depois da vírgula
e) quinto depois da vírgula

Considerando que $\frac{22}{7} = 3{,}142857143...$, o primeiro algarismo diferente do valor exato é o terceiro depois da vírgula.

4. Sistema Dom Bosco – A diferença simétrica representada pelo símbolo * pode ser definida por:

A * B = (A ∪ B) − (A ∩ B). Se A = {a, b, c} e

B = {b, c, d, e}, então A * B é:

a) ∅
b) {a}
c) {b,c}
d) {a,d,e}

A ∪ B = {a, b, c, d, e}
A ∩ B = {b, c}
A*B = {a, d, e}

5. Ifal (adaptado) – De acordo com os conjuntos numéricos, analise as afirmativas abaixo:

I. Todo número natural é inteiro.
II. A soma de dois números irracionais é sempre irracional.
III. Todo número racional é inteiro.

São falsas as afirmativas

a) I, somente
b) II, somente
c) III, somente
d) I e II
e) II e III

I. Todo número natural é inteiro.
VERDADEIRA, pois o conjunto dos números naturais é um subconjunto do conjunto dos inteiros.
II. A soma de dois números irracionais é sempre irracional.
FALSA, pois soma de dois números irracionais opostos é racional.
III. Todo número racional é inteiro.
FALSA, pois existem números racionais, como os números decimais e as dízimas periódicas, que não são números inteiros.

6. Sistema Dom Bosco – Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \varnothing\}$. Julgue as afirmações:

I. $5 \in A$ e $\{5\} \subset A$;
II. $\varnothing \in A$ e $\{\varnothing\} \subset A$;
III. $\varnothing \subset A$ e $n(A) = 6$.

Quantas são verdadeiras?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

O número 5 e o conjunto vazio são elementos de A, ou seja, $5 \in A$ e $\varnothing \in A$. Então, $\{5\}$ e $\{\varnothing\}$ são subconjuntos de A, ou seja, $\{5\} \subset A$ e $\{\varnothing\} \subset A$. Como o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, tem-se $\{\varnothing\} \subset A$; o número de elementos de n(A) é 6, pois há 5 elementos que são números, e o sexto é o conjunto vazio.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Ifal – Analise as afirmações abaixo:

I. O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números inteiros.
II. O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números racionais.
III. O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números irracionais.

a) Apenas a afirmação I é verdadeira.
b) Apenas a afirmação II é verdadeira.
c) Apenas a afirmação III é verdadeira.
d) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
e) Todas as afirmações são verdadeiras.

8. Sistema Dom Bosco – Considere o conjunto $A = \{0, 1, 2\}$. Sabendo que $A \cap B = \{0,2\}$ e $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, quais são os elementos que pertencem ao conjunto B?

9. Ifal (adaptado) – Considere as afirmações:

I. Todo número natural é também real.

II. Todo número irracional é também real.

III. O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

Quantas são verdadeiras?

a) Nenhuma
b) Uma
c) Duas
d) Três
e) Quatro

10. Sistema Dom Bosco – Em um grupo de x pessoas, 14 jogam xadrez, 40 são homens. Se 25% dos homens jogam xadrez e 75% das mulheres não jogam xadrez, então qual é o valor de x?

11. UEG (adaptado) – Dados dois conjuntos, A e B, verifica-se que $A \cap B = \{b, d\}$ $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ e $B - A = \{a\}$. Calcule o conjunto B.

12. IFSul – Sobre os números $\frac{25}{3}$, $\frac{36}{5}$ e $\sqrt{17}$, afirma-se que:

a) pertencem ao conjunto dos números naturais
b) pertencem ao conjunto dos números inteiros
c) $\frac{25}{3} < \frac{36}{5} < \sqrt{17}$
d) $\sqrt{17} < \frac{36}{5} < \frac{25}{3}$

13. Sistema Dom Bosco – Juca disse um número para Judith. Ela não entendeu o número dito por Juca. Sobre esse número, pode-se afirmar que é:

a) natural
b) inteiro
c) racional
d) irracional
e) real

14. IFCE (adaptado) – Calcule a quantidade de subconjuntos X que satisfazem à inclusão $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

a) 4
b) 5
c) 3
d) 2
e) 1

15. Unioeste – Dentre as equações abaixo, qual NÃO possui solução com x e y inteiros?

a) $x^2 + y^2 = 1$
b) $x^2 + y^2 = 2$
c) $x^2 + y^2 = 3$
d) $x^2 + y^2 = 4$
e) $x^2 + y^2 = 5$

16. UFRGS – Sendo a e b números reais, considere as afirmações a seguir.

I. Se $a < b$, então $-a > -b$.
II. Sendo a e b não nulos e $a > b$, então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
III. Se $a < b$, então $a^2 < b^2$.

Quais estão corretas?

a) Apenas I
b) Apenas II
c) Apenas III
d) Apenas I e II
e) I, II e III

17. Sistema Dom Bosco – Um médico, ao fazer o levantamento do quadro de pessoal de sua clínica, obteve os seguintes resultados:

- 25% dos funcionários são mulheres;
- 20% dos homens têm menos de 30 anos;
- 80% dos funcionários têm pelo menos 30 anos.

Dentre as mulheres, qual é a porcentagem das que têm pelo menos 30 anos?

ESTUDO PARA O ENEM

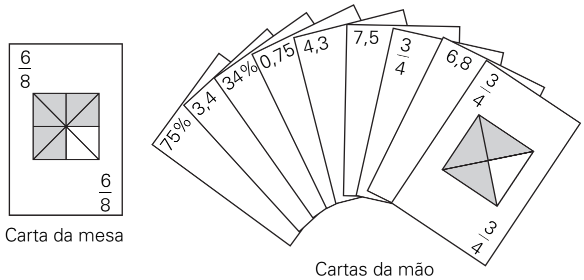
18. Enem C1-H1

Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3,021 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm. Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de

a) 2,099
b) 2,96
c) 3,021
d) 3,07
e) 3,10

19. Enem C1-H3

No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:



Carta da mesa

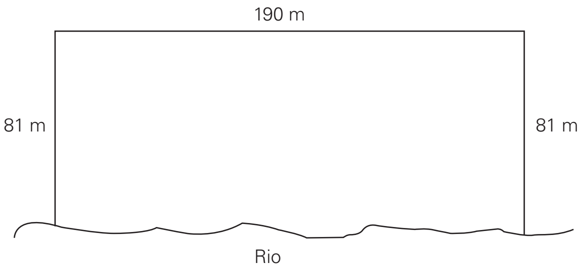
Cartas da mão

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

a) 9
b) 7
c) 5
d) 4
e) 3

20. Enem C1-H3

Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para a confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

a) 6
b) 7
c) 8
d) 11
e) 12

6 INTERVALOS REAIS E DIAGRAMA DE VENN

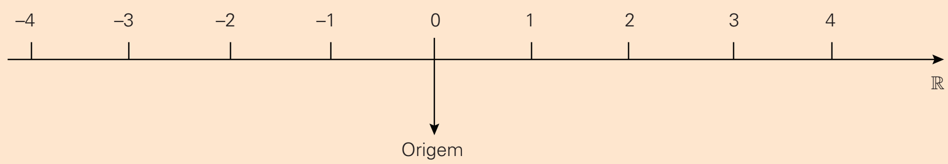
- Intervalos reais
- Diagrama de Euler-Venn

HABILIDADES

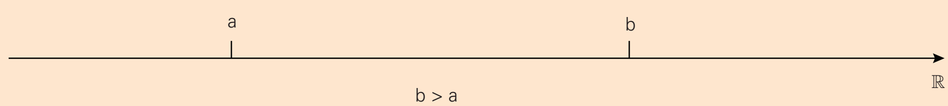
- Resolver situações-problema envolvendo teoria de conjuntos e intervalos reais.
- Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações de operações e números (naturais, inteiros, racionais ou reais).
- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

Intervalos reais

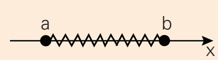
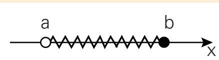
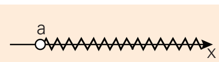
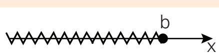
Números reais também podem ser associados em cada ponto de uma reta, estabelecendo o que é chamado reta real ou eixo real.



O eixo real apresenta uma ordenação dos números de tal maneira que qualquer um colocado à direita de outro será maior que este. Analogamente, qualquer número à esquerda de outro será menor que este último.



Em uma comparação entre números reais apresentados no eixo real, podem-se estabelecer subconjuntos de extrema importância, chamados de intervalos reais, cuja representação encontra-se na tabela a seguir:

	$a < x < b$	$]a, b[$	(a ,b)
	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	$[a, b]$
	$a < x \leq b$	$]a, b]$	$(a, b]$
	$x > a$	$]a, +\infty[$	$(a, +\infty)$
	$x \leq b$	$]-\infty, b]$	$(-\infty, b]$

Observação: os intervalos com $+\infty$ ou $-\infty$ jamais devem ser fechados.

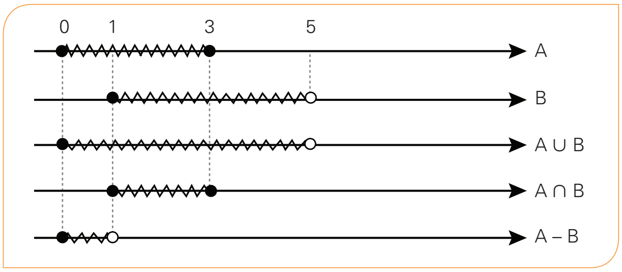
OPERAÇÕES COM INTERVALOS

Exemplos:

Dados os intervalos $A = [0, 3]$ e $B = [1, 5[$, encontre o valor de:

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A - B$

Pela representação na reta real, tem-se:



$A \cup B = [0, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5\}$
$A \cap B = [1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$
$A - B = [0, 1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$

Diagrama de Venn

Podemos representar um conjunto de forma gráfica, o que torna a resolução de alguns problemas mais prática. Isso pode ser feito por meio do diagrama de Euler-Venn. Os elementos são representados por pontos interiores a uma linha fechada não entrelaçada. Dessa forma, pontos exteriores à linha representam elementos que não pertencem ao conjunto considerado.

Os diagramas adotam o nome de seus criadores, **John Venn**, matemático e filósofo britânico do século XIX, e **Leonhard Paul Euler**, matemático e físico suíço do século XVIII.

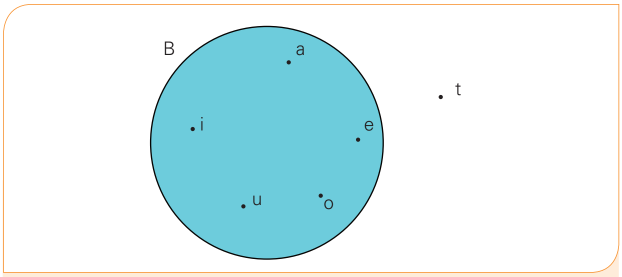
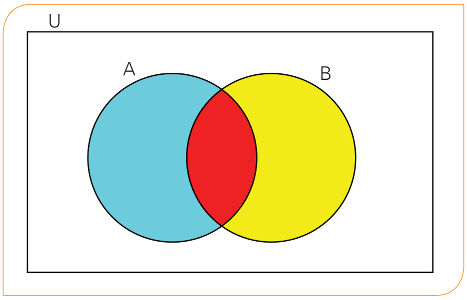
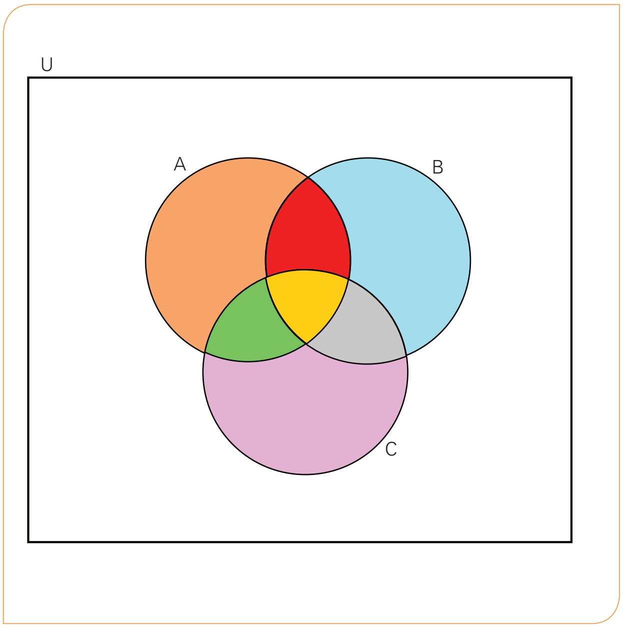


Diagrama de Euler-Venn para o caso B = {x|x é vogal do alfabeto}.

Considere A, B e C subconjuntos de U. Abaixo estão as regiões coloridas associadas às respectivas correspondências.



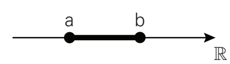
A: regiões azul e vermelha.
B: regiões amarela e vermelha.
$A \cap B$: região vermelha.
$A - B$: região azul.
$B - A$: região amarela.
$A \cup B$: região azul ou vermelha ou amarela.
$U - (A \cup B)$: região branca.



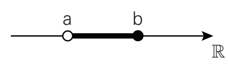
A: regiões vermelha, amarela, verde e laranja.
B: regiões vermelha, amarela, cinza e azul.
C: regiões verde, amarela, cinza e lilás.
$A \cap B \cap C$: região amarela.
$A \cap B$: regiões amarela e vermelha.
$(A \cap B) - C$: região vermelha.
$A \cap C$: regiões amarela e verde.
$(A \cap C) - B$: região verde.
$B \cap C$: regiões amarela e cinza.
$(B \cap C) - A$: região cinza.
$A - (B \cup C)$: região laranja.
$B - (A \cup C)$: região azul.
$C - (A \cup B)$: região lilás.
$A \cup B \cup C$: regiões azul, vermelha, amarela, cinza, lilás, verde e laranja.
$U - (A \cup B \cup C)$: região branca.

INTERVALOS REAIS E DIAGRAMA DE EULER-VENN

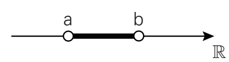
Intervalos reais



$\leftrightarrow [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \le x \le b\}$



$\leftrightarrow$ $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$



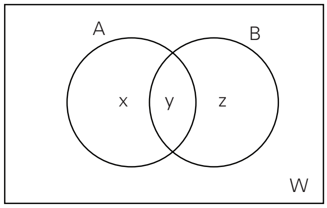
$\leftrightarrow$ $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$\leftrightarrow$ $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \ge x\}$

$\leftrightarrow$ $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

$\leftrightarrow$ $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Diagrama de Venn



y: número de elementos que são de A e de B.

x + y: números de elementos que são de A.

y + z: números de elementos que são de B.

x: números de elementos que são somente de A.

z: números de elementos somente de B.

x + y + z: números de elementos que são de A ou de B.

w: números de elementos que não são de A nem de B.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

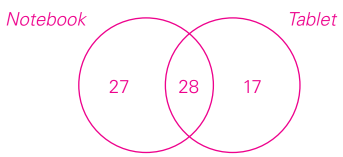
1. Fatec – Em uma pesquisa de mercado sobre o uso de *notebooks* e *tablets* foram obtidos, entre os indivíduos pesquisados, os seguintes resultados:

- 55 usam *notebook*;
- 45 usam *tablet*; e
- 27 usam apenas *notebook*.

Sabendo que todos os pesquisados utilizam pelo menos um desses dois equipamentos, então, dentre os pesquisados, o número dos que usam apenas *tablet* é

a) 8
b) 17
c) 27
d) 36
e) 45

Temos o seguinte diagrama de Euler-Venn:



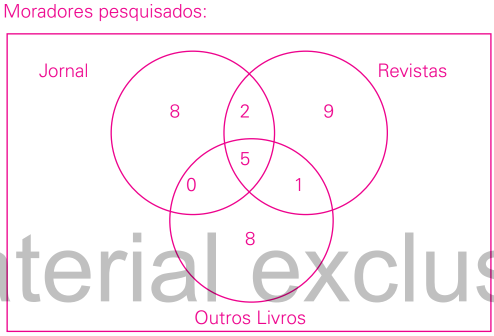
Logo, os que usam *tablet* e *notebook* são 55 – 27 = 28. Os que usam apenas *tablet* são 45 – 28 = 17.

2. UEG (adaptado) C1-H1

Em uma pesquisa realizada com 35 moradores na periferia de uma grande cidade para saberem a modalidade de leitura que realizam regularmente entre jornal, revista e livros, foi constatado que: 15 pessoas leem jornal, 17 pessoas leem revista, 14 pessoas leem livros, 7 pessoas leem jornal e revista, 6 pessoas leem revista e livros, 5 pessoas leem jornal, revistas e livros e nenhuma pessoa lê somente jornal e livros. Diante dessas informações, verifica-se que

a) 5 pessoas não leem nenhuma das três modalidades
b) 4 pessoas não leem nenhuma das três modalidades
c) 3 pessoas não leem nenhuma das três modalidades
d) 2 pessoas não leem nenhuma das três modalidades
e) 1 pessoa não lê nenhuma das três modalidades

Moradores pesquisados:



Sendo x o número de pessoas que não leem nenhuma das publicações, temos:
$5 + 1 + 2 + 0 + 8 + 9 + x = 35 \rightarrow x = 2$

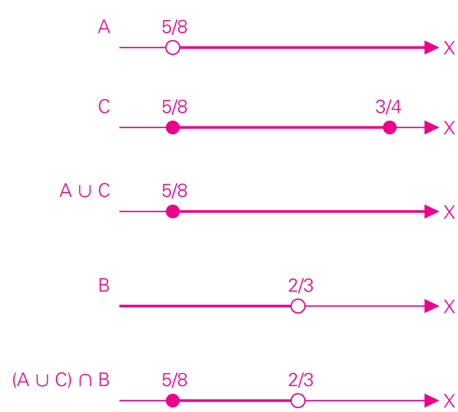
3. IFCE – Sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, considere

- $A = \left\{x \in \mathbb{R};\ x > \frac{5}{8}\right\}$;
- $B = \left\{x \in \mathbb{R};\ x < \frac{2}{3}\right\}$; e
- $C = \left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{5}{8} \le x \le \frac{3}{4}\right\}$.

O conjunto $(A \cup C) \cap B$ é

a) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x \le \frac{2}{3}\right\}$
b) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x \ge \frac{5}{8}\right\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{5}{8} \le x \le \frac{3}{4}\right\}$
d) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x \le \frac{3}{4}\right\}$
e) $\left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{5}{8} \le x < \frac{2}{3}\right\}$

Como $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$, $\frac{2}{6} = \frac{16}{24}$ e $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$, temos $\frac{5}{8} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$. Então:

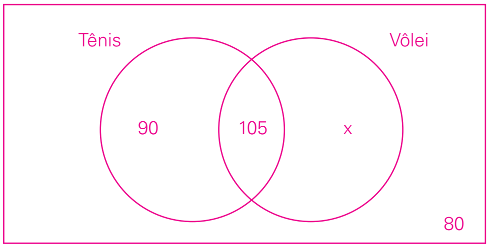


4. PUC-Rio – Em uma pesquisa, constatou-se que, das 345 pessoas de um determinado local, 195 jogavam tênis, 105 jogavam tênis e vôlei, e 80 não jogavam nem vôlei nem tênis.

Qual é o número de pessoas que jogavam vôlei e não jogavam tênis?

a) 70
b) 75
c) 105
d) 180
e) 195

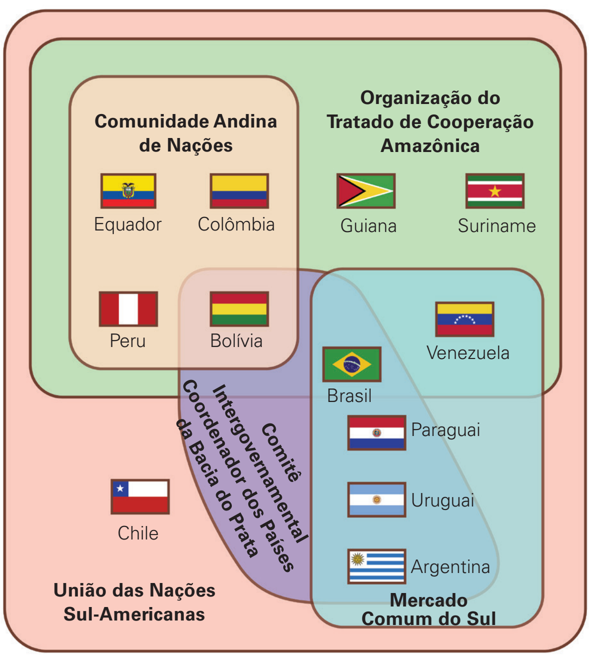
Do enunciado, podemos montar o seguinte diagrama:



Assim, 90 + 105 + x + 180 = 345 → x = 70.

Logo, o número de pessoas que jogavam vôlei e não jogavam tênis é igual a 70.

5. FGV – Observe o diagrama com 5 organizações intergovernamentais de integração sul-americana:



(wikipedia.org. Adaptado)

Dos 12 países que compõem esse diagrama, integram exatamente 3 das organizações apenas

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

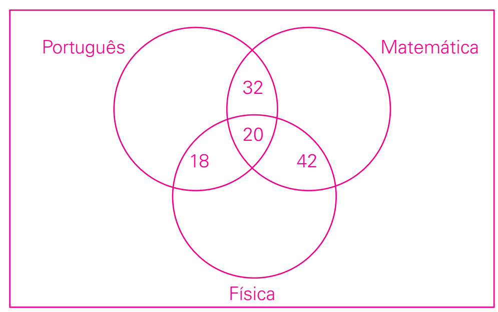
Os países que integram exatamente três das organizações são: Peru, Equador, Colômbia, Venezuela, Paraguai, Argentina e Uruguai. Portanto, a resposta é 7.

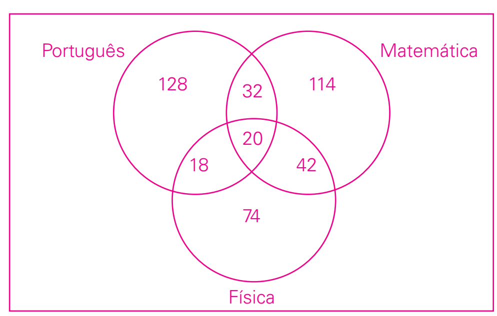
6. IFSul (adaptado) – Analisando os conteúdos nos quais são apresentadas maiores dificuldades de aprendizagem em uma escola com 500 alunos, percebeu-se que: 208 têm dificuldades de aprendizagem em Matemática; 198, em português; 154, em Física; 62, em Matemática e física; 38, em Português e Física; 52, em Matemática e Português; e 20 têm dificuldades nas três disciplinas.

Por esse viés, calcule o número de alunos que não tem dificuldades em nenhuma dessas disciplinas.

Utilizando o diagrama de Euler-Venn, temos:

Subtraindo o total de cada matéria pelas intersecções, temos:





Logo, somando todos os valores e subtraindo 500, temos: 500 – 428 = 72.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Unicamp – Sabe-se que, em um grupo de 10 pessoas, o livro A foi lido por 5 pessoas e o livro B foi lido por 4 pessoas. Podemos afirmar corretamente que, nesse grupo,

a) pelo menos uma pessoa leu os dois livros.
b) nenhuma pessoa leu os dois livros.
c) pelo menos uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.
d) todas as pessoas leram pelo menos um dos dois livros.

8. IFSul – Em uma consulta à comunidade acadêmica sobre a necessidade de melhorias na área física de um determinado campus do IFSul, foi obtido o seguinte resultado:

- 538 sugerem reformas nas salas de aula.
- 582 sugerem reformas na biblioteca.
- 350 sugerem reformas nas salas de aula e na biblioteca.
- 110 sugerem reformas em outras instalações.

Quantas pessoas foram entrevistadas nessa consulta?

a) 770
b) 880
c) 1 120
d) 1 580

9. IFPE – No IFPE Campus Olinda foi feita uma pesquisa com alguns alunos do curso de computação gráfica a respeito do domínio sobre três aplicativos. As respostas foram as seguintes:

- 78 dominam o Word;
- 84 dominam o Excel;
- 65 dominam o PowerPoint;
- 61 dominam o Word e Excel;
- 53 dominam o Excel e PowerPoint;
- 45 dominam o Word e PowerPoint;
- 40 dominam os três aplicativos;
- 03 não dominam aplicativo algum.

Com base nas informações acima, o número de estudantes do curso de computação gráfica que responderam a essa pesquisa é

a) 112
b) 227
c) 230
d) 111
e) 129

10. IFPE (adaptado) – Em uma pesquisa de opinião realizada com 200 estudantes do IFPE a respeito da preferência quanto ao estilo musical, constatou-se que:

- 85 estudantes gostam de rock;
- 70 estudantes gostam de forró;
- 65 estudantes gostam de brega;
- 40 estudantes gostam de rock e forró;
- 20 estudantes gostam de rock e brega;
- 30 estudantes gostam de forró e brega;
- 10 estudantes gostam de rock, forró e brega.

Determine quantos estudantes não gostam de nenhum desses três estilos musicais.

11. Fuvest – Dentre os candidatos que fizeram provas de Matemática, Português e Inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe-se que:

I. 14 não obtiveram nota mínima em Matemática;
II. 16 não obtiveram nota mínima em Português;
III. 12 não obtiveram nota mínima em Inglês;
IV. 5 não obtiveram nota mínima em Matemática e em Português;
V. 3 não obtiveram nota mínima em Matemática e em Inglês;
VI. 7 não obtiveram nota mínima em Português e em Inglês; e
VII. 2 não obtiveram nota mínima em Português, Matemática e Inglês.

A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi

a) 44
b) 46
c) 47
d) 48
e) 49

12. Fatec – Uma pesquisa foi realizada com alguns alunos da Fatec – São Paulo sobre a participação em um Projeto de Iniciação Científica (PIC) e a participação na reunião anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC). Dos 75 alunos entrevistados:

- 17 não participaram de nenhuma dessas duas atividades;
- 36 participaram da reunião da SBPC; e
- 42 participaram do PIC.

Nessas condições, o número de alunos entrevistados que participaram do PIC e da reunião da SBPC é

a) 10
b) 12
c) 16
d) 20
e) 22

13. IFSul – Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 8\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$, então A – B é

a) $[-5, 1] \cup [4, 8]$

b) $(-5, 1) \cup (4, 8)$

c) $[-5, 1] \cup (4, 8)$

d) $[-5, 1] \cup [4, 8)$

14. IFSul – Em um grupo de jovens praticantes de vôlei, basquete e futsal, sabe-se que:

- 03 praticam os três esportes citados;
- 01 não pratica nenhum esporte;
- 07 jogam vôlei e basquete;
- 25 jogam vôlei;
- 27 praticam basquete;
- 10 praticam basquete e futsal;
- 30 jogam futsal;
- 08 praticam vôlei e futsal.

Quantos jovens praticam apenas dois esportes?

a) 16

b) 17

c) 19

d) 25

15. Sistema Dom Bosco – Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 8\}$. Determine:

a) $(A \cup B) - C$

b) $(B \cap C) - A$

16. Sistema Dom Bosco – O número y não pertence ao intervalo fechado de extremo −3 e 4. Sabendo que $y < -2$ ou $y > 5$, determine o intervalo ao qual y pertence.

17. UEPG – Interessado em lançar os modelos A, B e C de sandálias em uma determinada região do estado, foi realizada uma pesquisa sobre a preferência de compra dos moradores, a qual apresentou os seguintes resultados:

- 600 moradores comprariam apenas o modelo A;
- 1 000 moradores comprariam apenas o modelo B;
- 1 400 moradores comprariam apenas o modelo C;
- 100 moradores comprariam apenas os modelos A e B;
- 200 moradores comprariam apenas os modelos A e C;
- 300 moradores comprariam apenas os modelos B e C;
- 100 moradores comprariam qualquer um dos três modelos;
- 1 300 moradores não comprariam nenhum dos três modelos.

A partir do que foi exposto, assinale o que for correto.

01) O modelo A tem a preferência de menos que 17% dos moradores.

02) 70% dos moradores não comprariam o modelo B.

04) 14% dos moradores comprariam pelo menos dois dos modelos oferecidos.

08) Mais do que 50% dos moradores não comprariam os modelos A ou C.

16) O modelo C é o de maior preferência.

ESTUDO PARA O ENEM

18. UCS C1-H2

Em uma pesquisa de opinião sobre a realização da Copa do Mundo e das Olimpíadas no Brasil, entre os alunos de uma escola, obteve-se o seguinte resultado:

Evento	Número de estudantes favoráveis
Copa do Mundo	135
Olimpíadas	250
Copa do Mundo e Olimpíadas	120

Se a escola tem 420 alunos e todos responderam à pesquisa, quantos dos alunos dessa escola não são favoráveis a nenhum dos eventos no Brasil?

a) 15
b) 155
c) 265
d) 300
e) 290

19. CFTMG (adaptado) C1-H2

Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$. Pode-se afirmar que $(A - B) \cup C$ é:

a) $\varnothing$
b) A
c) B
d) C
e) $\mathbb{R}$

20. PUC-Rio C1-H2

Uma prova com duas questões foi dada a uma classe de quarenta alunos. Quinze alunos acertaram as duas questões, 20 acertaram a primeira e 22 acertaram a segunda questão. Quantos alunos erraram as duas questões?

a) 15
b) 13
c) 22
d) 20
e) 12

07

EQUAÇÕES DO 1º GRAU

- Introdução a equações
- Equações equivalentes
- Equações do 1º grau

HABILIDADES

- Reconhecer equações de 1º grau.
- Resolver equações de 1º grau.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

Introdução a equações

Na Matemática, as equações são igualdades envolvendo valores desconhecidos, chamados de **incógnitas**. As equações constituem, pelo menos do ponto de vista prático, a parte mais importante dessa área do conhecimento. Qualquer problema que possa ser solucionado por meio dos números certamente será tratado, direta ou indiretamente, pelas equações.

JIRAPONG MANUSTRONG/SHUTTERSTOCK

As equações matemáticas são de importante uso na área de finanças, tais como em cálculos no mercado financeiro.

Uma equação de 1º grau, por exemplo, tem a forma $ax + b = 0$, em que a incógnita **x** tem grau 1 ($x = x^1$). Podemos resolver a equação utilizando a técnica útil de imaginar uma balança. Para que ela esteja em equilíbrio, é necessário que ambos os pratos tenham a mesma quantidade, ou seja, deve existir uma relação de igualdade.

Observe as igualdades:

I. $4 + 7 = 10$
II. $4 + 7 = 11$
III. $4 + x = 7$

As duas primeiras igualdades são sentenças matemáticas **fechadas**, uma vez que cada admite uma, e somente uma, das seguintes classificações: **verdadeira** ou **falsa**.

Nos exemplos, a sentença (I) é **falsa** e a (II), **verdadeira**.

A igualdade (III) é uma sentença matemática **aberta**; pode ser classificada como falsa ou verdadeira, porque não se sabe o valor que a incógnita x pode representar.

Dependendo do valor atribuído à incógnita em uma sentença aberta, obtém-se uma proposição **falsa** ou **verdadeira**.

Por exemplo, em (III), atribuindo valor 3 para a incógnita **x**, tem-se uma sentença **verdadeira**. No entanto, se for dado valor 4, obtém-se uma sentença **falsa**.

Exemplos:

- $2x + 10 = 0$
- $x^2 + 1 = 0$
- $\sqrt{x} + x = 2$
- $\frac{1}{x} + 1 = 0$
- $2^x = 4$

RAIZ (OU SOLUÇÃO) DE UMA EQUAÇÃO

Uma raiz (ou solução) é um número do conjunto universo que, quando colocado no lugar da incógnita, transforma a sentença matemática aberta em uma sentença matemática fechada verdadeira.

Conjunto universo de uma equação é aquele constituído dos valores que a incógnita pode assumir.

Exemplos:

1. Equação $2x + 10 = 0$ definida em $\mathbb{R}$.
   - Conjunto universo ($\mathbb{R}$), conjunto dos **números reais**.
   - Substituindo **x** por –5 na equação:
     $2x + 10 = 0$
     $2 \cdot (-5) + 10 = 0$
     Essa é uma igualdade verdadeira. Diz-se que –5 é **raiz da equação**.
   - O número 5, mesmo sendo um elemento pertencente ao conjunto universo, não é solução da equação $2x + 10 = 0$, pois $2 \cdot (5) + 10 = 0$ é **falsa**.
2. Equação $2x + 10 = 0$ definida em $\mathbb{N}$.
   - Conjunto universo é o conjunto $\mathbb{N}$, o conjunto dos **números naturais**.
   - Substituindo **x** por –5 na equação:
     $2x + 10 = 0$
     $2x \cdot (-5) + 10 = 0$

Essa é uma igualdade verdadeira. Mas –5 não é raiz da equação, pois não é elemento pertencente ao conjunto $\mathbb{N}$.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

Ao resolver uma equação, é preciso estar atento ao conjunto universo em que ela está definida. Dependendo do universo, uma raiz pode ser factível ou não.

EQUAÇÕES EQUIVALENTES

São aquelas equações que têm as mesmas raízes, isto é, o mesmo conjunto solução, no mesmo universo.

Exemplo:

As equações $2x + 10 = 0$ e $x + 5 = 0$ são equivalentes, pois ambas têm uma única raiz, que é -5.

Os teoremas a seguir permitem transformar uma equação em outra equivalente.

Teorema 1: ao adicionar ou subtrair um mesmo número a ambos os membros, a igualdade permanece.

$a = b \leftrightarrow a + c = b + c$ ou $a = b \leftrightarrow a - c = b - c$

Exemplo: $2 = 2 \leftrightarrow 2 + 3 = 2 + 3$; $2 = 2 \leftrightarrow 2 - 3 = 2 - 3$

Teorema 2: ao multiplicar ou dividir por um mesmo número diferente de zero ambos os membros, a igualdade permanece.

$a = b \leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$; $a = b \leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Exemplo: $2 = 2 \leftrightarrow 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3$; $2 = 2 \leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Observe a equação $2x + 10 = 0$ definida em $\mathbb{R}$.

Considere os procedimentos a seguir:

$2x + 10 = 0$

$2x + 10 = 0$ (subtraindo 10 dos dois membros da igualdade – **teorema 1**)

$2x + 10 - 10 = 0 - 10$

$2x = -10$ (dividindo os membros da igualdade por 2 – **teorema 2**)

$x = -5$

No **teorema 1**, a equação $2x + 10 = 0$ é equivalente à equação $2x = -10$ no **teorema 2**.

Pode-se dizer que as três equações são equivalentes entre si, das quais a última é a mais simples e nos leva à solução.

Equações do 1º grau

Observando os exemplos de equações citados anteriormente, percebe-se que há diversos tipos de equações, por isso é preciso organizá-las em grupos com características semelhantes.

O primeiro grupo organizado para estudo é o das **equações do 1º grau**.

DEFINIÇÃO

Denomina-se **equação do 1º grau** em $\mathbb{R}$, na incógnita **x**, toda equação que pode ser escrita na forma:

$$ax + b = 0$$

Com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$

Exemplo:

A equação $2x + 10 = 0$ é do **1º grau**. Comparando-a com a forma geral das equações de 1º grau $ax + b = 0$, temos que $a = 2$ e $b = 10$.

RESOLUÇÃO

Os teoremas citados auxiliam na resolução de equações do 1º grau. Observe:

Forma geral: $ax + b = 0$.

Teorema 1: Subtraindo **b** de dois membros da igualdade:

$ax + b - b = 0 - b$

Equação equivalente:

$ax = -b$

Teorema 2: Dividindo os dois membros por **a**:

$$\frac{ax}{b} = -\frac{b}{a}$$

Equação equivalente:

$$x = -\frac{b}{a} \text{ (descoberto o valor de x)}$$

$$S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Definição: proposição a ser resolvida com base nas informações implícitas ou explícitas de determinado problema.

Um **problema matemático** pode ter uma, mais de uma ou não ter solução. Para resolvê-lo, é preciso encontrar todos os possíveis valores das incógnitas propostas no enunciado da questão.

Passos para resolver um problema matemático

1. Equacionar o problema, ou seja, organizar os dados da questão em uma ou mais equações matemáticas.
2. Resolver as equações.
3. Analisar os resultados encontrados, avaliando a factibilidade de cada um.
4. Apresentar a resposta final.

Exemplo:

Problema: a soma das idades de dois irmãos é 30. A idade do mais velho excede a do mais novo em 10 anos. Quais são as idades deles?

Seguindo os passos citados anteriormente, iremos equacionar o problema (1). Uma situação-problema pode ter mais de um modo de resolução. Veremos aqui alguns exemplos.

1º modo: Podemos fazer isso com o auxílio de uma tabela.

Irmão	Idade dos irmãos
Irmão mais novo	x
Irmão mais velho	x + 10 (o enunciado diz que a idade do mais velho excede a do mais novo em 10 anos)

Resolvendo a equação (2):

No enunciado, tem-se:

$x + x + 10 = 30$ (a soma das idades é 30)

$2x + 10 = 30$

$2x = 20$

$$x = \frac{20}{2}$$

$x = 10$

Analisando o resultado encontrado (3) e apresentando a resposta final (4): o irmão mais novo tem 10 anos e o irmão mais velho, 20 anos.

2º modo: Dado o exemplo anterior, pode-se montar a tabela do seguinte modo:

Irmão	Idade dos irmãos
Irmão mais novo	x
Irmão mais velho	30 − x (soma das idades é 30)

Equacionando o problema (1):

No enunciado, tem-se que:

$30 - x = x + 10$

A idade do mais velho excede a do mais novo em 10 anos:

Resolvendo a equação (2):

$x + x = 30 - 10$

$2x = 20$

$$x = \frac{20}{2}$$

$x = 10$

Analisando o resultado encontrado (3) e apresentando a resposta final (4): o irmão mais novo tem 10 anos e o irmão mais velho, 20 anos.

3º modo: O mesmo problema resolvido utilizando-se duas incógnitas.

Irmão	Idade dos irmãos
Irmão mais novo	x
Irmão mais velho	y

Equacionando o problema (1):

A soma das idades é 30:

$x + y = 30$

A idade do mais velho excede a do mais novo em 10 anos:

$y = x + 10$

Resolvendo a equação (2):

Substituindo a 2ª equação na 1ª:

$x + x + 10 = 30$

$2x = 20$

$$x = \frac{20}{2}$$

$x = 10$

Substituindo o resultado na 2ª equação:

$y = 10 + 10$

$y = 20$

Analisando o resultado encontrado (3) e apresentando a resposta final (4): o irmão mais novo tem 10 anos e o irmão mais velho, 20 anos.

EQUAÇÕES

Definição

Uma sentença matemática aberta tem uma ou mais variáveis.

Raiz de uma equação: valor que, substituído, torna a igualdade verdadeira.

Equações equivalentes: apresentam as mesmas raízes.

Equação do 1º grau

Definição

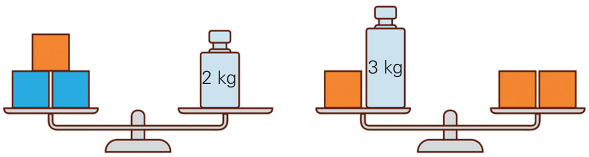
Denomina-se equação do 1º grau em $\mathbb{R}$, na incógnita **x**, toda equação que pode ser escrita na forma $ax + b = 0$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Resolução

Para resolver uma equação do 1º grau em $\mathbb{R}$, basta isolar a incógnita **x**, resultando em $x = -\frac{b}{a}$.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unesp – Três cubos laranjas idênticos e três cubos azuis idênticos estão equilibrados em duas balanças de pratos, também idênticas, conforme indicam as figuras.



A massa de um cubo laranja supera a de um cubo azul em exato

a) 1,3 kg
b) 1,5 kg
c) 1,2 kg
d) 1,4 kg
e) 1,6 kg

Se *a* for a massa do cubo azul e ℓ a do cubo laranja, temos que
$\ell + 2a = 2 \to \ell = 2 - 2a$ e $a + 3 = 2\ell$
Substituindo a primeira equação na segunda
$a + 3 = 2(2 - 2a) = 4 - 4a \to 5a = 1 \to a = 0{,}2$ kg
Portanto, $\ell = 1{,}6$ kg e, então, $\ell - a = 1{,}4$ kg

2. IFSC – Considere a equação $\frac{3x}{4} = 2x + 5$, e assinale a alternativa CORRETA.

a) É uma função do primeiro grau; sua solução é $x = -1$ e seu conjunto solução é $S = \{-1\}$.
b) É uma equação racional; sua solução é $x = -4$ e seu conjunto solução é $S = \{-4\}$.
c) É uma equação do primeiro grau; sua solução é $x = +4$ e seu conjunto solução é $S = \varnothing$.
d) É uma equação do segundo grau; sua solução é $x = -4$ e seu conjunto solução é $S = \{-4\}$.
e) É uma equação do primeiro grau; sua solução é $x = -4$ e seu conjunto solução é $S = \{-4\}$.

Temos que $\frac{3x}{4} = 2x + 5 \to 3x = 8x + 20 \to -5x = 20 \to x = -4$.
É uma equação do 1º grau. Sua solução é $x = -4$, e seu conjunto solução é $S = \{-4\}$.

3. IFPE C5-H21

Um pai percebeu que a soma da sua idade com a de seu filho totalizava 52 anos. Sabendo que a idade do pai é 12 vezes a idade do filho, calcule quantos anos o pai é mais velho que o filho.

a) 36 anos
b) 40 anos
c) 34 anos
d) 44 anos
e) 24 anos

Admitindo que a idade do filho é x anos, temos que a idade do pai é 12x.
Logo, $12x + x = 52 \to 13x = 52 \to x = 4$.
Portanto, a diferença entre as idades será:
$12 - x = 11x = 11 \cdot 4 = 44$

4. ESPM – Uma senhora foi ao shopping, gastou a metade do dinheiro que tinha na carteira e pagou R$ 10,00 de estacionamento. Ao voltar para casa parou numa livraria e comprou um livro que custou a quinta parte do que lhe havia sobrado, ficando com R$ 88,00.

Se ela tivesse ido apenas à livraria e comprado o livro, lhe teria restado:

a) R$ 218,00
b) R$ 186,00
c) R$ 154,00
d) R$ 230,00
e) R$ 120,00

Seja x a quantia de que a senhora dispunha ao sair de casa; sabendo que a quantia que restou após as despesas é igual a R$ 88,00, temos:
$\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{x}{2} - 10\right) = 88 \to \frac{2x - 40}{5} = 88 \to 2x - 40 = 440 \to 2x = 480 \to x = 240$, ou seja, R$ 240,00.
Portanto, como o livro custa $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{240}{2} - 10\right) = \frac{1}{5} \cdot (120 - 10) = \frac{1}{5} \cdot 110 = \frac{110}{5} = 22$, ou seja, R$ 22,00, se ela tivesse ido apenas à livraria e comprado o livro, teria restado $240 - 22 = 218$, ou, R$ 218,00.

5. UEFS – Uma herança de 80 milhões de reais deveria ser repartida pelo patriarca entre os herdeiros da família, constituída por sua filha, que estava grávida, e a prole resultante dessa gravidez, de modo que cada criança nascida receberia o dobro do que caberia à mãe, se fosse do sexo masculino, e o triplo do que caberia à mãe, se fosse do sexo feminino. Nasceram trigêmeos, sendo dois meninos e uma menina.

Nessas condições, pode-se afirmar que, pela divisão da herança, em milhões, entre mãe, cada menino e a menina, couberam, respectivamente,

a) 15, 15 e 35
b) 15, 20 e 25
c) 10, 20 e 30
d) 5, 25 e 25
e) 5, 30 e 15

Considerando que o valor que caberia à mãe seria x, podemos escrever que:
- Valor que caberia a cada menino: 2x.
- Valor que caberia a cada menina: 3x.

Podemos, então, escrever a seguinte equação:
$x + 2x + 2x + 3x = 80 \rightarrow 8x = 10 \rightarrow x = 10$
Portanto, a mãe recebeu 10 milhões, cada menino recebeu 20 milhões e a menina, 30 milhões.

6. Unifesp – Raquel imprimiu um número x de fotografias ao custo unitário de 54 centavos. Cada foto foi vendida ao preço de 75 centavos, sobrando, no final do período de vendas, y fotografias sem vender, o que resultou em um prejuízo de 12 reais em relação ao custo total das impressões.

a) Calcule quantas fotografias foram impressas, para o caso em que y = 100.
b) Determine a expressão de y em função de x para a situação descrita no enunciado.

Custo por impressão: 0,54x
Preço de venda: 0,75
Fotos vendidas: x − y
$0{,}75 \cdot (x - y) - 0{,}54x = -12$
a) Calculando:
Vendas – Custos = Lucro/Prejuízo
$0{,}75 \cdot (x - y) - 0{,}54x = -12$
$0{,}75 \cdot (x - 100) - 0{,}54x = -12$
$0{,}75x - 75 - 0{,}54x = -12 \rightarrow 0{,}21x = 63 \rightarrow x = 300$
b) Isolando y:
Vendas – Custos = Lucro/Prejuízo
$0{,}75 \cdot (x - y) - 0{,}54x = -12$
$0{,}75x - 0{,}75y - 0{,}54x = -12$
$0{,}21x - 75y = -12$
$$y = \frac{-0{,}21x - 12}{-0{,}75} \rightarrow y = 0{,}28x + 16$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Sistema Dom Bosco – Resolvendo, na incógnita x, a equação $m(x - 2) + 5(3 - 2x) = 2(1 + x + 3m)$, obtemos:

a) $x = \dfrac{8m - 13}{m - 12};\ m \neq 12$

b) $x = \dfrac{6m + 4}{2m - 5};\ m \neq \dfrac{5}{2}$

c) $x = \dfrac{2m - 5}{m + 10};\ m \neq -10$

d) $x = \dfrac{m + 7}{6m + 2};\ m \neq -\dfrac{1}{3}$

e) $x = \dfrac{3m + 15}{m - 3};\ m \neq 3.$

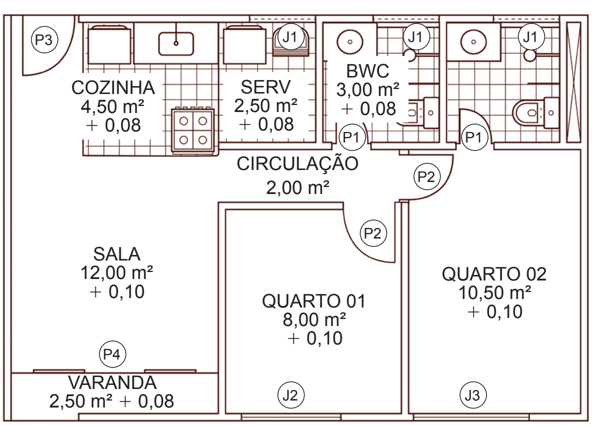
8. Albert Einstein – Adriana e Beatriz precisam produzir 240 peças. Juntas elas levarão um tempo T, em horas, para produzir essas peças. Se Adriana trabalhar sozinha, ela levará (T + 4h) para produzir as peças. Beatriz, sozinha, levará (T + 9h) para realizar o serviço. Supondo que cada uma delas trabalhe em ritmo constante, o número de peças que Adriana produz a mais do que Beatriz, a cada hora, é igual a

a) 6
b) 8
c) 9
d) 10

9. IFPE – Na turma do primeiro período do curso de Computação Gráfica do IFPE – Olinda há 36 pessoas. O número de meninos dessa turma é o triplo do número de meninas. Calcule o número de meninas dessa turma.

10. Uema – Para responder à questão, leia o texto e analise a planta baixa do apartamento descrito abaixo.

Um casal que acabou de receber seu apartamento planeja fazer pequenas modificações no piso. Após analisar a planta baixa, decidiu usar apenas dois tipos de azulejo. No primeiro orçamento, sala, varanda, quartos e circulação foram cotados com o azulejo tipo 01; cozinha, área de serviço e banheiros, com o azulejo tipo 02. No segundo orçamento, o azulejo tipo 01 seria usado para sala, circulação, cozinha e área de serviço; o azulejo tipo 02, aplicado somente aos banheiros. Os dois orçamentos tiveram valores totais de R\$ 1 354,00 e R\$ 780,00, respectivamente.



Analisando os dados, os valores do metro quadrado, em reais, dos dois tipos de azulejo incluídos nos dois orçamentos são, respectivamente, de

a) R\$ 21,00 e R\$ 27,00
b) R\$ 25,84 e R\$ 39,53
c) R\$ 30,00 e R\$ 25,00
d) R\$ 32,00 e R\$ 18,00
e) R\$ 36,17 e R\$ 6,75

11. UTFPR – A raiz da equação $x - 3(x - 1) = \frac{x}{3} + 2$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$
b) $-\frac{3}{5}$
c) $\frac{1}{7}$
d) $-\frac{3}{2}$
e) $\frac{3}{7}$

12. Unesp – Uma imobiliária exige dos novos locatários de imóveis o pagamento, ao final do primeiro mês no imóvel, de uma taxa, junto com a primeira mensalidade de aluguel. Rafael alugou um imóvel nessa imobiliária e pagou R\$ 900,00 ao final do primeiro mês. No período de um ano de ocupação do imóvel, ele contabilizou gastos totais de R\$ 6.950,00 com a locação do imóvel.

Na situação descrita, a taxa paga foi de

a) R\$ 450,00
b) R\$ 250,00
c) R\$ 300,00
d) R\$ 350,00
e) R\$ 550,00

13. UTFPR (adaptado) – Na equação irracional $\sqrt{9x - 14} = 2$, calcule x.

14. Enem – Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes.

Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1 500 telhas ou 1 200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos
b) 360 tijolos
c) 400 tijolos
d) 480 tijolos
e) 600 tijolos

15. CFTMG – Ao entrar na sala de aula, um aluno perguntou ao seu professor de Matemática que horas eram. O professor então respondeu: desde que começou este dia, as horas que já se passaram excedem as que faltam transcorrer em 3 horas e 16 minutos.

Assim, a hora em que o aluno fez a pergunta ao professor é

a) 12h36 min
b) 13h38 min
c) 14h38 min
d) 15h16 min

16. FGV-RJ – Bruno e Carlos são irmãos e possuem juntos 78 moedas de 1 real. Bruno, que possuía mais moedas, deu a Carlos o dobro do número de moedas que Carlos possuía. Nesse momento, Carlos ficou com mais moedas que o irmão e deu a Bruno 10 moedas. No final dessas duas transações, Bruno ficou com duas moedas a mais que Carlos.

Determine quantas moedas cada um tinha inicialmente.

17. Sistema Dom Bosco – Sobre as raízes da equação $2x + \frac{6}{x-3} = 6 + \frac{6}{x-3}$, podemos afirmar que:

a) são todas positivas.
b) são negativas.
c) possuem sinais contrários.
d) não existem.
e) são nulas.

18. Enem C5-H21

Em uma cantina, o sucesso de venda no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com $\frac{2}{3}$ de polpa de morango e $\frac{1}{3}$ de polpa de acerola.

Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R$ 18,00 e R$ 14,70 a de acerola, porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R$ 15,30.

Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução no preço da embalagem da polpa de morango.

A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de

a) R$ 1,20
b) R$ 0,90
c) R$ 0,60
d) R$ 0,40
e) R$ 0,30

19. Enem C5-H21

Para incentivar a reciclagem e evitar lixo espalhado durante as festas de final de ano, a prefeitura de uma cidade fez uma campanha com sorteio de prêmios. Para participar do sorteio, era necessário entregar cinco latinhas de alumínio ou três garrafas de vidro vazias para ter direito a um cupom. Um grupo de estudantes de uma escola trocou suas latinhas e garrafas de vidro e, com isso, adquiriram dez cupons; outro grupo trocou o triplo das garrafas e a mesma quantia de latinhas do primeiro grupo, conseguindo vinte cupons. Quantas garrafas de vidro e quantas latinhas, respectivamente, o segundo grupo trocou?

a) 5 e 5
b) 15 e 5
c) 15 e 25
d) 45 e 25
e) 45 e 75

20. Enem C5-H21

Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R$ 10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R$ 6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada. A quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era

a) R$ 166,00
b) R$ 156,00
c) R$ 84,00
d) R$ 46,00
e) R$ 24,00

8

EQUAÇÕES DO 2º GRAU, REDUTÍVEIS E IRRACIONAIS

- Equações do 2º grau
- Equações irracionais

HABILIDADES

- Reconhecer equações de 2º grau.
- Resolver equações de 2º grau.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

Equações do 2º grau

Toda equação do 2º grau pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b, e $c \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$.

Exemplo:

A equação $2x^2 + x - 1 = 0$ é do 2º grau. Comparando-a com a forma-padrão $ax^2 + bx + c = 0$, temos que $a = 2$, $b = 1$ e $c = -1$.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, diz-se que a equação do 2º grau é **completa**, ou seja, tem a forma-padrão $ax^2 + bx + c = 0$. No entanto, se $b = 0$ ou $c = 0$ ou $b = c = 0$, então ela é **incompleta**.

Equações incompletas do 2º grau

Há três tipos de equações incompletas do 2º grau:

1. $ax^2 = 0$ ($b = c = 0$, resolução direta, $x = 0$);
2. $ax^2 + c = 0$ ($b = 0$, resolução rápida, isolar o x);
3. $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0$, resolução direta, fatoração).

Vejamos cada caso a seguir.

1º caso: ($b = c = 0$)

$ax^2 = 0$ ($a \neq 0$)

$x^2 = \frac{0}{a}$

$x^2 = 0$

$x = 0$

$S = \{0, 0\}$

Exemplo:

Resolver em $\mathbb{R}$ a equação:

$5x^2 = 0$

$x^2 = \frac{0}{5}$

$x^2 = 0$

$x = 0$

$S = \{0, 0\}$

2º caso: ($b = 0$)

$ax^2 = -c$ ($a \neq c$)

$x^2 = \frac{-c}{a}$

$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

$S = \left\{\sqrt{\frac{-c}{a}}, -\sqrt{\frac{-c}{a}}\right\}$

Exemplo:

Resolver em $\mathbb{R}$ a equação:

$x^2 - 25 = 0$

$x^2 = 25$

$x = \pm\sqrt{25}$ (O símbolo $\pm$ é exigência da equação do 2º grau, e não da raiz quadrada.)

$x = \pm 5$ (Leia-se x igual a mais ou menos cinco.)

A igualdade anterior apresenta como soluções $x = 5$ ou $x = -5$.

$S = \{5, -5\}$

3º caso: ($c = 0$)

$x \cdot (ax + b) = 0$

$x = 0$ ou $ax + b = 0$

$x = 0$ ou $x = \frac{-b}{a}$

$S = \left\{0, \frac{-b}{a}\right\}$

Exemplo:

Resolver em $\mathbb{R}$ a equação:

$x^2 - \sqrt{2} \cdot x = 0$ (x é um fator comum)

$x \cdot (x - \sqrt{2}) = 0$ (Multiplicação de números reais igual a zero significa que pelo menos um dos fatores é igual a zero.)

$x = 0$ ou $x - \sqrt{2} = 0$

$x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$

$S = \{0, \sqrt{2}\}$

Equações completas do 2º grau

Apresentam vários métodos de solução. Os mais usuais são:

- Obter um trinômio quadrado perfeito.
- Fórmula resolvente (Bhaskara).
- Regra da soma e do produto.

Vamos analisar cada um desses três métodos.

1º caso: obter um trinômio quadrado perfeito.

Nesse método, é preciso deslocar **c** para o outro lado da igualdade; em seguida, deve-se somar um número conveniente nos dois membros da igualdade para que o trinômio que surgir no membro da esquerda seja trinômio quadrado perfeito.

Exemplo:

Encontrar a solução de $x^2 - 4x - 7 = 0$.

$x^2 - 4x - 7 = 0$

$x^2 - 4x = 7$

$x^2 - 4x + 4 = 7 + 4$

$(x - 2)^2 = 11$

$(x - 2) = \sqrt{11}$ ou $(x - 2) = -\sqrt{11}$

$x = 2 + \sqrt{11}$ ou $x = 2 - \sqrt{11}$

$S = \{2 + \sqrt{11}, 2 - \sqrt{11}\}$

2º caso: fórmula resolvente ou fórmula de Bhaskara.

Dada a equação do 2º grau na forma genérica ($ax^2 + bx + c = 0$), considere os passos matemáticos.

$ax^2 + bx + c = 0$

Multiplicando dois membros da equação por **4a**:

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

Somando **−4ac** aos dois membros da equação:

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Adicionando-se b^2 a cada um dos membros da equação:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

Trinômio quadrado perfeito do primeiro membro:

$(2ax)^2 + 2(ax)b + b^2 = b^2 - 4ac$

Observe que $(2ax + b)^2 = (2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2$ (trinômio quadrado perfeito).

Substituindo:

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

O termo $b^2 - 4ac$ é denominado **discriminante** e geralmente é representado pela letra grega Δ (delta).

$(2ax + b)^2 = \Delta$

$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$

$2ax = -b \pm\sqrt{\Delta}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dada a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, podem-se encontrar os valores de x por meio da fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Ela costuma ser designada por fórmula resolutiva de Bhaskara.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. PUC-Rio – O número de soluções da equação $x = \sqrt{6 - x}$, com $x > 0$, é igual a:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Resolução

Temos que

$x = \sqrt{(6 - x)}$

$x^2 = \left(\sqrt{(6 - x)}\right)^2$

$x^2 = 6 - x$

$x^2 + x - 6 = 0$

Então, $a = 1$, $b = 1$ e $c = -6$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2 \cdot 1}$$

$x = \frac{4}{2} = 2$ ou $x = \frac{-6}{2} = -3$ (não convém, pois $x > 0$)

$S = \{2\}$

2. Sistema Dom Bosco – Resolva em $\mathbb{R}$ a equação: $x^2 - 4x + 4 = 0$

Resolução

$x^2 - 4x + 4 = 0$

Então $a = 1$, $b = -4$ e $c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$x = 2$

$S = \{2\}$

3. Sistema Dom Bosco – Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Resolução

$x^2 - 2x + 2 = 0$

Então, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = -4 \cdot 1 - 2 = -4$

$\Delta = -4$

Como o valor de Δ é negativo, temos que não existe solução para essa equação em $\mathbb{R}$. Portanto, $S = \{\varnothing\}$.

De maneira geral, em uma equação do 2º grau, pode-se dizer que:

$\Delta > 0 \leftrightarrow$ há duas raízes reais e distintas;
$\Delta = 0 \leftrightarrow$ há duas raízes reais e iguais;
$\Delta < 0 \leftrightarrow$ não há raiz real.

3º caso: regra da soma e do produto (ou relações de Girard)

Considere a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, $c \neq 0$.

Pela fórmula resolutiva, tem-se:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Indicando a soma das raízes por **S** e o produto por **P**:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

$$S = \frac{-b}{a}$$

$$P = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2q}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$P = \left(\frac{b^2-\Delta}{4a^2}\right) = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$P = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$P = \frac{c}{a}$$

Portanto, podemos encontrar as raízes de uma equação do 2º grau utilizando apenas as relações da soma (S) e do produto (P).

Exemplo:

Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Temos que $a = 1$, $b = 2$ e $c = -3$.

Logo, $S = \frac{-b}{a} = -2$ e $P = \frac{c}{a} = -3$.

Os números cuja soma é igual a -2 e o produto é igual a -3 são 1 e -3.

Portanto, $S = \{1, -3\}$.

Observação:

Podemos também escrever uma equação do 2º grau sabendo suas raízes. No exemplo anterior, temos as raízes 1 e -3. Com isso, a soma das raízes é igual a -2 e o produto, igual a -3.

Assim, como $S = \frac{-b}{a} = -2$ e $P = \frac{c}{a} = -3$, temos que $b = 2ac$ e $c = -3a$. Como $a \neq 0$, podemos substituir pelo valor 1. Então, $a = 1$, $b = 2$ e $c = -3$. Portanto, a equação fica $x^2 + 2b - 3 = 0$.

EQUAÇÕES REDUTÍVEIS AO 2º GRAU

Toda equação que pode ser transformada em equação do 2º grau, com o intuito de facilitar sua resolução, é chamada de **equação redutível ao 2º grau**.

Um exemplo clássico de equações redutíveis ao 2º grau são as equações biquadradas, descritas a seguir.

Equações biquadradas

Há equações que, mesmo não sendo do 2º grau, podem ser resolvidas com o auxílio desse último tipo. Nessas situações, é preciso se valer de mudanças nas variáveis da equação, de tal forma que ela se transforme, temporariamente, em uma equação do 2º grau, como no caso a seguir.

Exemplo:

Resolva a equação $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Note que essa é uma equação de 4º grau, porém com uma característica particular: apresenta apenas os termos de **grau par**.

Se substituirmos na equação dada $x^2 = y$:

$y^2 - 3x^2 - 4 = 0$

$y_1 = -1$ e $y_2 = 4$

Como $y = x^2$:

$x^2 = -1$ (não existe $x \in \mathbb{R}$)

ou $x^2 = 4 \rightarrow x = -2$ ou $x = 2$.

$S = \{2, -2\}$

EQUAÇÕES IRRACIONAIS

São aquelas em que há incógnita em um ou mais radicais.

As raízes podem ter qualquer índice. Mas será dada ênfase nas que apresentarem raízes quadradas.

Não existe fórmula para resolver essas equações. Porém, há um processo de resolução prático e seguro, que conduz a equações cuja resolução já foi apresentada anteriormente.

São exemplos de equações irracionais:

- $\sqrt[3]{x+2} = x - 2$
- $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = 5$

Um método prático para resolução dessas equações pode ser apresentado em quatro passos:

1º Isolar o radical em um dos membros da equação. Se existir mais de um radical, escolher um deles para colocar à parte.

2º Elevar ao quadrado os dois membros da equação.

3º Resolver a equação. Se na primeira vez em que a equação for elevada ao quadrado continuar a existir a raiz quadrada, ela deve ser isolada, e a equação é novamente elevada ao quadrado tantas vezes quanto necessário, até que não exista mais nenhum radical.

4º Caso haja raiz de índice (n) par, verificar se os valores encontrados para a incógnita satisfazem às condições de existência do radicando e da raiz n-ésima.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. UTFPR – Considerando que o valor da raiz positiva da equação $x^4 + 16 = 8x^2$ é numericamente igual a $\frac{1}{21}$ da minha idade, assinale quantos anos tenho.

a) 21
b) 41
c) 42
d) 81
e) 82

Resolução

$x^4 + 16 = 8x^2 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

Substituindo $x^2 = y$, temos:

$y^2 - 8y + 16 = 0$

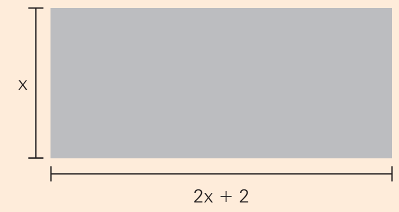
$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$y = x^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Como $x > 0$, pois x representa idade, temos que $x = 2$.

Então, como $2 = \frac{\text{idade}}{21} \rightarrow \text{idade} = 42$.

2. Sistema Dom Bosco – Calcule o valor de x, indicado a seguir, sabendo que a área do retângulo é 18 adicionados ao dobro de x.



Resolução

$x \cdot (2x + 2) = 18 + 2x$

$2x^2 + 2x = 18 + 2x$

$2x^2 = 18$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3$

Como x é uma medida de comprimento, $x > 0$.
Portanto, $x = 3$.

ROTEIRO DE AULA

EQUAÇÕES

Equações do 2º grau

Definição

- Toda equação que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + x = 0$, com a, b e c $\in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$.
- Fórmula de Bhaskara: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Resolução

Regra da soma (S) e do produto (P). Dada uma equação do 2º grau com raízes x_1 e x_2, tem-se:

- $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
- $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Equações redutíveis

Equações biquadradas

São equações de 4º grau, porém com característica particular: apresentam apenas os termos de grau par. Para resolvê-las, é preciso se valer de mudanças de variáveis da equação, de tal forma que ela se transforme em uma equação do 2º grau.

Equações irracionais

Há incógnita em um ou mais radicais. Para resolvê-las, não existe fórmula, porém pode-se elevar a equação a uma potência, a fim de eliminar todos os radicais. Depois é preciso verificar se as raízes encontradas tornam a equação original verdadeira.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Sistema Dom Bosco – A raiz positiva da equação $\frac{2x}{x+3}+\frac{1}{x-3}=\frac{5}{x^2-9}$ é:

a) $\frac{-5+\sqrt{41}}{4}$

b) $\frac{-5+\sqrt{41}}{2}$

c) $\frac{5+\sqrt{41}}{4}$

d) $\frac{5+\sqrt{41}}{2}$

e) $5+\sqrt{41}$

Temos,
$\frac{2x}{x+3}+\frac{1}{x-3}=\frac{5}{x^2-9} \rightarrow \frac{2x}{x+3}+\frac{1}{x-3}=\frac{5}{(x+3)\cdot(x-3)} \rightarrow$
$\rightarrow 2x(x-3)+(x+3)=5 \rightarrow 2x^2-6x+x+3=5 \rightarrow$
$\rightarrow 2x^2-5x-2=0$
Utilizando Bhaskara:
$x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{4}$.
Logo, a raiz positiva é $\frac{5+\sqrt{41}}{4}$.

2. Ifal – Determine o valor de k para a equação $x^2+kx+6=0$, tendo como raízes os valores 2 e 3.

a) 0
b) 5
c) 6
d) −5
e) −6

Seja S a soma das raízes, temos que $S=-\frac{k}{1} \rightarrow$
$\rightarrow S=-k \rightarrow -k=2+3 \rightarrow -k=5 \rightarrow k=-5$

3. UEL (adaptado) C5-H21

João é dono de um *foodtruck*, uma espécie de lanchonete estruturada em uma carroceria de um veículo móvel (caminhão) e utilizada para preparar e vender lanches. Ele quer enfeitar uma das faces da carroceria de seu caminhão, cujo formato é retangular, contornando-a com fita de led.

Considerando que João precisa de exatamente 700 cm de fita de led e que a área retangular limitada pela fita de led deve ser igual a 30 000 cm², determine as dimensões desse retângulo.

a) 150 cm e 200 cm
b) 150 cm e 210 cm
c) 160 cm e 200 cm
d) 160 cm e 210 cm
e) 170 cm e 200 cm

Sendo x e y as dimensões do retângulo:
$2\cdot(x+y)=700$
$x\cdot y=30\,000$
$x+y=350 \rightarrow x=350-y$
$(350-y)\cdot y=30\,000 \rightarrow y^2-350y+30\,000=0$
Utilizando a soma (S) e o produto (P) das raízes, temos S = 350 e P = 30 000.
Daí vem y = 200 ou y = 150. Então:
$y=150 \rightarrow x=200$
ou
$y=200 \rightarrow x=150$
Portanto, as dimensões do retângulo são 150 e 200 centímetros.

4. IFCE – A soma de dois números reais vale 1 e o produto dos mesmos vale −1. Então esses dois números são, respectivamente,

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

b) $\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

d) 2, 1

e) 1, –1

Sejam x e 1 − x os números reais do enunciado; o produto entre eles é:
$x\cdot(1-x)=-1 \rightarrow x-x^2=-1 \rightarrow x^2-x-1=0$.
Resolvendo a equação por Bhaskara:
$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Logo,
$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \rightarrow 1-x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
ou
$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow 1-x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

5. Ifal – Determine o valor de k na equação $x^2 - 12x + k = 0$, de modo que uma raiz seja o dobro da outra:

a) 12
b) 18
c) 24
d) 28
e) 32

A soma (S) das raízes é dada por:

$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-12)}{1} = 12$

Como uma raiz é o dobro da outra, temos que: $x_1 = m$ e $x_2 = 2m$.

Então:

$x_1 + x_2 = 12$

$m + 2m = 12 \rightarrow 3m = 12 \rightarrow m = \frac{12}{3} \rightarrow m = 4$

Logo,

$x_1 = m = 4$ e $x_2 = 2m = 2 \cdot 4 = 8$

Com relação ao produto (P), temos:

$P = \frac{c}{a} = k \rightarrow k = x_1 \rightarrow x_2 = 4 \cdot 8 = 32.$

6. Fuvest – Um empreiteiro contratou o serviço de um grupo de trabalhadores pelo valor de R$ 10.800,00 a serem igualmente divididos entre eles. Como três desistiram do trabalho, o valor contratado foi dividido igualmente entre os demais. Assim, o empreiteiro pagou, a cada um dos trabalhadores que realizaram o serviço, R$ 600,00 além do combinado no acordo original.

a) Quantos trabalhadores realizaram o serviço?

b) Quanto recebeu cada um deles?

a) Seja n o número de trabalhadores; cada trabalhador deveria receber $\frac{10\,800}{n}$.

Cada trabalhador recebeu $\frac{10\,800}{n-3}$. Do enunciado, vem:

$\frac{10\,800}{n-3} - \frac{10\,800}{n} = 600 \rightarrow 10\,800n - 10\,800\,(n-3) = 600\,(n-3) \rightarrow$

$\rightarrow 600n^2 - 1\,800n + 10\,800 \cdot 3 = 0 \rightarrow n^2 - 3n + 54 = 0$

Utilizando a soma e o produto das raízes, temos: $n = 9$ ou $n = -6$.
Como n é natural, pois n é o número de trabalhadores: $n = 9$.

Portanto, o número de trabalhadores que realizaram o serviço foi de $9 - 3 = 6$.

b) Cada um deles recebeu $\frac{10\,800}{6} = 1\,800 \rightarrow$ R$ 1.800,00.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. IFSul (adaptado) – Um exemplo de equação biquadrada é a equação: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Para encontrarmos as suas raízes, é preciso transformá-las em uma equação do segundo grau, que pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara Akaria (matemático que viveu na Índia em meados do século XII).

Portanto, a soma das raízes da equação

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ é

a) 0
b) −10
c) 2
d) 9

8. UEL – Considere a fórmula do termo geral de uma sequência finita de números primos, apresentada a seguir, em que a_n representa o n-ésimo termo e corresponde a um número natural, tal que $1 \leq n \leq 40$.

$$a_n = n^2 - n + 41$$

A partir dessas informações, responda aos itens a seguir.

a) Determine o primeiro e o último número primo dessa sequência. Justifique sua resposta, apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

b) Qual a posição do número primo 251 nessa sequência? Justifique sua resposta, apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

9. IFSC – Considerando-se a equação $E = \left(\sqrt[2]{x^2 - 7x + 12} = 2\sqrt{3}\right)$, sendo $U = \mathbb{R}$, é CORRETO afirmar que o seu conjunto solução será:

a) $S = \{7\}$
b) $S = \{0, -7\}$
c) $S = \{0\}$
d) $S = \{0, 7\}$
e) $S = \{2, 3\}$

10. IFSC – Dada a equação quadrática $3x^2 + 9x - 120 = 0$, determine suas raízes.

Assinale a alternativa que contém a resposta CORRETA.

a) -16 e 10
b) -5 e 8
c) -8 e 5
d) -10 e 16
e) -9 e 15

11. UTFPR – O conjunto solução S da equação $\sqrt{x+3} = x - 3$ é:

a) $S = \{6\}$
b) $S = \{1, 6\}$
c) $S = \{3\}$
d) $S = \varnothing$
e) $S = \{4\}$

12. UFPR – Tripla pitagórica é uma sequência de três números inteiros positivos que satisfazem o famoso Teorema de Pitágoras. Em outras palavras, se a sequência (a, b, c) é uma tripla pitagórica, então o triângulo de lados a, b e c é um triângulo retângulo. Por exemplo, (3, 4, 5) e (5, 12, 13) são triplas pitagóricas.

a) Verifique se a sequência (20, 21, 29) é uma tripla pitagórica. Justifique sua resposta.

b) Justifique por que a sequência de números inteiros (n, n + 3, n + 5) não constitui uma tripla pitagórica para nenhum n inteiro positivo.

13. UEL – Leia o texto a seguir.

Por que não dividir um segmento unitário em duas partes iguais? A resposta é que, simplesmente, com a igualdade não existe diferença, e sem diferença não há universo perceptivo. O "número de ouro" é uma razão constante derivada de uma relação geométrica que os antigos chamavam de "áurea" ou de divisão perfeita, e os cristãos relacionaram este símbolo proporcional com o Filho de Deus.

Adaptado de: LAWLOR, R. *Mitos – Deuses – Mistérios – Geometria Sagrada*. Madrid: Edições del Prado, 1996. p. 46.

O número de ouro, denotado pela letra grega φ, é definido como a única raiz positiva da equação a seguir.

$$x^2 = x + 1$$

Com base no texto e na definição do número de ouro, atribua V (verdadeira) ou F (falsa) às afirmativas a seguir.

( ) $2\varphi = 1 + \sqrt{5}$

( ) O número de ouro φ pode ser expresso como um quociente de números inteiros não nulos.

( ) $\varphi^{-1} = \varphi - 1$

( ) φ não pode ser expresso através de uma equação, por ser derivado de uma relação geométrica.

Assinale a alternativa que contém, de cima para baixo, a sequência correta.

a) V, V, F, F
b) V, F, V, F
c) V, F, F, V
d) F, V, F, V
e) F, V, V, F

14. EPCAR – Considere, em $\mathbb{R}$, a equação $(m + 2)x^2 - 2mx + (m - 1) = 0$ na variável x, em que m é um número real diferente de -2. Analise as afirmativas abaixo e classifique-as em V (verdadeira) ou F (falsa).

( ) Para todo $m > 2$, a equação possui conjunto solução vazio.

( ) Existem dois valores reais de m para que a equação admita raízes iguais.

( ) Na equação, se $\Delta > 0$, então m só poderá assumir valores positivos.

A sequência correta é

a) V – V – V
b) F – V – F
c) F – F – V
d) V – F – F

15. IFPE – Um grupo de alunos do curso de mecânica decidiu comprar juntos um torno mecânico para montar uma oficina assim que se formassem. O valor de R$ 3.600,00 seria igualmente dividido por todos. Devido a alguns problemas financeiros, oito alunos que estavam no grupo desistiram, e a parte que cada um do grupo deveria pagar aumentou R$ 75,00.

Quantos alunos faziam parte do grupo inicialmente?

a) 20 alunos
b) 16 alunos
c) 18 alunos
d) 24 alunos
e) 12 alunos

16. PUC-Rio

a) Resolva a equação $x^2 - x - 2 = 0$, sabendo que $x \in \mathbb{R}$.

b) Resolva a equação $\sqrt{x^2 + 3x + 6} = 2x$, sabendo que $x \in \mathbb{R}$.

17. EPCAR – A equação $x = \sqrt{3x + a^2 + 3a}$, em que x é a incógnita e $a \in \mathbb{R}$, tal que $a < -3$, possui conjunto solução S, $S \in \mathbb{R}$.

Sobre S tem-se as seguintes proposições:

I. Possui exatamente dois elementos.
II. Não possui elemento menor que 2.
III. Possui elemento maior que 3.

Sobre as proposições acima, são verdadeiras

a) apenas I e II
b) apenas I e III
c) apenas II e III
d) I, II e III

ESTUDO PARA O ENEM

18. FGV-RJ C5-H21

Na resolução de um problema que recaía em uma equação do 2º grau, um aluno errou apenas o termo independente da equação e encontrou como raízes os números 2 e −14. Outro aluno, na resolução do mesmo problema, errou apenas o coeficiente do termo de primeiro grau e encontrou como raízes os números 2 e 16.

As raízes da equação correta eram:

a) −2 e −14
b) −4 e −8
c) −2 e 16
d) −2 e −16
e) 4 e 14

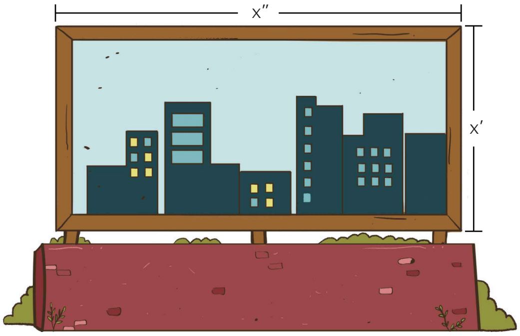
19. Acafe (adaptado) C5-H21

Uma biblioteca possui 300 livros, todos do mesmo tamanho. Um funcionário pretende dividi-los igualmente entre as prateleiras da loja. Sabendo que, se os livros forem igualmente divididos entre 3 prateleiras a menos, cada prateleira receberá 5 livros a mais do que o previsto inicialmente. Assim, o número de prateleiras para colocar todos os livros é:

a) Múltiplo de 4
b) Múltiplo de 3
c) Entre 10 e 12
d) Maior que 20
e) Menor que 20

20. IFSul (adaptado) C5-H21

As medidas do comprimento e da altura (em metros) do *outdoor* retangular representado na figura abaixo são exatamente as soluções da equação $x^2 - 10x + 21 = 0$.



Dessa forma, é correto afirmar que a área desse *outdoor* é

a) $10\ m^2$
b) $20\ m^2$
c) $21\ m^2$
d) $24\ m^2$
e) $28\ m^2$

9 INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE FUNÇÕES

- Noção intuitiva
- Definição
- Símbolo *f*(*x*)
- Representação de ponto
- Gráfico de uma função

HABILIDADES

- Determinar domínio, imagem e zeros de funções.
- Aplicar conhecimentos de funções em problemas.
- Construir modelos para analisar fenômenos.
- Analisar gráficos de funções.
- Transcrever da linguagem corrente para a linguagem simbólica e vice-versa.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências..

Funções – noção intuitiva

Considere uma correspondência específica entre dois conjuntos, **A** e **B**, com a seguinte característica: cada elemento do conjunto **A** tem um único elemento correspondente no conjunto **B**.

- Uma correspondência que satisfaz essas características denomina-se **função entre A e B**.

DEFINIÇÃO

Dados dois conjuntos **A** e **B** não vazios, denomina-se **função** uma correspondência especial, formalmente chamada de relação binária, entre os conjuntos **A** e **B**, nessa ordem, de tal maneira que todo elemento $x \in A$ tem em correspondência um único elemento $y \in B$, chamado **imagem** de **x**.

As seguintes denominações são importantes:

- conjunto **A**: **domínio** da função;
  conjunto **B**: **contradomínio** da função;
  subconjunto do contradomínio, formado por todas as imagens dos elementos do domínio: **conjunto imagem.**

Observação: a função pode ser representada de várias formas. As mais importantes são:

- **tabela:** em geral, representada com duas colunas; na primeira, inserem-se os elementos do domínio e, na segunda, as respectivas imagens.
- **pares ordenados:** a correspondência ocorre na forma do par ordenado (x, y), em que o primeiro elemento do par indica um elemento do domínio e o segundo, a respectiva imagem.
- **diagramas de flechas:** cada elemento do domínio emite uma única flecha para a respectiva imagem.
- **gráfico:** na representação de uma função no plano cartesiano, o eixo horizontal (eixo das abscissas) indica os elementos do domínio e, no eixo vertical (eixo das ordenadas), as respectivas imagens.
- **lei de correspondência:** sentença matemática que possibilita determinar a imagem dos elementos do domínio por meio de uma relação entre as variáveis x e y.

DIAGRAMA DE FLECHAS

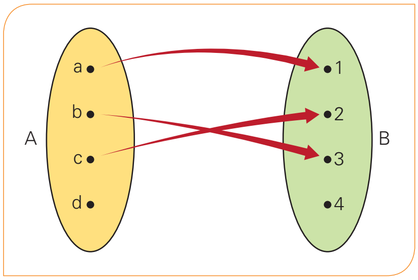
Num diagrama de flechas, são representados os conjuntos domínio e imagem, ligando os elementos por flechas.

Para isso, a relação deve satisfazer a seguinte condição para ser uma função:

> Cada elemento de **A** deve servir como ponto de partida de uma única flecha.

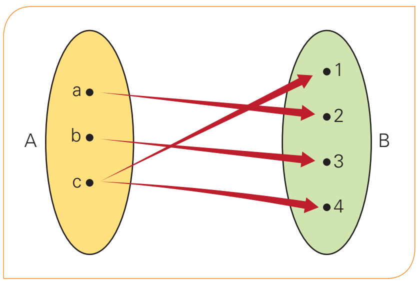
Exemplos:

1.



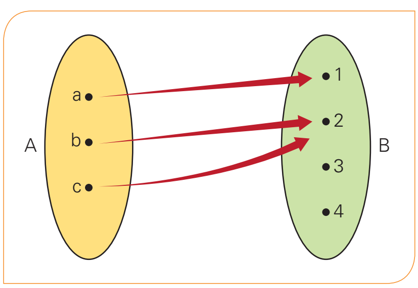
Não é função, pois existe um elemento d ∈ A que não tem flecha.

2.



Não é função, pois partem duas flechas do elemento c ∈ A.

3.



É uma função, pois satisfaz a condição enunciada.

- Domínio: A = {a, b, c}
- Contradomínio: B = {1, 2, 3, 4}
- Imagem = {1, 2}

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

O gráfico de uma função é uma união de todos os pontos, no plano cartesiano (x; y). O número de pontos do gráfico depende da quantidade de elementos do domínio da função.

O termo função foi aplicado primeiramente pelo matemático **Gottfried Leibniz** em uma de suas cartas datada de 1673, na qual ele descreve a declividade de uma curva em um ponto específico. Esse conceito surgiu com o desenvolvimento do cálculo, no século XVII.

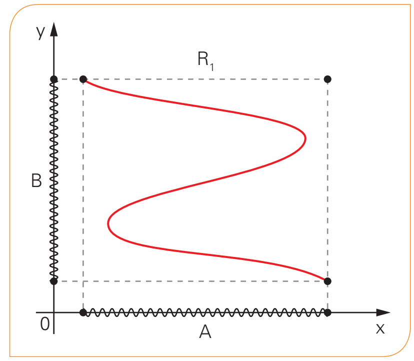
ANTONIO ABRIGNANI/ SHUTTERSTOCK

Gottfried Leibniz

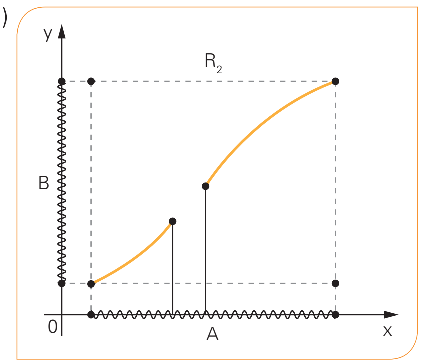
Análise do gráfico cartesiano

Observe os gráficos das relações binárias de A em B, que se apresentam a seguir.

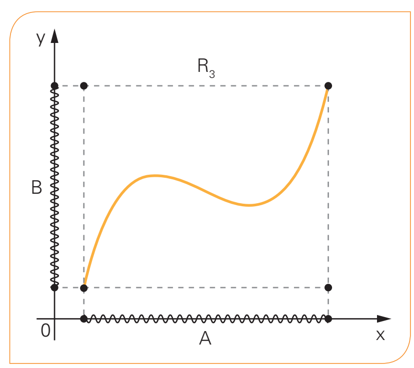
a)



b)



c)



Para ser uma função, todo elemento do domínio deve ter uma única imagem no contradomínio. Com base nesse procedimento, pode-se estabelecer a regra:

Toda reta vertical que passe pelo domínio da relação "corta" uma única vez o gráfico da relação.

Portanto, podemos avaliar os gráficos mostrados anteriormente:

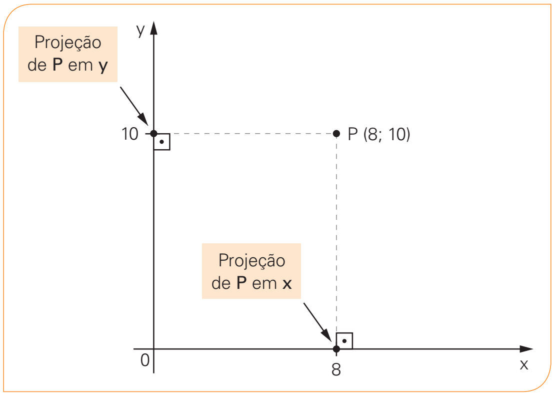
a) R_1 não é função
b) R_2 não é função
c) R_3 é função

DOMÍNIO E CONJUNTO IMAGEM DE UMA FUNÇÃO

Pode-se determinar o domínio ou conjunto imagem partindo-se do gráfico da função. Para encontrá-los, deve-se primeiro entender o significado de "projeção ortogonal de um ponto do gráfico", respectivamente nos eixos horizontal e vertical.

No exemplo a seguir:

1. O ponto do eixo **x**, no qual está representado o número 8, é a **projeção ortogonal** do ponto P (8; 10) no eixo **x**;
2. O ponto do eixo **y**, em que está representado o número 10, é a **projeção ortogonal** do ponto P (8; 10) no eixo **y**.

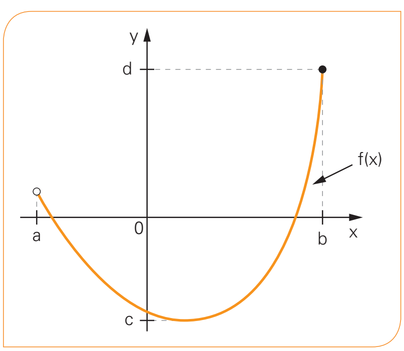


Observe que o número representado na projeção ortogonal de P no eixo **x** é o elemento do domínio igual a 8. Repare também que o número representado na projeção ortogonal de P no eixo y é a respectiva imagem.

O conjunto **domínio** da função é formado por todos os elementos do eixo **x** correspondentes à projeção do gráfico no eixo horizontal. O conjunto **imagem** da função é constituído de todos os elementos oriundos da projeção no gráfico no eixo vertical.

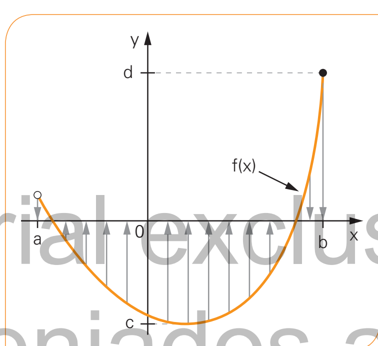
Exemplo:

Considere a função f(x) definida por A =]a; b] em $\mathbb{R}$.



Domínio

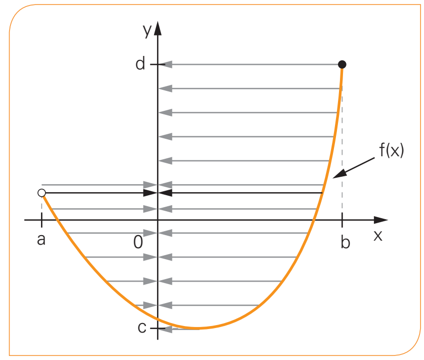
O domínio de uma função é a **projeção ortogonal** do gráfico da função no eixo **x**. Assim, D =]a; b] = A.



D =]a, b]

Conjunto imagem

O conjunto imagem de uma função é a **projeção ortogonal** do gráfico da função no eixo **y**. Assim, Im = [c, d].

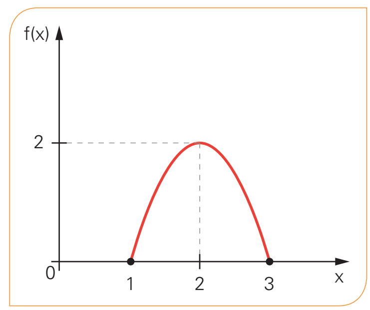


Im = [c, d]

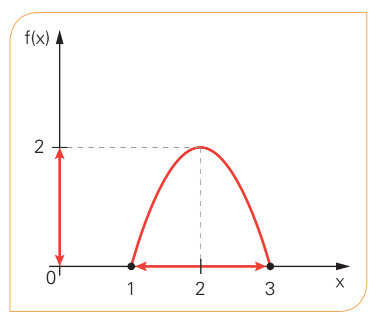
Observação: o contradomínio de uma função é representado por todo o eixo **y**.

Exemplo:

Considere o gráfico da função f: A → B.



Nele podemos obter o domínio e o conjunto imagem da função.



Observe que o intervalo [1; 3] é a projeção de todos os pontos do gráfico sobre o eixo **x,** e a projeção no eixo **y** é o intervalo [0; 2]. Desse modo, o domínio da função é D = [1; 3], e o conjunto imagem é Im = [0; 2].

SÍMBOLO F(X)

As funções podem ser representadas com símbolos, tais como f(x), g(x), h(x) etc. Considere que, no símbolo f(x), a letra *f* representa o nome da função.

No símbolo f(x), interpreta-se:

- leitura: "**f** de **x**";
- **f**: nome da função;
- **x**: variável que representa um elemento do domínio da função (letra que aparece entre parênteses);

- **f(x):** simboliza a imagem do elemento **x** do domínio.

Na notação f: A → B, com f(x) = 2x em que:

- **f:** nome da função;
- **A:** domínio da função;
- **B**: contradomínio.

Exemplo:

Considere uma função de domínio e contradomínio real, definida por f(x) = x + 1. Determine f(2019).

Observe que o domínio e o contradomínio são conjuntos dos reais.

A notação f(2019) indica que se deve encontrar a imagem de um elemento particular do domínio, nesse caso 2019. É preciso substituir, na relação fornecida, a variável **x** pelo elemento particular 2019.

$f(2019) = 2019 + 1$

$f(2019) = 2020$

Raiz (ou zero) da função

Um elemento **x** do domínio é dito **zero** ou **raiz** da função quando tem imagem igual a zero, ou seja, $f(x) = 0$.

Exemplo:

Número real 2 é raiz ou zero da função real definida por $f(x) = 2 - x$, pois $f(2) = 2 - 2 = 0$.

FUNÇÃO REAL

Função real é aquela em que domínio e contradomínio são subconjuntos não vazios dos números reais.

Função real e domínio

Para encontrar o mais amplo domínio de uma função real, deve-se estar atento às possibilidades das operações matemáticas, principalmente os seguintes problemas que podem ser encontrados:

1. Se houver variável no denominador de uma fração, este não pode ser zero.
2. Se houver variável no radicando de uma raiz de índice par, o radicando não pode ser negativo.

Exemplos:

1. Encontre o mais amplo domínio da função real definida por $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Resolução: O denominador da fração é $x - 1 \rightarrow x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$.

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

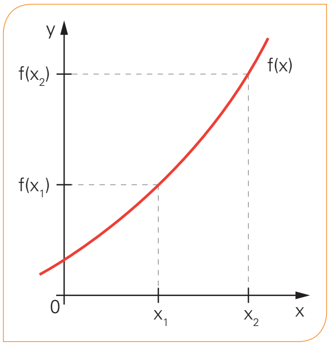
2. Encontre o mais amplo domínio da função real definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Resolução: O radicando da raiz é $x - 1 \rightarrow x - 1 \geqslant 0 \rightarrow x \geqslant 1$.

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

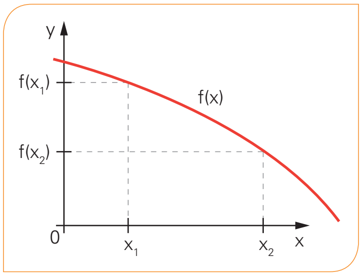
FUNÇÃO CRESCENTE, DECRESCENTE E CONSTANTE

Função crescente: num intervalo, f(x) é crescente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, com $x_1 < x_2$ tiver $f(x_1) < f(x_2)$.



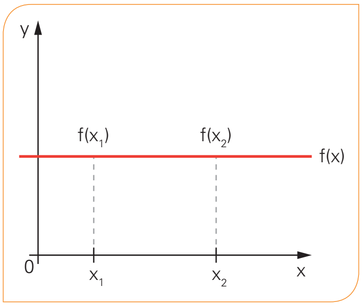
$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Função decrescente: num intervalo, f(x) é decrescente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, com $x_1 > x_2$ tiver $f(x_1) > f(x_2)$.



$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Função constante: num intervalo, f(x) é constante se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, tiver $f(x_1) = f(x_2)$



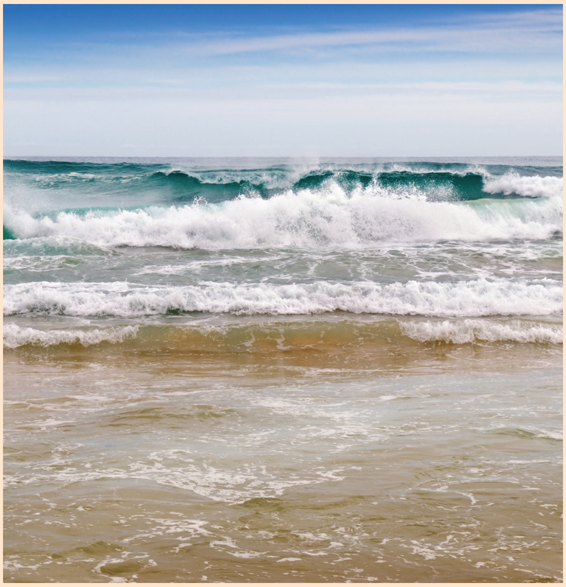
Um pesquisador, ao estudar uma cultura de bactérias, anota a quantidade de bactérias em análise a cada minuto, a partir do momento que se pode denominar tempo 0. Assim, diz-se que há correspondência entre o conjunto **A** (no caso, os valores do tempo) e o **B** (as respectivas quantidades de bactérias). A cada minuto de observação há uma, e somente uma, quantidade específica de bactérias. Tal correspondência pode ser denominada função entre o tempo, em minutos, e a quantidade de bactérias.

CASTALDOSTUDIO.COM/SHUTTERSTOCK

Uma cultura de bactérias em uma placa de petri.

Podemos cronometrar o tempo entre cada onda do mar e estudar uma relação entre o tempo que cada uma leva para chegar à praia e o tamanho da onda.

Essa relação pode ser denominada uma função entre o tempo de cada onda (domínio) e a altura de cada onda (imagem).



ALINAMD/SHUTTERSTOCK

Sequência de ondas do mar.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1. UPE – Na fabricação de 25 mesas, um empresário verificou que o custo total de material foi obtido por meio de uma taxa fixa de R$ 2 000,00, adicionada ao custo de produção que é de R$ 60,00 por unidade. Qual é o custo para fabricação dessas mesas?

a) R$ 1 500,00
b) R$ 2 900,00
c) R$ 3 500,00
d) R$ 4 200,00
e) R$ 4 550,00

Resolução:

Temos então que a lei dessa função será formada por uma parte fixa e outra variável.

Observe que:

$f(x) = 2000 + 60 \cdot x$

Em que f(x) é o custo da produção e x é o número de mesas produzidas.

Para o cálculo da produção de 25 mesas, temos que atribuir 25 ao valor de x.

Assim:

$f(25) = 2000 + 60 \cdot 25 = 2000 + 1500 = 3500$

ROTEIRO DE AULA

FUNÇÃO

Definição

- Uma função f: A → B é uma correspondência específica entre dois conjuntos, A e B.
- Todo elemento do conjunto A tem um único elemento correspondente no conjunto B.

Nomenclatura (f: A → B)

- Domínio da função: conjunto A
- Contradomínio da função: conjunto B
- Conjunto imagem: subconjunto do contradomínio, formado por todas as imagens dos elementos do domínio.

Representação

- Diagrama de flechas
- Conjunto formado por pares ordenados
- Plano cartesiano

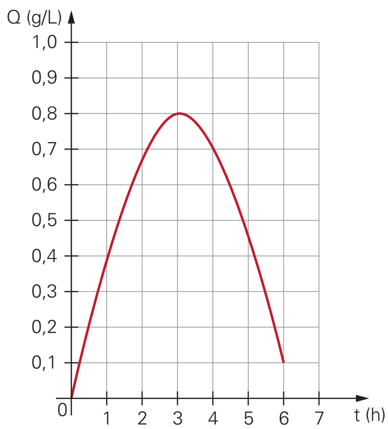
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Enem C5-H21

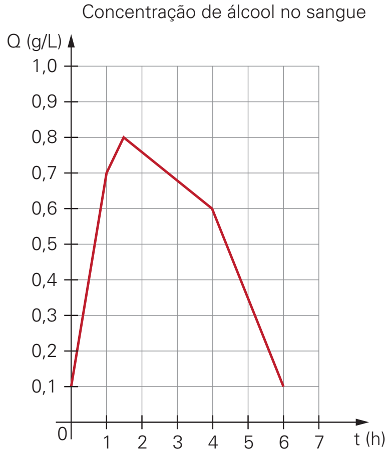
O Código de Trânsito de certo país estabelece penas para quem conduzir veículo automotor na via pública, estando com concentração de álcool no sangue igual ou superior a 0,6 grama por litro. Um pesquisador monitorou um indivíduo que ingeriu bebida alcoólica somente após o jantar. Exames realizados no sangue desse indivíduo mostraram que a concentração Q de álcool no sangue, dada em grama por litro, aumentou durante 1 hora e meia. Depois disso, começou a diminuir e atingiu a concentração permitida para dirigir, três horas após a ingestão de álcool.

Um gráfico que pode representar a relação entre o tempo após a ingestão e a concentração de álcool no sangue desse indivíduo é

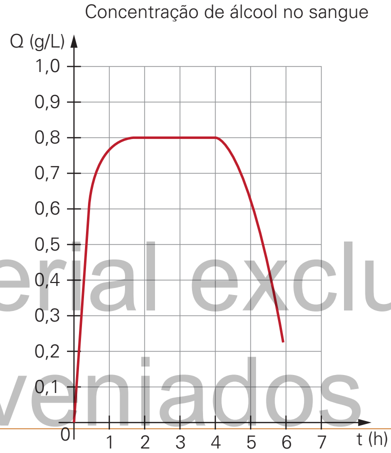
a) Concentração de álcool no sangue



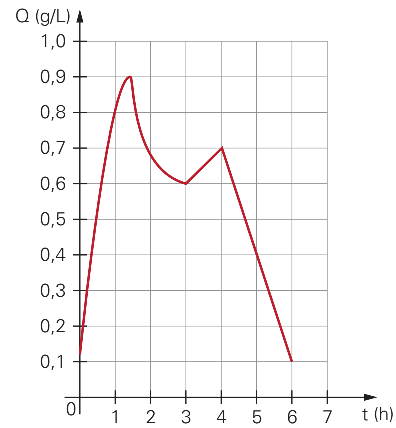
b) Concentração de álcool no sangue



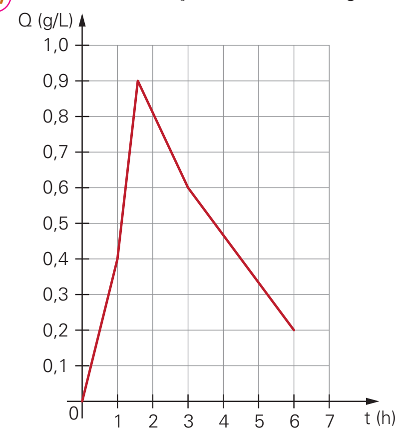
c) Concentração de álcool no sangue



d) Concentração de álcool no sangue



e) Concentração de álcool no sangue



Durante uma hora e meia houve um aumento na concentração de álcool no sangue. Logo, na primeira 1,5 hora a função é crescente. Depois de 1,5 hora, a função fica decrescente, atingindo 0,6 g/L quando $t = 3h$.

2. FAAP (adaptada) – Qual é a expressão p(x), sabendo que p(1) = 2 e p(0) = −1.

a) p(x) = x + 1

b) p(x) = 3x + 1

c) p(x) = 3x − 1

d) p(x) = 4x − 2

e) p(x) = 2x − 1

Analisando as alternativas da questão, temos p(1) = 2 em p(x) = x + 1; p(x) = 3x − 1 e p(x) = 4x − 2; temos p(0) = −1 em p(x) = 3x − 1 e p(x) = 2x − 1. Portanto, a única expressão p(x) que satisfaz as igualdades p(1) = 2 e p(0) = −1 é p(x) = 3x − 1.

3. UFU (adaptado) – Um estudante recorre a uma imobiliária na expectativa de alugar um apartamento. A imobiliária exige de seus locatários o pagamento de um depósito caução, dividido em três parcelas fixas e de iguais valores, a serem pagas junto com as mensalidades do aluguel nos três primeiros meses. Essas mensalidades são fixas e de iguais valores. O estudante desembolsará, em um ano de contrato, um total de R$ 8400,00, de maneira que o desembolso total, após o término do pagamento do depósito caução, será 80% superior àquele correspondente ao desembolso referente aos três primeiros meses.

Nas condições apresentadas, calcule o valor do depósito caução.

Chamamos de P a parcela dos 3 primeiros meses e X, o valor mensal do aluguel.

Logo, o estudante pagará P + X por mês nos 3 primeiros meses e X, nos 9 meses restantes.

Assim, a soma total anual T é dada por:

$T = 3(P + X) + 9X = 8400.$

Temos também que, no pagamento das três parcelas do depósito caução, ou seja, 9X, o valor desembolsado foi 80% maior que aquele pago nos três primeiros meses.

$9X = (1{,}8) \cdot 3 \cdot (P + X)$

$9X = 5{,}4 \cdot (P + X)$

$3{,}6X = 5{,}4P$

$X = 1{,}5P$

Portanto, $3 \cdot (1{,}5P + P) + 9 \cdot 1{,}5P = 8400.$

$13{,}5P + 4{,}5P + 3P = 8400$

$21P = 8400$

$P = 400$

Assim, o depósito caução 3P é dado por R$ 1 200,00.

4. Unifor – Uma empresa, em processo de restauração, propôs a seus funcionários uma indenização financeira para os que pedissem demissão, que variava em função do número de anos trabalhados. A tabela abaixo era utilizada para calcular o valor (i) da indenização, em função do tempo trabalhado (t).

Tempo trabalhado (em anos)	Valor da indenização (em Reais)
1	450
2	950
3	1 450
4	1 950

Baseado na tabela acima, podemos afirmar que um funcionário com 15 anos de trabalho nessa empresa receberia uma indenização em reais de:

a) 6 950

b) 7 100

c) 7 450

d) 8 100

e) 8 900

Temos que a função que modela esse problema é dada por:

$i(t) = 450 + 500 \cdot (t - 1)$

Então, em 15 anos:

$i(15) = 450 + 500 \cdot 14 \to i(15) = 7450$

5. PUC-Rio (adaptado) – Considere a função real f(x) = $= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$. Determine as raízes de f(x).

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \to x^2 \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right) = 0 \to$

$\to x^2 = 0 \to x = 0$

ou

$\to \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} = 0 \to \frac{1}{3}x = \frac{1}{2} \to x = \frac{3}{2}$

6. Unifor – Em virtude da grande crise econômica em que passa o Brasil no ano de 2015, a produção de uma indústria de suco da zona metropolitana de Fortaleza vem diminuindo mês a mês. No primeiro mês do ano, ela produziu dez mil caixas de sucos. A partir daí, a produção mensal passou a ter a seguinte lei de formação:

$y = 10000 \cdot (0{,}9)^x + 100x$. Então é verdade afirmar que:

a) o número de caixas produzidas no primeiro mês de recessão foi de 9 000 unidades

b) o número de caixas produzidas no segundo mês de recessão foi de 8 300 unidades.

c) o número de caixas produzidas nos dois primeiros meses foram iguais.

d) o número de caixa produzidas no primeiro mês foi o dobro do segundo mês.

e) o número de caixas produzidas nos dois primeiros meses ultrapassou o número de 20 mil unidades.

a) o número de caixas produzidas no primeiro mês de recessão foi de 9 000 unidades.

Falso, pois no primeiro mês:
$y = 10\,000 \cdot 0{,}9^1 + 100 \cdot 1 = 9\,100$ unidades.

b) o número de caixas produzidas no segundo mês de recessão foi de 8 300 unidades.

Verdadeiro, pois no segundo mês:
$y = 10\,000 \cdot 0{,}9^2 + 100 \cdot 2 = 8\,100 + 200 = 8\,300$ unidades.

c) o número de caixas produzidas nos dois primeiros meses foram iguais.

Falso, pois $9\,100 \neq 8\,300$.

d) o número de caixa produzidas no primeiro mês foi o dobro do segundo mês.

Falso, pois $9\,100 \neq 2 \cdot 8\,300$.

e) o número de caixas produzidas nos dois primeiros meses ultrapassou o número de 20 mil unidades.

Falso, pois $9\,100 + 8\,300 = 17\,400 < 20\,0000$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Sistema Dom Bosco – Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} 0{,}4; \text{ se } x \text{ é racional} \\ 0{,}75; \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$

O valor da expressão $\dfrac{f(\sqrt{2}) + f\left(\frac{3}{5}\right)}{f(\pi)}$ é:

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{27}{20}$

c) $\frac{5}{12}$

d) $\frac{69}{80}$

e) $\frac{23}{15}$

8. UFPR – Uma pizza a 185 °C foi retirada de um forno quente. Entretanto, somente quando a temperatura atingir 65 °C será possível segurar um de seus pedaços com as mãos nuas, sem se queimar. Suponha que a temperatura T da pizza, em graus Celsius, possa ser descrita em função do tempo t, em minutos, pela expressão $T = 160 \times 2^{-0{,}8xt} = 25$. Qual o tempo necessário para que se possa segurar um pedaço dessa *pizza* com as mãos nuas, sem se queimar?

a) 0,25 minutos

b) 0,68 minutos

c) 2,5 minutos

d) 6,63 minutos

e) 10,0 minutos

9. Sistema Dom Bosco – 50 bois foram numerados e utilizados para testar uma nova medicação. Injetou-se o medicamento em cada um dos bois. Se o boi reagisse positivamente era marcado com o número 1 e, negativamente, com zero. O domínio dessa função é o conjunto:

a) $\{0, 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 51\}$

c) $[0, 1]$

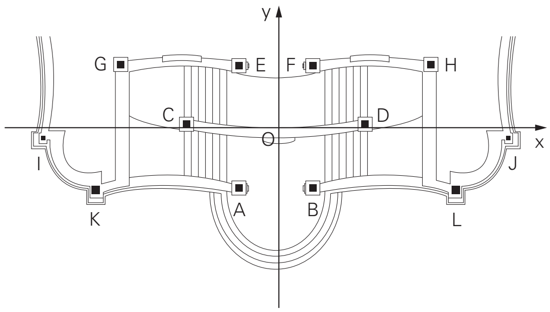
d) $[0, 50]$

e) $[1, 51]$

10. UPE (adaptada) – Muitos brasileiros passaram a comprar veículos novos, os famosos "0 Km". O problema é que, ao ser retirado da concessionária, o processo de depreciação do bem é iniciado, como publicado na revista online Exame.com em 28/02/2013, estimulando especialistas a recomendarem a compra de veículos seminovos. Uma das funções utilizadas para determinar o valor final após a depreciação de um automóvel é dada por $f(X) = C \cdot 0{,}8^x$, onde C representa o valor inicial do veículo, e X, o tempo de depreciação em anos.

Com base nessa função, calcule após quanto tempo, um veículo comprado por R$ 40 000,00 valerá 51,2% do seu preço original.

11. UNB



Na figura acima, extraída do texto Congonhas do Campo, de Robert C. Smith e Marcel Gautherot, um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy indica as posições das doze estátuas dos profetas esculpidas por Aleijadinho na entrada do santuário Bom Jesus de Matosinhos. As estátuas, identificadas pelas letras de A a L, estão dispostas simetricamente em relação ao eixo Oy e, na figura, também estão representados as escadarias e o adro em frente ao santuário. Na tabela a seguir, cada um dos pontos de A a L está associado à estátua de um profeta e são apresentadas as coordenadas de alguns desses pontos no plano xOy.

Ponto	Profeta	Coordenadas
A	Isaías	(–2, –3)
B	Jerimias	
C	Baruch	(–4, 0)
D	Ezequiel	
E	Daniel	
F	Oseias	(2, 3)
G	Jonas	
H	Joel	(7, 3)
I	Amós	(–10, –1)
J	Naum	
K	Abdias	
L	Habacuc	(8, –3)

A estátua do profeta Naum está localizada no ponto de coordenadas (10, 1).

a) Certo

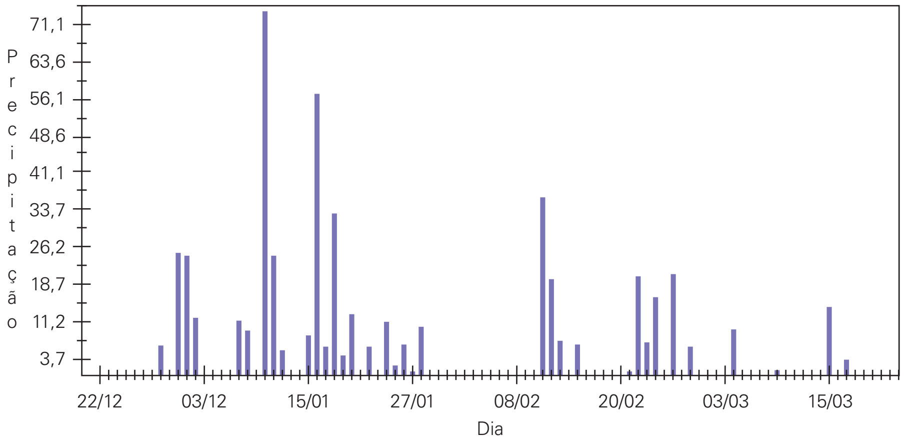
b) Errado

12. Sistema Dom Bosco – Seja $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 99\}$ e a função que associa cada elemento de A com seu algarismo das unidades. O número de soluções de $f(x) = 5$ é:

a) 7
b) 10
c) 11
d) 12
e) 99

13. Unicamp – A figura abaixo mostra a precipitação pluviométrica em milímetros por dia (mm/dia) durante o último verão em Campinas. Se a precipitação ultrapassar 30 mm/dia, há um determinado risco de alagamentos na região. De acordo com o gráfico, quantos dias Campinas teve este risco de alagamento?

(Fonte: http://www.agritempo.gov.br/agroclima/plotpesq. Acessado em 10/10/2012.)



a) 2 dias **b)** 4 dias **c)** 6 dias **d)** 10 dias

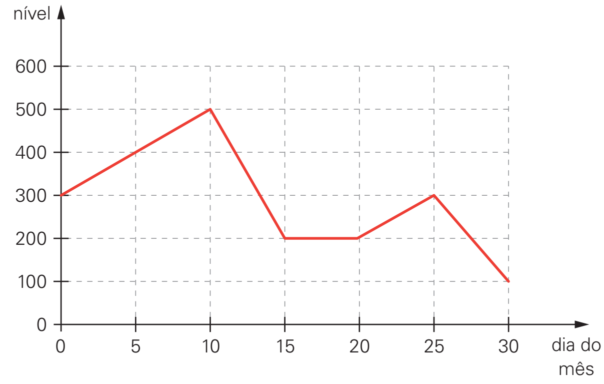
14. Unicamp – O índice Ide massa corporal de uma pessoa adulta é dado pela fórmula $I = \frac{M}{h^2}$ sendo M a massa do corpo, dada em quilogramas, e h, a altura da pessoa, em metros. O índice I permite classificar uma pessoa adulta de acordo com a seguinte tabela:

Homens	Mulheres	Classificação
$20 \leq I \leq 25$	$19 \leq I \leq 24$	Normal
$25 < I \leq 30$	$25 < I \leq 29$	Levemente Obeso
$I \geq 30$	$I > 29$	Obeso

a) Calcule o índice I para uma mulher cuja massa seja 64,0 kg e cuja altura seja 1,60 m. Classifique-a segundo a tabela dada.

b) Qual é a altura mínima para que um homem com massa de 97,2 kg não seja considerado obeso?

15. Insper – O gráfico abaixo mostra o nível de água no reservatório de uma cidade, em centímetros.



O período do mês em que as variações diárias do nível do reservatório, independentemente se para enchê-lo ou esvaziá-lo, foram as maiores foi

a) nos dez primeiros dias

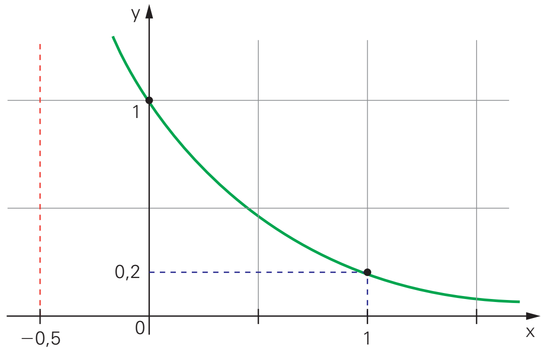
b) entre o dia 10 e o dia 15

c) entre o dia 15 e o dia 20

d) entre o dia 20 e o dia 25

e) nos últimos cinco dias

16. Unesp (adaptada) – A figura descreve o gráfico de uma função exponencial do tipo $y = a^x$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



Nessa função, calcule o valor de y para $x = -0,5$.

17. Sistema Dom Bosco – Os irmãos André, Carlos e Juca têm, respectivamente, um, dois e três filhos. Considere dois conjuntos: um formado pelos irmãos e outro pelos filhos e as seguintes relações:

I. a que associa cadapai ao seu filho;
II. a que associa cada filho ao seu pai;
III. a que associa cada filho ao se primo.

São Funções:

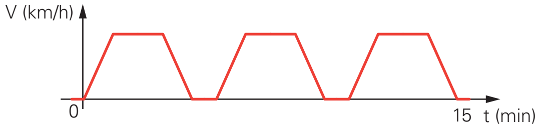
a) somente a I.
b) somente a II.
c) somente a III.
d) as três.
e) nenhuma.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H19

Um semáforo e composto, geralmente, de três círculos de luzes coloridas (vermelho, amarelo e verde). A cor vermelha indica que o veículo deve estar parado e permanecer assim até que a cor verde volte a acender.

O gráfico apresenta a variação de velocidade de um carro ao longo de um percurso de 15 minutos de duração, da residência de uma pessoa até seu local de trabalho. Durante esse percurso, o carro parou somente nos semáforos existentes ao longo de seu trajeto.



Em quantos semáforos ele parou?

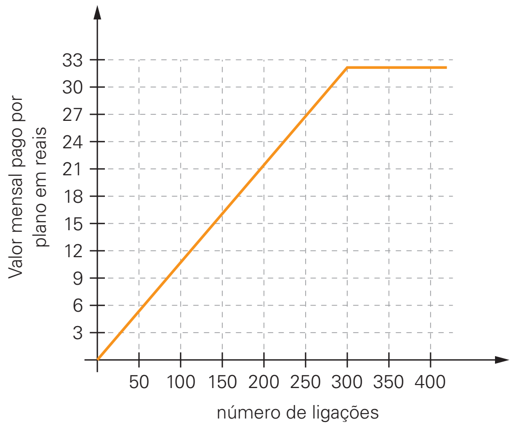
a) 2
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

19. Enem C5-H21

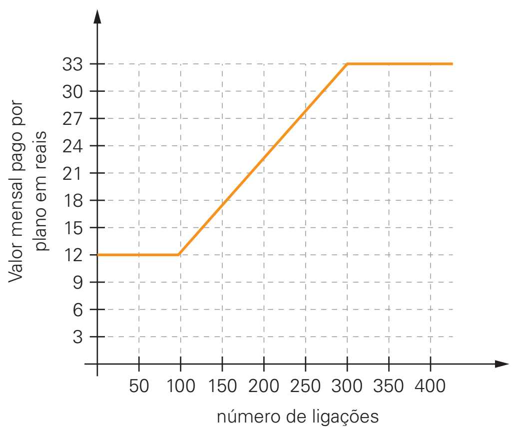
Após realizar uma pesquisa de mercado, uma operadora de telefonia celular ofereceu aos clientes que utilizavam até 500 ligações ao mês o seguinte plano mensal: um valor fixo de R$ 12,00 para os clientes que fazem até 100 ligações ao mês. Caso o cliente faça mais de 100 ligações, será cobrado um valor adicional de R$ 0,10 por ligação, a partir da 101ª até a 300ª; e caso realize entre 300 e 500 ligações, será cobrado um valor fixo mensal de R$ 32,00.

Com base nos elementos apresentados, o gráfico que melhor representa a relação entre o valor mensal pago nesse plano e o número de ligações feitas é:

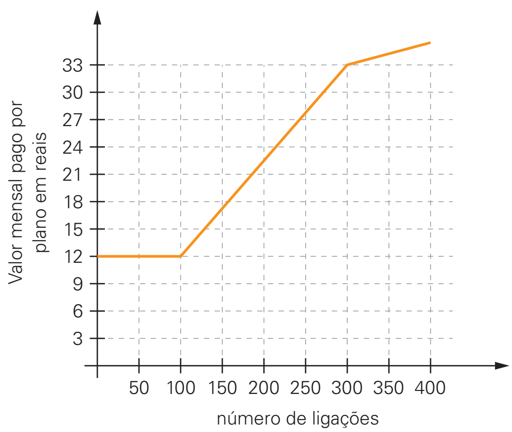
a)



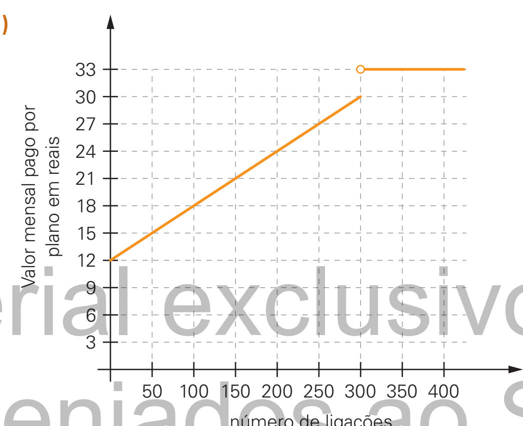
b)



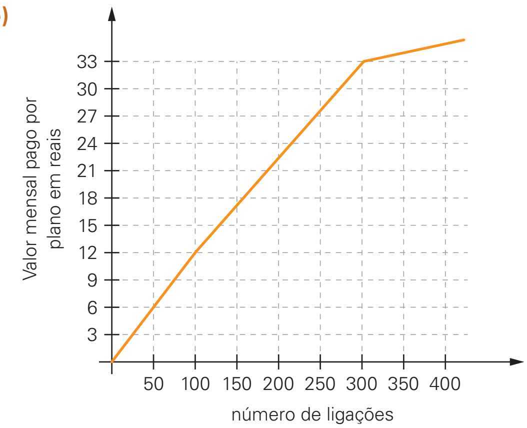
c)



d)



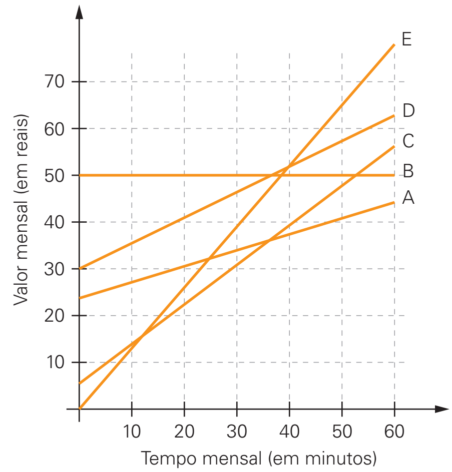
e)



20. Enem C5-H21

No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular.

Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone.

Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

10

PROPORCIONALIDADE E FUNÇÃO LINEAR

- Grandezas proporcionais
- Função linear

HABILIDADES

- Conceituar grandeza.
- Identificar, matematicamente, a proporcionalidade direta e a inversa.
- Utilizar a definição de grandezas proporcionais no entendimento e resolução de problemas.
- Correlacionar grandezas diretamente proporcionais à função linear.

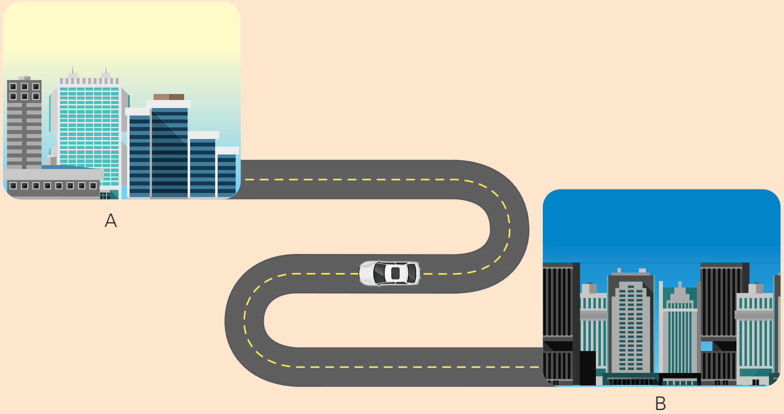
Grandezas proporcionais

A princípio, vale dizer que se considera uma grandeza como qualquer informação que possa ser expressa numericamente. Há vários exemplos: o tempo de espera em uma fila (10 min.), a temperatura ambiente (−3 °C), a velocidade de um veículo (80 km/h), a massa de um objeto (32 kg) etc.

Matematicamente, caso as grandezas se relacionem de modo proporcional, são classificadas em direta ou inversamente proporcionais. Chamam-se de grandezas diretamente proporcionais se (e somente se) o quociente delas é constante e inversamente proporcional se (e somente se) o produto é constante.

Exemplos:

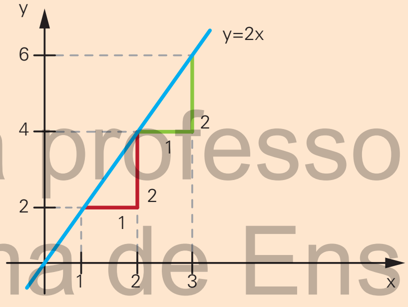
1. Do estudo da dinâmica, a força resultante (**F**) aplicada em um corpo e sua aceleração (**A**) são grandezas diretamente proporcionais, pois o quociente entre **F** e **A** é constante – nesse caso a massa (**m**) do corpo, ou seja, $\frac{F}{A} = m$ (constante).
2. Considere duas cidades A e B que distam **d** km. Se uma pessoa viajar, semanalmente, de A para B com a mesma velocidade média (**V**) durante o percurso, variando essa velocidade a cada semana, o tempo gasto (**T**), em cada viagem, é inversamente proporcional à velocidade média, pois o produto $V \cdot T = d$ (constante).



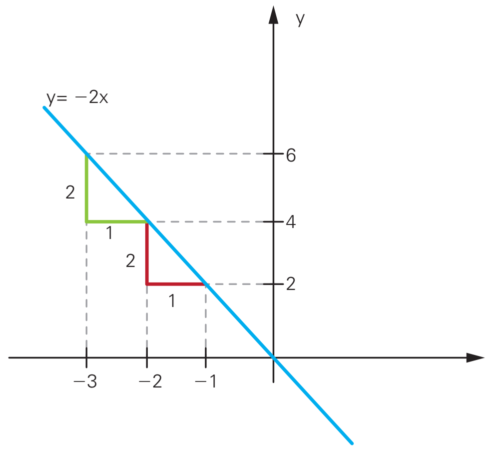
Função linear

A função real representada algebricamente por $f(x) = ax$ ou $y = ax$, sendo a constante, é chamada de **função linear**. Seu gráfico é uma reta.

Nota-se, na figura ao lado, que nos triângulos de catetos coloridos, o quociente entre os catetos verticais e horizontais de mesma cor, nessa ordem, é $\frac{2}{1}$, ou seja, a constante é 2.



A constante a indica a variação (positiva ou negativa) do y a cada aumento de uma unidade no valor de x. No caso do exemplo na página anterior, a variação é positiva, pois a função é crescente. Portanto, a = 2.



Nota-se na figura acima que, nos triângulos de catetos coloridos, o quociente entre os catetos verticais e horizontais de mesma cor, nessa ordem, é $\frac{2}{1}$, ou seja, a constante é 2. No caso do último exemplo, a variação é negativa, pois a função é decrescente. Portanto, a = −2.

É importante ressaltar que em uma função linear tem-se que as grandezas y e x são diretamente proporcionais.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Os lados de um triângulo retângulo são proporcionais 3, 4 e 5. Se o perímetro é 150 cm, então a área do triângulo, em cm², é:

a) 312,5
b) 625
c) 937,5
d) 1 875
e) 1 562,5

Resolução

Sejam x, y e z as medidas dos lados proporcionais a 3, 4 e 5, respectivamente.

Então: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k$ (constante) $\rightarrow x = 3k$;

$y = 4k$ e $z = 5k$.

Como o perímetro é 150, temos:

$x + y + z = 150 \rightarrow 3k + 4k + 5k = 150 \rightarrow$

$\rightarrow 12k = 150 \rightarrow k = \frac{150}{12} = \frac{25}{2}$.

A área do triângulo retângulo de catetos x e y é:

$\frac{x \cdot y}{2} = \frac{12k^2}{2} = 6 \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{625}{4} = 3 \cdot \frac{625}{2} =$

$= 3 \cdot 312{,}5 = 937{,}5 \rightarrow 937{,}5\ cm^2$.

2. Sistema Dom Bosco – O projeto arquitetônico de Brasília é composto pelo traçado curvilíneo. Um dos vários exemplos são as curvas hiperbólicas do Palácio do Planalto.

ANDRE DIB/SHUTTERSTOCK

A hipérbole é uma curva que, quando representada no plano cartesiano, indica que as coordenadas de seus pontos são inversamente proporcionais. Qual das alternativas representa uma hipérbole?

a) $y + x = 1$
b) $y - x = 1$
c) $y \cdot x = 1$
d) $\frac{y}{x} = 1$
e) $\frac{y}{x^2} = 1$

Resolução

Sendo P(x, y) um ponto qualquer de uma hipérbole, então suas coordenadas x e y são inversamente proporcionais. Então: $y \cdot x = k$ (constante não nula). Entre as alternativas, aquela que representa uma hipérbole é a C.

ROTEIRO DE AULA

FUNÇÕES

- **Proporcionalidade**
  - Inversa — Produto é constante.
  - Direta — Quociente é constante.
- **Função linear**
  - Algébrica — $y = a \cdot x \ (a \in \mathbb{R})$.
  - Gráfica — Reta que passa pela origem.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Sistema Dom Bosco – Sabe-se que y é inversamente proporcional ao quadrado de x, sendo x positivo. Quando x = 1 tem-se y = 2. Tem-se y = 8 quando x é:

f) $\frac{1}{8}$
g) $\frac{1}{4}$
h) $\frac{3}{8}$
i) $\frac{1}{2}$
j) $\frac{3}{4}$

$y \cdot x^2 = k \rightarrow k = 2 \cdot 1^2 = 2$. Então: $8 \cdot x^2 = 2 \rightarrow x^2 = \frac{2}{8} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

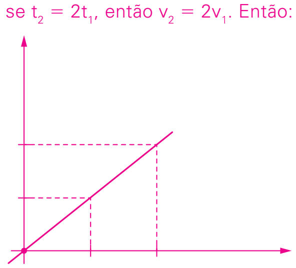
Como $x > 0$, vem $x = \frac{1}{2}$.

2. Sistema Dom Bosco – A lei geral dos gases é expressa pela relação $\frac{P \cdot V}{T} = k$, em que a pressão (P), o volume (V) e a temperatura (T) são números reais positivos, bem como a constante k.

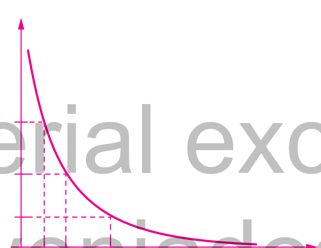
a) Sendo a pressão constante, esboce o gráfico do volume em função da temperatura.

b) Considerando que a temperatura não varie, esboce o gráfico da pressão em função do volume.

a) Se P é constante, então $\frac{V}{T}$ também é constante, pois o produto $\frac{k}{P}$ é constante. Logo, V e T são diretamente proporcionais. Portanto, se $t_2 = 2t_1$, então $v_2 = 2v_1$. Então:



b) Se T é constante, então $P \cdot V$ também é constante, pois o produto $k \cdot T$ é constante. Logo, P e V são inversamente proporcionais. Portanto, se $v_3 = 2v_2 = 4v_1$. Então, $p_1 = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{4}$. Daí vem:



3. UEL (adaptado) C5-H21

Numa gráfica, 6 máquinas de mesmo rendimento imprimem uma quantidade de cópias de folheto publicitário em 8 horas de trabalho. Se 2 dessas máquinas quebrassem, em quanto tempo de trabalho as demais máquinas fariam o mesmo serviço?

a) 5 horas e 20 minutos
b) 6 horas e 40 minutos
c) 10 horas e 30 minutos
d) 12 horas
e) 14 horas e 15 minutos

A quantidade de máquinas (m) e o número de horas trabalhadas (n) são grandezas inversamente proporcionais. Daí temos:

$m \cdot n = k$ (constante) $\rightarrow 6 \cdot 8 = (6 - 2) \cdot n \rightarrow n = \frac{48}{4} \rightarrow n = 12.$

4. FGV (adaptado) – Dois pintores executaram um serviço cobrando um total de R$ 2.100,00. O primeiro trabalhou 8 horas e o segundo trabalhou 7 horas. Se cada um recebeu um valor proporcional ao número de horas trabalhadas, a diferença entre a quantia recebida pelo primeiro e a recebida pelo segundo foi de:

a) R$ 140,00
b) R$ 150,00
c) R$ 160,00
d) R$ 170,00
e) R$ 180,00

Sendo x e y o valor recebido pelos pintores que trabalharam 7 e 8 horas, respectivamente, temos:

$\frac{x}{8} = \frac{y}{7} = k \rightarrow x = 8k;\ y = 7k$. Com $x + y = 2100 \rightarrow 15k = 2100 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{2100}{15} \rightarrow k = 140$

A diferença $x - y = k = 140$.

5. FGV (adaptado) – Uma empresa acredita que, diminuindo 8% o preço de determinado produto, as vendas aumentarão cerca de 14%.

Suponha que a relação entre a redução percentual do preço do produto e o aumento percentual da quantidade vendida seja expressa por uma função linear. Nesse caso, uma redução de 14% no preço acarretará um aumento na quantidade vendida de quantos por cento?

Sendo x a redução percentual e y o aumento percentual das vendas, de acordo com o enunciado, temos:

$\frac{y}{x} = a \text{ (constante)} \rightarrow a = \frac{1}{8} = \frac{y}{14} \rightarrow y = \frac{169}{8} = \frac{49}{2} = 24{,}5\%.$

6. Fatec-SP – Um certo setor de uma empresa tem várias máquinas, todas com o mesmo custo operacional por hora. Se o custo da operação de 3 delas, em 2 dias, funcionando 6 horas por dia, é de R reais, então o custo de operação, em reais, de duas delas, em 4 dias, funcionando 5 horas por dia, é igual a:

a) $\frac{8}{9}R$

b) $\frac{10}{9}R$

c) 2R

d) 2,5R

e) 5R

Custo operacional por hora de 3 máquinas: $\frac{R}{2 \cdot 6} = \frac{R}{12}$;

Custo operacional por hora de 1 máquina: $\frac{\frac{R}{12}}{3} = \frac{R}{36}$;

Custo operacional de 2 máquinas em 4 dias, funcionando 5 horas por dia:

$\frac{R}{36} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = \frac{40R}{36} = \frac{10R}{9}.$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Sistema Dom Bosco – Robert Hooke (1635/1703) é considerado o maior cientista experimental do século XVII. Entre suas inúmeras contribuições está o estudo das deformações elásticas que resultou na Lei: "Em regime de deformação elástica, a intensidade F da força aplicada a uma mola é diretamente proporcional à deformação x da mola. Essa lei, conhecida como 'Lei de Hooke', pode ser expressa pela função linear $F = k \cdot x$, em que k é uma constante de proporcionalidade chamada de constante elástica da mola."

a) De acordo com o texto, responda: aplicando-se uma força de 30 Newtons à mola, esta comprime 2 cm. Qual a força aplicada se a compressão da mola foi de 5 cm?

b) Esboce o gráfico da Lei de Hooke para a constante elástica obtida no item anterior.

8. Mackenzie (adaptado) – No setor de seleção de pessoal de uma empresa, 75 pessoas foram contratadas, a partir de 120 candidatos. Se dentre os pretendentes havia 3 homens para cada mulher, e se 15 mulheres foram contratadas, então o número de homens não contratados foi de:

a) 15

b) 20

c) 25

d) 30

e) 35

9. FGV (adaptado) – Duas grandezas A e B são inversamente proporcionais; seja x um valor genérico de A e y um valor genérico de B. Quando x = 6, o correspondente y vale 10. Quando x = 4, o correspondente valor de y será:

a) 15
b) 15,5
c) 16
d) 16,5
e) 18

10. ESPM (adaptado) – Quando um automóvel é freado, a distância que ele ainda percorre até parar é diretamente proporcional ao quadrado de sua velocidade. Se um automóvel a 35 km/h é freado e para depois de percorrer mais 7 metros, se estivesse a 70km/h, pararia após percorrer mais quantos metros?

11. Faap-SP (adaptado) – Dois sócios lucraram R$ 5.000,00. O primeiro entrou para a sociedade com o capital de R$ 18.000,00 e o segundo com R$ 23.000,00. Se os lucros de cada sócio são proporcionais aos capitais, a diferença entre os lucros foi de aproximadamente:

a) R$ 509,00
b) R$ 609,00
c) R$ 709,00
d) R$ 809,00
e) R$1.009,00

12. FGV – Numa salada de frutas há mamão, maçã e banana, e as massas de cada uma dessas frutas são proporcionais a 3, 4 e 5, respectivamente. Em 15 kg dessa salada de frutas, quantos quilogramas de banana existem?

a) Menos de 6
b) Entre 6 e 6,5
c) Entre 6,5 e 7
d) Entre 7 e 7,5
e) Mais que 7,5

13. PUCPR (adaptado) – Uma construtora edificou 5 residências com as seguintes áreas construídas, em m^2: 110, 112, 120, 116 e 102 e destinou uma área comum para lazer de 84 m^2 que deve ser dividida em partes proporcionais à área de cada residência. Assim, a área correspondente à residência de 110 m^2, em m^2, é igual a:

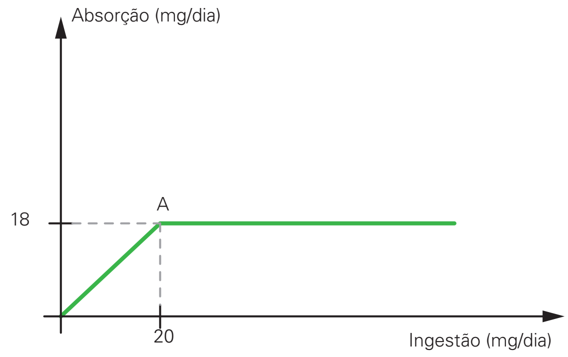
a) 15,3
b) 16,5
c) 16,8
d) 17,4
e) 18

14. Faap-SP (adaptado) – Quatro impressoras iguais imprimem 600 cartazes em 2,5 h. O tempo necessário para se imprimir o triplo de cartazes, utilizando apenas duas dessas máquinas, será de quanto tempo?

15. PUC-Campinas – Operando 12 horas por dia, 20 máquinas produzem 6 000 peças em 6 dias. Com 4 horas a menos de trabalho diário, 15 daquelas máquinas produzirão 4 000 peças em quantos dias?

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

16. UFMG – Observe o gráfico, em que o segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas.



Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo composto, em mg/dia, e sua absorção pelo organismo, também em mg/dia. Analisando as afirmativas relativas ao gráfico.

I. Para ingestões de até 20 mg/dia, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.

II. A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.

III. Para ingestões acima de 20 mg/dia, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido.

IV. A absorção resultante da ingestão de mais de 20 mg/dia é igual à absorção resultante da ingestão de 20 mg/dia.

Quantas são falsas?

a) nenhuma
b) uma
c) duas
d) três
e) todas

17. Fuvest (adaptado) – Alex constrói 20 cadeiras em 4 dias de 3 horas de trabalho por dia. Silvio constrói 15 dessas cadeiras em 2 dias de 8 horas de trabalho por dia. Sabe-se que a produtividade de Juca na construção da mesma cadeira é igual à de Alex e Silvio trabalhando juntos. Quantos dias Juca levará para construir 250 cadeiras trabalhando 6 horas por dia?

ESTUDO PARA O ENEM

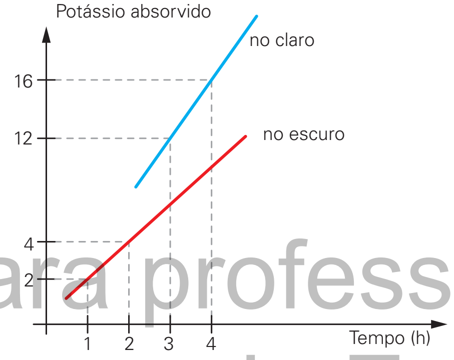
18. UERJ (adaptada) C5-H21

Há alguns truques entre o peixe e a balança para ludibriar o consumidor. Um deles, feito em balanças antigas com dois pratos, o "peso" de 500 g é oco pesando na realidade 300 g. Uma balança de dois pratos é usada para medir 2,5 kg de peixe, da seguinte forma: em um prato está o peixe, no outro um "peso" de 2 kg e mais um "peso" de 500 g. O peixe contém, em suas vísceras, um pedaço de chumbo de 200 g. O "peso" de 500 g, por ser oco, tem na verdade 300 g. Se 1 kg desse peixe custa R$12,60, o consumidor pagará, na realidade, o preço de:

a) R$ 14,50/kg
b) R$ 15,00/kg
c) R$ 15,50/kg
d) R$ 16,00/kg
e) R$ 16,50/kg

19. Unesp C6-H25

O gráfico mostra o resultado de uma experiência relativa à absorção de potássio pelo tecido da folha de um certo vegetal, em função do tempo e em condições diferentes de luminosidade.



Nos dois casos, a função linear $y = m \cdot x$ ajustou-se razoavelmente bem aos dados, daí a referência a m como taxa de absorção (geralmente medida em m – moles– por unidade de peso por hora). Com base no gráfico, se m_1 é a taxa de absorção no claro e m_2 a taxa de absorção no escuro, a relação entre essas duas taxas é:

a) $m_1 = m_2$
b) $m_2 = 2m_1$
c) $m_1 \cdot m_2 = 1$
d) $m_1 \cdot m_2 = -1$
e) $m_1 = 2m_2$

20. UFMG-Juiz de Fora (adaptado) C6-H25

Em um certo restaurante, as *pizzas* são feitas em formas de base circular. Os preços das *pizzas* do mesmo tipo variam proporcionalmente em relação à área da base da forma. Se uma *pizza* feita numa forma cuja base tem 20 cm de diâmetro custa R$ 36,00 então uma outra *pizza*, do mesmo tipo, feita numa forma cuja base tem 30 cm de diâmetro, deve custar:

a) R$ 54,00
b) R$ 79,00
c) R$ 81,00
d) R$ 85,00
e) R$ 89,00

11

FUNÇÃO AFIM

- Introdução
- Definição
- Gráfico da função
- Raiz ou zero da função
- Coeficientes da função

HABILIDADES

- Identificar função afim.
- Utilizar função afim para resolver problemas.
- Identificar função linear com o conceito de grandezas proporcionais.
- Representar graficamente função afim.
- Compreender o significado dos coeficientes da função afim.
- Identificar função afim descrita por meio do gráfico cartesiano.

Definição

Chama-se **função afim** ou **função polinomial do 1º grau** a função real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que pode ser escrita na forma:

$f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$

Temos então:

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $CD(f) = \mathbb{R}$ e
- $Im(f) = \mathbb{R}$

Na função $f(x) = ax + b$, o número a é o coeficiente de x e o número b, o termo constante.

Quando temos a função afim $f(x) = 0$, ela se transforma em uma equação do 1º grau $ax + b = 0$.

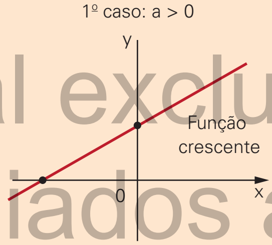
Um vendedor de veículos geralmente recebe seu salário baseando-se numa função afim, um valor constante fixo (b) e uma comissão para cada veículo vendido (a).

PRODAKSZYN/SHUTTERSTOCK

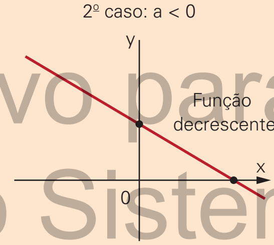
GRÁFICO DA FUNÇÃO

O gráfico da função afim é uma reta crescente (quando a é positivo) ou decrescente (quando a é negativo), conforme os esquemas a seguir.

1º caso: $a > 0$



2º caso: $a < 0$



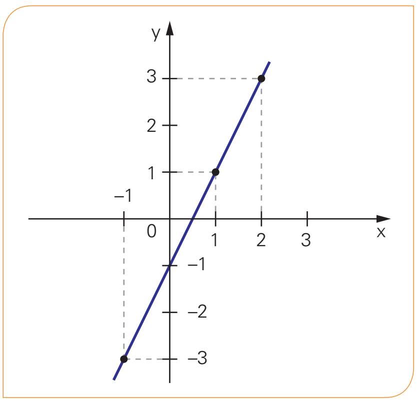
Para esboçar o gráfico, é importante destacar dois pontos distintos, porque por dois pontos passa uma única reta.

Exemplos:

1. Vamos esboçar o gráfico da função real definida por $f(x) = 2x - 1$.

Precisamos calcular dois pontos distintos:

- Se $x = 0$, temos $y = -1$;
- Se $y = 1$, então $x = 1$.

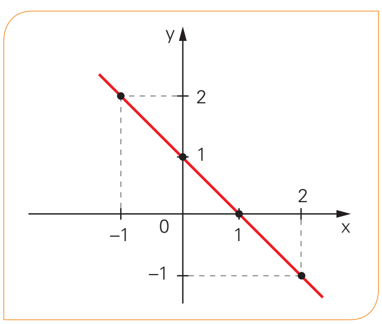


A função é **crescente**, pois $a = 2$, ou seja, positivo.

2. Vamos esboçar o gráfico da função real definida por $f(x) = -x + 1$.

Precisamos calcular dois pontos distintos:

- Se $x = 0$, temos $y = 1$;
- Se $y = 0$, então $x = 1$.



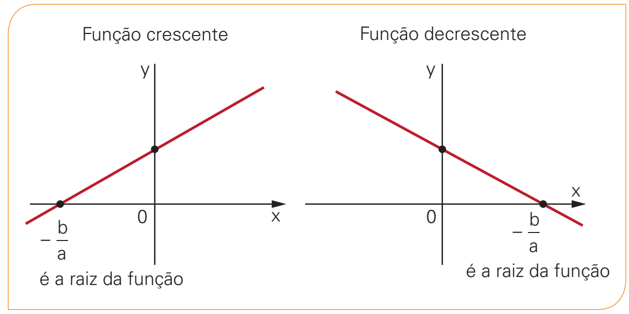
A função é **decrescente**, pois $a = -1$, ou seja, negativo.

RAIZ OU ZERO DA FUNÇÃO

Determinação do valor de **x** tal que $f(x) = 0$, em que f é a função cuja raiz será definida, ou seja:

$f(x) = 0 \rightarrow ax + b = 0 \rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ é a única raiz da função.

A raiz de uma função afim, crescente ou decrescente, é representada pelo ponto no qual o gráfico intercepta o eixo das **abcissas** (x).



O ponto (x, y) no qual a reta intercepta o eixo horizontal **x** é $\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$.

COEFICIENTES DA FUNÇÃO

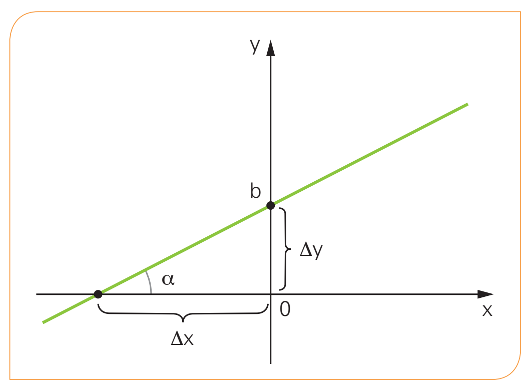
Na função afim $f(x) = ax + b$, **a** é denominado coeficiente angular e **b**, coeficiente linear.

O ponto de interseção com o eixo vertical ocorre quando $x = 0$. Desse modo:

$$x = 0 \rightarrow f(0) = a \cdot 0 + b \rightarrow f(0) = b$$

Isso significa que o gráfico intercepta o eixo **y** no ponto (0, b).

Significado geométrico



Coeficiente angular (a): responsável pela inclinação do gráfico da função. Pode-se obter com base no gráfico, pela expressão:

$$a = \text{tg}\ \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Coeficiente linear (b): ponto no qual o gráfico intercepta o eixo **y**.

ROTEIRO DE AULA

FUNÇÃO AFIM

Representação

Algébrica

$y =$ $a \cdot x + b$; $(a \neq 0)$

$a = \frac{\Delta x}{\Delta y}$

Gráfica

Reta

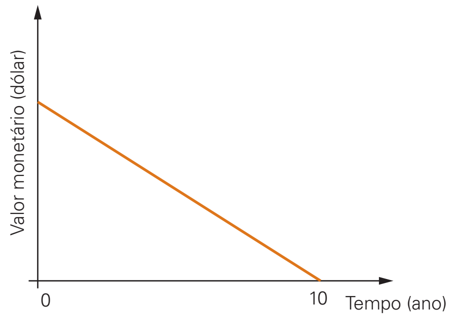
Dois pontos

$(0, b)$ e $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Enem C6-H25

Um sistema de depreciação linear, estabelecendo que após 10 anos o valor monetário de um bem será zero, é usado nas declarações de imposto de renda de alguns países. O gráfico ilustra essa situação.



Uma pessoa adquiriu dois bens, A e B, pagando 1 200 e 900 dólares, respectivamente.

Considerando as informações dadas, após 8 anos, qual será a diferença entre os valores monetários, em dólar, desses bens?

a) 30
b) 60
c) 75
d) 240
e) 30.

Temos que a depreciação é de 100% em 10 anos; portanto, uma depreciação de 10% ao ano.

Para o bem A, em 8 anos, temos um valor final de:

$1200 \cdot (100\% - 8 \cdot 10\%) = 1\,200 \cdot (1 - 8 \cdot 0{,}1) = 1\,200 \cdot (1 - 0{,}8) =$
$= 1\,200 \cdot 0{,}2 = 240$. Ou seja, 240 dólares.

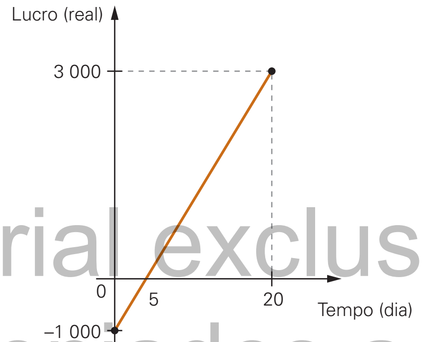
Para o bem B, em 8 anos, temos um valor final de:

$900 \cdot (100\% - 8 \cdot 10\%) = 900 \cdot (1 - 8 \cdot 0{,}1) = 900 \cdot (1 - 0{,}8) =$
$= 900 \cdot 0{,}2 = 180$. Ou seja, 180 dólares.

O que nos dá uma diferença entre A e B de 60 dólares.

2. Enem C6-H25

Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.



A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (f) é

a) $L(t) = 20t + 3\,000$
b) $L(t) = 20t + 4\,000$
c) $L(t) = 200t$
d) $L(t) = 200t - 1\,000$
e) $L(t) = 200t + 3\,000$

Para uma função afim $L(t) = a \cdot t + b$, podemos obter o valor de a calculando a variação do lucro pelo tempo no gráfico:

$a = \frac{1000}{5} \rightarrow a = 200$, ou seja, 200 reais/dia.

Temos também que $L(5) = 0$. Logo:

$L(5) = 200 \cdot 5 + b \rightarrow 200 \cdot 5 + b = 0 \rightarrow B = -1000$, ou seja, $-1\,000$ reais.

Assim, $L(t) = 200t - 1\,000$.

3. UPE (adaptado) – Uma função afim é tal que $f(0) = 4$ e $f(1985) - f(1953) = 200$. Calcule o valor de $f(2019) - f(1973)$.

Temos que, sendo f uma função afim, podemos escrevê-la como

$f(x) = a \cdot x + b$. Logo, $a = \frac{f(1985) - f(1953)}{1985 - 1953} = \frac{200}{32} = 6{,}25$.

Temos também que $f(0) = 4 \rightarrow 62{,}5 \cdot 0 + b = 4 \rightarrow b = 4$.

Portanto, se dividirmos $f(2017) - f(1973)$ por $(2017 - 1973)$, teremos o valor do coeficiente a. Então:

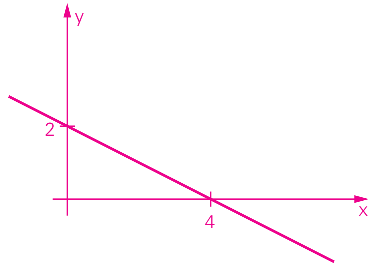
$\frac{f(2017) - f(1973)}{2017 - 1973} = 6{,}25 \rightarrow f(2017) - f(1973) =$

$= 6{,}25 \cdot (2017 - 1973) \rightarrow f(2017) - f(1973) = 6{,}25 \times 44 \rightarrow$
$\rightarrow f(2017) - f(1973) = 275$.

4. Sistema Dom Bosco – Calcule a e b, sabendo que o gráfico de $y = a \cdot x + b$ passa pelos pontos (4,0) e (0,2). Pode-se concluir que:

a) $a \cdot b = 1$
b) $a + b = 1$
c) $a \cdot b = -1$
d) $a + b = -1$
e) $a = b$

Representando graficamente a função afim do enunciado, temos:



Calculando os coeficientes: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-2}{4-0} = \frac{1}{2}$ e b = 2 (intersecção da reta com eixo y).

Portanto, $a \cdot b = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$.

5. PUCPR (adaptado) – Seja a uma função afim f(x), cuja forma é $f(x) = ax + b$, com a e b números reais. Se $f(-3) = 3$ e $f(3) = -1$, calcule os valores de a e b.

Podemos calcular o valor do coeficiente a da função afim por meio da divisão da variação dos valores de *y* pela variação dos valores de *x*.
Ou seja:

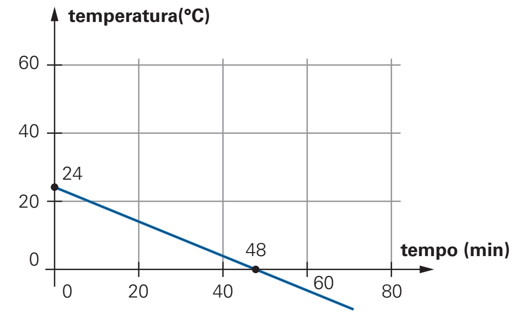
$\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)} = \frac{-1-3}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$.

Tomando x = 3, temos:

$f(3) = -1 \rightarrow -\frac{2}{3} \cdot 3 + b = -1 \rightarrow b = 1$

Portanto, $a = -\frac{2}{3}$ e b = 1.

6. ESPM (adaptado) – O gráfico abaixo mostra a variação da temperatura no interior de uma câmara frigorífica desde o instante em que foi ligada. Considere que essa variação seja linear nas primeiras 2 horas.



Qual o tempo necessário para que a temperatura atinja −18 °C?

Temos uma função afim: $T(t) = a \cdot t + b$.

Logo, $a = \frac{T(48)-T(0)}{48-0} = \frac{0-24}{48} = \frac{-24}{48} = -\frac{1}{2}$.

Assim, $T(48) = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 48 + b = 0 \rightarrow -24 + b = 0 \rightarrow b = 24$.

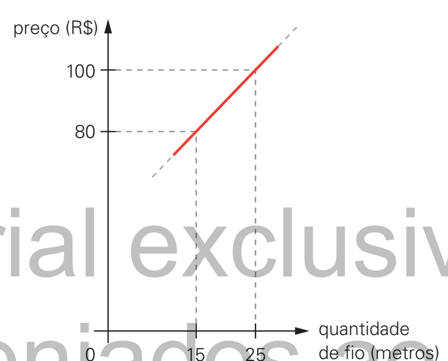
Então, podemos calcular o valor da função da temperatura (T) quando se atinge −18 °C.

$T(t) = -18 \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot t + 24 = -18 \rightarrow \frac{1}{2}t = 42 \rightarrow t = 84$, ou seja, 84 min.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. AFA – Para fazer uma instalação elétrica em sua residência, Otávio contatou dois eletricistas.

O Sr. Luiz, que cobra uma parte fixa pelo orçamento mais uma parte que depende da quantidade de metros de fio requerida pelo serviço. O valor total do seu serviço está descrito no seguinte gráfico:



Já o Sr. José cobra, apenas, R$ 4,50 por metro de fio utilizado e não cobra a parte fixa pelo orçamento.

Com relação às informações acima, é correto afirmar que

a) o valor da parte fixa cobrada pelo Sr. Luiz é maior do que R$ 60,00.
b) o Sr. Luiz cobra mais de R$ 2,50 por metro de fio instalado.
c) sempre será mais vantajoso contratar o serviço do Sr. José.
d) se forem gastos 20 m de fio não haverá diferença de valor total cobrado entre os eletricistas.

8. IFPE – Numa prova de Rally de regularidade competem 25 carros. Os carros partem da largada, um após o outro, com intervalo de 15 minutos entre eles. Se o primeiro carro partiu às 7 horas da manhã, a que horas partiu o último carro?

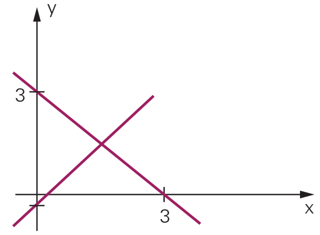
a) 13 horas
b) 13 horas e 15 minutos
c) 13 horas e 30 minutos
d) 13 horas e 45 minutos
e) 14 horas

9. UNEMAT – Em um derramamento de óleo na Baía de Guernica, alguns cientistas constataram que a concentração de hidrocarbonetos na água aumenta a uma taxa de 750 ppm (partes por milhão) por dia.

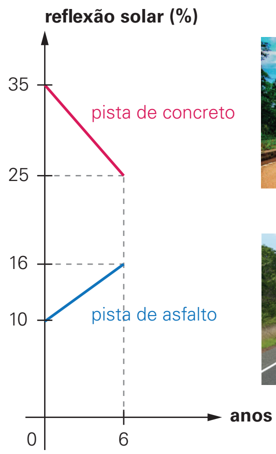
Sabendo que no primeiro dia do derramamento a taxa de concentração era de 360 ppm, qual será a concentração de hidrocarbonetos na água 27 dias após o derramamento?

a) 10 470 ppm
b) 19 860 ppm
c) 21 360 ppm
d) 20 250 ppm
e) 20 610 ppm

10. Sistema Dom Bosco – Na figura a seguir, estão representadas funções f, g e o ponto A de intersecção de seus gráficos. f é definida por $y = -x + 3$ e abscissa de A é 2. Qual expressão algébrica define a função g?



11. Unesp – Dois dos materiais mais utilizados para fazer pistas de rodagem de veículos são o concreto e o asfalto. Uma pista nova de concreto reflete mais os raios solares do que uma pista nova de asfalto; porém, com os anos de uso, ambas tendem a refletir a mesma porcentagem de raios solares, conforme mostram os segmentos de retas nos gráficos.



THINNAKORN PHET-DEE/ DREAMSTIME

PHELDER2006/ ISTOCK

(www.epa.gov.adaptado.)

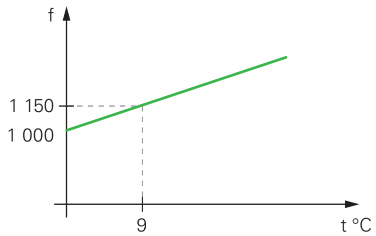
Mantidas as relações lineares expressas nos gráficos ao longo dos anos de uso, duas pistas novas, uma de concreto e outra de asfalto, atingirão pela primeira vez a mesma porcentagem de reflexão dos raios solares após

a) 8,225 anos.
b) 9,375 anos.
c) 10,025 anos.
d) 10,175 anos.
e) 9,625 anos.

12. UFGD – Um provedor de acesso à internet disponibiliza dois planos (A e B) a seus clientes com a mesma velocidade. No Plano A, cobra uma assinatura mensal de R$ 15,00 mais R$ 0,05 para cada minuto de conexão durante o mês. O Plano B determina que o consumidor pagará uma quantia fixa mensal de R$ 40,00 mais R$ 0,02 a cada minuto de conexão. Com base nessas informações, pode-se dizer que:

a) o Plano A sempre será mais vantajoso que o Plano B.
b) para um consumidor que permanece conectado uma hora por dia, o Plano A é o mais indicado.
c) se o consumidor ficar conectado 85 horas por mês, não faz diferença em escolher o Plano A ou Plano B, pois pagaria o mesmo valor.
d) se um cliente permanecer menos de 900 minutos conectado por mês, sempre o Plano A será mais vantajoso.
e) se o cliente planeja ficar mais que 15 horas conectado, será melhor escolher o Plano B.

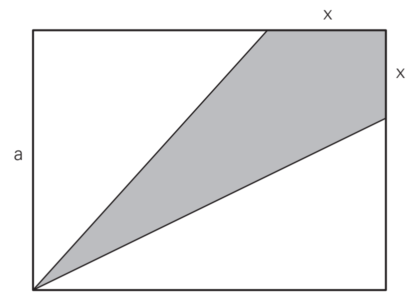
13. PUCPR – O número de indivíduos f de uma certa colônia de fungos depende essencialmente da temperatura t (em °C). O gráfico abaixo representa o crescimento desta população. O número de indivíduos quando a temperatura é de 22,5 °C é:



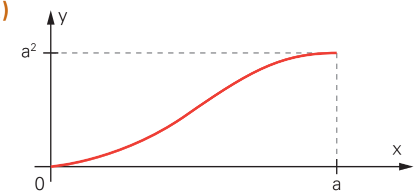
a) 1 275
b) 1 350
c) 1 375
d) 1 425
e) 1 450

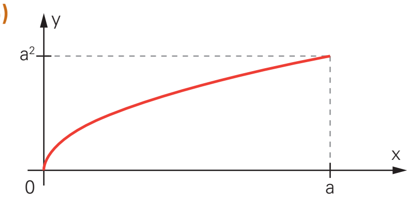
14. Sistema Dom Bosco – O valor de uma corrida de táxi é uma função afim do número de quilômetros rodados. Por uma corrida de 7 quilômetros, paga-se R$ 23,00, e por uma corrida de 10 quilômetros, paga-se R$ 32,00. Aplicando-se o valor de uma corrida de 90 quilômetros durante 1 mês, à taxa de 10% ao mês, com juro recebido será possível fazer uma corrida de quantos quilômetros?

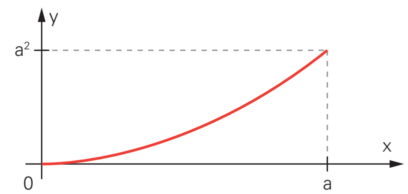
15. Unicamp – Considere o quadrado de lado $a > 0$ exibido na figura abaixo. Seja $A(x)$ a função que associa a cada $0 \leqslant x \leqslant a$ a área da região indicada pela cor cinza.

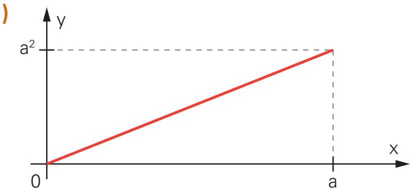


O gráfico da função $y = A(x)$ no plano cartesiano é dado por

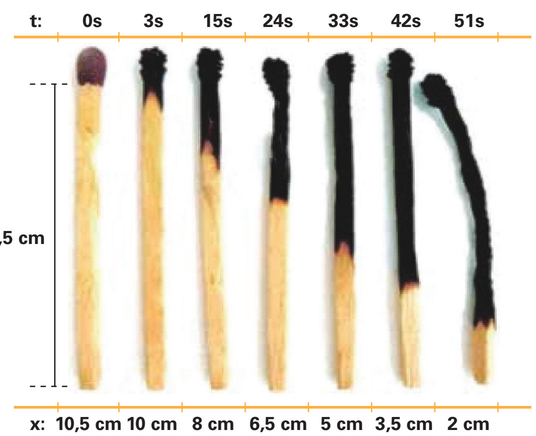
a)


b)


c)


d)


16. Unesp (adaptado) – Em um experimento com sete palitos de fósforo idênticos, seis foram acesos nas mesmas condições e ao mesmo tempo. A chama de cada palito foi apagada depois de t segundos e, em seguida, anotou-se o comprimento x, em centímetros, de madeira não chamuscada em cada palito. A figura a seguir indica os resultados do experimento.



(http://casadaquimica.wordpress.com. Adaptado)

Um modelo matemático consistente com todos os dados obtidos no experimento permite prever que o tempo, necessário e suficiente, para chamuscar totalmente um palito de fósforo idêntico aos que foram usados no experimento é de

a) 1 minuto e 2 segundos.
b) 1 minuto.
c) 1 minuto e 3 segundos.
d) 1 minuto e 1 segundo.
e) 1 minuto e 4 segundos.

17. UFRN – Uma empresa de tecnologia desenvolveu um produto do qual, hoje, 60% das peças são fabricadas no Brasil, e o restante é importado de outros países. Para aumentar a participação brasileira, essa empresa investiu em pesquisa, e sua meta é, daqui a 10 anos, produzir no Brasil 85% das peças empregadas na confecção do produto.

Com base nesses dados e admitindo-se que essa porcentagem varie linearmente de acordo com o tempo, contado em anos, o percentual de peças brasileiras na fabricação desse será de 95% no ano de:

a) 2032
b) 2033
c) 2034
d) 2035
e) 2036

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H21

Uma escola organizou uma corrida de revezamento 4 × 400 metros, que consiste em uma prova esportiva na qual os atletas correm 400 metros cada um deles, segurando um bastão, repassando-o de um atleta para outro da mesma equipe, realizando três trocas ao longo do percurso, até o quarto atleta, que cruzará a linha de chegada com o bastão. A equipe ganhadora realizou a prova em um tempo total de 325 segundos.

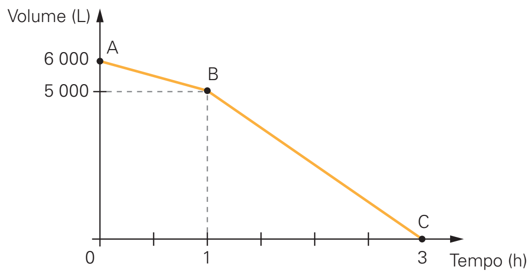
O segundo corredor da equipe ganhadora correu seus 400 metros 15 segundos mais rápido do que o primeiro; já o terceiro realizou seus 400 metros 5 segundos mais rápido que o segundo corredor, e o último realizou seu percurso em $\frac{3}{4}$ do tempo realizado pelo primeiro.

Qual foi o tempo, em segundo, em que o último atleta da equipe ganhadora realizou seu percurso de 400 metros?

a) 58
b) 61
c) 69
d) 72
e) 96

19. Enem C6-H25

Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico formado por dois segmentos de reta mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.

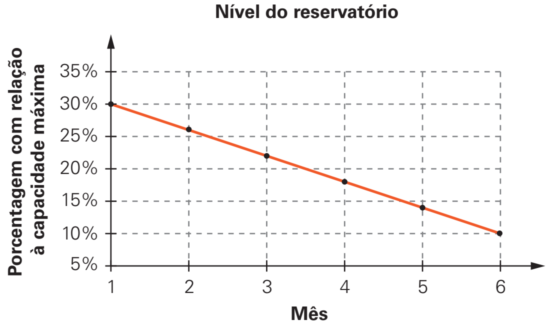


Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

a) 1 000
b) 1 250
c) 1 500
d) 2 000
e) 2 500

20. Enem C6-H25

Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio
b) 3 meses e meio
c) 1 mês e meio
d) 4 meses
e) 1 mês

12

FUNÇÃO LINEAR, IDENTIDADE E CONSTANTE

- Função linear
- Função identidade
- Função constante

HABILIDADES

- Identificar função linear com o conceito de grandezas proporcionais.
- Representar e identificar graficamente funções afim, linear, identidade e constante.
- Compreender o significado dos coeficientes das funções descritas.

Função linear

A função linear é um caso particular da função afim e ocorre quando $b = 0$. Isto é, a função real definida por $f(x) = ax$ é chamada de função linear.

Quando uma função é linear, os valores do domínio e os respectivos conjuntos imagens são diretamente proporcionais. Neste caso a constante de proporcionalidade é **a**.

Considere a função afim definida por $f(x) = ax + b$ e que sejam dois pontos distintos x_1 e x_2. Logo, $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$.

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_1 + b - (ax_2 + b)$$

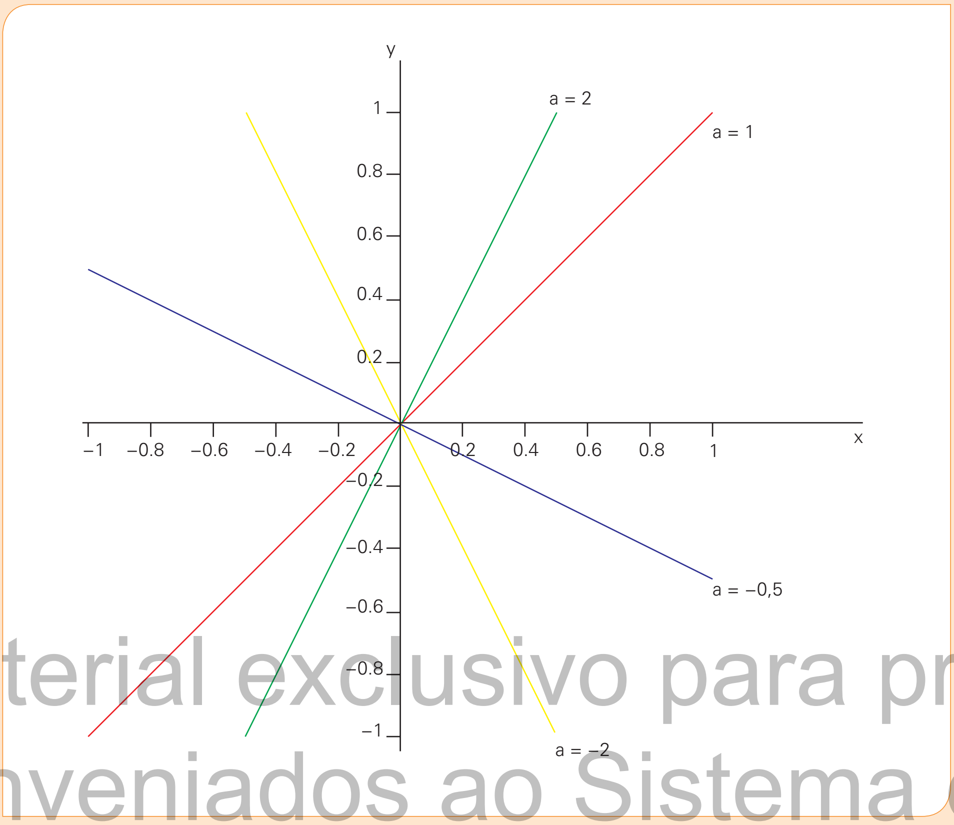
$$f(x_2) - f(x_1) = a \cdot (x_1 - x_2)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_2} = a$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO

Considerando a definição, uma função é dita linear quando $f(x) = ax$ e $b = 0$. Geometricamente significa que o gráfico intercepta o ponto (0, 0) em todos os casos.

Observe, a seguir, o gráfico da função $f(x) = ax + b$, para $b = 0$ e $a = 1; 2; -2; -0,5$, respectivamente.



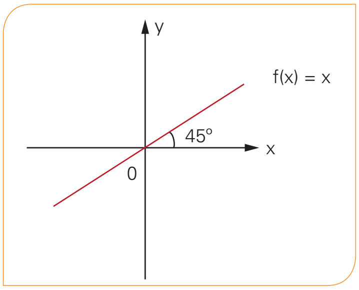
Função identidade

A função identidade é um caso particular da função linear, cujo valor de **a** é igual a 1. Ou seja, $f(x) = x$, em que cada elemento tem como imagem ele mesmo.

$D = \mathbb{R}$, $CD = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$.

x	y
−1	−1
0	0
1	1

O gráfico de uma função identidade é uma reta bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano, passando pela origem do sistema.



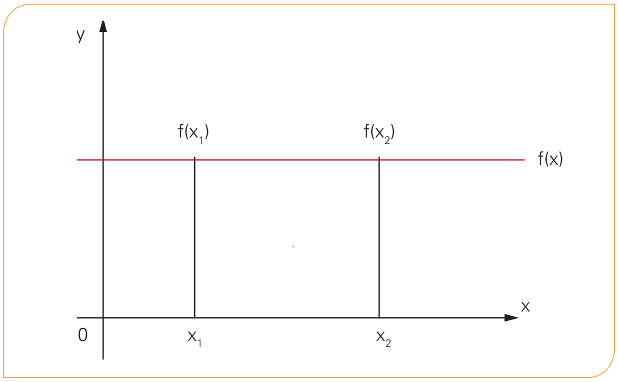
Na função $f(x) = x$, como o coeficiente angular **a** vale 1, então $\tan \alpha = 1 \rightarrow a = 45°$

O coeficiente linear **b** vale 0, ou seja, o gráfico intercepta o eixo y na origem.

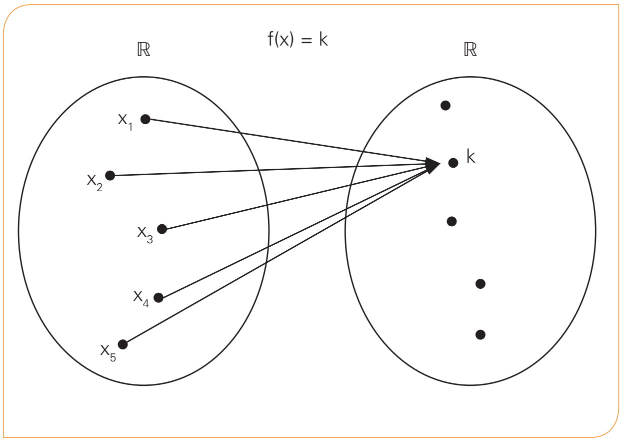
Função constante

É a função real definida por $f(x) = k$, na qual k é uma constante. Observe que a função tem imagem k para qualquer valor de x.

O gráfico é uma reta paralela ao eixo x, passando na ordenada k. De maneira geral, a função f(x) é constante se, para quaisquer x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$ pertencentes a determinado intervalo, tiver $f(x_1) = f(x_2)$.



Numa função constante, qualquer que seja o elemento do domínio, ele sempre terá a mesma imagem. Ou seja, ao variar x encontra-se sempre o mesmo valor k.



ROTEIRO DE AULA

FUNÇÃO

Representação

Algébrica (a, b ∈ ℝ

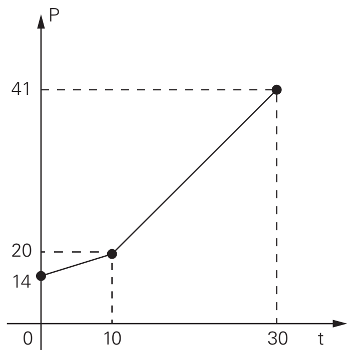
- Função linear: y = ax.
- Função identidade: y = x.
- Função constante: y = b.

Gráfica

- Função linear: reta que passa pela origem.
- Função identidade: reta que é bissetriz dos quadrantes I e III.
- Função constante: reta paralela do eixo x.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. EBMSP - Medicina C6-H25



Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) o segmento populacional que mais tem aumentado no Brasil é o de idosos – pessoas com 60 anos ou mais. Em 2000, 14,2 milhões de brasileiros tinham 60 anos ou mais. Em 2010, eram 19,6 milhões e estima-se para 2030, 41,5 milhões. O gráfico foi esboçado, considerando-se uma aproximação do número de idosos P, em milhões, como função de t, em que t = 0, ..., 30 corresponde a 2000, ..., 2030, respectivamente. Com base no gráfico e considerando que em cada intervalo de tempo destacado na figura a razão de aumento dessa população é constante, pode-se afirmar que de 2000 a 2020 houve um aumento aproximado do número de idosos, em milhões, de

a) 24,5
b) 22,8
c) 20,4
d) 18,6
e) 16,5

A partir de t = 10, temos o coeficiente $a = \frac{41 - 20}{20} = \frac{21}{20}$. Logo, em 2020, ou seja, t = 20, temos um aumento de $10 \cdot \frac{21}{20} = 10{,}5$ milhões de idosos. Então, $P(20) = 20 + 10{,}5 \to P(20) = 30{,}5$. Assim, de 2000 a 2020 tivemos um aumento de $30{,}5 - 14 = 16{,}5 \to 16{,}5$ milhões de idosos.

2. Unesp – A tabela indica o gasto de água, em **m³** por minuto, de uma torneira (aberta), em função do quanto seu registro está aberto, em voltas, para duas posições do registro.

Abertura da torneira (volta)	Gasto de água por minuto (m^3)
$\frac{1}{2}$	0,02
1	0,03

Disponível em: <http://www.sabesp.com.br> (adaptado).
Acesso em: 27/09/2018.

Sabe-se que o gráfico do gasto em função da abertura é uma reta, e que o gasto de água, por minuto, quando a torneira está totalmente aberta, é de 0,034 m^3. Portanto, é correto afirmar que essa torneira estará totalmente aberta quando houver um giro no seu registro de abertura de 1 volta completa e mais

a) $\frac{1}{2}$ de volta
b) $\frac{1}{5}$ de volta
c) $\frac{2}{5}$ de volta
d) $\frac{3}{4}$ de volta
e) $\frac{1}{4}$ de volta

Seja v o número de voltas da torneira e f(v), o gasto (em m^3 por minuto) de água que jorra pela torneira,
temos que: $G(v) = av + b$.

$G\left(\frac{1}{2}\right) = a \cdot \frac{1}{2} + b = 0{,}02$

$G(1) = a \cdot 1 + b = 0{,}03$

Assim, a = 0,02 e b = 0,01. Com isso, temos $G(v) = 0{,}02v + 0{,}01$.
Portanto,

$G(v) = 0{,}034 \to 0{,}02v + 0{,}01 = 0{,}034 \to 0{,}02v = 0{,}024 \to$

$\to v = \frac{0{,}024}{0{,}02} \to v = 1{,}2 \to v = \frac{12}{10} = 6{,}5 = 1 + \frac{1}{5}$

3. Unicamp (adaptada) – Em 14 de outubro de 2012, Felix Baumgartner quebrou o recorde de velocidade em queda livre. O salto foi monitorado oficialmente e os valores obtidos estão expressos de modo aproximado na **tabela** e no gráfico abaixo. Supondo que a velocidade continuasse variando de acordo com os dados da tabela, encontre o valor da velocidade, em km/h, no trigésimo segundo.

Tempo (segundos)	0	1	2	3	4
Velocidade (km/h)	0	35	70	105	140

Temos que a relação matemática da velocidade pelo tempo pode ser descrita por uma função linear $v(t) = 35 \cdot t$. Portanto, quando $t = 30$, temos que $v(30) = 35 \cdot 30 \rightarrow v(30) = 1050 \rightarrow 1050$ km/h.

4. FCM-PB – A equação $X = 3 + 2t$ é a função $f(x)$ para a posição de um móvel adimensional no tempo **t**. Qual o instante no qual o móvel ocupa a posição de 20 metros e qual a posição desse móvel após 6 segundos respectivamente? Considere os valores da equação expressos em unidades do sistema internacional (SI).

a) 3 segundos e 2 metros
b) 8,5 segundos e 15 metros
c) 2 segundos e 3 metros
d) 3 segundos e 6 metros
e) 3 segundos e 1,5 metros

Temos que calcular t e X dados $X = 20$ e $t = 6$, respectivamente.
Logo, $20 = 3 + 2t \rightarrow 2t = 17 \rightarrow t = \frac{17}{2} \rightarrow t = 8{,}5 \rightarrow 8{,}5$ s.
$X = 3 + 2 \cdot 6 \rightarrow X = 15 \rightarrow 15$ m

5. UFSM – Uma pesquisa do Ministério da Saúde revelou um aumento significativo no número de obesos no Brasil. Esse aumento está relacionado principalmente com o sedentarismo e a mudança de hábitos alimentares dos brasileiros. A pesquisa divulgada em 2013 aponta que 17% da população está obesa. Esse número era de 11% em 2006, quando os dados começaram a ser coletados pelo Ministério da Saúde.

Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/saude/2013/08/obesidade-atinge-mais-da-metade-dapopulacao-brasileira-aponta-estudo>. Acesso em: 10 set. 2014.

Suponha que o percentual de obesos no Brasil pode ser expresso por uma função afim do tempo t em anos, com $t = 0$ correspondente a 2006, $t = 1$ correspondente a 2007 e assim por diante. A expressão que relaciona o percentual de obesos Y e o tempo t, no período de 2006 a 2013, é

a) $y = \frac{3}{4}t - \frac{44}{3}$
b) $y = t + 11$
c) $y = \frac{6}{7}t + 11$
d) $y = \frac{3}{4}t + 11$

Temos que a variação de 2006 para 2013 foi de +6% (ou seja, em 7 anos). Logo, numa função afim, $a = \frac{6}{7}$ e $b = 11$ (quando $t = 0$). Portanto, a função que descreve o problema é $y = \frac{6}{7}t + 11$.

6. Sistema Bom Bosco – Verifique se a sentença é verdadeira ou falsa.

a) Na relação $y = 2x$, pode-se afirmar que as grandezas y e x são diretamente proporcionais.
b) Na relação $y = 2x + 1$, pode-se afirmar que as grandezas y e x são diretamente proporcionais.

a) Verdadeiro, pois $\frac{y}{x} = 2$ (constante).
b) Falso, pois $\frac{y-1}{x} = 2 \rightarrow \frac{y}{x} - \frac{1}{x} = 2 \rightarrow \frac{y}{x} = 2 + \frac{1}{x}$. A expressão $2 + \frac{1}{x}$ não é constante (x é variável).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Sistema Dom Bosco – Se f(x) = 25, para todo x real, então o valor de f(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 18 + 19 + 20) é:

a) 20
b) 25
c) 210
d) 250
e) 420

8. Famevaço – Uma determinada máquina hospitalar sofre uma desvalorização no seu preço com o tempo. Se o seu preço de fábrica é de R$ 40.000,00 e supondo que, após 4 anos de uso, a máquina sofra uma desvalorização de R$ 8.000,00, qual será o seu valor depois de 8 anos de uso, considerando que a variação do preço com o tempo seja linear?

a) R$ 34.000,00
b) R$ 25.000,00
c) R$ 22.000,00
d) R$ 24.000,00

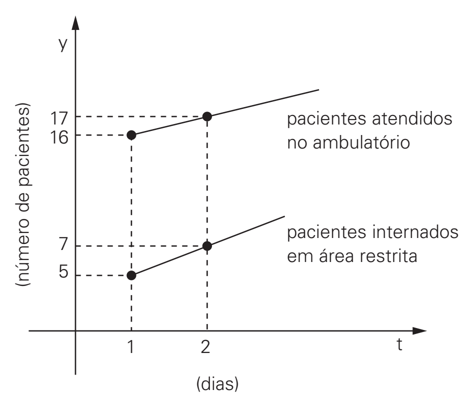
9. Sistema Bom Bosco – Para publicar uma revista, há um investimento inicial de R$ 100.000,00 e, depois um gasto de R$ 4,00 por exemplar. Calculando-se o número de exemplares se for custo R$ 200.000,00 e o custo por exemplar, numa tiragem de 5 000 exemplares, obtém-se, respectivamente:

a) 50.000 e R$ 4,00
b) 50.000 e R$ 24,00
c) 25.000 e R$ 4,00
d) 25.000 e R$ 24,00

10. Unicamp – O consumo mensal de água nas residências de uma pequena cidade é cobrado como se descreve a seguir. Para um consumo mensal de até 10 metros cúbicos, o preço é fixo e igual a 20 reais. Para um consumo superior, o preço é de 20 reais acrescidos de 4 reais por metro cúbico consumido acima dos 10 metros cúbicos. Considere C(x) a função que associa o gasto mensal com o consumo de metros cúbicos de água.

a) Esboce o gráfico da função C(x) no plano cartesiano para x entre 0 e 30.
b) Para um consumo mensal de 4 metros cúbicos de água, qual é o preço efetivamente pago por metro cúbico? E para um consumo mensal de 25 metros cúbicos?

11. ESCS (adaptada)

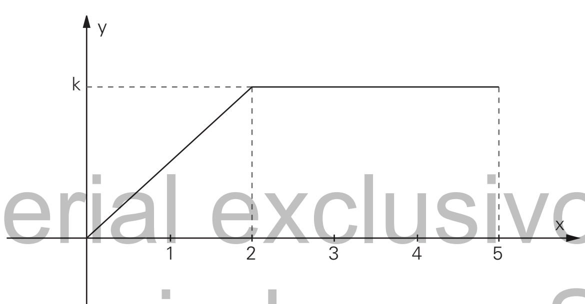


A figura acima apresenta os gráficos de duas funções do 1º grau que representam o número de pacientes atendidos no ambulatório de um hospital e o número de pacientes internados em uma área restrita, no primeiro e no segundo dias de observação. Considerando que essas funções representem os referidos números ao longo de 30 dias, em qual dia, a partir do primeiro dia, o número de pacientes atendidos no ambulatório será igual ao número de internados em área restrita?

12. UPF – João resolveu fazer um grande passeio de bicicleta. Saiu de casa e andou calmamente, a uma velocidade (constante) de 20 quilômetros por hora. Meia hora depois de ele partir, a mãe percebeu que ele havia esquecido o lanche. Como sabia por qual estrada o filho tinha ido, pegou o carro e foi à procura dele a uma velocidade (constante) de 60 quilômetros por hora. A distância que a mãe percorreu até encontrar João e o tempo que ela levou para encontrá-lo foram de:

a) 10 km e 30 min
b) 15 km e 15 min
c) 20 km e 15 min
d) 20 km e 30 min
e) 20 km e 1 h

13. UEG – A função f(x) que representa o gráfico a seguir, onde k é uma constante não nula, é dada por:



a) $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ k, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} k, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ 3k, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ kx, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} kx, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ k, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ x, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

14. Sistema Dom Bosco – A imagem da função $f:[-3,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } x \le 0 \\ 1, \text{ se } > 0 \end{cases}$ é:

a) $[-3, 0] \cup \{1\}$
b) $[-3, 0]$
c) $[3, 0]$
d) $[0, 3] \cup \{1\}$

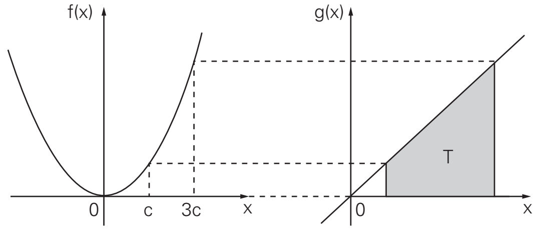
15. Unicamp (adaptada) – A numeração dos calçados obedece a padrões distintos, conforme o país. No Brasil, essa numeração varia de um em um, e vai de 33 a 45, para adultos. Considere a tabela abaixo.

Numeração brasileira (t)	Comprimento do calçado (x)
35	23,8 cm
42	27,3 cm

a) Suponha que as grandezas estão relacionadas por uma função afim $t(x) = ax + b$ para a numeração brasileira. Encontre os valores dos parâmetros a e b da expressão que permite obter a numeração dos calçados brasileiros em termos do comprimento.

b) Qual o comprimento do calçado, produzido no Brasil, cuja numeração brasileira é 40?

16. UPF – A figura a seguir representa, em sistemas coordenados com a mesma escala, os gráficos das funções reais f e g, com $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.



Sabendo que a região poligonal T demarca um trapézio de área igual a 160, o número real c é:

a) 2
b) 1,5
c) $\sqrt{2}$
d) 1
e) 0,5

17. Sistema Dom Bosco – Seja A o ponto de interseção dos gráficos das funções reais $f(x) = 3x$ e $g(x) = 2x + 2$. Se B e C são, respectivamente, a interseção das funções com os eixos das abscissas, a área do triângulo ABC é:

a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H21

Uma fábrica de papel higiênico produz embalagens com quatro rolos de 30 m cada, cujo preço para o consumidor é R$ 3,60. Uma nova embalagem com dez rolos de 50 m cada, de mesma largura, será lançada no mercado. O preço do produto na nova embalagem deve ser equivalente ao já produzido, mas, para incentivar as vendas, inicialmente o preço de venda terá um desconto de 10%. Para que isso aconteça, o preço de venda da nova embalagem, em real, deve ser

a) 8,10
b) 9,00
c) 9,90
d) 13,50
e) 15,00

19. Enem C5-H21

O gerente de um estacionamento, próximo a um grande aeroporto, sabe que um passageiro que utiliza seu carro nos traslados casa-aeroporto-casa gasta cerca de R$ 10,00 em combustível nesse trajeto. Ele sabe, também, que um passageiro que não utiliza seu carro nos traslados casa-aeroporto-casa gasta cerca de R$ 80,00 com transporte. Suponha que os passageiros que utilizam seus próprios veículos deixem seus carros nesse estacionamento por um período de dois dias. Para tornar atrativo a esses passageiros o uso do estacionamento, o valor, em real, cobrado por dia de estacionamento deve ser, no máximo, de

a) 35,00
b) 40,00
c) 45,00
d) 70,00
e) 90,00

20. Enem C5-H21

Uma empresa de entregas presta serviços para outras empresas que fabricam e vendem produtos. Os fabricantes dos produtos podem contratar um entre dois planos oferecidos pela empresa que faz as entregas. No plano A, cobra-se uma taxa fixa mensal no valor de R$ 500,00, além de uma tarifa de R$ 4,00 por cada quilograma enviado (para qualquer destino dentro da área de cobertura). No plano B, cobra-se uma taxa fixa mensal no valor de R$ 200,00, porém a tarifa por cada quilograma enviado sobe para R$ 6,00. Certo fabricante havia decidido contratar o plano A por um período de 6 meses. Contudo, ao perceber que ele precisará enviar apenas 650 quilogramas de mercadoria durante todo o período, ele resolveu contratar o plano B.

Qual alternativa avalia corretamente a decisão final do fabricante de contratar o plano B?

a) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R$ 500,00 a menos do que o plano A custaria

b) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R$ 1.500,00 a menos do que o plano A custaria

c) A decisão foi ruim para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R$ 1.000,00 a mais do que o plano A custaria

d) A decisão foi ruim para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R$ 1.300,00 a mais do que o plano A custaria

e) A decisão foi ruim para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R$ 6.000,00 a mais do que o plano A custaria

13 FUNÇÃO QUADRÁTICA

- Introdução
- Definição
- Gráfico da função
- Raízes da função
- Forma fatorada

HABILIDADES

- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

Introdução

A **parábola** é a curva determinada por uma função polinomial do 2º grau, também chamada de **função quadrática**. Essa forma pode ser encontrada em diversos lugares, como na natureza, em construções civis, na área de telecomunicações. Na natureza está presente, por exemplo, na forma geométrica de algumas árvores. Na construção das pontes pênseis, engenheiros utilizam esse conceito matemático para torná-las mais estáveis e econômicas. Também existem outras aplicações, como antenas parabólicas, bastante utilizadas na comunicação, por meio de transmissão via satélite, telefonia móvel e GPS; faróis de automóveis são construídos com base nesse princípio matemático e obras arquitetônicas têm beleza diferenciada em virtude da aplicação dos conhecimentos dessa área.

R.M. NUNES/SHUTTERSTOCK

Ponte Juscelino Kubitschek em Brasília, DF.

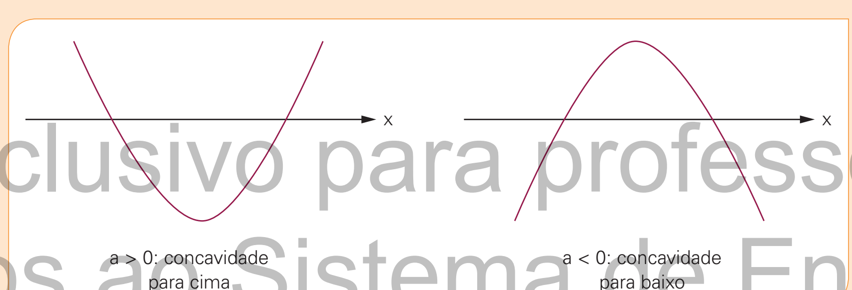
DEFINIÇÃO

Função quadrática ou função polinomial do 2º grau é uma função real que pode ser expressa por

$f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$.

GRÁFICO DA FUNÇÃO

No gráfico de uma parábola, a concavidade pode estar voltada para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$).



Exemplo:

Verifique se a parábola que representa cada função tem concavidade para cima ou para baixo.

- $f(x) = x^2 + 2x - 1$

  Concavidade voltada para cima, pois $(a > 0)$.
- $g(x) = -4x^2 + 4x + 1$

  Concavidade voltada para baixo, pois $(a < 0)$.

RAÍZES DA FUNÇÃO

As raízes (ou zeros) da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são valores de x reais tais que $f(x) = 0$. Portanto, são soluções da equação do 2º grau. Ou seja, para encontrá-las, faz-se $ax^2 + bx + c = 0$, o que leva a uma equação do 2º grau.

A resolução da equação do 2º grau pode ser feita com auxílio da chamada fórmula resolutiva de **Bhaskara:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

Conforme o valor do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, a interseção do gráfico com o eixo **x** pode ocorrer em apenas um ponto, em dois pontos pode ou não existir.

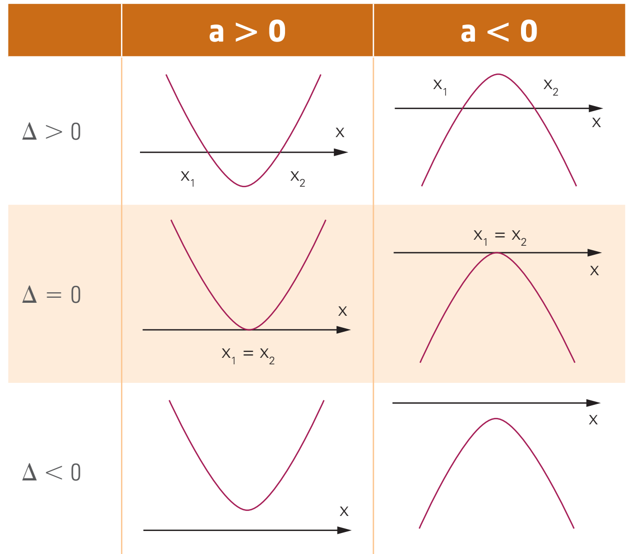
$\Delta > 0 \rightarrow$ a parábola encontra o eixo **x** em dois pontos distintos

$\Delta = 0 \rightarrow$ a parábola encontra o eixo **x** em apenas um ponto

$\Delta < 0 \rightarrow$ a parábola não encontra o eixo **x**

Significado geométrico das raízes

Interpretando geometricamente, diz-se que as raízes da função quadrática são os pontos em que a parábola corta o eixo das **abscissas**.



Observação: se, para determinar as raízes da função, ou seja, os pontos em que o gráfico intercepta o eixo x, faz-se imagem $y = 0$, para encontrar o ponto de interseção do gráfico da função com o eixo vertical, faz-se $x = 0$.

Assim, no caso da função quadrática tem-se:

$x = 0 \rightarrow f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow f(0) = c$

Portanto, o ponto de interseção da parábola com o eixo vertical é aquele dado pelas coordenadas $(0, c)$.

FORMA FATORADA

O trinômio $ax^2 + bx + c$ pode ser fatorado quando são conhecidas as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Dadas as raízes x_1 e x_2, podemos escrever:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Em muitos exercícios, será útil utilizar $f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ no lugar de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemplo:

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$a = 1$, e as raízes são $x = 1$ e $x = 3$

$f(x) = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$

ROTEIRO DE AULA

Função quadrática

Representação

Algébrica

$y = ax^2 + bx + c$
($a \neq 0$ e b; $c \in \mathbb{R}$)
Representação

Raízes (x_1, x_2): x tal que $y = 0$

$x_1 \neq x_2$: $\Delta > 0$

$x_1 = x_2$: $\Delta = 0$

Não existem reais x_1 e x_2: $\Delta < 0$

Gráfica

Parábola

$a > 0$: Concavidade para cima

$a < 0$: Concavidade para baixo

Pontos de intersecção com eixo x

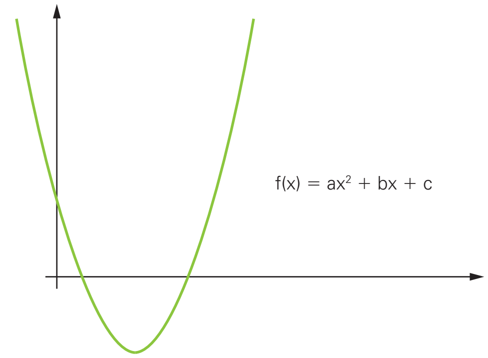
$\Delta > 0$: Dois pontos de intersecção.

$\Delta = 0$: Dois pontos de intersecção.

$\Delta < 0$: não há ponto de intersecção.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unisinos – No gráfico abaixo, está representada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.



a) $a < 0$, $c > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$
b) $a < 0$, $c < 0$ e $b^2 - 4ac < 0$
c) $a > 0$, $c < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$
d) $a > 0$, $c > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$
e) $a > 0$, $c > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$

Analisando o gráfico, temos a concavidade voltada para cima (a . 0), intersecção com o eixo y positivo (c . 0) e duas raízes reais ($\Delta = b^2 - 4ac > 0$).

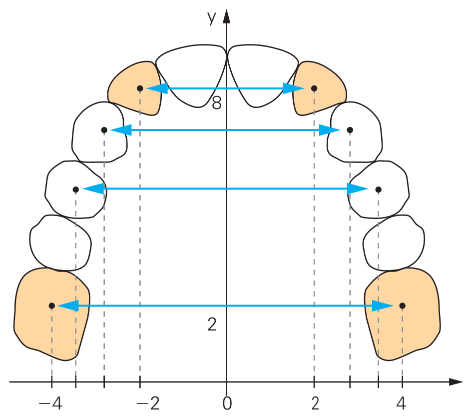
2. Faap – Para que a parábola da equação $y = ax^2 + bx - 2$ contenha os pontos $(-3,1)$ e $(1,1)$, os valores de a e b são, respectivamente,

a) 1 e 2
b) 2 e 1
c) -2 e -1
d) 1 e $\frac{1}{2}$
e) -1 e -2

Temos no ponto $(-3,1)$:
$1 = a(-3)^2 + b(-3) - 2 \rightarrow 9a - 3b = 3 \rightarrow 3a - b = 1$
No ponto $(1,1)$:
$1 = a \cdot (1)^2 + b \times (1) - 2 \rightarrow a - b = 3$
Então, somando as duas equações:
$4a = 4 \rightarrow a = 1$
Como $a + b = 3 \rightarrow 1 + b = 3 \rightarrow b = 2$.

3. FAMERP C6-H25

A figura representa o desenho da arcada dentária de um animal, feito no plano cartesiano ortogonal em escala linear.



Sabendo que as posições dos centros dos dentes destacados em cinza nessa arcada são modeladas nesse plano por meio da função quadrática $y = ax^2 + b$, então a+ b é igual a

a) 8,5
b) 9,2
c) 9,5
d) 10,2
e) 9,0

Temos o ponto (2,8) e (4,2) no gráfico. Utilizando esses pontos na função:

$8 = a(2)^2 + b \rightarrow 4a + b = 8 \rightarrow 16a + 4b = 32$

$2 = a(4)^2 + b \rightarrow 16a + b = 2$

Logo, subtraindo as equações, temos: $3b = 30 \rightarrow b = 10$.
Assim, substituindo o valor de b na segunda equação:

$16a + 10 = 2 \rightarrow 16a = -8 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$.

Portanto, $a + b = 10 - 0,5 = 9,5$.

4. Unicamp – Sejam a e b reais. Considere as funções quadráticas da forma $f(x) = x^2 + ax + b$, definidas para todo x real.

a) Sabendo que o gráfico de $y = f(x)$ intercepta o eixo y no ponto (0,1) e é tangente ao eixo x, determine os possíveis valores de a e b.

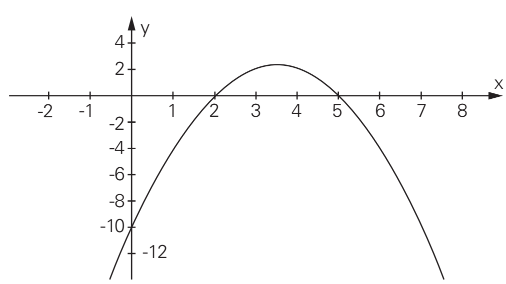
b) Quando $a + b = 1$, os gráficos dessas funções quadráticas têm um ponto em comum. Determine as coordenadas desse ponto.

a) Conforme as informações dadas, $f(0) = 1 \rightarrow 0^2 + a \cdot 0 + b = 1 \rightarrow b = 1$. O discriminante da quadrática é nulo. Então, $a^2 - 4b = 0$. Portanto, temos $b = 1$ e $a = \pm 2$.

b) Como $b = 1 - a$, temos $f(x) = x^2 + ax + 1 - a$. Para $x = 1$, temos $y = f(1) = 2$, independentemente do valor de a.

Portanto, nas funções quadráticas cuja soma $a + b = 1$, tem-se (1,2) como ponto comum a elas.

5. UEG – A função real cujo gráfico está representado a seguir é



a) $x^2 - 7x + 10$

b) $-x^2 + 7x - 10$

c) $-x^2 + 7x + 10$

d) $x^2 - 7x - 10$

e) $-x^2 - 7x + 10$

Temos a concavidade da parábola para baixo ($a < 0$). Intercepta o eixo y em -10 ($c = -10$). As raízes são $x = 2$ e $x = 5$. Logo, a soma das raízes (s) é 7, e o produto (p) é 10. Ou seja:

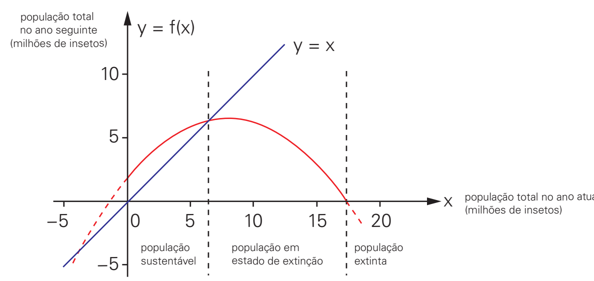
$s = -\frac{b}{a} = 7$ e $p = \frac{c}{a} = 10 \rightarrow -\frac{10}{a} = 10 \rightarrow a = -1$

Substituindo o valor de a na expressão s, temos:

$s = -\frac{b}{a} = 7 \rightarrow \frac{-b}{-1} = 7 \rightarrow b = 7$

6. Unesp (adaptada) – O gráfico da parábola dada pela função $y = -\frac{3}{30}(x^2 - 16x - 24)$ indica, para uma determinada população de insetos, a relação entre a população total atual (x) e a população total no ano seguinte, que seria f(x). Por exemplo, se a população atual de insetos é de 1 milhão ($x = 1$), no ano seguinte será de 2,925 milhões, já que $f(1) = 2{,}925$.

Dizemos que uma população de insetos está em tamanho sustentável quando a população total do ano seguinte é maior ou igual à população total atual, o que pode ser identificado graficamente com o auxílio da reta em azul ($y = x$).



Determine a população total atual de insetos para a qual, no ano seguinte, ela será igual a zero (adote $\sqrt{22} = 4{,}7$).

$$f(x) = 0 \rightarrow -\frac{3}{30}(x^2 - 16x + 24) = 0 \rightarrow x^2 - 16x - 24 = 0$$

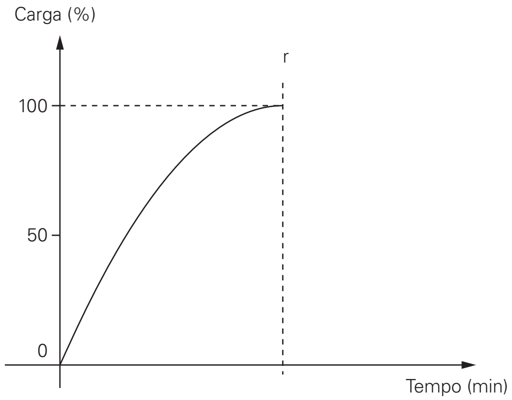
$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{352}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{16 \cdot 22}}{2} \rightarrow x = \frac{16 \pm 4 \cdot 4{,}7}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{16 + 18{,}8}{2} = 17{,}4 \\ x = \frac{16 - 18{,}8}{2} = -1{,}4 \end{cases}$$

Como ($x > 0$), $x = 17{,}4$ milhões.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. FGV-RJ – João colocou para carregar seu celular que estava completamente descarregado e, em seguida, anotou diversas vezes o tempo decorrido de carregamento, em minutos, e a porcentagem correspondente da carga total que estava acumulada naquele instante. O tempo até o final do carregamento durou exatamente duas horas. João representou suas observações como pontos no plano cartesiano, onde, no eixo horizontal, assinalou o tempo decorrido após o início do carregamento e, no vertical, a correspondente carga acumulada. Esses pontos sugeriram que uma boa aproximação para a relação entre essas duas grandezas era o arco da parábola de eixo r representado no gráfico ao lado:



f) Determine a expressão da função que fornece, para cada valor x do tempo de carregamento (em minutos), a porcentagem y da carga total acumulada até aquele instante.

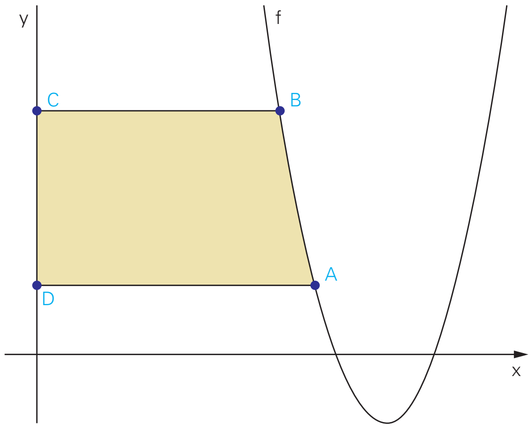
g) Determine a porcentagem da carga total acumulada após 1 hora de carregamento.

8. UNB (adaptada) – A umidade relativa do ar em Brasília, em agosto, normalmente atinge índices muito baixos. Considerando que, em Brasília, a umidade relativa do ar durante certo dia de agosto, dia X, está descrita, em porcentagem, pela função $f(t) = 0{,}4t^2 - 11t + 92$, com $4 \leqslant t \leqslant 24$, em que t é o tempo, em horas. Às seis horas do dia X, a umidade relativa do ar em Brasília foi superior a 40%.

a) Certo

b) Errado

9. UPF – Na figura, está representada, no referencial xy, parte do gráfico da função definida por $f(x) = x^2 - 20x + 98$. O ponto C tem ordenada 7 e o ponto A tem abscissa 8. Desprezando a curvatura da parábola e, assim, considerando o lado BC do trapézio retângulo ABCD como um segmento reto, a área desse trapézio é:



a) 48 unidades de área

b) 40 unidades de área

c) 37,5 unidades de área

d) 35,7 unidades de área

e) 35 unidades de área

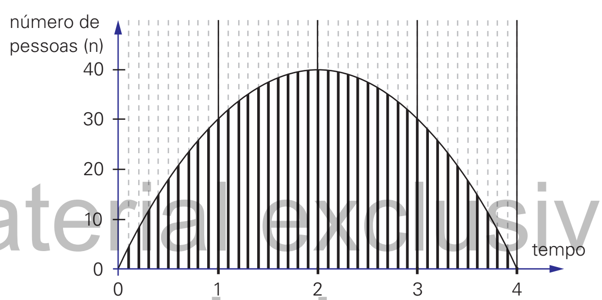
10. Sistema Dom Bosco – Encontrar a função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos:

A(0, 1); B(21, 22) e C(22, 27).

11. Sistema Dom Bosco – Os gráficos das funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = mx$ se encontram em um único ponto. Então, o valor de m é:

a) -1 ou 1
b) -2 ou 2
c) $-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}$
d) -3 ou 3
e) $-\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3}$

12. Insper – O número n de pessoas presentes em uma festa varia ao longo do tempo t de duração da festa, em horas, conforme mostra o gráfico a seguir.



Das opções abaixo, aquela que melhor descreve a função n(t) é

a) $n(t) = -10t^2 + 4t + 50$
b) $n(t) = -10t^2 + 40t + 50$
c) $n(t) = -10t^2 + 4t$
d) $n(t) = -10t^2 + 40t$

13. Sistema Dom Bosco – A função $g(x) = ax^2 + bx + 3$ tem $g(1) = 9$ e $g(-1) = 1$. O valor de $a - b$ é:

a) -6
b) -2
c) 1
d) 2
e) 4

14. Sistema Dom Bosco – Sobre o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$, com $a + b + c = 1$ é correto afirmar:

a) é uma parábola.
b) passa na origem.
c) passa no ponto (1,1).
d) passa no ponto (1,0).
e) é uma reta.

15. Unisinos – O gráfico da função quadrática $y = 2x^2 - mx + (m - 2)$, definida no conjunto dos números reais, intercepta o eixo x em um único ponto. Nesse caso, o valor de y correspondente ao valor de $x = -1$ é

a) -2
b) 0
c) 2
d) 4
e) 8

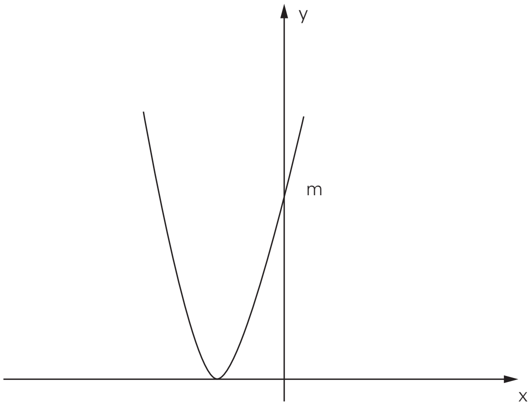
16. Sistema Dom Bosco – Os dados experimentais da tabela a seguir correspondem às temperaturas de um refrigerador, em graus Celsius, medidas a cada minuto.

Tempo	Temperatura
1 min	3°C
2 min	5°C
3 min	1°C

Sabendo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a temperatura do refrigerador no início das medições é:

a) -1°C
b) -2°C
c) -3°C
d) -4°C
e) -5°C

17. Sistema Dom Bosco – Na figura, temos o gráfico da função real definida por $y = x^2 + kx + (8 - k)$.



O valor de m é:

a) 2
b) 4
c) 8
d) 16
e) 32.

18. Enem C5-H21

Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e as mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola: $y = 9 - x^2$ sendo x e y medidos em metros. Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

a) 18
b) 20
c) 36
d) 45
e) 54

19. Enem C5-H21

Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e t = 0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no

a) 19º dia.
b) 20º dia.
c) 29º dia.
d) 30º dia.
e) 60º dia.

20. Enem (Adaptada) C5-H21

Um posto de gasolina vende 10 000 litros de álcool por dia a R$ 3,15 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do litro foi R$ 3,13 foram vendidos 10 200 litros.
Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em reais, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é:

a) $V = 30\,000 + 215x - x^2$
b) $V = 30\,000 + 215x + x^2$
c) $V = 31\,500 - 215x - x^2$
d) $V = 31\,500 + 215x - x^2$
e) $V = 31\,500 - 215x + x^2$

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

14

Neste módulo iremos analisar algumas propriedades importantes das funções quadráticas, como o vértice da parábola, seu conjunto imagem, máximos e mínimos da função e suas aplicações.

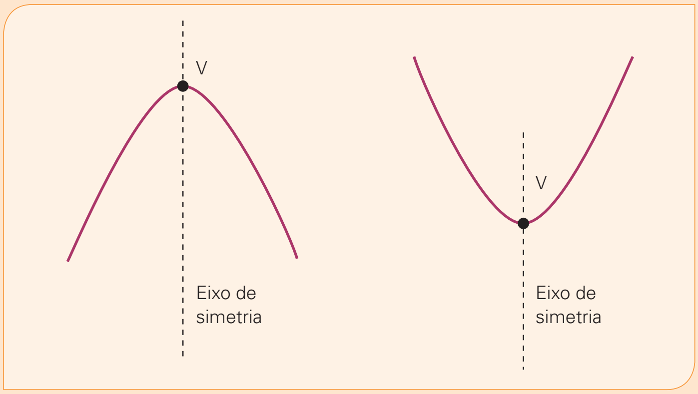
- Vértice da parábola
- Conjunto imagem
- Pontos extremos
- Aplicações

HABILIDADES

- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para elaborar argumentos.
- Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

Vértice da parábola

O **vértice** é um ponto do gráfico sobre o eixo de simetria, no qual a parábola inverte o sentido de crescimento, isto é, de **decrescente** para **crescente** ou vice-versa. Corresponde a um ponto especial do gráfico, pois, dependendo da concavidade da parábola, o vértice pode indicar o ponto mais "alto" do gráfico (concavidade para baixo) ou o mais "baixo" (concavidade para cima). No ponto máximo, diz-se que a função tem um valor **máximo.** No segundo caso, tem valor **mínimo**, conforme os gráficos a seguir.



Essa análise é de grande aplicabilidade, pois existem diversas situações reais em que precisamos encontrar extremos de uma função. Por exemplo: encontrar o máximo de lucro da venda de um produto em que seu lucro é descrito por uma função quadrática.

CÁLCULO DO VÉRTICE DE UMA PARÁBOLA

Para determinar a abscissa do vértice (x_v), sendo o gráfico simétrico em relação à reta vertical, usa-se o fato de que os valores ($x_v + k$) e ($x_v - k$) apresentam a mesma imagem, ou seja, $f(x_v + k) = f(x_v - k)$. Sendo:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x_v + k) = a(x_v + k) + \mathbf{b}(\mathbf{x_v} + \mathbf{k}) + \mathbf{c} = \mathbf{y_1}$

$f(x_v - k) = a(x_v + k) + \mathbf{b}(\mathbf{x_v} + \mathbf{k}) + \mathbf{c} = \mathbf{y_2}$

Sendo $y_1 = y_2$, temos:

$a(x_v^2 + 2kx_v + k^2) + bx_v + bk + c = a(x_v^2 - 2kx_v + k^2) + bx_v - bk + c \rightarrow$

$\rightarrow 4akx_v = -2bk \rightarrow x_v = -\dfrac{b}{2a}$

Observação: x_v é a média aritmética das abscissas de quaisquer dois pontos simétricos na parábola. Sendo assim, pode-se escrever também que $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, em que x_1 e x_2 são raízes da função.

Para determinar a ordenada do vértice y_v, usa-se o fato de que o vértice é um ponto pertencente à parábola e que, portanto, a imagem de x_v é y_v, ou seja, $y_v = f(x_v)$.

Assim, temos:

$$y_v = f(x_v) = a(x_v) + b(x_v) + c \rightarrow y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \rightarrow y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \rightarrow$$

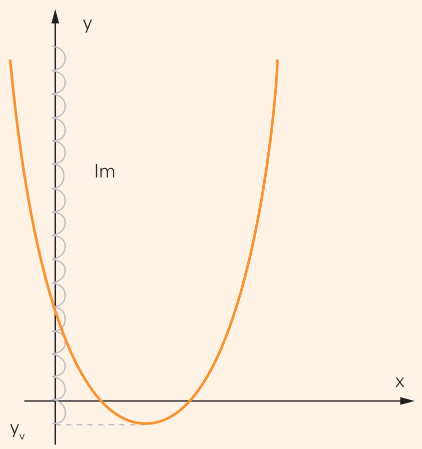
$$\rightarrow y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Representando o vértice por $V(x_v, y_v)$ e sabendo que $y_v = f(x_v)$, tem-se $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. Portanto, conhecendo y_v, obtém-se o **conjunto imagem**.

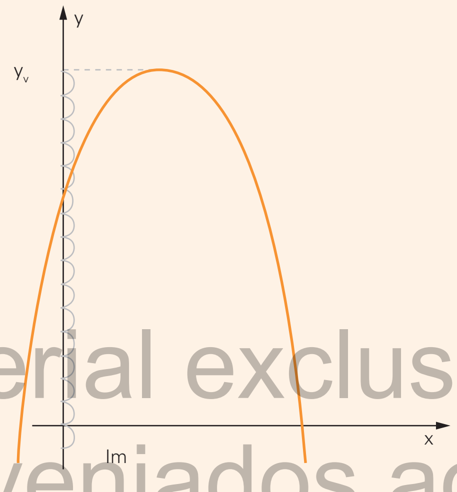
CONJUNTO IMAGEM

O conjunto imagem de uma função quadrática está associado ao ponto extremo, ou seja, à ordenada do vértice y_v:

$\{a \geq 0 \in \text{Im}\ \{y \in \mathbb{R} | y \geq y_v\}$



$\{a < 0 \in \text{Im}\ \{y \in \mathbb{R} | y \leq y_v\}$

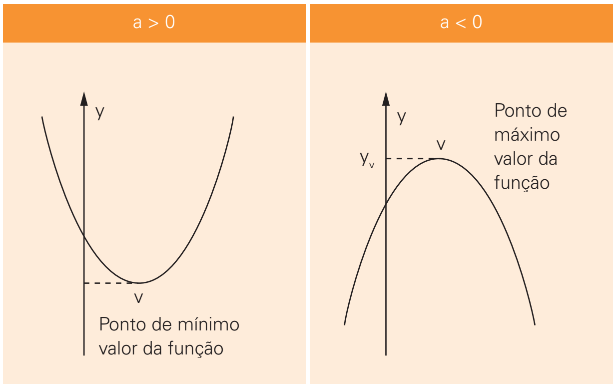


PONTOS EXTREMOS

Na função quadrática, destaca-se um ponto muito importante, o **vértice**. Seu estudo leva à análise de situações de extrema importância no dia a dia. Se, por acaso, um problema que analisa o lucro de uma empresa puder ser expresso por uma função quadrática, $a < 0$, o vértice mostrará em que situação o lucro será máximo.

Valores extremos

Quando a função quadrática tem concavidade para cima, ocorre um **valor mínimo (y_v).** Para baixo, tem-se **valor máximo (y_v).**



APLICAÇÕES

Diversos fenômenos da natureza são descritos matematicamente por meio da função quadrática. Problemas de Física, Química, Biologia, Matemática financeira etc. são resolvidos estudando-se os pontos de máximo ou de mínimo, as raízes, o sinal e a taxa de variação dessa função.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. UFV – A temperatura de uma estufa, em graus Celsius, é regulada em função do tempo t, de acordo com a lei f definida pela sentença $f(t) = -\frac{t^2}{2} + 4t + 10$, sendo $t \geq 0$.

É correto afirmar que:

a) a estufa nunca atinge zero grau.
b) a temperatura é sempre positiva.
c) a temperatura mais alta é atingida para $t = 2$.
d) o valor da temperatura máxima é 18 graus.
e) a temperatura é positiva só para $1 < t < 5$.

Resolução

A abscissa do vértice x_v é dada por:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow x_v = \frac{-4}{-1} \rightarrow x_v = 4$$

Logo, $y_v = f(x_v) = f(4) = 18$

Portanto, o vértice da parábola fica no ponto V(4; 18).

Assim, temos que a temperatura máxima é de 18 graus.

ROTEIRO DE AULA

VÉRTICE DA PARÁBOLA

Graficamente

Ponto V:
V (x_v; y_v)

Eixo de simetria: reta perpendicular ao eixo x que passa pelo vértice.

Pontos da parábola de mesma ordenada são equidistantes ao eixo de simetria.

Concavidade para cima: ponto mais baixo.

Concavidade para baixo: ponto mais alto.

Algebricamente

$x_v = -\frac{b}{2a}$

$y_v = f(x)$

Raízes: x_1 e x_2

f(x): função que representa a parábola.

a > 0: y_v é o menor valor de y.

a < 0: y_v é o maior valor de y.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. CESUPA – O lucro de uma empresa é dado pela função $L(x) = -15x^2 + 180 - 300$, onde x representa o número de unidades vendidas. O valor de x para que o lucro seja máximo é

a) 6
b) 8
c) 10
d) 12

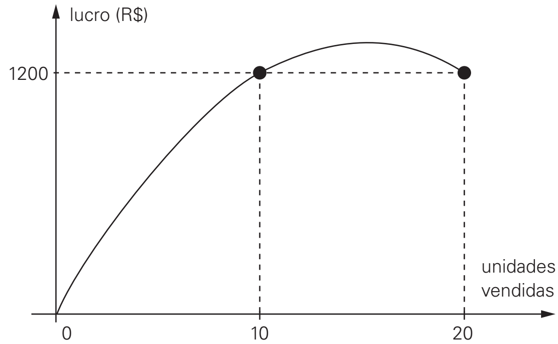
O lucro é máximo no vértice da parábola.

O valor de x para que o lucro seja máximo é x_v dado por:

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-180}{2 \cdot (-15)} = 6.$$

2. ESPM C5-21

O lucro de uma pequena empresa é dado por uma função quadrática cujo gráfico está representado na figura abaixo:



Podemos concluir que o lucro máximo é de:

a) R$ 1.280,00
b) R$ 1.320,00
c) R$ 1.400,00
d) R$ 1.410,00
e) R$ 1.350,00

O lucro máximo é atingido no vértice da parábola.

A abscissa do vértice é dada pela média aritmética entre dois pontos simétricos, logo: $x_v = \frac{10 + 20}{2} = 15$

A parábola intercepta o eixo y na origem, ou seja, c = 0.

Logo, $f(x) = ax^2 + bx$

Nos pontos do gráfico:

$f(10) = 100a + 10b = 1\,200 \rightarrow 10a + b = 120$ (I)

$f(20) = 400a + 20b = 1\,200 \rightarrow 20a + b = 60$ (II)

Então fazendo (II) – (I), vem: $10a = -60 \rightarrow a = -6$

Assim, b = 180

Portanto, $y_v = f(x_v) = f(15) = -6 \cdot 225 + 180 \cdot 15 = 1\,350 \rightarrow$

R$ 1.350,00.

3. PUC-Rio (Adaptado) – Considere a parábola de equação $y = x^2 - x + 1$.

a) Encontre os pontos de interseção da parábola com a reta de equação $y = x + 1$.

b) Encontre b para o qual a parábola intercepta a reta de equação $y = x + b$ em um único ponto.

a) Nos pontos de intersecção, tem-se $x^2 - x + 1 = x + 1 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

Substituindo os valores de x na representação algébrica da reta ou da parábola, vem: (0,1) e (2,3).

b) $x^2 - x + 1 = x + b \rightarrow x^2 - 2x + (1 - b) = 0$. A equação tem uma única solução (duas raízes iguais), ou seja, $\Delta = 0$.

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - b) = 4 - 4 + 4b = 0 \rightarrow b = 0$

4. Unesp – Uma função quadrática f é dada por $f(x) = x^2 + bx + c$, com b e c reais. Se $f(1) = -1$ e $f(2) - f(3) = 1$, o menor valor que f(x) pode assumir, quando x varia no conjunto dos números reais, é igual a

a) –12
b) –6
c) –10
d) –5
e) –8

Do enunciado, temos:

$f(1) = 1^2 + b + c = 1 + b + c = -1 \rightarrow b + c = -2$

$f(2) = 2^2 + 2b + c = 4 + 2b + c$

$f(3) = 3^2 + 3b + c = 9 + 3b + c$

$f(2) - f(3) = -5 - b = 1 \rightarrow b = -6,\ c = 4 \rightarrow f(x) = x^2 - 6x + 4$

O menor valor que a função pode assumir é o y_v.

$$y_v = \frac{-(6^2-4^2)}{4} = \frac{-(-36-16)}{4} = \frac{-20}{4} = -5\ .$$

5. UPE (Adaptado) – Um professor de matemática apresentou a seguinte função quadrática para os seus alunos: $F_1(x) = x^2 - 2x + 1$. Em seguida, começou a alterar os valores do termo independente de x dessa função, obtendo três novas funções:

$F_2(x) = x^2 - 2x + 8;$

$F_3(x) = x^2 - 2x + 16;$

$F_4(x) = x^2 - 2x + 32.$

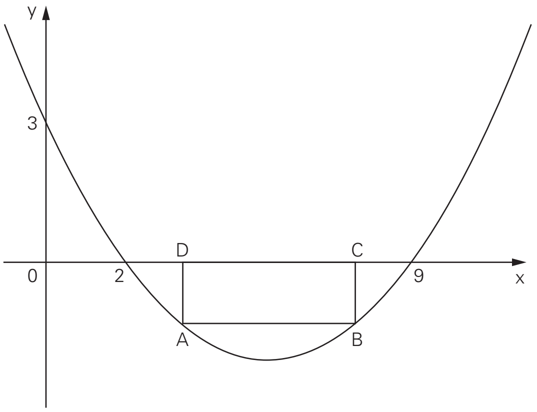
Sobre os gráficos de $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$, em relação ao gráfico da função $F_1(x)$, é CORRETO afirmar que

a) interceptarão o eixo "x" nos mesmos pontos.
b) interceptarão o eixo "y" nos mesmos pontos.
c) terão o mesmo conjunto imagem.
d) terão o mesmo "x" do vértice.
e) terão o mesmo "y" do vértice.

Como o valor da abscissa do vértice só depende dos coeficientes a e b $= \left(x_v = \frac{-b}{2a}\right)$ e todas as funções têm a = 1 e b = – 2

Portanto, todos os gráficos terão a mesma abscissa do vértice.

6. PUC-Rio – O retângulo ABCD tem dois vértices na parábola de equação $y = \frac{x^2}{6} - \frac{11}{6}x + 3$ e dois vértices no eixo x, como na figura abaixo.



Sabendo que D= (3,0), faça o que se pede.

a) Determine as coordenadas do ponto A.
b) Determine as coordenadas do ponto C.
c) Calcule a área do retângulo ABCD.

a) Como D tem a mesma abscissa que A, $y = \frac{9}{6} - \frac{11}{6} \cdot 3 + 3 = -1.$

Então, A = (3,–1).

b) O ponto C tem a mesma abscissa do ponto B e a mesma ordenada do ponto A. Então:

$\frac{x^2}{6} - \frac{11}{6}x + 3 = -1 \rightarrow \frac{x^2}{6} - \frac{11}{6}x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$

x = 3 (ponto A) ou x = 8 (ponto C).

Logo, C = (8,0).

c) O retângulo tem lados 5 e 1. Portanto, sua área é $5 \cdot 1 = 5$.

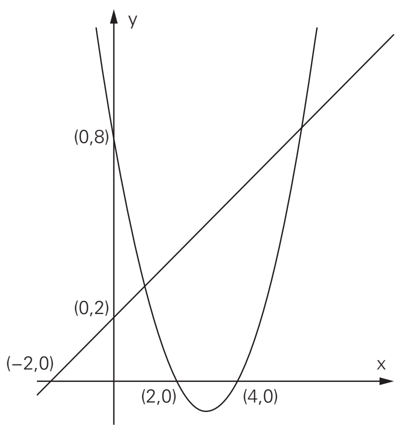
EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. **Sistema Dom Bosco** – A parábola $y = x^2 + bx + c$ passa pelo ponto (1,2) e seu vértice é o ponto (2,n). Pode-se afirmar que n é:
   a) –1
   b) 0
   c) 1
   d) 2

8. **Albert Einstein** – Suponha que, em janeiro de 2016, um economista tenha afirmado que o valor da dívida externa do Brasil era de 30 bilhões de reais. Nessa ocasião, ele também previu que, a partir de então, o valor da dívida poderia ser estimado pela lei $D(x) = -x^2 + 18x + 30$ em que x é o número de anos contados a partir de janeiro de 2016 (x = 0). Se sua previsão for correta, o maior valor que a dívida atingirá, em bilhões de reais, e o ano em que isso ocorrerá, são, respectivamente,
   a) 52 e 2020
   b) 52 e 2018
   c) 48 e 2020
   d) 48 e 2018

9. **ESPM** – O lucro (em reais) obtido com a produção e venda de x unidades de um certo produto é dado pela função $L = k \cdot (x + 10) \cdot (x - 50)$, onde k é uma constante negativa. Podemos avaliar que o maior lucro possível será obtido para x igual a:
   a) 24
   b) 22
   c) 15
   d) 20
   e) 18

10. PUC-Rio – A figura abaixo mostra uma reta e uma parábola de eixo vertical.



a) Sabendo que a reta corta os eixos nos pontos (2, 0) e (0, 2), encontre a equação da reta.

b) Sabendo que a parábola corta os eixos nos pontos (0, 8), (2, 0) e (4, 0), encontre a equação da parábola.

c) Encontre os pontos de interseção entre a reta e a parábola.

11. FAMEMA – Em um plano cartesiano, o ponto P(a, b), com a e b números reais, é o ponto máximo da função $f(x) = -x^2 + 2x + 8$. Se a função $g(x) = 3^{-2x + k}$, com k um número real, é tal que g(a) = b, o valor de k é

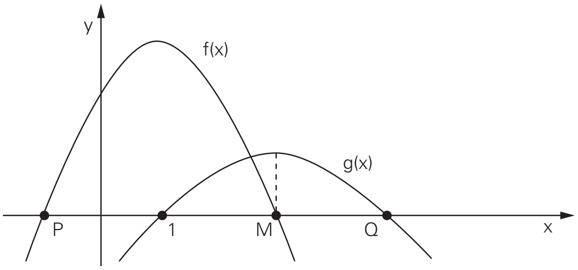
a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 1 **e)** 0

12. FAMEMA – Os gráficos das funções $f(x) = 1 + 2^{(x - k)}$ e $g(x) = 2x + b$, com k e b números reais, se intersectam no ponto (3, 5). Sabendo que k e b são as raízes de uma função do 2° grau, a abscissa do vértice do gráfico dessa função é

a) $\frac{1}{2}$ **c)** 0 **e)** 2

b) –1 **d)** 1

13. IFMT – Abaixo têm-se os gráficos das funções quadráticas f e g.



Sejam $f(x) = -4x^2 + 8x + 5$ e $g(x) = ax^2 + bx + c$, sabendo-se que a função f(x) intercepta o eixo das abscissas nos pontos $P(x_P, 0)$ e $M(x_M, 0)$ e g(x), nos pontos (1,0) e $Q(x_Q, 0)$, temos que g(2) = 5. Se g(x) assume valor máximo quando $x = x_M$, conclui-se que x_Q é o valor do parâmetro e c na função de g(x) são iguais a:

a) $x_Q = 6$ e $c = -2$

b) $x_Q = 5$ e $c = -4$

c) $x_Q = 4$ e $c = -10$

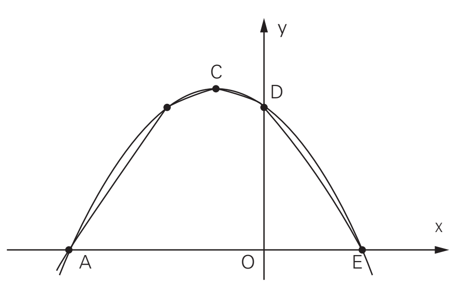
d) $x_Q = 3$ e $c = -8$

e) $x_Q = 6$ e $c = -6$

14. Unicamp (Adaptado) – Sejam c um número real e $f(x) = x^2 - 4x + c$ uma função quadrática definida para todo número real x.

No plano cartesiano, considere a parábola dada pelo gráfico de $y = f(x)$. Determine c no caso em que a abscissa e a ordenada do vértice da parábola têm soma nula e esboce o respectivo gráfico para $0 \leqslant x \leqslant 4$.

15. AFA – No plano cartesiano abaixo estão representados o gráfico da função real f definida por $f(x) = -x^2 - x + + 2$ e o polígono ABCDE.



Considere que:

- o ponto C é vértice da função f;
- os pontos B e D possuem ordenadas iguais;
- as abscissas dos pontos A e E são raízes da função f.

Pode-se afirmar que a área do polígono ABCDE, em unidades de área, é

a) $8\frac{1}{16}$ **b)** $4\frac{1}{8}$ **c)** $4\frac{1}{4}$ **d)** $8\frac{1}{2}$

16. Sistema Dom Bosco – Dois números reais x e y são tais que $2x + y = 12$. O maior produto $x \cdot y$ é:

17. UECE – Sejam E e I os pontos onde o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 + 9x - 18$ intercepta o eixo dos x. Se P(a,b) é o ponto do gráfico de f tal que os ângulos $P\hat{E}I$ e $P\hat{I}E$ são congruentes, então a abscissa a do ponto P é igual a:

a) 3,5 **b)** 4,5 **c)** 5,0 **d)** 5,5

ESTUDO PARA O ENEM

18. Sistema Dom Bosco C5-H21

Quando o preço de um tipo de camiseta é R$ 40,00, são vendidas 200 unidades dessa camiseta por mês. O proprietário da loja constatou que, dentro de certos limites, cada redução de R$ 1,00 no preço da camiseta provoca um aumento nas vendas de 10 camisetas mensais. Supondo que esses limites sejam obedecidos, qual é a maior receita possível na venda dessas camisetas?

a) R$ 8.000,00
b) R$ 9.000,00
c) R$ 10.000,00
d) R$ 11.000,00
e) R$ 12.000,00

19. Enem C6-H26

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

a) muito baixa
b) baixa
c) média
d) alta
e) muito alta

20. UEG C5-H21

A temperatura, em graus Celsius, de um objeto armazenado em um determinado local é modelada pela função $f(x) = -\frac{x^2}{12} + 2x + 10$, com x dado em horas.

A temperatura máxima atingida por esse objeto nesse local de armazenamento é de

a) 0 °C
b) 10 °C
c) 12 °C
d) 22 °C
e) 24 °C

INEQUAÇÕES DO 1º E DO 2º GRAU

15

- Introdução a inequações
- Inequações do 1° e do 2° grau

HABILIDADES

- Identificar geometricamente inequações do 1° e do 2° grau.
- Resolver inequações do 1° e do 2°grau.
- Avaliar resultados de situações-problema que envolvam inequações do 1° e do 2° grau.
- Resolver situação-problema que contemple medidas de grandezas.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

Introdução a inequações

Inequações são sentenças matemáticas, com uma ou mais incógnitas, representadas por desigualdades por meio de relações que não são de equivalência. Em sua estrutura, as inequações utilizam sinais de diferente ($\neq$), maior ($>$), menor ($<$), maior ou igual ($\geqslant$) ou menor ou igual ($\leqslant$).

Desigualdades têm importância significativa para a Matemática, principalmente em experiências e problemas que abordam a necessidade de se comparar um conjunto de medidas.

PROPRIEDADES

As propriedades a seguir auxiliam nas resoluções de problemas envolvendo desigualdades.

Todas as propriedades são enunciadas tomando como referência um dos sentidos da desigualdade ($<$), porém elas são verdadeiras para o outro sentido ($>$).

Transitiva:

$a < b \text{ e } b < c \rightarrow a < c$

$a < b \rightarrow a + x < b + x$

$a < b \rightarrow a - x < b - x$

Observe uma consequência dessa propriedade:

1. $a + c < b \leftrightarrow a + c - c < b - c \leftrightarrow a < b - c$

   $a + c < b \leftrightarrow a < b - c$

2. $a < b \text{ e } c > 0 \leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$

   $a < b \text{ e } c > 0 \leftrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

3. $a < b \text{ e } c < 0 \leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$

   $a < b \text{ e } c < 0 \leftrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Observação: ao multiplicar ou dividir uma desigualdade por uma constante não nula, o sentido é conservado caso a constante seja número positivo. Porém, deve ser invertido se a constante for número negativo.

Inequações do 1º grau

Denomina-se **inequação do 1° grau** toda desigualdade que pode ser escrita numa das formas a seguir, em que **x** é variável e **a** e **b** são constantes reais.

I. $a \cdot x + b \leqslant 0, a \neq 0$

II. $a \cdot x + b \geqslant 0, a \neq 0$

III. $a \cdot x + b < 0, a \neq 0$

IV. $a \cdot x + b > 0, a \neq 0$

V. $a \cdot x + b \neq 0, a \neq 0$

RESOLUÇÃO

O procedimento de resolução da inequação do 1º grau segue os mesmos caminhos da resolução da equação do 1º grau, respeitando-se evidentemente as propriedades das desigualdades.

Aplicando as propriedades enunciadas anteriormente, pode-se isolar **x** em qualquer uma delas.

Exemplo:

Tomando a primeira propriedade:

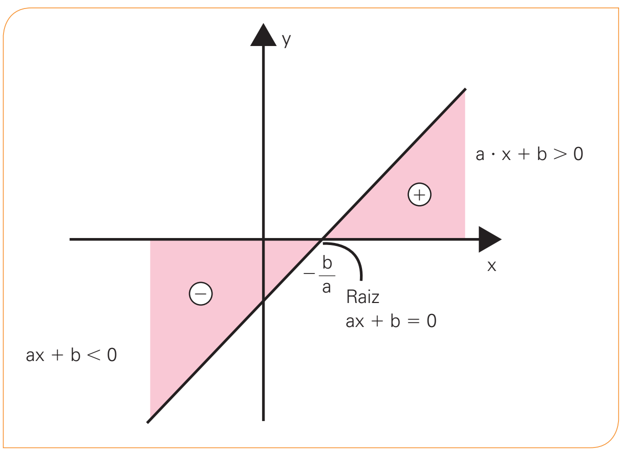
$$a \cdot x + b - b \leqslant 0 - b \leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{-b}{a} \text{ se } a > 0 \\ x \geq \dfrac{-b}{a} \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

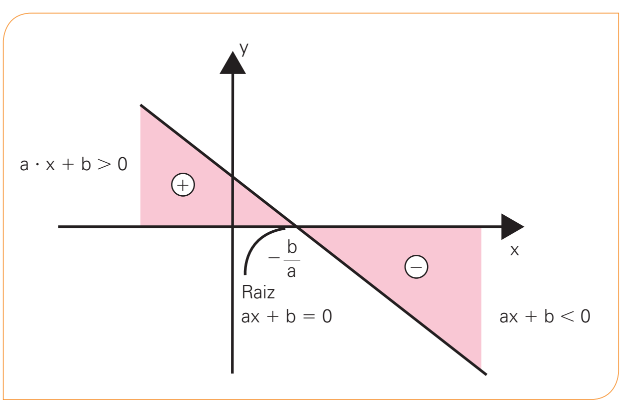
Solução: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \dfrac{-b}{a} \text{ se } a > 0 \right\}$ e

$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \dfrac{-b}{a} \text{ se } a < 0 \right\}$

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA E ANÁLISE DOS SINAIS DE UMA FUNÇÃO AFIM

Existem duas formas de interpretar a solução de uma inequação do 1º grau. Veja os esquemas.





Inequações do 2º grau

Denomina-se inequação do 2º grau toda desigualdade que pode ser escrita em uma das formas a seguir, em que x é variável e a, b e c são constantes reais.

I. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leqslant 0,\ a \neq 0$
II. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geqslant 0,\ a \neq 0$
III. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0,\ a \neq 0$
IV. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0,\ a \neq 0$
V. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \neq 0,\ a \neq 0$

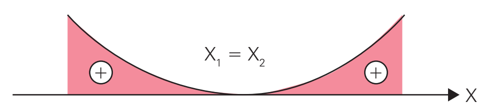
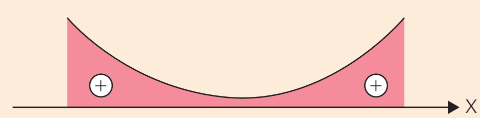
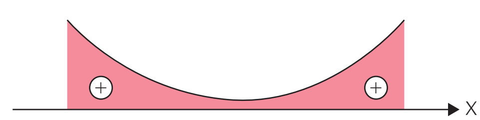
REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA E ANÁLISE DOS SINAIS DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

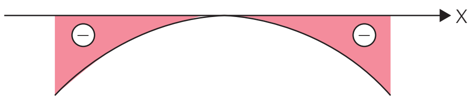
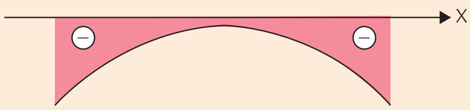
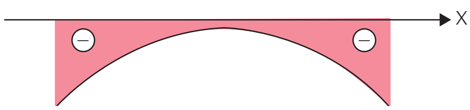
Para resolver inequações do 2º grau, recorre-se ao estudo do sinal de uma função quadrática,

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$

Para estudar a variação de sinal de uma função do 2º grau, basta conhecer a posição da concavidade da parábola, voltada para cima ou para baixo, e a existência e quantidade de raízes que ela apresenta.

Considere a função $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \neq 0$, e observe a análise do sinal da função em cada caso de concavidade e valor de Δ.

	a > 0
$\Delta > 0$	 $x < x_1$ ou $x > x_2 \rightarrow f(x) > 0$ $x = x_1$ ou $x > x_2 \rightarrow f(x) > 0$ $x_1 < x < x_2 \rightarrow f(x) < 0$
$\Delta = 0$	 $x = x_1 \rightarrow f(x) = 0$ $x \neq x_1 \rightarrow f(x) < 0$
$\Delta < 0$	 $f(x) > 0\ \forall\ x \in$

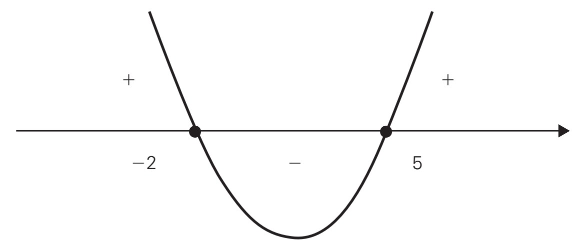
	a < 0
$\Delta > 0$	 $x < x_1$ ou $x > x_2 \rightarrow f(x) < 0$ $x = x_1$ ou $x = x_2 \rightarrow f(x) = 0$ $x_1 < x < x_2 \rightarrow f(x) > 0$
$\Delta = 0$	 $x = x_1 \rightarrow f(x) = 0$ $x \neq x_1 \rightarrow f(x) > 0$
$\Delta < 0$	 $f(x) < 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

Tomam-se como solução para a inequação regiões do eixo x que atenderam às exigências da desigualdade.

Exemplo:

Estude o sinal da função $f(x) = x^2 - 3 \cdot x - 10$.

As raízes de $x^2 - 3 \cdot x - 10 = 0$ são $x_1 = -2$ ou $x_2 = 5$.



Estudo do sinal:

- $x < -2$ ou $x > 5 \leftrightarrow f(x) > 0$
- $x = -2$ ou $x = 5 \leftrightarrow f(x) = 0$
- $-2 < x < 5 \leftrightarrow f(x) < 0$

Para resolver a inequação $x^2 - 3 \cdot x - 10 > 0$, utiliza-se o estudo do sinal da função que leva a imagem de f(x) a valores maiores que zero. Isto é, no exemplo anterior, valores de **x** são tais que $x < -2$ ou $x > 5$. Se, por outro lado, deseja resolver a inequação $x^2 - 3 \leqslant x - 10 \leqslant 0$, têm-se como solução valores de **x** tais que $-2 \leqslant x \leqslant 5$.

Observação: a simbologia de (+) ou (−) utilizada no esboço do gráfico anterior representa o sinal da imagem da função na região adotada e deve ser uma convenção usada para resolução dos demais exercícios. Não se devem confundir esses sinais com o sinal de domínio.

ROTEIRO DE AULA

FUNÇÃO

Função afim:

$y = a \cdot x + b$

Inequação do 1º grau

- Resolução: isolar a variável x ou analisar os sinais da função afim.
- $a \cdot x + b \leqslant 0$
  - $x \leqslant \frac{-b}{a}$ se $a > 0$
  - $x \geqslant \frac{-b}{a}$ se $a < 0$

Função quadrática:

$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Inequação do 2º grau

- Resolução: análise dos sinais da função quadrática.
- $\Delta > 0$
  - $a > 0$
    - $x < x_1$ ou $x < x_2 \rightarrow f(x) > 0$
    - $x = x_1$ ou $x = x_2 \rightarrow f(x) = 0$
    - $x_1 < x < x_2 \rightarrow f(x) < 0$
  - $a < 0$
    - $x < x_1$ ou $x > x_2 \rightarrow f(x) < 0$
    - $x = x_1$ ou $x = x_2 \rightarrow f(x) = 0$
    - $x_1 < x < x_2 \rightarrow f(x) > 0$
- $\Delta = 0$
  - $a > 0$
    - $x = x_1 \rightarrow f(x) = 0$
    - $x \neq x_1 \rightarrow f(x) > 0$
  - $a < 0$
    - $x = x_1 \rightarrow f(x) = 0$
    - $x \neq x_1 \rightarrow f(x) < 0$
- $\Delta < 0$
  - $a > 0$: $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
  - $a < 0$: $f(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. FGV – Quantos são os valores inteiros de x que satisfazem $-2 \leqslant 2x + 5 \leqslant 10$?

a) Infinitas
b) 6
c) 4
d) 7
e) 5

Temos que:
$-2 \leqslant 2x + 5 \leqslant 10$
$-2 - 5 \leqslant 2x \leqslant 10 - 5$
$-7 \leqslant 2x \leqslant 5$
$-3{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5$
Portanto, os valores inteiros de x são {–3, –2, –1, 0, 1, 2}.

2. PUC-Rio – Assinale a menor solução inteira da inequação $4x - 10 > 2$.

a) 2
b) 3
c) 4
d) 12
e) 60

3. ACAFE (Adaptado) CH-H19

Uma pequena fábrica de tubos de plástico calcula a sua receita em milhares de reais, através da função $R(x) = 3{,}8x$, onde x representa o número de tubos vendidos. Sabendo que o custo para a produção do mesmo número de tubos é 40% da receita mais R$ 570,00. Nessas condições, para evitar prejuízo, o número mínimo de tubos de plástico que devem ser produzidos e vendidos pertence ao intervalo:

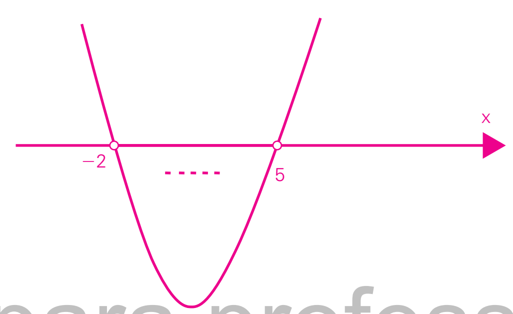
a) [240 ; 248]
b) [248 ; 260]
c) [252 ; 258]
d) [255 ; 260]
e) [257 ; 258]

Temos que a receita é $R(x) = 3{,}8x$ e o custo é
$C(x) = 0{,}4 \rightarrow R(x) + 570 = 0{,}4 \rightarrow 3{,}8x + 570 = 1{,}52x + 570$.
Para evitar prejuízo, devemos ter $R(x) \geq C(x)$.
Então: $3{,}8x \geq 1{,}52x + 570 \rightarrow 2{,}28x \geq 570$.
$x \geq 250$. Portanto, o número mínimo é 250.

4. UPF – Quantas são as soluções inteiras da inequação $x^2 - 3x < 10$?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 6
e) infinitas

Temos que:
$x^2 - 3x < 10$
$x^2 - 3x - 10 < 0$
Seja a função $y = x^2 - 3x - 10 = 0$, as raízes dessa função são $x = -2$ e $x = 5$. Esboçando o gráfico da função em torno das raízes, temos:

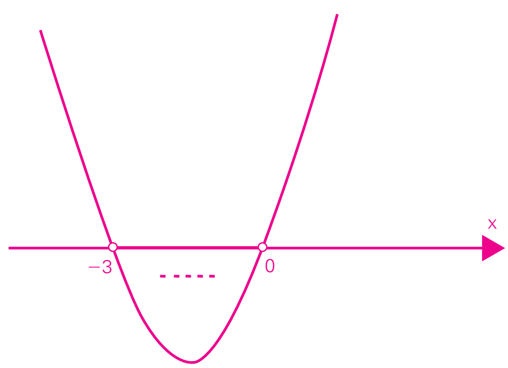


Portanto, $y < 0$ se $-2 < x < 5$. As soluções inteiras são {–1, 0, 1, 2, 3, 4}.

5. PUC-Rio – Considere as funções reais $f(x) = x^2 + 4x$ e $g(x) = x$. Qual é o maior inteiro para o qual vale a desigualdade $f(x) < g(x)$?

a) –3
b) –1
c) 0
d) 3
e) 4

Temos que:
$x^2 + 4x < x$
$x^2 + 4x - x < 0$
$x^2 + 3x < 0$
Sendo $y = x^2 + 3x$, as raízes dessa função são $x = 0$ e $x = -3$. Esboçando o gráfico da função em torno das raízes, temos:



Portanto, $y < 0$ se $-3 < x < 0$.
O maior valor inteiro é -1.

6. ACAFE – Uma pessoa comprou um terreno de 40 metros de comprimento por 20 metros de largura. Ela deseja construir uma casa e estabelece ao arquiteto contratado pelo projeto certas condições:

V. a área destinada ao lazer deve ter 200 m²;
VI. a área interna da casa mais a área de lazer devem ultrapassar 50% da área total do terreno;
VII. o custo da construção da casa deve ser menor que R$ 450.000,00.

Sabendo que o metro quadrado construído custa R$ 1.500,00, a área interna da casa que o arquiteto irá projetar será:

a) entre 300 m³ e 400 m
b) maior que 400 m²
c) entre 200 m² e 300 m²
d) menor que 200 m²

A área do terreno é $A = 40 \cdot 20 = 800 \rightarrow 800$ m².
$A_{lazer} = 200$ m³
$A_{interna} + A_{lazer} > 400 \rightarrow A_{interna} > 200 \rightarrow 200$ m³
Temos também que:
$1500 \cdot A_{interna} < 45\,000$
Portanto, $A_{interna} > 300$ m².

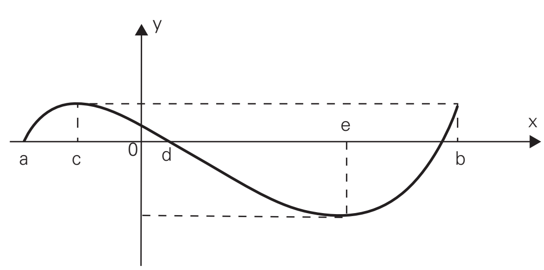
EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. PUC-Rio – Resolva as inequações abaixo (com $x \in \mathbb{R}$), justificando sua resposta.

a) $2 + x \leq \sqrt{5}$
b) $\sqrt{2+x} \leq \sqrt{5}$
c) $\sqrt{2 + \sqrt{2+x}} \leq \sqrt{5}$
d) $\sqrt{2 + \sqrt{2+ \sqrt{2+x}}} \leq \sqrt{5}$

8. EsPCEx – Na figura abaixo está representado o gráfico da função polinomial f, definida no intervalo real [a,b].

Com base nas informações fornecidas pela figura, podemos afirmar que:



desenho ilustrativo – fora de escala

a) f é crescente no intervalo [a,0]
b) $f(x) \leqslant f(e)$ para todo x no intervalo [d, b]
c) $f(x) \leqslant 0$ para todo x no intervalo [c, 0]
d) a função f é decrescente no intervalo [c, e]
e) se $x_1 \in [a, c]$ e $x_2 \in [d, e]$ então $f(x_1) < f(x_2)$

9. ESPM – O mais amplo domínio para a função real de variável real $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$ é:

a) $]-\infty, 1]$
b) $[2, +\infty[$
c) $]1, 2]$
d) $[-1, 2[$
e) $[1, 2[$

10. PUC-Rio – Sejam as funções $f(x) = x^2 - 6x$ e $g(x) = 2x - 12$. O produto dos valores inteiros de x que satisfazem a desigualdade $f(x) < g(x)$ é:

a) 8
b) 12
c) 60
d) 72
e) 720

11. PUC-Rio (Adaptada) – Considere as funções f_1: $[-1, +1] \to [-1, +1]$ e f_2: $[-1, +1] \to [-1, +1]$ onde:

$$f_1(x) = \begin{cases} 3x+2, \text{ se } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ -x, \text{ se } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 3x-2, \text{ se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{e } f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} f_1(4x+3), \text{ se } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} f_1(2x), \text{ se } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} f_1(4x-3) + \frac{1}{4}, \text{ se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Faça um esboço do gráfico de f_1.

b) Calcule $f_2\left(\frac{1}{3}\right)$.

12. UEG – O conjunto imagem da função real $y = -2x^2 + 3x - 4$ são os valores reais de y tal que

a) $y > 2{,}875$
b) $y > -2{,}875$
c) $y < 2{,}875$
d) $y < -2{,}875$

13. Sistema Dom Bosco – A quantidade de números inteiros tais que $\begin{cases} 2x - 3(2x+3) < 7 \\ \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{1-x}{3} < \dfrac{5}{6} \end{cases}$ é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

14. Sistema Dom Bosco – O conjunto solução da inequação $ax + b < 0$ é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{1}{2}\right\}$. Pode-se afirmar que:

a) $a < 0$ e $b < 0$
b) $a < 0$ e $b > 0$
c) $a > 0$ e $b < 0$
d) $a > 0$ e $b > 0$
e) $a \cdot b < 0$

15. UEFS – Se f(x) é uma função decrescente e g(x) é crescente, então a solução do sistema de inequações $\begin{cases} f(3x-2) > f(x+4) \\ g(5-x) < g(3) \end{cases}$

a) $x > 3$
b) $x < 2$ ou $x > 3$
c) $x < 2$
d) $x > 2$
e) $2 < x < 3$

16. Unesp – Um grupo de estudantes fará uma excursão e alugará ônibus para transportá-lo. A transportadora dispõe de ônibus em dois tamanhos, pequeno e grande. O pequeno tem capacidade para 24 pessoas, ao custo total de R$ 500,00. O grande tem capacidade para 40 pessoas, ao custo total de R$ 800,00. Sabe-se que pelo menos 120 estudantes participarão da excursão e que o grupo não quer gastar mais do que R$ 4.000,00 com o aluguel dos ônibus. Sendo x o número de ônibus pequenos e y o número de ônibus grandes que serão alugados, o par ordenado (x, y) terá que pertencer, necessariamente, ao conjunto solução do sistema de inequações

a) $\begin{cases} 24x + 4y \geq 120 \\ 500x + 800y \leq 4\,000 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 24x + 40y \leq 4\,000 \\ 500x + 800y \geq 120 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 24x + 40y \geq 120 \\ 500x + 800y \geq 4\,000 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 24x + 40y \leq 4\,000 \\ 500x + 800y \leq 120 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 24x + 40y \leq 120 \\ 500x + 800y \leq 4\,000 \end{cases}$

17. Sistema Dom Bosco – Todos os possíveis valores de m que satisfazem a desigualdade $2x^2 - 20x + 2m > 0$, para todo x pertencente ao conjunto dos reais, são dados por:

a) $m < 5$
b) $m > 10$
c) $m > 25$
d) $m < 30$
e) $m > 30$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H21

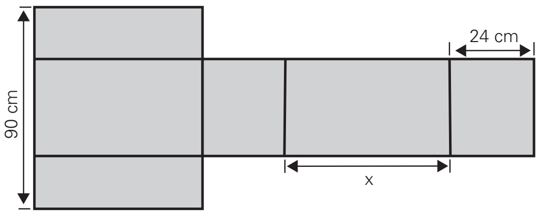
Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação $q = 400 - 100p$, na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais. A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto. O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

a) R$ 0,50 $\leq$ p $<$ R$ 1,50
b) R$ 1,50 $\leq$ p $<$ R$ 2,50
c) R$ 2,50 $\leq$ p $<$ R$ 3,50
d) R$ 3,50 $\leq$ p $<$ R$ 4,50
e) R$ 4,50 $\leq$ p $<$ R$ 5,50

19. Enem C5-H22

Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.

A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.



O maior valor possível para x em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é

a) 25
b) 33
c) 42
d) 45
e) 49

20. Enem C5-H19

Um motorista de um carro flex (bicombustível) calcula que, abastecido com 45 litros de gasolina ou com 60 litros de etanol, o carro percorre a mesma distância.

Chamando de x o valor do litro de gasolina e de y o valor do litro de etanol, a situação em que abastecer com gasolina é economicamente mais vantajosa do que abastecer com etanol é expressa por

a) $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

b) $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

c) $\frac{x}{y} > \frac{4}{3}$

d) $\frac{x}{y} > \frac{3}{4}$

e) $\frac{x}{y} < \frac{3}{4}$

INEQUAÇÕES PRODUTO E QUOCIENTE

16

- Inequações, produto e quociente

HABILIDADES

- Identificar geometricamente inequações produto e quociente.
- Resolver inequações produto e quociente.
- Avaliar resultados de situações-problema que envolvam inequações produto e quociente.
- Interpretar resultados obtidos na resolução de inequações produto e quociente.
- Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

Inequações produto e quociente

Em algumas situações, é possível encontrarmos inequações que apresentam expressões que fogem da forma padrão de 1° e 2° graus. Nesses casos, podemos fatorar a expressão em expressões de grau menor para facilitar a análise. Algumas dessas ocasiões são conhecidas como **inequações produto** e **inequações quociente.**

INEQUAÇÃO PRODUTO

Desigualdade, que pode ser encontrada numa das formas a seguir, em que **x** é variável e **f(x)** e **g(x)** são sentenças matemáticas de funções reais.

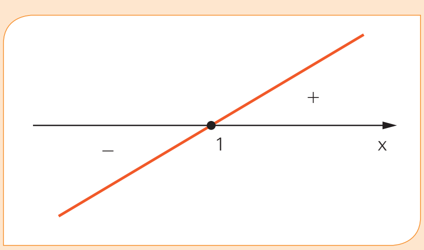
VI. $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$
VII. $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$
VIII. $f(x) \cdot g(x) < 0$
IX. $f(x) \cdot g(x) > 0$

Após fatorar a expressão a ser analisada, podemos estudar cada um dos fatores e, em seguida, analisar o produto dos sinais.

Observação: a quantidade de fatores que se apresentam do lado esquerdo das desigualdades pode variar dependendo do problema. Nas situações anteriores, foram indicados apenas dois fatores: f(x) e g(x).

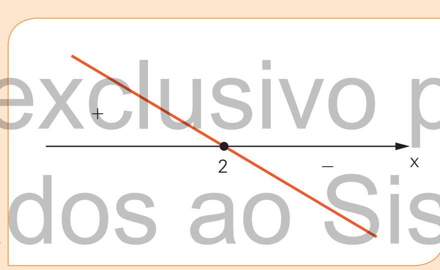
Exemplo:
Resolva a inequação: $(x - 1) \cdot (2 - x) \geqslant 0$.

Resolução
Denominam-se $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2 - x$.
O problema se resume a analisar $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$.
Estudando o sinal de f(x) e g(x):
$f(x) = x - 1 \rightarrow$ raiz: $x = 1$
No gráfico:



$g(x) = 2 - x \rightarrow$ raiz: $x = 2$

No gráfico:



Com o resultado da análise dos sinais de f(x) e de g(x), é possível estudar o sinal do produto $f(x) \cdot g(x)$. Para isso, uma tabela tal qual a seguinte é muito útil:

f(x)	–	1	+		+
g(x)	+		+	2	–
x · g(x)	–		+		–
		1		2	

Pela tabela:

- f(x) é negativa para $x < 1$, é nula para $x = 1$ e é positiva para $x > 1$;
- g(x) é positiva para $x < 2$, é nula para $x = 2$ e é negativa para $x > 2$;
- $f(x) \cdot g(x)$ é negativa para $x < 1$ ou $x > 2$, é nula para $x = 1$ ou $x = 2$ e é positiva para $1 < x < 2$.

Com $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$, o intervalo que interessa é $1 \leqslant x \leqslant 2$. Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

INEQUAÇÃO QUOCIENTE

Desigualdade que pode ser encontrada numa das formas a seguir, em que **x** é variável e **f(x)** e **g(x)** são sentenças matemáticas de funções reais.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

Observação: a quantidade de fatores e/ou quocientes que se apresentam do lado esquerdo das desigualdades pode variar, dependendo do problema. Nas situações anteriores, indica-se apenas um quociente: $\frac{f(x)}{g(x)}$.

A resolução de uma inequação quociente é semelhante à de inequação produto, pois a regra do sinal da divisão de dois termos é a mesma para o produto de dois fatores. Mas há uma observação importante no caso da inequação quociente: **nunca pode(m) ser usada(s) raiz(raízes) proveniente(s) do denominador.** O motivo é simples: não está definida no conjunto dos reais a divisão por zero.

Exemplo:
Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{x-1}{2-x} \geq 0$.

Resolução:
Denominam-se $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2 - x$.

O problema se resume a analisar $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$.

Os sinais de f(x) e g(x) foram estudados no exemplo anterior. Com os sinais de f(x) e de g(x), efetua-se a análise do sinal do quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$.

		1		2	
f(x)	–		+		+
g(x)	+		+	0	–
f(x)/ g(x)	–		+	∄	–
		1		2	

Pela representação geométrica dos intervalos, tem-se:

- f(x) é negativa para $x < 1$, é nula para $x = 1$ e é positiva para $x > 1$;
- g(x) é positiva para $x < 2$, é nula para $x = 2$ e é negativa para $x > 2$;
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ é negativa para $x < 1$ ou $x > 2$, é nula para $x = 1$, é positiva para $1 < x$, 2 e não está definida para $x = 2$.

Quando $1 \leqslant x < 2$, tem-se $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$. Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 2\}$. A raiz de g(x), que está no denominador, não foi utilizada.

Exemplo
Resolva a inequação $\frac{-2x+3}{x^2-6x+8} \geq 0$.
Resolução:
Fazendo o quadro de sinais da inequação quociente, temos:

$f(x) = -2x + 3$ e $g(x) = x^2 - 6x + 8$. As raízes de f são $x = \frac{3}{2}$, e as raízes de g são $x = 2$ e $x = 4$.

f(x)	+	$\frac{3}{2}$	–		–		–
g(x)	+		–	2	–	4	+
f(x) / g(x)	+		+		+		–
		$\frac{3}{2}$		2		1	

Vale ressaltar que o quadro de sinais é a análise dos sinais das funções f e g em torno do eixo x (raízes). Ao final do quadro de sinais (última linha), consta a solução da inequação quociente, ou seja, os valores de x tais que $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4 \text{ e } x \neq 2\}$. Note que a bola aberta em 2 e 4 indica que esses valores de x não podem ser solução, pois são raízes do denominador.

Potências com expoentes inteiros

Nas inequações produto e quociente, é comum encontrar termos como $(x - 3)^5$, $(4 - 5x)^6$, $(x^2 - 5x + 6)$ etc.

Para resolver essas inequações, basta lembrar duas propriedades das potências de base real e expoente ímpar:

- $a > 0 \rightarrow a^{(2n+1)} > 0$
- $a = 0 \rightarrow a^{(2n+1)} = 0$
- $a < 0 \rightarrow a^{(2n+1)} < 0 \ (n \in \mathbb{N})$

Toda potência de base real e expoente par é um número não negativo:

$$a \in \mathbb{R} \rightarrow a^{2n} \geqslant 0 \ (n \in \mathbb{N})$$

ROTEIRO DE AULA

INEQUAÇÕES:

Desigualdades que podem ser encontradas numa das formas a seguir, em que x é variável e f(x) e g(x) são sentenças matemáticas de funções reais.

Produto

- $f(x) \cdot g(x) < 0$
- $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$
- $f(x) \cdot g(x)) > 0$
- $f(x) \cdot g(x) < 0$
- $f(x) \cdot g(x) = 0$

Para resolver, é preciso:

- analisar a variação de sinais de cada uma das funções;
- determinar a variação de sinais da operação indicada;
- selecionar os valores da variável que tornam a sentença verdadeira e apresentar a solução;
- seguir quadro de sinais.

Quociente

- $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-Rio – Determine para quais valores reais de x vale cada uma das desigualdades abaixo:

a) $\dfrac{1}{x^2-8x+15}<0$ **b)** $\dfrac{1}{x^2-8x+15}<\dfrac{1}{3}$

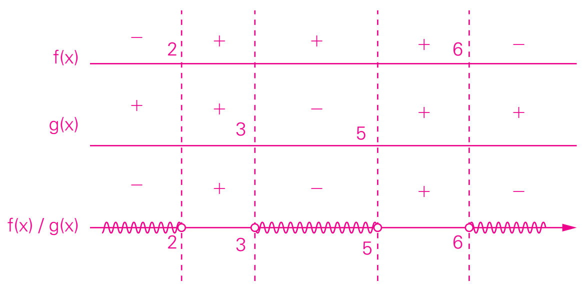
a) Como o numerador é positivo e o quociente é negativo, concluímos que o denominador é negativo: Então: $x^2 - 8x + 15 < 0$. Analisando os sinais de $y = x^2 - 8x + 15 < 0$ em torno do eixo x, temos que $3 < x < 5$.

b) Manipulando a inequação $\dfrac{1}{x^2-8x+15}<\dfrac{1}{3}$, obtemos:

$$\frac{1}{x^2-8x+15}<\frac{1}{3}\rightarrow\frac{1}{x^2-8x+15}-\frac{1}{3}<0\rightarrow\frac{-x^2+8x-12}{3\cdot(x^2-8x+15)}<0$$

Fazendo o quadro de sinais da inequação quociente, temos:

$f(x) = -x^2 + 8x - 12$ e $g(x) = (x^2 - 8x + 15)$. As raízes de f são $x = 2$ e $x = 6$, e as raízes de g são $x = 3$ e $x = 5$.



Logo, $x < 2$ ou $3 < x < 5$ ou $x > 6$ são os valores quando $\dfrac{1}{x^2-8x+15}<\dfrac{1}{3}$.

2. ESPM – O número de soluções inteiras do sistema de inequações $\begin{cases}\dfrac{2x-3}{-2}<3\\ x^2+2x\le 8\end{cases}$ é igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Da 1ª inequação, temos: $2x - 3 > -6 \rightarrow 2x > -3 \rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$.

Da 2ª inequação, temos: $x^2 + 2x - 8 \leq 0$. Analisando os sinais de $y = x^2 + 2x - 8$ em torno do eixo x, vem: $-4 \leq x \leq 2$.

Como $x=-\dfrac{3}{2}$ e $-4 \leq x \leq 2$: $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=-\dfrac{3}{2}<x\le 2\right\}$.

Portanto, como as soluções inteiras do sistema são −1, 0, 1 e 2, o resultado pedido é 4.

3. Uema C5-H21

Uma função consiste na associação de dois conjuntos A e B de números reais, por meio de uma lei f. O subconjunto dos elementos de A que corresponde a um, e somente um, elemento de B é denominado domínio da função D(f).

Considerando que a expressão $f(X)=\sqrt{\dfrac{(2x^2-8)(x^2+x-6)}{x^2+2x-3}}$ é uma função, determine o domínio de f(x).

a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1;\ x \leqslant -2 \text{ e } x \neq -3\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1;\ x < -2 \text{ e } x \neq -3\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1;\ x \geqslant -2 \text{ e } x = -3\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1;\ x \leqslant -2 \text{ e } x = -3\}$
e) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1;\ x > -2 \text{ e } x \neq -3\}$

Manipulando a função $f(X)=\sqrt{\dfrac{(2x^2-8)(x^2+x-6)}{x^2+2x-3}}$, temos:

$$\frac{(2x^2-8)\cdot(x^2+x-6)}{x^2+2x-3}\ge 0$$

Condição de existência:

$x^2+2x-3\neq 0$

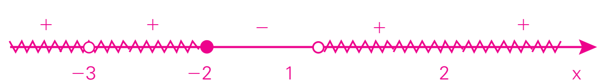
$x\neq -3$ ou $x\neq 1$

Raízes:

$2x^2-8=0\rightarrow x=2$ ou $x=-2$

$x^2+x-6=0\rightarrow x=-3$ ou $x=2$

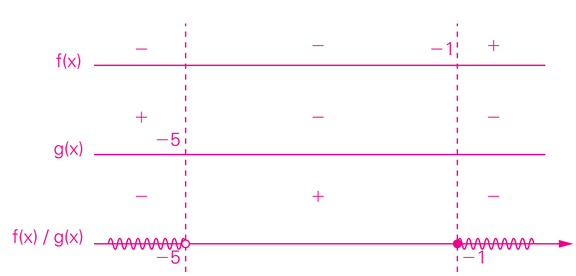
Estudo do sinal de $\dfrac{(2x^2-8)\cdot(x^2+x-6)}{x^2+2x-3}$:



$D=\{x\in\mathbb{R}\mid x>1; x\le -2 \text{ e } x\neq -3\}$

4. PUC-Rio (adaptado) – Considere a inequação $\dfrac{x+1}{-x-5}\le 0$, com $x \in \mathbb{R}$. Qual é o conjunto solução da inequação?

Fazendo o quadro de sinais da inequação quociente do enunciado, obtemos:

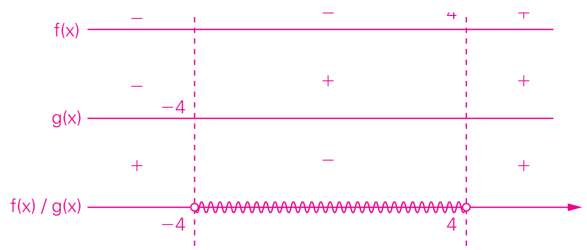


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x \geqslant -1\}$.

5. Unifenas – O conjunto verdade, em reais, da inequação: $\frac{x-4}{x+4} < 0$ é:

a) $[-4; 4]$
b) $[-4; 4[$
c) $]-4, 4[$
d) $[2; -4]$
e) $]-2; 2[$

Fazendo o quadro de sinais da inequação quociente do enunciado, obtemos:



$S = \{x \in \mathbb{R}; -4 < x < 4\}$.

6. ESPM – O mais amplo domínio para a função real de variável real, b $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$ é:

a) $]-\infty, 1]$
b) $[2, +\infty[$
c) $]1, 2]$
d) $[-1, 2[$
e) $[1, 2[$

Para que o valor de f(x) seja sempre real, temos que ter $x - 1 \geqslant 0 \rightarrow$

$\rightarrow x \geqslant 1$ e $2 - x > 0 \rightarrow x < 2$. Logo, o mais amplo domínio para a

função real é $[1,2[$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UERN – Sobre a inequação produto $(-4x^2 + 2x - 1)(x^2 - 6x + 8) \geqslant 0$, em $\mathbb{R}$, é correto afirmar que:

a) não existe solução em $\mathbb{R}$.
b) o conjunto admite infinitas soluções em $\mathbb{R}$.
c) o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$.
d) o conjunto solução é $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant 2 \text{ ou } x \geqslant 4\}$.

8. UEPB – Com relação ao número de soluções inteiras da equação $\frac{(5-x^2)(x^2-2)}{\sqrt{x^2-2x+5}} > 0$, podemos garantir que existem:

a) infinitas
b) quatro
c) três
d) seis
e) duas

9. Mackenzie – A função $f(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{x^2+x-2}}$ tem como domínio o conjunto solução:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2 \text{ ou } 1 \leqslant x < 3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -2 \text{ ou } 1 < x \leqslant 3\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -2 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 3\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant -1 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 3\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < -1 \text{ ou } 1 < x \leqslant 3\}$

10. IFCE – O conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação $(5x^2 - 6x - 8)(2 - 2x) < 0$ é

a) $S = \left]-\frac{4}{5}, 2\right[\cup]\infty, 1[$

b) $S =]2, +\infty[\cup \left]-\frac{4}{5}, 1\right[$

c) $S = \left]-\frac{4}{5}, 2\right[\cup]1, +\infty[$

d) $S = \left]-\infty, -\frac{4}{5}\right[\cup]1,2[$

e) $S = \left]-\frac{4}{5}, 1\right[\cup]2, +\infty[$

11. UNIVAG – Considere as funções reais dadas pelas leis $f(x) = x - 1$ eg $(x) = x^2 - 2x + 2$. O conjunto solução da inequação $f(x) > f(g(x))$ é dado por

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

12. Sistema Dom Bosco – Para quais valores reais de k, a equação na variável x, $-x^2 + k \cdot x + k^2 = 0$ não possui solução real?

a) $k = 0$

b) $k > 0$

c) $k < 0$

d) $k \in \mathbb{R}$

e) $\nexists\ k \in \mathbb{R}$

13. Imepac – O conjunto solução da inequação $(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 9x - 10) \geq 0$ é

a) $S = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq -1 \text{ ou } x \geq 10\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R};\ -1 \leq x \leq 10\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq 10\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq -1,\ x \geq 10 \text{ ou } x = 2\}$

14. Col. Naval – Seja S a soma dos valores inteiros que satisfazem a inequação $\frac{(5x-40)^2}{x^2-10x+21} \leq 0$. Sendo assim, pode-se afirmar que

a) S é um número divisível por 7.
b) S é um número primo.
c) S^2 é divisível por 5.
d) $\sqrt{S}$ é um número racional.
e) 3S + 1 é um número ímpar.

15. UFMG (adaptada) – Há várias regras para se determinar, com base na dose recomendada para adultos, a dose de um medicamento a ser ministrada a crianças. Analise estas duas fórmulas:

Regra de Young: $c = \frac{x}{x+12}a$

Regra de Cowling: $c = \frac{x+1}{24}a$

em que:

- x é a idade da criança, em anos;
- a é a dose do medicamento, em cm^3, para adultos; e
- c é a dose do medicamento, em cm^3, para crianças.

Considerando essas informações e sabendo que as duas regras são aplicadas no cálculo de doses para crianças entre 2 e 13 anos de idade, determine os valores de x para os quais a regra de Young leva a uma dose maior que a regra de Cowling.

16. IME – O sistema de inequações abaixo admite k soluções inteiras. $\begin{cases} \frac{x^2-2x-14}{x} > 3 \\ x \leq 12 \end{cases}$. Pode-se afirmar que:

a) $0 \leqslant k < 2$
b) $2 \leqslant k < 4$
c) $4 \leqslant k < 6$
d) $6 \leqslant k < 8$
e) $k \geqslant 8$

17. PUC-Rio (adaptada) – Encontre que valores reais de x satisfazem a desigualdade abaixo:

$$\sqrt{x^2-4x+5} > \frac{1}{2}$$

18. UERJ (adaptado) C5-H21

Em um recipiente com a forma de um paralelepípedo retângulo com 40 cm de comprimento, 25 cm de largura e 20 cm de altura, foram depositadas, em etapas, pequenas esferas, cada uma com volume igual a 0,5 cm³. Na primeira etapa, depositou-se uma esfera; na segunda, duas; na terceira, quatro; e assim sucessivamente, dobrando-se o número de esferas a cada etapa. Admita que, quando o recipiente está cheio, o espaço vazio entre as esferas é desprezível. Considerando $2^{10} = 1\,000$, o menor número de etapas necessárias para que o volume total de esferas seja maior do que o volume do recipiente é:

a) 15
b) 16
c) 17
d) 18
e) 19

19. FGV-SP C5-H21

Um importante conceito usado em economia para analisar o quanto uma variação do preço unitário $p > 0$ influencia na variação da receita é o de elasticidade da demanda, denotado por E(p), uma vez que a elasticidade E é dada em função de p. Se $E(p) > 1$, então se diz que a demanda é elástica, o que quer dizer que um pequeno aumento do preço unitário resulta em uma diminuição da receita, ao passo que um pequeno decréscimo do preço unitário irá causar um aumento da receita. Admitindo-se a elasticidade da demanda dada por $E(p) = \frac{-p^2 - 2p^2 + 1}{-49 + 1}$, então o intervalo de p para o qual a demanda é elástica é:

a) $\left]0; \frac{1}{4}\right[\cup \left]1 + \sqrt{2}; +\infty\right[$

b) $\left]\frac{1}{8}; 2\right[$

c) $]0; 2[$

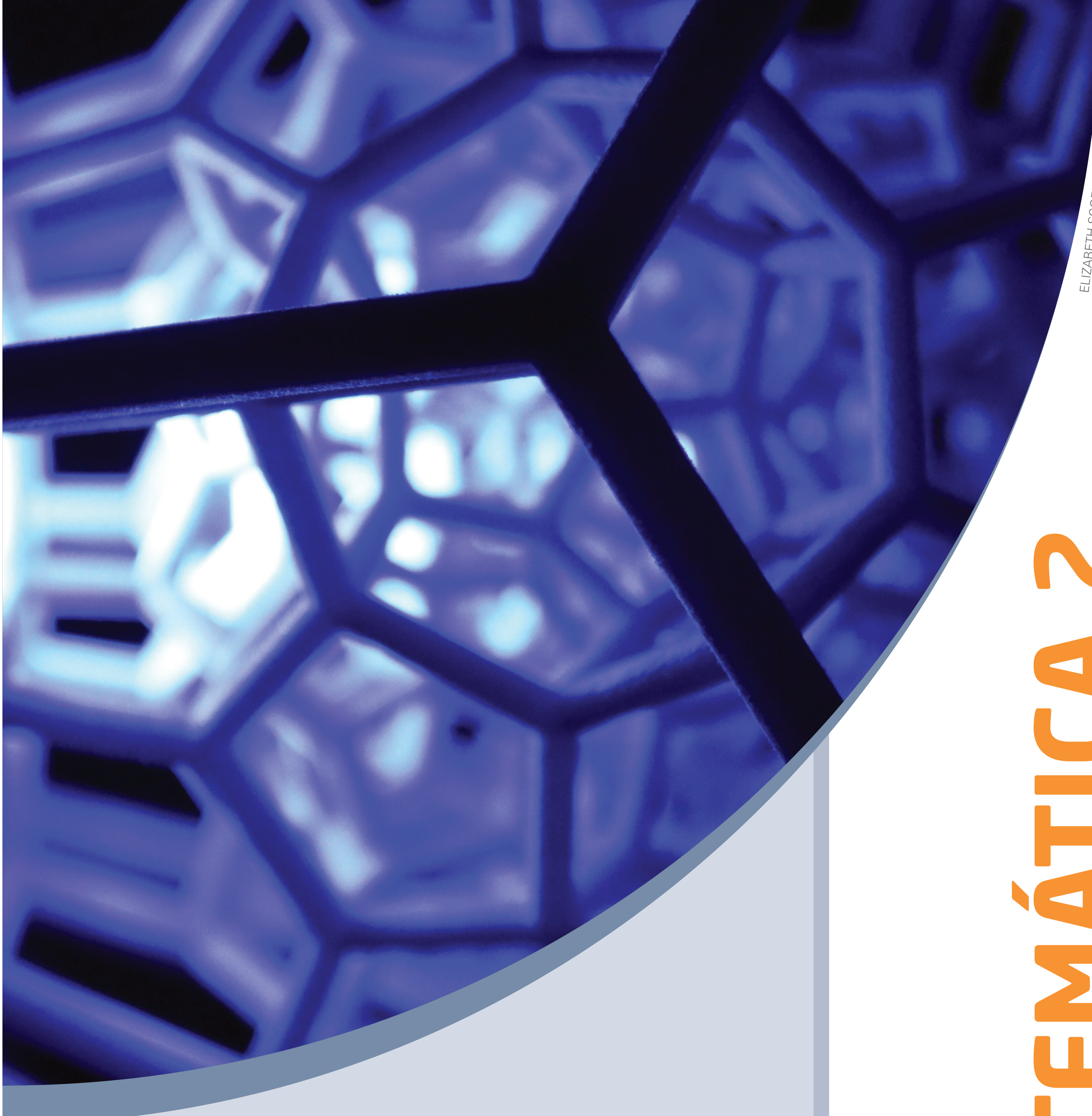
d) $\left]0; \frac{1}{4}\right[\cup]2; +\infty[$

e) $\left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$

20. UPE C5-H21

Antônio foi ao banco conversar com seu gerente sobre investimentos. Ele tem um capital inicial de R$ 2.500,00 e deseja saber depois de quanto tempo de investimento esse capital, aplicado a juros compostos, dobrando todo ano, passa a ser maior que R$ 40.000,00. Qual a resposta dada por seu gerente?

a) 1,5 anos
b) 2 anos
c) 3 anos
d) 4 anos
e) 5 anos



ELIZABETH SCOFIDIO/SHUTTERSTOCK

MATEMÁTICA 2

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

1

PORCENTAGEM

- Definição
- Formas percentual, decimal e fracionária
- Porcentagem de quantias

HABILIDADES

- Identificar taxas percentuais.
- Transformar taxas percentuais em frações centesimais.
- Utilizar o conceito de taxas percentuais na resolução de problemas.
- Realizar operações envolvendo razão, proporção e porcentagem.
- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

Em várias ocasiões, professores de Matemática, Física e Química dizem que o conteúdo de determinadas aulas é totalmente relacionado ao cotidiano dos alunos. Algumas vezes é difícil estes enxergarem tal fato, considerando os temas estudados.

Quando falamos de porcentagem, essa ligação com o cotidiano é imediata: estamos cercados de informações percentuais, seja em manchetes de jornais, seja em panfletos de supermercado, seja em anúncios na internet; um exemplo é o *banner* abaixo. Dominar essa linguagem própria da Matemática é cada vez mais importante, principalmente em um mundo no qual a coleta e a análise de dados se tornam constantemente mais fáceis.

Definição de porcentagem

Toda vez que expressamos um número racional como uma fração de denominador 100, dizemos que estamos apresentando esse valor em **porcentagem**. O número 0,67, por exemplo, pode ser escrito da seguinte forma:

$$0{,}67 = \frac{67}{100} = 67\%$$

O símbolo % significa **por cento**.

Não é incomum a ideia de que uma porcentagem é calculada por meio de uma multiplicação ou uma divisão por 100. Essas operações por 100 são apenas uma forma de alterar a maneira como a porcentagem está expressa, como veremos na próxima seção.

A ideia correta é a seguinte: uma porcentagem é um modo de comparar dois valores por meio da razão entre eles.

Para calcularmos quanto um número **a** representa percentualmente em relação a um número **b**, devemos calcular a razão $\frac{a}{b}$.

Multiplicando o número $\frac{a}{b}$ por 100, teremos a forma percentual dessa razão. Vejamos um exemplo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Em uma sala de aula há 48 alunos. Qual o percentual de meninos se na turma existem 18 meninas?

Se quisermos calcular o percentual de meninos, devemos dividir a quantidade de garotos pelo total de alunos. Na sala há 48 − 18 = 30 meninos. Então:

$$\frac{30}{48} = \frac{5}{8} = 0{,}625 \xrightarrow{\times 100} 62{,}5\%$$

FORMAS PERCENTUAL, DECIMAL E FRACIONÁRIA

Considerando o exemplo anterior, dizemos que 62,5% estão na **forma percentual**, 0,625 está na **forma decimal** e $\frac{30}{48} = \frac{5}{8}$ estão na **forma fracionária**.

A mudança da forma percentual para a decimal e vice-versa deve ser o mais automática possível, já que se trata de uma divisão/multiplicação por 100, o que se resume a deslocarmos a vírgula duas casas. Por exemplo:

- 32% são o mesmo que 0,32;
- 45,7% são o mesmo que 0,457;
- 1,235 é o mesmo que 123,5%.

Procure treinar essa transformação mentalmente, pois isso lhe ajudará na resolução de exercícios envolvendo aumentos e descontos percentuais.

PORCENTAGEM DE QUANTIAS

O cálculo de i% de um valor V é efetuado da seguinte maneira:

$$i\% \text{ de } V = \frac{i}{100} \cdot V$$

Nos exercícios, você pode optar por usar a porcentagem em forma fracionária ou em forma decimal. Recomendamos a última.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Uma mercadoria que custava R$ 140,00 teve um aumento de 8%. Qual foi o aumento em reais no preço desse produto?

Para calcularmos o aumento **A** em reais, fazemos:

A = 8% de R$ 140,00

A = 0,08 · 140 = R$ 11,20

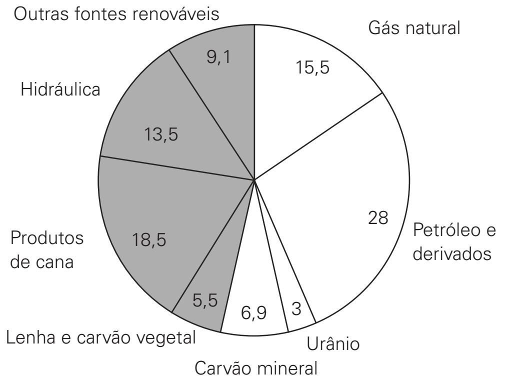
ROTEIRO DE AULA

PORCENTAGEM

- **Definição**
  - **Comparar dois valores por meio da razão entre eles**
    - **Qual percentual a representa de b?**
      - Basta calcular o quociente $\frac{a}{b}$
- **Formatos**
  - Decimal
    - **Esse formato é muito usado nos cálculos**
  - Percentual
    - **Esse formato é bastante aplicado na divulgação de percentuais**
      - **Manchetes, notícias, cartazes promocionais etc.**
  - Fracionário

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unicamp – A figura abaixo exibe, em porcentagem, a previsão da oferta de energia no Brasil em 2030, segundo o Plano Nacional de Energia.



Segundo o plano, em 2030, a oferta total de energia do país irá atingir 557 milhões de tep (toneladas equivalentes de petróleo). Nesse caso, podemos prever que a parcela oriunda de fontes renováveis, indicada em cinza na figura, equivalerá a

a) 178,240 milhões de tep.
b) 297,995 milhões de tep.
c) 353,138 milhões de tep.
d) 259,562 milhões de tep.

Se somarmos os percentuais referentes às regiões indicadas em cinza, obteremos:
9,1% + 13,5% + 18,5% + 5,5% = 46,6%
Dessa forma, a parcela oriunda de fontes renováveis será:
46,6% de 557 milhões = 0,466 · 557 = 259,562 milhões

2. UEM – Considere que um salário aumenta o poder de compra em um determinado período se corrigido por um índice maior do que o da inflação nesse período. O gráfico 1 apresenta a evolução do salário mínimo a cada período de 4 anos desde 1995, e o gráfico 2 apresenta o valor da moeda atualizado pelo índice de inflação, medido pelo IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo), no mesmo período.

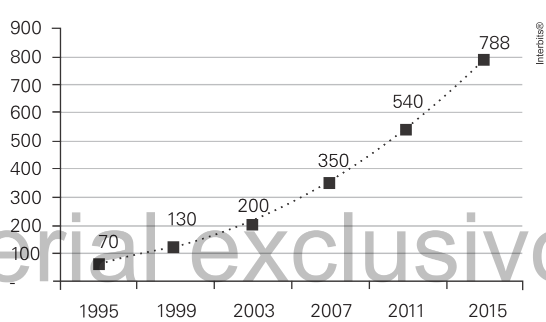


Gráfico 1 - Valor do salário mínimo, em reais, em janeiro de cada ano.

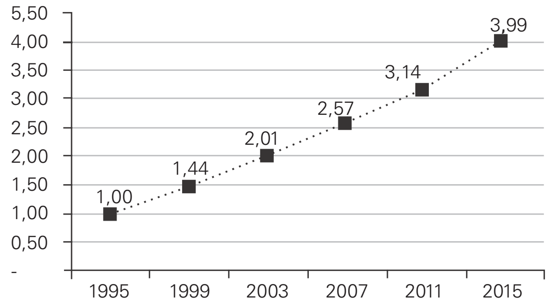


Gráfico 2 - Valor da moeda: R$ 1,00 de 1995, atualizado em janeiro do referido ano pelo índice de inflação (IPCA) acumulada no período.

Com base nos dados apresentados nos gráficos, assinale o que for correto.

(01) O índice de inflação acumulada de 1995 a 1999 foi de 44%.
(02) O índice de inflação acumulada de 1999 a 2003 foi maior do que o de 2003 a 2007.
(04) O período de 2011 a 2015 corresponde ao de maior índice de inflação dentre os apresentados.
(08) Em todos os períodos apresentados houve aumento do poder de compra do salário mínimo.
(16) O período de maior índice de reajuste salarial corresponde ao de maior índice de inflação.

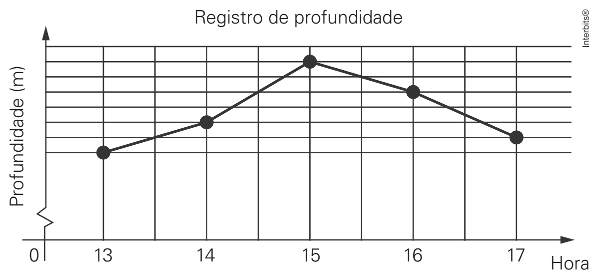
[01] Verdadeira, pois 1,44 − 1,00 = 0,44 = 44%.
[02] Verdadeira, pois o índice de inflação acumulada de 1999 a 2003 foi de $\frac{2{,}01-1{,}44}{1{,}44}=0{,}3958=39{,}58\%$ e de 2003 a 2007 foi de $\frac{2{,}57-2{,}01}{2{,}01}=0{,}2786=27{,}86\%$.
[04] Falsa, pois o índice de 2011 a 2015 é de $\frac{3{,}99-3{,}14}{3{,}14}=27{,}07\%$, que é menor, por exemplo, que o índice de 1995 a 1999.
[08] e [16] Verdadeiras. Observe a tabela a seguir (as porcentagens são calculadas da mesma forma que a dos itens anteriores):

Período	Reajuste no salário	Índice de aumento da inflação
1995 a 1999	85,7%	44%
1999 a 2003	53,8%	39,58%
2003 a 2007	75%	27,87%
2007 a 2011	54,2%	22%
2011 a 2015	46%	27%

Soma dos itens verdadeiros: 01 + 02 + 08 + 16 = 27.

3. Enem C6-H25

Num dia de tempestade, a alteração na profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 horas. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade h, registrada às 13 horas, não foi anotada e, a partir de h, cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro.

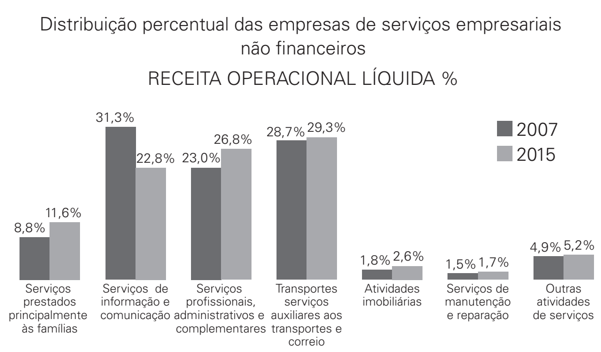


Foi informado que, entre 15 horas e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu em 10%. Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metros, no local onde foram feitos os registros?

a) 18
b) 20
c) 24
d) 36
e) 40

Observando o gráfico, vemos que, entre 15 horas e 16 horas, a profundidade diminuiu 2 metros, o que representa 10% da profundidade às 15 horas. Assim, podemos concluir que a profundidade às 15 horas era de 20 metros (20 · 10% = 2) e às 16 horas era de 18 metros.

4. CFTMG – A Pesquisa Anual de Serviços (PAS 2015), publicada em 2017 pelo IBGE, apresentou o gráfico a seguir para divulgar os resultados gerais dos segmentos de serviços não financeiros no Brasil, referentes aos anos de 2007 e 2015.



Fonte Pesq. anual Serv. Rio de Janeiro, v. 17, p. 1-4 2015

De acordo com o gráfico acima, a diferença percentual da receita operacional líquida, entre o segmento que cresceu mais e o segmento que cresceu menos, em 2015, foi de

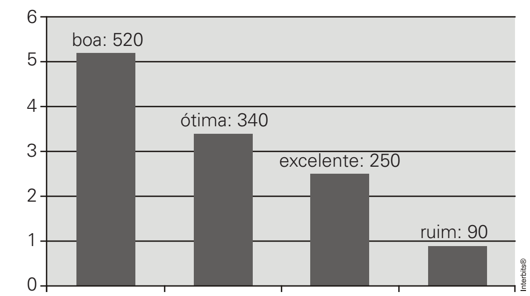
a) 3,8.
b) 3,6.
c) 2,5.
d) 2,3.

O serviço que mais cresceu foi o de "Serviços profissionais, administrativos e complementares", com um aumento de 26,8% − 23% = 3,8%.

O serviço que menos cresceu foi o de "Serviços de manutenção e recuperação", com um aumento de 1,7% − 1,5% = 0,2%.

Logo, a diferença é de 3,8% − 0,2% = 3,6%.

5. UEMG – Numa pesquisa de opinião feita para verificar o nível de satisfação com a administração de um certo prefeito, foram entrevistadas 1 200 pessoas, que escolheram uma, e apenas uma, entre as possíveis respostas: excelente, ótima, boa e ruim. O gráfico a seguir mostra o resultado da pesquisa.



De acordo com o gráfico, é CORRETO afirmar que o percentual de entrevistados que consideram a administração do prefeito ótima ou boa é de, aproximadamente,

a) 62,6%.
b) 69,3%.
c) 71,6%.
d) 82,4%.

O total de entrevistados é 520 + 340 + 250 + 90 = 1 200.

Opiniões ótima ou boa totalizam 520 + 340 = 860.

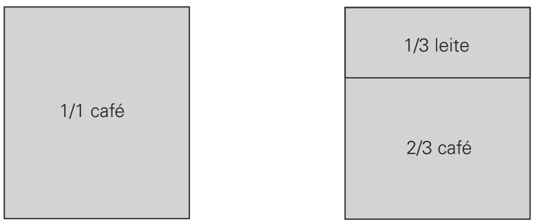
Logo, o percentual é de $\frac{860}{1200} = 0{,}716666\ldots \approx 71{,}6\%$.

6. Unicamp – Diversas padarias e lanchonetes vendem o "cafezinho" e o "cafezinho com leite". Uma pesquisa realizada na cidade de Campinas registrou uma variação grande de preços entre dois estabelecimentos, A e B, que vendem esses produtos com um volume de 60 mL, conforme mostra a tabela abaixo.

Produto	A	B
Cafezinho	R$ 2,00	R$ 3,00
Cafezinho com leite	R$ 2,50	R$ 4,00

a) Determine a variação percentual dos preços do estabelecimento A para o estabelecimento B, para os dois produtos.

b) Considere a proporção de café e de leite servida nesses dois produtos, conforme indica a figura abaixo. Suponha que o preço cobrado se refere apenas às quantidades de café e de leite servidas. Com base nos preços praticados no estabelecimento B, calcule o valor que está sendo cobrado por um litro de leite.



cafezinho cafezinho com leite

a) Comparando os preços do estabelecimento B com os do estabelecimento A, temos:

Cafezinho: $\frac{B}{A} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \rightarrow$ B vende 50% mais caro .

Cafezinho com leite: $\frac{B}{A} = \frac{4}{2{,}5} = 1{,}6 \rightarrow$ B vende 60% mais caro

b) Uma vez que 60 mL de café custam R$ 3,00 em B, podemos concluir que $\frac{2}{3} \cdot 60 = 40$ mL de café custam $\frac{2}{3} \cdot$ R\$ 3 = R\$ 2,00. Portanto, é observável que 20 mL de leite também custam R$ 2,00 (já que a mistura custa R$ 4,00). Agora basta calcularmos o preço do litro de leite. Como o preço deve ser proporcional ao volume, escrevemos:

$\frac{\text{R\$ } 2}{20 \text{ mL}} = \frac{x}{1000 \text{ mL}} \rightarrow x = \text{R\$ } 100{,}00$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Famerp – Em 2016, um determinado país teve T casos de cânceres em homens, dos quais 64% correspondiam aos dez tipos mais frequentes. Sabe-se que 30% dos dez tipos mais frequentes correspondiam ao câncer de próstata, que totalizaram, naquele ano, 60 000 casos. Nessas condições, T é igual a

a) 312 500.
b) 292 500.
c) 296 500.
d) 298 000.
e) 305 000.

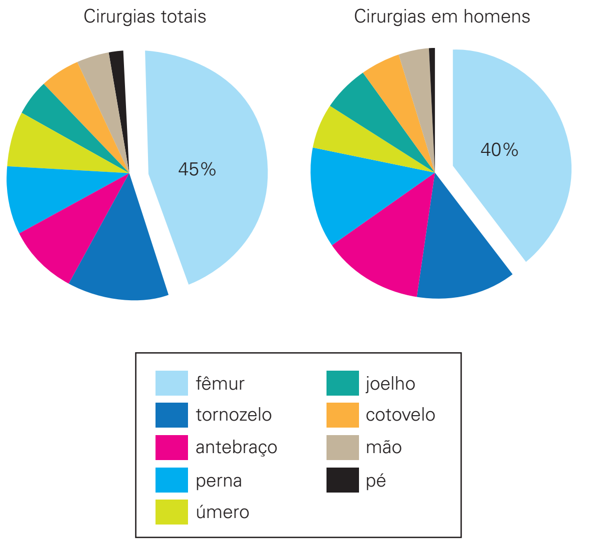
8. Ifal – No exame de seleção para o ano de 2017, o Ifal ofereceu 504 vagas para seus cursos integrados e, no exame de seleção para o ano de 2018, está oferecendo 630 vagas. Qual é o percentual de aumento do número de vagas para o ano de 2018?

a) 12,6%
b) 20%
c) 25%
d) 30%
e) 33%

9. CFTMG – Sabe-se que, para preparar uma determinada suplementação alimentar, a quantidade de suplemento a ser diluída deve ser de 3% do volume de leite. Se for utilizado meio litro de leite e se a medida usada para o suplemento for uma colher que tem 3 cm³, então o número de colheres do suplemento que será necessário, nessa preparação, é igual a

a) 5.
b) 6.
c) 7.
d) 8.

10. Uerj (adaptado) – No mapa mensal de um hospital, foi registrado o total de 800 cirurgias ortopédicas, sendo 440 em homens, conforme os gráficos abaixo.

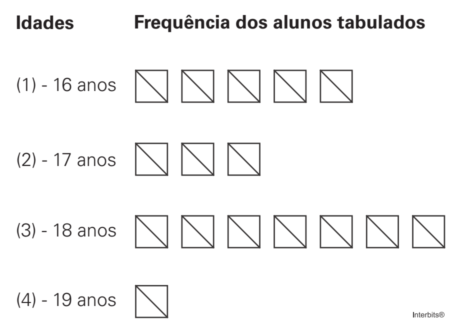


De acordo com esses dados, qual foi o número total de cirurgias de fêmur realizadas em mulheres?

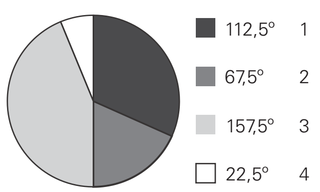
11. Especex/Aman (adaptado) – Em uma população de homens e mulheres, 60% são mulheres, sendo 10% delas vegetarianas. Sabe-se, ainda, que 5% dos homens dessa população também são vegetarianos. Qual porcentagem das pessoas vegetarianas são mulheres?

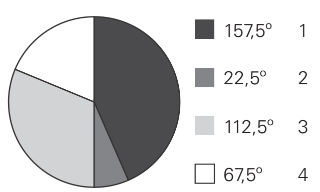
a) 50%
b) 70%
c) 75%
d) 80%
e) 85%

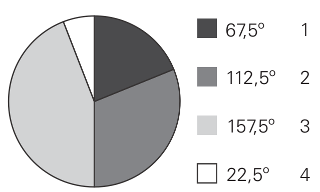
12. UPE-SSA (adaptado) – Uma pesquisa foi realizada numa turma de ensino médio, com a intenção de saber quais seriam as frequências das idades dos alunos de 16 a 19 anos em determinada escola. Os dados obtidos foram tabulados e organizados, conforme apresentado a seguir:

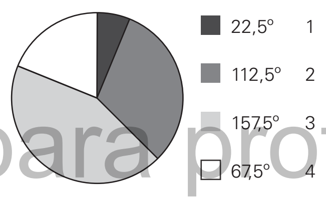


Sabendo que os números **1**, **2**, **3**, **4**, ao lado de cada legenda, representam, em graus, uma idade, identifique qual dos gráficos a seguir melhor indica as frequências dos alunos com relação às suas respectivas idades.

a)


b)


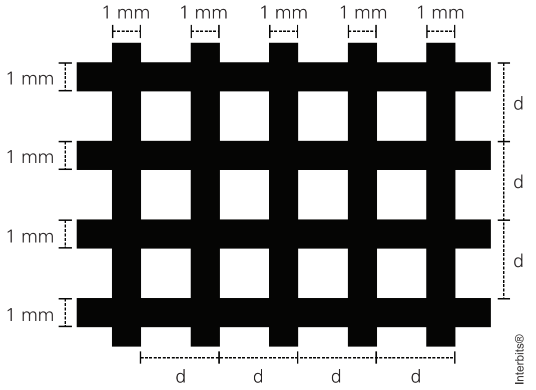
c)


d)


13. Enem C5-H21

Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de d − 1 milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente os raios de luz que atingirem as lacunas deixadas pelo entrelaçamento conseguem transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.



Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento. A medida de d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é:

a) 2
b) 1
c) 11/3
d) 4/3
e) 2/3

14. Uerj (adaptado) – Invenção brasileira para aproveitar o potencial de etanol que o país tem, a tecnologia flex foi desenvolvida em 2003 para que os veículos pudessem ter rendimento com álcool ou gasolina ou a mistura entre eles. Um posto possui 1 000 litros da mistura gasolina-álcool na proporção de 19 partes de gasolina pura para 6 partes de álcool. Quantos litros de gasolina pura é preciso acrescentar à mistura para que ela fique com 20% de álcool?

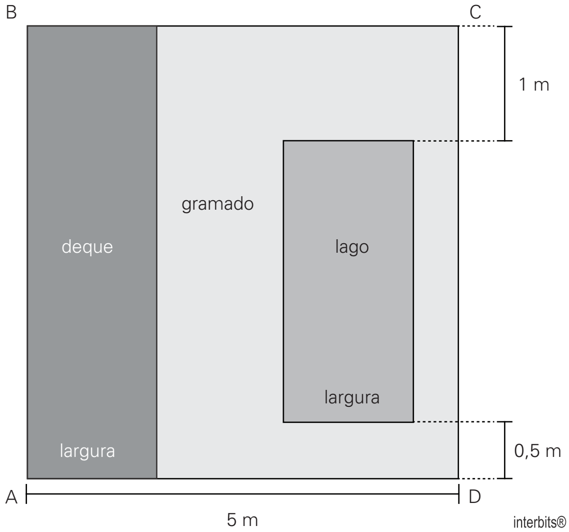
15. ESPM – Na câmara dos vereadores de uma cidade, uma proposta recebeu 42% de aprovação, 48% de rejeição e 5 vereadores se abstiveram de votar. Após intensa negociação, houve uma nova votação, em que 4 dos vereadores que haviam rejeitado a proposta e 3 dos que se abstiveram passaram a aprová-la. Dessa forma, a proposta foi aprovada com um percentual de:

a) 53%
b) 54%
c) 55%
d) 56%
e) 57%

16. Fac. Albert Einstein – Medicina – Para um concurso militar, o número de vagas para homens correspondia a 80% do número de vagas para mulheres. Dada a grande procura de candidatos, decidiu-se ampliar o número de vagas, sendo 30 novas vagas para homens e 15 para mulheres. Após a mudança, o número total de vagas para homens passou a ser 84% do número total de vagas para mulheres. Com isso, o total de vagas para ambos os sexos passou a ser

a) 276
b) 552
c) 828
d) 1104

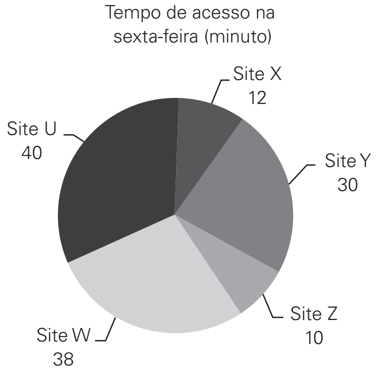
17. Unesp (adaptado) – Em um terreno retangular ABCD de 20 m² serão construídos um deque e um lago, ambos de superfícies retangulares de mesma largura, com as medidas indicadas na figura. O projeto de construção ainda prevê o plantio de grama na área restante, que corresponde a 48% do terreno.

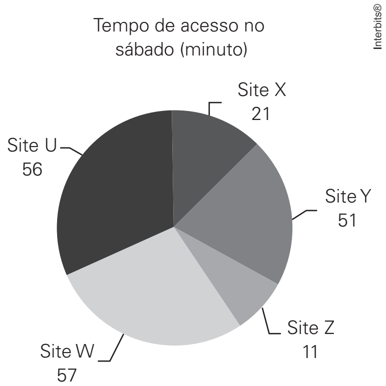


No projeto descrito, qual será, em m², a área da superfície do lago?

18. Enem C6-H25

Quanto tempo você fica conectado à internet? Para responder a essa pergunta foi criado um miniaplicativo de computador que roda na área de trabalho para gerar automaticamente um gráfico de setores, mapeando o tempo que uma pessoa acessa cinco *sites* visitados. Em um computador, foi observado que houve um aumento significativo do tempo de acesso da sexta-feira para o sábado nos cinco *sites* mais acessados. A seguir, temos os dados do miniaplicativo para esses dias.





Analisando os gráficos do computador, a maior taxa de aumento no tempo de acesso da sexta-feira para o sábado foi no *site*

a) X.
b) Y.
c) Z.
d) W.
e) U.

19. Enem C6-H25

O Brasil é o quarto produtor mundial de alimentos e é também um dos campeões mundiais de desperdício. São produzidas por ano, aproximadamente, 150 milhões de toneladas de alimentos e, desse total, $\frac{2}{3}$ são produtos de plantio. Em relação ao que se planta, 64% são perdidos ao longo da cadeia produtiva (20% perdidos na colheita; 8%, no transporte e armazenamento; 15%, na indústria de processamento; 1%, no varejo; e o restante no processamento culinário e hábitos alimentares).

Disponível em: <www.bancodealimentos.org.br>. Acesso em: 1 ago. 2012.

O desperdício durante o processamento culinário e os hábitos alimentares, em milhões de tonelada, é igual a

a) 20.
b) 30.
c) 56.
d) 64.
e) 96.

20. Enem C6-H25

O técnico de um time de voleibol registra o número de jogadas e de acertos, por atleta, em cada fundamento, para verificar os desempenhos dos jogadores. Para que o time tenha um melhor aproveitamento no fundamento bloqueio, ele decide substituir um dos jogadores em quadra por um dos que estão no banco de reservas. O critério a ser adotado é o de escolher o atleta que, no fundamento bloqueio, tenha apresentado o maior número de acertos em relação ao número de jogadas de que tenha participado. Os registros dos cinco atletas que se encontram no banco de reservas, nesse fundamento, estão apresentados no quadro.

Atleta	Participação em bloqueios	
	Número de acertos	Número de jogadas
I	20	30
II	10	34
III	19	32
IV	3	4
V	8	10

Qual dos atletas do banco de reservas o treinador deve colocar em quadra?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

2

AUMENTOS E DESCONTOS: FATOR DE CORREÇÃO

- Fator de correção
- Aumentos ou descontos sucessivos
- Lucro percentual
- Regra de três

HABILIDADES

- Identificar taxas percentuais.
- Transformar taxas percentuais em frações centesimais.
- Utilizar o conceito de taxas percentuais na resolução de problemas.
- Realizar operações envolvendo razão, proporção e porcentagem.
- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

Fator de correção

Vamos supor que uma mercadoria custava R$ 230,00 e teve um aumento de 25%. Como calculamos o novo preço desse produto?

Chamemos de P, A e P', respectivamente, o preço original, o aumento em reais e o novo valor da mercadoria. Portanto:

$$P' = P + A$$

Como vimos na seção anterior, calculamos o aumento A da seguinte maneira:

A = 25% de R$ 230,00

$A = 0{,}25 \cdot 230 =$ R$ 57,50

Portanto, temos

$P' = 230{,}00 + 57{,}50 =$ R$ 287,50

Ou seja, a mercadoria passou a custar R$ 287,50.

Entretanto, poderíamos ter calculado diretamente o valor de P' da seguinte forma:

$P' = P + A$

$P' =$ R$ 230,00 + 25% de R$ 230,00

$P' = 230 + 0{,}25 \cdot 230$

$P' = (1 + 0{,}25) \cdot 230$

$P' = 1{,}25 \cdot 230$

$P' = 287{,}50 =$ R$ 287,50

Generalizando essa ideia, temos que, sendo **P** o preço original de uma mercadoria, **i** a taxa percentual de aumento (na forma decimal) e **P'** o novo valor do aumento, temos:

$$P' = P + iP$$

Ou seja:

$$\boxed{P' = (1 + i) \cdot P}$$

O número (1 + i) é chamado **fator de correção**. Ele é o número pelo qual devemos multiplicar um valor **P** para o aumentarmos em uma taxa percentual **i** (sempre em forma decimal).

O mesmo raciocínio se aplica para redução percentual: sendo **P** o preço original de uma mercadoria, **i** a taxa percentual de redução (na forma decimal) e **P'** o novo valor do produto, então temos:

$$P' = P - iP$$

Ou seja:

$$\boxed{P' = (1 - i) \cdot P}$$

O número (1 − i) é chamado **fator de correção**. Ele é o número pelo qual devemos multiplicar um valor **P** para o reduzirmos em uma taxa percentual **i** (sempre em forma decimal).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **Sistema Dom Bosco** – Uma mercadoria sofreu um desconto de 12%. Sabendo que o preço inicial era R$ 180,00, calcule o novo valor do produto.

Resolução

Sendo P e P', respectivamente, o preço original e o novo valor da mercadoria, temos:

$P' = P - 0{,}12P = (1 - 0{,}12) \cdot P = 0{,}88P$
$\therefore P' = 0{,}88 \cdot 180 = \text{R\$ } 158{,}40$

2. **Fuvest-SP** – Certa mercadoria, que custava R$ 12,50, teve um aumento, passando a custar R$ 13,50. O percentual de aumento que essa mercadoria sofreu sobre o preço antigo é de:

a) 1,0%
b) 10,0%
c) 12,5%
d) 8,0%
e) 10,8%

Resolução

$P' = (1 + i) \cdot P \rightarrow 13{,}5 = (1 + i) \cdot 12{,}5 \rightarrow 1 + i = 1{,}08 \therefore i = 0{,}08 = 8\%$

Eventos

Um tipo de problema recorrente é quando ocorre mais de um evento sobre o valor de uma mercadoria: dois ou mais aumentos/descontos. Nesse tipo de situação, o uso do **fator de correção** facilita muito a resolução.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **Sistema Dom Bosco** – Uma mercadoria sofreu dois aumentos sucessivos: um de 20% no primeiro mês e outro de 25% no mês seguinte. De quanto foi o aumento percentual no bimestre?

Resolução

Uma primeira observação importante é que não podemos somar as porcentagens: um aumento de 20% seguido de outro de 25% não é igual a um único aumento de 45%. Isso ocorre porque os dois aumentos incidem sobre valores referenciais distintos. Dito isso, vamos ao cálculo da resolução. Pelo que vimos anteriormente, o preço P' após o primeiro aumento será:

$P' = 1{,}2 \cdot P$, em que P é o preço original.

Além disso, o preço P'' após o segundo aumento será:

$P'' = 1{,}25 \cdot P'$

Isso nos leva a:

$P'' = 1{,}25 \cdot 1{,}2 \cdot P = 1{,}5 \cdot P$

Portanto, os dois aumentos equivalem a um único aumento de 50%.

O que fizemos no exercício anterior foi "empilhar" os fatores de correção. Ao multiplicá-los, obtivemos um único novo fator de correção. Então basta interpretarmos o que este último significa: no caso, um fator de correção igual a 1,5 representa um aumento de 50%, pois:

$1 + i = 1{,}5 \therefore i = 0{,}5 = 50\%$

Vejamos um exemplo com aumento e desconto. O procedimento será o mesmo.

2. **Sistema Dom Bosco** – O preço do litro de álcool custa inicialmente R$ 2,00. Durante uma semana, sofreu um aumento de 20% e em seguida um desconto de 13%, passando a custar:

a) R$ 2,140
b) R$ 2,088
c) R$ 2,012
d) R$ 2,080

Resolução

$P' = P \cdot (1 + 0{,}2) \cdot (1 - 0{,}13) = 2 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}87 = 2{,}088$

Lucro percentual

O que estamos fazendo ao expressar alguma informação na forma de porcentagem é comparar dois números. Há duas formas de compararmos dois valores: a comparação absoluta, que se dá por meio da diferença (subtração) entre os dois valores, e a comparação relativa, que se dá por meio do quociente ou razão (divisão) entre os dois valores. A porcentagem nada mais é do que essa comparação relativa.

Por exemplo, se em um grupo de 45 pessoas há 36 brasileiros, e os demais indivíduos são estrangeiros, qual a porcentagem de estrangeiros no grupo? O que vamos fazer é comparar, relativamente, o grupo de estrangeiros (45 – 36 = 9 pessoas) com o total. Observe:

$$\frac{\text{estrangeiros}}{\text{total de indivíduos}} = \frac{9}{45} = 0{,}2 = 20\%$$

Portanto, os estrangeiros representam 20% do grupo.

Dessa forma, entendemos que o cálculo de qualquer porcentagem se dá por meio do quociente entre o **valor a respeito do qual desejamos calcular o percentual** e o **valor referencial**. Aplicaremos essa ideia para calcular o **lucro percentual** relativo à venda de qualquer mercadoria.

O lucro percentual pode ser referenciado ao preço de custo ou ao preço de venda. A relação absoluta entre esses três valores acontece da seguinte forma:

Preço de venda = Preço de custo + Lucro

LUCRO SOBRE CUSTO

Esse cálculo é o mais natural, pois usa como referência o preço de custo, isto é, um valor independente do lucro. Por exemplo: Qual o lucro sobre o custo na negociação de um produto vendido por R$ 80,00 e que custou ao vendedor R$ 50,00?

Ora, o lucro **absoluto** foi de R$ 80,00 − R$ 50,00 = = R$ 30,00. Portanto, o lucro percentual **sobre o custo** foi de:

$$\frac{\text{Lucro}}{\text{Custo}} = \frac{30}{50} = 0,6 = 60\%$$

LUCRO SOBRE VENDA

Esse cálculo já não é tão natural quanto o anterior, pois adota como referência o preço de venda, que é um valor dependente do lucro. Ainda usando o exemplo dado anteriormente, qual o lucro sobre a venda na negociação?

$$\frac{\text{Lucro}}{\text{Venda}} = \frac{30}{80} = 0,375 = 37,5\%$$

Portanto, o lucro percentual sobre o preço de venda foi de 37,5%.

Como o mesmo lucro, R$ 30,00, pode representar duas porcentagens diferentes: 60% e 37,5%? Isso acontece porque o referencial adotado para a comparação foi diferente em cada situação.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Um negócio foi realizado com um lucro de 25% sobre o valor de compra. De quanto foi o lucro sobre o valor de venda?

Resolução

Chamando de C, L e V, respectivamente, o valor da compra, o lucro e o valor de venda, temos V − C = L e L = 0,25 C. Isso nos leva a:

$V - C = 0,25C \rightarrow V = 1,25\,C$

Finalmente,

$$\frac{L}{V} = \frac{0,25C}{1,25C} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$$

Logo, o lucro foi de 20% sobre o valor de venda.

Regra de três

Há algumas fórmulas que ajudam a resolver problemas envolvendo porcentagem. No entanto, a maior parte pode ser resolvida aplicando-se a regra de três simples direta. Para isso, basta ler o enunciado das questões propostas, coletar dados e aplicar corretamente essa relação de proporcionalidade matemática. A seguir estão alguns exemplos.

Mesmo sendo possível resolver esses exercícios por meio da regra de três simples, vamos solucioná-los também usando o que discutimos no capítulo: fator de correção e variações percentuais.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Por quanto se deve vender cada mercadoria que custou R$ 4.126,75 para obter rentabilidade (lucro) de 6%?

Resolução

1ª solução (usando regra de três):

R$ 4 126,75 — 100%

x — 6%

Assim, 100 · x = 6 · 4 126,75

x = R$ 247,60

Logo, o preço de venda é R$ 4 126,75 + R$ 247,60, ou seja, R$ 4.374,35.

2ª solução (usando fator de correção):

Como se deseja obter um lucro de 6%, devemos aplicar um aumento de 6% sobre o preço de custo:

preço de venda = 1,06 · 4.126,75 = R$ 4.374,35

2. Sistema Dom Bosco – Um comerciante vendeu certa mercadoria comdesconto de 8% e recebeu o valor líquido de R$ 2.448,13. Qual era o preço desse produto antes de ser concedido o desconto?

Resolução

1ª solução (usando regra de três):

2 448,13 – 92%

x – 100%

Assim, 92 · x = 100 · 2 448,13

Logo, x = R$ 2 661,01

2ª solução (usando fator de correção):

O valor recebido foi resultado de um desconto de 8%. Logo, foi necessário aplicar um desconto de 8% sobre o valor de venda original:

$$0,92 \cdot x = 2448,13 \rightarrow x = \frac{2448,13}{0,92} = \text{R\$ } 2610,01$$

3. Sistema Dom Bosco – Um boleto bancário foi liquidado por R$ 879,64 com o abatimento de R$ 46,30. Determine a taxa do abatimento.

Resolução

Fazendo R$ 879,64 + 46,30, obtêm-se R$ 925,94 (equivalentes a 100% do valor).

1ª solução (usando regra de três):

925,94 – 100%

46,30 – x%

Assim, 925,94 · x = 46,30 · 100

Logo, x = 5%

2ª solução (usando fator de correção):

O valor inicial era de R$ 925,94. Com o desconto de i %, foi para R$ 879,64. Assim, podemos escrever:

$$925,94 \cdot (1 - i) = 879,64 \rightarrow 1 - i = \frac{879,64}{925,94} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - i = 0,95 \therefore i = 0,05$$

Ou seja, o desconto foi de 5%.

ROTEIRO DE AULA

PORCENTAGEM

- **Fator de correção**
  - **Aumento: 1 + i**
  - Desconto: 1 − i
  - **Útil também em aumentos/descontos sucessivos**
    - $V' = V \cdot (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n)$
- **Lucro percentual**
  - **Lucro sobre custo**
    - Divida o lucro L pelo custo C
  - Lucro sobre venda
    - **Divida o lucro L pelo valor de venda V**

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFPE – Em um saldão de início de ano, Tarcísio resolveu comprar uma calça e uma camisa. A calça que ele foi comprar marcava um preço de R$ 120,00 e ele a comprou com 40% de desconto. A camisa tinha preço anunciado de R$ 70,00 e estava sendo vendida com 30% de desconto. Sabendo que Tarcísio aproveitou os descontos e comprou a calça e a camisa, podemos afirmar que ele pagou um total de

a) R$ 133,00.
b) R$ 69,00.
c) R$ 114,00.
d) R$ 121,00
e) R$ 97,00

O total gasto por Tarcísio foi de
$120 \cdot (1 - 0{,}4) + 70 \cdot (1 - 0{,}3) = 120 \cdot 0{,}6 + 70 \cdot 0{,}7 = 121$

2. Unicamp – A tabela abaixo exibe o valor das mensalidades do Ensino Fundamental em três escolas particulares nos anos de 2017 e 2018.

Ano	Escola A	Escola B	Escola C
2017	R$ 1.000,00	R$ 1.200,00	R$ 1.500,00
2018	R$ 1.150,00	R$ 1.320,00	R$ 1.680,00

a) Determine qual escola teve o maior aumento percentual nas mensalidades de 2017 para 2018.
b) Uma família tem três filhos matriculados na Escola B. Suponha que essa escola ofereça um desconto de 10% na mensalidade para o segundo filho e de 20% para o terceiro filho. Calcule o valor a ser gasto mensalmente com os três filhos em 2018.

a) Vamos calcular cada aumento percentual. Para isso, calcularemos os fatores de correção associados a cada aumento:

Escola A: $\frac{1150}{1000} = 1{,}15 \rightarrow$ aumento de 15%

Escola B: $\frac{1320}{1200} = 1{,}10 \rightarrow$ aumento de 10%

Escola C: $\frac{1680}{1500} = 1{,}12 \rightarrow$ aumento de 12%

Portanto, concluímos que a Escola A teve o maior aumento.

b) O valor gasto é dado por:
$1\,320 + 0{,}9 \cdot 1\,320 + 0{,}8 \cdot 1320 = 1\,320\,(1 + 0{,}9 + 0{,}8) =$
$= 1\,320 \cdot 2{,}7 =$ R$ 3.564,00

3. Enem C5-21

Em certa loja de roupas, o lucro na venda de uma camiseta é de 25% do preço de custo da camiseta pago pela loja. Já o lucro na venda de uma bermuda é de 30% do preço de custo da bermuda, e na venda de uma calça o lucro é de 20% sobre o preço de custo da calça. Um cliente comprou nessa loja duas camisetas, cujo preço de custo foi R$ 40,00 cada uma, uma bermuda que teve preço de custo de R$ 60,00 e duas calças, ambas com mesmo preço de custo. Sabe-se que, com essa compra, o cliente proporcionou um lucro de R$ 78,00 para a loja. Considerando essas informações, qual foi o preço de custo, em real, pago por uma calça?

a) 90
b) 100
c) 125
d) 195
e) 200

Seja p o preço de custo de uma calça, temos:
$2 \cdot 0{,}25 \cdot 40 + 0{,}3 \cdot 60 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot p = 78 \therefore p = 100$

4. FGV – Uma empresa fabrica um único produto a um custo variável por unidade igual a R$ 60,00 e um custo fixo mensal de R$ 12.000,00. Em períodos normais, a capacidade máxima de produção é de 500 unidades por mês, e a produção é totalmente vendida; nessas condições, o preço de venda é fixado em 40% acima do custo médio de produção. Em períodos de recessão, as vendas caem, atingindo apenas 80% da capacidade máxima de produção. Mantendo-se na recessão o mesmo preço vigente em períodos normais, ele será x% superior ao novo custo médio por unidade. O valor de x é aproximadamente igual a (o custo médio de produção é igual ao custo total dividido pela quantidade produzida):

a) 39%
b) 37%
c) 35%
d) 33%
e) 31%

Calculando:

Custo médio em períodos normais: $C_N = \frac{12000 + 60 \cdot 500}{500} = 84$

Preço de venda em períodos normais: $V_N = 1{,}4 \cdot 84 = 117{,}6$

Custo médio em períodos de recessão: $C_R = \frac{12\,000 + 60 \cdot 500 \cdot 0{,}8}{500 \cdot 0{,}8} = 90$

Preço de venda em períodos de recessão: $V_R = V_N = 117{,}6$

Comparando o preço de venda com o custo, ambos no período de recessão, temos:

$\frac{117{,}6}{90} = 1{,}3067 \cong 31\%$

5. Fac. Albert Einstein-Medicina – Suponha que, em certo país, observou-se que o número de exames por imagem, em milhões por ano, havia crescido segundo os termos de uma progressão aritmética de razão 6, chegando a 94 milhões/ano ao final de 10 anos. Nessas condições, o aumento percentual do número de tais exames, desde o ano da observação até o final do período considerado, foi de

a) 130%.
b) 135%.
c) 136%.
d) 138%.

Se foram 10 anos com crescimento de 6 milhões por ano (o que significa 9 aumentos de 6 milhões), no primeiro ano o número de casos era de $94 - 9 \cdot 6 = 94 - 54 = 40$.

Ao final de 10 anos, o número de exames por imagem aumentou de 40 milhões por ano para 94 milhões por ano. Isso representa um aumento de:

$$\frac{94-40}{40} = \frac{54}{40} = 1{,}35 = 135\%$$

6. PUCRJ - (adaptado) – Um imóvel em São Paulo foi comprado por x reais, valorizou 10% e foi vendido por R$ 495.000,00. Um imóvel em Porto Alegre foi comprado por y reais, desvalorizou 10% e foi vendido por R$ 495.000,00.

a) Por quanto o imóvel de São Paulo foi comprado?
b) Por quanto o imóvel de Porto Alegre foi comprado?

a) Sendo y o valor de compra do imóvel em São Paulo:
$1{,}1x = 495\,000 \therefore x = 450\,000$
b) Sendo y o valor de compra do imóvel em Porto Alegre:
$0{,}9y = 495\,000 \therefore y = 550\,000$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Sistema Dom Bosco – Uma revendedora de automóveis usados apresenta um modelo e o anuncia por x reais. Para atrair clientes, a empresa oferece duas formas de pagamento. Observe:

Forma de pagamento	Valor
À vista	10% de desconto sobre o preço anunciado
Cartão de crédito	Com acréscimo de 20% sobre o preço anunciado, sendo o total dividido em 10 parcelas iguais

Um cliente comprou um automóvel e optou pelo pagamento no cartão de crédito em 10 parcelas iguais de R$ 3.240,00.

Considerando as informações anteriores, é correto afirmar que

a) o valor x anunciado pela revendedora é menor que R$ 25.000,00.
b) se esse cliente tivesse optado pelo pagamento à vista, então ele gastaria mais de R$ 24.500,00 com essa compra.
c) a opção que esse comprador fez usando o cartão de crédito representou um acréscimo de 30% sobre o valor que seria pago à vista.
d) se o cliente tivesse pagado à vista, em vez de utilizar o cartão de crédito, então teria economizado mais de R$ 8.000,00.

Texto para as próximas 2 questões.

Uma loja de departamentos fez uma grande promoção. Os descontos dos produtos variavam de acordo com a cor da etiqueta com que estavam identificados e com o número de unidades adquiridas do mesmo produto, conforme tabela a seguir.

Percentuais de desconto	Etiqueta amarela	Etiqueta vermelha
1ª unidade adquirida	5%	10%
2ª unidade adquirida	10%	20%
3ª unidade adquirida	20%	35%
A partir da 4ª unidade adquirida	30%	50%

Por exemplo, se alguém comprar apenas duas unidades de um produto de R$ 10,00 marcado com a etiqueta amarela, irá pagar um total de R$ 18,50 pelas duas unidades. Se comprar uma terceira, esta lhe custará R$ 8,00 a mais.

8. Insper – Uma pessoa fez uma compra de acordo com a tabela abaixo.

Produto	Preço unitário	Quantidade	Etiqueta
Calças	R$ 80,00	3	Amarela
Camisetas	R$ 40,00	5	Vermelha
Bonés	R$ 50,00	2	Vermelha

Ao passar no caixa, o valor total da compra foi

a) R$ 372,00.
b) R$ 421,50.
c) R$ 431,00.
d) R$ 520,50.
e) R$ 570,00.

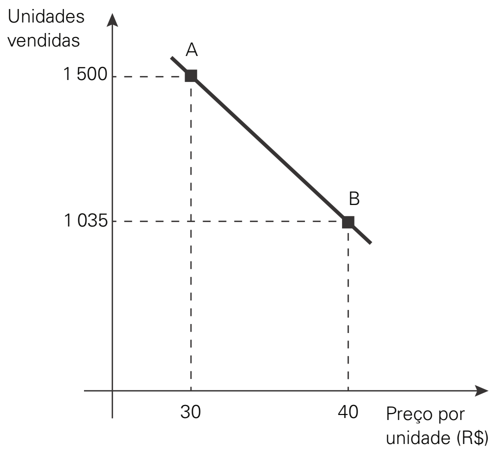
9. Insper – Um cliente encontrou uma jaqueta identificada com duas etiquetas, uma amarela e outra vermelha, ambas indicando o preço de R$ 100,00. Ao conversar com o gerente da loja, foi informado de que, nesse caso, os descontos deveriam ser aplicados sucessivamente. Ao passar no caixa, o cliente deveria pagar um valor de

a) R$ 85,00, independentemente da ordem em que os descontos fossem dados.
b) R$ 85,00, apenas se o desconto maior fosse aplicado primeiro.
c) R$ 85,50, apenas se o desconto maior fosse aplicado primeiro.
d) R$ 85,50, independentemente da ordem em que os descontos fossem dados.
e) R$ 90,00, pois, aplicando os dois descontos sucessivamente, o maior prevalece.

10. FGV-RJ – As grandezas P, T e V são tais que P é diretamente proporcional a T e inversamente proporcional a V.

Se T aumentar 20% e V diminuir 20%, determine a variação percentual de P.

11. ESPM – O gráfico abaixo mostra a variação do número de unidades vendidas de uma certa mercadoria conforme o preço cobrado por unidade.



Comparando-se as situações descritas pelos pontos A e B, podemos concluir que:

a) O aumento no preço unitário causou uma queda de 59% nas unidades vendidas.

b) Embora tenha havido uma queda nas vendas, o aumento do preço unitário causou um acréscimo de 6% na receita.

c) Com o aumento do preço unitário, a receita sofreu uma queda de 8%.

d) Com o aumento do preço unitário, a receita diminuiu em 31%.

e) Mesmo com o aumento do preço unitário, a receita não se alterou.

12. Uerj – As farmácias W e Y adquirem determinado produto com igual preço de custo. A farmácia W vende esse produto com 50% de lucro sobre o preço de custo. Na farmácia Y o preço de venda do produto é 80% mais caro do que na farmácia W.

O lucro da farmácia Y em relação ao preço de custo é de:

a) 170% **b)** 150% **c)** 130% **d)** 110%

13. FGV – O PIB *per capita* de um país, em determinado ano, é o PIB daquele ano dividido pelo número de habitantes. Se, em um determinado período, o PIB cresce 150% e a população cresce 100%, podemos afirmar que o PIB *per capita* nesse período cresce:

a) 20%
b) 25%
c) 35%
d) 45%
e) 50%

14. FGV (adaptado) – No início de certo ano, Fábio aplicou sua poupança em dois fundos de investimentos, A e B, sendo A o de ações e B o de renda fixa. O valor aplicado em B foi o quádruplo do aplicado em A. Um ano depois, Fábio observou que o fundo A rendeu –2% (perda de 2%) e o B rendeu 15%. Considerando o total aplicado, qual a taxa anual de rentabilidade de Fábio?

15. Enem C5-H21

Uma distribuidora possui 40 mil litros de combustível em estoque. Tal combustível é resultante da mistura de etanol e gasolina pura, de acordo com os percentuais de 25% de etanol e 75% de gasolina pura. Para atender aos novos parâmetros nacionais na mistura dos combustíveis, o dono da distribuidora precisará alterar os percentuais de composição do combustível presente no tanque para 20% de etanol e 80% de gasolina pura. Se o dono da distribuidora irá adequar o combustível em estoque ao novo padrão adicionando gasolina pura aos 40 mil litros existentes, a quantidade de gasolina, em litros, a ser adicionada será

a) 32 000.
b) 10 000.
c) 8 000.
d) 2 500.
e) 2 000.

16. Enem C5-H21

A baixa procura por carne bovina e o aumento de oferta de animais para abate fizeram com que o preço da arroba do boi apresentasse queda para o consumidor. No ano de 2012, o preço da arroba do boi caiu de R$ 100,00 para R$ 93,00.

Disponível em: <www.diariodemarilia.com.br>. Acesso em: 14 ago. 2012.

Com o mesmo valor destinado à aquisição de carne, em termos de perda ou ganho, o consumidor

a) ganhou 6,5% em poder aquisitivo de carne.
b) ganhou 7% em poder aquisitivo de carne.
c) ganhou 7,5% em poder aquisitivo de carne.
d) perdeu 7% em poder aquisitivo de carne.
e) perdeu 7,5% em poder aquisitivo de carne.

17. FGV

a) Escreva um pequeno texto para verificar se a proposição:

$$|x| > \frac{2^x}{x}, \text{ para todo número real } x < 0$$

é verdadeira ou falsa.

b) O lucro obtido por uma livraria foi x por cento mais em 2014 do que em 2013 e y por cento menos em 2015 do que em 2014. É correto afirmar que o lucro da livraria em 2015 foi maior do que em 2013, sabendo que $x - y > \frac{xy}{100}$? Justifique a sua resposta.

18. Enem C3-H12

O governo decidiu reduzir de 25% para 20% o teor de álcool anidro misturado à gasolina vendida nos postos do país. Considere que a média de desempenho, ou seja, a quantidade de quilômetros (km) que um carro anda com 1 litro de combustível, é diretamente proporcional à porcentagem de gasolina presente no combustível, e que a média de desempenho de um carro antes da decisão do governo era de 13,5 km/L. Nas condições do texto, qual será a estimativa da média de desempenho após a redução de álcool anidro no combustível?

a) 10,80 km/L
b) 12,65 km/L
c) 12,82 km/L
d) 14,15 km/L
e) 14,40 km/L

19. Enem C5-H21

Uma pessoa comercializa picolés. No segundo dia de certo evento ela comprou 4 caixas de picolés, pagando R$ 16,00 a caixa com 20 picolés para revendê-los no evento. No dia anterior, ela havia comprado a mesma quantidade de picolés, pagando a mesma quantia e obtendo um lucro de R$ 40,00 (obtido exclusivamente pela diferença entre o valor de venda e o de compra dos picolés) com a venda de todos os picolés que possuía.

Pesquisando o perfil do público que estará presente no evento, a pessoa avalia que será possível obter um lucro 20% maior do que o obtido com a venda no primeiro dia do evento.

Para atingir seu objetivo, e supondo que todos os picolés disponíveis foram vendidos no segundo dia, o valor de venda de cada picolé, no segundo dia, deve ser

a) R$ 0,96.
b) R$ 1,00.
c) R$ 1,40.
d) R$ 1,50.
e) R$ 1,56.

20. Enem C5-H21

Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

Valor do kWh (com tributos) × consumo (em kWh) + Cosip

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo. O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	Valor da Cosip (R$)
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh e o valor do kWh (com tributos) seja de R$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%. Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

a) 134,1
b) 135,0
c) 137,1
d) 138,6
e) 143,1

MATEMÁTICA FINANCEIRA: JUROS SIMPLES

3

A Matemática financeira é a área que estuda movimentações e transações financeiras, como financiamentos e investimentos em bolsa de valores, fundos imobiliários e afins. Dominar os conhecimentos (básicos e avançados) dessa área nos auxilia a compreender o comportamento de valores e taxas no decorrer do tempo, fazer análises e tomar decisões baseadas em argumentos lógico-matemáticos, o que é muito útil quando tratamos de investimentos ou financiamentos: uma decisão tomada sem embasamento matemático pode significar endividamento ou perda de valores investidos.

Esse universo da Matemática financeira tem vocabulário próprio. Vamos iniciar este módulo conhecendo esses termos.

PEDROSEK/SHUTTERSTOCK

- Conceitos iniciais
- Juros simples

HABILIDADES

- Identificar conceitos de juros.
- Aplicar corretamente fórmulas de juros.
- Resolver situações-problema envolvendo juros.
- Interpretar gráficos que representam juros simples.
- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Conceitos iniciais

Existem alguns conceitos da Matemática financeira que são básicos e precisam ser definidos. A seguir estão alguns deles.

CAPITAL (C)

O capital C (muitas vezes também chamado de capital inicial, representado por C_0) é o recurso financeiro que será investido ou financiado no tempo inicial da operação financeira. Ele é a base para o cálculo de juros e também é conhecido como valor principal, valor presente ou valor aplicado.

Na propaganda a seguir, o valor a ser considerado como capital é descrito como valor à vista, ou seja, valor presente, no caso, R$ 499,00.

Qual será a taxa de juros cobrada, segundo esse anúncio, no caso da compra a prazo?

TAXA (I)

É o coeficiente obtido da relação entre os juros (j) e o capital (C), que pode ser expresso em forma percentual ou decimal. Utiliza-se a letra i para representá-la, pois, no inglês, para se referir a juros, usa-se a palavra *interest*. A taxa i fará o papel de taxa de aumento ou desconto, como estudado no módulo anterior.

Na figura a seguir, a taxa está na forma percentual e representa o desconto que será concedido sobre o capital.

JUROS (J)

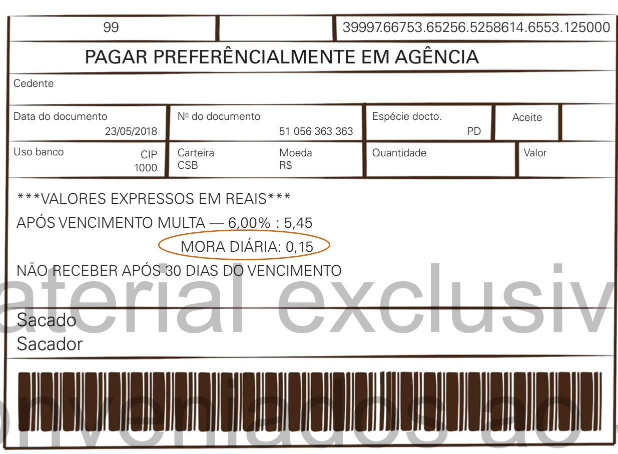
Os juros são a remuneração obtida por meio do capital de terceiros. Ela pode ser entendida de duas formas:

- quem paga: nesse caso, os juros podem ser chamados de prejuízo;
- quem recebe: pode ser entendido como rendimento, ou seja, lucro.

De forma mais geral, pode-se afirmar que juros são a forma de remuneração pelo empréstimo de dinheiro. Note que juros só existem se houver valor (capital) empregado, seja ele próprio ou de terceiros.

Esse conceito também é reconhecido por juros de mora. Mora representa atraso ou prorrogação no prazo de pagamento de um título financeiro, conforme destacado no boleto de cobrança.

É importante destacar que juros é **dinheiro**. Muitas pessoas confundem juros com a taxa de juros. A **taxa de juros** é o percentual que será usado para o cálculo de juros, que por sua vez é o valor monetário a ser recebido ou cobrado.


99 | | 39997.66753.65256.5258614.6553.125000

PAGAR PREFERÊNCIALMENTE EM AGÊNCIA

Cedente

Data do documento 23/05/2018	Nº do documento 51 056 363 363	Espécie docto. PD	Aceite	
Uso banco CIP 1000	Carteira CSB / Moeda R$	Quantidade	Valor	

VALORES EXPRESSOS EM REAIS
APÓS VENCIMENTO MULTA — 6,00% : 5,45
MORA DIÁRIA: 0,15
NÃO RECEBER APÓS 30 DIAS DO VENCIMENTO

Sacado
Sacador

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Um investidor aplicou um capital de R$ 1.200,00 em um fundo de investimento que lhe rendeu 3%. Qual foi o ganho do investidor?

Resolução

O ganho do investidor se refere a juros de 3%, o que corresponde a:

3% de 1200 = $0{,}03 \cdot 1200$ = R$ 36

PRAZO, TEMPO OU PERÍODO (N)

É o tempo que o capital (C_C), aplicado a uma taxa (i_i), ficará investido ou emprestado. Ele pode ser inteiro ou fracionário.

- **período inteiro**: 1 dia; 1 mês comercial (30 dias); 1 ano comercial (360 dias) etc.
- **período fracionário:** 3,5 meses; 15,8 dias; 5 anos e 2 meses etc.

Entre todos os períodos, existem aqueles que são mais usuais. Os principais são:

- Dia: usualmente adotado para pagamento de mora em títulos ou boletos de cobrança (escrevemos **a.d.,** que significa **ao dia**).
- Mês: normalmente adotado em financiamentos de automóveis e eletrodomésticos (escrevemos **a.m.,** que significa **ao mês**).
- Ano: usualmente adotado no financiamento de imóveis (escrevemos **a.a.**, que significa **ao ano**).

É importante destacar que a taxa e o prazo devem fazer referência a uma mesma unidade de tempo. Por exemplo, considere um período de um ano e meio. Se a taxa informada for **ao mês**, trataremos o prazo como **18 meses**. Se a taxa informada for **ao ano**, trataremos o prazo como **1,5 ano.**

MONTANTE (M OU CN)

O montante (ou capital acumulado) é o valor acumulado após um capital C ficar aplicado durante um período n a uma taxa i. É a soma do capital investido com os juros obtidos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Aplicando-se, durante 1 mês, um capital de R$ 500,00 na caderneta de poupança com rendimento de 0,53% a.m., qual será o montante?

Resolução

O capital inicial é $C_0 = 500$. Como esse capital ficará aplicado durante 1 mês (período), representamos o montante por C_1, e o cálculo se dá por meio do aumento percentual de C_0, segundo uma taxa de 0,53%.

$C_1 = C_0 \cdot (1 + 0{,}0053) = 500 \cdot 1{,}0053 =$
= R$ 502,65

O que acontece quando tratamos de operações financeiras, como empréstimos e investimentos, é que o capital inicial fica investido por mais de um período. Nesses casos, não basta conhecermos o capital C_0, a taxa i e o tempo n. Precisamos saber qual será o regime de juros: **simples** ou **compostos**. A diferença entre esses dois regimes está na base para o cálculo dos juros.

Juros simples

No regime de juros simples, o cálculo dos juros a cada período se dá sempre sobre o capital inicial. Vejamos um exemplo:

José pegou emprestado R$ 400,00 de João. Eles combinaram que José quitaria o empréstimo em uma única parcela assim que possível. O acordo também previu cobrança de juros de 1% a.m. Veja qual a quantia necessária para a quitação da dívida ao longo dos meses:

- Após um mês: 1% de 400 = $0{,}01 \cdot 400 = 4$;
- Valor devido: $C_1 = 400 + 4 =$ R$ 404,00.

Após o segundo mês, serão cobrados novos juros, mas eles serão calculados sobre a mesma referência, ou seja, o capital inicial $C_0 = 400$. Isso acontecerá em todos os meses seguintes:

- Após 2 meses: 1% de 400 = $0{,}01 \cdot 400 = 4$;
- Valor devido: $C_2 = 404 + 4 =$ R$ 408,00;
- Após 3 meses: 1% de 400 = $0{,}01 \cdot 400 = 4$;
- Valor devido: $C_3 = 408 + 4 =$ R$ 412,00.

Perceba que, a cada período, a dívida cresce o mesmo valor, 1% de C_0. Isso é o que caracteriza o regime de juros simples: crescimento linear.

Generalizando, teremos:

$$C_1 = C_0 + j = C_0 + i \cdot C_0 = C_0\,(1 + i)$$
$$C_2 = C_1 + j = C_0\,(1 + i) + i \cdot C_0 = C_0\,(1 + i \cdot 2)$$
$$C_3 = C_2 + j = C_0\,(1 + i \cdot 2) + i \cdot C_0 = C_0\,(1 + i \cdot 3)$$
$$\vdots$$
$$C_n = C_{n-1} + j = C_0\,(1 + i\,(n - 1)) + i \cdot C_0 = C_0(1 + i \cdot n)$$

Em resumo:

$$C_n = C_0\,(1 + i \cdot n)$$

Observe que, na expressão acima, temos quatro elementos: C_n, C_0, i e n. Em qualquer exercício que nos informar três desses quatro elementos, descobriremos o que falta. Vejamos um exemplo de cada situação.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Qual o montante gerado por um capital de R$ 220,00 aplicado por dois anos, à taxa de 4% a.m., sob regime de juros simples? Quais os juros dessa operação financeira?

Resolução

Temos $C_0 = 220$, $i = 0{,}04$ e $n = 24$ (2 anos correspondem a 24 meses).

$C_{24} = 220 \cdot (1 + 0{,}04 \cdot 24) \therefore C_{24} =$ R$ 431,20

Logo, o montante é de R$ 431,20, e os juros foram de 431,20 − 220 = R$ 211,20.

2. Sistema Dom Bosco – João pagou a um banco a importância de R$ 2,10 de juros por um dia de atraso sobre uma prestação de R$ 420,00. Qual a taxa mensal de juros simples aplicada pelo banco?

Resolução

Por se tratar de juros simples, os juros diários serão sempre calculados sobre a mesma base. Portanto, sempre será de R$ 2,10. Os juros correspondentes a 1 mês serão de $30 \cdot 2{,}1 =$ R$ 63,00. Aplicando a fórmula dos juros simples, temos:

$$483 = 420(1 + i \cdot 1) \rightarrow 1 + i = \frac{483}{420} = 1{,}15$$

$$\therefore i = 0{,}15 = 15\%$$

Logo, a taxa de juros mensal é de 15%.

3. Sistema Dom Bosco – Qual foi o capital que gerou rendimentos de R$ 187,50 durante 10 meses, a uma taxa de 1,5% ao mês?

Resolução

Queremos calcular o capital inicial C_0. Sabemos que: $i = 0{,}015$, $n = 10$ e $C_{10} = C_0 + 187{,}5$. Usando a fórmula de juros simples, temos:

$$C_0 + 187{,}5 = C_0(1 + 0{,}015 \cdot 10)$$

$$C_0 + 187{,}5 = 1{,}15\,C_0$$

$$187{,}5 = 0{,}15C_0 \therefore C_0 = \frac{187{,}5}{0{,}15} = \text{R\$ } 1.250{,}00$$

Portanto, o capital investido foi de R$ 1 250,00.

4. Sistema Dom Bosco – Um cliente pagou R$ 3.171,25 para quitação de débito de uma dívida em atraso. Considerando que a loja cobrava juros simples de 3,75% a.m. e que a dívida inicial era de R$ 2.950,00, determine com quanto tempo de atraso o cliente pagou a dívida.

Resolução

Basta aplicarmos a fórmula de juros simples:

$$3\,171{,}25 = 2\,950(1 + 0{,}0375 \cdot n)$$

$$3\,171{,}25 = 2\,950 + 110{,}625n$$

$$221{,}25 = 110{,}625n \therefore n = 2 \text{ meses}$$

Portanto, o cliente pagou com 2 meses de atraso.

ROTEIRO DE AULA

- **MATEMÁTICA FINANCEIRA**
  - **Conceitos básicos**
    - **Capital (C)**
    - Taxa de juros (i)
    - **Período ou tempo (n)**
    - Montante (M)
  - **Juros simples (J)**
    - **Juros calculados sempre sobre o** valor inicial
    - $J = C \cdot i \cdot n$
    - $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Uece – Bruno fez um empréstimo de R$ 1.000,00 a juros simples mensais de 10%. Dois meses após, pagou R$ 700,00 e, um mês depois desse pagamento, liquidou o débito. Este último pagamento, para liquidação do débito, foi de

e) R$ 550,00.
f) R$ 460,00.
g) R$ 490,00.
h) R$ 540,00.

O saldo devedor de Bruno após dois meses era de $1\,000 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 2) =$ = R$ 1.200,00. Efetuado o pagamento de R$ 700,00, seu saldo devedor passou a ser de $1\,200 - 700 =$ R$ 500,00. Logo, no mês seguinte, seu saldo devedor passou a ser de $500(1 + 0{,}1) =$ R$ 550,00, que é o resultado procurado.

2. USF – Um senhor depositou R$ 1.200,00 na aplicação financeira A e R$ 1.300,00 na aplicação financeira B, em regime de juros simples. As aplicações estão no mesmo banco, com a mesma taxa de juros e durante o mesmo período. Sabendo que ao final do período de capitalização as duas aplicações, juntas, renderam R$ 800,00, calcule quanto rendeu cada uma delas.

Consideramos x o rendimento obtido com a aplicação na financeira A e y o rendimento obtido com a aplicação na financeira B. Admitindo juros simples, a mesma taxa e o mesmo período de aplicações, os ganhos são diretamente proporcionais aos capitais investidos, ou seja:

$$\frac{x}{1200} = \frac{y}{1300} \rightarrow$$

$$\frac{x}{1200} = \frac{y}{1300} = \frac{x+y}{1200+1300} \rightarrow$$

$$\frac{x}{1200} = \frac{y}{1300} = \frac{800}{2\,500} \rightarrow$$

$$\frac{x}{1200} = \frac{y}{1300} = \frac{8}{25} \rightarrow$$

$x = 384$ e $y = 416$

Portanto, a primeira aplicação rendeu R$ 384,00 e a segunda, R$ 416,00.

3. Enem (adaptado) C4-H17

Paulo emprestou R$ 5.000,00 a um amigo, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considere x o número de meses do empréstimo e M(x) o montante a ser devolvido para Paulo no final de x meses. A alternativa correta é:

a) $M(x) = 5\,000 + 150x$
b) $M(x) = 5\,000 \cdot 1{,}03x$
c) $M(x) = 5\,000 \cdot 0{,}03x$
d) $M(x) = 5\,000 \cdot 130x$
e) $M(x) = 5\,000 + 1{,}03x$

Considerando juros simples, o montante M pode ser escrito com base no número de meses x. Daí vem: $M(x) = 5\,000(1 + 0{,}03x) = 150x + 5\,000$.

4. IFSC – Analise as seguintes situações:

I. Seu João fez um empréstimo de R$ 1 000,00 no Banco A, a uma taxa de juros simples; após 4 meses, pagou um montante de R$ 1 320,00 e quitou sua dívida.

II. Dona Maria fez um empréstimo de R$ 1 200,00 no Banco B, a uma taxa de juros simples; após 5 meses, pagou um montante de R$ 1 800,00 e quitou a dívida.

Assinale a alternativa CORRETA.

As taxas mensais de juros simples cobradas pelo Banco A e pelo Banco B, respectivamente, são:

a) 8% a.m. e 10% a.m.
b) 18% a.m. e 13% a.m.
c) 6,4% a.m. e 12,5% a.m.
d) 13% a.m. e 18% a.m.
e) 10% a.m. e 8% a.m.

Como ambas as situações estão sob juros simples, temos juros de 320 reais em quatro meses na primeira situação. Aplicando a fórmula de juros simples, temos:

$J = c \times i \times t \rightarrow 320 = 1\,000 \times i \times 4 \rightarrow i = 0{,}08 = 8\%$

Na segunda situação, temos:

$J = c \times i \times t \rightarrow 600 = 1\,200 \times i \times 5 \rightarrow i = 0{,}1 = 10\%$

5. UEFS (adaptado) – Os capitais T_1 e T_2 colocados a 75% a.a., em 8 meses, e a 5% a.m., em 6 meses, respectivamente, rendem juros iguais.

Sabendo-se que a diferença entre eles é de R$ 1 600,00 e que o regime de juros é simples, é correto afirmar que o menor dos capitais é de

a) R$ 1.200,00.
b) R$ 1.600,00.
c) R$ 2.400,00.
d) R$ 3.200,00.
e) R$ 4.000,00.

Considerando que os juros são simples, temos:

$$T_1 \cdot \frac{75}{100} \cdot \frac{8}{12} = T_2 \cdot \frac{5 \cdot 12}{100} \cdot \frac{6}{12}$$

$$T_1 \cdot 50 = T_2 \cdot 30$$

$$T_2 = \frac{5}{3} \cdot T_1$$

Sabemos que $T_2 - T_1 = 1\,600$, logo:

$$\frac{5 \cdot T_1}{3} - T_1 = 1600$$

$$\frac{2 \cdot T_1}{3} = 1600$$

$$2 \cdot T_1 = 4\,800$$

$$T_1 = 2\,400$$

Portanto, o menor dos capitais é R$ 2 400,00.

6. EBMSP – Há nos dias atuais uma confusão entre o que é ser e ter. Nunca o ser humano teve tanto acesso a bens materiais, mas isso não o fez mais feliz. Pesquisas já mostraram que a felicidade tem um componente material, porém só até determinado ponto, até que as necessidades básicas sejam supridas; principalmente, as necessidades do grupo social em que se vive. Uma vez que isso é atendido, a felicidade não cresce mais proporcionalmente.

É fato que hoje se consome muito mais do que se precisa e, quando esse consumismo vai a um grau máximo, pode resultar em transtornos na vida financeira e familiar, sendo a compulsão por compras um mal que acomete cerca de seis milhões de brasileiros.

Uma pessoa recebeu a fatura mensal do cartão de crédito com valor total a pagar igual a V reais, tendo optado por pagar a taxa mínima de 10% desse valor, mesmo sabendo que pagaria, no mês subsequente, uma taxa de 20% sobre o saldo devedor.

Com base nesses dados e sabendo que o valor mínimo relativo à fatura do mês subsequente – segunda fatura – foi igual a R$ 216,00, calcule o valor a ser pago no próximo mês – terceira fatura – para quitar o saldo devedor.

Admitindo que V seja o valor da primeira fatura, podemos escrever que:
$(V - 0{,}1V) \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}1 = 216 \rightarrow 0{,}108V = 216 \therefore V = 2\,000$
Portanto, na terceira fatura o valor cobrado será:
$[(2\,000 - 0{,}1 \cdot 2\,000) \cdot 1{,}2 - 216] \cdot 1{,}2 = $ R$ 2 332,80

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Unisc – A função **f** que representa o valor a ser pago após um desconto de 21% sobre o valor x de um produto é

a) $f(x) = x - 21$
b) $f(x) = 0{,}79x$
c) $f(x) = 1{,}21x$
d) $f(x) = -21x$
e) $f(x) = 1{,}021x$

8. UEPG – Paulo tem a quantia de R$ 8.000,00 para aplicar durante quatro meses. Consultando três bancos, recebeu as seguintes propostas de investimento. Analise as propostas e assinale o que for correto.

Proposta I: taxa de 15% ao ano de juros simples.

Proposta II: taxa de 0,04% ao dia de juros simples.

Proposta III: resgate de R$ 8.416,00 no final do período de 4 meses.

01) A proposta I rendeu mais de R$ 300,00 de juros.
02) A proposta II vai produzir um montante superior a R$ 8.400,00.
04) A proposta II renderá menos que a proposta III.
08) Se optar pela proposta III, Paulo terá aplicado seu dinheiro a uma taxa de juros simples igual a 6% ao semestre.

9. CFTMG – O pagamento de uma televisão foi feito, sem entrada, em 5 parcelas mensais iguais, corrigidas a juros simples pela taxa de 0,7% ao mês. Dessa forma, no final do período, o valor total pago, em percentual, será maior do que o inicial em

a) 2,1
b) 3,5
c) 4,2
d) 7,3

10. UFSM (adaptado) – A chegada da televisão no Brasil facilitou o acesso à informação. Com o avanço da tecnologia, os aparelhos estão cada dia mais modernos e, consequentemente, mais caros.

Um consumidor deseja adquirir uma televisão com tecnologia de última geração. Enquanto aguarda o preço da televisão baixar, ele aplica o capital disponível de R$ 3000,00 a juros simples de 0,8% ao mês em uma instituição financeira, por um período de 18 meses. Qual o montante ao final desse período?

11. UEPG – Os capitais C_1 = R$ 2.000,00 e C_2 = R$ 1.500,00 são aplicados a juros simples de 1% ao mês e 18% ao ano, respectivamente, durante t meses. Após esse tempo, a soma dos montantes produzidos pelas duas aplicações é de R$ 3.840,00. Nesse contexto, assinale o que for correto.

01) O tempo t de aplicação é superior a 6 meses.
02) O montante produzido por C_2 é R$ 1.980,00.
04) C_1 rendeu R$ 160,00 de juros.
08) O tempo t de aplicação é de 270 dias.

12. Uerj – Na compra de um fogão, os clientes podem optar por uma das seguintes formas de pagamento:

- à vista, no valor de R$ 860,00;
- em duas parcelas fixas de R$ 460,00, sendo a primeira paga no ato da compra e a segunda, 30 dias depois.

A taxa de juros mensal para pagamentos não efetuados no ato da compra é de:

a) 10%
b) 12%
c) 15%
d) 18%

13. UEPG – Uma pessoa aplicou, no prazo de dois anos, os capitais C_1 e C_2 a juros simples, o primeiro a 18% a.a. e o segundo a 24% a.a. Sabendo que o rendimento das duas aplicações totalizou R$ 487,20 e que o capital C_1 é 40% menor que C_2, assinale o que for correto.

01) Se $f(x) = x - 770$, então $f(C_2) > 0$.

02) Os dois capitais juntos totalizam R$ 1.120,00.

04) C_2 corresponde a mais que R$ 750,00.

08) A diferença entre os capitais é maior que R$ 300,00.

16) C_1 corresponde a R$ 420,00.

14. CFTMG (adaptado) – Uma cliente fez um empréstimo, a juros simples, de R$ 600,00 em um banco, a uma taxa de 4% ao mês, por dois meses. Quando ela foi pagar, o gerente do banco informou-lhe que poderia sortear uma taxa **i** para ter um desconto sobre o valor de sua dívida. Fez-se o sorteio e foi lhe concedido o desconto, resultando no pagamento de R$ 602,64. Dessa forma, qual o valor da taxa i sorteada?

15. FMP – Abaixo são apresentados termos gerais que definem cinco sequências de números reais, para $n \in \mathbb{N}$.

$a_n = 80 \cdot (24)^n$

$b_n = 80 \cdot (1,30)^n$

$c_n = 80 \cdot (0,30)^n$

$d_n = 80 + 24 \cdot n$

$e_n = 80 + (2,4) \cdot n$

Um dos termos gerais apresentados acima indica o valor devido n meses após a tomada de um empréstimo de R$ 80,00, calculado após a incidência de uma taxa mensal de **juros simples** de 30% sobre o valor do empréstimo.

Esse termo geral é

a) e_n
b) d_n
c) a_n
d) c_n
e) b_n

16. UEL– Considere que um contribuinte deve pagar determinado imposto no valor de R$ 5.000,00 em 5 parcelas de mesmo valor.

Sabendo que sobre o valor de cada parcela incide 1% de juros, mais uma taxa fixa T de 0,82%, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor de cada parcela a ser paga pelo contribuinte.

a) R$ 1.008,20
b) R$ 1.110,00
c) R$ 1.018,20
d) R$ 1.050,00
e) R$ 1.090,00

17. Uepa (adaptado) – Um agricultor financiou junto a uma cooperativa os insumos utilizados na lavoura em 2014. Pagou 20% do valor dos insumos no ato da compra, utilizando parte do lucro obtido no ano anterior, e financiou o restante, devendo quitar a dívida depois de 10 meses a uma taxa de 2% ao mês a juros simples. Observou que havia gastado o montante de R$ 208.800,00 com a parte financiada. Neste caso, qual foi o valor financiado dos insumos pelo agricultor?

ESTUDO PARA O ENEM

18. Sistema Dom Bosco C4-H18

O preço à vista de uma mercadoria é R$ 130,00. O comprador pode pagar 20% no ato da compra e o restante em uma única parcela de R$ 128,96, vencível em 3 meses. Admitindo-se o regime de juros simples, qual a taxa de juros anual cobrada na venda a prazo?

a) 6%
b) 12%
c) 24%
d) 48%
e) 96%

19. Enem C5-H23

O Conselho Monetário Nacional (CMN) determinou novas regras sobre o pagamento mínimo da fatura do cartão de crédito, a partir do mês de agosto de 2011. A partir de então, o pagamento mensal não poderá ser inferior a 15% do valor total da fatura. Em dezembro daquele ano, outra alteração foi efetuada: daí em diante, o valor mínimo a ser pago seria de 20% da fatura.

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 29 fev. 2012.

Um determinado consumidor possuía no dia do vencimento, 01/03/2012, uma dívida de R$ 1.000,00 na fatura de seu cartão de crédito. Se não houver pagamento do valor total da fatura, são cobrados juros de 10% sobre o saldo devedor para a próxima fatura. Para quitar sua dívida, optou por pagar sempre o mínimo da fatura a cada mês e não efetuar mais nenhuma compra.

A dívida desse consumidor em 01/05/2012 será de

a) R$ 600,00.
b) R$ 640,00.
c) R$ 722,50.
d) R$ 774,40.
e) R$ 874,22.

20. (Enem) C4-H17

João deve 12 parcelas de R$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e 5 parcelas de R$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse essa dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado.

A opção que dá a João o menor gasto seria

a) renegociar suas dívidas com o banco.

b) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.

c) recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.

d) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.

e) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

MATEMÁTICA FINANCEIRA: JUROS COMPOSTOS

4

- Juros compostos
- Juros e funções
- Equivalência de taxas

HABILIDADES

- Identificar conceitos de juros.
- Aplicar corretamente fórmulas de juros.
- Resolver situações-problema envolvendo juros.
- Distinguir juros simples de juros compostos.
- Interpretar gráficos que representam juros compostos.
- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Juros compostos

Na maioria das transações financeiras do nosso cotidiano, como financiamento de automóveis e imóveis e aplicações como a caderneta de poupança, o regime de juros não é o simples, o qual estudamos anteriormente. Nas operações aqui citadas, o regime de juros usado é o de **juros compostos**. Mais adiante vamos entender o motivo.

Nesse regime de cobrança, ao final de cada período, os juros que foram gerados são agregados ao capital, o que faz que a base de cálculo de juros no próximo período seja maior. Isso altera fortemente o comportamento do montante. Vejamos isso por meio de um exemplo.

Imagine que uma aplicação renda 1% ao mês. Vejamos o que acontece com um capital inicial aplicado de R$ 500.

O capital irá crescer a uma taxa de 1% ao mês. Portanto, devemos multiplicá-lo por 1,01 (fator de correção estudado no capítulo anterior). Então, após o primeiro mês, teremos:

$$C_1 = C_0 \cdot 1{,}01 = 500 \cdot 1{,}01 = 505$$

Agora, no segundo mês, os juros serão calculados sobre o montante atual (R$ 505), e não sobre o capital inicial. Isso nos leva a:

$$C_2 = C_1 \cdot 1{,}01 = 505 \cdot 1{,}01 = 510{,}05$$

Da mesma forma, no terceiro mês os juros serão calculados sobre o montante acumulado, e assim por diante:

$$C_3 = C_2 \cdot 1{,}01 = 510{,}05 \cdot 1{,}01 = 515{,}15$$

Em um primeiro momento, não parece existir tanta diferença entre os juros simples e os compostos, mas, com prazos longos, há muita divergência. Observe a tabela, na qual replicamos o exemplo acima nos dois regimes.

Períodos (n)	Montante (juros compostos)	Montante (juros simples)
0	R$ 500,00	R$ 500,00
1	R$ 505,00	R$ 505,00
2	R$ 510,05	R$ 510,00
3	R$ 515,15	R$ 515,00
4	R$ 520,30	R$ 520,00
⋮	⋮	⋮
10	R$ 552,31	R$ 550,00
⋮	⋮	⋮
100	R$ 1.352,41	R$ 1.000,00
⋮	⋮	⋮
300	R$ 9.894,23	R$ 2.000,00

Vejamos como se dá o cálculo do montante no regime de juros compostos após n períodos, sendo C_0 o capital inicial e i a taxa de rendimento.

$$C_1 = C_0 \cdot (1 + i)$$
$$C_2 = C_1 \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = \\ = C_0 \cdot (1 + i)^2$$
$$C_3 = C_2 \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) = \\ = C_0 \cdot (1 + i)^3$$
$$C_4 = C_3 \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^3 \cdot (1 + i) = \\ = C_0 \cdot (1 + i)^4$$
$$C_5 = C_4 \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^4 \cdot (1 + i) = \\ = C_0 \cdot (1 + i)^5$$
$$\vdots$$
$$\boxed{C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Qual o montante de um capital de R$ 5.000,00, aplicado à taxa de 4% ao mês, pelo regime de juros compostos, durante 5 meses?

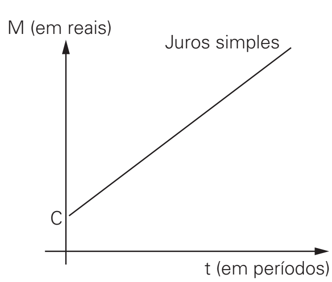
Resolução

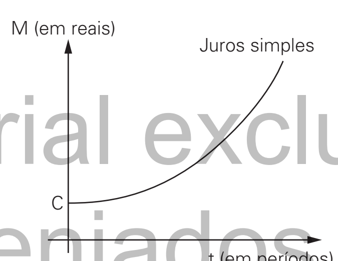
$C_5 = C_0 \cdot (1 + i)^5 = 5\,000 \cdot 1{,}04^5 =$
$= 5\,000 \cdot 1{,}21665 =$ R$ 6 083,25

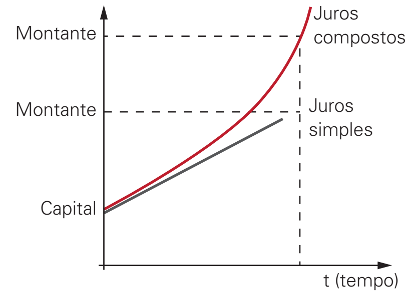
Juros e funções

Nos dois regimes estudados, o montante está em função do tempo. É válido verificar de que tipo de função se trata.

No caso dos juros simples, como $C(t) = C_0 \cdot (1 + i \cdot t)$, vemos que se trata de uma função afim; já no caso dos juros compostos, $C(t) = C_0 \cdot (1 + i)^t$, trata-se de uma função exponencial. Por esse motivo há tanta divergência no cálculo do montante nos dois regimes em prazos extensos: o crescimento exponencial é muito mais veloz do que o crescimento linear.







Equivalência de taxas

Uma taxa de 1% ao mês é a mesma coisa que (equivalente a) 12% ao ano? Se você questionar algumas pessoas sobre isso, é muito provável que a maioria diga que sim. Mas a resposta não é tão simples assim. Precisamos da seguinte definição:

- Dizemos que duas taxas são equivalentes se elas produzem, sobre um mesmo capital e no mesmo regime de juros, igual montante em períodos equivalentes.

Consideremos primeiramente o caso dos juros simples. Vamos ver a relação entre taxas mensal e anual. Precisamos tomar períodos equivalentes, por exemplo: 1 ano no caso da taxa anual e 12 meses para taxa mensal.

Se um capital C_0 for aplicado durante 1 ano a uma taxa de 1% a.m., o montante será de:

$$C_{12} = C_0 \cdot (1 + 0{,}01 \cdot 12)$$

Seja i a taxa anual que gera o mesmo montante em período equivalente, em 1 ano:

$$C_1' = C_0 \cdot (1 + i \cdot 1)$$

Portanto, para que as taxas sejam equivalentes, devemos ter $C_{12} = C'_1$:

$$C_0 \cdot (1 + 0{,}01 \cdot 12) = C_0 \cdot (1 + i \cdot 1)$$
$$1{,}12 = 1 + i \therefore i = 0{,}12 = 12\% \text{ a.a.}$$

Então, se o regime for de juros simples, a resposta é sim: 1% ao mês equivale a 12% ao ano. No caso dos juros simples, percebemos que basta multiplicarmos a primeira taxa pelo número de períodos que equivalem a um único período relativo à outra taxa. No exemplo tivemos:

$$1\% \text{ ao mês} \times 12 \text{ meses} = 12\% \text{ ao ano}$$

Vejamos o que acontece no caso de juros compostos:

$$C_1' = C_{12}$$
$$C_0 \cdot (1 + 0{,}01)^{12} = C_0 \cdot (1 + i)^1$$
$$(1{,}01)^{12} = (1 + i)^1$$
$$1{,}1268 = 1 + i$$
$$i = 0{,}1268 = 12{,}68\%$$

Ou seja, 1% ao mês equivale, no regime de juros compostos, a 12,68% ao ano.

De modo geral, no regime de juros compostos, duas taxas são equivalentes se:

$$(1+i_1)^{n_1} = (1+i_2)^{n_2}$$

em que n_1 e n_2 são períodos equivalentes (1 ano = 12 meses, 1 mês = 30 dias etc.).

ROTEIRO DE AULA

MATEMÁTICA FINANCEIRA

- Juros são dinheiro
- Taxa de juros é porcentagem
- Regime de cálculo
  - Simples
    - Juros calculados sempre sobre valor inicial
    - $M = C \cdot (1 + i \cdot t)$
  - Composto
    - Juros calculados a cada período sobre o último montante
    - $M = C \cdot (1 + i)^t$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Uerj (adaptado) – Um capital de C reais foi investido a juros compostos de 10% ao mês e gerou, em três meses, um montante de R$ 53.240,00. Qual o valor, em reais, do capital inicial C?

a) R$ 38.811,96
b) R$ 37.268,00
c) R$ 40.000,00
d) R$ 47.916,00

Sendo i = 10% = 0,1 e n = 3, vem

$53\,240 = C\,(1 + 0{,}1)^3$

$53\,240 = C\,(1{,}1)^3$

$53\,240 = C \cdot 1{,}331$

$C = \dfrac{53\,240}{1{,}331} = 40\,000 \leftrightarrow C = \text{R\$ } 40\,000{,}00$

2. UFJF-PISM (adaptado) – Um capital de R$ 1.000,00 aplicado no sistema de juros compostos a uma taxa de 10% ao mês gera, após n meses, o montante (que é mais o capital inicial) dado pela fórmula abaixo:

$$M(n) = 1000\left(1 + \frac{1}{10}\right)^n$$

a) Qual o valor do montante após 2 meses?
b) Qual o número mínimo de meses necessários para que o valor do montante seja igual a R$ 10.000,00? Use $10^{1,04} = 11$.

a)

$M(2) = 1\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{10}\right)^2$

$M = 1\,000 \cdot \left(\dfrac{11}{10}\right)^2$

$M(2) = 1\,0\cancel{00} \cdot \left(\dfrac{121}{1\cancel{00}}\right)$

$M(2) = 10 \cdot 121$

$M(2) = 1\,210 \leftrightarrow M(2) = \text{R\$ } 1.210{,}00$

b)

$10\,000 = 1000 \cdot (1{,}1)^n$

$(1{,}1)^n = \dfrac{10\,\cancel{000}}{1\,\cancel{000}}$

$\left(\dfrac{11}{10}\right)^n = 10$

$\left(\dfrac{10^{1,04}}{10}\right)^n = 10$

$(10^{0,04})^n = 10$

$0{,}04n = 10$

$n = \dfrac{10}{0{,}04} = 250$

A quantidade mínima é de 250 meses.

3. Enem C4-H18

Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180.000,00 a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00, mais juros de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

a) 2.075,00
b) 2.093,00
c) 2.138,00
d) 2.255,00
e) 2.300,00

Após o pagamento da nona parcela, o saldo devedor ficou reduzido a:
$180\,000 - 9 \cdot 500 = 180\,000 - 4\,500 = 175\,500$, ou seja, R$ 175.500,00.

Portanto, o valor da décima prestação é igual a:
$500 + 0{,}01 \cdot 175\,500 = 500 + 1\,755 = 2\,255$, ou seja, R$ 2.255,00.

4. CFTM (adaptado) – O gerente de um banco apresentou a um cliente, interessado em investir determinada quantia de dinheiro, quatro opções, conforme descritas no quadro abaixo.

Opção de investimento	Regime de capitalização	Prazo (meses)	Taxa (a.m.)
1	composto	2	2,0%
2	composto	3	1,5%
3	simples	4	2,0%
4	simples	5	1,5%

A opção que proporcionará um maior rendimento ao cliente, considerando-se os prazos e taxas fixados pelo banco, será a

a) 1. **b)** 2. **c)** 3. **d)** 4.

Nota-se que os dois primeiros investimentos são da forma de juros compostos, seguindo a fórmula:

$$\text{Montante} = \text{Capital} \times (1 + \text{taxa})^{\text{tempo}}$$

Os dois últimos investimentos são de juros simples, isto é:

$$\text{Montante} = \text{Capital} \times (1 + \text{taxa} \times \text{tempo})$$

Aplicando ambos os tipos de juros nas opções de investimento e calculando o melhor rendimento sobre um capital C, temos:

$\text{Inv1} = [C \times (1 + \text{taxa})^{\text{tempo}}] = (1 + 0{,}02)^2$

$C = (1{,}02)^2$

$C = 1{,}0404C$

$Inv2 = [C \times (1 + taxa)^{tempo}] = (1 + 0{,}015)^3$

$C = (1{,}015)^2$

$C = 1{,}04567C$

$Inv3 = c + (C \times taxa \times tempo) = C + (0{,}02 \times 4)$

$C = C + 0{,}08$

$C = 1{,}08C$

$Inv4 = c + (C \times taxa \times tempo) = C + (0{,}015 \times 5)$

$C = C + 0{,}075$

$C = 1{,}075C$

Logo, o melhor investimento é a terceira opção.

5. FGV – Um capital aplicado a juros compostos a uma certa taxa anual de juros dobra a cada 7 anos. Se, hoje, o montante é R$ 250 000,00, o capital aplicado há 28 anos é um valor cuja soma dos algarismos vale

a) 20
b) 17
c) 19
d) 21
e) 18

Do enunciado, sendo i a taxa anual de juros compostos, temos: $250\,000 = C \cdot (1 + i)^{28}$, em que C é o capital aplicado há 28 anos.

Ainda do enunciado, sendo x um capital aplicado à mesma taxa i por um período de 7 anos, temos:

$2x = x \cdot (1 + i)^7$

$(1 + i)^7 = 2$

$[(1 + i)^7]^4 = 2^4$

$(1 + i)^{18} = 16$

Substituindo $(1 + i)^{28} = 16$ na equação $250\,000 = C \cdot (1 + i)^{28}$:

$250\,000 = C \cdot 16$

$C = \dfrac{250\,000}{16} = 15\,625$

A soma dos algarismos de C é dada por: $1 + 5 + 6 + 2 + 5 = 19$.

6. FGV – Como resultado de um processo ganho na justiça, Hélio deveria ter recebido, no início de 2006, a quantia de R$ 4.000,00 da empresa Alfa. No mesmo período (início de 2006), Hélio devia R$ 1 000,00 em sua fatura de cartão de crédito. Nenhuma dessas quantias foi quitada à época. Para atualizar (corrigir) valores monetários ao longo do tempo, pode-se utilizar o regime de capitalização de juros compostos. É válida a seguinte relação matemática:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

em que **M** é o montante; **C** é o capital; **i** é a taxa de juros e **n** é o número de períodos de capitalização. Por exemplo, aplicando-se o capital de R$ 1.000,00 à taxa de 5,00% ao mês, por um mês, obtém-se o montante de R$ 1.050,00.

A tabela abaixo contém valores para o termo (1 + i)n para **i** e **n** selecionados.

	n (meses)				
i (% mensal)	1	12	108	120	132
1,00	1,0100	1,1268	2,9289	3,3004	3,7190
2,00	1,0200	1,2682	8,4883	10,7652	13,6528
3,00	1,0300	14,4258	24,3456	34,7110	49,4886
4,00	1,0400	1,6010	69,1195	110,6626	177,1743
5,00	1,0500	1,7959	194,2872	348,9120	626,5958

Utilize as informações do enunciado para responder às seguintes questões:

a) Suponha que a taxa de juros utilizada para atualizar o valor que Hélio tem a receber da empresa Alfa seja igual a 1,00% ao mês. Qual será o valor que a empresa Alfa deverá pagar a Hélio no início de 2016, ou seja, após exatos 10 anos?

b) Suponha que a taxa de juros utilizada para atualizar a dívida da fatura de cartão de crédito seja igual a 4,00% ao mês. No início de 2016, ou seja, após exatos 10 anos, qual é o valor atualizado dessa dívida de Hélio?

c) Suponha que Hélio receba da empresa Alfa, no início de 2016, o valor devido. Quanto, no máximo, poderia ter sido a dívida de Hélio em sua fatura de cartão de crédito, em valores do início de 2006, de forma que ele pudesse quitá-la, no início de 2016, com o valor recebido da empresa Alfa?

Nota: taxa de juros utilizada para atualizar:

- o valor recebido por Hélio da empresa Alfa: 1,00% ao mês.
- a dívida da fatura de cartão de crédito: 4,00% ao mês.

a)
$4\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{100}\right)^{120} = 4\,000 \cdot 3{,}3004 = 13\,201{,}60$, ou seja,
R$ 13.201,60

b)
$1\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^{120} = 4\,000 \cdot 110{,}6626 = 110{,}662$, ou seja,
R$ 110 662,60

c) Considerando que x seja o valor pedido, temos:

$x \cdot \left(1 + \dfrac{1}{100}\right)^{120} = 13\,201{,}60$

$x \cdot 110{,}6626 = 13\,201{,}60$

$x \cong 119{,}30$, ou seja, R$ 119,30

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Ifal – Em 2000, certo país da América Latina pediu um empréstimo de 1 milhão de dólares ao FMI (Fundo Monetário Internacional) para pagar em 100 anos. Porém, por problemas políticos e de corrupção, nada foi pago até hoje e a dívida foi sendo "rolada" com a taxação de juros compostos de 8,5% ao ano. Determine o valor da dívida no corrente ano de 2015, em dólar. Considere $(1{,}085)^5$.

a) 1,2 milhões.
b) 2,2 milhões.
c) 3,375 milhões.
d) 1,47 milhões.
e) 2 milhões.

8. Unicamp – Uma compra no valor de 1 000 reais será paga com uma entrada de 600 reais e uma mensalidade de 420 reais. A taxa de juros aplicada na mensalidade é igual a

a) 2%
b) 5%
c) 8%
d) 10%

9. ESPM – Em todos os dias 10 dos meses de janeiro, fevereiro e março de um certo ano, o sr. João aplicou a mesma quantia de R$ 1.000,00 à taxa de juros compostos de 10% ao mês. Podemos concluir que o montante dessa aplicação no dia 10 de abril desse mesmo ano foi de:

a) R$ 4.203,00
b) R$ 3.641,00
c) R$ 4.015,00
d) R$ 3.135,00
e) R$ 3.968,00

10. CFTRJ – Marcelo comprou um móvel de R$ 1.000,00 de forma parcelada, com juros de 5% ao mês. Sabendo que Marcelo pagou R$ 400,00 no ato da compra e o restante um mês depois, qual foi o valor dessa segunda parcela, 30 dias após a compra?

11. IFSC – Segundo dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), o rendimento médio mensal das famílias catarinenses é R$ 1.368,00.

Considerando-se que uma família pegou um empréstimo no valor de 30% de sua renda média mensal e vai pagar esse empréstimo a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, quanto essa família pegou emprestado e qual o valor que a família irá pagar (montante final) se saldar essa dívida em 2 meses?

a) Pegou emprestado R$ 407,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 423,86.
b) Pegou emprestado R$ 410,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 425,94.
c) Pegou emprestado R$ 409,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 424,90.
d) Pegou emprestado R$ 409,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 425,94.
e) Pegou emprestado R$ 410,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 426,98.

12. UPE-SSA – Patrícia aplicou, num investimento bancário, determinado capital que, no regime de juro composto, durante um ano e seis meses, à taxa de 8% ao mês, gerou um juro de R$ 11.960,00. Qual é o capital aplicado por ela nesse investimento? Utilize $(1{,}08)^{18} = 3{,}99$.

a) R$ 3.800,00
b) R$ 4.000,00
c) R$ 4.600,00
d) R$ 5.000,00
e) R$ 5.200,00

13. USF (adaptado) – Pensando em montar seu próprio consultório, Nathália começou a economizar desde que entrou no curso de Medicina. Ao passar no vestibular, ela ganhou R$ 5.000,00 de seus pais e os aplicou a uma taxa de 0,5% ao mês a juros compostos. Hoje, passados 5 anos, ou seja, 60 meses, qual o montante do rendimento dos R$ 5.000,00? (Considere $1{,}005^{60} = 1{,}35$).

a) R$ 6.750,00.
b) R$ 6.650,00.
c) R$ 6.550,00.
d) R$ 6.450,00.
e) R$ 6.350,00.

14. FGV (adaptado) – Um investidor aplicou certa quantia, em reais, à taxa de juro composto de 1% ao mês. Neste problema, desprezando qualquer tipo de correção monetária devido à inflação. Neste investimento, após 2 meses, seria possível resgatar o valor aplicado com lucro de R$ 4.020,00. Calcule o valor inicialmente aplicado.

15. Sistema Dom Bosco – Se uma aplicação financeira, em regime de juros compostos, quadruplica o capital em dois anos, em quanto tempo ela renderá 700%?

a) 3 anos.
b) 3,5 anos.
c) 4 anos.
d) 4,5 anos.
e) 5 anos.

16. UPE-SSA – Mariana fez um empréstimo à base de juros compostos, num banco que cobra 10% ao mês. Ao final de 180 dias, o montante a ser pago por ela será de R$ 9.000,00. Com o dinheiro do empréstimo, Mariana realizou alguns pagamentos, chegando a sua casa com R$ 1.250,00. Quanto ela gastou, aproximadamente, com os pagamentos?

Adote $(1,1)^6 = 1,8$

a) R$ 1.333,00
b) R$ 2.755,00
c) R$ 3.260,00
d) R$ 3.750,00
e) R$ 4.500,00

17. Sistema Dom Bosco – Se um produto sofre deflação quadrimestral de 10%, qual das alternativas mais se aproxima de sua deflação anual?

a) 25%.
b) 26%.
c) 27%.
d) 28%.
e) 29%.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C4-H18

João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os pontos possíveis, é de R$ 21.000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses.

Ele tem R$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.

Para ter o carro, João deverá esperar:

a) dois meses, e terá a quantia exata.
b) três meses, e terá a quantia exata.
c) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00.
d) quatro meses, e terá a quantia exata.
e) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00.

19. Enem C5-H21

Um empréstimo foi feito a taxa mensal de I% usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P.

O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.

A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é

a) $$P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$$

b) $$P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{2i}{100}\right)}\right]$$

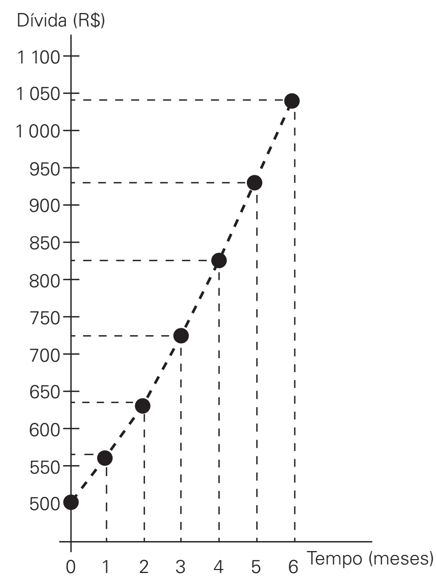
c) $$P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$$

d) $$P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{2i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{3i}{100}\right)}\right]$$

e) $$P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^3}\right]$$

20. Enem C6-H26

Um trabalhador possui um cartão de crédito que, em determinado mês, apresenta o saldo devedor a pagar no vencimento do cartão, mas não contém parcelamentos a acrescentar em futuras faturas. Nesse mesmo mês, o trabalhador é demitido. Durante o período de desemprego, o trabalhador deixa de utilizar o cartão de crédito e também não tem como pagar as faturas, nem a atual nem as próximas, mesmo sabendo que, a cada mês, incidirão taxas de juros e encargos por conta do não pagamento da dívida. Ao conseguir um novo emprego, já completados 6 meses de não pagamento das faturas, o trabalhador procura renegociar sua dívida. O gráfico mostra a evolução do saldo devedor.



Com base no gráfico, podemos constatar que o saldo devedor inicial, a parcela mensal de juros e a taxa de juros são

a) R$ 500,00, constante e inferior a 10% ao mês.
b) R$ 560,00, variável e inferior a 10% ao mês.
c) R$ 500,00, variável e superior a 10% ao mês.
d) R$ 560,00, constante e superior a 10% ao mês.
e) R$ 500,00, variável e inferior a 10% ao mês.

5 ÂNGULOS

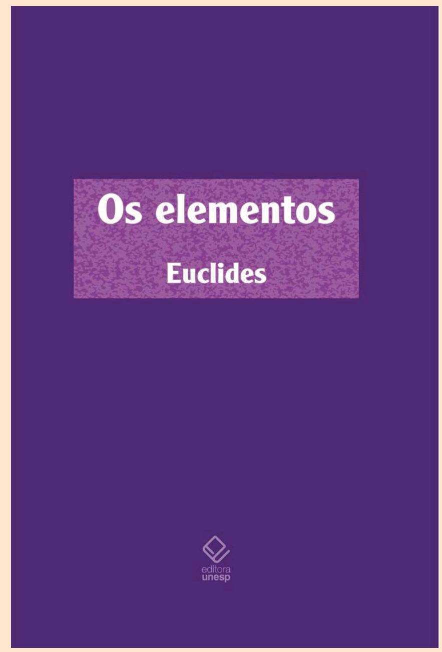
- Ângulos adjacentes
- Ângulos reto, agudo, obtuso e raso
- Ângulos complementares e suplementares

HABILIDADES

- Reconhecer ângulo geométrico.
- Identificar ângulos adjacentes, reto e raso.
- Utilizar os conceitos de ângulos complementares e suplementares na resolução de exercícios.

A Geometria plana é a área da Matemática que tem por objeto de estudo diversos entes, como pontos, retas, planos e polígonos. Em nosso cotidiano, é possível identificar várias formas estudadas na Geometria. Por exemplo, uma pizza, cuja forma pode ser associada à de um círculo; na construção civil, a armação de um telhado, que tem como base a forma triangular.

A Geometria também se destaca entre outras áreas da Matemática por ter sido uma das primeiras a ser organizada de maneira rigorosa, por meio da axiomatização, na obra *Os elementos*, de Euclides de Alexandria, composta de 13 livros.



UNESP

Os elementos, de Euclides de Alexandria. Esta é uma versão em português traduzida diretamente do grego.

Conceitos iniciais

Alguns elementos geométricos são aceitos sem definição, e algumas sentenças (ou proposições) são admitidas sem demonstração. São o que chamamos de **entes primitivos** e **axiomas**.

Os entes primitivos são:

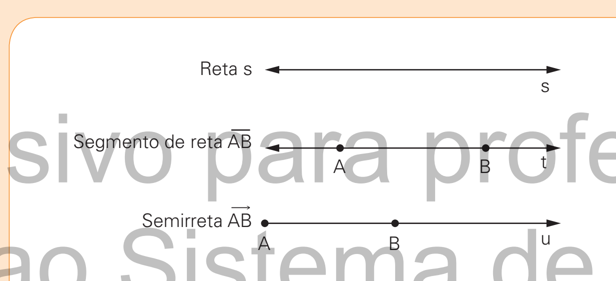
- ponto
- reta
- plano

Esses elementos, apesar de não serem definidos, são compreendidos intuitivamente com base na experiência que temos com o mundo à nossa volta.

Semirreta e segmento de reta

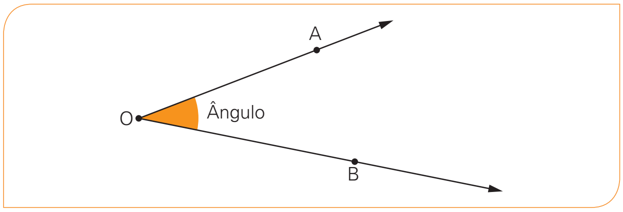
Com base no conceito de ponto e reta, concebemos as noções de semirreta e segmento de reta.

De modo simplificado, **segmento de reta** é parte de uma reta delimitada por dois pontos, que são seus extremos. Uma **semirreta** tem origem em um ponto e é ilimitada no outro sentido.



Ângulo

Ângulo é a região de um plano determinada pelo encontro de duas semirretas com origem comum, chamada **vértice do ângulo.**

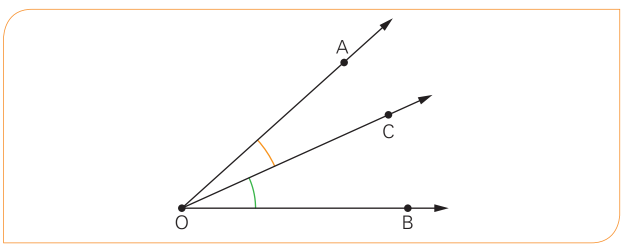


Nessa figura, o ponto O é o vértice do ângulo, e as semirretas $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{OB}$ são chamadas de lados do ângulo.

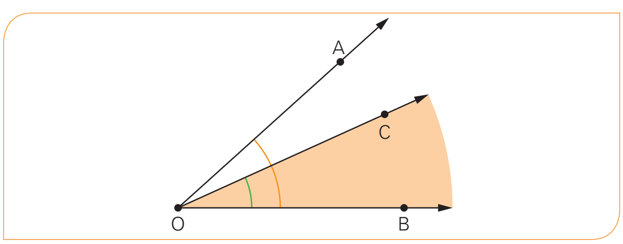
ÂNGULOS ADJACENTES

São pares de ângulos que têm um lado comum. As regiões determinadas por eles não têm mais pontos comuns.

Na figura a seguir, os ângulos BÔC e AÔC são adjacentes, pois têm um lado comum (a semirreta $\overrightarrow{OC}$), e apenas os pontos da semirreta $\overrightarrow{OC}$ são comuns a esses dois ângulos.

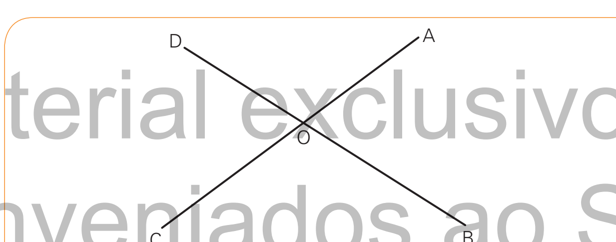


Na figura a seguir, os ângulos AÔB e BÔC não são adjacentes, pois, apesar de terem um lado comum (a semirreta $\overrightarrow{OB}$), todos os pontos da região determinada por BÔC (em amarelo) são comuns aos dois ângulos.



ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

São pares de ângulos em que os lados de um dos ângulos são os prolongamentos dos lados do outro. Exemplo:



- AÔB e CÔD são opostos pelo vértice (opv);
- AÔD e CÔB são opv.

Ângulos opv são congruentes, ou seja, têm a mesma medida.

Justificativa:

Seja α a medida do ângulo AÔB e β a do ângulo AÔD, então:

$\alpha + \beta = 180° \rightarrow \beta - \alpha$ (I)

Ocorre também que:

AÔD + CÔD = β + CÔD = 180° $\rightarrow$

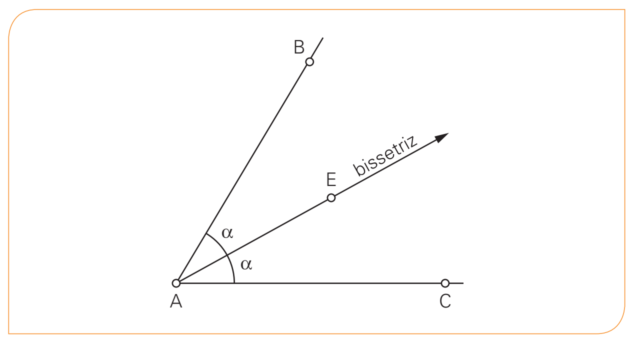
$\rightarrow$ CÔD = 180°– α (II).

De (I) e (II) temos CÔD = β.

Portanto, os ângulos opv AÔD e CÔD são congruentes, pois AÔD = CÔD = β.

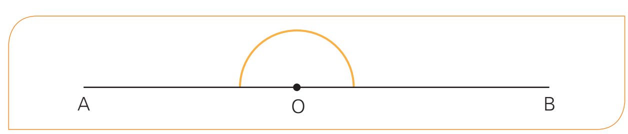
BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

É a semirreta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em dois outros ângulos de mesma medida.

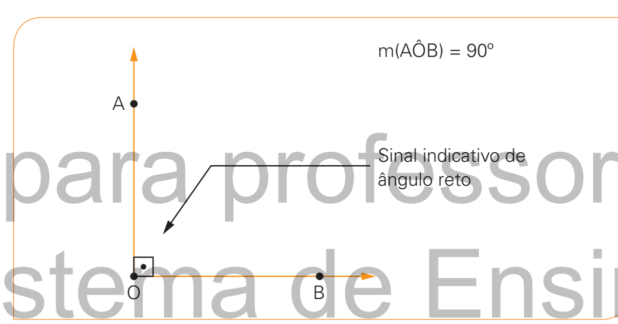


ÂNGULOS AGUDO E OBTUSO

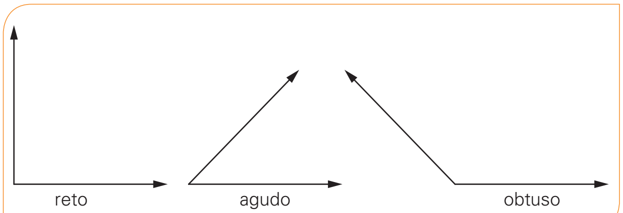
Dizemos que duas semirretas $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{OB}$ são opostas se os pontos A, O e B estão alinhados (isto é, se estão em uma mesma reta) e se o ponto O está entre A e B. Nesse caso, dizemos que o ângulo AÔB é raso; sua medida em graus é 180°.



Ao dividirmos o ângulo raso em dois de mesma medida, obtemos dois ângulos retos, cuja medida é 90°.



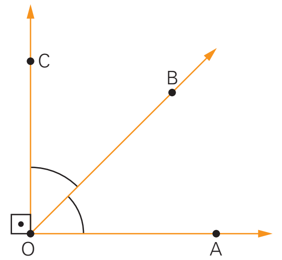
Se a medida de um ângulo é maior que 0° e menor que 90°, ele é agudo. Se é maior que 90° e menor que 180°, é obtuso.



ÂNGULOS COMPLEMENTARES E SUPLEMENTARES

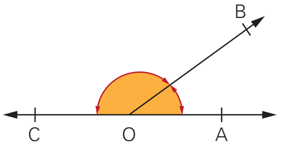
Dois ângulos de medidas α e β são **complementares** se a soma de suas medidas corresponde à medida de um ângulo reto, ou seja:

$$\alpha + \beta = 90°$$



AÔB e BÔC são ângulos complementares.

Observação: Se a medida de um ângulo for x, seu complemento medirá 90° − x. Dois ângulos de medidas α e β são suplementares se a soma de suas medidas corresponde à medida de um ângulo raso, ou seja:
$\alpha + \beta = 180°$



AÔB e BÔC são ângulos suplementares.

Se a medida de um ângulo for x, então seu suplemento medirá 180° − x.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – A medida em graus do ângulo Â é o triplo da medida de seu complemento. Qual a medida de Â?

Resolução

Com as informações do enunciado, podemos escrever a equação:

$\hat{A} = 3 \cdot (90° - \hat{A})$

Resolvendo a equação, obtemos $\hat{A} = 67{,}5°$.

2. Sistema Dom Bosco – O dobro da medida do complemento de um ângulo aumentado de 40° é igual à medida do seu complemento. Qual a medida do ângulo?

Resolução

Seja x a medida do ângulo procurado, temos:

$2 \cdot (90° - x) + 40° = 90° - x$

$180° - 2x + 40° = 90° - x$

$220° - 2x = 90° - x$

$220° - 90° = -x + 2x \quad \therefore \quad x = 130°$

ROTEIRO DE AULA

ÂNGULOS

Quanto à medida

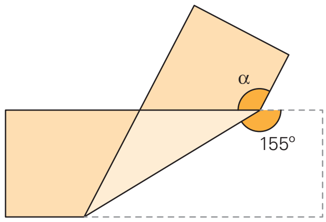
- Ângulo agudo
- Ângulo reto
- Ângulo obtuso
- Ângulo raso

Par de ângulos

- Ângulos complementares — $\alpha + \beta =$ 90°
- Ângulos suplementares — $\alpha + \beta =$ 180°
- Ângulo oposto pelo vértice (opv)
- Ângulos adjacentes

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

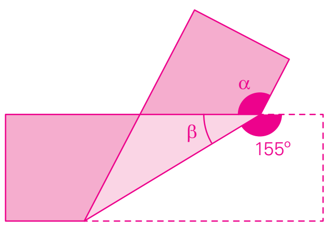
1. CFTRJ – Uma fita de papel retangular é dobrada conforme a figura a seguir.



O valor do ângulo α marcado na figura é

a) 155°
b) 150°
c) 140°
d) 130°

Considere a figura a seguir.



Ao desdobrá-la, é possível observar que $\alpha + \beta = 155°$.
Desse modo, podemos escrever:
$\alpha + \beta = 155°$ e $\beta = 180° - 155°$
$\alpha + 180° - 155° = 155°$
$\alpha + 25° = 155°$
$\alpha = 130°$

2. CFTMG – Sejam dois ângulos x e y tais que (2x) e (y + 10°) são ângulos complementares e (5x) e (3y – 40°) são suplementares. O ângulo x mede

a) 5°
b) 10°
c) 15°
d) 20°

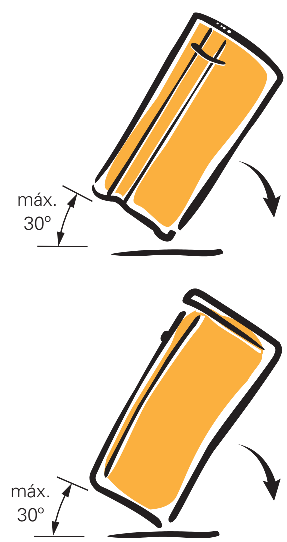
De acordo com as informações do problema, podemos escrever:

$$\begin{cases} 2x + y + 10° = 90° \\ 5x + 3y - 40° = 180° \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 80° \\ 5x + 3y = 220° \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -6x - 3y = -240° \\ 5x + 3y = 220° \end{cases} \rightarrow x = 20°$$

3. IFPE C2-H8

Analisando o manual de instruções do refrigerador RDE30, observamos um destaque para o momento de transportá-lo. Observe abaixo o trecho desse manual sobre o transporte do refrigerador.



TRANSPORTE

Caso necessite transportar seu refrigerador em pequenos deslocamentos, incline-o para trás ou para um dos lados com ângulo máximo de 30°. Caso necessite transportar seu refrigerador em longos deslocamentos (ex.: mudança), movimente-o em pé.

Disponível em: <https://www.colombo.com.br/produtos/111120/111120.pdf?descricao=[Link incompleto.]>. Acesso em: 2 out. 2016.

Sabendo que o ângulo máximo de inclinação do refrigerador é 30°, a metade do suplemento desse ângulo é de

a) 60°
b) 75°
c) 45°
d) 30°
e) 15°

Sabendo que o suplemento de um ângulo α é dado por 180° − α, temos:

$180° - \alpha = 18° - 30° = 150°$

Dividindo por dois:

$\frac{150°}{2} = 75°$

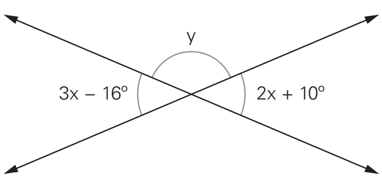
4. EEAR – Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes. Sendo $\hat{A} = 2x + 15°$ e $\hat{B} = 5x - 9$, assinale a alternativa que representa, corretamente, o valor de x.

a) 2°
b) 8°
c) 12°
d) 24°

Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes, podemos escrever:

$2x + 15° = 5x - 9° \rightarrow 24° = 3x \rightarrow x = 8°$

5. UTFPR – A medida do ângulo y na figura é:



a) 62°
b) 72°
c) 108°
d) 118°
e) 154°

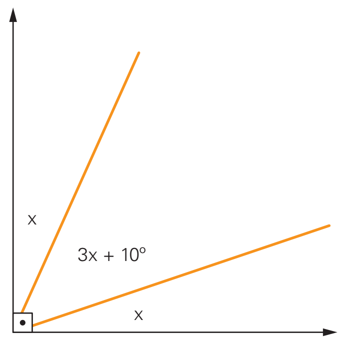
De acordo com a figura, podemos escrever:

$3x - 16° = 2x + 10° \rightarrow x = 26°$

$y + (2x + 10°) = 180°$

$y + 2 \cdot 26° + 10° = 180° \rightarrow y = 118°$

6. UTFPR – Calcule o valor de x em graus na figura:

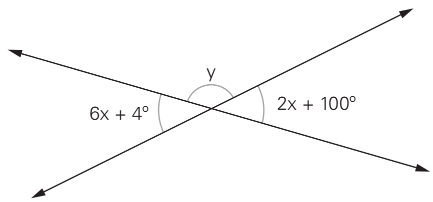


A soma das medidas dos três ângulos é igual a 90°. Desse modo:

$x + 3x + 10° + x = 90° \rightarrow 5x = 80° \therefore x = 16°$

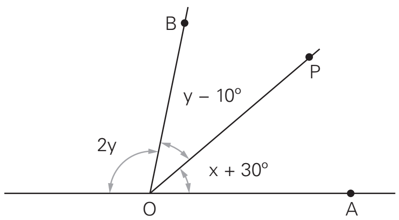
EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UTFPR – A medida de y na figura, em graus, é:



a) 42°.
b) 32°.
c) 142°.
d) 148°.
e) 24°.

8. CFTSC (adaptado) – Na figura abaixo, OP é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Determine o valor da diferença entre o suplemento de x e o complemento de y, nessa ordem, em graus.



a) 90
b) 100
c) 110
d) 120
e) 130

9. Sistema Dom Bosco – Com base nos estudos de geometria, julgue as afirmações abaixo como verdadeiras (V) ou falsas (F).

( ) Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.

( ) Se a razão entre dois ângulos suplementares é igual a $\frac{2}{7}$, então o complemento do menor é 140°.

( ) A diferença entre as maiores medidas inteiras, em graus, de dois ângulos, sendo um obtuso e o outro agudo, nessa ordem, é igual à medida do ângulo reto.

Quantas são as afirmações falsas?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

10. Sistema Dom Bosco – Dois ângulos são complementares. Mostre que as bissetrizes desses ângulos formam um ângulo de 45°.

11. UFRGS – Se a e b são ângulos agudos e complementares, o valor da expressão $\text{sen}^2 (a + b) - \cos^2 (a + b)$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) $\sqrt{2}$

e) $\sqrt{3}$

12. CP1 – Em uma rua reta, a padaria fica entre o mercado e a banca de jornal, e o mercado fica entre a banca de jornal e a sapataria. Logo,

a) a sapataria fica entre a banca de jornal e a padaria.

b) a banca de jornal fica entre o mercado e a padaria.

c) a padaria fica entre a sapataria e o mercado.

d) o mercado fica entre a sapataria e a padaria.

13. PUC-PR – Dois ângulos complementares $\hat{A}$ e $\hat{B}$, sendo $A < B$, têm medidas na razão 13 para 17. Consequentemente, a razão da medida do suplemento do ângulo $\hat{A}$ para o suplemento do ângulo $\hat{B}$ vale:

a) $\frac{43}{47}$

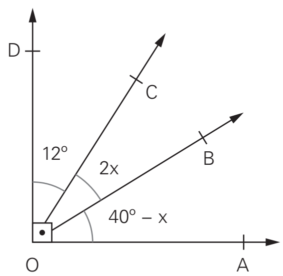
b) $\frac{17}{13}$

c) $\frac{13}{17}$

d) $\frac{19}{48}$

e) $\frac{47}{43}$

14. Sistema Dom Bosco – Determine o valor de x na figura a seguir:



a) $x = 6°$
b) $x = 12°$
c) $x = 38°$
d) $x = 40°$
e) $x = 45°$

15. IFSP (adaptado) – As medidas dos ângulos de um triângulo são, respectivamente, x, 8x e 9x. Diante do exposto, encontre o valor de x.

16. Sistema Dom Bosco – O ângulo formado pelas bissetrizes dos dois ângulos adjacentes mede 48°. Sabendo que a medida de um dos ângulos é o triplo da medida do outro, a soma das medidas desses ângulos é:

a) 72°
b) 84°
c) 96°
d) 108°
e) 120°

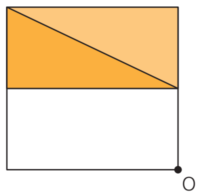
17. Uece – Considere um segmento de reta XY, cuja medida do comprimento é 10 cm, e P, um ponto móvel no interior de XY dividindo-o em dois segmentos consecutivos, XP e PY. Se M e N são respectivamente os pontos médios de XP e PY, então podemos afirmar corretamente que a medida do comprimento do segmento MN

a) varia entre 0 cm e 10 cm, dependendo da posição do ponto P.
b) varia entre 5 cm e 10 cm, dependendo da posição do ponto P.
c) varia entre 2,5 e 10 cm, dependendo da posição do ponto P.
d) é igual a 5 cm, sempre.

ESTUDO PARA O ENEM

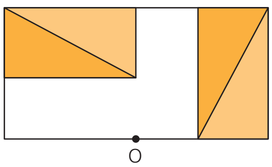
18. Enem C2-H7

Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.

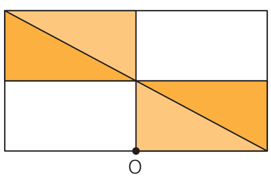


A imagem que representa a nova figura é:

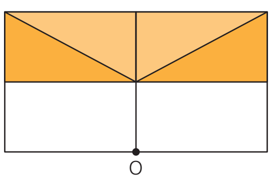
a)



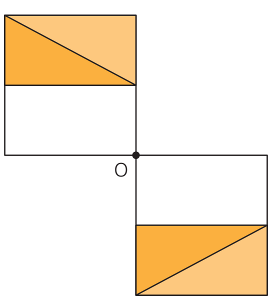
b)



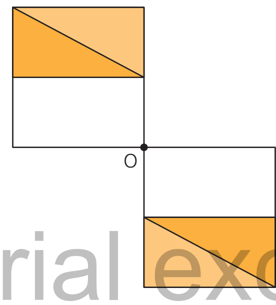
c)



d)



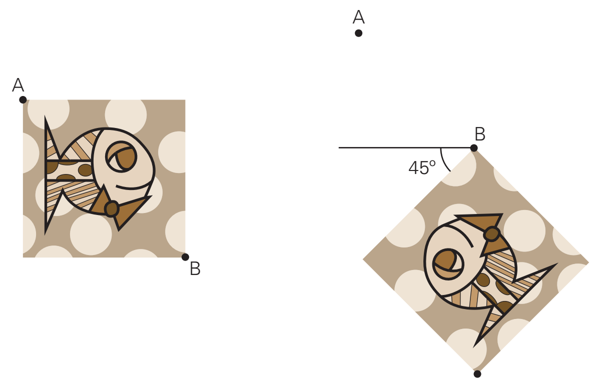
e)



19. Enem C2-H8

A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B.

Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.

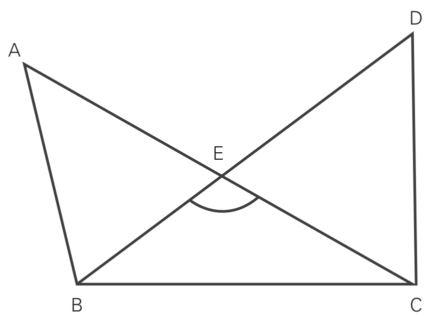


Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°. A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de

a) 90° no sentido horário.
b) 135° no sentido horário.
c) 180° no sentido anti-horário.
d) 270° no sentido anti-horário.
e) 315° no sentido horário.

20. IFSC (adaptado) C2-H8

Durante uma queda de luz, Carla e Sabrina resolveram brincar fazendo desenhos com as sombras das mãos. Para isso, pegaram duas lanternas diferentes, apontando os feixes de luz para a parede BC. Márcio, que estava no andar superior, observou tudo. A figura a seguir mostra a visão que Márcio tinha da situação. Dados: o ângulo entre as duas paredes CD e BC é 90° e DC = BC, sendo D o ponto onde Carla está e A o ponto onde se encontra Sabrina. Também sabemos que BEC vale 75°.



Com base nas informações, quanto valem os ângulos BDC, BCE, CED e ECD, respectivamente?

a) 105°, 45°, 60°, 30°

b) 105°, 80°, 45°, 60°

c) 60°, 90°, 25°, 45°

d) 45°, 60°, 105°, 30°

e) 30°, 75°, 125°, 90°

6

PARALELISMO

- Introdução
- Retas paralelas
- Retas paralelas cortadas por uma transversal

HABILIDADES

- Compreender o conceito de paralelismo.
- Compreender o postulado e a importância das paralelas.
- Identificar ângulos alternos internos e externos, colaterais e correspondentes.
- Usar a construção de retas paralelas na resolução de exercícios.


CLASSIC IMAGE / ALAMY STOCK PHOTO

Euclides de Alexandria.

Introdução

Na tentativa de organizar a geometria plana, Euclides estabeleceu cinco postulados (ou axiomas):

I. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que passa por eles.
II. Pode-se prolongar uma reta indefinidamente de uma única maneira.
III. Dados um ponto e um segmento de reta, sempre é possível traçar uma circunferência de modo que o ponto dado seja o centro e o segmento seja o raio.
IV. Todos os ângulos retos são congruentes.
V. Se uma reta corta duas outras, formando ângulos colaterais internos (cuja soma é menor que um ângulo raso), então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, vão se encontrar no lado em que estão os ângulos cuja soma é menor que um ângulo raso.

Certamente o quinto postulado é o mais elaborado e, consequentemente, o mais difícil de ser aceito como uma ideia óbvia. Tal noção foi motivo de discussão durante séculos: será que o quinto postulado de Euclides não pode ser demonstrado pelos anteriores?

O quinto enunciado exige concentração para ser entendido. Algumas afirmações são equivalentes a ele:

- Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.
- A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.
- Axioma das paralelas: por um ponto que não pertence a uma reta, pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

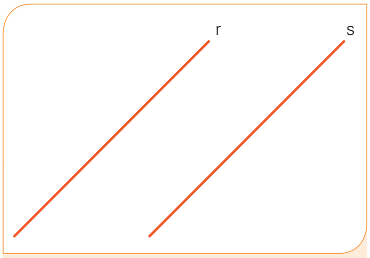
Podemos dizer que somente a partir dos séculos XVII e XVIII foi possível perceber que a geometria euclidiana é dependente do quinto postulado. Ou seja, essa afirmação de Euclides é de fato um axioma.

Carl Friedrich Gauss foi um dos pioneiros na investigação de geometrias não euclidianas, nas quais os quatro primeiros postulados são válidos, e o quinto é substituído por outra afirmação. Mesmo assim, tal geometria é consistente.

Vamos estudar o paralelismo estabelecido por esse postulado de Euclides.

Retas paralelas

Dizemos que duas retas são paralelas se a distância entre elas for constante ou, de modo equivalente, se elas não tiverem nenhum ponto em comum.

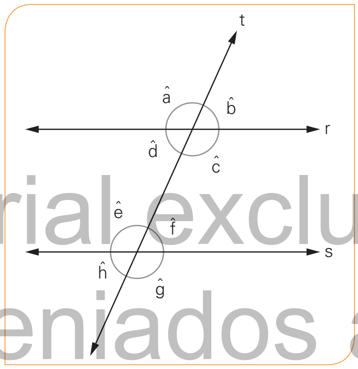


Retas paralelas.

Observação: Como estamos estudando geometria plana, exigir que as retas não tenham intersecção é o bastante para garantir o paralelismo. Entretanto, no estudo da geometria espacial, precisaremos determinar também que elas sejam coplanares, pois existem retas que, mesmo sem intersecção, não são paralelas: as retas reversas.

RETA TRANSVERSAL

Quando traçamos outra reta que cruze duas ou mais retas paralelas, formamos vários ângulos.

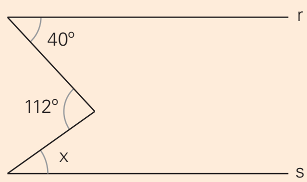


Dos oito ângulos formados, alguns são congruentes entre si, outros são complementares. Na sequência constam os nomes que esses ângulos recebem e alguns exemplos com base na figura anterior:

- Ângulos colaterais internos são suplementares: $\hat{c}$ e $\hat{f}$;
- Ângulos colaterais externos são suplementares: $\hat{a}$ e $\hat{h}$;
- Ângulos correspondentes são congruentes: $\hat{b}$ e $\hat{f}$;
- Ângulos opostos pelo vértice são congruentes: $\hat{b}$ e $\hat{d}$;
- Ângulos alternos externos são congruentes: $\hat{a}$ e $\hat{g}$;
- Ângulos alternos internos são congruentes: $\hat{d}$ e $\hat{f}$.

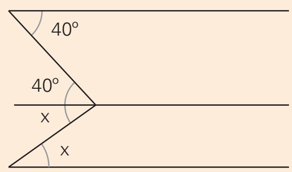
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Se r//s, então qual o valor de x nesta figura?



Resolução

Basta traçarmos uma paralela a r e s que passe pelo vértice do ângulo 112°.



Com os ângulos alternos internos que surgem com a nova paralela, podemos escrever:

$40° + x = 112° \rightarrow x = 112° - 40° \rightarrow x = 72°$

2. Sistema Dom Bosco – Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam quatro ângulos obtusos, cujas medidas somam 600°. Calcule a medida de um dos ângulos agudos.

Resolução

Os ângulos obtusos são todos congruentes entre si, pois são opostos pelo vértice (opv) ou alternos internos ou externos. Chamando a medida de cada um de x, temos:

$$4x = 600° \rightarrow x = \frac{600°}{4} \rightarrow x = 150°$$

Portanto, qualquer um dos ângulos medirá 30°, pois qualquer um deles será colateral interno ou externo, ou seja, suplementar aos ângulos obtusos de 150°.

ROTEIRO DE AULA

PARALELAS CORTADAS POR TRANSVERSAL

Ângulos congruentes

- Ângulos alternos internos
- Ângulos alternos externos
- Ângulos opostos pelo vértice
- Ângulos correspondentes

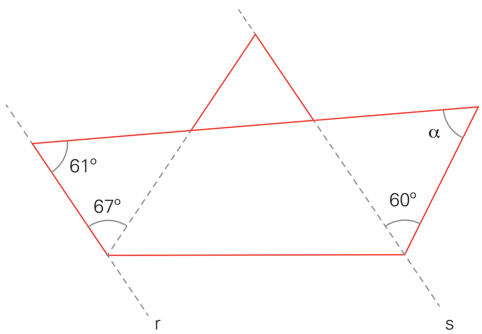
Ângulos suplementares

- Ângulos colaterais internos
- Ângulos colaterais externos

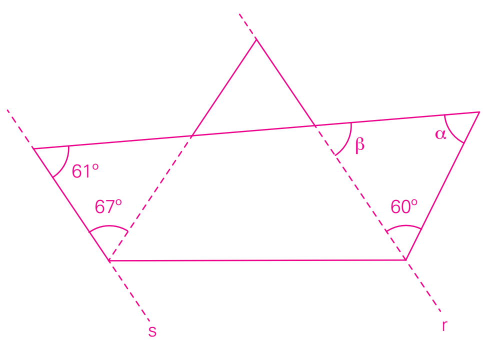
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFPE C2-H7

Eva é aluna do curso de Construção Naval do campus Ipojuca e tem mania de construir barquinhos de papel. Durante a aula de desenho técnico, resolveu medir os ângulos do último barquinho que fez, representado na imagem a seguir. Sabendo que as retas suportes, r e s, são paralelas, qual a medida do ângulo α destacado?



a) 52°
b) 60°
c) 61°
d) 67°
e) 59°



$r // s \rightarrow \beta = 61°$
Logo,
$\alpha + 61° + 60° = 180° \rightarrow \alpha = 59°$

2. IFSul – Duas retas paralelas “r” e “s”, cortadas por uma tranversal “t”, formam ângulos colaterais internos, dos quais um excede o outro em 20°.

O ângulo colateral interno agudo mede

a) 20°
b) 35°
c) 55°
d) 80°

Sabemos que a soma dos ângulos colaterais de uma reta que atravessa retas paralelas é 180° e que ângulos agudos são aqueles menores que 90°. Então, chamando os ângulos de x e y, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ x - y = 20 \end{cases} \rightarrow 2x = 200 \rightarrow x = \frac{200}{2} \rightarrow x = 100$$

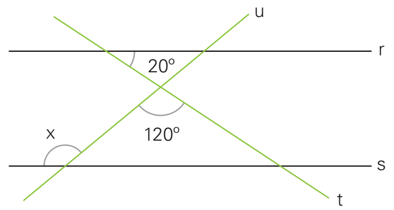
Substituindo x = 100 em y, obtemos:
$x + y = 180 \rightarrow 100 + y = 180 \rightarrow y = 180 - 100 \rightarrow y = 80$
Logo, o ângulo colateral interno agudo mede 80°.

3. UEM – Sobre geometria, assinale o que for **correto**.

01) Dois planos sempre se interceptam.
02) Duas retas perpendiculares determinam um único plano.
04) Dado um ponto qualquer P em um plano π existe uma única reta passando por P perpendicular ao plano.
08) Se duas retas não são paralelas, então elas são reversas.
16) Se uma reta não intercepta um determinado plano, então necessariamente ela é paralela a ele.

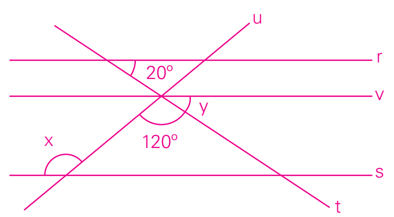
01) Incorreta. Dois planos podem ser paralelos.
02) Correta. Duas retas concorrentes determinam um único plano.
04) Correta. Uma reta perpendicular a um plano o cortará em um único ponto.
08) Incorreta. Se elas não são paralelas, podem ser reversas ou concorrentes.
16) Correta. Retas e planos que não se interceptam são ditos paralelos.
Logo, a soma é 02 + 04 + 16 = 22.

4. IFPE – Júlia começou a estudar Geometria na sua escola. Com dúvida em um exercício passado pelo professor de Matemática, ela pediu ajuda ao seu tio. O enunciado era: "As retas r e s são paralelas; as retas u e t, duas transversais. Encontre o valor do ângulo x na figura abaixo". Portanto, o valor de x é:



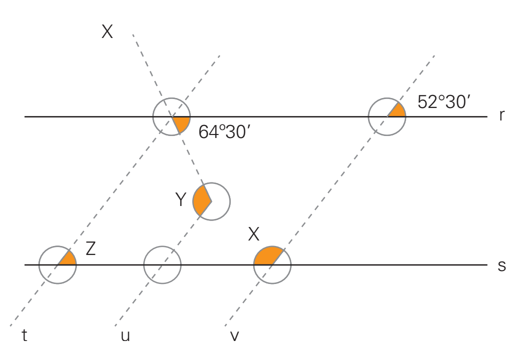
a) 120°
b) 125°
c) 130°
d) 135°
e) 140°

Traçando as retas:
v // r // s



y = 20° (correspondentes)
x = 120° + y (alternos internos)
x = 120° + 20°
x = 140°
Portanto, o valor de é x = 40°.

5. UTF – Na figura a seguir temos r//s e t//u//v.



Com base nos estudos dos ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, pode-se afirmar que:

I. O ângulo X mede 127°30'.
II. O ângulo Y mede 117°.
III. O ângulo Z mede 64°30'.

Analise as proposições e assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmações I e II estão corretas.
b) Somente as afirmações I e III estão corretas.
c) Somente a afirmação I está correta.
d) As afirmações I, II e III estão corretas.
e) As afirmações I, II e III estão incorretas.

I. Correta, pois o ângulo X e seu adjacente α, que é correspondente ao ângulo 52°30', são suplementares.

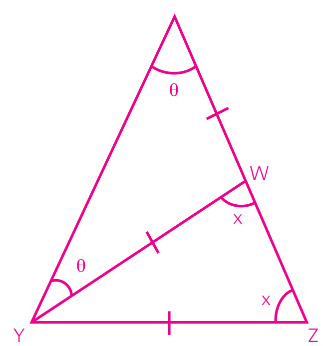
II. Correta, pois, se traçarmos uma paralela às retas r e s que passe por Y, o dividiremos em dois ângulos, sendo um alterno interno a 64°30' e o outro alterno interno a β, que é correspondente a α. Logo, Y = 64°30' + 52°30' = 117°.

III. Incorreta. O ângulo Z mede 52°30', pois é correspondente a α.

6. Uece – No triângulo OYZ, os lados OU e OZ têm medidas iguais. Se W é um ponto do lado OZ, tal que os segmentos YW, WO e YZ têm a mesma medida, então a medida do ângulo $Y\hat{O}Z$ é

a) 46°
b) 42°
c) 36°
d) 30°

De acordo com o enunciado, podemos traçar o seguinte triângulo



Observando o triângulo, podemos ver que:
no triângulo YWO, temos que x = 2 · p (ângulo externo);
no triângulo OYZ, temos que p + 2x = 180° → 5p = 180° → p = 36°
Portanto, a medida do ângulo $Y\hat{O}Z = 36°$.

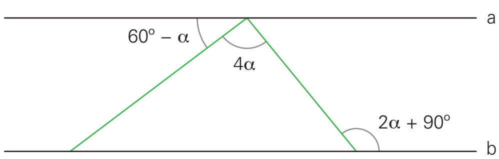
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. ETF/RG – Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos-externos expressos em graus por $13x - 8°$ e $6x + 13°$.

A medida desses ângulos vale:

a) 31°
b) 3° ou 177°
c) 30° e 150°
d) 62°
e) 93°

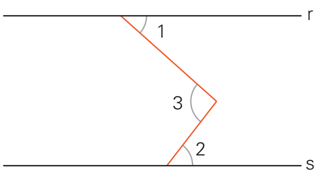
8. Mackenzie – Na figura abaixo, a e b são retas paralelas.



A afirmação correta a respeito do número que expressa, em graus, a medida do ângulo α é

a) um número primo maior que 23.
b) um número ímpar.
c) um múltiplo de 4.
d) um divisor de 60.
e) um múltiplo comum entre 5 e 7.

9. Fuvest – Na figura adiante, as retas r e s são paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55°. Calcule a medida do ângulo 3.

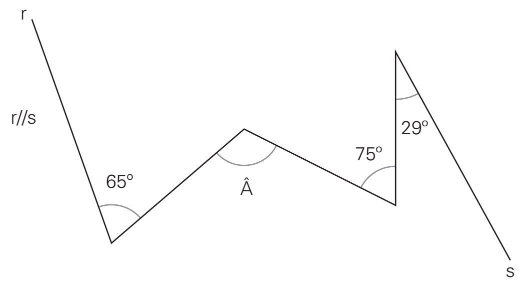


a) 50°
b) 55°
c) 60°
d) 80°
e) 100°

10. UTFPR (adaptado) – Um triângulo isósceles tem dois lados congruentes (de medidas iguais) e outro lado chamado de base. Se em um triângulo isósceles o ângulo externo relativo ao vértice oposto da base mede 130°, então os ângulos internos desse triângulo medem:

11. CFTPR – Numa gincana, a equipe "Já Ganhou" recebeu o seguinte desafio:

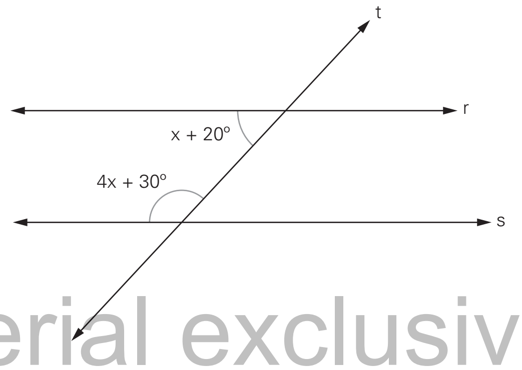
Na cidade de Curitiba, fotografar a construção localizada na rua Marechal Hermes no número igual a nove vezes o valor do ângulo Â da figura a seguir:



Se a equipe resolver corretamente o problema, irá fotografar a construção localizada no número:

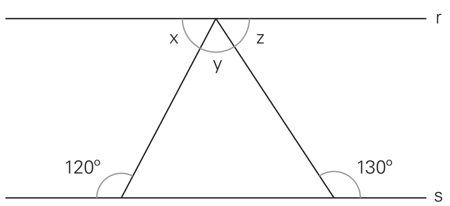
a) 990.
b) 261.
c) 999.
d) 1026.
e) 1260.

12. Unaerp-SP – As retas r e s são interceptadas pela transversal t, conforme a figura. O valor de x para que r e s sejam paralelas é:



a) 20°
b) 26°
c) 28°
d) 30°
e) 35°

13. Fazu (adaptado) – Sendo r // s na figura abaixo:



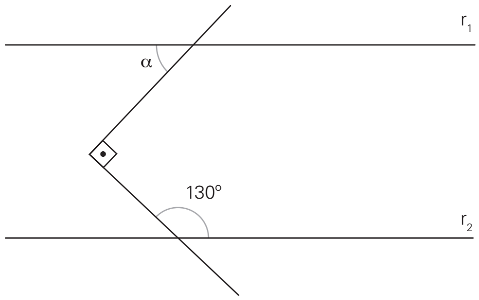
A razão $\frac{y}{z}$ é:

a) 1,1
b) 1,2
c) 1,3
d) 1,4
e) 1,5

14. IFCE – Os ângulos de um triângulo têm medidas diretamente proporcionais a 1, 2 e 6. É possível destacar dois ângulos **externos** desse triângulo cuja soma, em graus, mede

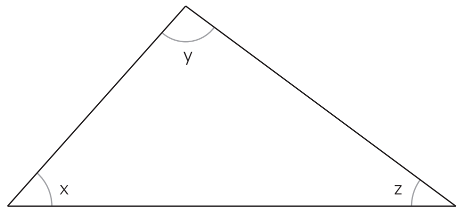
a) 260
b) 180
c) 280
d) 200
e) 120

15. Unirio – As retas $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ são paralelas. O valor do ângulo α apresentado na figura a seguir é:

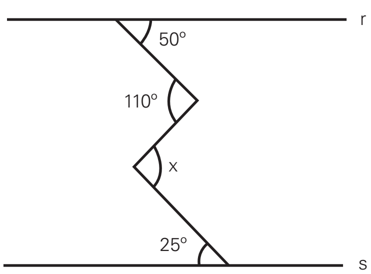


a) 40°
b) 45°
c) 50°
d) 65°
e) 130°

16. Sistema Dom Bosco – Mostre, utilizando argumentos geométricos, que a soma das medidas dos ângulos assinalados na figura é 180°.



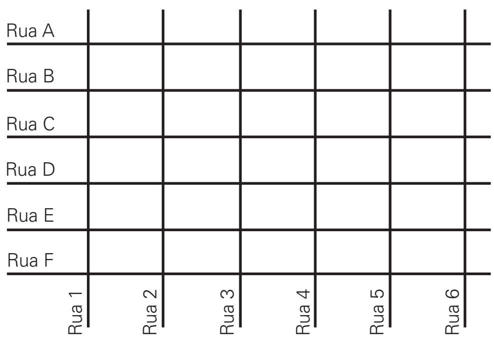
17. UFSC – Na figura, r e s são paralelas. O valor, em graus, do arco x é:



ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C3-H14

Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.



A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A.

Com base nesses dados, o imóvel que atende às pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C
b) 4 e C
c) 4 e D
d) 4 e E
e) 5 e C

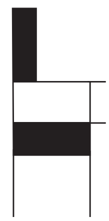
19. Enem C2-H8

Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da figura para uma aula ao ar livre. A professora, ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guardadas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.

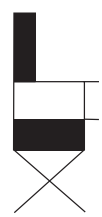
IMAGINIMA/ISTOCK

Qual é o esboço obtido pelos alunos?

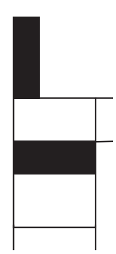
a)



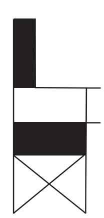
b)



c)



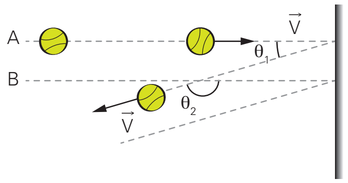
d)



e)

20. UEG (adaptado) C2-H17

A figura abaixo representa o disparo de uma lançadora de bola tênis a partir de dois pontos distintos, A e B. Em ambos os casos, percorrem trajetórias paralelas, colidem com um anteparo rígido e são ricocheteados em um ângulo θ_1 de 7°. Essa bola, de 120 g, é posteriormente recolhido em um recipiente contendo 20 mL de água, provocando um deslocamento de 10 mL.



O valor do ângulo θ_2, em graus, é:

a) 173°
b) 83°
c) 28°
d) 7°
e) 27°

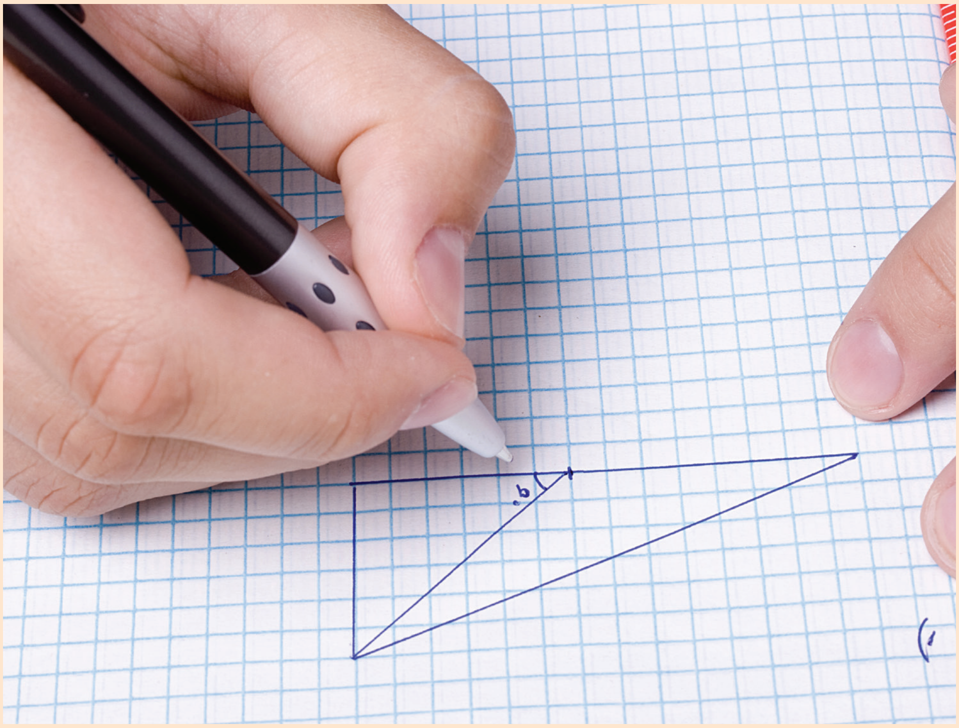
7

ÂNGULOS NO TRIÂNGULO

- Elementos do triângulo
- Soma dos ângulos internos
- Soma dos ângulos externos
- Bissetrizes internas e externas

HABILIDADES

- Diferenciar ângulos internos e externos de um triângulo e suas bissetrizes.
- Usar a soma dos ângulos internos e externos na resolução de problemas.
- Compreender e aplicar o teorema do ângulo externo.

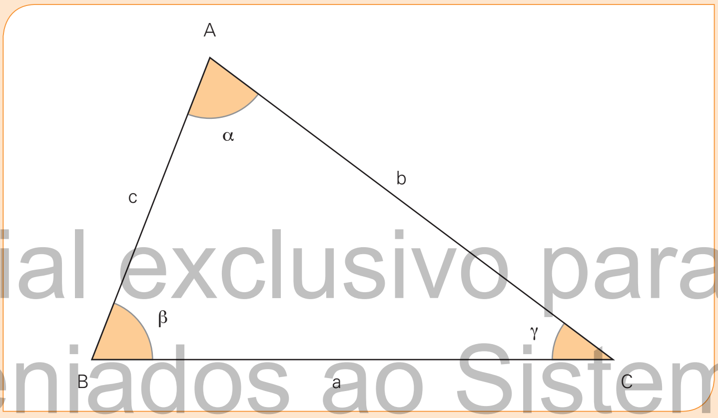


KOSTYANTIN PANKIN | DREAMSTIME

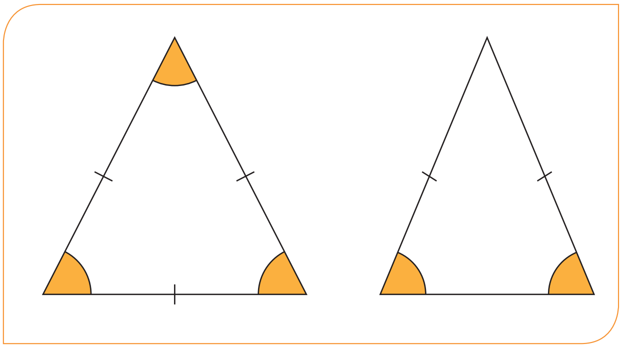
Nesta aula, iniciaremos o estudo da principal figura da geometria plana: o triângulo. Vamos explorar as consequências do quinto postulado de Euclides em relação aos triângulos.

Elementos do triângulo

Um triângulo é uma figura plana com três lados, três vértices e três ângulos. Normalmente nomeamos os vértices com letras maiúsculas, as medidas dos lados com letras minúsculas e os ângulos com letras gregas minúsculas. Observe a figura:

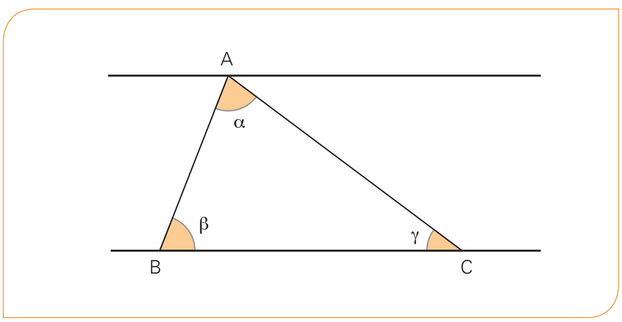


Os ângulos α, β e γ são chamados de ângulos internos. Se os três tiverem a mesma medida, dizemos que o triângulo é **equilátero**; se tiver somente dois ângulos iguais, ele é **isósceles**. Tanto no triângulo equilátero quanto no isósceles, a quantidade de ângulos iguais será o número de lados iguais.

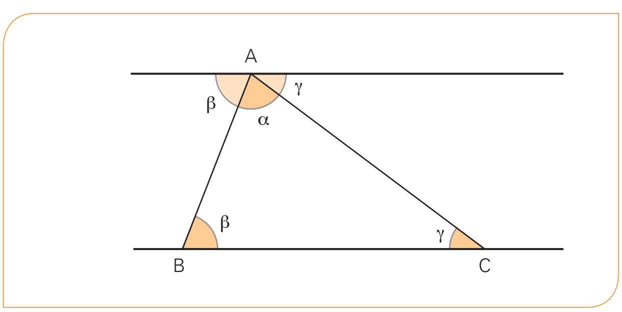


SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS

No triângulo da página anterior, vamos traçar uma paralela ao lado BC que passe pelo ponto A.



Observe que temos a formação de ângulos alternos internos, que são iguais em virtude do paralelismo.

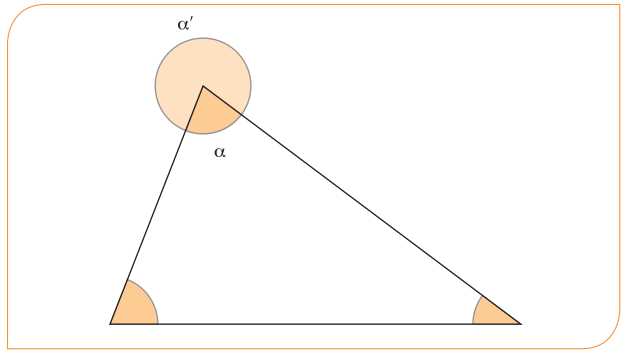


Isso mostra que a soma dos três ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°; além disso, α, β e γ formam um ângulo raso em torno do vértice A.

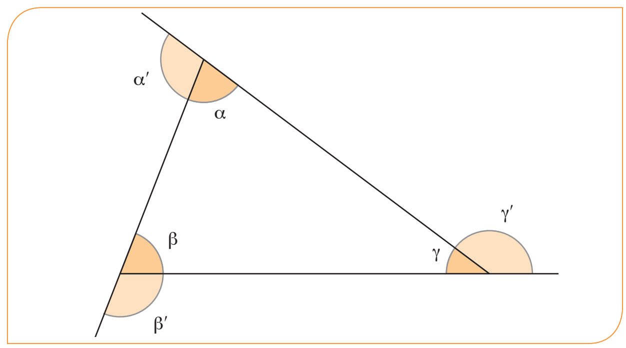
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS

Inicialmente vamos entender o que é um ângulo externo. Em um primeiro momento, você pode pensar que α na figura a seguir é a representação de um ângulo externo:



No entanto, essa noção **não está correta**. Para obtermos um ângulo externo, devemos prolongar um de seus lados: o ângulo que surge, suplementar ao interno, é o que recebe o nome de ângulo externo. Note que qualquer triângulo terá três ângulos externos.



Com base na figura, podemos concluir:

$$\alpha + \alpha' = 180°$$
$$\beta + \beta' = 180°$$
$$\gamma + \gamma' = 180°$$

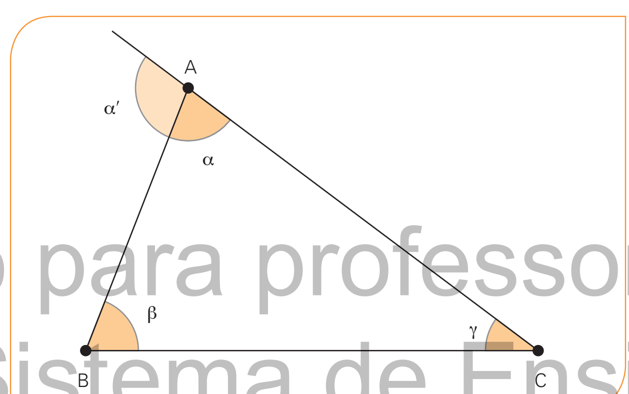
Somando as equações membro a membro, temos:

$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 540° \leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 540° \leftrightarrow 180° + \alpha' + \beta' + \gamma' = 540° \leftrightarrow \alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$

Ou seja, a soma dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360°. Mais tarde veremos que essa conclusão se estende a qualquer polígono convexo.

TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO

Vejamos rapidamente uma relação entre ângulos internos e externos.



Do que vimos anteriormente, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\alpha + \alpha' = 180°$$

Portanto, podemos escrever:

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha'$$

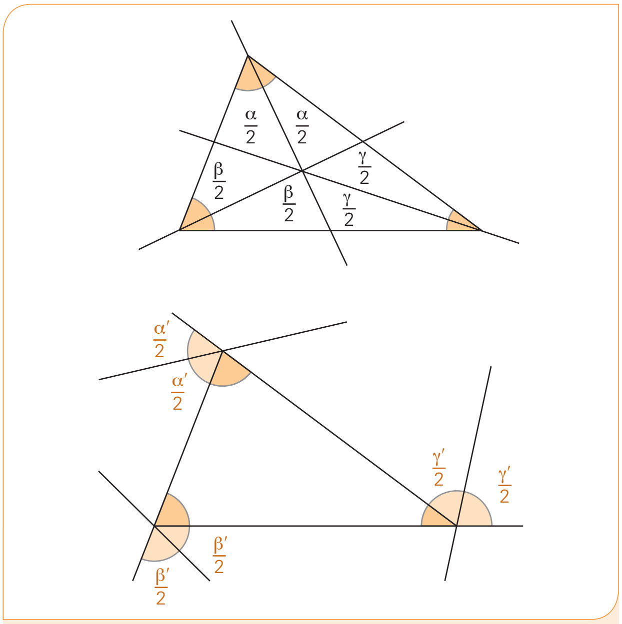
Isso nos leva ao teorema do ângulo externo:

Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

BISSETRIZES INTERNAS E EXTERNAS

Como já vimos em aulas anteriores, a bissetriz de um ângulo o divide ao meio. Nos triângulos, existem três bissetrizes internas e três externas. As internas dividem os ângulos internos, e as externas dividem os ângulos externos.



Bissetrizes internas e externas de um triângulo.

ROTEIRO DE AULA

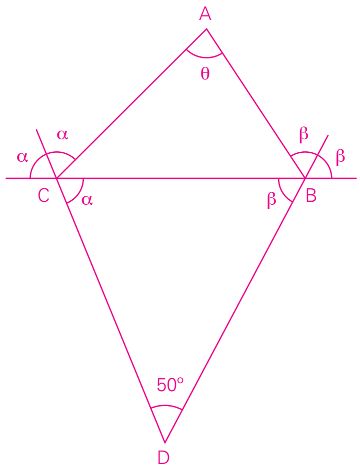
Ângulos no triângulo

- **Elementos de um triângulo**
  - Lados
    - 3 lados congruentes: Triângulo equilátero
    - 2 lados congruentes: Triângulo isósceles
  - Vértices
  - Ângulos
    - Internos
      - 3 ângulos congruentes: Triângulo equilátero
      - 2 ângulos congruentes: Triângulo isósceles
      - Soma dos ângulos: 180°
    - Externos
      - Teorema do ângulo externo: Qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Efomm – Num triângulo ABC as bissetrizes dos ângulos externos do vértice B e C formam um ângulo de medida 50°. Calcule o ângulo interno do vértice A.

a) 110°
b) 90°
c) 80°
d) 50°
e) 20°

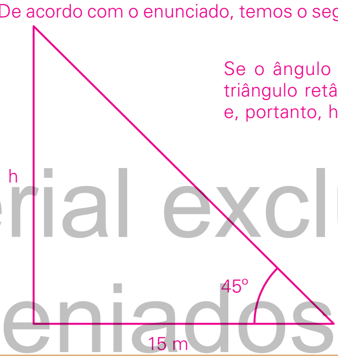


No triângulo BCD, temos:
$\alpha + \beta + 50° = 180°$
$\alpha + \beta = 130°$

No triângulo ABC, temos:
$\theta + 180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 180°$
$\theta - 2(\alpha + \beta) = -180°$
$\theta - 2 \cdot 130° = -180°$
$\theta = -180° + 260°$
$\theta = 80°$
Logo, a medida do ângulo interno do vértice A mede 80°.

2. Ifal (adaptado) – Um prédio projeta, no chão, uma sombra de 15 metros de comprimento. Sabendo que, nesse momento, o sol faz um ângulo de 45° com a horizontal, determine a altura desse prédio em metros.

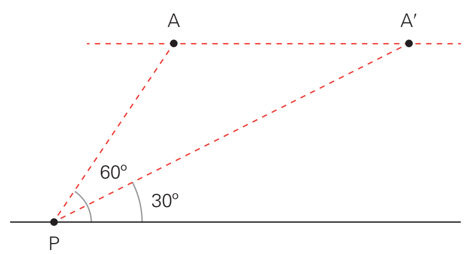
De acordo com o enunciado, temos o seguinte triângulo:



Se o ângulo formado é 45°, então o triângulo retângulo terá catetos iguais e, portanto, h = 15 m.

3. ESPM C2-H7

Um avião voava a uma altitude e velocidade constantes. Num certo instante, quando estava a 8 km de distância de um ponto P, no solo, ele podia ser visto sob um ângulo de elevação de 60°, e, dois minutos mais tarde, esse ângulo passou a valer 30°, conforme mostra a figura abaixo.

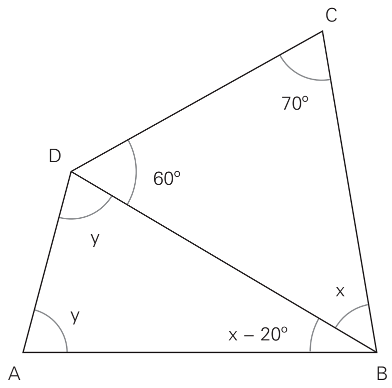


A velocidade desse avião era de:

a) 180 km/h
b) 240 km/h
c) 120 km/h
d) 150 km/h
e) 200 km/h

A reta AA' é paralela à reta horizontal, pois a trajetória do avião é de altitude constante. O ângulo de medida 30° é congruente ao ângulo do vértice A', pois são alternos internos. Como o ângulo APA' mede 30°, o triângulo APA' é isósceles, sendo AP e AA' lados congruentes. Do enunciado: AP = 8 km. Portanto, o avião percorreu a distância AA' (ou seja, 8 km) em 2 minutos. A distância que percorre por hora é $8 \cdot 30 = 240$ km.

4. EEAR



No quadrilátero ABCD o valor de y − x é igual a

a) $2x$ **b)** $2y$ **c)** $\frac{x}{2}$ **d)** $\frac{y}{2}$

Do triângulo BCD, temos:

$x + 70° + 60° = 180° \to x = 180° - 130° \to x = 50°$

Logo, $D\hat{B}A = 50° - 20° \to D\hat{B}A = 30°$.

Portanto: $2y = 180° - 30° \to y = \frac{150°}{2} \to y = 75°$

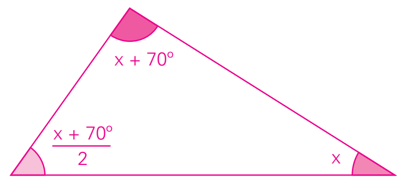
Consequentemente, a resposta é $y - x = 75° - 50° = 25° = \frac{x}{2}$.

5. UFRGS – Em um triângulo ABC, $B\hat{A}C$ é o maior ângulo e $A\hat{C}B$ é o menor ângulo. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é 70° maior que a medida de $A\hat{C}B$. A medida de $B\hat{A}C$ é o dobro da medida de $A\hat{B}C$.

Portanto, as medidas dos ângulos são

a) 20°, 70° e 90°
b) 20°, 60° e 100°
c) 10°, 70° e 100°
d) 30°, 50° e 100°
e) 30°, 60° e 90°

De acordo com as informações do enunciado e considerando que $A\hat{C}B = x$, temos:



$x + 70° + \frac{x + 70°}{2} + x = 180°$

$2x + 140° + x + 70° + 2x = 360°$

$5x = 150°$

$x = 30°$

Portanto, as medidas dos ângulos são:

$x = 30°$

$\frac{x + 70°}{2} = \frac{30° + 70°}{2} = 50°$

$x = 70° = 30° + 70° = 100°$

Desse modo, os resultados são 30°, 50° e 100°.

6. IFSP (adaptado) – O perímetro de um triângulo é de 36 dm. As medidas são expressas por três números inteiros e consecutivos. Assinale a alternativa que apresenta quanto mede o **menor** lado do triângulo.

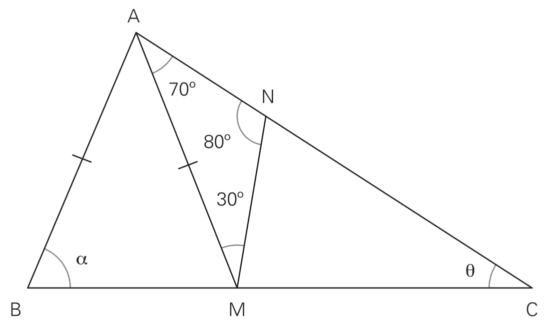
Sabendo que um triângulo possui três lados, temos:

$36 = 11 + 12 + 13$

Logo, o menor lado é 11 dm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

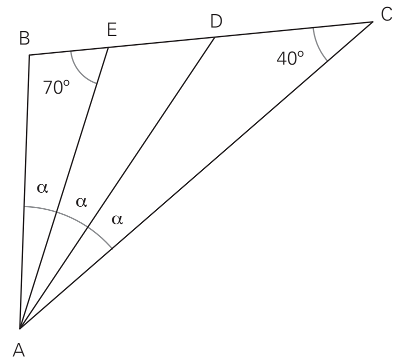
7. CFTMG – Neste triângulo, tem-se $\overline{AB} = \overline{AM}$. $M\hat{A}N = 70°$, $A\hat{M}N = 30°$ e $A\hat{N}M = 80°$.



O valor de $\alpha - \theta$ é

a) 50°
b) 60°
c) 70°
d) 80°

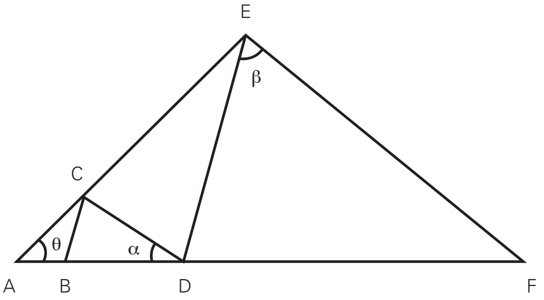
8. EEAR



Se ABC é um triângulo, o valor de α é

a) 10°
b) 15°
c) 20°
d) 25°

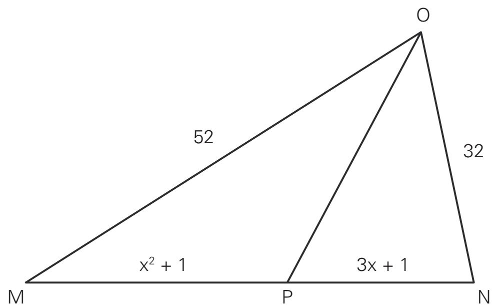
9. CFTMG – No triângulo AEF da figura abaixo, temos que med($\overline{AB}$) = med($\overline{BC}$), $\overline{BC} // \overline{DE}$ e $\overline{CD} // \overline{EF}$.



O valor de θ escrito em função de α e β é

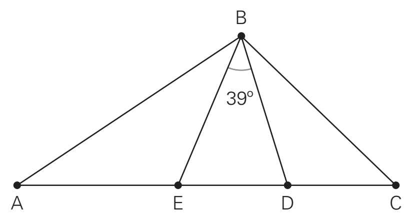
a) $\theta = \alpha + \beta$
b) $\theta = \beta - \alpha$
c) $\theta = \dfrac{180° + \alpha + \beta}{2}$
d) $\theta = \dfrac{180° - \alpha - \beta}{2}$

10. Acafe (adaptado) – No triângulo MON as medidas são indicadas em centímetros.



Se é bissetriz do ângulo $M\hat{O}N$, então a medida do lado MN é:

11. FGV – A figura representa um triângulo ABC, com E e D sendo pontos sobre $\overline{AC}$. Sabe-se ainda que AB = AD, CB = CE e que $E\hat{B}D$ mede 39°.



Nas condições dadas, a medida de $A\hat{B}C$ é

a) 102°
b) 108°
c) 111°
d) 115°
e) 117°

12. Uece – No triângulo OYZ, os lados OY e OZ têm medidas iguais. Se W é um ponto do lado OZ, tal que os segmentos YW, WO e YZ têm a mesma medida, então a medida do ângulo YÔZ?

13. IFSC – Assinale a alternativa CORRETA.

O triângulo, que possui três lados e três ângulos, é uma das figuras geométricas mais importantes da geometria plana. Sabendo-se que em um triângulo equilátero ABC o comprimento do lado AB mede $3x + y$, o do lado AC mede $2x + y + 2$ e o do lado BC mede $x + 3y$, qual é o perímetro desse triângulo?

Assinale a alternativa CORRETA.

a) 12 u.c.
b) 6 u.c.
c) 24 u.c.
d) 15 u.c.
e) 18 u.c.

14. IFPE – Um técnico em mecânica pretende construir cinco triângulos cujos lados devem ter as seguintes medidas:

I. 10 cm; 8 cm; 6 cm
II. 9 cm; 15 cm; 12 cm
III. 12 cm; 15 cm; 12 cm
IV. 9 cm; 8 cm; 4 cm
V. 10 cm; 10 cm; 21 cm

Podemos afirmar que o técnico obteve um triângulo apenas nos casos

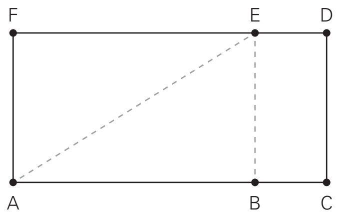
a) I, II, III e IV.
b) I, II e V.
c) I, II e IV.
d) I, II, IV e V.
e) III, IV e V.

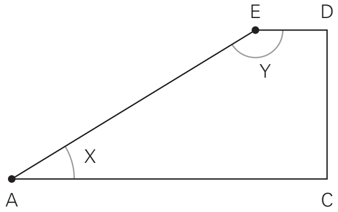
15. Uece – Sejam UVW um triângulo isósceles com base VW; além disso, E e F, são dois pontos nos lados UV e UW, respectivamente, tais que as medidas dos segmentos de reta VW, WE, EF e FU são iguais.

Nessas condições, pode-se afirmar corretamente que a medida do ângulo $V\hat{U}W$ é

a) menor do que 21°.
b) maior do que 21° e menor do que 25°.
c) maior do que 25° e menor do que 27°.
d) maior do que 27° e menor do que 32°.

16. CFTMG – Uma folha retangular de papel ofício de medidas 287 x 210 mm foi dobrada conforme a figura.

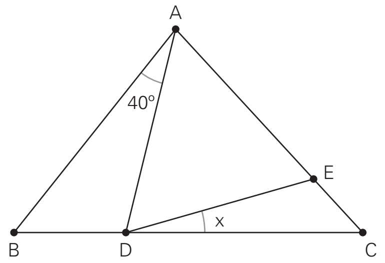




Os ângulos $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ resultantes da dobradura medem, respectivamente, em graus,

a) 40 e 90
b) 40 e 140
c) 45 e 45
d) 45 e 135

17. Unesp – Na figura, o triângulo ABC é isósceles (AB = AC), bem como o triângulo ADE (AD = AE).



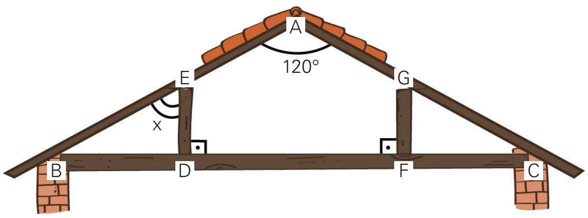
Sabendo que o ângulo BAD mede 40°, determine o valor, em graus, do ângulo x = EDC.

ESTUDO PARA O ENEM

18. IFSUL (adaptado) C2-H7

O projeto de madeiramento é fundamental para a construção de um bom telhado em uma residência.

Na figura, temos a vista frontal do madeiramento de um telhado. O triângulo ABC é isósceles de base BC, tal que $\hat{A} = 120°$. Observa-se também que os segmentos DE e FG são perpendiculares à base BC.

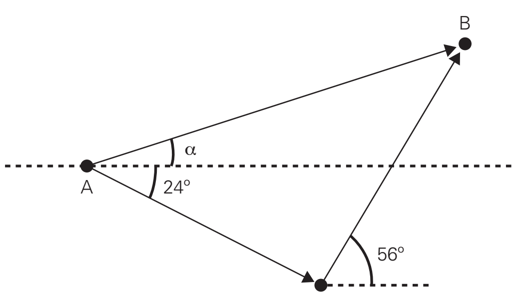


De acordo com os dados acima, a medida do ângulo $B\hat{E}D$ é

a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 75°
e) 80°

19. IFPE C2-H7

Luna e Bebel estão participando de uma olimpíada de robótica no campus Afogados da Ingazeira. Em uma das provas, elas precisavam levar o robô do ponto A para o ponto B no plano cartesiano, conforme a figura abaixo. Mas, por um descuido, o robô andou 30 cm sob um ângulo de 24° com o eixo horizontal e, para corrigir o trajeto, outros 30 cm sob um ângulo de 56° com a horizontal.

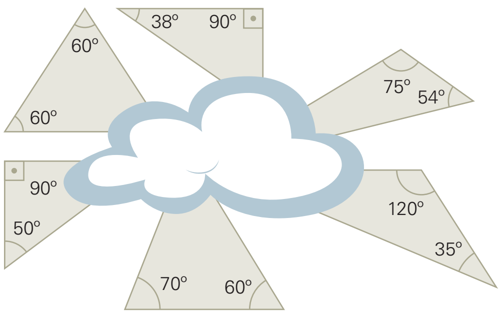


Para realizar a prova com o menor percurso, elas deveriam ter iniciado o trajeto sob qual medida, em graus, do ângulo α em relação ao eixo horizontal?

a) 24°
b) 16°
c) 4°
d) 8°
e) 40°

20. IFSP C2-H8

Uma professora escondeu alguns ângulos de triângulos e pediu que seus alunos determinassem apenas a soma dos ângulos escondidos pela nuvem dos triângulos retângulos. Assinale a alternativa que apresenta a resposta encontrada.



a) 82°
b) 88°
c) 90°
d) 92°
e) 94°

8 ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

- Circunferência
- Posições de um ponto em relação à circunferência
- Posições de uma reta em relação à circunferência
- Ângulos na circunferência
- Ângulo central
- Ângulo inscrito
- Ângulo de segmento
- Ângulo de vértice interno
- Ângulo de vértice externo

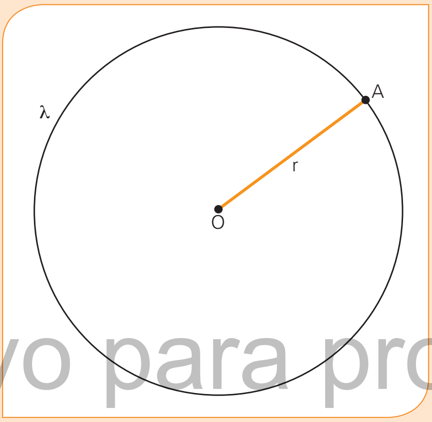
HABILIDADES

- Identificar elementos da circunferência.
- Aplicar conhecimentos de ângulos na circunferência e na resolução de problemas.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

DEBBIE ROWE/PEARSON EDUCATION LTD

Circunferência – introdução

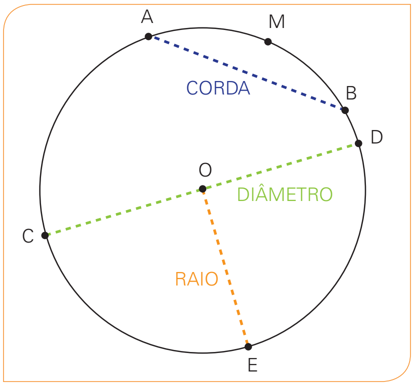
A figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo é denominada **circunferência**.



A figura representa uma circunferência **λ**, em que **O** é o centro (ponto fixo) e **r** é o raio com medida igual ao segmento **AO** (constante positiva).

ELEMENTOS DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Uma circunferência de centro **C** e raio **r** tem os seguintes elementos:



$\overline{EO}$: raio

$\overline{CD}$: diâmetro

$\overline{AB}$: corda

$\overset{\frown}{AMB}$: arco

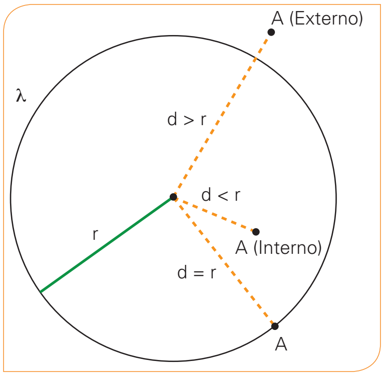
$\overset{\frown}{CED}$: semicircunferência

$\overline{CO} = r$ e $\overline{CD} = 2r$

POSIÇÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO À CIRCUNFERÊNCIA

Analisando a distância **d** de um ponto **A** ao centro da circunferência **O**, sabemos se esse ponto é interno, externo ou pertence à circunferência. Observe:

- Se $d < r \rightarrow$ o ponto A é interno à circunferência.
- Se $d > r \rightarrow$ o ponto A é externo à circunferência.
- Se $d = r \rightarrow$ o ponto A pertence à circunferência.



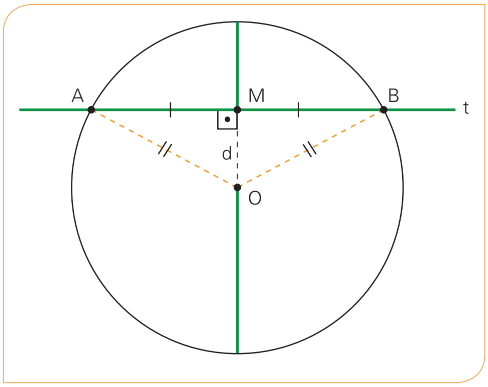
POSIÇÕES DE UMA RETA EM RELAÇÃO À CIRCUNFERÊNCIA

Reta secante

Uma reta é chamada secante à circunferência quando há dois pontos distintos em comum.

A menor distância entre o centro **O** da circunferência e a reta secante é o segmento de reta **d** perpendicular à reta secante.

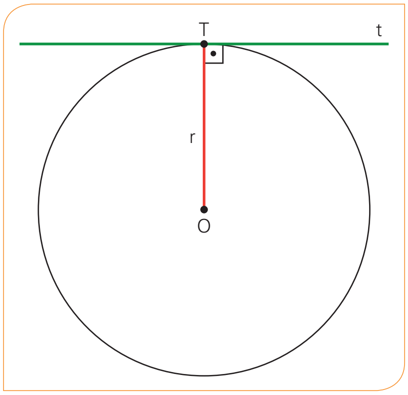
Se uma reta **t** é secante à circunferência **λ**, de centro **O**, em dois pontos **A** e **B**, sendo **M** o ponto médio de $\overline{AB}$, a reta $\overline{OM}$ é perpendicular à reta **t**.



Reta tangente

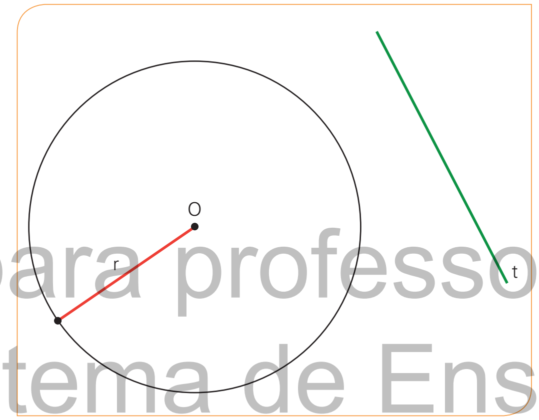
Uma reta é chamada tangente à circunferência quando um de seus pontos pertence a ela (ponto de tangência) e quando todos os outros são externos a ela.

Toda reta **t** tangente à circunferência **λ**, de centro **O**, é perpendicular ao raio no ponto **T** de tangência.



Reta externa

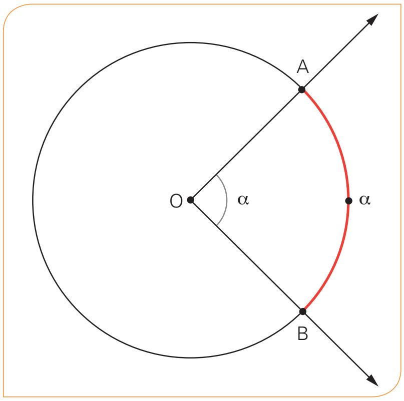
Uma reta é chamada externa à circunferência quando todos os seus pontos são externos a ela.



ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Ângulo central

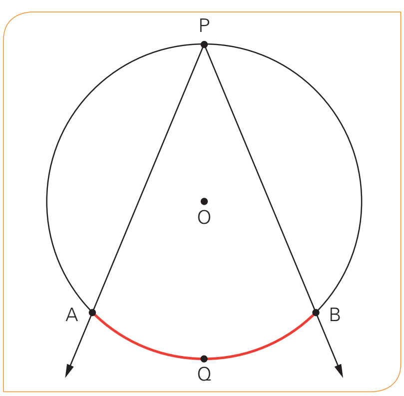
O ângulo que tem vértice no centro da circunferência é denominado **ângulo central**. O arco da circunferência com pontos internos ao ângulo é seu arco correspondente.



A medida do ângulo central é igual à medida do arco correspondente: $A\hat{O}B = med(\overset{\frown}{APB}) = \alpha$

Ângulo inscrito

Propriedades do ângulo inscrito: O ângulo inscrito é aquele que tem vértice na circunferência e lados secantes a ela. O arco da circunferência com pontos internos ao ângulo é seu arco correspondente.

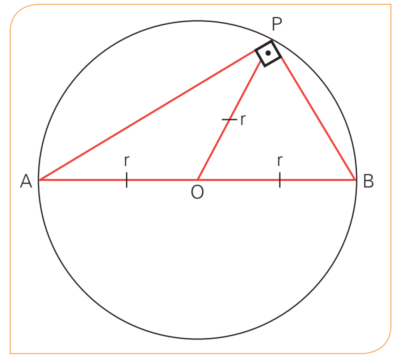


$A\hat{P}B$ é o ângulo inscrito e $\overset{\frown}{AQB}$ é o arco correspondente $A\hat{P}B$.

Um ângulo inscrito tem medida igual à metade da medida de seu arco correspondente.

$$A\hat{P}B = \frac{med(\overset{\frown}{AQB})}{2}$$

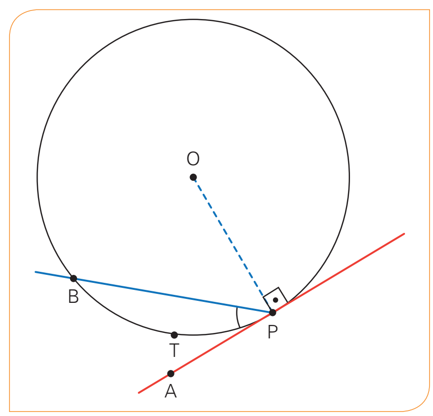
Consequência da propriedade do ângulo inscrito (triângulo retângulo): O triângulo inscrito em uma semicircunferência é necessariamente um triângulo retângulo, pois a medida do ângulo inscrito é metade da medida do arco correspondente, que, nesse caso, é o arco de 180°. Logo, o ângulo inscrito é de 90°.



$$A\hat{P}B = \frac{med(\overset{\frown}{AB})}{2} = 90°$$

Ângulo de segmento

O ângulo que tem vértice na circunferência, sendo um de seus lados secante e o outro tangente à circunferência, é denominado **ângulo de segmento**.

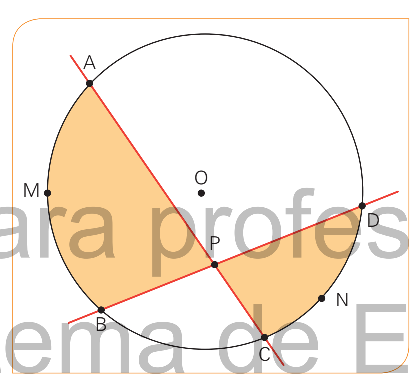


A medida de um arco de segmento é igual à metade da medida do arco correspondente.

$$A\hat{P}B = \frac{med(\overset{\frown}{BTP})}{2}$$

ÂNGULO DE VÉRTICE INTERNO (OU EXCÊNTRICO INTERNO)

O ângulo que tem vértice interno no interior da circunferência e cujas retas suportes de seus lados são secantes a ela é denominado **ângulo de vértice interno**.



$A\hat{P}B$, $B\hat{P}C$, $C\hat{P}D$ e $A\hat{P}D$ são ângulos de vértice interno.

Para o cálculo do ângulo interno, temos:

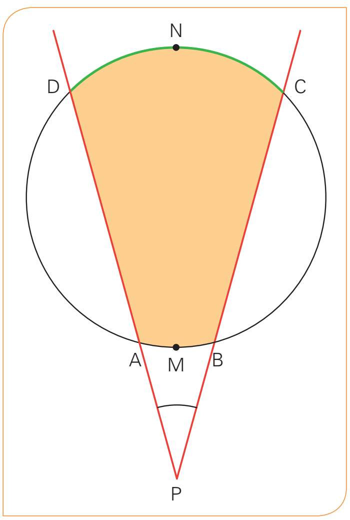
$\overset{\frown}{AMB}$ e $\overset{\frown}{CND}$ são os arcos correspondentes aos ângulos $A\hat{P}B$ e $C\hat{P}D$.

A medida de um ângulo de vértice interno é igual à metade da soma das medidas de seus arcos correspondentes.

$$A\hat{P}B = C\hat{P}D = \frac{\overset{\frown}{AMB} + \overset{\frown}{CND}}{2}$$

ÂNGULO DE VÉRTICE EXTERNO (OU EXCÊNTRICO EXTERNO)

O ângulo que tem vértice no exterior da circunferência e cujos lados são secantes a ela é denominado **ângulo de vértice externo**.



$A\hat{P}B$ é o vértice externo.

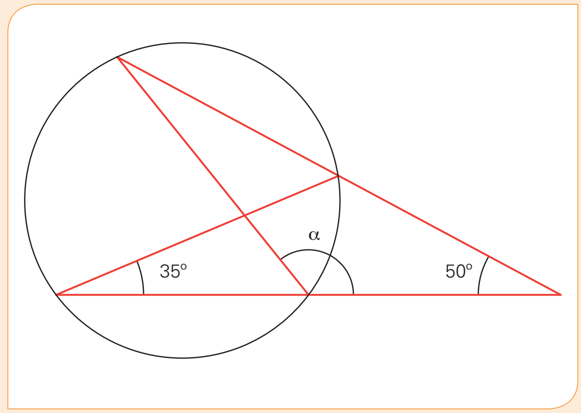
$\overset{\frown}{AMB}$ e $\overset{\frown}{CND}$ são os arcos correspondentes ao ângulo $A\hat{P}B$.

A medida de um ângulo de vértice externo é igual à metade da diferença das medidas dos arcos correspondentes

$$A\hat{P}B = \frac{\overset{\frown}{CND} - \overset{\frown}{AMB}}{2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

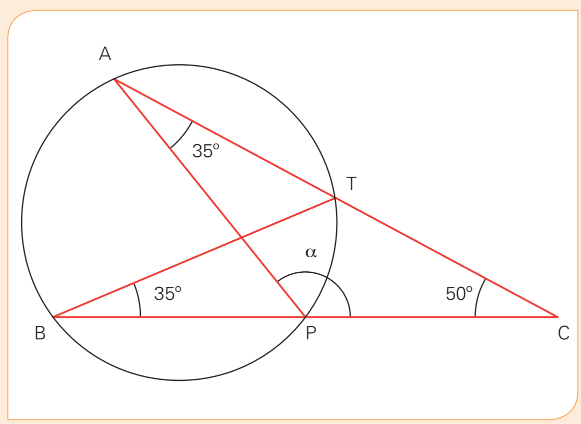
Unimep-SP – Na figura, o ângulo α é igual a:



a) 95°
b) 120°
c) 115°
d) 85°
e) 105°

Resolução

A figura apresenta dois ângulos inscritos na mesma circunferência e com o mesmo arco. Logo, são ângulos congruentes.



Analisando o triângulo ABC da figura, obtemos:

$\alpha + 35° + 50° = 180°$

$\alpha = 180° - 85°$

$\alpha = 95°$

ROTEIRO DE AULA

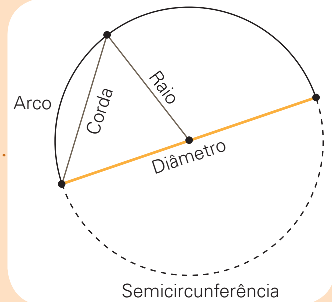
ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Circunferência

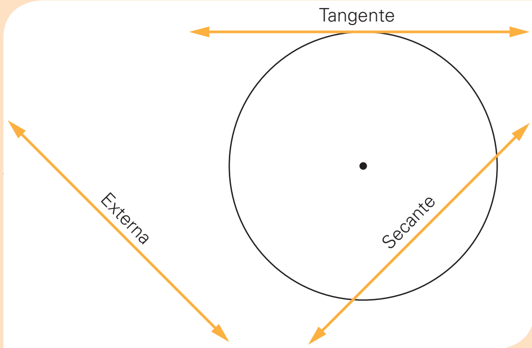
A figura formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo é denominada circunferência.

Elementos

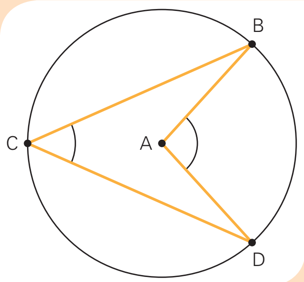
- Raio
- Diâmetro
- Corda
- Arco
- Semicircunferência



Posição de uma reta em relação à circunferência



Ângulos na circunferência



$B\hat{C}D$ é o ângulo inscrito
$B\hat{A}D$ é o ângulo central

Ângulos de vértice

Interno

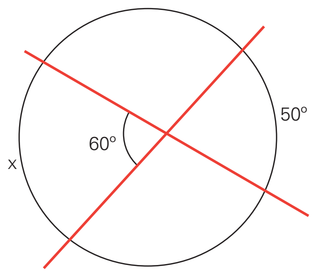
A medida de um ângulo de vértice interno é igual à metade das medidas de seus arcos correspondentes.

Externo

A medida de um ângulo de vértice externo é igual à metade da diferença das medidas de seus arcos correspondentes.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. EEAR – Duas cordas se cruzam num ponto distinto do centro da circunferência, conforme esboço.



A partir do conceito de ângulo excêntrico interior, a medida do arco x é

a) 40°
b) 70°
c) 110°
d) 120°

Pela propriedade do ângulo interior à circunferência como a média aritmética dos arcos que ele determina numa circunferência, podemos escrever:

$\frac{x + 50°}{2} = 60°$

$x + 50° = 60° \cdot 2$

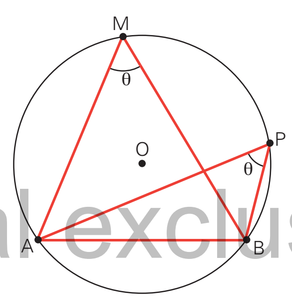
$x + 50° = 120°$

$x = 120° - 50°$

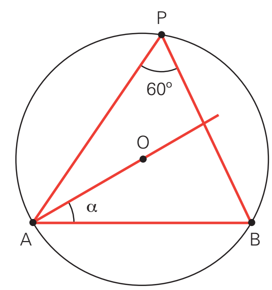
$x = 70°$

2. IFPE C2-H8

Para encontrar quais assentos em um teatro possibilitam que um espectador veja todo o palco sob um ângulo de visão determinado, utilizamos o conceito de "arco capaz". A esse respeito, analise a figura abaixo:



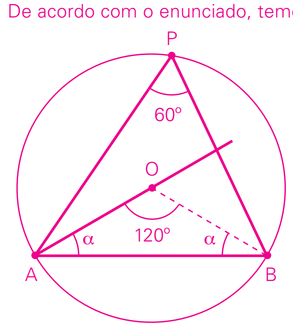
O "arco capaz do ângulo θ (θ < 90°) sobre o segmento **AB**" corresponde ao arco maior da circunferência representada na figura anterior, que possui centro em O e tem AB como corda. Como os ângulos $\widehat{APB}$ e $\widehat{AMB}$ são ângulos inscritos nessa circunferência e determinam o mesmo arco, eles têm a mesma medida. Esses ângulos são conhecidos como "inscritos". Considere o arco capaz de 60° sobre o segmento AB representado a seguir.



Qual é o valor do ângulo $\alpha = \widehat{OAB}$, sabendo que O é o centro da circunferência?

a) 30°
b) 36°
c) 20°
d) 60°
e) 45°

De acordo com o enunciado, temos:



Assim, podemos calcular:

$A\hat{O}B = 2 \cdot 60°$

$A\hat{O}B = 120°$

AO = BO (raios)

Sendo assim,

$O\hat{A}B = O\hat{B}A = \alpha$

No triângulo AOB, temos:

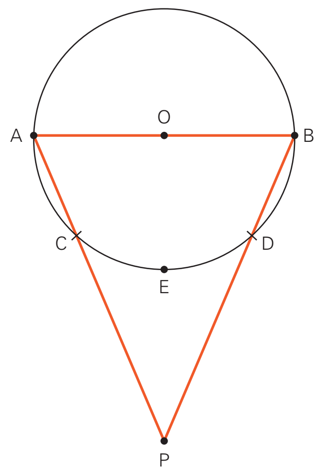
$2 \cdot \alpha + 120° = 180°$

$2 \cdot \alpha = 180° - 120°$

$\alpha = \frac{60°}{2}$

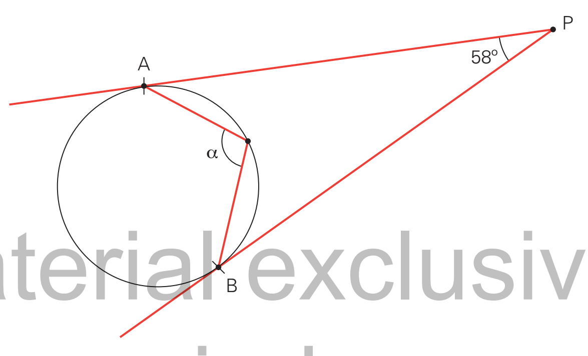
$\alpha = 30°$

3. Sistema Dom Bosco – Na figura seguinte, sabe-se que AB é um diâmetro e que o arco CED mede a metade do arco AEB. Calcule a medida do ângulo $A\hat{P}B$.



O ângulo de vértice P é excêntrico externo. Portanto, a medida desse ângulo é a metade da diferença entre as medidas dos arcos AB e CED. Sendo o segmento AB o diâmetro e sendo a medida do arco a metade do arco AB, temos: $\frac{180° - 90°}{2} = 45° \rightarrow A\hat{P}B = 45°$.

4. Sistema Dom Bosco – Na figura seguinte, o valor de α é:



a) 113°
b) 119°
c) 123°
d) 127°
e) 129°

O ângulo de vértice P é excêntrico externo. Portanto, a medida desse ângulo é a metade da diferença entre as medidas do maior e do menor arco AB. Como o ângulo de medida α é inscrito, o maior arco AB mede 2α. Então, o menor arco é $360° - 2\alpha$. Logo:

$\hat{P} = \frac{2\alpha - (360° - 2\alpha)}{2} \rightarrow 58° = 2\alpha - 180° \rightarrow 2\alpha = 238° \rightarrow \alpha = 119°$.

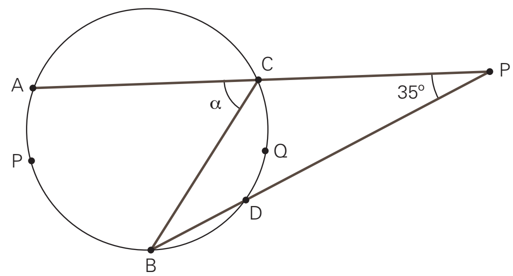
5. IFSC (adaptado) – Um estudante, ao chegar ao prédio do campus Florianópolis do IFSC, percebeu que no seu relógio os ponteiros estavam marcando exatamente duas horas. Qual o ângulo agudo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos?

Sabendo que o relógio tem 12 marcações (de 1 a 12) que indicam as horas e que uma circunferência mede 360°, cada arco delimitado por números consecutivos, entre 1 e 12, mede 30°, pois: $\frac{360°}{12} = 30°$.

Logo, às duas horas o ponteiro maior se encontra exatamente no 12, e o ponteiro menor, exatamente no 2. Dessa maneira, as extremidades dos ponteiros formam um arco cuja medida é $2 \cdot 30° = 60°$.

Portanto, o ângulo agudo formado pelos ponteiros do relógio é de 60°.

6. Sistema Dom Bosco – Se a soma das medidas dos arcos APB e CQD é 160°, então o valor de α é:



a) 57,5°
b) 60°
c) 62,5°
d) 65°
e) 70°

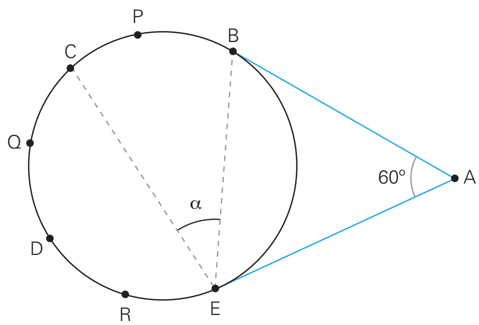
O ângulo de vértice P é excêntrico externo. Portanto, a medida desse ângulo é a metade da diferença entre as medidas dos arcos APB e CQD. Como o ângulo de vértice C é inscrito, o maior arco APB mede 2α. Sendo 2β a medida do arco CQD, do enunciado e da figura, temos:

$2\alpha + 2\beta = 360°\text{(I)}$ e $35° = \dfrac{2\alpha - 2\beta}{2} \rightarrow 2\alpha - 2\beta = 70°$ (II).

Fazendo (I) + (II): $\alpha = 57{,}5°$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

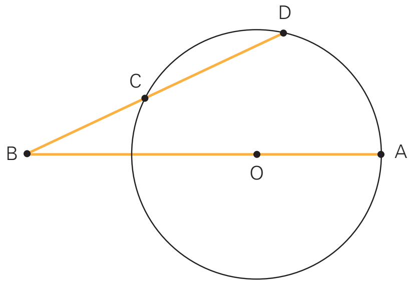
7. FGV – Na figura, AB e AE são tangentes à circunferência nos pontos B e E, respectivamente, e $B\hat{A}E = 60°$.



Se os arcos $\overset{\frown}{BPC}$, $\overset{\frown}{CQD}$ e $\overset{\frown}{DRE}$ têm medidas iguais, a medida do ângulo $B\hat{E}C$, indicada na figura por α, é igual a:

a) 20°
b) 40°
c) 45°
d) 60°
e) 80°

8. Mackenzie – Na figura, se a circunferência tem centro O e BC = OA, então a razão entre as medidas dos ângulos $A\hat{O}D$ e $C\hat{O}B$ é



a) $\dfrac{5}{2}$

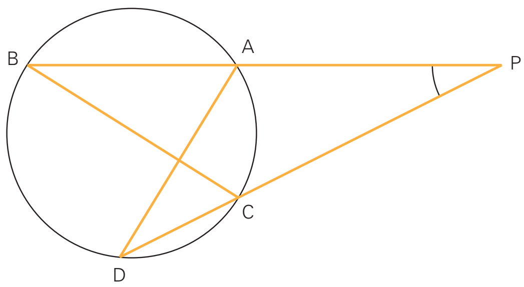
b) $\dfrac{3}{2}$

c) 2

d) $\dfrac{4}{3}$

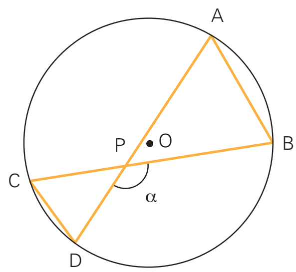
e) 3

9. CFTMG – Na figura, os segmentos PB e PD são secantes à circunferência, as cordas AD e BC são perpendiculares e AP = AD. A medida x do ângulo BPD é



a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°

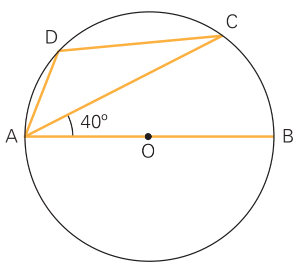
10. FGV – As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência de centro O são, respectivamente, lados de polígonos regulares de 6 e 10 lados inscritos nessa circunferência. Na mesma circunferência, as cordas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ se intersectam no ponto P, conforme indica a figura a seguir.



A medida do ângulo indicado na figura por α é igual a

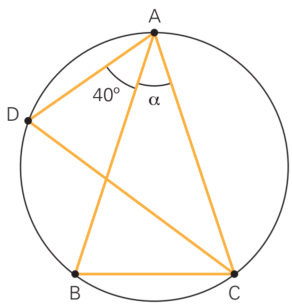
a) 120°
b) 124°
c) 128°
d) 130°
e) 132°

11. Fuvest (adaptado) – A medida do ângulo ADC inscrito na circunferência de centro O é:



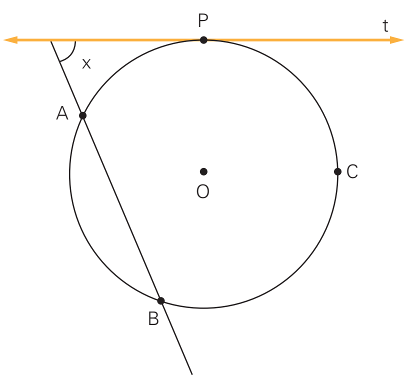
a) 100°
b) 110°
c) 120°
d) 130°
e) 135°

12. Ufes – Na figura, A, B, C e D são pontos de uma circunferência, a corda CD é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e as cordas AB e AC têm o mesmo comprimento. Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede 40°, a medida α do ângulo $B\hat{A}C$ é



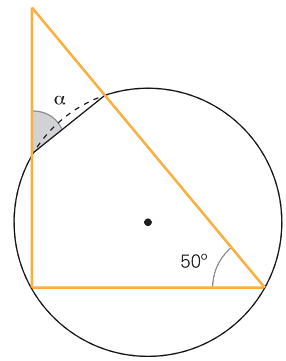
a) 10°
b) 15°
c) 20°
d) 25°
e) 30°

13. IFSP – Na figura, a reta t é tangente, no ponto P, ao círculo de centro O. A medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 100° e a do arco $\overset{\frown}{BCP}$ é 194°. O valor de x, em graus, é



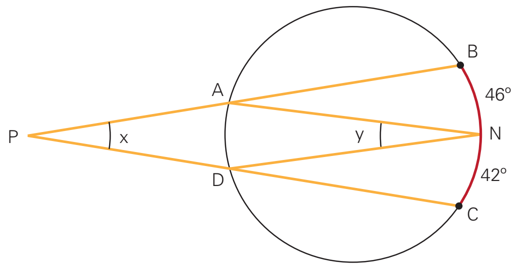
a) 53
b) 57
c) 61
d) 64
e) 66

14. Mackenzie (adaptado) – O triângulo da figura é retângulo.

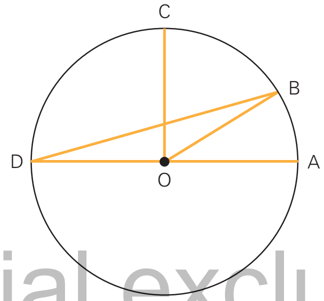


Qual o valor do ângulo α da figura?

15. Sistema Dom Bosco – Calcule o valor de x + y, dadas as medidas dos arcos BN e CN.

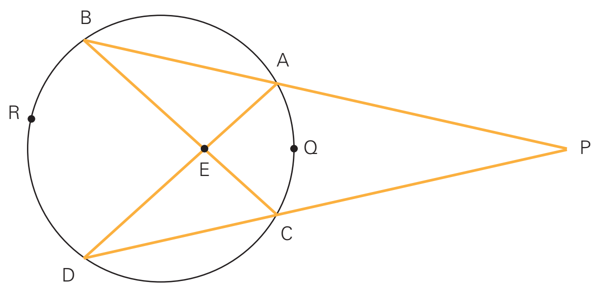


16. PUC-Rio – No círculo de centro O, AD é o diâmetro. Sejam B e C tais que $\widehat{AOC} = 90°$ e $\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$.



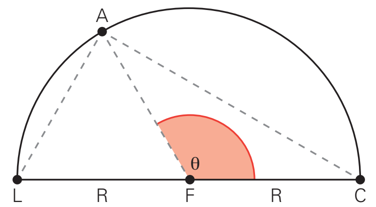
Qual o valor de $\widehat{ODB}$?

17. Sistema Dom Bosco – Na figura seguinte, temos $B\hat{P}D = 32°$ e $B\hat{E}D = 88°$. Determine as medidas dos arcos BRD e AQC.



18. Enem C2-H6

Durante seu treinamento, um atleta percorre metade de uma pista circular de raio R, conforme figura a seguir. A sua largada foi dada na posição representada pela letra L, a chegada está representada pela letra C e a letra A representa o atleta. O segmento LC é o diâmetro da circunferência e o centro da circunferência está representado pela letra F. Sabemos que, em qualquer posição na qual atleta esteja na pista, os segmentos LA e AC são perpendiculares. Seja θ o ângulo que o segmento AF faz com o segmento FC.



Quantos graus mede o ângulo θ quando o segmento AC medir R durante a corrida?

a) 15 graus
b) 30 graus
c) 60 graus
d) 90 graus
e) 120 graus

19. Enem C2-H9

Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para sistema de posicionamento global) com longitude de 124° 3′0″ a leste do meridiano de Greenwich.

Dado: 1° equivale a 60′ e 1′ equivale a 60″.

PAVARIN, G. *Galileu*, fev. 2012. (Adaptado.)

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude da forma decimal é

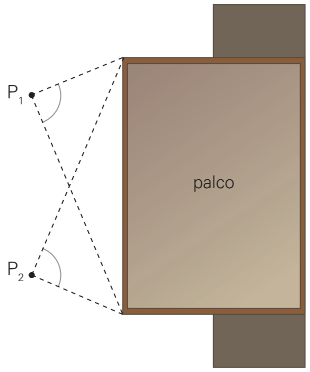
a) 124,02°
b) 124,05°
c) 124,20°
d) 124,30°
e) 124,50°

20. Insper C2-H8

Ao projetar um teatro, um arquiteto recebeu o seguinte pedido da equipe que seria responsável pela filmagem dos eventos que lá aconteceriam:

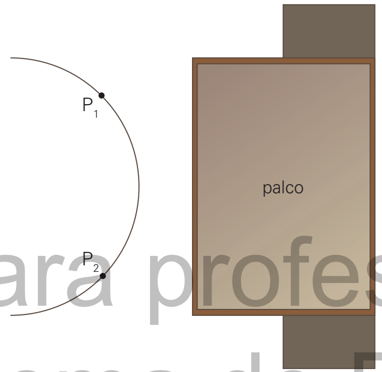
É necessário que seja construído um trilho no teto, ao qual acoplaremos uma câmera de controle remoto. Para que a câmera não precise ficar mudando a calibragem do foco a cada movimentação, o ângulo de abertura com que a câmera captura as imagens do palco deve ser sempre o mesmo, conforme ilustração abaixo.

Por exemplo, dos pontos P1 e P2 a câmera deve ter o mesmo ângulo de abertura α para o palco.

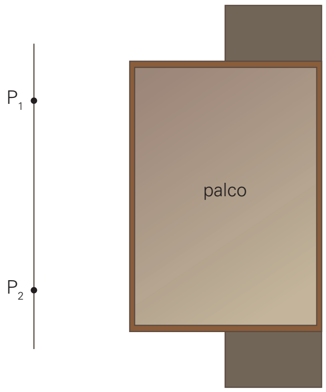


Das propostas de trilho a seguir, aquela que atende a essa necessidade é

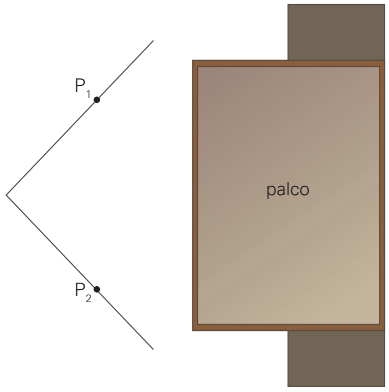
a)



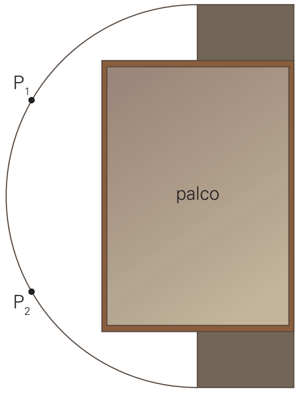
b)



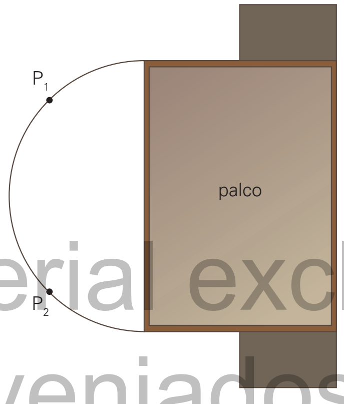
c)



d)



e)



COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

9

- Número π (pi) e comprimento da circunferência
- Comprimento de um arco de circunferência
- Comprimento de uma circunferência por meio de polígonos inscritos e circunscritos
- Posições relativas de duas circunferências

HABILIDADES

- Aplicar conhecimentos de ângulos na circunferência e na resolução de problemas.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas cotidianos.


MARTIN_K/ISTOCK

Coroas de bicicleta com diferentes comprimentos.

Introdução

No módulo anterior, tivemos a oportunidade de conhecer mais sobre as características da circunferência e os ângulos a ela associados. Agora, vamos estudar o comprimento da circunferência e ver que as diferentes aplicações implicam na necessidade do conhecimento dessa importante característica da circunferência.

Conteúdo deste módulo, o comprimento da circunferência está relacionado desde a simples mudança de marcha de uma bicicleta (que fará com que o atleta adquira maior ou menor velocidade a cada pedalada) até o funcionamento complexo e eletrônico de um velocímetro (o qual, por meio de um contador, calcula a velocidade de acordo com o número de giros de um pneu).

NÚMERO π (PI) E COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

O número π (pi) é um número irracional. Tem infinitas casas decimais (3,1415926535897932...), mas costuma ser aproximado para um número finito (3; 3,1; 3,14), dependendo da condição e da precisão que cada situação analisada exige.

O número π resulta da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro.

$$\pi = \frac{\text{comprimento}}{\text{diâmetro}}$$

c = comprimento
d = 2r = diâmetro = dobro do raio

$$c = 2\,\pi \cdot r$$

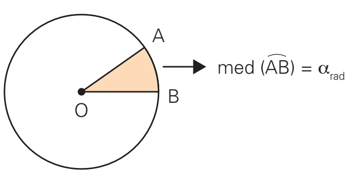
Os egípcios antigos trabalhavam com a razão entre comprimento e diâmetro da circunferência e sabiam que essa razão, indiferentemente da circunferência analisada, resultava em um valor constante.

Já o grego Arquimedes de Siracusa, no século III a.C., também obteve o valor de π para a circunferência, porém inscrevendo polígonos em círculos, calculando-o com mais precisão, conforme aumentava o número de lados do polígono inscrito. Esse assunto será abordado mais adiante.

COMPRIMENTO DE ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

A medida do arco, em radianos, possibilita determinar seu comprimento, por meio de regra de três simples.

$$360° = 2\,\pi \text{ rad}$$



Arco de circunferência.

Sendo ℓ o comprimento do arco, temos:

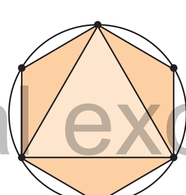
2π rad ——— 2π R

α rad ——— ℓ

$$\ell = \alpha \cdot R$$

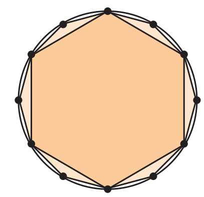
CÁLCULO DO COMPRIMENTO DE CIRCUNFERÊNCIA POR MEIO DE POLÍGONOS INSCRITOS E CIRCUNSCRITOS

Considere inicialmente um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de comprimento **C** e raio **R**. Com base nesse triângulo, duplica-se o número de lados do polígono, obtendo-se um hexágono regular inscrito. O perímetro do hexágono é maior que o perímetro do triângulo e está mais próximo do valor do comprimento da circunferência.



Triângulo equilátero e hexágono inscritos na circunferência.

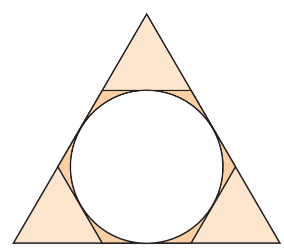
Ao duplicarmos novamente o número de lados do polígono inscrito e realizarmos tal operação indefinidamente, cada perímetro do polígono que surgir será maior que o anterior e estará mais próximo do comprimento da circunferência.



Com isso, conclui-se que:

- O comprimento **C** de uma circunferência é o número para o qual tendem os perímetros dos polígonos regulares inscritos numa circunferência quando o número de lados destes aumenta indefinidamente.

Tal raciocínio pode ser utilizado para polígonos regulares circunscritos. Porém, inicialmente o perímetro para o triângulo equilátero circunscrito é maior que o comprimento da circunferência. Conforme duplicamos o número de lados do polígono, seu perímetro vai ficando cada vez menor, aproximando-se do valor do comprimento da circunferência. Chega-se, então, ao mesmo valor que o obtido para o polígono inscrito na circunferência.



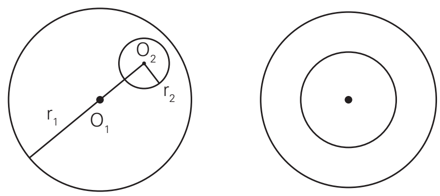
Quando se constrói um polígono inscrito de 384 lados em uma circunferência de raio R, ele terá um perímetro de $2R \cdot 3{,}14156$, enquanto um polígono com o mesmo número de lados, porém circunscrito na circunferência, terá um perímetro de $2R \cdot 3{,}14167$. Sendo o comprimento da circunferência igual a $2R \cdot 3{,}141592...$, conclui-se que, quanto maior o número de lados do polígono, mais preciso será o cálculo do comprimento da circunferência. Assim, o valor constante que surgiu com o cálculo desse comprimento foi denominado número π (pi).

$$\pi = 3{,}14159265358979323846...$$

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Internas

Duas circunferências são internas quando todos os pontos de uma forem internos à outra, sendo **concêntricas** quando os centros coincidem.

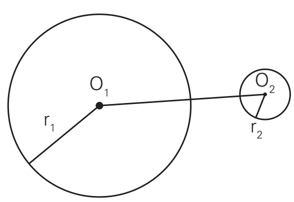


concêntricas

$$O_1O_2 < r_1 - r_2$$

Externas

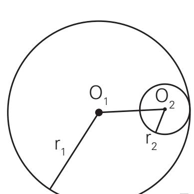
Duas circunferências são externas quando todos os pontos de uma forem externos à outra.



$$O_1O_2 > r_1 + r_2$$

Tangentes internamente

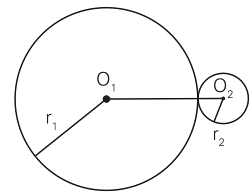
Duas circunferências são tangentes internamente quando tiverem um único ponto em comum e os demais pontos de uma forem interiores à outra.



$$O_1O_2 = r_1 - r_2$$

Tangentes externamente

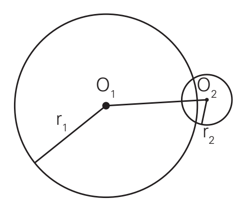
Duas circunferências são tangentes externamente quando tiverem um único ponto em comum e os demais pontos de uma delas forem externos à outra.



$$O_1O_2 = r_1 + r_2$$

Secantes

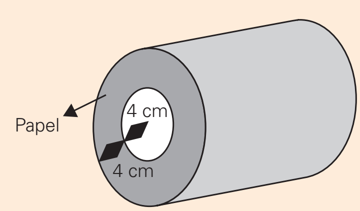
Duas circunferências são secantes quando tiverem dois pontos em comum.



$$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1. FGV – Uma bobina cilíndrica de papel possui raio interno igual a 4 cm e raio externo igual a 8 cm. A espessura do papel é igual a 0,2 mm.



Adotando para os cálculos $\pi = 3$, o papel da bobina, quando completamente desenrolado, corresponde a um retângulo cuja maior dimensão, em metros, é aproximadamente igual a:

a) 20
b) 30
c) 50
d) 70
e) 90

Resolução

$c = 2\pi \cdot r$

0,2 mm = 0,02 cm, logo esse será o acréscimo do raio em cada volta.

A primeira volta terá um comprimento de: $c_1 = 2\pi \cdot 4{,}00$

A segunda volta terá um comprimento de: $c_2 = 2\pi \cdot 4{,}02$

A terceira volta terá um comprimento de: $c_3 = 2\pi \cdot 4{,}04$

A enésima (última) volta terá um comprimento de: $c_n = 2\pi \cdot 7{,}98$

Logo, o comprimento total de papel será:

$c = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n$

$c = 2\pi \cdot 4{,}00 + 2\pi \cdot 4{,}02 + 2\pi \cdot 4{,}04 + \ldots + 2\pi \cdot 7{,}98$

$c = 2\pi \cdot (4{,}00 + 4{,}02 + 4{,}04 + \ldots + 7{,}98)$

Resolvendo a PA, obtemos: Soma da PA = 1 198 cm = 11,98 m

Assim, temos:

$c = 2\pi \cdot 11{,}98 = 2 \cdot 3 \cdot 11{,}98 = 71{,}88$ m

$c \cong 70$ m

ROTEIRO DE AULA

CIRCUNFERÊNCIA

O número π

Irracional: 3,14...

Comprimento da circunferência

$C = 2 \cdot \pi \cdot R$

Comprimento do arco de uma circunferência

$\ell = \alpha \cdot R$

Comprimento do arco de uma circunferência

- Internas: $O_1O_2 < r_1 - r_2$
- Externas: $O_1O_2 > r_1 + r_2$
- Secantes: $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$
- Tangentes internamente: $O_1O_2 = r_1 - r_2$
- Tangentes externamente: $O_1O_2 = r_1 + r_2$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-Rio (adaptado) – A roda de um carro tem 30 cm de raio. Depois de a roda completar uma volta, qual será o deslocamento aproximado do carro?

Usando $\pi = 3{,}14$

O deslocamento do veículo está relacionado ao comprimento da circunferência que delimita a roda. Assim, temos:

$c = 2\pi \cdot R$

$c \cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 \cong 188$ cm

$c \cong 188$ cm

2. UTFPR – Se o perímetro de uma circunferência aumenta em uma unidade de comprimento, assinale a alternativa que apresenta, em unidades de comprimento, o aumento no comprimento do raio.

a) $\frac{1}{\pi}$.

b) $\frac{1}{3\pi}$.

c) $\frac{\pi}{2}$.

d) $\frac{\pi}{3}$.

e) $\frac{1}{2\pi}$.

A relação para o cálculo do perímetro de uma circunferência é: $P = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Consideramos o aumento x que o raio sofrerá quando o perímetro aumentar 1 unidade.

$P + 1 = 2 \cdot \pi \cdot (r + x)$

$P + 1 = 2 \cdot \pi \cdot r + 2 \cdot \pi \cdot x$

$1 = 2 \cdot \pi \cdot x$

$x = \frac{1}{2 \cdot \pi}$

3. UFTM C2-H6

O maior relógio de torre de toda a Europa é o da Igreja St. Peter, na cidade de Zurique, Suíça, que foi construído durante uma reforma do local, em 1970.

O Estado de S. Paulo. (Adaptado)

O mostrador desse relógio tem formato circular, e o seu ponteiro dos minutos mede 4,35 m. Considerando $\pi \approx 3{,}1$, a distância que a extremidade desse ponteiro percorre durante 20 minutos é, aproximadamente,

a) 10 m.

b) 9 m.

c) 8 m.

d) 7 m.

e) 6 m.

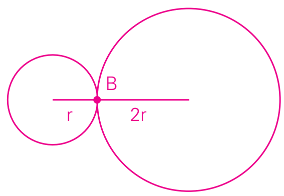
Em 20 minutos, o ponteiro descreverá um arco que corresponde a 1/3 da circunferência. Logo, a distância percorrida por sua extremidade será:

$C_{arco} = \alpha \cdot r = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{3}$

$C_{arco} = \frac{2 \cdot 3{,}1 \cdot 4{,}35}{3} = 8{,}99$ m

$C_{arco} \cong 9{,}0$ m

4. Sistema Dom Bosco – Duas circunferências são desenhadas lado a lado, tangentes pelo ponto B. A distância entre seus centros é igual a 60 cm, e uma dessas circunferências tem o raio igual ao dobro da outra. Qual o comprimento da circunferência menor?



$r + 2r = 60$

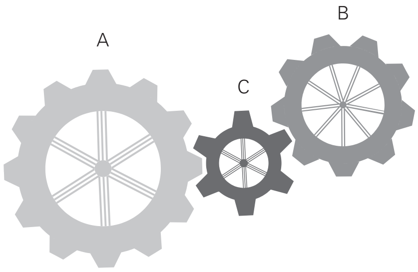
$3r = 60$

$r = 20$

$c = 2\pi r \rightarrow c = 2\pi \cdot 20 = 40\pi$

$\therefore c_{menor} = 40\pi$ cm

5. UPE-SSA – Num sistema de engrenagens, cada uma tem seu raio, de forma que a engrenagem "A" tem raio com medida R, a "B" tem raio com medida igual à metade do raio da engrenagem "A" e a "C" tem raio com medida igual a um quarto do raio da engrenagem "A". Sendo a medida do raio de "A" igual a 4 cm, quantas voltas "A" dará quando "C" percorrer o equivalente a 3 600 cm?



a) 2 400
b) 1 200
c) 600
d) 300
e) 150

Considerando n o número de voltas da engrenagem A e $2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi$ a distância percorrida por um de seus pontos quando essa engrenagem executa uma volta, temos:

$n \cdot 8\pi = 3\,600 \rightarrow n = \dfrac{3\,600}{8\pi}$

$\therefore n = 150$

6. FGV – Suponha que fosse possível dar uma volta completa em torno da Linha do Equador caminhando e que essa linha fosse uma circunferência perfeita na esfera terrestre. Nesse caso, se uma pessoa de 2 m de altura desse uma volta completa na Terra pela Linha do Equador, o topo de sua cabeça, ao completar a viagem, teria percorrido uma distância maior que a sola dos seus pés em, aproximadamente,

a) 63 cm
b) 12,6 m
c) 6,3 km
d) 12,6 km
e) 63 km

Seja r a medida do raio da Terra na Linha do Equador, em metros, sabe-se que a distância percorrida pelo topo da cabeça da pessoa é igual a $2\pi \cdot (r + 2) \cong (2\pi \cdot r + 12{,}6)$ m.

Consequentemente, sendo $2\pi \cdot r$ a distância percorrida pela sola dos pés da pessoa, podemos concluir que o resultado é 12,6 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. IFBA – Foi inaugurada uma praça municipal, de formato circular, com 30 m de raio, toda permeada por 21 refletores à sua volta. Foi projetada para que a distância entre dois refletores vizinhos fosse igual. Adotando o valor de $\pi = 3{,}15$, então a distância, em metros, entre cada dois dos refletores vizinhos foi de:

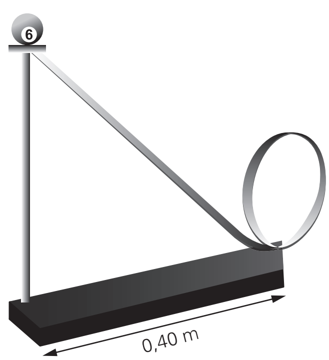
a) 7 m
b) 8 m
c) 9 m
d) 10 m
e) 11 m

8. Sistema Dom Bosco – A distância entre os centros de duas circunferências de raios respectivamente iguais a 15 cm e 8 cm é de 20 cm. Quanto à posição relativa das duas circunferências, conclui-se que:

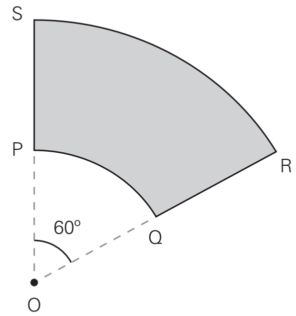
a) são tangentes internamente
b) são tangentes externamente
c) são secantes
d) são internas
e) são externas

9. UPE-SSA (adaptado) – Num experimento de física realizado em sala, foi solta do topo de uma rampa de 0,30 m de altura uma esfera que percorreu certa distância, fazendo um *looping* no final. Partindo do princípio de que o triângulo representado é retângulo, qual a distância total aproximada que essa bola irá percorrer do topo da rampa até dar uma volta completa no aro da circunferência cujo raio é de 0,10 m?

Adote $\pi = 3{,}14$



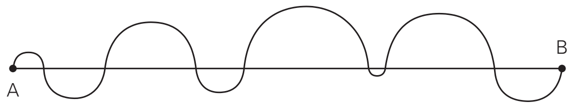
10. UFRGS – Considere o setor circular de raio 6 e ângulo central 60° da figura abaixo.



S, P e Q são pontos médios, respectivamente, de OS e OR, então o perímetro da região sombreada é

a) $\pi + 6$.
b) $2\pi + 6$.
c) $3\pi + 6$.
d) $\pi + 12$.
e) $3\pi + 12$.

11. Insper – A linha curva indicada na figura tem extremidades em A e B e é formada apenas por semicircunferências.



Se o comprimento de $\overline{AB}$ é igual a x, então o comprimento da linha curva será igual a

a) $\frac{8x}{\pi}$

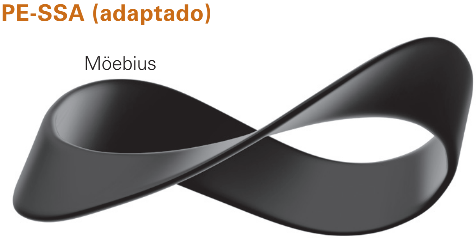
b) $\frac{16\pi}{x}$

c) $\frac{x\pi}{2}$

d) $\frac{x\pi}{4}$

e) $\frac{4x}{\pi}$

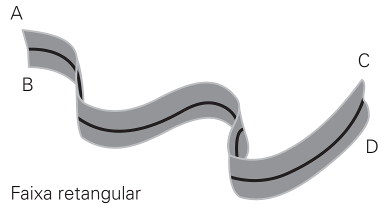
12. UPE-SSA (adaptado)

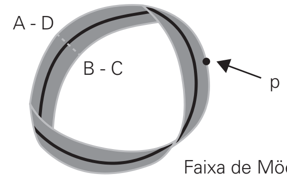


DOTTEDHIPPO/ISTOCK

A superfície acima, conhecida como faixa de Möebius, foi descoberta pelo matemático e astrônomo alemão August Ferdinand Möebius (1790-1868).

A faixa de Möebius pode ser obtida a partir de uma faixa retangular ABCD, dando-se meio giro numa de suas extremidades e juntando-se os pontos A com D e B com C, conforme as figuras a seguir.

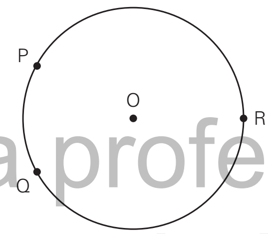




Caminhando na faixa de Möebius (segunda imagem), uma baratinha, sempre sobre a linha escura, saiu do ponto P e a ele retornou percorrendo uma distância de 7,2 m. Qual é a medida do raio da base da superfície cilíndrica obtida com a faixa retangular (primeira imagem) que gerou a faixa de Möebius? Adote $\pi = 3$.

13. CFTRJ – Na figura abaixo temos uma circunferência com centro em O. Os pontos P, Q e R são pontos sobre a circunferência, sendo PQ um lado de um hexágono regular inscrito nessa circunferência. Uma formiga estava sobre o ponto P e se deslocou sobre a circunferência no sentido horário, até o ponto Q, passando pelo ponto R uma única vez. Calcule a distância percorrida pela formiga, sabendo que PQ = 3 cm

Observação: A relação entre o comprimento da circunferência "C" com seu raio "r" é dada por: $C = 2\pi r$.

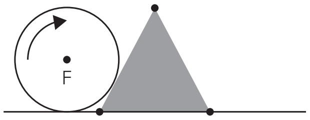


a) 6π cm
b) 5π cm
c) 3π cm
d) 2π cm

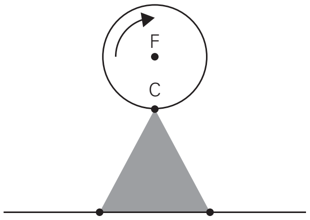
14. Unioeste – Sabe-se que uma das raízes da equação $x^2 - 7x - 44 = 0$ corresponde, em cm, ao comprimento do raio de uma circunferência. Qual o comprimento desta circunferência, considerando $\pi = 3{,}14$?

a) 69,08 cm.
b) 69,01 cm.
c) 69,80 cm.
d) 59,08 cm.
e) 58,09 cm.

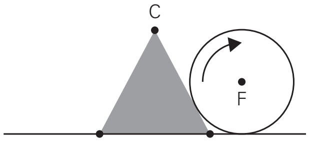
15. UERJ – Um tubo cilíndrico cuja base tem centro F e raio r rola sem deslizar sobre um obstáculo com a forma de um prisma triangular regular. As vistas das bases do cilindro e do prisma são mostradas em três etapas desse movimento, I, II e III, nas figuras a seguir.



I



II



III

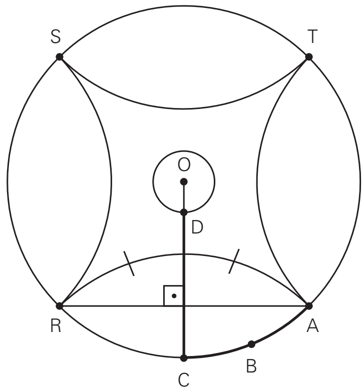
Admita que:

– as medidas do diâmetro do círculo de centro F e da altura do triângulo ABC são, respectivamente, iguais a $2\sqrt{3}$ decímetros;

– durante todo o percurso, o círculo e o triângulo sempre se tangenciam.

Determine o comprimento total, em decímetros, do caminho descrito pelo centro F do círculo que representa a base do cilindro.

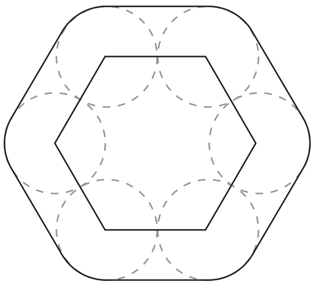
16. CFTMG – Maria Campos, a mocinha do Mercado Central, caminha pela Praça Raul Soares sobre o arco ABC e, depois, segue em linha reta até o ponto D. Um esquema simplificado da praça está desenhado a seguir, onde se apresentam duas circunferências de centro O, de raios 5 m e 42 m. Sabe-se que os pontos A, R, S e T são vértices de um quadrado. Considere $\pi = 3$.



O percurso realizado por Maria, em metros, encontra-se no intervalo

a) [55, 60[.
b) [60, 65[.
c) [65, 70[.
d) [70, 75[.

17. ITA – Seis circunferências de raio 5 cm são tangentes entre si duas a duas e seus centros são vértices de um hexágono regular, conforme a figura abaixo.



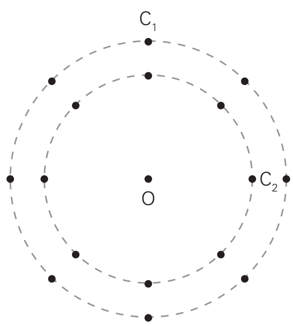
O comprimento de uma correia tensionada que envolve externamente as seis circunferências mede, em cm,

a) $18 + 3\pi$.
b) $30 + 10\pi$.
c) $18 + 6\pi$.
d) $60 + 10\pi$.
e) $36 + 6\pi$.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H7

A figura é uma representação simplificada do carrossel de um parque de diversões, visto de cima. Nessa representação, os cavalos estão identificados pelos pontos escuros, e ocupam circunferências de raios 3 m e 4 m, respectivamente, ambas centradas no ponto O. Em cada sessão de funcionamento, o carrossel efetua 10 voltas.



Quantos metros uma criança sentada no cavalo C_1 percorrerá a mais do que uma criança no cavalo C_2, em uma sessão? Use 3,0 como aproximação para π.

a) 55,5
b) 60,0
c) 175,5
d) 235,5
e) 240,0

19. Enem C2-H8

Um homem, determinado a melhorar sua saúde, resolveu andar diariamente numa praça circular que há em frente à sua casa. Todos os dias ele dá exatamente 15 voltas em torno da praça, que tem 50 m de raio.

Use 3 como aproximação para π.

Qual é a distância percorrida por esse homem em sua caminhada diária?

a) 0,30 km
b) 0,75 km
c) 1,50 km
d) 2,25 km
e) 4,50 km

20. Enem C1-H3

Um ciclista A usou uma bicicleta com rodas com diâmetros medindo 60 cm e percorreu, com ela, 10 km. Um ciclista B usou outra bicicleta com rodas cujos diâmetros mediam 40 cm e percorreu, com ela, 5 km.

Considere 3,14 como aproximação para π.

A relação entre o número de voltas efetuadas pelas rodas da bicicleta do ciclista A e o número de voltas efetuadas pelas rodas da bicicleta do ciclista B é dada por

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{4}{3}$

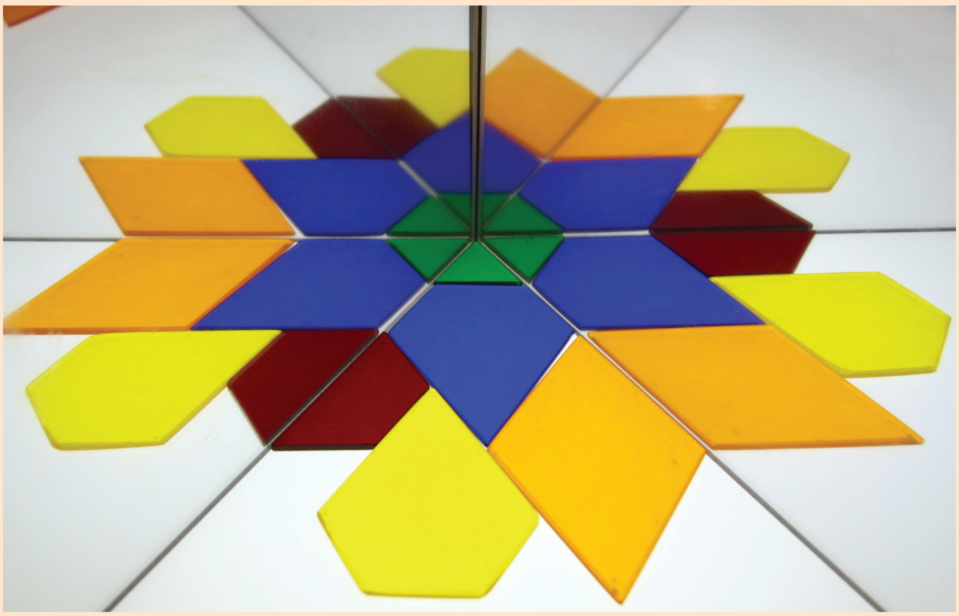
e) $\frac{3}{2}$

10 POLÍGONOS REGULARES

- Polígonos
- Soma dos ângulos internos e externos
- Número de diagonais
- Definição de polígono regular

HABILIDADES

- Compreender as características de um polígono regular.
- Usar a soma dos ângulos internos e externos de um polígono regular na resolução de problemas.
- Compreender a relação entre o número de lados do polígono e suas diagonais.



BRENDANHUNTER/ISTOCK

Com base nos triângulos, neste módulo vamos explorar polígonos em geral. Veremos como calcular a soma de seus ângulos internos e externos e seu número de diagonais. Finalmente, abordaremos algumas particularidades de polígonos regulares.

POLÍGONOS

Formalmente, dizemos que um polígono é uma linha poligonal fechada simples. No entanto, para compreendermos essa definição, teríamos de discutir o que é uma linha poligonal e o que significa ela ser fechada e simples. Porém, a ideia intuitiva que temos de polígono será suficiente para compreendermos os exercícios de vestibular sobre o tema.

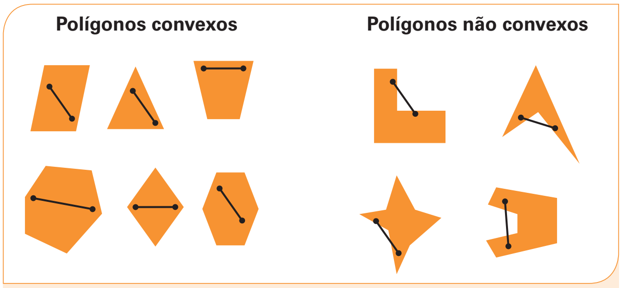
De maneira simples e intuitiva, um polígono é uma figura formada apenas por segmentos de reta que não se encontram em pontos que não sejam extremidades.

Polígonos

- são formas geométricas planas fechadas, cujos segmentos de reta não se cruzam.

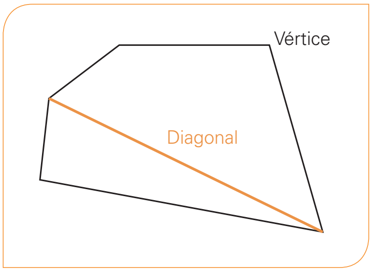
Polígonos: Não polígonos:

Dentre as figuras que se classificam como polígonos, vamos estudar os chamados *polígonos convexos*, cujos ângulos internos são todos menores que 180°.



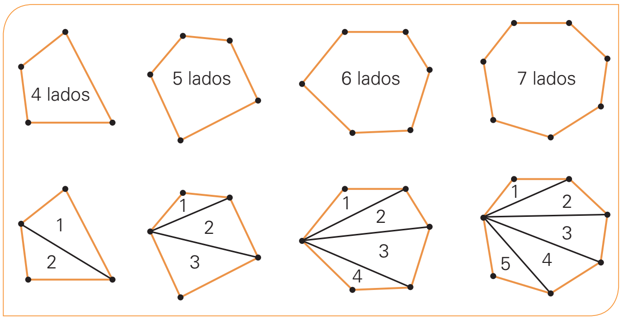
Um polígono é convexo se todo segmento, cuja as extremidades sejam internas ao polígono, também esteja totalmente contida dentro do polígono.

Assim como fizemos no estudo sobre triângulos, na maioria das vezes os vértices serão nomeados por letras maiúsculas; os lados, por minúsculas, e os ângulos, por letras minúsculas gregas. O segmento de reta que liga os vértices não consecutivos é chamado *diagonal do polígono.*



SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS

A ideia para calcularmos a soma dos ângulos internos é nos basearmos no triângulo, pois já sabemos que neste caso o resultado é 180°. Observe as figuras:



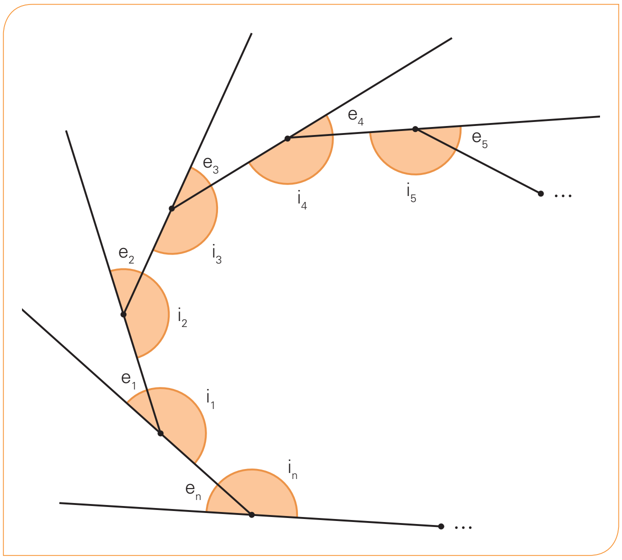
Há mais de uma forma de dividir um polígono em triângulos. Optamos por traçar todas as diagonais com base em um vértice escolhido. Dessa maneira, sempre formaremos dois triângulos a menos que o número de lados do polígono. Além disso, todos os ângulos internos dos triângulos ou são também ângulos internos do polígono original ou são parte de um ângulo interno do polígono original. Portanto, a soma dos ângulos internos do polígono será igual à soma dos ângulos internos de todos os triângulos.

Sendo S_i a soma dos ângulos internos do polígono, se este apresentar n lados, teremos n – 2 triângulos, cada um com soma dos ângulos internos igual a 180°. Então:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS

Para calcularmos a soma dos ângulos externos de um polígono qualquer, usaremos o seguinte dado: cada ângulo externo é suplementar ao seu ângulo interno correspondente.



Com base na figura anterior, podemos escrever:

$$i_1 + e_1 = 180°$$
$$i_2 + e_2 = 180°$$
$$i_3 + e_3 = 180°$$
$$i_4 + e_4 = 180°$$
$$\vdots$$
$$i_n + e_n = 180°$$

Cada i_k e e_k representa um par de ângulos interno e externo. Somando as equações membro a membro e reordenando as parcelas, teremos:

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_n + e_1 + e_2 + \ldots + e_n = n \cdot 180°$$

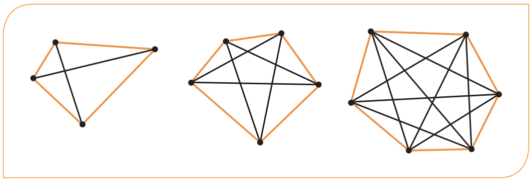
Sendo $i_1 + i_2 + \ldots + i_n$ a soma dos ângulos internos S_i que vimos anteriormente e $e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, a soma dos ângulos externos que estamos calculando, temos:

$$S_i + S_e = n \cdot 180°$$
$$(n - 2) \cdot 180° + S_e = n \cdot 180°$$
$$n \cdot 180° - 360° + S_e = n \cdot 180°$$
$$\therefore S_e = 360°$$

Assim obtemos um resultado surpreendente: a soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo não depende do número de lados do polígono. Tal soma é sempre igual a 360°.

NÚMERO DE DIAGONAIS

Vamos calcular agora o número de diagonais de um polígono convexo qualquer. Observe as figuras a seguir, nas quais temos alguns polígonos com todas as suas diagonais traçadas:



Perceba que, para cada polígono, o número de diagonais que sai de cada vértice é sempre três unidades menor que o número de lados do polígono. Isso acontece porque existem três situações em que a "ligação" entre vértices não forma diagonais. Duas dessas ligações são lados (vértice com seu antecessor e com seu sucessor). A outra é um ponto (vértice com ele mesmo).

Sendo assim, para um polígono de n lados, de cada vértice saem $n - 3$ diagonais. Logo, o total de diagonais será igual a n(n − 3). Porém, ainda falta um detalhe: nesse cálculo estaríamos contando cada diagonal duas vezes, pois todas elas "saem" de dois vértices. A diagonal AD sai dos vértices A e D. Sendo *d* o número de diagonais de um polígono convexo de n lados, temos:

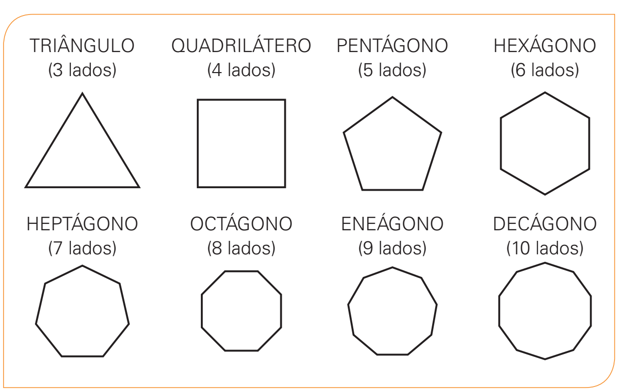
$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

DEFINIÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES

Entre os polígonos convexos, há os chamados polígonos regulares, os quais são assim em virtude de dois fatos:

1. Todos os lados têm a mesma medida.
2. Todos os ângulos internos apresentam a mesma medida.

Exemplos:



É importante observar que essas duas condições não são equivalentes, ou seja, uma não garante a outra. Essa equivalência só ocorre no caso do triângulo: se um triângulo tem três ângulos iguais, então ele obrigatoriamente tem lados iguais e vice-versa.

Para polígonos com mais de três lados, é possível que todos os lados sejam iguais e que os ângulos não o sejam. O contrário também se afirma: todos os ângulos podem ser iguais e os lados, diferentes.

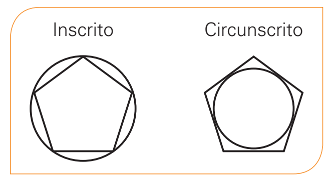
Dito isso, é importante termos em mente que o fato de o polígono ser regular facilita o cálculo de seus ângulos internos e externos.

A melhor estratégia é começarmos pelos ângulos externos, pois a soma deles não depende do número de lados do polígono. Logo, cada ângulo externo (e) mede $\hat{e} = \frac{360°}{n}$, em que n é o número de lados do polígono.

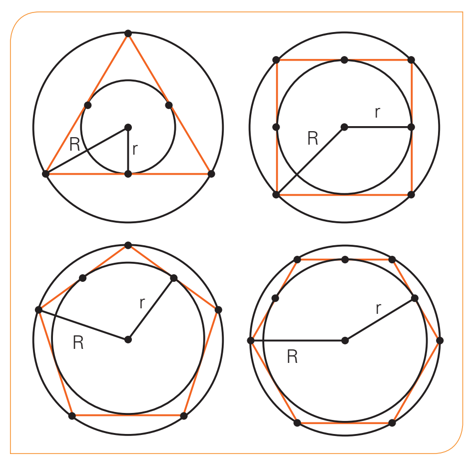
Com base nisso, calculamos a medida dos ângulos internos:

$\hat{i} = 180 - \hat{e}$

Para concluirmos, uma propriedade comum a todo polígono regular é que todos eles são inscritíveis e circunscritíveis a circunferências concêntricas.

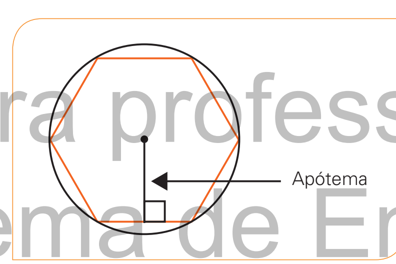


Em outras palavras: todo polígono regular admite uma circunferência inscrita a ele (tangenciando todos os seus lados internamente) e outra circunferência circunscrita a ele (passando por todos os seus vértices). Além disso, as duas circunferências têm o mesmo centro.



Na figura acima, R indica o raio da circunferência circunscrita, e r designa o raio da circunferência inscrita.

Ainda sobre polígonos regulares, define-se a distância do centro do polígono até um de seus lados como o *apótema* do polígono. Note que o apótema de um polígono regular é o raio da circunferência inscrita.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Calcule a soma dos ângulos internos de um decágono.

Resolução

Um decágono tem 10 lados. Sendo assim:

$S_{10} = (10 - 2) \cdot 180° = 1\,440°$

2. Sistema Dom Bosco – Qual polígono tem a soma dos ângulos internos igual a 1 800°?

Resolução

Neste caso, sabemos a soma dos ângulos internos e queremos descobrir o número de lados do polígono:

$S_n = (n - 2) \cdot 180°$

$1\,800° = (n - 2) \cdot 180°$

$n - 2 = 10 \quad \therefore \quad n = 12$

Ou seja, o polígono tem 12 lados (dodecágono).

3. Sistema Dom Bosco – Calcule o número de diagonais de um icoságono.

Resolução

Um icoságono tem 20 lados. Portanto:

$d = \dfrac{20 \cdot (20-3)}{2} = 10 \cdot 17 = 170$ diagonais.

4. Sistema Dom Bosco – Quantos lados tem um polígono regular com exatamente 35 diagonais?

Resolução

Sendo d = 35, temos:

$\dfrac{n(n-3)}{2} = 35$

$n\,(n - 3) = 70$

No entanto, $70 = 10 \cdot 7 = 10 \cdot (10 - 3)$. Portanto, n = 10 lados (decágono).

ROTEIRO DE AULA

POLÍGONOS

Convexo

Número de diagonais (d)

$d = \frac{n(n-3)}{2}$; *n* número de lados.

Soma dos ângulos externos S_e

$S_i = 180° \cdot (n - 2)$
n número de lados.

Soma dos ângulos internos S_i

$S_e = 360°$

Polígonos regulares

Ângulo externo (e)

$e = \frac{360°}{n}$;
n número de lados.

Ângulo interno (i)

$i = 180° - e$

Admitem circunferências inscrita e circunscrita.

O raio da inscrita também é chamado de apótema.

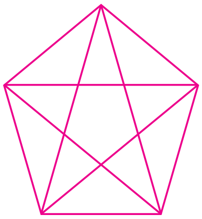
Não convexo

EXERCÍCIOS **DE APLICAÇÃO**

1. IFSul – Um objeto de decoração tem a forma de um pentágono regular, apresentando todas as suas diagonais. Sabe-se que cada diagonal foi pintada de uma cor diferente das demais. Então, qual é o número de cores diferentes que foram utilizadas na pintura de tais diagonais?

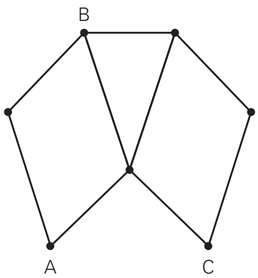
a) 5 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 9

Contando as diagonais, temos:



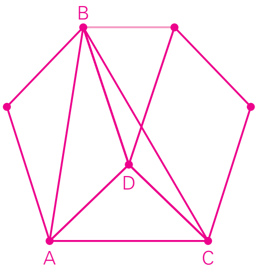
Cinco diagonais.

2. FGV – A figura abaixo mostra dois quadrados e um triângulo equilátero entre eles.



Determine os ângulos internos do triângulo ABC.

Traçando os triângulos ABD, ACD e BCD, temos a seguinte imagem:



Os triângulos ABD, ACD e BCD são isósceles. Então:

$B\hat{A}D = A\hat{B}D = 45°$

$ADC = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$

$DAC = DCA = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$

$DBC = 60° + 90° = 150°$

Assim:

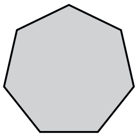
$A\hat{B}C = 15° + 45° = 60°$

$B\hat{A}C = 45° + 30° = 75°$

$B\hat{C}A = 15° + 30° = 45°$

3. IFSP C2-H8

Ana estava participando de uma gincana na escola em que estuda e uma das questões que ela tinha de responder era: "Quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos do polígono regular da figura?":



Para responder a essa pergunta, ela lembrou que seu professor ensinou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, e que todo polígono pode ser decomposto em um número mínimo de triângulos. Assim, Ana respondeu corretamente à pergunta dizendo:

a) 720°
b) 900°
c) 540°
d) 1 080°
e) 630°

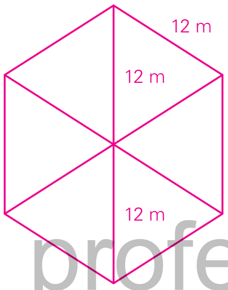
A figura apresentada é um polígono regular, um heptágono. Então, a medida dos ângulos é dada por:

$180° \cdot (7 - 2) = 900°$.

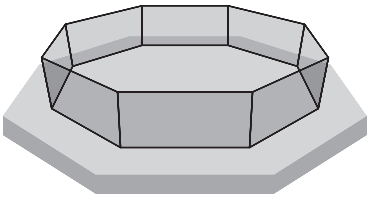
4. Ifal – Um pai possui um terreno no formato de um hexágono regular com lado 12 m. Ele pretende construir um muro dividindo o terreno em dois trapézios de mesma área, um com frente para uma rua e outro para a outra, que serão dados para seus dois filhos. Qual o comprimento do muro?

a) 12 m
b) 18 m
c) 24 m
d) 30 m
e) 36 m

Um hexágono regular tem lado igual ao raio da circunferência à qual está inscrito. Logo, o comprimento do muro é igual ao diâmetro, ou seja, 24 metros. Assim, podemos desenhar o hexágono:



5. Sistema Dom Bosco – Um dos esportes que mais têm atraído o público nos últimos anos é o MMA, em que as lutas são disputadas dentro de um ringue com a forma de um octógono regular. Segundo seu criador, Rorion Gracie, um dos fatores que levou à escolha deste formato de ringue foi o fato de seus ângulos internos evitarem que os lutadores fiquem presos nos cantos.



Quanto mede cada um dos ângulos internos de um octógono regular?

Como o octógono é regular, seu ângulo externo vale:

$\hat{e} = \frac{360°}{8} = 45°$

Assim, seu ângulo interno será:

$\hat{i} = 180° - \hat{e} \rightarrow \hat{i} = 135°$

6. Imed – O total de anagramas da palavra LÓGICA é exatamente igual à medida, em graus, da soma dos ângulos internos de um polígono regular. Considerando que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada pela expressão $S = (n - 2) \cdot 180°$, onde n corresponde ao número de lados, pode-se afirmar que esse polígono é um:

a) Triângulo.
b) Quadrado.
c) Pentágono.
d) Hexágono.
e) Heptágono.

O número de anagramas possíveis da palavra LÓGICA é igual à permutação de 6:

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

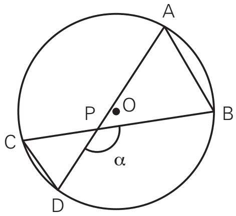
A soma dos ângulos internos de um polígono regular se dá pela fórmula $S = (n - 2) \cdot 180$, em que n é o número de lado do polígono. Logo, se $S = 720$, tem-se:

$S = 720 = (n - 2) \cdot 180 \rightarrow n = 6$

O polígono regular de 6 lados chama-se hexágono.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. FGV – As cordas $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência de centro O são, respectivamente, lados de polígonos regulares de 6 e 10 lados inscritos nessa circunferência. Na mesma circunferência, as cordas AD e BC se intersectam no ponto P, conforme indica a figura a seguir.



A medida do ângulo $B\hat{P}D$, indicado na figura por α, é igual a

a) 120°
b) 124°
c) 128°
d) 130°
e) 132°

8. Sistema Dom Bosco – Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 125° cada um e os demais ângulos internos medem 165°. O número de lados do polígono é:

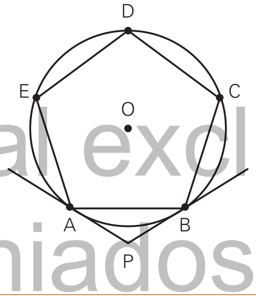
a) 6 **b)** 7 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 16

9. Sistema Dom Bosco – Um polígono regular tem 4 lados a mais que outro, e o seu ângulo interno excede em 15° o outro. Quais são esses polígonos?

10. UTFPR – O número de diagonais de um polígono regular cujo ângulo externo mede 18° é:

a) 5 **c)** 14 **e)** 275
b) 170 **d)** 135

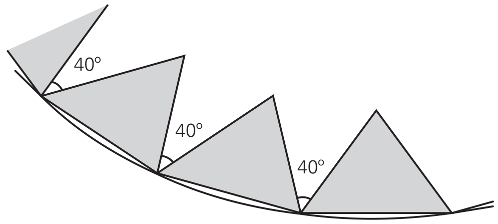
11. CFTMG – Na figura a seguir, o pentágono regular está inscrito numa circunferência de centro O e as semirretas $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência nos pontos A e B, respectivamente.



A medida do ângulo $A\hat{P}B$ em graus, é igual a

a) 36 **b)** 72 **c)** 108 **d)** 154

12. UFRGS – Um desenhista foi interrompido durante a realização de um trabalho, e seu desenho ficou como na figura abaixo.



Se o desenho estivesse completo, ele seria um polígono regular composto por triângulos equiláteros não sobrepostos, com dois de seus vértices sobre um círculo, e formando um ângulo de 40°, como indicado na figura. Quando a figura estiver completa, o número de triângulos equiláteros com dois de seus vértices sobre o círculo é

a) 10 **b)** 12 **c)** 14 **d)** 16 **e)** 18

13. CP2 – Juliana recortou de uma tira de cartolina retangular seis triângulos retângulos idênticos, em que um dos catetos mede 3 cm (figura 1). Com esses triângulos, fez uma composição que tem dois hexágonos regulares (figura 2).

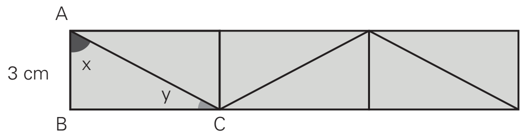


figura 1

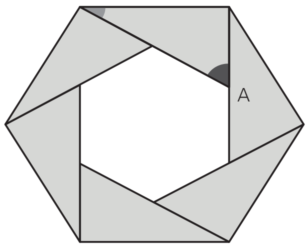


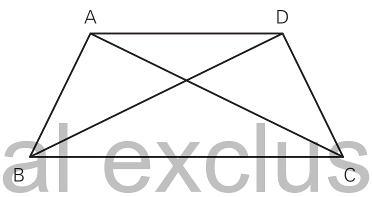
figura 2

a) Qual é a medida do ângulo interno do hexágono menor?

b) Quais são as medidas **x** e **y** dos ângulos dos triângulos retângulos?

c) Qual é a medida do perímetro do hexágono menor?

14. Sistema Dom Bosco – A figura mostra um quadrilátero ABCD com suas diagonais AC e BD. Sabendo que $B\hat{A}C = B\hat{D}C = 90°$ e que $A\hat{C}B = 33°$, a medida do ângulo ADB é:

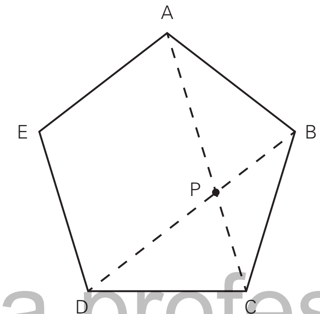


a) 22°
b) 33°
c) 44°
d) 55°
e) 66°

15. UTFPR – Os ângulos externos de um polígono regular medem 15°. O número de diagonais desse polígono é:

a) 56
b) 24
c) 252
d) 128
e) 168

16. AFA – A figura a seguir é um pentágono regular de lado 2 cm.



a) $1 + \sqrt{5}$
b) $-1 + \sqrt{5}$
c) $2 + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
d) $2\sqrt{5} - 1$

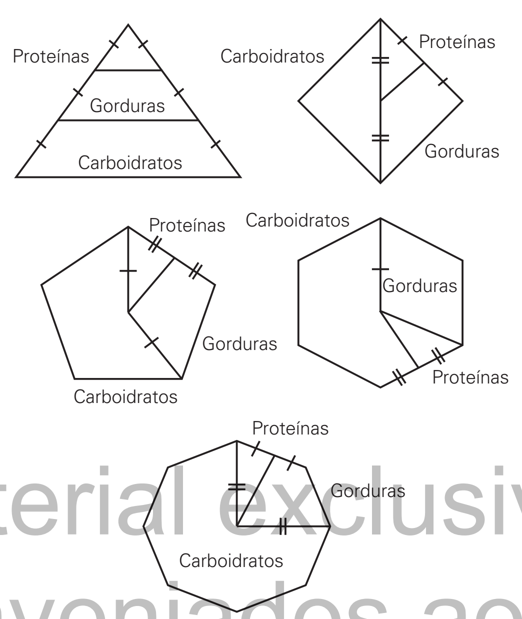
17. IFSul – Sabe-se que a medida de cada ângulo interno de um polígono regular é 144°. Então, qual é o número de diagonais de tal polígono?

a) 10
b) 14
c) 35
d) 72

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H8

Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:

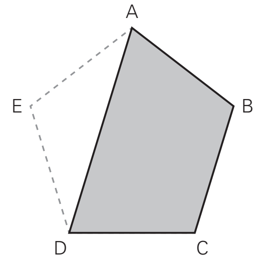


Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o

a) triângulo.
b) losango.
c) pentágono.
d) hexágono.
e) octógono.

19. Enem C2-H8

Um gesseiro que trabalhava na reforma de uma casa lidava com placas de gesso com formato de pentágono regular quando percebeu que uma peça estava quebrada, faltando uma parte triangular, conforme mostra a figura.



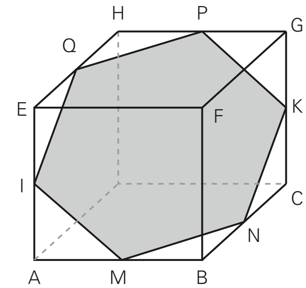
Para recompor a peça, ele precisou refazer a parte triangular que faltava e, para isso, anotou as medidas dos ângulos $x = E\hat{A}D$, $y = E\hat{D}A$ e $z = A\hat{E}D$ do triângulo ADE.

As medidas x, y e z, em graus, desses ângulos são, respectivamente,

a) 18, 18 e 108
b) 24, 48 e 108
c) 36, 36 e 108
d) 54, 54 e 72
e) 60, 60 e 60

20. Enem C2-H7

Um artista utilizou uma caixa cúbica transparente para a confecção de sua obra, que consistiu em construir um polígono IMNKPQ no formato de um hexágono regular, disposto no interior da caixa. Os vértices desse polígono estão situados em pontos médios de arestas da caixa. Um esboço da sua obra pode ser visto na figura.



Considerando as diagonais do hexágono, distintas de IK, quantas têm o mesmo comprimento de IK?

a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) 9

11 PONTOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO

- Cevianas notáveis: mediana, bissetriz e altura
- Mediatriz
- Pontos notáveis: baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro
- Caso particular: triângulo equilátero

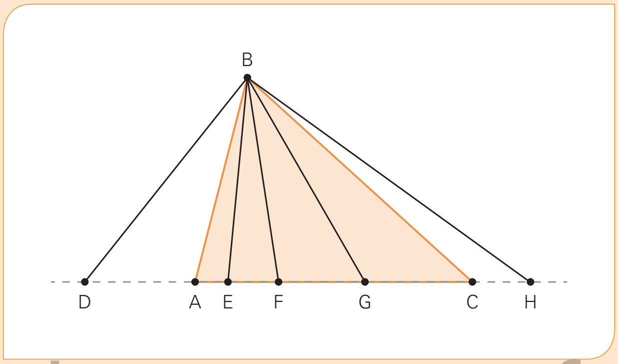
HABILIDADES

- Compreender e aplicar as definições de mediana, bissetriz, altura e mediatriz.
- Diferenciar os pontos notáveis do triângulo.
- Usar a propriedade do baricentro e as características do incentro e do circuncentro.


TVERKHOVINETS/ DREAMSTIME

Museu do Louvre – Paris, França.

No estudo sobre triângulos, encontramos a seguinte definição: um segmento que saia do vértice do triângulo e seja traçado até encontrar o lado oposto desse triângulo (ou sua reta suporte) é chamado de **ceviana**.



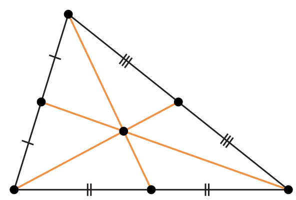
Na figura, os segmentos BD, BE, BF, BG e BH são cevianas do triângulo ABC em relação ao lado AC.

Existem algumas cevianas especiais. São elas: medianas, bissetrizes e alturas. Há também as mediatrizes, que em geral não são cevianas, mas têm uma propriedade semelhante. Esse será o conteúdo deste módulo.

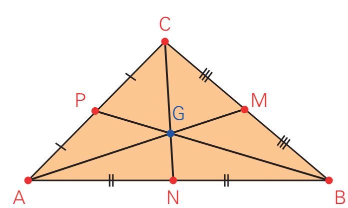
Cevianas notáveis

MEDIANAS E BARICENTRO

A mediana de um triângulo é o segmento que sai de seu vértice e vai até o ponto médio do lado oposto. Um triângulo, portanto, tem três medianas.



O ponto de encontro das três medianas de um triângulo é chamado **baricentro**, normalmente representado pela letra G.

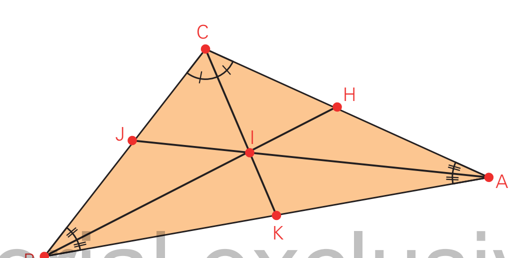


O baricentro apresenta a seguinte propriedade: ele divide as medianas na razão 2:1, ou seja,

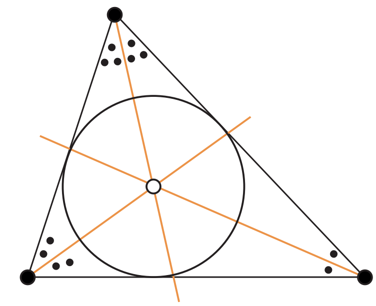
$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GP}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GN}} = 2$$

BISSETRIZES E INCENTRO

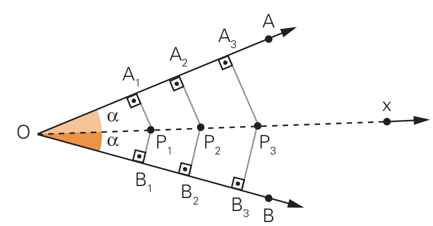
Como já vimos em módulos anteriores, a bissetriz é a semirreta que divide um ângulo na metade. Agora vamos considerar apenas um segmento da bissetriz, que vai do vértice de cada ângulo até o lado oposto. Um triângulo tem três bissetrizes internas.



O ponto de encontro das três bissetrizes de um triângulo é chamado **incentro**, normalmente representado pela letra I.



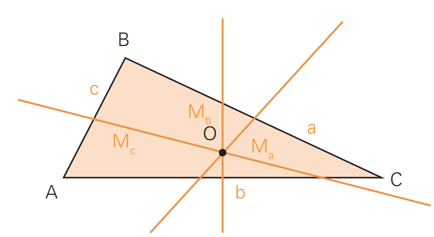
O incentro apresenta a seguinte propriedade: é o centro da circunferência inscrita ao triângulo. Isso acontece porque é possível demonstrar que qualquer ponto sobre uma bissetriz é equidistante aos lados do ângulo.



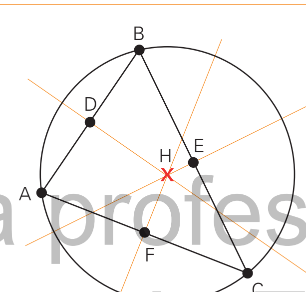
$P_1A_1 = P_1B_1$
$P_2A_2 = P_2B_2$
$P_3A_3 = P_3B_3$
...

MEDIATRIZES E CIRCUNCENTRO

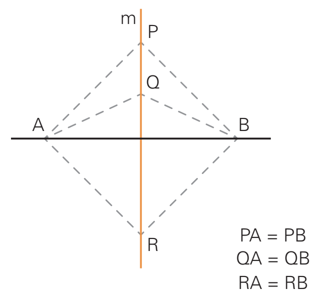
A mediatriz não é uma ceviana. A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a esse segmento AB que passa pelo seu ponto médio. Como um triângulo é formado por três segmentos, podemos traçar três mediatrizes em qualquer triângulo.



O ponto de encontro das três mediatrizes de um triângulo é chamado **circuncentro**.

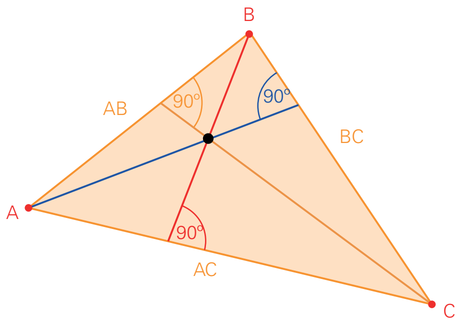


O circuncentro tem a seguinte propriedade: é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo. Isso acontece porque é possível demonstrar que qualquer ponto sobre uma mediatriz é equidistante aos extremos do segmento sobre o qual a mediatriz foi traçada.



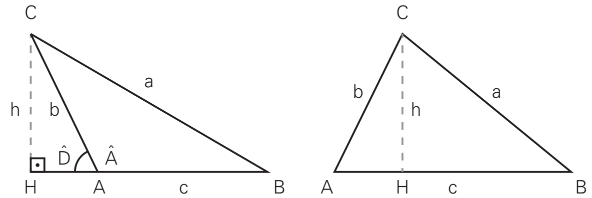
ALTURAS E ORTOCENTRO

A altura de um triângulo é o segmento que sai de um de seus vértices e vai perpendicularmente até a reta suporte do lado oposto. Um triângulo, portanto, tem três alturas.



O ponto de encontro das três alturas de um triângulo é chamado **ortocentro**.

Diferentemente de medianas, bissetrizes e mediatrizes, a altura de um triângulo pode ser externa ao triângulo quando ele for obtusângulo.

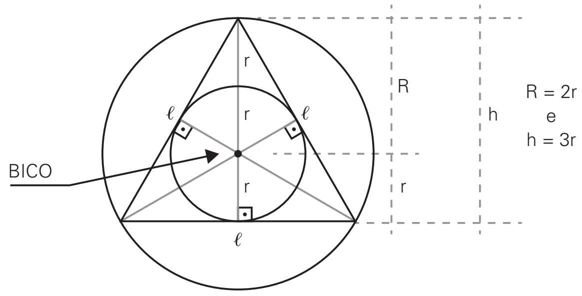


No triângulo acutângulo, todas as alturas são internas ao triângulo. No caso dos obtusângulos, duas delas são externas. E nos triângulos retângulos?

Tal fato tem consequências para o ortocentro: nos triângulos acutângulos, o ortocentro é interno ao triângulo; nos triângulos obtusângulos, ele é externo ao triângulo; nos triângulos retângulos, o ortocentro está exatamente sobre o vértice do ângulo reto.

Caso do triângulo equilátero

No triângulo equilátero, medianas, bissetrizes, mediatrizes e alturas relativas a cada vértice coincidem. Isso faz que os pontos que estamos estudando também coincidam: **b**aricentro, **i**ncentro, **c**ircuncentro e **o**rtocentro são um único ponto. Juntando essas iniciais, formamos o **bico**, um acrônimo que ajuda na memorização.



Triângulo equilátero.

Vale ressaltar que, sendo r o raio da inscrita e R o raio da circunscrita, temos $R = 2r$ e $h = 3r$. Além disso, o triângulo equilátero é um polígono regular. Sendo assim, r é seu apótema.

PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

Baricentro

Encontro das medianas.

Propriedade: O baricentro divide as medianas na razão 2:1.

Incentro

Encontro das bissetrizes.

Propriedade: O incentro é o centro da circunferência ao triângulo.

Circuncentro

Encontro das mediatrizes.

Propriedade: O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Ortocentro

Encontro das alturas.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Col. Naval – Analise as afirmativas a seguir.

I. Sejam a, b e c os lados de um triângulo, com $c > b \geqslant a$. Pode-se afirmar que $c^2 = a^2 + b^2$ se, e somente se, o triângulo for retângulo.

II. Se um triângulo é retângulo, então as bissetrizes internas dos ângulos agudos formam entre si um ângulo de 45° ou 135°.

III. O centro de um círculo circunscrito a um triângulo retângulo está sobre um dos catetos.

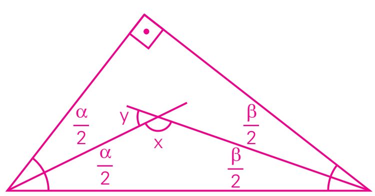
IV. O baricentro de um triângulo retângulo é equidistante dos lados do triângulo.

Assinale a opção correta.

a) Somente I e II são verdadeiras.
b) Somente II e III são verdadeiras.
c) Somente I e IV são verdadeiras.
d) Somente I, II e IV são verdadeiras.
e) As afirmativas I, II, III e IV são verdadeiras.

[I] Verdadeira, pois todo triângulo em que se aplica o teorema de Pitágoras é retângulo.

[II] Verdadeira. Sejam α e β as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo e x e y as medidas dos ângulos formados por suas bissetrizes, a figura que representa a situação é esta:



$x + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180° \rightarrow 180° - \frac{\alpha + \beta}{2} \rightarrow$

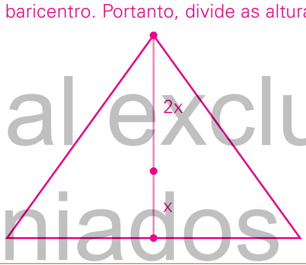
$\rightarrow x = 180° - 45° \rightarrow x = 135°$ e $y = 45°$

[III] Falsa. O centro do círculo circunscrito em um triângulo retângulo é o circuncentro, que é o ponto médio da hipotenusa desse triângulo.

[IV] Falsa. O ponto que equidista dos lados é o incentro.

2. Puc-Rio – Seja ABC um triângulo equilátero de lado 1 cm em que O é o ponto de encontro das alturas. Quando mede o segmento AO?

Como o triângulo é equilátero, o ponto de encontro entre as alturas que corresponde a todos os quatro pontos notáveis de um triângulo em particular é o baricentro. Portanto, divide as alturas na razão 2:1.

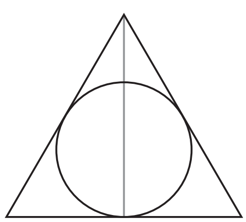


Lembrando que a altura de um triângulo equilátero de lado ℓ é $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, temos que o segmento AO mede $\frac{2}{3}$ da altura, ou seja,

$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

3. Unifor C2-H7

Na saga de um famoso bruxinho do cinema, havia um conjunto de objetos que, juntos, formavam as chamadas "relíquias da morte". Tais objetos eram representados pelo símbolo abaixo, no qual temos um triângulo equilátero, um círculo com centro no incentro do triângulo e um segmento de reta contendo um vértice e o incentro.



Se o raio da circunferência é 2 cm, podemos afirmar que o perímetro do triângulo é

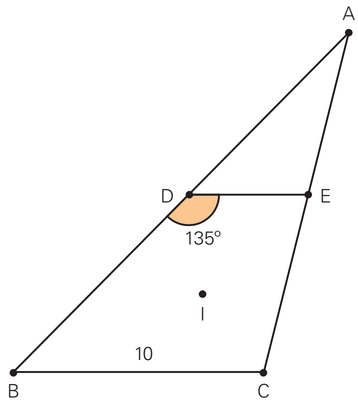
a) $2\sqrt{3}$ cm
b) 6 cm
c) $4\sqrt{3}$ cm
d) 12 cm
e) $12\sqrt{3}$ cm

Como o incentro é também baricentro (G) e ortocentro, pois o triângulo é equilátero, aplicando a propriedade do baricentro tem-se que a distância de G ao vértice do triângulo que contém o segmento (x) é o dobro do raio (r), que é a distância de G ao lado oposto a esse vértice. Ainda, r = 2 cm → x = 4 cm. Logo, o segmento de reta da figura que contém G mede (2 + 4) = 6 cm.

Lembrando que esse segmento é também altura e que a altura de um triângulo equilátero (h) de lado L é $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$, temos:

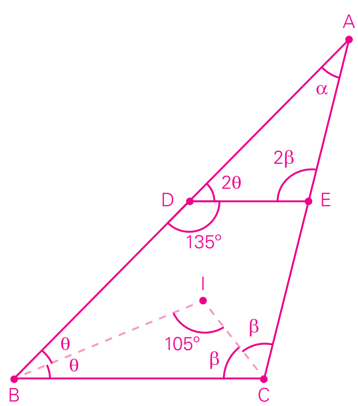
$6 = \frac{L\sqrt{3}}{2} \therefore L = 4\sqrt{3}$. Portanto, o perímetro será $12\sqrt{3}$ cm.

4. Udesc (adaptado) – Observe a figura.



Sabendo que os segmentos BC e DE são paralelos, que o ponto I é incentro do triângulo ABC e que o ângulo BÎC é igual a 105°, então o segmento qual a medida do ângulo DÊC?

a) 45°
b) 75°
c) 80°
d) 100°
e) 105°



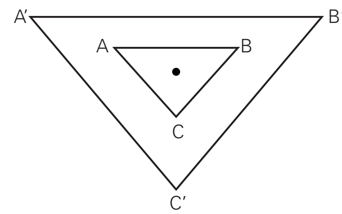
A medida do ângulo DÊC é x. Observando a figura, como o ponto I é o incentro, temos que BI e CI são bissetrizes. Então, temos que $\theta + \beta = 75°$, pois a soma dos ângulos internos do triângulo BIC é 180°. Além disso, em virtude do paralelismo, $2\theta = 45°$ (I) e $2\beta = 180° - x$ (II). Fazendo (I) + (II):

$2\theta + 2\beta = 45° + 180° - x$

$2(\theta + \beta) = 225° - x$

$2 \cdot 75° = 225° - x \quad \therefore \quad x = 75°$

5. UFC – Na figura a seguir, temos dois triângulos equiláteros, ABC e A'B'C', que possuem o mesmo baricentro, tais que AB // A'B', AC // A'C' e BC // B'C'. Se a medida dos lados de ABC é igual a $3\sqrt{3}$ cm e a distância entre os lados paralelos mede 2 cm, então a medida das alturas de A'B'C' é igual a:



a) 11,5 cm
b) 10,5 cm
c) 9,5 cm
d) 8,5 cm
e) 7,5 cm

Lembrando que a altura do triângulo equilátero de lado L vale $h = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$, temos $h = 3\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$ cm.

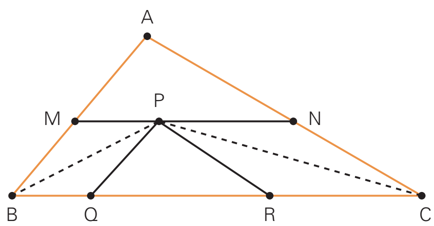
Como a altura do triângulo equilátero é também mediana e sendo x a distância do baricentro ao lado AB e yt a distância do baricentro ao vértice C, temos: $x + y = 4{,}5$ (I).

Aplicando a propriedade do baricentro no triângulo ABC, temos $y = 2x$ (II).

Substituindo (II) em (I): $x = 1{,}5$ cm $\rightarrow y = 3$ cm.

Como AB e A'B' distam 2 cm, a distância do baricentro ao lado A'B' é $(2 + 1{,}5) = 3{,}5$ cm. Aplicando, novamente, a propriedade do baricentro, temos que a distância do baricentro ao vértice C' é 7 cm. Logo, a altura do triângulo A'B'C' é $(3{,}5 + 7) = 10{,}5$ cm.

6. UFPI – No triângulo ABC (figura abaixo), os lados AB, AC e BC medem, respectivamente, 5 cm, 7 cm e 9 cm. Se P é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos B e C e PQ//MB, PR//NC e MN//BC, a razão entre os perímetros dos triângulos AMN e PQR é:



a) $\frac{10}{9}$

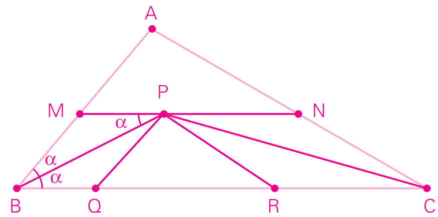
b) $\frac{9}{8}$

c) $\frac{7}{6}$

d) $\frac{4}{3}$

e) $\frac{7}{5}$

Com as informações do enunciado (bissetrizes e paralelismos), concluímos que os triângulos BMP e BQP são isósceles e congruentes (veja a figura abaixo). O mesmo vale para os triângulos PNC e PCR.



Chamando as medidas do segmento MP = a e PN = b, teremos:

I) AM = 5 – a, AN = 7 – b e MN = a + b. Portanto, o perímetro do triângulo AMN vale 12.

II) PQ = a, PR = b e QR = 9 – (a + b). Assim, o perímetro do triângulo PQR vale 9.

Portanto, a razão pedida vale $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Sistema Dom Bosco – A distância do baricentro ao ortocentro de um triângulo cuja hipotenusa mede 42 cm é:

a) 7 cm

b) 10 cm

c) 14 cm

d) 17 cm

e) 20 cm

8. Ifal – Considere um triângulo ABC cuja base $\overline{AB}$ mede 27 dm. Traçando-se uma reta "t", paralela à base, ela determina sobre os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, os pontos D e E. Sabe-se que $\overline{DC}$ mede 14 dm, $\overline{BE}$ mede 8 dm e $\overline{DE}$ mede 18 dm. Assinale a alternativa verdadeira.

a) O triângulo ABC é equilátero; logo, ele pode ser inscrito em uma circunferência.

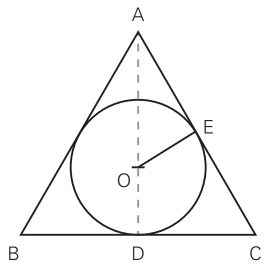
b) O triângulo ABC é um polígono regular; logo, ele pode ser inscrito em uma circunferência.

c) O triângulo ABC é escaleno, mesmo assim ele pode ser inscrito em uma circunferência.

d) O raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC mede $9\sqrt{3}$ dm.

e) O apótema da circunferência circunscrita ao triângulo ABC mede $4{,}5\sqrt{3}$ dm.

9. PUC Minas – Na figura, o triângulo ABC é equilátero e está circunscrito ao círculo de centro 0 e raio 2 cm. AD é altura do triângulo. Sendo E ponto de tangência, a medida de AE, em centímetros, é:



a) $2\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{5}$

c) 3

d) 5

e) $\sqrt{26}$

10. Unitau – O segmento da perpendicular traçada de um vértice de um triângulo à reta suporte do lado oposto é denominado:

a) mediana.

b) mediatriz.

c) bissetriz.

d) altura.

e) base.

11. ESPM – Num mapa, uma estrada retilínea passa sucessivamente pelas cidades A, B e C, e uma cidade D distante 120 km de A está localizada de tal forma que o ângulo $D\hat{A}B$ mede 36°. Um viajante fez o trajeto AB, BD e DC percorrendo em cada trecho a mesma distância. Se ele tivesse ido diretamente de A até C teria percorrido uma distância de:

a) 120 km

b) $60\sqrt{3}$

c) $(120 \cdot \cos 36°)$ km

d) $\dfrac{120}{\cos 36°}$ km

e) 140 km

12. Sistema Dom Bosco – Determine a medida do raio de uma circunferência inscrita num triângulo equilátero, sabendo que o raio da circunferência circunscrita mede 18 cm.

a) 5 cm

b) 6 cm

c) 7 cm

d) 8 cm

e) 9 cm

13. UniRV – Com relação aos pontos notáveis de um triângulo, assinale V (verdadeiro) ou F (falso) para as alternativas.

( ) O incentro é o ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo, representando o centro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

( ) O baricentro é o ponto de encontro das medianas de um triângulo.

( ) O circuncentro é o ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo, representando o centro da circunferência inscrita nesse triângulo.

( ) O ortocentro é o ponto de encontro das alturas de um triângulo.

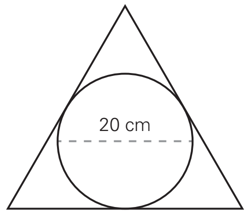
14. Sistema Dom Bosco – Num triângulo ABC, $\hat{A} = 20°$, sendo O o incentro. Então, $B\hat{O}C$ é:

a) 80°
b) 100°
c) 90°
d) 110°

15. Unitau – A medida do apótema de um triângulo equilátero, inscrito numa circunferência na qual também se encontra inscrito um quadrado cuja diagonal mede $8\sqrt{2}$ m, é

a) $4\sqrt{2}$ m
b) $2\sqrt{2}$ m
c) $\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ m
d) $\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ m
e) $6\sqrt{2}$ m

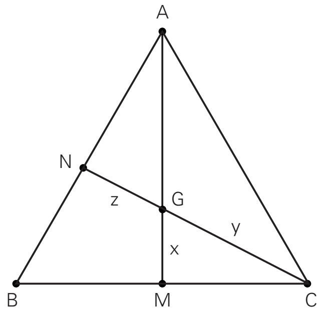
16. Unifacs – Para imobilizar a cabeça de um paciente, foi usada uma estrutura em formato de triângulo equilátero, cujos lados se encaixam perfeitamente na cabeça numa posição em que o corte transversal dela é um disco de 20 cm de diâmetro, como na figura.



O perímetro dessa estrutura mede, em cm,

a) $20\sqrt{2}$
b) $20\sqrt{3}$
c) $40\sqrt{2}$
d) $60\sqrt{2}$
e) $60\sqrt{3}$

17. Ifal – No triângulo ABC, a seguir, AM e CN são medianas que se interceptam em G. Sendo AG = 10 cm e CN = 18 cm, calcule x, y e z.



ESTUDO PARA O ENEM

18. Unesp C2-H6

Um aluno precisa localizar o centro de uma moeda circular e, para tanto, dispõe apenas de um lápis, de uma folha de papel, de uma régua não graduada, de um compasso e da moeda.

Nessas condições, o número mínimo de pontos distintos necessários de serem marcados na circunferência descrita pela moeda para localizar seu centro é

a) 3.
b) 2.
c) 4.
d) 1.
e) 5.

19. Uniube C2-H7

Devido à escassez de água enfrentada nos dias atuais, uma professora de Ciências pediu para a turma construir uma maquete de um sistema de abastecimento de água, como forma de conscientização e de promover a discussão sobre o tema. Os alunos de um determinado grupo, para começar o trabalho, marcaram em uma folha de cartolina os pontos ABC, formando um triângulo equilátero de lado 1 cm em que O é o ponto de encontro das alturas. Esse triângulo será o ponto de referência para outras marcações. Sabendo disso, responda: O segmento AO mede:

a) $AO = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm

b) $AO = \frac{2\sqrt{3}}{4}$ cm

c) $AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

d) $AO = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

e) $AO = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

20. Uneb C2-H8

Nos modelos de estruturas moleculares de alguns compostos químicos, os átomos se colocam como vértices de poliedros ou de polígonos.

No modelo molecular do composto químico SO_3 (trióxido de enxofre), por exemplo, os três átomos de oxigênio (O) formam um triângulo equilátero e o átomo de enxofre (S) se localiza no centro desse triângulo. Nesse exemplo, a distância entre os átomos de oxigênio é de 248 picômetros (pm), sendo que $1pm = 10^{-12}$ m. A distância entre o núcleo de enxofre (S) e qualquer um dos núcleos de oxigênio é chamada *comprimento da ligação*.

Considerando-se essas informações, pode-se afirmar que o comprimento da ligação do SO_3 é igual a

a) $\frac{248\sqrt{3}}{3}$ pm

b) $\frac{164\sqrt{3}}{3}$ pm

c) $\frac{124\sqrt{3}}{3}$ pm

d) $\frac{82\sqrt{3}}{3}$ pm

e) $\frac{62\sqrt{3}}{3}$ pm

12

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS (I)

- Definição e elementos
- Classificação dos quadriláteros convexos
- Propriedades dos paralelogramos

HABILIDADES

- Identificar pontos notáveis do triângulo.
- Aplicar propriedades dos pontos notáveis na resolução de problemas.
- Identificar diferentes tipos de quadriláteros.
- Analisar propriedades dos quadriláteros na construção de argumentos.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos para solução de problemas cotidianos.

SIREANKO/ISTOCK

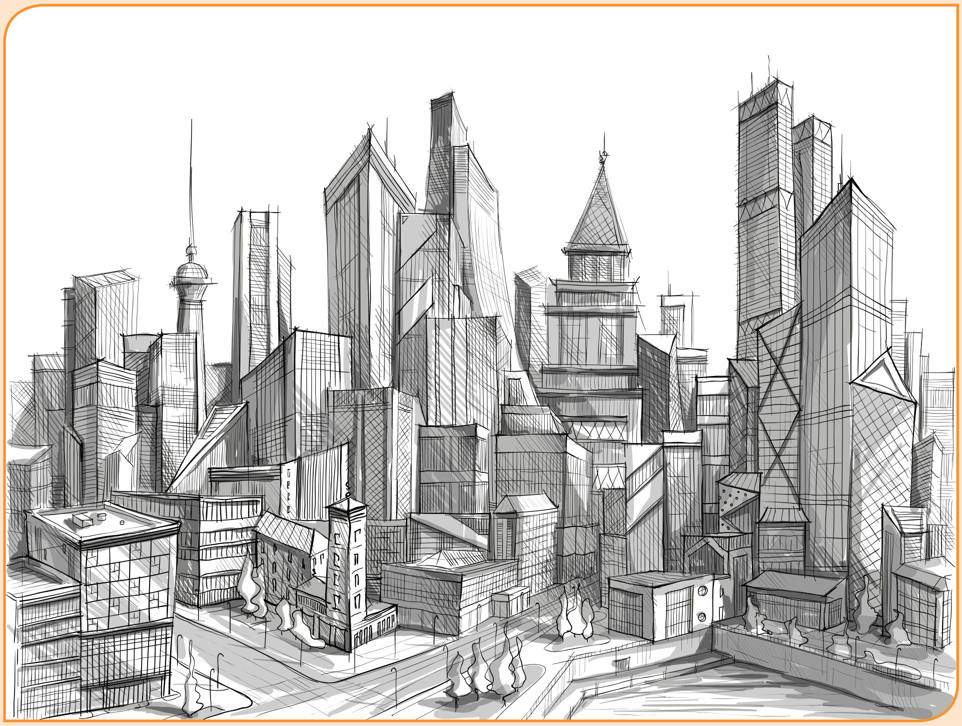


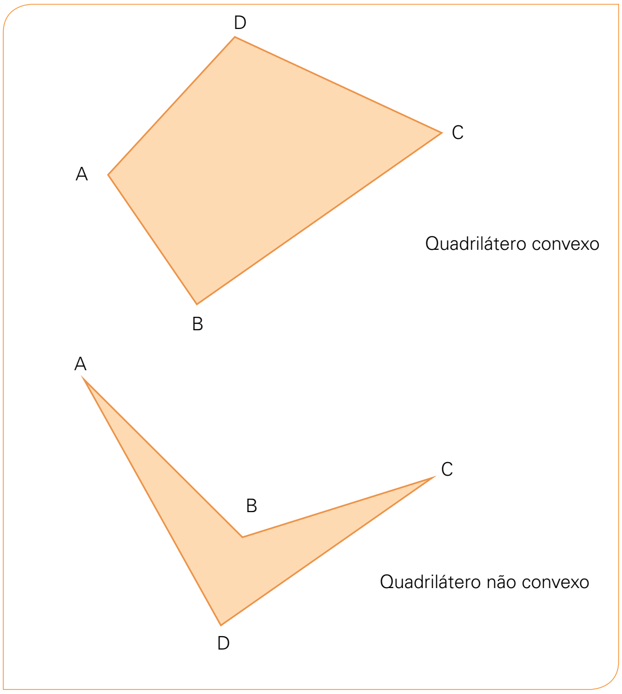
Imagem de uma metrópole na qual se observam muitos quadriláteros.

Viver em uma metrópole e poder usufruir de tudo o que a vida moderna nos oferece só é viável graças aos estudos e às pesquisas de grandes pensadores e pensadoras de diferentes áreas do conhecimento, os quais contribuíram direta ou indiretamente para que isso fosse possível. Com um olhar mais arquitetônico para a figura acima, podemos identificar inúmeras figuras geométricas. Neste módulo, conheceremos um pouco mais sobre os quadriláteros, tão presentes em construções antigas e atuais.

DEFINIÇÃO

Um quadrilátero pode ser classificado de maneira objetiva como um polígono de quatro lados. Assim, por definição, temos:

> Sendo A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos, sem que existam três colineares, se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ interceptam apenas nas extremidades, a reunião desses quatro elementos é um quadrilátero.



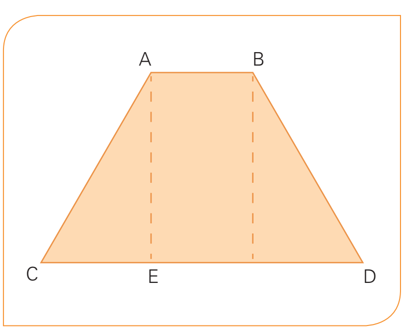
São elementos de um quadrilátero convexo **ABCD**:

- Vértice: pontos, A, B, C e D;
- Lados: segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$;
- Ângulos internos: $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}A$, $D\hat{A}B$;
- Ângulos externos: são os ângulos adjacentes suplementares dos ângulos internos.

CLASSIFICAÇÃO DOS QUADRILÁTEROS CONVEXOS

TRAPÉZIO

É um quadrilátero que tem apenas um par de lados opostos paralelos.



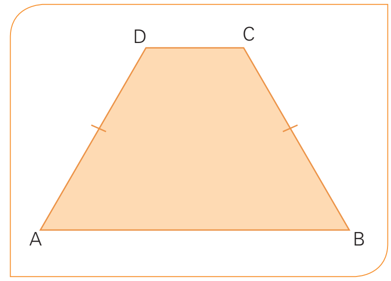
AB e CD são segmentos paralelos, sendo:

- $\overline{AB}$: base menor;
- $\overline{CD}$: base maior;
- $\overline{AE}$: altura.

Os trapézios podem ser classificados em: **isósceles**, **escaleno** ou **retângulo**.

Trapézio isósceles

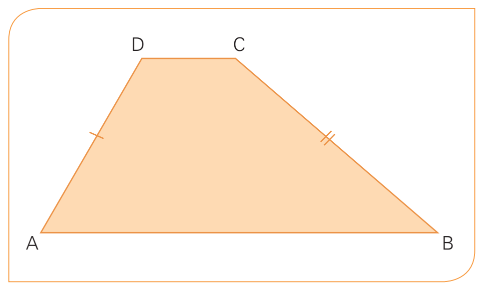
Trata-se do trapézio que tem os lados não paralelos congruentes.



$\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$
$\hat{A} \equiv \hat{B}$ e $\hat{D} \equiv \hat{C}$

Trapézio escaleno

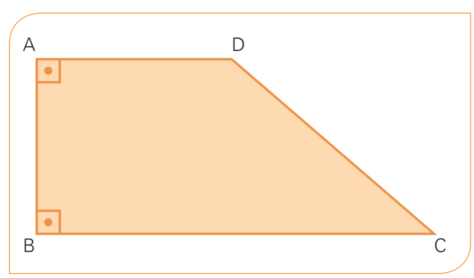
É o trapézio que tem os lados não paralelos com medidas diferentes.



$\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} \neq \overline{BC}$

Trapézio retângulo

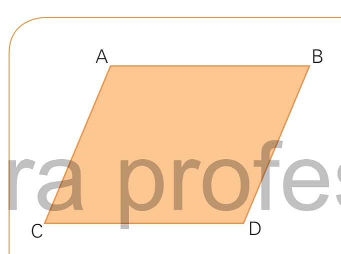
Trata-se do trapézio que tem dois ângulos retos.



$\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\hat{A} = \hat{B} = 90°$

PARALELOGRAMO

É o quadrilátero que tem dois pares de lados opostos paralelos.



AB // CD e AC // BD

Os paralelogramos podem ser subdivididos em: retângulo, losango e quadrado.

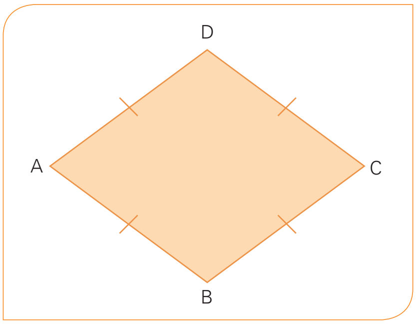
Retângulo

Trata-se do paralelogramo que tem os quatro ângulos internos congruentes. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, o retângulo apresenta quatro ângulos de 90° cada um.

$\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong 90°$

Losango

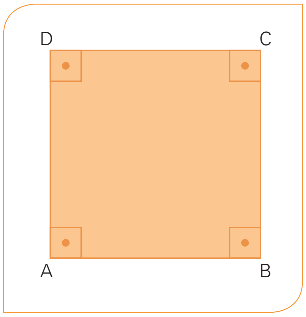
É o paralelogramo que tem os quatro lados congruentes.



$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$

Quadrado

Trata-se do paralelogramo que tem os quatro ângulos internos e os quatro lados congruentes.



$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$ e $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong 90°$

Observação:

- Se o quadrado tem os quatro ângulos iguais, então todo quadrado é um retângulo.
- Se todo quadrado tem os quatro lados iguais, então todo quadrado é um losango.

Atenção:

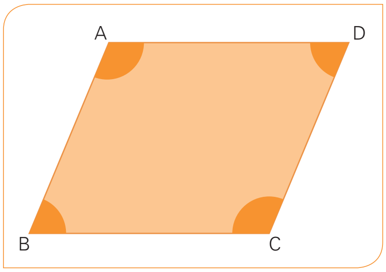
Todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado. E todo quadrado é um losango, mas nem todo losango é um quadrado.

PROPRIEDADES DOS PARALELOGRAMOS

Ângulos congruentes

Em todo paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes.

Sendo **ABCD** um paralelogramo, temos $A \cong C$ e $B \cong D$.



Justificativa:

Como $\overline{AD} // \overline{BC} \rightarrow \hat{B} + \hat{A} = 180°$ (I) (colaterais internos) e $\hat{C} + \hat{D} = 180°$ (II) (colaterais internos).

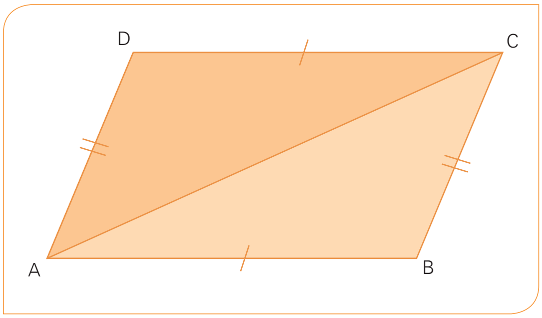
Como $AB // CD \rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180°$ (III) (colaterais internos).

De (I) = (III) e (II) = (III) $\rightarrow \hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$.

Lados opostos congruentes

Em todo paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

Sendo **ABCD** um paralelogramo, temos que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$.



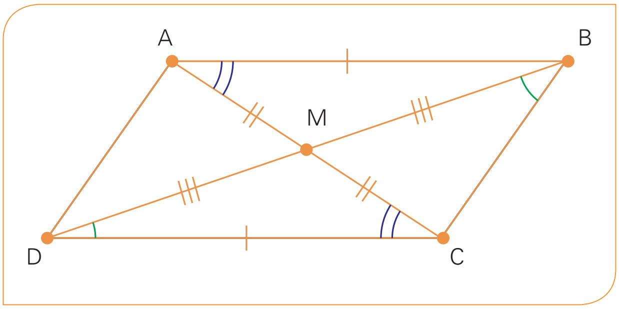
Justificativa:

Como $C\hat{A}B = D\hat{C}A$ (alternos internos), $\hat{B} = \hat{D}$ (ângulos opostos) e AC (segmento comum), temos pelo caso LAAo que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$. Logo, $\overline{BC} = \overline{AD}$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Diagonais que se interceptam no ponto médio

Em todo paralelogramo, as diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios.

Sendo **ABCD** um paralelogramo, temos que $\overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$.



Justificativa:

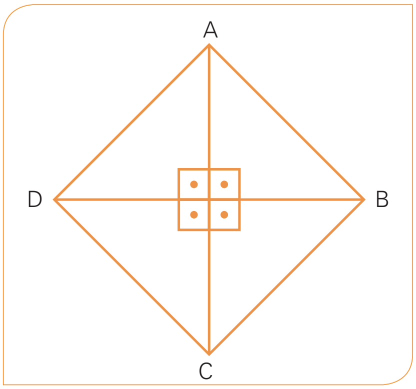
Como $B\hat{D}C = A\hat{B}D$ e $B\hat{A}C = D\hat{C}A$ (alternos internos), $AB = DC$ (lados opostos), temos pelo caso ALA que $\Delta CDM \cong \Delta ABM$. Logo, $CM = AM$ e $BM = DM$.

PROPRIEDADES DOS LOSANGOS

Diagonais perpendiculares

Todo losango tem diagonais perpendiculares.

Sendo ABCD um losango, temos que $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{BD}$.



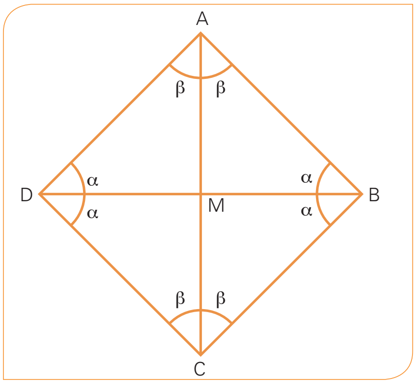
Justificativa:

Seja M o ponto de intersecção das diagonais, como $AM = CM$ e $BM = DM$ (M é ponto médio) e $AB = BC = CD = AD$ (ABCD é losango), temos pelo caso LLL que $\Delta AMB \cong \Delta CMB \cong \Delta AMD \cong \Delta CMD$. Portanto, $A\hat{M}B = C\hat{M}B = A\hat{M}D = C\hat{M}D$. Sabendo que $A\hat{M}B + C\hat{M}B + A\hat{M}D + C\hat{M}D = 360° \rightarrow 4 \cdot A\hat{M}B = 360° \rightarrow A\hat{M}B = 90°$.

Diagonais nas bissetrizes dos ângulos internos

As diagonais de um losango são as bissetrizes dos ângulos internos.

Se ABCD é losango, as diagonais AC e BD são bissetrizes, respectivamente, de $\hat{A}$ e $\hat{C}$ e de $\hat{B}$ e $\hat{D}$.



Justificativa:

Como $AB = BC = CD = AD$ (ABCD é losango), $AM = CM$ e $BM = DM$ (M é ponto médio), temos pelo caso LLL que $\Delta AMB \cong \Delta CMB \cong \Delta AMD \cong \Delta CMD$. Logo,

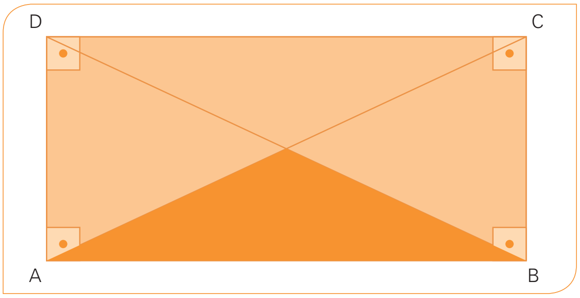
$A\hat{B}M = C\hat{B}M = A\hat{D}M = C\hat{D}M = \alpha$ e $B\hat{A}M = D\hat{A}M = B\hat{C}M = D\hat{C}M = \beta$.

PROPRIEDADE DO RETÂNGULO

Diagonais congruentes

Todo retângulo tem diagonais congruentes.

- Se ABCD é retângulo, as diagonais são congruentes.



Justificativa:

Como $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, $AD = BC$ (ABCD é retângulo) e AB é segmento comum, pelo caso LAL temos que: $\Delta ABD \cong \Delta BAC$. Logo $BD = AC$.

QUADRADOS

Como os quadrados são paralelogramos (losangos e retângulos), eles têm as mesmas propriedades até aqui estudadas. Logo, quadrados apresentam:

- ângulos opostos congruentes;
- lados opostos congruentes;
- diagonais que se cortam ao meio;
- diagonais na bissetriz dos ângulos internos;
- diagonais congruentes.

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Trapézio

- Escaleno
- Retângulo
- Isósceles

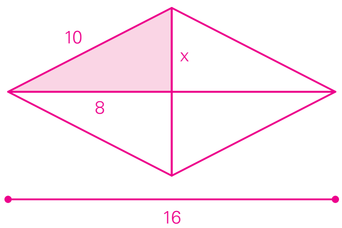
Paralelogramo

- Paralelogramo
- Losango
  - Diagonais são perpendiculares e bissetrizes dos ângulos opostos.
- Retângulo
  - Diagonais congruentes.
- Quadrado
- Propriedades: Lados e ângulos opostos congruentes e diagonais que se cortam ao meio.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFSC (adaptado) – O perímetro de um losango é 40 cm e uma diagonal mede 16 cm. Qual a medida da outra diagonal?

O losango é equilátero, e suas diagonais são perpendiculares. As diagonais cortam-se ao meio pelo fato de o losango ser paralelogramo. Temos, então, a figura:



Aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo, temos:

$x^2 = 10^2 - 8^2$

$x^2 = 100 - 64$

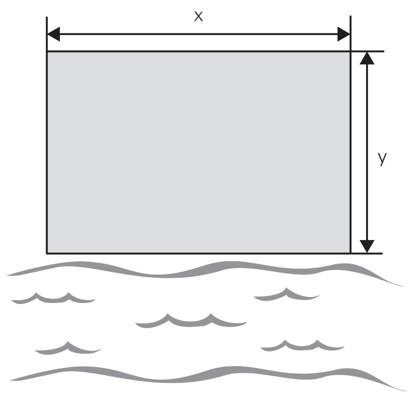
$x^2 = \sqrt{36}$

$x = 6$ cm

Portanto, a outra diagonal mede 12 cm.

2. Enem C2-H7

Um terreno retangular de lados cujas medidas, em metros, são x e y será cercado para a construção de um parque de diversões. Um dos lados do terreno encontra-se às margens de um rio. Observe a figura.



Para cercar todo o terreno, o proprietário gastará R$ 7.500,00. O material da cerca custa R$ 4,00 por metro para os lados do terreno paralelos ao rio, e R$ 2,00 por metro para os demais lados.

Nessas condições, as dimensões do terreno e o custo total do material podem ser relacionados pela equação

a) $4(2x + y) = 7\,500$
b) $4(x + 2y) = 7\,500$
c) $2(x + y) = 7\,500$
d) $2(4x + y) = 7\,500$
e) $2(2x + y) = 7\,500$

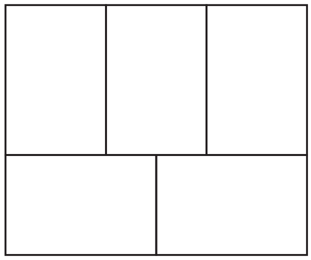
O custo para cercar os lados paralelos ao terreno é igual a $2x \cdot 4 = 8x$, enquanto para cercar os outros lados é $2y \cdot 2 = 4y$.

Logo:

$8x + 4y = 7\,500$

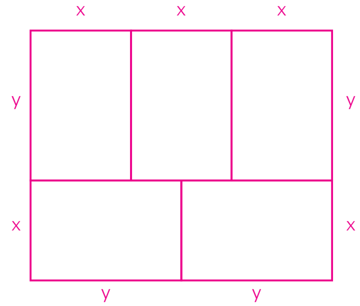
Portanto, $4(2x + y) = 7\,500$

3. IFCE – Um terreno com perímetro de 176 m é subdividido em 5 retângulos congruentes, como mostrado na figura a seguir.



O perímetro de qualquer um dos 5 retângulos congruentes vale, em m:

a) 80
b) 76
c) 35,2
d) 84
e) 86



De acordo com a figura, podemos escrever:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 176 \\ 2y = 3x \rightarrow y = \dfrac{3x}{2} \end{cases}$$

$5x + 4 \cdot \left(\dfrac{3x}{2}\right) = 176 \rightarrow 5x + \dfrac{12x}{6} = 176 \rightarrow$

$\rightarrow 5x + 6x = 176 \rightarrow 11x = 176 \rightarrow x = 16$

Substituindo o valor de x = 16, temos:

$5x + 4y = 176 \rightarrow 5 \cdot (16) + 4y = 176 \rightarrow$

$\rightarrow 4y = 176 - 80 \rightarrow y = \dfrac{96}{4} \rightarrow y = 24$

Dessa forma, o perímetro de cada retângulo será dado por:

$P = 2 \cdot (x + y) \rightarrow P = 2 \cdot (16 + 24) \rightarrow P = 80$

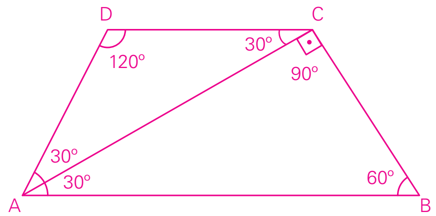
Portanto, P = 80 m.

4. UFJF-PISM – Sejam A, B, C e D os vértices de um trapézio isósceles. Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, ambos agudos, são os ângulos da base desse trapézio, enquanto os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são ambos obtusos e medem, cada um, o dobro da medida de cada ângulo agudo desse trapézio. Sabe-se ainda que a diagonal $\overline{AC}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$. Sendo a medida do lado $\overline{AB}$ igual a 10 cm, o valor da medida do perímetro do trapézio ABCD, em centímetros, é:

a) 21
b) 22
c) 23
d) 24
e) 25

Se ABCD é isósceles (AD = BC), então os ângulos agudos ($\hat{A}$ e $\hat{B}$) são congruentes, bem como os obtusos ($\hat{C}$ e $\hat{D}$). Além disso, os agudos e obtusos são suplementares. Como o obtuso é o dobro do agudo, $\hat{A} = \hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = \hat{D} = 120°$.

O triângulo ABC é retângulo em C, pois AC é perpendicular a AB. Aplicando a soma dos ângulos internos nos triângulos ABC e ACD, temos a figura:



Utilizando a trigonometria (sen 30°) no triângulo ABC, BC = 5 cm.

O triângulo ACD é isósceles, com AD = CD (lembrando que AD = BC, então CD = 5 cm). Logo, o perímetro do trapézio é 25 cm.

5. UEM – Considere um círculo qualquer com centro O. Construa nesse círculo um ângulo central medindo 80°, que determina na circunferência K, a do círculo, os pontos A e B, os quais, por sua vez, determinam o arco menor m(AB) e o arco maior m(AB). Seja P o ponto médio do segmento de reta AB e trace a reta r pelos pontos O e P. A reta r determina o ponto C em m(AB) e D em m(AB).

Assinale o que for correto.

01) A soma dos ângulos opostos do quadrilátero ABCD mede 180°.

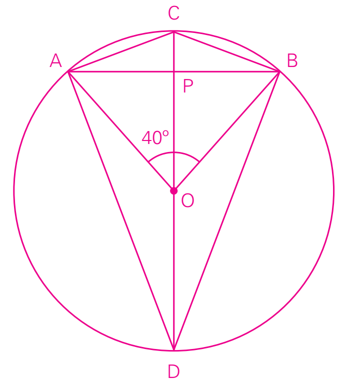
02) Se V é um ponto qualquer no arco m(AB), a medida do ângulo $A\hat{V}B$ é sempre igual à medida do ângulo $A\hat{D}B$.

04) Se V é um ponto qualquer do arco m(AB), quando V se aproxima de A, o ângulo $A\hat{V}B$ é maior que a medida do ângulo $A\hat{C}B$

08) O ângulo $A\hat{D}C$ mede 40°.

16) O ângulo $B\hat{C}D$ mede 70°.

Do enunciado, temos a figura:



01. Verdadeiro, pois o quadrilátero ABCD está inscrito. Portanto, os ângulos opostos são suplementares.

02. Verdadeiro, pois "enxergam" o mesmo arco AB.

04. Falso, pois $A\hat{V}B = A\hat{C}B$ ("enxergam" o mesmo arco).

08. Falso. O ângulo $A\hat{D}C$ mede 20° ($A\hat{O}P$ = 40°, pois os triângulos AOP e BOP são congruentes pelo caso cateto-hipotenusa).

16. Verdadeiro, pois o arco CBD = 180° (CD é diâmetro). Como o menor arco BC = 40°, então o menor arco BD = 140°. Portanto, $B\hat{C}D$ = 70°.

Soma: 01 + 02 + 16 = 19.

6. Ifal – Julgue as afirmativas abaixo e assinale a alternativa correta.

I. Todo paralelogramo é losango.

II. Se um quadrilátero tem todos os lados com a mesma medida, então esse quadrilátero é um quadrado.

III. As diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si.

a) Só I é verdadeira.
b) Só II é verdadeira.
c) Só III é verdadeira.
d) I e III são verdadeiras.
e) II e III são verdadeiras.

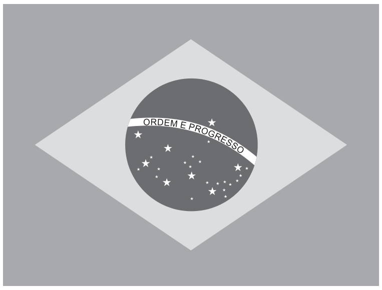
I. Falsa, pois um losango é um paralelogramo.

II. Falsa, pois um quadrado é um paralelogramo e deve ter todos os lados com a mesma medida e todos os ângulos congruentes.

III. Verdadeira, pois o quadrado é um losango, e as diagonais do losango são perpendiculares.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. IFSC



Todos os anos, no mês de setembro, comemora-se a Independência do Brasil. Durante uma semana, muitas instituições exibem a Bandeira do Brasil como forma de homenagear a Pátria.

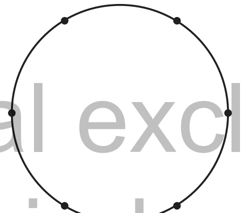
A maioria dos brasileiros desconhece que a fabricação da Bandeira Nacional obedece a rígidos critérios em relação às dimensões das figuras geométricas (retângulo, losango e círculo), das letras e das estrelas.

Considere que as diagonais maior e menor do losango amarelo da Bandeira do Brasil medem 16 dm e 12 dm, respectivamente.

Então, é CORRETO afirmar que a linha que delimita a parte amarela mede:

a) 40 dm
b) 28 dm
c) 20 dm
d) 48 dm
e) 96 dm

8. UEG – A melhor maneira de alocarmos pontos igualmente espaçados em um círculo é escrevê-los nos vértices de polígonos regulares, conforme a figura a seguir exemplifica com 6 pontos.

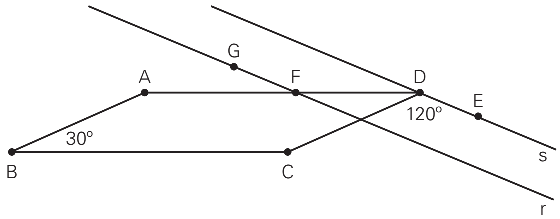


Para alocarmos 36 pontos igualmente espaçados em um círculo de raio 1, a distância mínima entre eles deve ser aproximadamente:

Use sen (5°) = 0,08

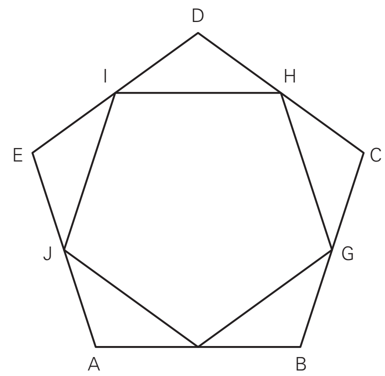
a) 0,12
b) 0,11
c) 0,16
d) 0,14
e) 0,19

9. CFTRJ – Na figura abaixo, ABCD é um paralelogramo, as retas r e s são paralelas, D e E são pontos de s, F e G são pontos de r, F é um ponto de AD, $A\hat{B}C = 30°$ e $C\hat{D}E = 120°$. Quanto mede, em graus, o ângulo $D\hat{F}G$?



a) 120°
b) 130°
c) 140°
d) 150°

10. UFRGS – Considere um pentágono regular ABCDE de lado 1. Tomando os pontos médios de seus lados, constrói-se um pentágono FGHIJ, como na figura abaixo:



A medida do lado do pentágono FGHIJ é

a) sen 36°

b) cos 36°

c) $\frac{\text{sen}\,36°}{2}$

d) $\frac{\cos 36°}{2}$

e) 2 cos 36°

11. UEM-PAS – Um quadrilátero se diz inscritível em um círculo C se todos os seus vértices estão sobre a circunferência que determina C, e neste caso diz-se que o quadrilátero é inscrito em C. Considere um quadrilátero ABCDE inscrito em um círculo, que é determinado por uma circunferência C', e sejam $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ e $\hat{E}$ seus ângulos internos.

Então é correto afirmar que:

01) Os lados do ângulo $\hat{A}$ determinam um arco na circunferência C', cuja medida é o dobro da medida do ângulo $\hat{A}$.

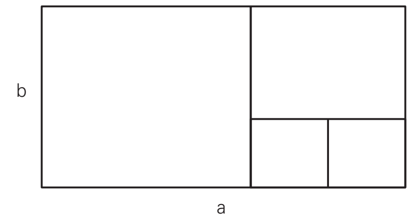
02) As diagonais AD e BE do quadrilátero são perpendiculares.

04) As diagonais AD e BE se cortam nos seus respectivos pontos médios.

08) Pelo menos dois dos ângulos internos opostos devem ser retos.

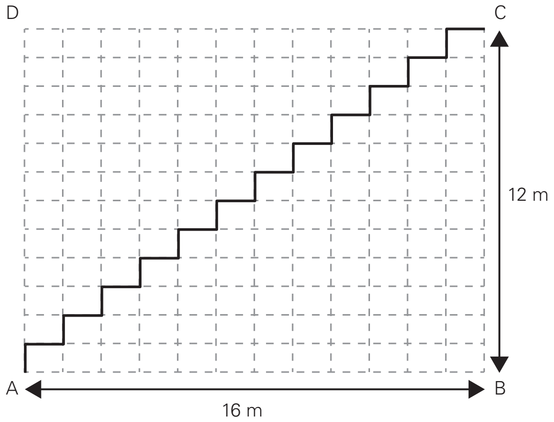
16) Os ângulos $B\hat{A}D$ e $B\hat{E}D$ são congruentes.

12. UFRJ – Um retângulo a seguir de dimensões a e b está decomposto em quatro quadrados, como mostra a figura.



Calcule o valor da razão $\frac{b}{a}$.

13. Udesc – Numa praça de alimentação retangular, com dimensões 12 m por 16 m, as mesas estão dispostas em fileiras paralelas às laterais do ambiente, conforme o esquema da figura, sendo as linhas pontilhadas os corredores entre as mesas.

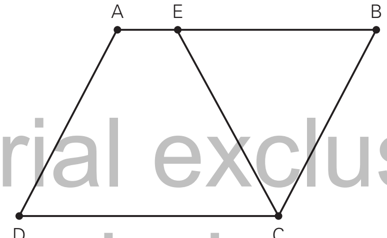


Praça de alimentação

Pela disposição das mesas, existem várias maneiras de se chegar do ponto A ao ponto C, movendo-se apenas pelos corredores. Seguindo-se o caminho destacado e desprezando-se a largura dos corredores, a distância percorrida é:

a) 12 m
b) 20 m
c) 24 m
d) 28 m
e) 16 m

14. Udesc – No paralelogramo ABCD, conforme mostra a figura, o segmento CE é a bissetriz do ângulo DCB.



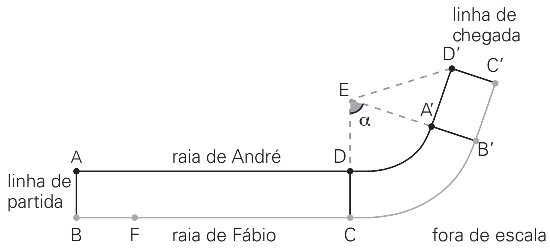
Sabendo que AE = 2 e AD = 5, então o valor do perímetro do paralelogramo ABCD é:

a) 26
b) 16
c) 20
d) 22
e) 24

15. Uece – No retângulo PQRS, a medida dos lados PQ e QR e são, respectivamente, 3 m e 2 m. Se V é um ponto do lado PQ, tal que a medida do segmento VQ é igual a 1 m e U é o ponto médio do lado PS, então, a medida, em graus, do ângulo $V\hat{U}R$ é

a) 40
b) 35
c) 50
d) 45

16. Unesp – A figura representa duas raias de uma pista de atletismo plana. Fábio (F) e André (A) vão apostar uma corrida nessa pista, cada um correndo em uma das raias. Fábio largará à distância $\overline{FB}$ da linha de partida para que seu percurso total, de F até a chegada em C', tenha o mesmo comprimento do que o percurso total de André, que irá de A até D'.

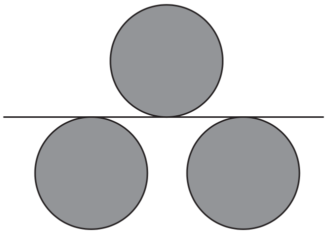


Considere os dados:

- ABCD e A'B'C'D' são retângulos.
- B', A' e E estão alinhados.
- C, D e E estão alinhados.
- $\overset{\frown}{A'D}$ e $\overset{\frown}{B'C}$ são arcos de circunferência de centro E.

Sabendo que $\overline{AB} = 10$ m, $\overline{BC} = 98$ m, $\overline{ED} = 30$ m, $\overline{ED'} = 34$ m e $\alpha = 72°$, calcule o comprimento da pista de A até D' e, em seguida, calcule a distância $\overline{FB}$. Adote nos cálculos finais $\pi = 3$.

17. UFG – Gerard Stenley Hawkins, matemático e físico, nos anos 1980 envolveu-se com o estudo dos misteriosos círculos que apareceram em plantações na Inglaterra. Ele verificou que certos círculos seguiam o padrão indicado na figura a seguir, isto é, três círculos congruentes, com centros nos vértices de um triângulo equilátero, tinham uma reta tangente comum.



Nestas condições, e considerando-se uma circunferência maior que passe pelos centros dos três círculos congruentes, calcule a razão entre o raio da circunferência maior e o raio dos círculos menores.

18. Enem C2-H7

Em uma das paredes de um depósito existem compartimentos de mesmo tamanho para armazenamento de caixas de dimensões frontais a e b. A terceira dimensão da caixa coincide com a profundidade de cada um dos compartimentos. Inicialmente as caixas são arrumadas, em cada um deles, como representado na Figura 1. A fim de aproveitar melhor o espaço, uma nova proposta de disposição das caixas foi idealizada e está indicada na Figura 2. Essa nova proposta possibilitaria o aumento do número de caixas armazenadas de 10 para 12 e a eliminação de folgas.

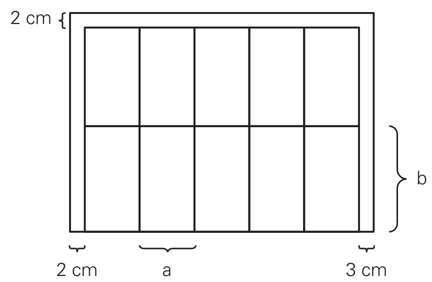


Figura 1

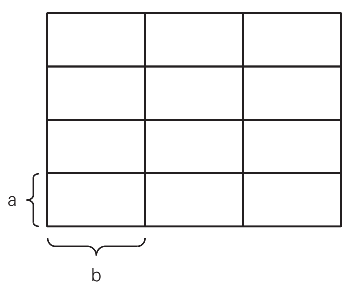


Figura 2

É possível ocorrer a troca de arrumação segundo a nova proposta?

a) Não, porque a segunda proposta deixa uma folga de 4 cm na altura do compartimento, que é de 12 cm, o que permitiria colocar um número maior de caixas.

b) Não, porque, para aceitar a segunda proposta, seria necessário praticamente dobrar a altura e reduzir à metade a largura do compartimento.

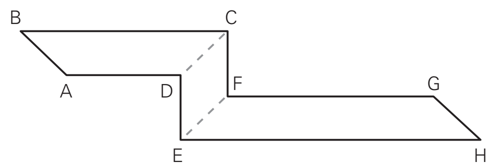
c) Sim, porque a nova disposição das caixas ficaria acomodada perfeitamente no compartimento de 20 cm de altura por 27 cm de largura.

d) Sim, pois efetivamente aumentaria o número de caixas e reduziria o número de folgas para apenas uma de 2 cm na largura do compartimento.

e) Sim, porque a nova disposição de caixas ficaria acomodada perfeitamente no compartimento de 32 cm de altura por 45 cm de largura.

19. CFTMG (adaptado) C2-H7

A figura abaixo é plana e composta por dois trapézios isósceles e um losango.



O comprimento da base maior do trapézio ABCD é igual ao da base menor do trapézio EFGH, que vale 2x, a base maior de cada trapézio é o dobro da base menor e o lado EF do losango vale y. O perímetro da figura dada, expresso em função de x e y, é

a) 6x + 4y

b) 9x + 4y

c) 12x + 2y

d) 15x + 2y

e) 17x + 4y

20. UFRN (adaptado) C2-H8

Uma indústria compra placas de alumínio em formato retangular e as corta em quatro partes, das quais duas têm a forma de triângulos retângulos isósceles (Fig. 1). Depois, reordena as quatro partes para construir novas placas no formato apresentado na Fig. 2.

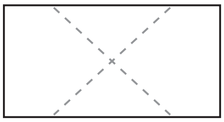


Fig. 1: Placa retangular

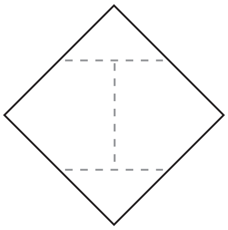


Fig. 2: Nova placa

Se a medida do lado menor da placa retangular é 30 cm, a medida do lado maior é:

a) 70 cm
b) 40 cm
c) 50 cm
d) 60 cm
e) 80 cm

13

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS II

- Quadriláteros notáveis – revisão

HABILIDADES

- Identificar pontos notáveis do triângulo.
- Aplicar propriedades de dois pontos notáveis na resolução de problemas.
- Identificar diferentes tipos de quadriláteros.
- Analisar propriedades dos quadriláteros na construção de argumentos.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos como solução de problemas cotidianos.

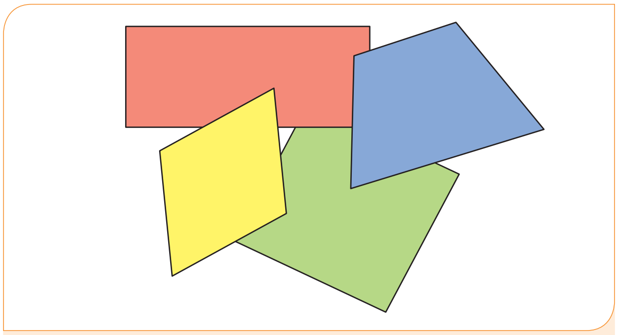

ALEXANDR VOROBEV/SHUTTERSTOCK

No módulo anterior, tivemos a oportunidade de observar as aplicações dos quadriláteros notáveis e conhecer as propriedades de cada um, sabendo as semelhanças e diferenças entre trapézios e paralelogramos. Adiante, com a análise dos paralelogramos, conhecemos as semelhanças e diferenças entre retângulos, losangos e quadrados. Agora, está na hora de praticarmos um pouco mais os conceitos aprendidos até aqui. Mãos à obra!

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS – REVISÃO

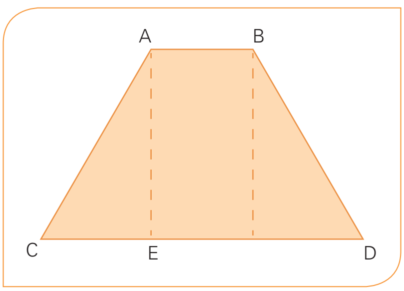
Fique atento às seguintes características dos quadriláteros:

1. Quadriláteros se dividem em trapézios e paralelogramos.
2. Trapézios são classificados em isósceles, escaleno e retângulo.
3. Retângulos e losangos são paralelogramos.
4. O quadrado é simultaneamente losango e retângulo.


Quadriláteros notáveis.

TRAPÉZIO

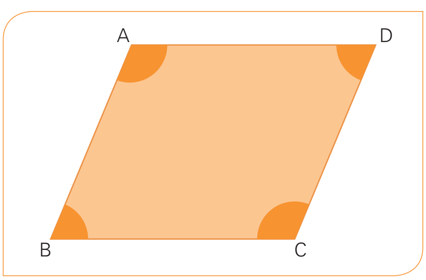
um único par de lados opostos paralelos.



PROPRIEDADES DOS PARALELOGRAMOS:

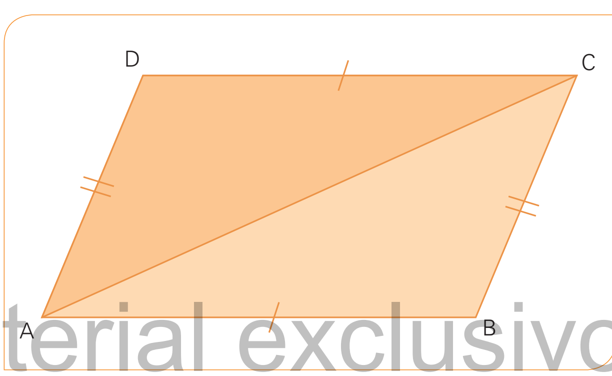
- Ângulos opostos congruentes:

Sendo ABCD um paralelogramo, temos A ≅ C e B ≅ D



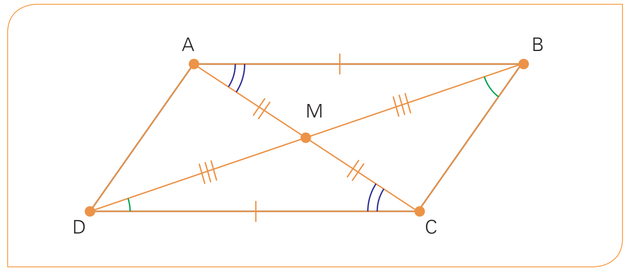
- Lados opostos congruentes:

Sendo ABCD um paralelogramo, temos que AB = CD e AD = BC.



- Diagonais se interceptam no ponto médio:

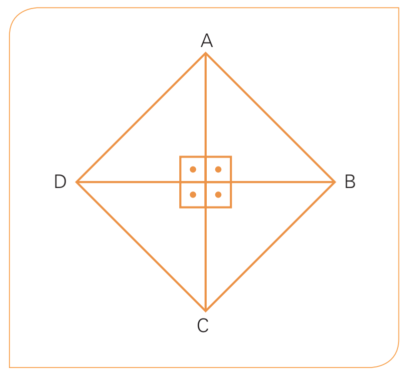
Sendo ABCD um paralelogramo, temos que AM = CM e BM = DM.



PROPRIEDADES DOS LOSANGOS

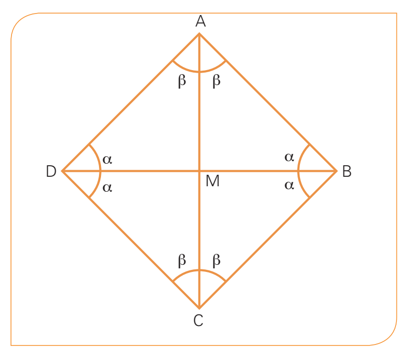
- Diagonais são perpendiculares:

Sendo ABCD um losango, temos que AC é perpendicular a BD.



- Diagonais são bissetrizes dos ângulos internos:

Se ABCD é losango, as diagonais AC e BD são bissetrizes, respectivamente, de Â e Ĉ e de B̂ e D̂.



PROPRIEDADE DO RETÂNGULO

- Diagonais congruentes:

Se ABCD é retângulo, as diagonais são congruentes.

ROTEIRO DE AULA

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS II

Definição

Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos, sem que existam três colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ se interceptam apenas nas extremidades, a reunião desses quatros segmentos é um quadrilátero.

Elementos

Vértice: pontos A, B, C e D.

Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

Ângulos internos: $D\hat{A}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ e $C\hat{D}A$.

Ângulos externos: ângulos adjacentes suplementares aos ângulos internos.

Classificação

Trapézio, se, e somente se, tiver um único par de lados paralelos.

Paralelogramo se, e somente se, tiver os lados opostos paralelos.

Losango se, e somente se, for paralelogramo e tiver os quatro lados congruentes.

Retângulo se, e somente se, for paralelogramo e tiver os quatro ângulos internos congruentes.

Quadrado se, e somente se, for paralelogramo e tiver os quatro ângulos internos e os quatro lados congruentes.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Sistema Dom Bosco C2-H7

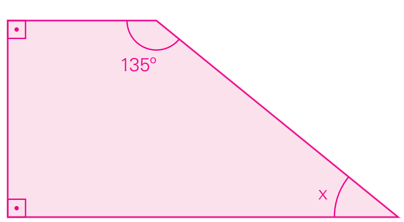
Em um exame psicotécnico o candidato devia assinalar qual palavra não possuía relação com as demais. Observando atentamente, qual palavra deve ser assinalada pelo candidato?

a) losango
b) paralelogramo
c) retângulo
d) trapézio
e) pentágono

Todas as palavras se referem a quadriláteros, exceto o pentágono, que é um polígono de cinco lados.

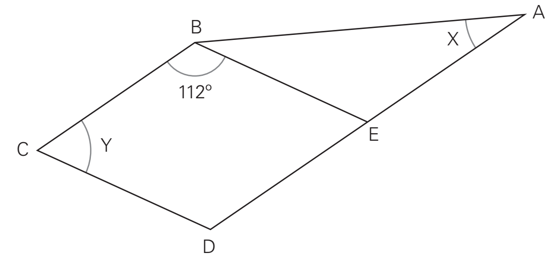
2. Sistema Dom Bosco – Em um trapézio retângulo, o maior ângulo mede 135°. O menor ângulo desse polígono mede:

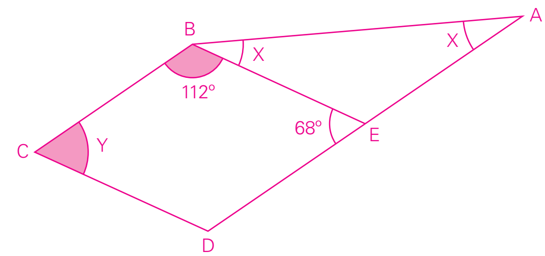
a) 25°
b) 35°
c) 45°
d) 55°
e) 65°



$x + 135° + 90° + 90° = 360°$
$x = 360° - 315°$
$x = 45°$

3. CFTRJ – Quais são, respectivamente, as medidas dos ângulos X e Y na figura abaixo, sabendo que E é o ponto médio do segmento AD e que BCDE é um losango?





$y = 180° - 112°$
$y = 68°$
Sendo assim, $B\hat{E}D = 68°$ (ângulos opostos congruentes) e $AE = EB$
Logo, $E\hat{B}C = x$.
No triângulo AEB: $2x = 68°$ (teorema do ângulo externo)
$\therefore x = 34°$.

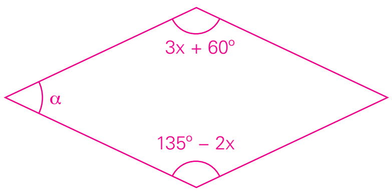
4. Sistema Dom Bosco – Considere um losango que tenha um ângulo medindo $x + 20°$ e o seu ângulo oposto medindo $3x - 80°$, a medida do ângulo formado pelo lado e a maior diagonal vale:

a) 35°
b) 55°
c) 65°
d) 120°
e) 150°

Como os ângulos opostos são congruentes, temos:
$x + 20° = 3x - 80° \rightarrow 2x = 100° \rightarrow x = 50°$. Logo, o losango tem ângulos internos que medem 70° e 110°.
Lembrando que a maior diagonal do losango é oposta ao seu maior ângulo interno e é bissetriz, então o ângulo procurado mede 55°.

5. IFSP – Considerando que as medidas de dois ângulos opostos de um losango são dadas, em graus, por $3x + 60°$ e $135° - 2x$, a medida do menor ângulo desse losango é:

a) 75°
b) 70°
c) 65°
d) 60°
e) 55°



$3x + 60° = 135° - 2x$
$3x + 2x = 135° - 60°$
$5x = 75°$
$x = 15°$

$\alpha + 3 \cdot 15° + 60 = 180°$
$\alpha = 75°$.

6. UEM – Com base em conhecimentos de Geometria Plana, assinale o que for **correto**.

01) O quadrado do comprimento do lado maior de um triângulo só é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos demais lados se o ângulo interno oposto ao maior lado é reto.
02) Todo quadrilátero no qual as medidas de todos os lados são as mesmas é um quadrado.
04) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 360 graus.
08) Todo quadrilátero que é um retângulo é, também, um paralelogramo.
16) Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é sempre maior do que o comprimento do lado restante.

01. Verdadeiro, pois a descrição do enunciado é o teorema de Pitágoras, válido para triângulos retângulos.
02. Falso, porque, para que um quadrilátero seja um quadrado, ele precisa ser um paralelogramo de lados e ângulos congruentes.
04. Falso, pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
08. Verdadeiro, porque todo retângulo é um paralelogramo.
16. Verdadeiro, pois a descrição do enunciado é a condição de existência de um triângulo.
Soma: $01 + 08 + 16 = 25$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

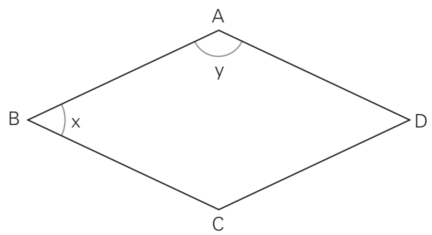
7. UFJF-PISM – Dadas as seguintes afirmações:

IV. Se um paralelogramo tem dois ângulos de vértices consecutivos congruentes, então ele é um retângulo.
V. A altura de um trapézio retângulo que tem o ângulo agudo medindo 30° é igual à metade do lado não perpendicular às bases.
VI. Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e perpendiculares, então elas são bissetrizes dos ângulos desse quadrilátero.

É **CORRETO** afirmar que:

a) Apenas I é verdadeira.
b) Apenas II é verdadeira.
c) Todas as afirmações são verdadeiras.
d) Apenas I e II são verdadeiras.
e) Apenas II e III são verdadeiras.

8. Sistema Dom Bosco – O losango é um paralelogramo que possui todos os lados congruentes. A respeito do losango ABCD, afirma-se que:



I. A soma dos ângulos internos é igual a 180°.
II. As diagonais AC e BC são perpendiculares entre si.
III. A medida do ângulo y é o dobro da medida o ângulo x.

Está correto o que se afirma:

a) Apenas em I
b) Apenas em II
c) Apenas em III
d) Apenas em I e II
e) Apenas em II e III

9. Sistema Dom Bosco – Um terreno tem a forma retangular com 850 m de perímetro. O comprimento do terreno mede o dobro da largura. Pode-se afirmar que o maior lado desse terreno mede:

a) 75 m
b) 100 m
c) 150 m
d) 200 m
e) 225 m

10. Sistema Dom Bosco – Paralelogramos são quadriláteros que possuem dois pares de lados paralelos. Caso, um paralelogramo possua a medida de dois ângulos internos consecutivos na razão 1:4, qual a medida do maior ângulo desse paralelogramo?

Texto para as próximas 2 questões:

Considere um losango ABCD em que M, N, P e Q são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Um dos ângulos internos desse losango mede α, sendo $0° < a < 90°$.

11. Insper – Se $\alpha = 60°$, então a razão entre o perímetro do losango ABCD e o perímetro do quadrilátero MNPQ, nessa ordem, é igual a

a) $\sqrt{3} + 1$.
b) 2.
c) $\sqrt{3}$.
d) $\frac{3}{2}$.
e) $2\sqrt{3} - 2$.

12. Insper – Nessas condições, o quadrilátero convexo MNPQ da questão anterior:

a) é um quadrado.

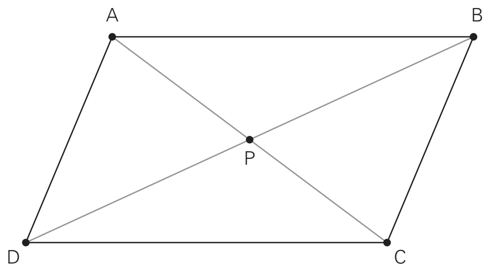
b) é um retângulo que não é losango.

c) é um losango que não é retângulo.

d) é um paralelogramo que não é retângulo nem losango.

e) não possui lados paralelos.

13. CFTCE – No paralelogramo ABCD, calcule as medidas das diagonais, de acordo com a figura a seguir.



Dados:

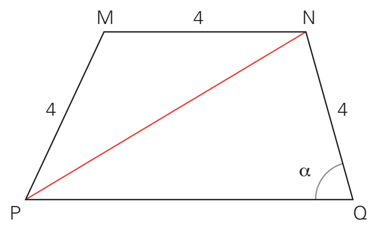
AP = x

BP = x + 14

CP = 2y – 5

DP = 3y + 2

14. Mackenzie – No trapézio da figura, PN = PQ. Então o ângulo α mede:



a) 64°

b) 68°

c) 72°

d) 76°

e) 80°

15. IFCE – As medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo são inversamente proporcionais a 5, 8, 10 e 40, então as medidas, em graus, dos ângulos são, respectivamente, iguais a:

a) 160°; 100°; 80°; e 20°.

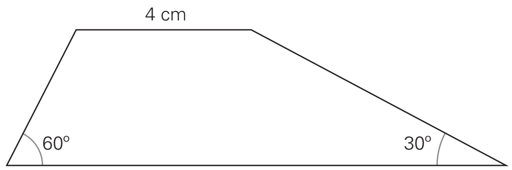
b) 100°; 80°; 20°; e 160°.

c) 80°; 50°; 40°; e 10°.

d) 50°; 40°; 10°; e 80°.

e) 75°; 45°; 40°; e 20°.

16. UEFS



O trapézio representado na figura tem bases medindo 12cm e 4 cm, e os ângulos internos da base maior medem 60° e 30°.

Seu perímetro, em cm, é igual a:

a) $16 + 4\sqrt{2}$
b) $16 + 4\sqrt{3}$
c) $20 + 3\sqrt{2}$
d) $20 + 4\sqrt{2}$
e) $20 + 4\sqrt{3}$

17. FGV (adaptado) – A figura representa um trapézio isósceles ABCD, com AD = BC = 4 cm. M é o ponto médio de $\overline{AD}$, e o ângulo $B\hat{M}C$ é reto.

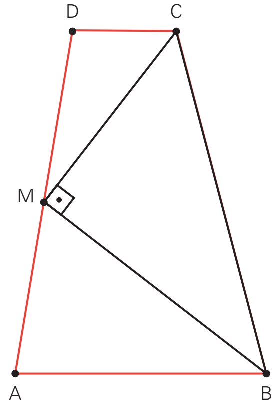


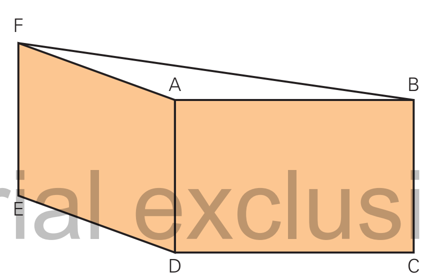
Figura fora de escala

Qual o perímetro do trapézio ABCD, em cm?

ESTUDO PARA O ENEM

18. Sistema Dom Bosco C2-H7

O quadrado ABCD da figura a seguir está adjunto ao losango ADEF, sendo a medida do ângulo DÊF igual a 140°. A medida do ângulo agudo α, que a reta BF forma com o seguimento AB, é igual a:



a) 140°
b) 130°
c) 50°
d) 35°
e) 25°

19. CPS C2-H6

Observando-se o campo de futebol da imagem 1, identificam-se vários elementos geométricos: ângulos, segmentos de retas, pontos, circunferências, raio, diâmetro, diagonais e arcos, entre outros. Além disso, há simetrias nas figuras geométricas.

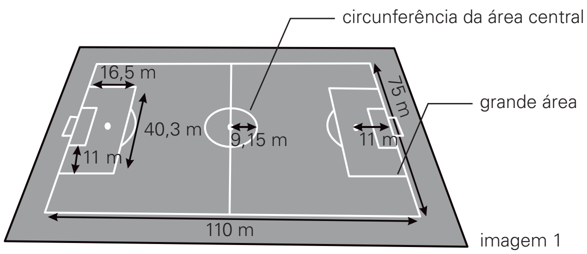


imagem 1

Também se observam figuras geométricas nos diferentes esquemas táticos adotados pelos times.

O esquema tático 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes) é um esquema muito ofensivo que os treinadores usam quando estão em desvantagem no placar ou precisam reverter algum resultado desfavorável. Esse esquema foi muito utilizado no passado, quando a prioridade era jogar um futebol bonito chamado futebol-arte.

No esquema tático 4-3-3, podem ser observadas figuras geométricas como: triângulos equiláteros, triângulos isósceles, trapézios, hexágonos e retângulos, conforme imagem 2.

Fonte: VILAS BOAS, Rogério Aparecido. A Geometria do Futebol: Um facilitador no Ensino Aprendizagem. Disponível em: <http://www.pedagocia.com.br/artigos/geometriafutebol/>. Acesso em: 27 ago. 2010. (Adaptado)

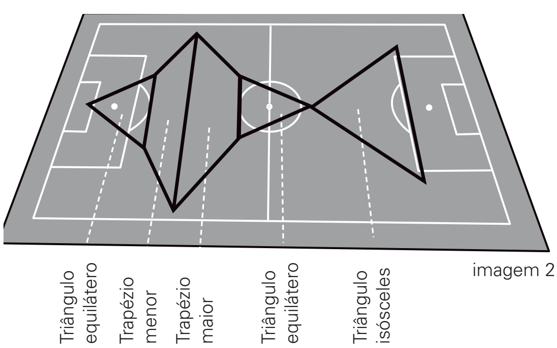


imagem 2

A imagem 3 apresenta o diagrama de um esquema 4-3-3, onde os pontos A, B, C ... e J representam jogadores.

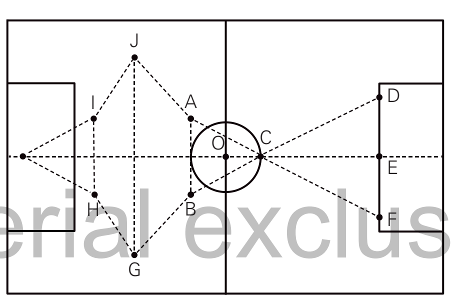


imagem 3

Na imagem 3, temos que:

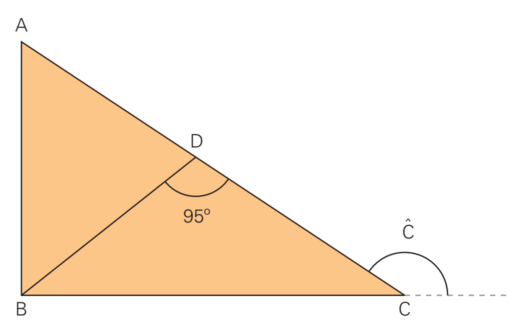
- o triângulo ABC é equilátero, e o vértice C pertence à circunferência;
- o ponto O é o centro da circunferência;
- o segmento $\overline{AB}$ tangencia a circunferência;
- os pontos D, E e F pertencem ao lado do retângulo que representa a grande área;
- o ponto E é o ponto médio do segmento $\overline{DF}$;
- o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{DF}$;
- o segmento $\overline{AB}$ é perpendicular à reta $\overline{CE}$.

No campo de futebol, a grande área é um retângulo onde o goleiro pode trabalhar com as mãos. Considerando os dados da imagem 1, o perímetro de um desses retângulos é, em metros:

a) 185,0
b) 113,6
c) 56,8
d) 47,6
e) 23,8

20. Ufam (adaptado) C2-H7

Observe a figura abaixo e indique qual a medida do ângulo externo $\hat{C}$, sabendo que o segmento $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ e sabendo que o triângulo ABC é retângulo em B.



a) 45°
b) 40°
c) 165°
d) 120°
e) 140°

14

TEOREMA DE TALES

- Teorema de Tales
- Proporcionalidade

HABILIDADES

- Compreender o enunciado do teorema de Tales.
- Identificar proporcionalidade gerada por um feixe de paralelas.
- Aplicar o teorema de Tales na resolução de situações-problema.

Em aulas anteriores, vimos consequências que o paralelismo traz para medidas angulares. Agora, vamos estudar como o paralelismo entre retas pode nos auxiliar a descobrir medidas de segmentos.

Várias áreas da Matemática apresentam teoremas fundamentais: a aritmética, a álgebra, o cálculo etc. Porém, nenhum deles ganha o nome de “teorema fundamental da geometria”. Se há um que poderia ser chamado assim, esse é o teorema de Tales, o qual vamos estudar nesta aula.


DE AGOSTINI PICTURE LIBRARY / ALBUM / FOTOARENA

Tales de Mileto.

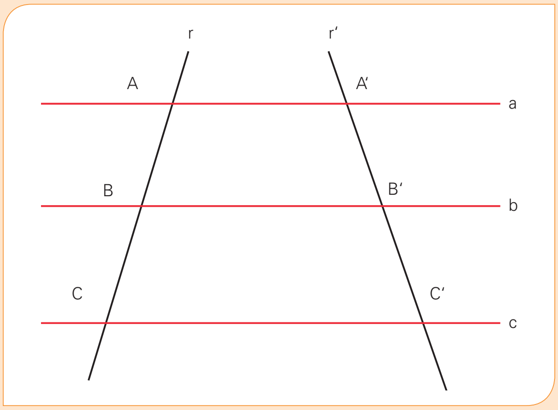
Teorema de Tales

O enunciado do teorema é o seguinte:

Se três (ou mais) retas paralelas são interceptadas por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais.

Uma demonstração completa desse teorema foge aos propósitos de nossa aula, então vamos apenas compreendê-lo e usá-lo.

Considere **a**, **b** e **c** retas paralelas e **r** e **r’** transversais, conforme a figura:



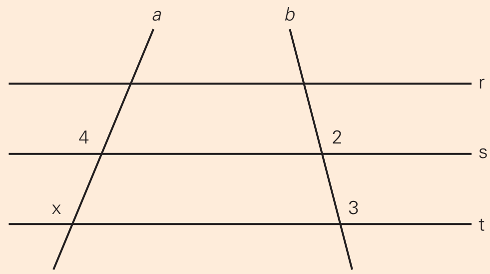
O teorema de Tales nos possibilita escrever:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Vejamos uma primeira aplicação bem simples do teorema.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Sabendo que na figura abaixo as retas r, s e t são paralelas, determine o valor de x.



Solução:

Pelo teorema de Tales, podemos escrever:

$$\frac{4}{x} = \frac{2}{3} \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$$

Resolução

Aplicaremos o teorema de Tales duas vezes. Primeiro:

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{10}{3}$$

Para calcular o valor de y, vamos aplicar o teorema de Tales de novo, mas é nesse momento em que um erro pode ser cometido em virtude do cruzamento das transversais. Alguém pode achar que os segmentos x e y são proporcionais, pois estão "do mesmo lado" na figura, e escrever:

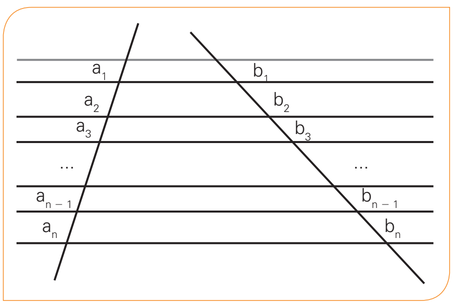
$$\frac{2}{6} = \frac{x}{y}$$

No entanto, isso não está correto. Para dois segmentos serem proporcionais segundo o teorema de Tales, eles devem ser correspondentes (estarem entre o mesmo par de paralelas) ou pertencerem à mesma transversal. Portanto, o correto seria:

$$\frac{2}{y} = \frac{x}{6} \rightarrow yx = 12 \rightarrow y \cdot \frac{10}{3} = 12 \rightarrow y = 3{,}6$$

PROPORCIONALIDADE

Observe que o teorema de Tales estabelece uma proporcionalidade entre segmentos correspondentes das retas transversais cortadas por um feixe de paralelas.



Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ as medidas dos segmentos determinados pelo feixe de paralelas de modo que cada a_i esteja entre as mesmas paralelas que b_i, podemos escrever:

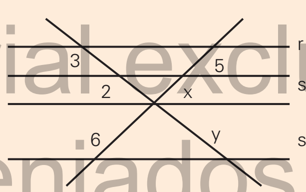
$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_4} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$ (em que k é uma constante de proporcionalidade)

UMA CONFIGURAÇÃO DIFERENTE

Você deve tomar cuidado nos casos em que as transversais se cruzarem sobre uma das paralelas: uma figura com essa configuração pode causar alguma confusão. Observe o exercício seguinte.

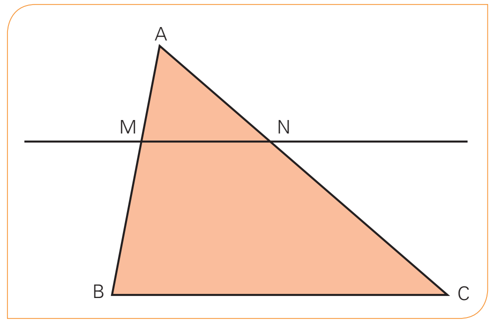
EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Na figura abaixo, determine o valor de x e y, sendo as retas horizontais paralelas.



TEOREMA DE TALES NOS TRIÂNGULOS

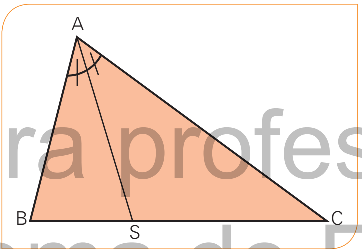
Uma reta paralela a um lado de um triângulo que encontra os outros dois lados em pontos distintos determina sobre esses dois lados segmentos proporcionais.



$$\overline{MN} \,/\!/\, \overline{BC} \rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

Teorema da bissetriz interna

Em qualquer triângulo, uma bissetriz interna divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

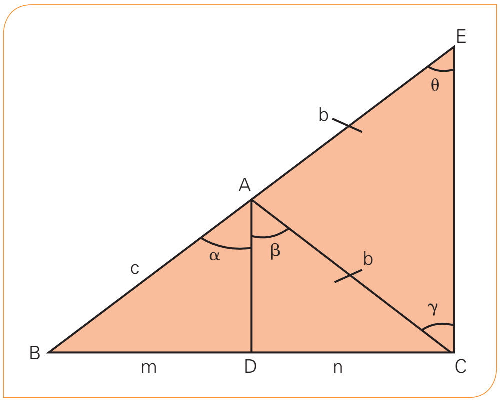


- hipótese: $\overline{AD}$ é bissetriz interna.

- Tese: $\frac{c}{m} = \frac{b}{n}$

Demonstração:

Traçando, pelo vértice C do triângulo ABC, $\overline{CE}$ paralelo à bissetriz $\overline{AD}$, conforme a figura:



$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \beta\left(\overline{AD} \text{ é bissetriz}\right)\\ \alpha = \theta\left(\text{correspondente}\right)\\ \beta = \gamma\left(\text{alterno internos}\right)\end{array}\right\} \to \theta = \gamma$$

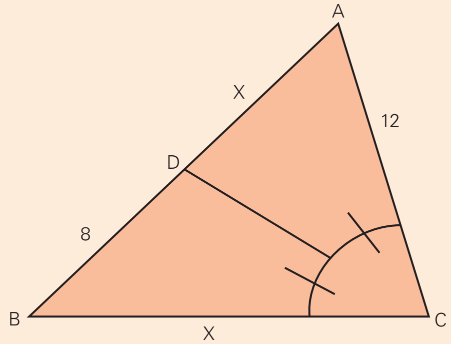
Assim, o triângulo ACE é isósceles com AC = AE = b.

Pelo teorema de Tales:

$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC}$ ou $\frac{c}{b} = \frac{m}{n}$, ou seja, $\frac{c}{m} = \frac{b}{n}$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

Sistema Dom Bosco – Na figura, BD é bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$. Determine o valor de x:



Resolução

$\frac{x}{12} = \frac{10}{x} \to x^2 = 96 \to x = \sqrt{96} \to x = 4\sqrt{6}$

ROTEIRO DE AULA

TEOREMA DE TALES

Conceitos iniciais

- Retas paralelas cortadas por transversais.
- Os segmentos determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas transversais são diretamente proporcionais.
- Proporcionalidade entre segmentos correspondentes ou que pertençam à mesma transversal.
- Toda proporção tem uma constante de proporcionalidade.

Teorema

Se três (ou mais) retas paralelas são interceptadas por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais.

Teorema de Tales nos triângulos

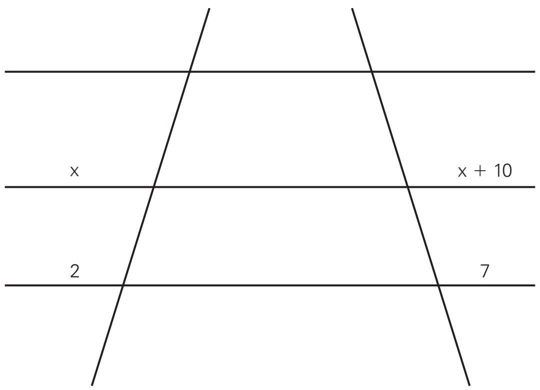
Uma reta paralelas a um lado de um triângulo, que encontra os outros dois lados em pontos distintos., determina sobre esses dois lados segmentos proporcionais. .

Teorema da bissetriz interna

Em qualquer triângulo, uma bissetriz, interna divide o lado oposto. em segmentos proporcionais. aos lados adjacentes.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFBA (adaptado) – Abaixo estão duas retas paralelas cortadas por duas transversais. Então, o valor de x na figura, é



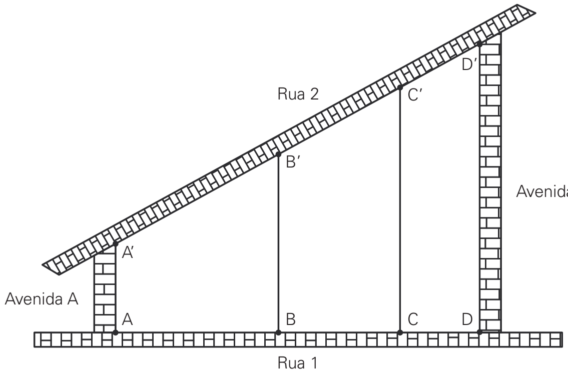
Aplicando o teorema de Tales na primeira situação, temos:

$\frac{x}{2} = \frac{x+10}{7} \to 7x = 2x + 20 \to 5x = 20 \to x = 4$

Portanto, o valor de x = 4.

2. UFU C2-H8

Uma área delimitada pelas Ruas 1 e 2 e pelas Avenidas A e B tem a forma de um trapézio ADD'A', com $\overline{AD} = 90$ m e $\overline{A'D'} = 135$ m, como mostra o esquema da figura abaixo.



Tal área foi dividida em terrenos ABB'A', BCC'B' e CDD'C', todos na forma trapezoidal, com bases paralelas às avenidas tais que $\overline{AB} = 40$ m, $\overline{BC} = 30$ m e $\overline{CD} = 20$ m.

De acordo com essas informações, a diferença, em metros, $\overline{A'B'} - \overline{C'D'}$ é igual a

a) 20
b) 30
c) 15
d) 45
e) 50

Pelo teorema de Tales, temos:

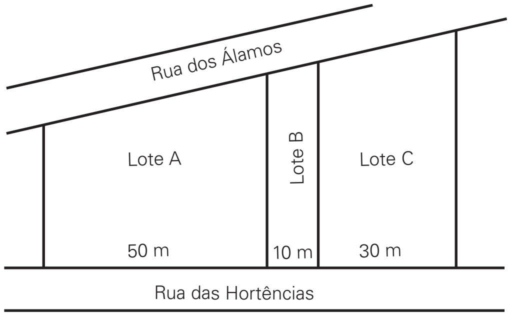
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}}{\overline{A'B'}+\overline{B'C'}+\overline{C'D'}} \to$$

$$\to \frac{40}{A'B'} = \frac{30}{B'C'} = \frac{20}{C'D'} = \frac{2}{3} \to$$

$$\to \begin{cases} \frac{40}{A'B'} = \frac{2}{3} \to \overline{A'B'} = 60 \text{ m} \\ \frac{20}{C'D'} = \frac{2}{3} \to \overline{C'D'} = 30 \text{ m} \\ \frac{30}{B'C'} = \frac{2}{3} \to \overline{B'C'} = 45 \text{ m} \end{cases}$$

Em consequência, a resposta é $\overline{A'B'} - \overline{C'D'} = 60 - 30 = 30$ m.

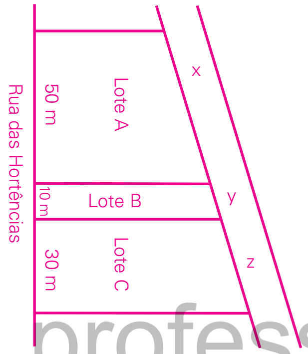
3. IFSul – Três lotes residenciais têm frente para a rua dos Álamos e para a rua das Hortênsias, conforme a figura a seguir.



As fronteiras entre os lotes são perpendiculares à rua das Hortênsias. Qual é a medida, em metros, da frente do lote A para a rua dos Álamos, sabendo-se que as frentes dos três lotes somadas medem 135 metros?

a) 55
b) 65
c) 75
d) 85

Os segmentos que representam as fronteiras entre os lotes são paralelos, pois são perpendiculares à mesma reta (Rua das Hortênsias). Abaixo, segue a mesma situação redesenhada:

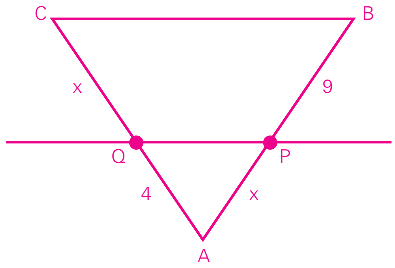


Como sabemos que x + y + z = 135 metros; aplicando o teorema de Tales temos a seguinte proporção:

$\frac{90}{135} = \frac{50}{x} \to 90x = 6750 \to x = 75$

4. PUC-Rio (adaptado) – Uma reta paralela ao lado BC de um triângulo ABC intercepta os lados AB e AC do triângulo em P e Q, respectivamente, onde AQ = 4 m, PB = 9 m e AP = QC. Então, o comprimento AP é:

De acordo com o enunciado, teremos:

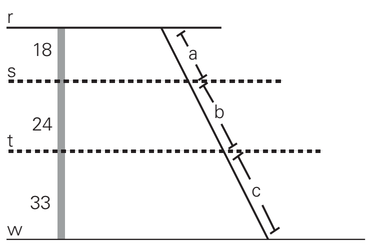


Usando o teorema de Tales, temos:

$\frac{x}{4} = \frac{9}{x} \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = 6$

Logo, o comprimento de AP = 6 cm.

5. CFTMG – Na figura a seguir, as retas r, s, t e w são paralelas, e a, b e c representam medidas dos segmentos, tais que a + b + c = 100.



Conforme esses dados, os valores de a, b e c são, respectivamente, iguais a

a) 24, 32 e 44
b) 24, 36 e 40
c) 26, 30 e 44
d) 26, 34 e 40

Utilizando o teorema de Tales, temos:

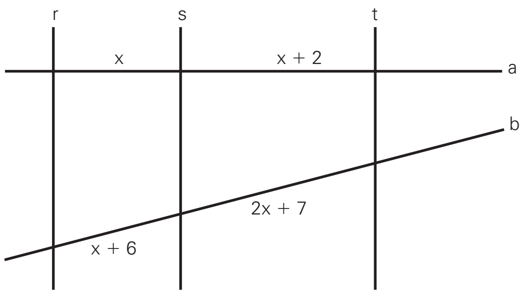
$\frac{a}{b} = \frac{b}{24} = \frac{c}{33} = \frac{a+b+c}{18+24+33} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{24} = \frac{c}{33} = \frac{100}{75} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \frac{a}{18} = \frac{100}{75} \rightarrow a = 24 \\ \frac{b}{24} = \frac{100}{75} \\ \frac{c}{33} = \frac{100}{75} \rightarrow c = 44 \end{cases}$

Portanto, a = 24, b = 32 e c = 44.

6. CFTMG – Considere a figura em que r // s // t.



O valor de x é

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.

Aplicando o teorema de Tales na figura, temos:

$\frac{x}{x+2} = \frac{x+6}{2x+7} \rightarrow 2x^2 + 7x = x^2 + 8x + 12 \rightarrow x^2 - x - 12 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos:

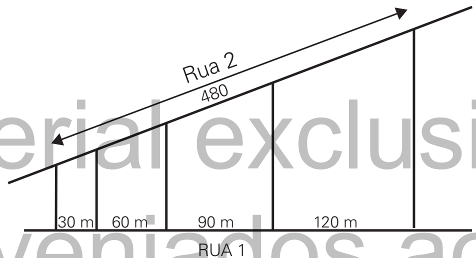
x = 4 ou x = −3

Como x > 0, tem-se x = 4.

Portanto, x = 4.

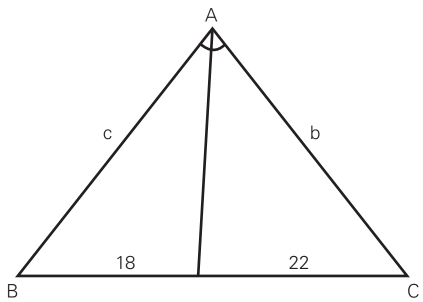
EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UFMA (adaptado) – Uma determinada firma imobiliária resolveu lotear um terreno em 4 outros menores com duas frentes: uma para a rua 1 e outra para a rua 2, como mostra a figura abaixo.



Sabendo-se que as divisões laterais são perpendiculares à rua 1 e que a frente total para a rua 2 é de 480 m, qual a medida da frente de cada lote, para a rua 2, respectivamente?

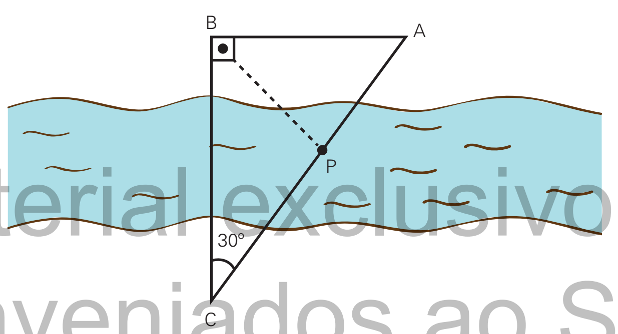
8. CFTMG – O perímetro do triângulo ABC vale 120 cm e a bissetriz do ângulo A divide o lado oposto em dois segmentos de 18 e 22 cm, conforme a figura.



A medida do maior lado desse triângulo, em cm, é

a) 22 **b)** 36 **c)** 44 **d)** 52

9. CPCAR – As cidades A, B e C situam-se às margens de um rio e são abastecidas por uma bomba situada em P, conforme figura abaixo.



Sabe-se que o triângulo ABC é retângulo em B e a bissetriz do ângulo reto corta AC no ponto P. Se $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$ km, então $\overline{CP}$ é, em km, igual a

a) $6 + \sqrt{3}$

b) $6(3 - \sqrt{3})$

c) $9\sqrt{3} - \sqrt{2}$

d) $9\left(\sqrt{2} - 1\right)$

Texto para as questões 10 e 11:

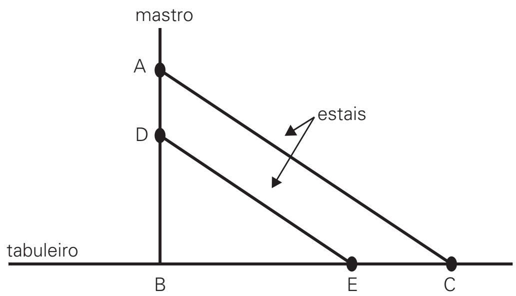
Para se transpor um curso de água ou uma depressão de terreno, pode-se construir uma ponte.

Na imagem, vemos uma ponte estaiada, um tipo de ponte suspensa por cabos (estais) fixados em mastros.

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

<http://tinyuri.com/n2f4mrh>. Acesso em: fev. 2015.

O esquema apresenta parte da estrutura de uma ponte estaiada do tipo denominado harpa, pois os estais são paralelos entre si. Cada estai tem uma extremidade fixada no mastro e a outra extremidade no tabuleiro da ponte (onde estão as vias de circulação).



(Figura construída fora de escala)

No esquema, considere que:

- as retas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares entre si;
- os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$ são paralelos entre si e representam estais subsequentes;
- AB = 75 m, BC = 100 m e AD = 6 m; e,
- no mastro dessa ponte, a partir do ponto A em sentido ao ponto B, as extremidades dos estais estão fixadas e distribuídas a iguais distâncias entre si.

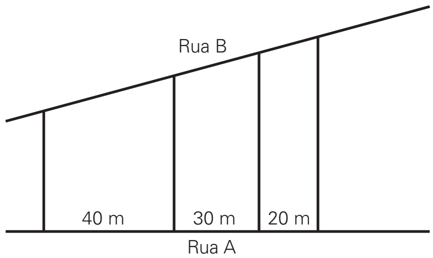
10. CPS – De acordo com as informações relativas ao esquema, o número máximo de estais que estão fixados do ponto A ao ponto B e que têm a outra extremidade na semirreta $\overline{BC}$ é

a) 7
b) 9
c) 11
d) 13
e) 15

11. CPS – A distância entre os pontos E e C é, em metros,

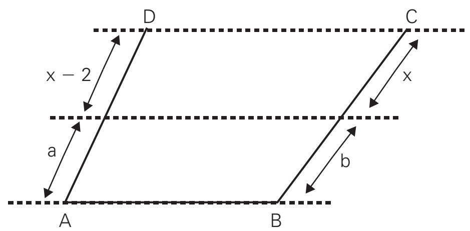
a) 6
b) 8
c) 10
d) 12
e) 14

12. Fuvest – Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A.



Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua tem 180 m?

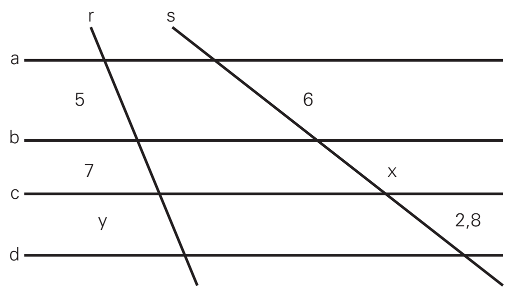
13. CFTMG – A figura representa um perfil de um reservatório d'água com lado **AB** paralelo a **CD**.



Se **a** é o menor primo e b é 50% maior que **a**, então, o valor de **x** é

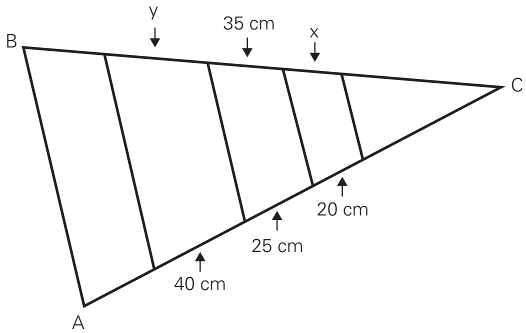
a) 4 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 10

14. Sistema Dom Bosco – Na figura a seguir, as retas **a**, **b**, **c** e **d** são paralelas e as retas **r** e **s** são transversais às paralelas.



Determine a soma de x + y

15. CFTPR – O jardineiro do Sr. Artur fez um canteiro triangular composto por folhagens e flores onde as divisões são todas paralelas à base AB do triângulo ABC, conforme figura.



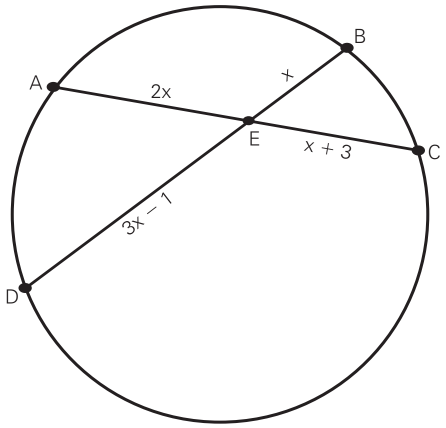
Sendo assim, as medidas x e y dos canteiros de flores são, respectivamente:

a) 30 cm e 50 cm.
b) 28 cm e 56 cm.
c) 50 cm e 30 cm.
d) 56 cm e 28 cm.
e) 40 cm e 20 cm.

16. IFCE – O triângulo ABC tem lados medindo 8 cm, 10 cm e 16 cm, enquanto o triângulo DEF, semelhante a ABC, tem perímetro 204 cm. O maior e o menor dos lados de DEF medem, respectivamente,

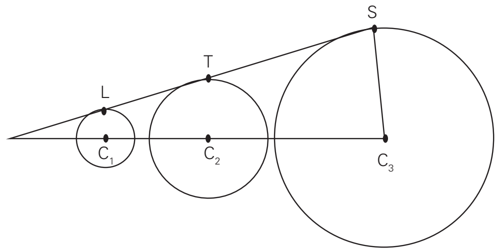
a) 64 cm e 32 cm
b) 60 cm e 48 cm
c) 48 cm e 24 cm
d) 96 cm e 48 cm
e) 96 cm e 64 cm

17. Unesp – Em um plano horizontal encontram-se representadas uma circunferência e as cordas AC e BD. Nas condições apresentadas na figura, determine o valor de x.



18. CFTMG (adaptado) C2-H8

A figura a seguir é um esquema representativo de um eclipse lunar em que a Lua, a Terra e o Sol estão representados pelas circunferências de centros C_1, C_2 e C_3, respectivamente, que se encontram alinhados. Considera-se que a distância entre os centros da Terra e do Sol é 400 vezes maior que a distância entre os centros da Terra e da Lua e que a distância do ponto T na superfície da Terra ao ponto S na superfície do Sol, como representados na figura, é de 150 milhões de quilômetros.

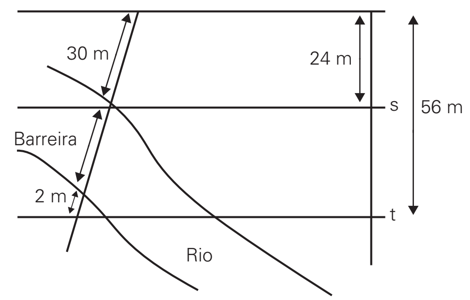


Sabendo-se que os segmentos de reta $\overline{C_1L}$, $\overline{C_2T}$ e $\overline{C_3S}$ são paralelos, a distância do ponto L, representado na superfície da Lua, ao ponto T na superfície da Terra, é igual a

a) 375.000 km
b) 400.000 km
c) 37.500.000 km
d) 40.000.000 km
e) 40.500.000 km

19. UFSM C2-H8

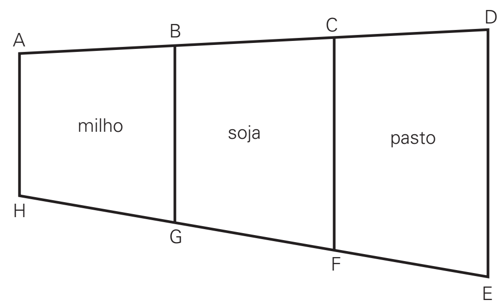
A crise energética tem levado as médias e grandes empresas a buscarem alternativas na geração de energia elétrica para a manutenção do maquinário. Uma alternativa encontrada por uma fábrica foi a de construir uma pequena hidrelétrica, aproveitando a correnteza de um rio que passa próximo às suas instalações. Observando a figura e admitindo que as linhas retas r, s e t sejam paralelas, pode-se afirmar que a barreira mede



a) 33 m **c)** 43 m **e)** 53 m
b) 38 m **d)** 48 m

20. CPS C2-H8

Para melhorar a qualidade do solo, aumentando a produtividade do milho e da soja, em uma fazenda é feito o rodízio entre essas culturas e a área destinada ao pasto. Com essa finalidade, a área produtiva da fazenda foi dividida em três partes, conforme a figura.



Considere que
- os pontos A, B, C e D estão alinhados;
- os pontos H, G, F e E estão alinhados;
- os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$ são, dois a dois, paralelos entre si;
- AB = 500 m, BC = 600 m, CD = 700 m e HE = 1 980 m.

Nessas condições, a medida do segmento $\overline{GF}$ é, em metros,

a) 665. **c)** 655. **e)** 645.
b) 660. **d)** 650.

15

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS I

BULGAC/ISTOCK

- Introdução
- Semelhança de figuras
- Triângulos semelhantes

HABILIDADES

- Aplicar os casos de semelhança de triângulos na resolução de problemas.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.

Obras públicas são viáveis e necessárias para manter ou aprimorar a qualidade de vida dos cidadãos.

Uma obra como a construção de uma ponte treliçada não é algo que se possa fazer sem um planejamento. Logo, o projeto é a primeira (e importante) fase em sua construção.

Observamos que a ponte da imagem tem muitos triângulos em sua estrutura. Eles, apesar de apresentarem tamanhos diferentes, têm características semelhantes, logo, são classificados como triângulos semelhantes.

FIGURAS SEMELHANTES

Duas figuras são classificadas como semelhantes quando seus lados correspondentes são proporcionais e seus ângulos correspondentes são congruentes.

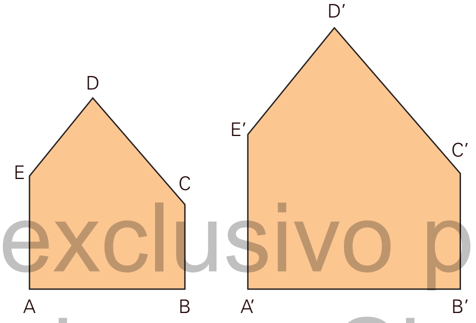


Figura 1 Figura 2

Lados correspondentes:

AB e A’B’, BC e B’C’, CD e C’D’ e C’D’, DE e D’E’, EA e E’A’

Ângulos correspondentes:

$A\hat{B}C = A'\hat{B}'C, B\hat{C}D \equiv B'\hat{C}'D, C\hat{D}E \equiv C'\hat{D}'E, D\hat{E}A \equiv D'\hat{E}'A, E\hat{A}B \equiv E'\hat{A}'B'$

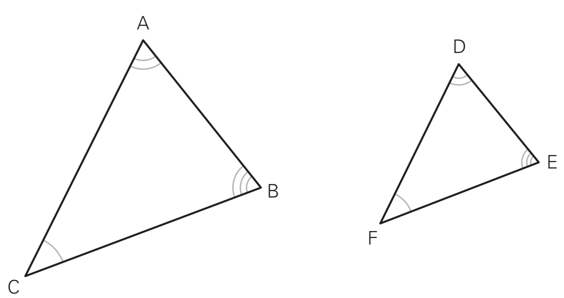
Comparando as medidas dos lados, temos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = k$$

O valor de k é constante e é denominado **razão de semelhança** entre as figuras 1 e 2.

TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, seus lados correspondentes são proporcionais e seus ângulos correspondentes são congruentes.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E} \text{ e } \hat{C} = \hat{F} \\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} = k \\ k = \text{razão de semelhança} \end{array}\right\} \leftrightarrow \Delta ABC : \Delta DEF$$

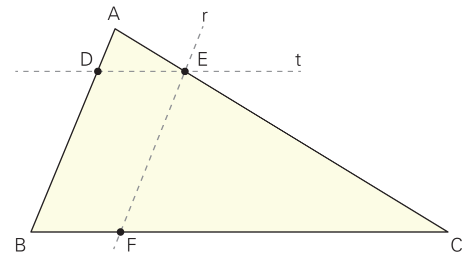
Fique atento à posição dos triângulos semelhantes. Para reconhecer os ângulos congruentes e os lados correspondentes, identificam-se os triângulos semelhantes colocando os vértices correspondentes na mesma sequência. Quando se diz ΔABC ~ ΔDEF, já está subentendido que A ↔ D, B ↔ E e C ↔ F.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Se uma reta é paralela a um dos lados do triângulo e intersecta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Demonstração:

Considere o triângulo **ABC** e uma reta **t** paralela ao lado $\overline{BC}$ que intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em dois pontos, D e E.



Como $\overline{DE}//\overline{BC}$, pelo teorema de Tales, sabemos que os lados serão proporcionais.

Sendo que:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \text{ é o ângulo comum aos} \\ \text{dois triângulos} \\ \hat{B} \cong \hat{D} \text{ e } \hat{C} \cong \hat{E} \end{array}\right\} \text{ângulos congruentes}$$

Temos:

$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ (Eq. 1)

Ao traçarmos uma segunda reta r, paralela ao segmento AB, vemos que AB // EF. Então:

$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$ (Eq. 2)

Da Eq. 1 Eq. 2, vem:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

Como o quadrilátero BDEF é um paralelogramo, segue que DE = BF. As razões ficam:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

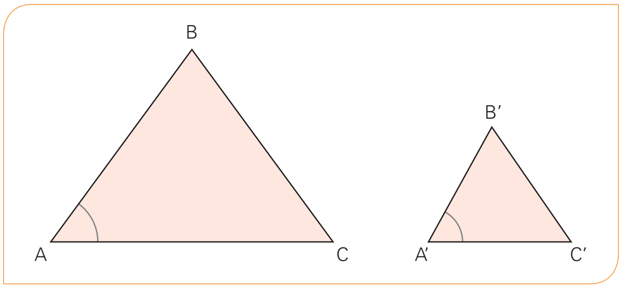
Como os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes, o ΔABC ~ ΔADE.

CASOS DE SEMELHANÇAS DE TRIÂNGULOS

Para que dois triângulos sejam semelhantes, é necessário que todos os ângulos correspondentes sejam congruentes e os todos os lados correspondentes sejam proporcionais. Como a soma dos ângulos internos do triângulo resulta em 180°, e o triângulo é um estrutura sólida, ou seja, os valores dos seus ângulos não se alteram quando suas medidas aumentam proporcionalmente, existem situações possíveis de concluir pela semelhança de dois triângulos sem a necessidade de analisar todas as condições exigidas na definição. Trata-se dos casos de semelhança.

Caso LAL

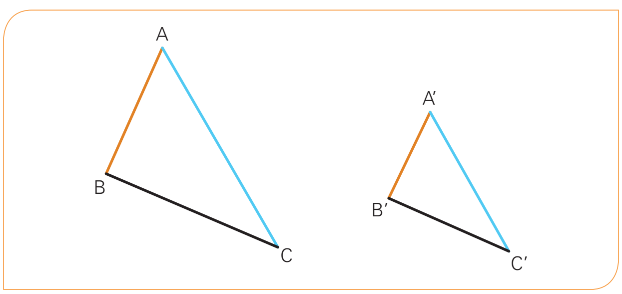
Se dois triângulos têm dois pares de lados proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes, então esses dois triângulos são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}\\ \hat{A}=\hat{A'}\end{array}\right\}\rightarrow \triangle ABC : \triangle A'B'C'$$

Caso LLL

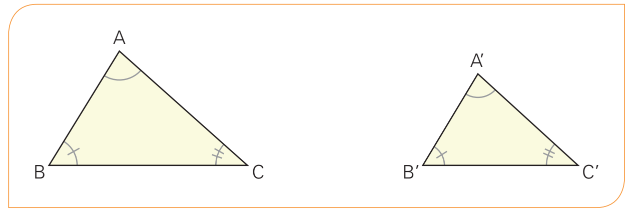
Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então esses dois triângulos são semelhantes.



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Caso AA

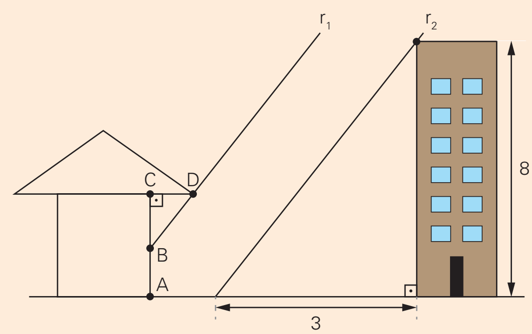
Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{B'}\\ \hat{C}=\hat{C'}\end{array}\right\}\rightarrow \Delta ABC : \Delta A'B'C'$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

CFTMG – Na figura a seguir, o segmento $\overline{AC}$ representa uma parede cuja altura é 2,9 m. A medida do segmento $\overline{AB}$ é 1,3 m e o segmento $\overline{CD}$ representa o beiral da casa. Os raios de sol r_1 e r_2 passam ao mesmo tempo pela casa e pelo prédio, respectivamente.



Se r_1 é paralelo com r_2, então o comprimento do beiral, em metros, é

a) 0,60 **b)** 0,65 **c)** 0,70 **d)** 0,75

Resolução

Sendo os triângulos retângulos semelhantes por AA e $\overline{BC}$ = 1,6 m, temos

$$\frac{\overline{CD}}{3}=\frac{1,6}{8}\rightarrow 8\cdot\overline{CD}=1,6\cdot 3\rightarrow 8\cdot\overline{CD}=14,8\rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{CD}=\frac{14,8}{8}\rightarrow \overline{CD}=0,6$$

Portanto, $\overline{CD}$ = 0,6 m.

ROTEIRO DE AULA

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

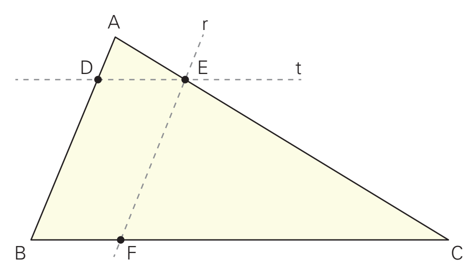
Semelhança de figuras

Duas figuras são classificadas como ___semelhantes___, quando seus lados correspondentes são ___proporcionais___ e os ângulos correspondentes são ___congruentes___.

Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os seus ___lados___ correspondentes são ___proporcionais___ e os seus ângulos, ___correspondentes___.

Teorema fundamental da semelhança de triângulos



Se uma reta é ___paralela___ a um dos lados do triângulo e corta os outros ___dois___ lados em ___pontos___ distintos, então o ___triângulo___ que ela determina é ___semelhante___ ao primeiro.

Casos de semelhanças

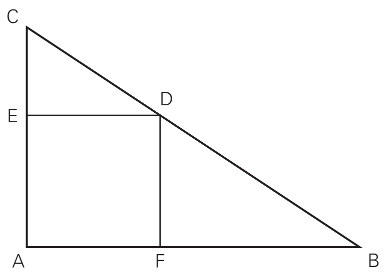
LAL – Se dois triângulos têm ___dois___ pares de lados ___proporcionais___ e os ___ângulos___ compreendidos entre eles são ___congruentes___, então esses dois triângulos são ___semelhantes___.

LLL – Se dois triângulos têm os três ___lados correspondentes___ proporcionais, então esses dois ___triângulos___ são semelhantes.

AA – Se dois triângulos têm dois ângulos ___correspondentes congruentes___, então eles são semelhantes.

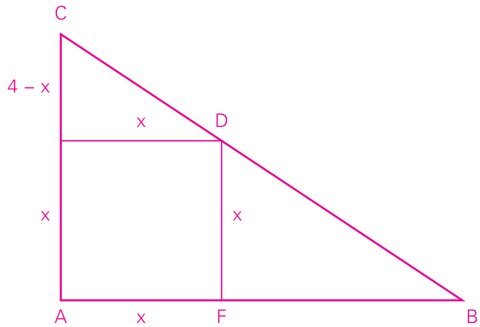
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-Rio – Na figura abaixo, temos um quadrado AEDF e $\overline{AC} = 4$ e $\overline{AB} = 6$.



Qual é o valor do lado do quadrado?

a) 2
b) 2,4
c) 2,5
d) 3
e) 4



Considerando x a medida do lado do quadrado, temos:
$\Delta CED \sim \Delta CAB$

$\frac{4-x}{4} = \frac{x}{6}$

$4x = 24 - 6x$

$4x + 6x = 24$

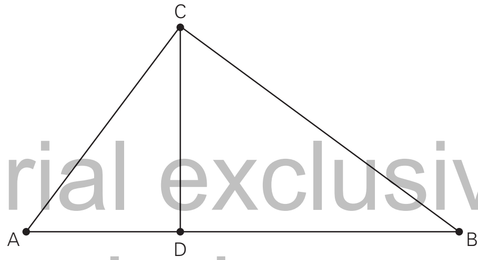
$10x = 24$

$x = \frac{24}{10}$

$x = 2,4$

Portanto, o valor do lado do quadrado é 2,4.

2. Unisinos (adaptado) – Na figura abaixo, temos que AC = 6, BC = 8 e os ângulos $A\hat{C}B$ e $C\hat{D}B$ são retos.



Com base nessas informações, quais as medidas dos segmentos AB e CD, respectivamente?

É fácil perceber que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo retângulo pitagórico de lados 3, 4 e 5.

Portanto, sua hipotenusa AB mede $5 \cdot 2 = 10$. Sua altura CD mede $2,4 \cdot 2 = 4,8$.

Portanto, AB = 10 e CD = 4,8.

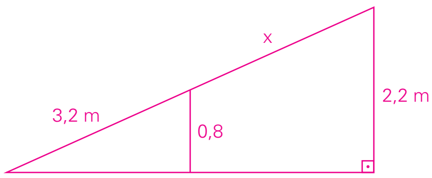
3. Enem C2-H8

A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 m. Um paciente, ao caminhar sobre a rampa, percebe que se deslocou 3,2 m e alcançou uma altura de 0,8 m.

A distância, em metros, que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é

a) 1,16 metro
b) 3,0 metros
c) 5,4 metros
d) 5,6 metros
e) 7,04 metros

Primeiro, deve-se desenhar a rampa para visualizar melhor o problema.



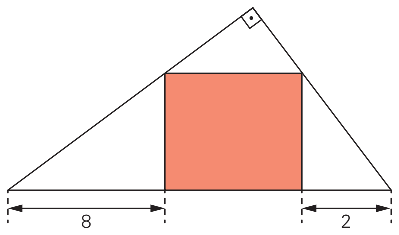
$\frac{2,2}{0,8} = \frac{3,2+x}{3,2} \rightarrow 0,8\,(3,2 + x) = 3,2 \cdot 2,2 \rightarrow$

$\rightarrow 2,56 + 0,8x = 7,04 \rightarrow 0,8x = 7,04 - 2,56 = 4,48 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{4,48}{0,8} \rightarrow x = 5,6$

Portanto, a distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é 5,6 metros.

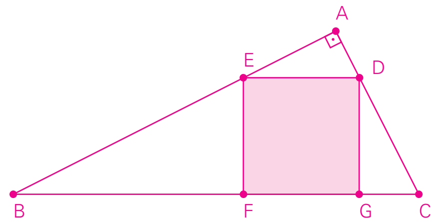
4. IFCE



O valor do lado de um quadrado inscrito em um triângulo retângulo, conforme o esboço mostrado na figura, é

a) 10.
b) 8.
c) 6.
d) 4.
e) 2.

Considere a figura.

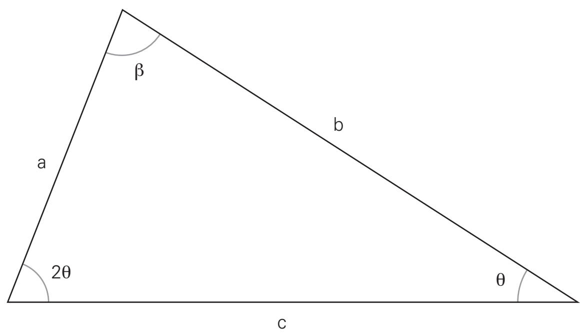


É fácil perceber que os triângulos BFG e DGC são semelhantes por AA. Portanto, se x é a medida do lado do quadrado, temos:

$\frac{x}{2} = \frac{8}{x} \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4.$

Portanto, o valor do lado de um quadrado inscrito em um triângulo retângulo é 4.

5. Unicamp – A figura abaixo exibe um triângulo com lados de comprimentos a, b, e c e ângulos internos θ, 2θ e β.



a) Supondo que o triângulo seja isósceles, determine todos os valores possíveis para o ângulo θ.
b) Prove que, se $c = 2a$, então $\beta = 90°$.

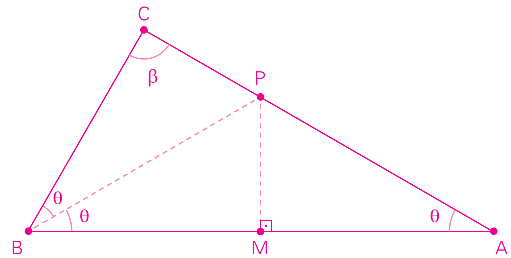
a) Podemos concluir que o triângulo é isósceles se $\beta = \theta$ ou $\beta = 2\theta$.

Portanto, no primeiro caso, temos $4\theta = 180° \rightarrow \theta = \frac{180°}{4} \rightarrow \theta = 45°$.

No segundo caso, temos $5\theta = 180° \rightarrow \theta = \frac{180°}{5} \rightarrow \theta = 36°$.

Logo, os valores possíveis para θ, são: $\theta = 36°$ e $\theta = 45°$.

b) Considere a figura, em que P é o pé da bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$.



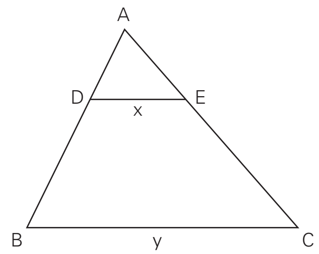
Sendo os ângulos $M\hat{B}P$ e $M\hat{A}P$ congruentes, podemos concluir que o triângulo ABP é isósceles de base AB.

Logo, se M é o ponto médio de AB, então $\overline{BM} = \frac{2a}{2} = a$ e $MP \perp AB$.

Portanto, como $BC = a$, $\overline{BP}$ é lado comum e $M\hat{B}P \equiv C\hat{B}P$, os triângulos MBP e CBP são congruentes por LAL.

Então, temos $\beta = 90°$.

6. EEAR – Seja um triângulo ABC conforme a figura. Se D e E são pontos, respectivamente, de AB e AC, de forma que $\overline{AD} = 4$, $\overline{DB} = 8$, $\overline{DE} = x$, $\overline{BC} = y$, então



a) y = x + 8
b) y = x + 4
c) y = 3x
d) y = 2x

Sendo DE // BC, os triângulos ABC e ADE são semelhantes por AA. Logo:

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

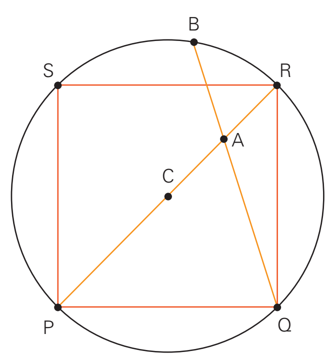
$\frac{4}{12} = \frac{x}{y} \rightarrow 4y = 12x \rightarrow y = \frac{12x}{4} \rightarrow$

$\rightarrow y = 3x$.

Portanto, y = 3x.

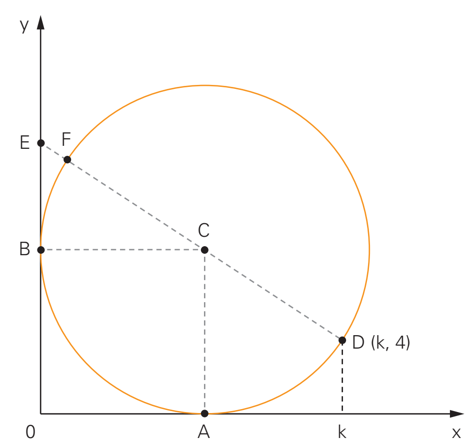
EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. FGV – O quadrado PQRS está inscrito em um círculo de centro C. A corda intersecta a diagonal do quadrado em A, sendo que $\overline{QA} = 6$ cm e $\overline{AB} = 4$ cm.



Nas condições descritas, a medida do lado do quadrado PQRS, em cm, é igual a?

8. PUC-SP – Considere uma circunferência tangente aos eixos ortogonais cartesianos nos pontos A e B, com 10 cm de raio, conforme mostra a figura.



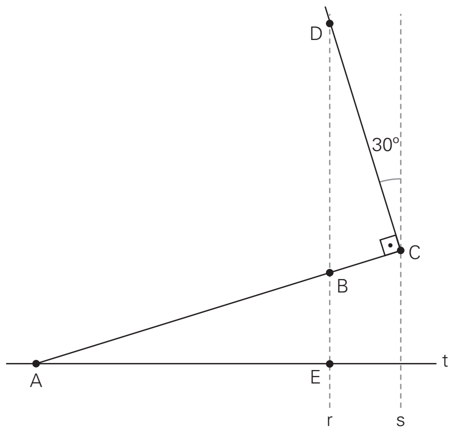
Sabendo que os pontos E, F, C, D (k, 4) estão alinhados, a medida do segmento $\overline{EF}$ é

a) 1,0 cm
b) 1,5 cm
c) 2,0 cm
d) 2,5 cm

9. FGV – Em 2013, uma empresa exportou 600 mil dólares e, em 2014, exportou 650 mil dólares de um certo produto. Suponha que o gráfico das exportações y (em milhares de dólares) em função do ano x seja formado por pontos colineares. Desta forma, a exportação triplicará em relação à de 2013 no ano de:

a) 2036
b) 2038
c) 2035
d) 2037
e) 2034

10. FGV (adaptado) – Na figura seguinte, as retas r e s são paralelas entre si, e perpendiculares à reta t. Sabe-se, ainda, que AB = 6 cm, CD = 3 cm, $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{CD}$ e à medida do ângulo entre $\overline{CD}$, e a reta s é 30°.



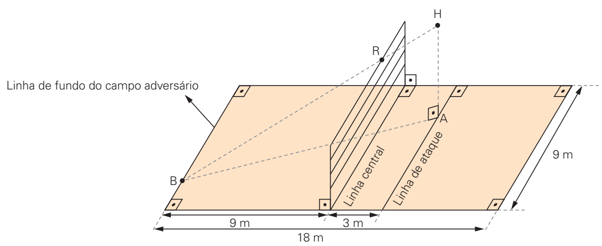
Fora de escala.

Nas condições descritas, a medida de $\overline{DE}$, em cm, é igual a?

11. UFG – As "Regras Oficiais de Voleibol", aprovadas pela Federação Internacional de Voleibol (FIVB), definem que a quadra para a prática desse esporte deve ser retangular, medindo 18 m de comprimento por 9 m de largura.

A rede, colocada verticalmente sobre a linha central da quadra, deve ter uma altura de 2,43 m para jogos profissionais masculinos. Em cada campo da quadra há uma linha de ataque, desenhada a 3 m de distância da linha central, marcando a zona de frente, conforme a figura a seguir.

Durante um jogo profissional masculino, um jogador fez um ponto do seguinte modo: estando sobre a linha de ataque de seu campo, saltou verticalmente batendo na bola no ponto H, fazendo-a descrever uma trajetória retilínea, passando rente ao topo da rede, no ponto R, tocando a quadra exatamente num ponto B, pertencente à linha de fundo do campo adversário.



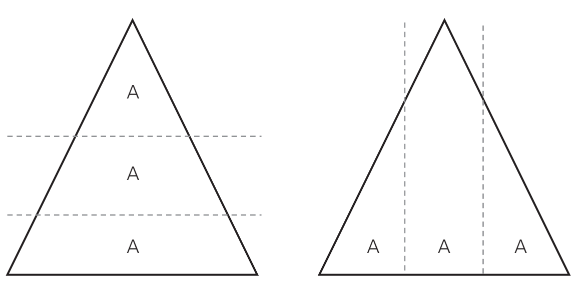
Segundo as condições descritas, calcule a altura, AH, que o jogador alcançou para conseguir fazer o ponto.

12. Unesp – Uma bola de tênis é sacada de uma altura de 21 dm, com alta velocidade inicial e passa rente à rede, a uma altura de 9 dm.

Desprezando-se os efeitos do atrito da bola com o ar e do seu movimento parabólico, considere a trajetória descrita pela bola como sendo retilínea e contida num plano ortogonal à rede. Se a bola foi sacada a uma distância de 120 dm da rede, a que distância dessa rede, em metros, ela atingirá o outro lado da quadra?

Texto para as próximas 2 questões:

Os dois triângulos da figura são congruentes, ambos isósceles com base e altura medindo 1.



O triângulo da esquerda foi dividido em três partes de áreas iguais por duas retas paralelas à sua base e o da direita foi dividido em três partes de áreas iguais por duas retas perpendiculares à sua base.

13. Insper – A distância entre as duas retas perpendiculares à base no triângulo da direita é igual a

a) $\frac{3-\sqrt{2}}{6}$.

b) $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$.

c) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

d) $\frac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$.

e) $\frac{3-\sqrt{6}}{3}$.

14. Insper – A distância entre as duas retas paralelas tracejadas no triângulo da esquerda é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$.

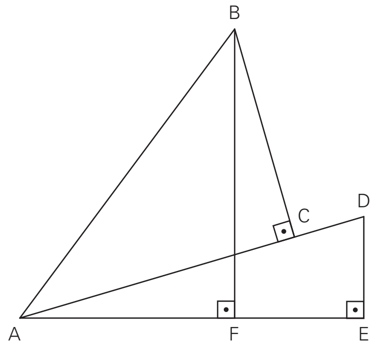
b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

c) $\frac{\sqrt{6}-1}{3}$.

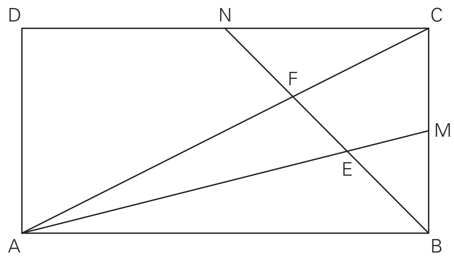
d) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$.

e) $\frac{\sqrt{6}-3}{\sqrt{3}}$.

15. UFPE – Na figura abaixo $\overline{AB} = \overline{AD} = 25$, $\overline{BC} = 15$ e $\overline{DE} = 7$. Os ângulos $D\hat{E}A$, $B\hat{C}A$ e $B\hat{F}A$ são retos. Determine $\overline{AF}$.



16. Fuvest – Na figura, o retângulo ABCD tem lados de comprimento AB = 4 e BC = 2. Sejam M o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e N o ponto médio do lado $\overline{CD}$. Os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{AC}$ interceptam o segmento $\overline{BN}$ nos pontos E e F, respectivamente.



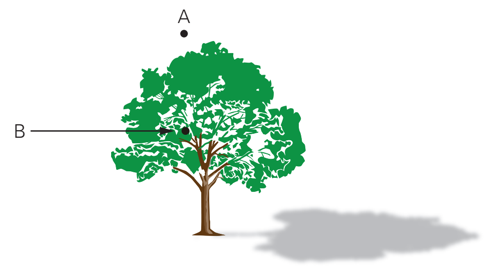
A área do triângulo AEF é igual a

a) $\frac{24}{25}$ **b)** $\frac{29}{30}$ **c)** $\frac{61}{60}$ **d)** $\frac{16}{15}$ **e)** $\frac{23}{20}$

17. FGV – Bem no topo de uma árvore de 10,2 metros de altura, um gavião casaca-de-couro, no ponto A da figura, observa atentamente um pequeno roedor que subiu na mesma árvore e parou preocupado no ponto B, bem abaixo do gavião, na mesma reta vertical em relação ao chão. Junto à árvore, um garoto fixa verticalmente no chão uma vareta de 14,4 centímetros de comprimento e, usando uma régua, descobre que a sombra da vareta mede 36 centímetros de comprimento.

Exatamente nesse instante ele vê, no chão, a sombra do gavião percorrer 16 metros em linha reta e ficar sobre a sombra do roedor, que não se havia movido de susto.

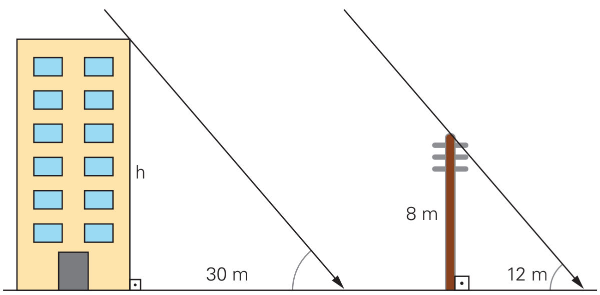
Calcule e responda: Quantos metros o gavião teve de voar para capturar o roedor, se ele voa verticalmente de A para B?



ESTUDO PARA O ENEM

18. IFPE C2-H8

Às 10 h 45 min de uma manhã ensolarada, as sombras de um edifício e de um poste de 8 metros de altura foram medidas ao mesmo tempo. Foram encontrados 30 metros e 12 metros, respectivamente, conforme a figura abaixo.

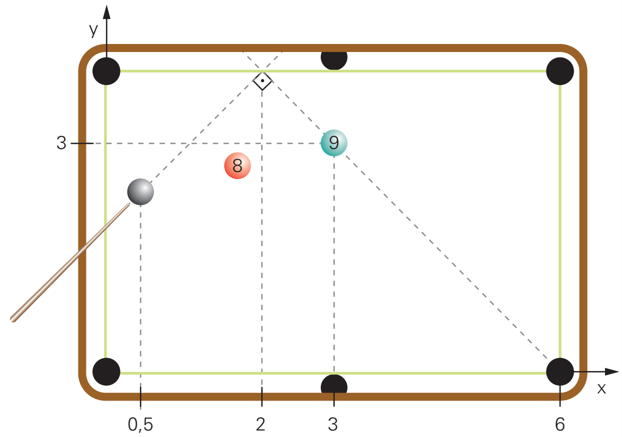


De acordo com as informações acima, a altura h do prédio é de

a) 12 metros.
b) 18 metros.
c) 16 metros.
d) 14 metros.
e) 20 metros.

19. Enem C2-H6

Em sua vez de jogar, um jogador precisa dar uma tacada na bola branca, de forma a acertar a bola 9 e fazê-la cair em uma das caçapas de uma mesa de bilhar. Como a bola 8 encontra-se entre a bola branca e a bola 9, esse jogador adota a estratégia de dar uma tacada na bola branca em direção a uma das laterais da mesa, de forma que, ao rebater, ela saia em uma trajetória retilínea, formando um ângulo de 90° com a trajetória da tacada, conforme ilustrado na figura.



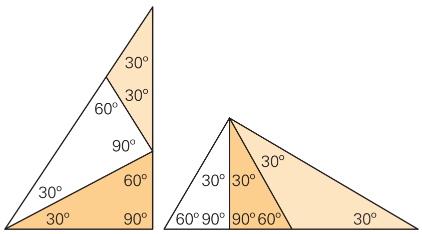
Com essa estratégia, o jogador conseguiu encaçapar a bola 9. Considere um sistema cartesiano de eixos sobre o plano da mesa, no qual o ponto de contato da bola com a mesa define sua posição nesse sistema. As coordenadas do ponto que representa a bola 9 são (3; 3), o centro da caçapa de destino tem coordenadas (6; 0) e a abscissa da bola branca é 0,5, como representados na figura.

Se a estratégia deu certo, a ordenada da posição original da bola branca era

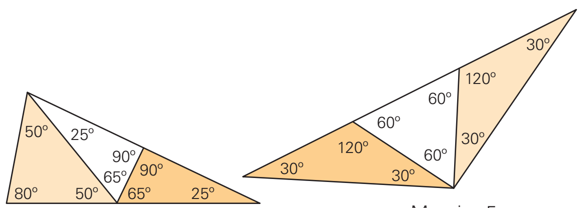
a) 1,3
b) 1,5
c) 2,1
d) 2,2
e) 2,5

20. Enem C2-H6

Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.



Mosaico 1 Mosaico 2 Mosaico 3



Mosaico 4 Mosaico 5

Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

16

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS II

- Polígonos semelhantes
- Relação entre perímetros
- Relação entre áreas

HABILIDADES

- Aplicar os casos de semelhança de triângulos na resolução de problemas.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.

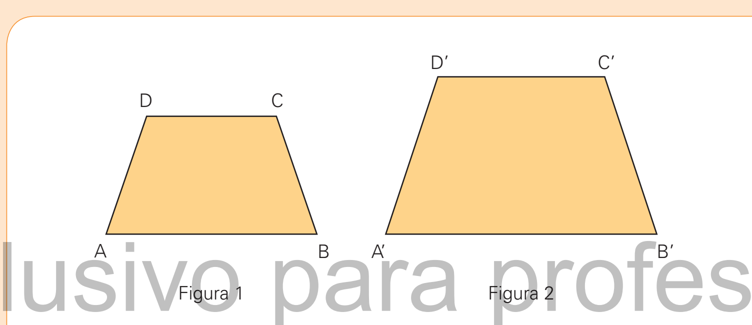

PESHKOV/ISTOCK

Maquete de um empreendimento.

Como vimos no módulo anterior, o desenvolvimento de projetos requer planejamento. Em projetos extensos, é comum as construtoras deixarem réplicas do empreendimento em seus estandes de vendas. Logo, todas as formas que aparecem nas réplicas serão semelhantes às reais. Contudo, nesse módulo continuaremos a aplicar as semelhanças entre figuras planas, tanto em triângulos como em outros polígonos.

POLÍGONOS SEMELHANTES

Polígonos com dois lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes são denominados **polígonos semelhantes**.



Lados correspondentes:
AB e A′B′, BC e B′C′, CD e C′D′, DA e D′A′

Ângulos correspondentes: $A\hat{B}C \equiv A'\hat{B'}C'$, $B\hat{C}D \equiv B'\hat{C'}D'$, $C\hat{D}A \equiv C'\hat{D'}A'$, $D\hat{A}B \equiv D'\hat{A'}B'$

Comparando os segmentos, encontramos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = r \text{ (r: razão de semelhança)}$$

PROPRIEDADES DOS POLÍGONOS SEMELHANTES

Relação entre os perímetros

Se dois polígonos semelhantes têm razão de semelhança para seus lados igual a **r**, a razão de semelhança entre seus perímetros também será igual a **r**.

Dados dois triângulos semelhantes, obtemos:

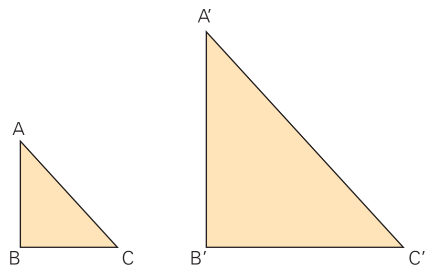


Figura 1 Figura 2

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Temos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = r \rightarrow \frac{ABC}{A'B'C'} = r$$

$$\therefore \frac{\text{Perímetro } \Delta ABC}{\text{Perímetro } \Delta A'B'C'} = r$$

Relação entre as áreas

Se dois polígonos semelhantes têm razão de semelhança para seus lados igual a **r**, a razão de semelhança entre suas áreas será **r²**.

Dados dois triângulos semelhantes, obtemos:

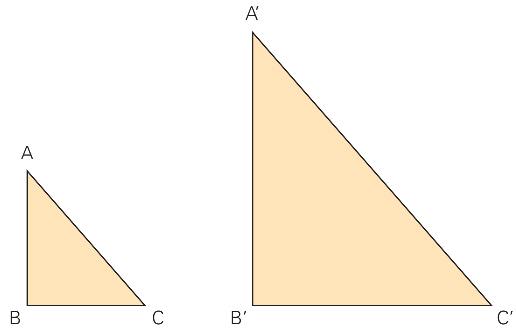


Figura 1 Figura 2

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Temos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = r$$

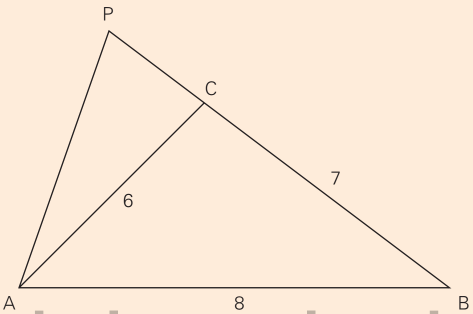
$$\frac{\text{Área}_1}{\text{Área}_2} = \frac{\frac{AB \cdot BC}{2}}{\frac{A'B' \cdot B'C'}{2}} = \frac{AB \cdot BC}{A'B' \cdot B'C'}$$

$$\frac{\text{Área}_1}{\text{Área}_2} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{BC}{B'C'} = r \cdot r = r^2$$

$$\frac{\text{Área}_1}{\text{Área}_2} = r^2$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

FGV – No triângulo ABC, AB = 8, BC = 7, AC = 6 e o lado $\overline{BC}$ foi prolongado, como mostra a figura, até o ponto P, formando-se um triângulo PAB, semelhante ao triângulo PCA.



O comprimento do segmento PC é:

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

Resolução

AB = 8, BC = 7, AC = 6

$A\hat{P}C$ é comum para os dois triângulos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{PA}{PC} \rightarrow \frac{8}{6} = \frac{PA}{PC} \rightarrow 6PA = 8PC \rightarrow PA = \frac{8PC}{6} = \frac{4PC}{3}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{PB}{PA} \rightarrow \frac{8}{6} = \frac{7+PC}{PA} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{7+PC}{\frac{4}{3}PC} \rightarrow \frac{16}{9}PC = 7 + PC \rightarrow$$

$$\rightarrow 16PC = 63 + 9PC \rightarrow 16PC - 9PC = 63 \rightarrow$$

$$\rightarrow 7PC = 63 \rightarrow PC = \frac{63}{7} = 9$$

Portanto, PC = 9.

ROTEIRO DE AULA

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS II

Polígonos semelhantes

Polígonos que possuem dois ___lados correspondentes___ proporcionais e os ___ângulos correspondentes___ congruentes são denominados ___polígonos semelhantes.___.

Relação entre os perímetros

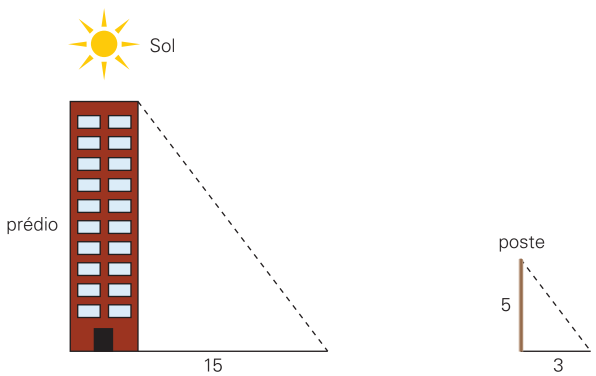
Se dois polígonos ___semelhantes___ possuem ___razão de semelhança___ para os seus lados igual a ___r___, a razão de semelhança entre os seus ___perímetros___ também será igual a ___r___.

Relação entre as áreas

Se dois polígonos ___semelhantes___ possuem ___razão de semelhança___ para os seus ___lados___ igual a ___r___, a razão de semelhança entre suas ___áreas___ será ___r^2___.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unesp – A sombra de um prédio, em um terreno plano, em uma determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m. A altura do prédio, em metros, é:



a) 25
b) 29
c) 30
d) 45
e) 75

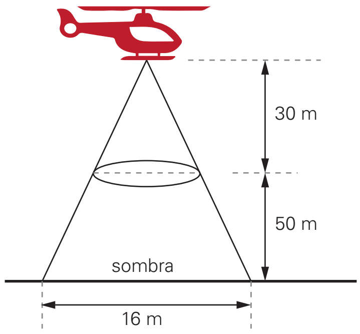
Observe que a sombra e o raio solar sempre determinam o mesmo ângulo. Também sabemos que a altura é uma medida de segmento de reta que faz um ângulo de 90°. Dessa maneira, temos dois ângulos correspondentes congruentes. Pelo caso AA, os triângulos formados pela sombra, altura e raio solar na imagem acima são semelhantes. Assim sendo, basta usar a proporcionalidade entre as medidas de seus lados para encontrar a altura do prédio:

$\frac{x}{5} = \frac{15}{3} \rightarrow 3x = 15 \cdot 5 \rightarrow 3x = 75 \rightarrow x = \frac{75}{3}$

$\therefore x = 25$

2. Unirio C2-H8

Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura anterior. Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do disco mede, em m, aproximadamente:



a) 3,0
b) 3,5
c) 4,0
d) 4,5
e) 5,0

Observe, na imagem, que os triângulos formados são semelhantes. Para calcular a base do triângulo pequeno, podemos usar regra de três da seguinte maneira:

$\frac{x}{30} = \frac{16}{30 + 50}$

Repare que a altura do triângulo grande é a distância entre o helicóptero e o chão, que, na imagem, está dividida em duas partes pela presença do disco voador. Utilizando a propriedade fundamental das proporções, teremos:

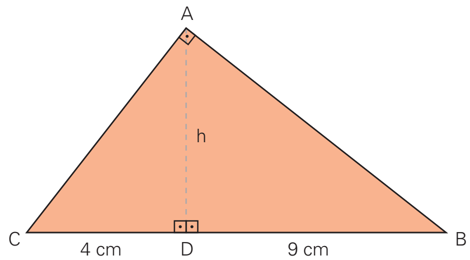
$\frac{x}{30} = \frac{16}{30 + 50} \rightarrow (30 + 50)x = 30 \cdot 16 \rightarrow 80x = 480 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{480}{80}$

$\therefore x = 6$

Logo, o diâmetro do disco voador é 6 m. Como o raio é metade do diâmetro, então o raio do disco voador é 3 m.

3. Funcab – A figura abaixo (meramente ilustrativa e fora de escala) representa um triângulo ABC retângulo em A, dividido em dois triângulos, ACD e ABD, ambos retângulo sem D.



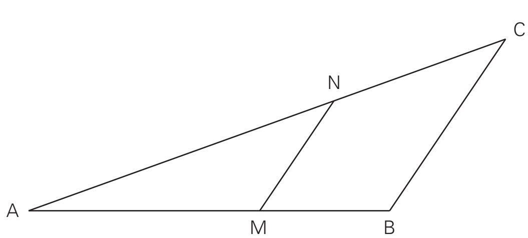
O valor, em cm, de AD = h, é?

Os triângulos CDA e ADB são semelhantes. Logo:

$\frac{4}{h} = \frac{h}{9} \rightarrow h \cdot h = 4 \cdot 9 \Rightarrow h^2 = \sqrt{36}$

$\therefore$ h = 6 cm

4. CFTMG – No triângulo ABC da figura a seguir, $\overline{MN} / /\overline{BC}$ e a medida de $\overline{AC}$ é igual a 30 cm. Sabe-se que o ponto M dista 8 cm do vértice B, que $\overline{AB}$ mede $\frac{2}{3}$ da medida de $\overline{AC}$ e que a medida de $\overline{BC}$ vale a metade da medida de $\overline{AC}$.



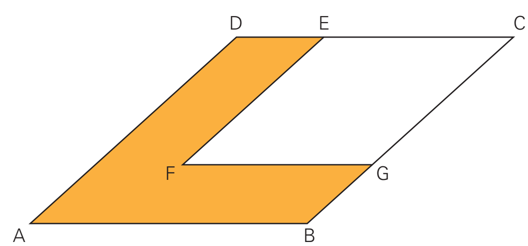
O perímetro do triângulo AMN da figura mede, em cm,

a) 15
b) 21
c) 27
d) 39

Os triângulos ABC e AMN são semelhantes por AA. Em consequência, sabendo que $\overline{AM}$ = 12 cm e $2p_{ABC}$ = 30 + 20 + 15 = 65 cm temos:

$\frac{2p_{AMN}}{2p_{ABC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \rightarrow 2p_{AMN} = \frac{12}{20} \cdot 65 \rightarrow 2p_{AMN} = 39$ cm.

5. Unesp (adaptado) – Na figura, o losango FGCE possui dois lados sobrepostos aos do losango ABCD e sua área é indicada em laranja.



Se o lado do losango ABCD mede 6 cm, quanto mede o lado do losango FGCE?

Desde que os losangos FGCE e ABCD são semelhantes, temos:

$\frac{(FGCE)}{(ABCD)} = \frac{1}{2} = k^2$, com k sendo a razão de semelhança.

Por conseguinte, dado que AB = 6 cm:

$\frac{FG}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow FG = 3\sqrt{2}$ cm

6. FMP (adaptado) – Os lados de um triângulo medem 13 cm, 14 cm e 15 cm, e sua área mede 84 cm². Considere um segundo triângulo semelhante ao primeiro, cuja área mede 336 cm². A medida do semiperímetro do segundo triângulo, em centímetros, é?

Seja 2p o perímetro desejado; como os triângulos são semelhantes e o perímetro do primeiro triângulo é igual a 13 + 14 + 15 = 42 cm, temos:

$$\left(\frac{2p}{42}\right)^2 = \frac{336}{84} \rightarrow \left(\frac{2p}{42}\right)^2 = 4 \rightarrow \frac{2p}{42} = \sqrt{4} \rightarrow \frac{2p}{42} = 2 \rightarrow 2p = 84$$

Portanto, 2 p = 84 cm.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

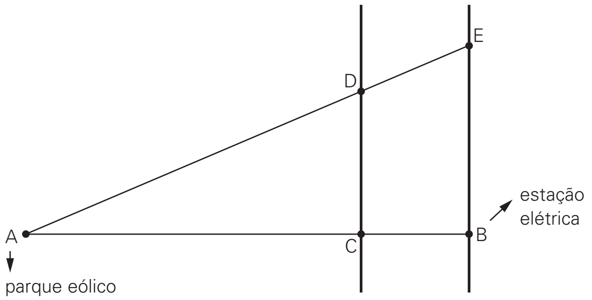
7. CPS – Os parques eólicos marítimos apresentam vantagens em relação aos parques eólicos terrestres, pois neles não há problema com o impacto sonoro e o desgaste das turbinas é menor, devido à menor turbulência do vento.

Na instalação dos parques eólicos marítimos, é preciso calcular sua distância até o continente, a fim de instalar os cabos condutores de eletricidade.

SIMON DAWSON/BLOOMBERG VIA GETTY IMAGES

<http://tinyurl.com/jaz8hlw>. Acesso em: 10.03.2016. Original colorido.

Observe o esquema que representa um parque eólico (A), uma estação elétrica (B) no continente e pontos auxiliares C, D e E para o cálculo da distância do parque eólico até a estação elétrica no continente.



No esquema temos:

- Ponto A: parque eólico marítimo;
- Ponto B: estação elétrica no continente;
- Ponto C: ponto auxiliar ($C \in \overline{AB}$);
- Ponto D: ponto auxiliar ($D \in \overline{AE}$);
- Ponto E: ponto auxiliar;
- A medida do segmento $\overline{CD}$ é 150 metros;
- A medida do segmento $\overline{BC}$ é 100 metros;
- A medida do segmento $\overline{BE}$ é 200 metros;
- Os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$ são paralelos entre si.

Assim sendo, é correto afirmar que a distância do parque eólico marítimo até a estação elétrica no continente é, em metros,

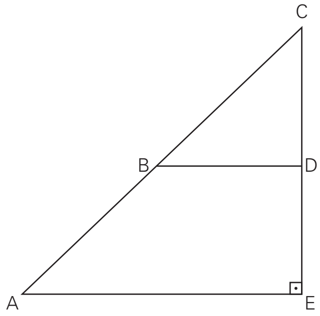
a) 75
b) 100
c) 300
d) 400
e) 425

8. Ifsul – A sombra de uma torre mede 4,2 m de comprimento. Na mesma hora a sombra de um poste mede 3 m de altura e 12 cm de comprimento. Qual a altura da torre?

a) 95 m
b) 100 m
c) 105 m
d) 110 m

9. Cefet-MG – A figura abaixo tem as seguintes características:

- O ângulo $\hat{E}$ é reto;
- O segmento de reta $\overline{AE}$ é paralelo ao segmento $\overline{BD}$;
- Os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DE}$ medem, respectivamente, 5, 4 e 3.

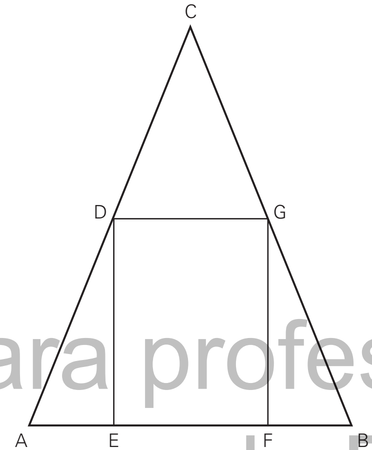


O segmento $\overline{AC}$, em unidades de comprimento, mede:

a) 8
b) 12
c) 13
d) $\sqrt{61}$
e) $5\sqrt{10}$

10. CFTMG (adaptado) – Numa festa junina, além da tradicional brincadeira no alto do pau de sebo, quem descobrisse a sua altura ganharia um prêmio. O ganhador do desafio fincou, paralelamente a esse mastro, um bastão de 1 m. Medindo-se as sombras projetadas no chão pelo bastão e pelo pau, ele encontrou, respectivamente, 25 dm e 125 dm. Portanto, a altura do "pau de sebo", em metros, é:

11. PUC-Rio – O retângulo DEFG está inscrito no triângulo isósceles ABC, como na figura abaixo:



Assumindo $\overline{DE} = \overline{GF} = 12$, $\overline{EF} = \overline{DG} = 8$ e $\overline{AB} = 15$, a altura do triângulo ABC é:

a) $\frac{35}{4}$

b) $\frac{150}{7}$

c) $\frac{90}{7}$

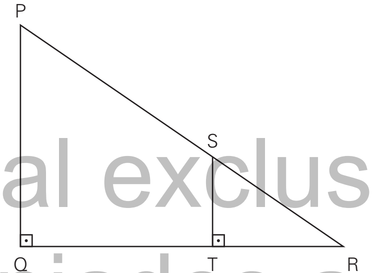
d) $\frac{180}{7}$

e) $\frac{28}{5}$

12. UFRN – Numa projeção de filme, o projetor foi colocado a 12 m de distância da tela. Isto fez com que aparecesse a imagem de um homem com 3 m de altura. Numa sala menor, a projeção resultou na imagem de um homem com apenas 2 m de altura. Nessa nova sala, a distância do projetor em relação à tela era de:

a) 18 m
b) 8 m
c) 36 m
d) 9 m

13. CFTMG – A figura representa os triângulos retângulos PQR e STR, sendo RS = 5 cm, ST = 3 cm e QT = 6 cm. A medida do cateto PQ, em centímetros, é

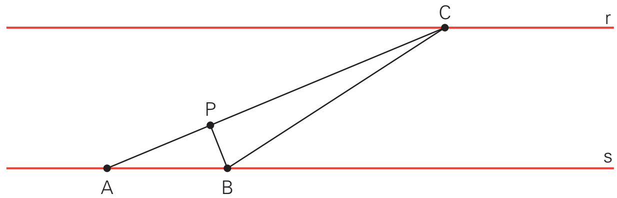


a) 7,5
b) 8,2
c) 8,6
d) 9,0
e) 9,2

14. Exatus – O soldado Ryan reside no 13º andar de um prédio de 15 andares. Sabe-se a distância entre o piso do andar onde ele mora e o piso térreo é de 39 m. Uma pessoa com altura de 1,8 m na parada ao lado desse edifício projeta uma sombra de 30 cm. Neste mesmo instante, a sombra projetada pelo edifício onde mora o soldado Ryan é igual a:

a) 7 m
b) 8 m
c) 9 m
d) 10 m
e) 11 m

15. CFTMG – Analise a figura a seguir.



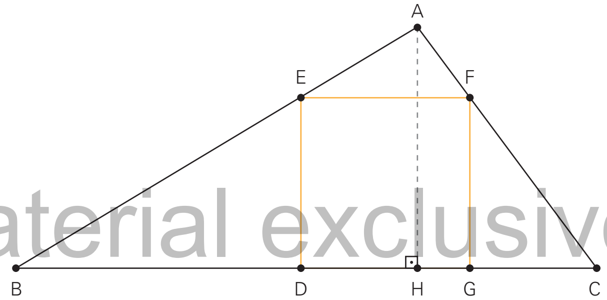
Sobre essa figura, são feitas as seguintes considerações:

I. r e s são retas paralelas e distam 3 cm uma da outra.
II. $\overline{AB}$ é um segmento de 1,5cm contido em s.
III. O segmento $\overline{AC}$ mede 4 cm.
IV. $\overline{BP}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.

A medida do segmento $\overline{BP}$, em cm, é

a) $\frac{8}{9}$
b) $\frac{9}{8}$
c) $\frac{8}{5}$
d) $\frac{9}{5}$

16. CFTMG – A figura a seguir apresenta um quadrado DEFG e um triângulo ABC cujo lado BC mede 40 cm e a altura AH, 24 cm.



A medida do lado desse quadrado é um número

a) par.
b) primo.
c) divisível por 4.
d) múltiplo de 5.

17. Ifsul – A sombra de uma torre mede 4,2 m de comprimento. Na mesma hora há a sombra de um poste de 3 m de altura e 12 cm de comprimento. Qual a altura da torre?

a) 95 m
b) 100 m
c) 105 m
d) 110 m

18. IFPE C2-H7

Em um dia ensolarado, às 10 h da manhã, um edifício de 40 metros de altura produz uma sombra de 18 metros. Nesse mesmo instante, uma pessoa de 1,70 metros de altura, situada ao lado desse edifício, produz uma sombra de

a) 1,20 metro.
b) 3,77 metros.
c) 26,47 centímetros.
d) 76,5 centímetros.
e) 94 centímetros.

19. UCS C2-H9

Uma escada está apoiada em uma parede a uma altura de 16 m do solo plano. A distância do pé da escada até a parede é igual a 12 m. O centro de gravidade da escada está a um terço do comprimento dela, medido a partir do seu apoio no chão. Nessa situação, o comprimento da escada e a altura aproximada do seu centro de gravidade até o chão são, respectivamente, iguais a:

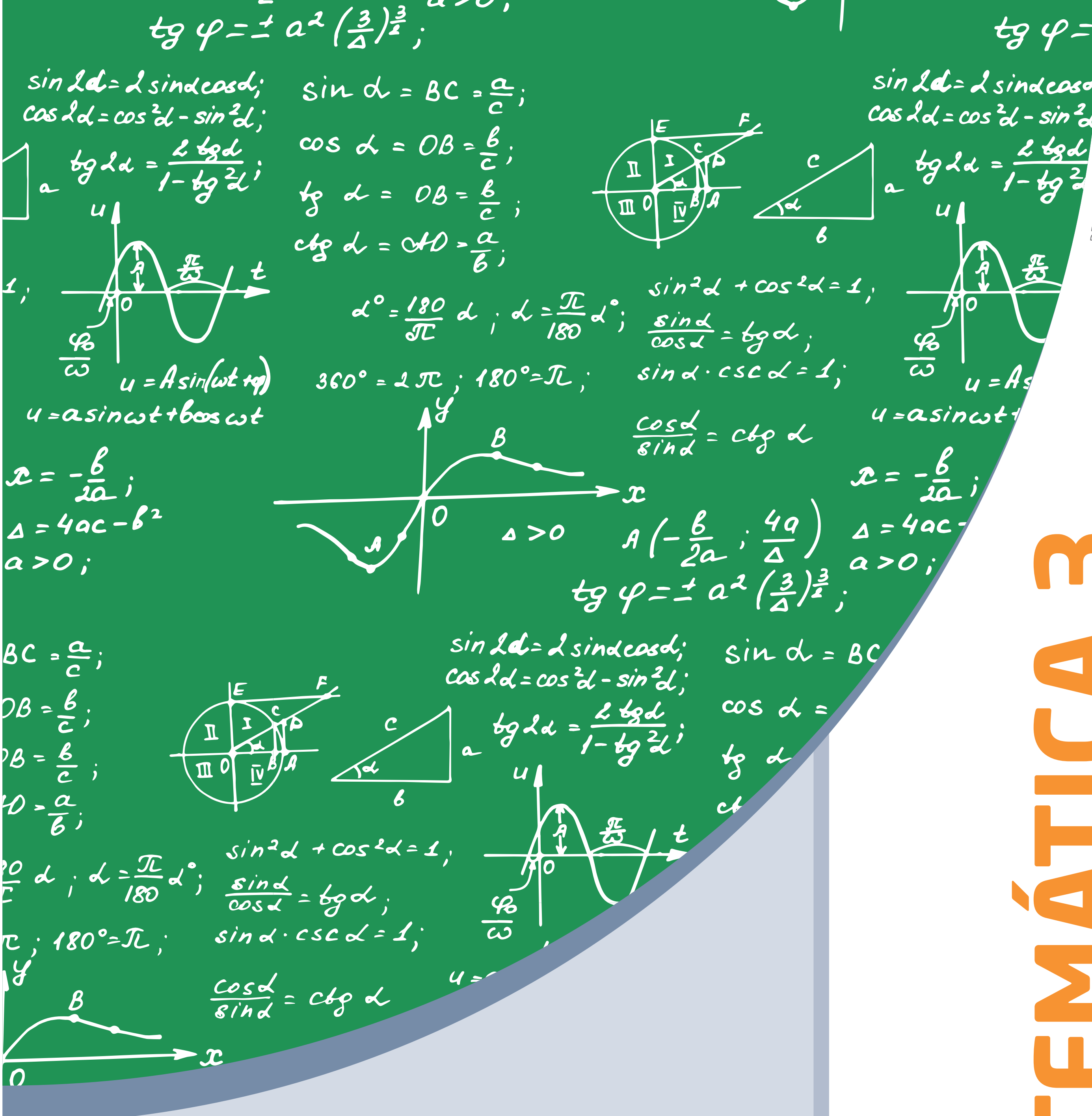
a) 20 m e 5,3 m
b) 20 m e 6,6 m
c) 28 m e 9,3 m
d) $\sqrt{56}$ m e 5,3 m
e) $\sqrt{56}$ m e 2,6 m

20. Enem C2-H8

A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente, ao caminhar sobre a rampa, percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou a altura de 0,8 metro.

A distância, em metros, que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

a) 1,16 metros
b) 3,0 metros
c) 5,4 metros
d) 5,6 metros
e) 7,04 metros



DR PROJECT/SHUTTERSTOCK

MATEMÁTICA 3

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

1 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

- Conceitos iniciais
- Seno, cosseno e tangente de ângulo agudo
- Secante, cossecante e cotangente

HABILIDADES

- Identificar razões trigonométricas no triângulo retângulo.
- Aplicar as razões trigonométricas para obtenção de valores numéricos.
- Resolver problemas envolvendo razões trigonométricas.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
- Identificar características de figuras planas e espaciais.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

CONCEITOS INICIAIS

A palavra **trigonometria** vem do grego *trigonon* (que significa "triângulo") e *metron* (que quer dizer "medida"). Ela remete ao estudo de ângulos e lados dos triângulos, figuras básicas no estudo de Geometria e de vasto uso em diversas atividades profissionais e situações cotidianas.

Não se sabe a origem da **Trigonometria**; no entanto, pode-se afirmar que ela surgiu principalmente para solucionar problemas relacionados a construção, agricultura, navegação e astronomia, com os egípcios e os babilônios, há mais de 6 000 anos.

Os estudos trigonométricos estão relacionados ao **teorema de Pitágoras.** Por meio de sua aplicação, determinam-se medidas desconhecidas, método que será visto adiante.

Em Trigonometria, os ângulos de 30°, 45° e 60° têm destaque em virtude de sua prática aplicabilidade.


NEJDET DUZEN/SHUTTERSTOCK

Monumento dedicado a Pitágoras, na Ilha de Samos, Grécia.

Na mecânica clássica, demonstra-se que o ângulo de lançamento, tomado em relação à horizontal, para o qual se obtém o máximo alcance com a mesma velocidade de tiro, é de 45°.


AGIF/SHUTTERSTOCK

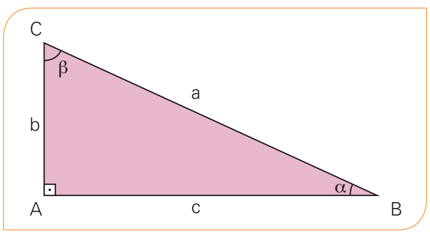
A bola atinge o máximo alcance se o seu lançamento forma um ângulo de 45° em relação à horizontal.

Na construção civil, regularmente são feitas medições de ângulos, fundamentais para a aplicação dos conhecimentos trigonométricos nas edificações.


BANNAFARSAI_STOCK/ISTOCKPHOTO

Teodolito é o instrumento utilizado para medição de ângulos.

Antes de iniciar o estudo de trigonometria, convém rever algumas propriedades. O triângulo a seguir apresenta um ângulo interno reto (mede 90° ou $\frac{\pi}{2}$ rad); por isso, é classificado como triângulo retângulo.



Para todo triângulo é válida a seguinte propriedade:

> A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.

Em relação ao triângulo ABC apresentado, tem-se:

$$\alpha + \beta + 90° = 180° \rightarrow \alpha + \beta = 90°$$

Com isso, pode-se concluir que:

- os ângulos α e β são complementares, isto é, a soma de suas medidas é 90°;
- como esses ângulos são complementares, ambos têm medida inferior a 90°.

> Todo triângulo retângulo tem um ângulo interno reto e dois ângulos agudos, complementares entre si.

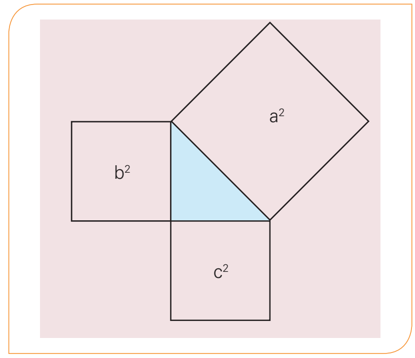
Considerando o triângulo retângulo apresentado anteriormente, temos que os lados de medida **b** e **c** são os catetos. O lado de medida **a** é a hipotenusa, que é sempre oposto ao ângulo reto e o maior lado de um triângulo retângulo. No triângulo é válido o princípio do teorema de Pitágoras:

> A soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida hipotenusa.

Algebricamente, o teorema é assim expresso:

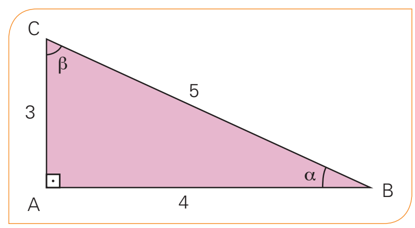
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Podemos representar o teorema de Pitágoras utilizando o conceito de área, pois as medidas a^2, b^2 e c^2 representam as áreas de três quadrados de lados de medidas a, b e c, respectivamente, conforme mostra a figura.



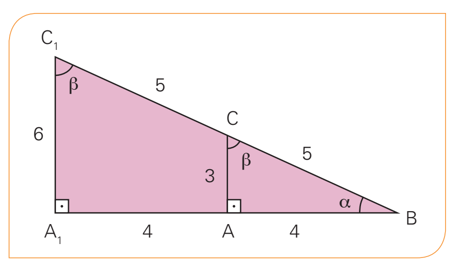
Triângulo pitagórico é um triângulo retângulo cujas medidas dos lados são números naturais.

Considere o triângulo retângulo pitagórico a seguir.



De fato, as medidas satisfazem a equação do teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$): sendo a = 5, b = 3 e c = 4, temos que $5^2 = 4^2 + 3^2$, ou seja, 25 = 16 + 9.

Multiplicando as medidas dos lados desse triângulo por 2, obtemos um triângulo pitagórico semelhante, com lados medindo 6, 8 e 10, também satisfazendo o teorema de Pitágoras. Observe:



Observa-se que os ângulos α e β também são ângulos agudos internos do triângulo retângulo obtido.

Estendendo esse resultado, temos que essa relação é válida para qualquer triângulo retângulo proporcional a outro pitagórico. Então, dado um triângulo retângulo de lados de medidas a, b e c, naturais, de modo que $a^2 = b^2 + c^2$, temos que o triângulo retângulo de lados de medidas $k \cdot a$, $k \cdot b$ e $k \cdot c$ (sendo k um número natural qualquer) também será pitagórico.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Verifique se o triângulo de lados medindo 5, 12 e 13 é pitagórico.

Resolução

Como o maior lado desse triângulo corresponde à medida da hipotenusa, esse valor é 13.

Aplicando o teorema de pitágoras, temos:
$5^2 + 12^2 = 13^2$.
Portanto, o triângulo é pitagórico.

2. Sistema Dom Bosco – Mostre que dado um triângulo retângulo de medidas a, b e c, então o triângulo de medidas $k \cdot a$, $k \cdot b$ e $k \cdot c$ (sendo k um número natural não nulo) é retângulo também.

Resolução

No triângulo retângulo de hipotenusa de medida **a** vale o teorema de Pitágoras:
$a^2 = b^2 + c^2$. Multiplicando essa igualdade por k^2, vem:
$k^2a^2 = k^2b^2 + k^2c^2 \rightarrow (ka)^2 = (kb)^2 + (kc)^2$ (ka, kb e kc satisfazem ao teorema de Pitágoras).
O triângulo de lados de medidas ka, kb e kc é, portanto, retângulo.

SENO, COSSENO E TANGENTE DE ÂNGULOS AGUDOS

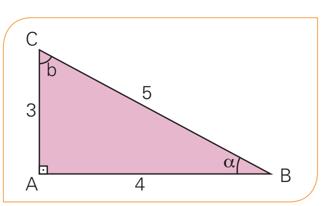
Definimos o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo pelas relações apresentadas a seguir

$$\text{seno do ângulo} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cosseno do ângulo} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente do ângulo} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}}$$

Com base nessas relações, o cálculo de seno, cosseno e tangente do ângulo α do triângulo a seguir fornece os seguintes valores para o triângulo de medidas 3, 4 e 5:



$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Considerando o triângulo proporcional com os mesmos ângulos α e β e medidas 8, 10 e 6, os valores de seno, cosseno e tangente para o ângulo α são:

$$\text{sen } \alpha = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

Ou seja, independentemente das medidas do triângulo, as razões seno, cosseno e tangente são as mesmas para os mesmos ângulos.

SECANTE, COSSECANTE E COTANGENTE DE ÂNGULOS AGUDOS

Além das razões mostradas anteriormente, há também a secante, a cossecante e a cotangente do ângulo agudo de um triângulo retângulo.

$$\text{secante do ângulo} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}}$$

$$\text{cossecante do ângulo} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto ao ângulo}}$$

$$\text{cotangente do ângulo} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{cateto oposto ao ângulo}}$$

Desse modo, há a seguinte relação:

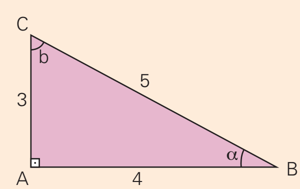
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos a}$$

$$\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. Sistema Dom Bosco – Determinar os valores da secante, cossecante e cotangente do ângulo a no triângulo retângulo de medidas 3, 4 e 5.



Resolução

De acordo com as medidas dos lados do triângulo ABC, temos:

$$\sec \alpha = \frac{5}{4}$$

$$\text{cossec } \alpha = \frac{5}{3}$$

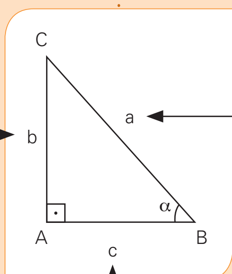
$$\text{cotg } \alpha = \frac{4}{3}$$

ROTEIRO DE AULA

Triângulo retângulo

cateto oposto

hipotenusa



cateto adjacente

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}} = \frac{b}{c}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}} = \frac{1}{\cos a} = \frac{c}{a}$$

$$\text{cossec}\,\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto ao ângulo}} = \frac{1}{\text{sen}\,a} = \frac{a}{b}$$

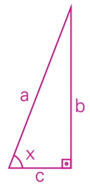
$$\cot\alpha = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{cateto oposto ao ângulo}} = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{c}{b}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UPE – Num triângulo retângulo, temos que tg x = 3. Se x é um dos ângulos agudos desse triângulo, qual o valor de cos x?

Considere $\sqrt{10} = 3{,}16$

Considere a figura a seguir.



Como tg x = 3, logo $\frac{b}{c} = 3 \rightarrow b = 3c$

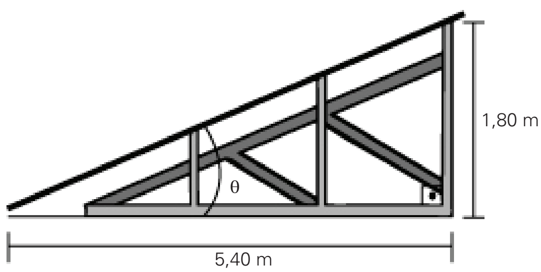
Pelo teorema de Pitágoras, temos que $a^2 = b^2 + c^2 = 9c^2 + c^2 = 10c^2 \rightarrow$

$a = c\sqrt{10}$

Assim, $\cos x = \frac{c}{c\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3{,}16}{10} = 0{,}316$

2. Uepa C2-H7

As construções de telhados em geral são feitas com um grau mínimo de inclinação em função do custo. Para as medidas do modelo de telhado representado a seguir, o valor do seno do ângulo agudo ϕ é dado por:



a) $\frac{4\sqrt{10}}{10}$

b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

c) $\frac{2\sqrt{2}}{10}$

d) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

Chamamos a hipotenusa do triângulo formado pela estrutura do telhado de d. Pelo teorema de Pitágoras, temos que $d^2 = 1{,}8^2 + 5{,}4^2 = 3{,}24 + 29{,}16 = 32{,}4 = \frac{324}{10}$.

Fatorando o número 324, temos que $324 = 4 \cdot 81 = 2^2 \cdot 9^2$.

Logo, $d = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 9^2}{10}} = \frac{2 \cdot 9}{\sqrt{10}} = \frac{18}{\sqrt{10}} = \frac{18\sqrt{10}}{10} = 1{,}8\sqrt{10}$

Portanto, $\text{sen}\,\theta = \frac{1{,}8}{1{,}8\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

3. UFRB-BA – Um observador visualiza um ponto P no alto de um prédio de h metros de altura, sob um ângulo de 30° com a horizontal. Aproximando-se do prédio, horizontalmente, 5 metros, a contar de onde estava, o observador passa a ver o ponto sob um ângulo θ, tal que $\text{tg}\,\theta = \frac{2\sqrt{3}}{5}$. Desprezando a altura do observador, determine $\frac{h}{\sqrt{3}}$.

Chamamos de x a distância do novo ponto em que o observador passa a ver o ponto P sob um ângulo de θ.

Temos que $\text{tg}\,\theta = \frac{h}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \rightarrow h = \frac{x \cdot 2\sqrt{3}}{5}$ e

$\text{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{5+x} \rightarrow h = \frac{(5+x)\cdot\sqrt{3}}{3}$

Logo, $\frac{x \cdot 2\sqrt{3}}{5} = \frac{(5+x)\cdot\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 25$

Então, $\frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{x \cdot 2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = 10 \rightarrow 10$ m

4. Unisinos – Considere as seguintes afirmativas:

I. A terna (5, 12, 13) corresponde às medidas dos lados de um triângulo retângulo.

II. A área do triângulo retângulo com catetos 3 e 4 é igual a 12.

III. O perímetro do triângulo retângulo com catetos 3 e 4 é igual a 12.

Sobre as proposições acima, pode-se afirmar que

a) apenas I está correta.

b) apenas I e II estão corretas.

c) apenas I e III estão corretas.

d) apenas II e III estão corretas.

e) I, II e III estão corretas.

I. Verdadeira, pelo teorema de Pitágoras temos que $13^2 = 12^2 + 5^2$

II. Falsa, a área é dada pela fórmula $\frac{(\text{base})\cdot(\text{altura})}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

III. Verdadeira, o triângulo citado é pitagórico, sendo assim a hipotenusa é 5. O perímetro é 3 + 4 + 5 = 12.

5. Unifor – Um pêndulo de comprimento constante L faz um ângulo θ com sua posição vertical de repouso. A equação que expressa a altura h como função do ângulo θ é de:

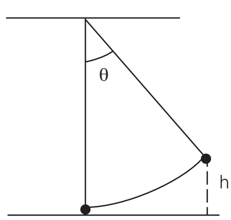
a) $h = L\,(1 + \cos\theta)$

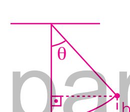
b) $h = L\,(1 - \cos\theta)$

c) $h = L - \cos\theta$

d) $h = \frac{1 - \cos\theta}{L}$

e) $h = \frac{1 + \cos\theta}{L}$

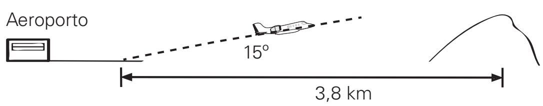




No triângulo retângulo da figura, sendo (x) o cateto vertical, temos que $\cos\varphi = \frac{x}{L} \rightarrow x = L \rightarrow \cos\theta$. Da figura, vem $h + x = L$. Substituindo x na última igualdade:

$h + L \cdot \cos\theta = L \rightarrow h = L - L \cdot \cos\theta = L \cdot (1 - \cos\theta)$.

6. Unicamp – Ao decolar, um avião deixa o solo com um ângulo constante de 15°. A 3,8 km da cabeceira da pista existe um morro íngreme. A figura abaixo ilustra a decolagem, fora de escala.



Podemos concluir que o avião ultrapassa o morro a uma altura, a partir da sua base, de

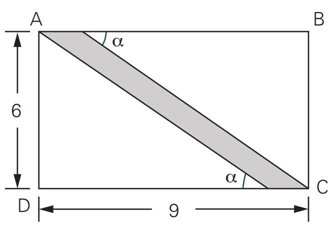
a) 3,8 tg (15°) km
b) 3,8 sen (15°) km
c) 3,8 cos (15°) km
d) 3,8 sec (15°) km

Sendo h a altura do morro, temos $\text{tg } 15° = \frac{h}{3{,}8} \rightarrow h = 3{,}8 \cdot \text{tg } 15°$.

Logo, h = 3,8 θ tg (15°) km.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UFRGS – Na figura abaixo, o retângulo ABCD tem lados que medem 6 e 9.



Se a área do paralelogramo sombreado é 6, o cosseno de α é

a) $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{4}{5}$ **e)** $\frac{8}{9}$

8. Unitau – Sabendo-se que $\sec(x) \cdot \text{cossec}(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ e $\text{cotg}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, sendo x um ângulo agudo, o valor de sen(x) + cos(x) + tg(x) é

a) $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

a) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

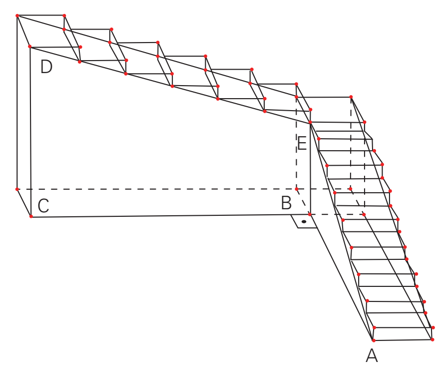
b) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right)$

c) $\frac{1}{3}\left(4\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

d) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

9. UFRN (adaptado) – Qual o valor da expressão (sec x − tg x) ? (sec x 1 tg x)?

10. UFRN – A escadaria ao lado tem oito batentes no primeiro lance e seis no segundo lance de escada. Sabendo que cada batente tem 20 cm de altura e 30 cm de comprimento (profundidade), a tangente do ângulo CÂD mede:



a) $\frac{9}{10}$ **b)** $\frac{14}{15}$ **c)** $\frac{29}{30}$ **d)** 1

11. Udesc – No *site* <http://www.denatran.gov.br/publicacoes/download/minuta_contran/Arquivo%206.pdf> (acesso em: 23 jun. 2012) encontra-se o posicionamento adequado da sinalização semafórica, tanto para semáforos de coluna simples como para semáforos projetados sobre a via, conforme mostra a Figura 1.

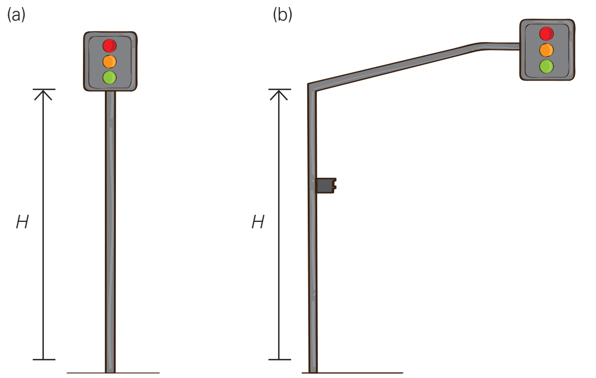


Figura 1
(a) Semáforo de colunas simples;
(b) Semáforo projetado sobre a via.

Para que o motorista de um veículo, ao parar, possa visualizar as luzes do semáforo, o grupo focal deve ser visto sob um ângulo de 20°, conforme mostra a Figura 2.

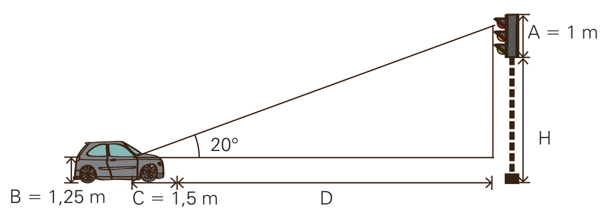


Figura 2

LEGENDA:
A: dimensão média da altura do grupo local;
B: altura dos olhos do condutor sentado no veículo;
C: distância adotada entre os olhos do condutor e a frente do veículo;
D: distância mínima da linha de retenção até a projeção do grupo focal sobre o solo.

Considerando tg (20°) = 0,36, determine os valores que faltam para completar a Tabela 1.

Tipo de semáforo	D	H
Coluna simples	?	2,4
Projetado sobre a via	13,1	?

Analise as proposições em relação às informações obtidas na Tabela 1 e assinale (V) para verdadeira e (F) para falsa.

( ) Para o semáforo de coluna simples, D é aproximadamente 4,5 m.

( ) Para o semáforo projetado sobre a via, H é aproximadamente 4,2 m.

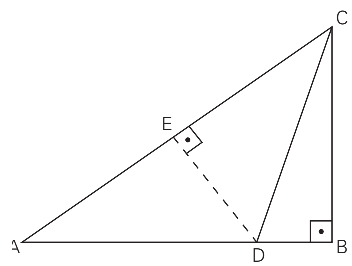
( ) A altura H do semáforo projetado sobre a via é aproximadamente 3,1 m maior que a altura H do semáforo de coluna simples.

Assinale a alternativa **correta**, de cima para baixo.

a) F – V – V
b) V – F – V
c) F – V – F
d) V – V – F
e) F – F – V

12. Mackenzie

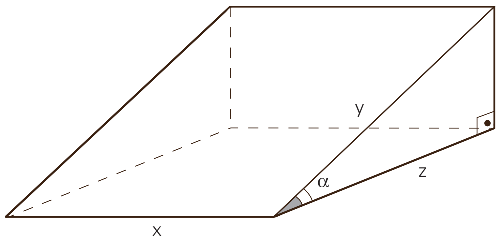
No triângulo retângulo ABC, AB = 4 cm e AD = BC = = 3 cm.



A área do triângulo CDE é

a) $\frac{117}{50}$ cm²
b) $\frac{9}{4}$ cm²
c) $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ cm²
d) $\frac{54}{25}$ cm²
e) $\frac{9}{2}$ cm²

13. Unifor-CE – Uma rampa retangular, medindo 10 m², faz um ângulo de 25° em relação ao piso horizontal. Exatamente embaixo dessa rampa, foi delimitada uma área retangular A para um jardim, conforme a figura.



Considerando que cos 25° ≈ 0,9, a área A tem, aproximadamente,

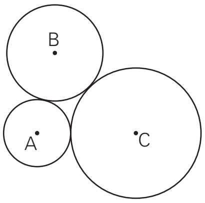
a) 3 m²
b) 4 m²
c) 6 m²
d) 8 m²
e) 9 m²

14. PUC-RIO (adaptado) – A área de um triângulo retângulo é 30 cm². Sabendo que um dos catetos mede 5 cm, quanto vale a hipotenusa?

15. USF (adaptado) – A medida de um dos catetos de um triângulo retângulo é a média aritmética da medida dos outros lados. Determine o valor do cosseno do ângulo oposto ao maior cateto desse triângulo.

a) $\frac{4}{5}$
b) $\frac{5}{4}$
c) $\frac{3}{5}$
d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{5}{3}$

16. Unicamp – A figura abaixo exibe três círculos no plano, tangentes dois a dois, com centros em A, B e C e raios de comprimentos a, b e c, respectivamente.



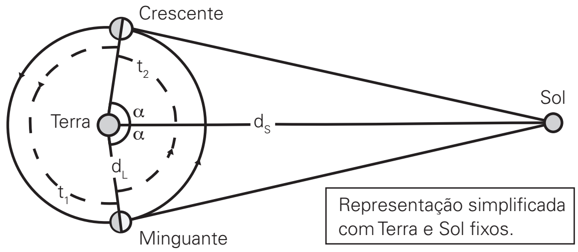
a) Determine os valores de a, b e c, sabendo que a distância entre a e b é de 5 cm, a distância entre a e c é de 6 cm e a distância entre b e c é de 9 cm.

b) Para a = 2 cm e b = 3 cm, determine o valor de c > b de modo que o triângulo de vértices em A, B e C seja retângulo.

17. Sistema Dom Bosco – Considere o triângulo retângulo com os lados medindo $\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$ e a sendo $2\sqrt{a}$ a medida de sua hipotenusa. Calcule a medida do menor ângulo desse triângulo.

18. Fuvest C2-H7

Quando a Lua está em quarto crescente ou quarto minguante, o triângulo formado pela Terra, pelo Sol e pela Lua é retângulo, com a Lua no vértice do ângulo reto. O astrônomo grego Aristarco, do século III a.C., usou este fato para obter um valor aproximado da razão entre as distâncias da Terra à Lua, d_L, e da Terra ao Sol, d_S.



Quando a Lua está em quarto crescente ou quarto minguante, o triângulo formado pela Terra, pelo Sol e pela Lua é retângulo, com a Lua no vértice do ângulo reto. O astrônomo grego Aristarco, do século III a.C., usou este fato para obter um valor aproximado da razão entre as distâncias da Terra à Lua, d_L, e da Terra ao Sol, d_S. É possível estimar a medida do ângulo α, relativo ao vértice da Terra, nessas duas fases, a partir da observação de que o tempo t_1, decorrido de uma lua quarto crescente a uma lua quarto minguante, e um pouco maior do que o tempo t_2, decorrido de uma lua quarto minguante a uma lua quarto crescente. Supondo que a Lua descreva em torno da Terra um movimento circular uniforme, tomando $t_1 = 14{,}9$ dias e $t_2 = 14{,}8$ dias, conclui-se que a razão d_L/d_S seria aproximadamente dada por:

a) cos 77,7°
b) cos 80,7°
c) cos 83,7°
d) cos 86,7°
e) cos 89,7°

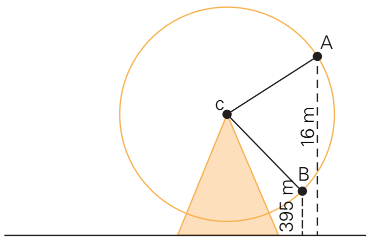
19. Mackenzie (adaptado) C2-H7

Em um triângulo retângulo ABC, reto em B, a diferença entre as medidas dos catetos é igual a 3. Sabendo que medida do lado BC é a média aritmética das medidas dos outros lados, então, das alternativas abaixo, as medidas de AB, BC e AC são, respectivamente,

a) 3, 6 e 9
b) 6, 9 e 12
c) 9, 12 e 15
d) 12, 15 e 18
e) 15, 18 e 21

20. Uerj (adaptado) C2-H7

O raio de uma roda gigante de centro C mede CA = CB = 10 m. Do centro C ao plano horizontal do chão, há uma distância de 11 m. Os pontos A e B, situados no mesmo plano vertical, ACB, pertencem à circunferência dessa roda e distam, respectivamente, 16 m e 3,95 m do plano do chão. Observe o esquema e a tabela:



θ (graus)	Sen θ
15°	0,259
30°	0,500
45°	0,707
60°	0,866

A medida, em graus, mais próxima do menor ângulo ACB corresponde a:

a) 45
b) 60
c) 75
d) 105
e) 135

2

ÂNGULOS COMPLEMENTARES E ÂNGULOS NOTÁVEIS

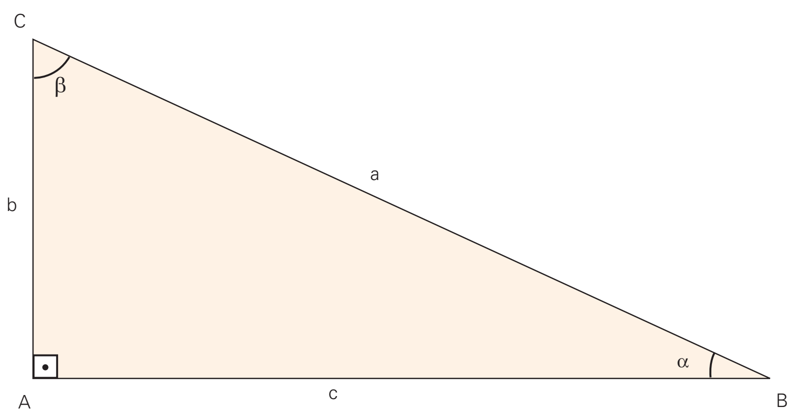
- Seno, cosseno, tangente e cotangente de ângulos complementares
- Seno, cosseno e tangente de ângulos notáveis
- Identidade trigonométrica fundamental

HABILIDADES

- Identificar razões trigonométricas no triângulo retângulo.
- Aplicar razões trigonométricas para obter valores numéricos.
- Resolver problemas envolvendo razões trigonométricas.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
- Identificar características de figuras planas e espaciais.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

Seno, cosseno, tangente e cotangente de ângulos complementares

Os ângulos agudos de todo triângulo retângulo são complementares, ou seja, $\alpha + \beta = 90°$. Além disso, dado um triângulo ABC como o que segue, sabe-se que:



$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} \qquad \cos \alpha = \frac{c}{a} \qquad \text{tg } \alpha = \frac{b}{c} \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{c}{a} \qquad \cos \beta = \frac{b}{a} \qquad \text{tg } \beta = \frac{c}{b} \qquad \text{cotg } \beta = \frac{b}{c}$$

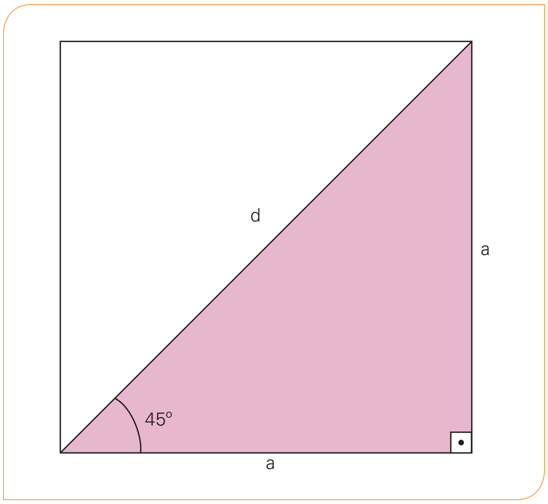
Desse modo, as seguintes relações podem ser estabelecidas:

$$\text{sen } \alpha = \cos \beta \qquad \cos \alpha = \text{sen } \beta \qquad \text{tg } \alpha = \text{cotg } \beta \qquad \text{cotg } \alpha = \text{tg } \beta$$

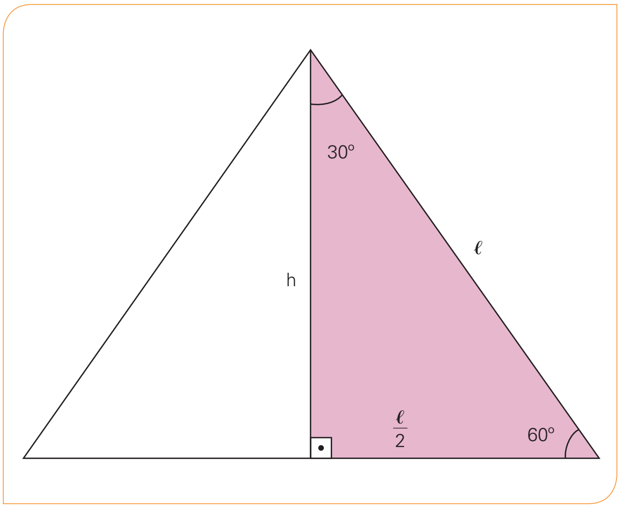
Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

O quadrado e o triângulo equilátero são exemplos de figuras planas que possibilitam obter os ângulos notáveis 30°, 45° e 60°.

Na figura a seguir, observa-se que a diagonal do quadrado divide os ângulos internos opostos (que são retos) em dois ângulos de 45°, formando dois triângulos isósceles e retângulos.



No triângulo equilátero, a altura relativa à base forma uma bissetriz no ângulo oposto à base e determina dois triângulos retângulos com ângulos de medidas 30° e 60°.



Uma vez que no quadrado e no triângulo equilátero são determinados triângulos retângulos, pode-se aplicar o teorema de Pitágoras em cada um deles para se obterem os comprimentos da diagonal do quadrado e a altura **h** do triângulo equilátero.

Para a diagonal, tem-se:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

Logo:

$$d = a\sqrt{2}$$

Para a altura **h**, tem-se:

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3}{4}\ell^2$$

Logo:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Valores de seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°

Vimos que, dado um triângulo equilátero de lado ℓ, podemos obter um triângulo retângulo com ângulos de medidas 30°, 60° e 90°. Por meio desse triângulo, é possível determinarmos as razões trigonométricas desses ângulos. Observe:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{\ell\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

Analisando os ângulos do triângulo retângulo obtido com o quadrado, temos que:

$$\text{sen } 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\ 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\ 45° = \frac{a}{a} = 1$$

Observação: como 45° é ângulo complementar de 45°, temos que $\text{sen}\ 45° = \cos\ 45°$.

A tabela a seguir reúne os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Identidade trigonométrica fundamental

Podemos expressar o teorema de Pitágoras em função das medidas dos ângulos. Considerando um triângulo retângulo de catetos que medem **b** e **c** e hipotenusa **a**, por Pitágoras, temos a seguinte igualdade:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Dividindo ambos os lados da equação por a^2, obtemos:

$$1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

Seja θ um dos ângulos agudos do triângulo retângulo, de modo que $\text{sen}\ \theta = \frac{b}{a}$ e $\cos\ \theta = \frac{c}{a}$. Substituindo na equação acima, temos:

$$\text{sen}^2\ \theta + \cos^2\ \theta = 1$$

Essa relação é chamada de identidade trigonométrica fundamental.

Podemos expressá-la de outra forma. Basta dividir a equação por $\cos^2\theta$, obtendo:

$$\frac{\text{sen}^2\ \theta}{\cos^2\ \theta} + \frac{\cos^2\ \theta}{\cos^2\ \theta} = \frac{1}{\cos^2\ \theta}$$

Também podemos expressar assim:

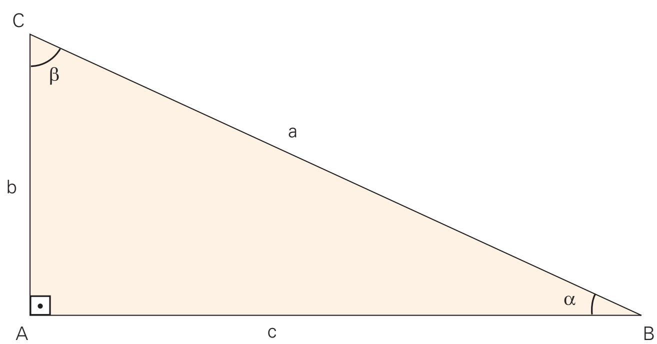
$$\text{tg}^2\ \theta + 1 = \sec^2\ \theta$$

Analogamente, se dividirmos a equação por $\text{sen}^2\theta$, obtemos

$$\text{cotg}^2\ \theta + 1 = \text{cossec}^2\ \theta$$

ROTEIRO DE AULA

TRIÂNGULO RETÂNGULO



Se $\alpha + \beta = 90°$
Então,

sen α = cos β

sec α = cossec β

tg α = cotg β

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Identidade trigonométrica fundamental

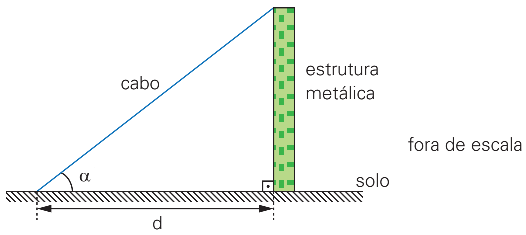
$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta =$ **1**

$\text{tg}^2\,\theta +$ **1** $= \sec^2\theta$

$\text{cotg}^2\,\theta +$ **1** $= \text{cossec}^2\,\theta$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unicid – Uma estrutura metálica é mantida perpendicular ao solo por 8 cabos de aço, todos de mesmo comprimento e com a mesma distância d até a base da estrutura. A figura mostra um dos cabos presos à estrutura.



Considere a tabela:

α	senα	cosα	tgα
34°	0,56	0,83	0,67
35°	0,57	0,82	0,70
36°	0,58	0,81	0,72
37°	0,60	0,80	0,75
38°	0,61	0,79	0,78

Sabendo que a soma dos comprimentos de todos os cabos é 240 m e que a distância d corresponde a 80% do comprimento de um cabo, é correto afirmar que a medida do ângulo a é

a) 36°
b) 34°
c) 35°
d) 38°
e) 37°

Temos 8 cabos de aço com um comprimento total de 240 metros. Logo, cada cabo tem 30 m. Como a distância d corresponde a 80% do comprimento de um cabo, então:

$d = 0,8 \cdot 30 = 24$ m

Portanto, $\cos\alpha = \frac{24}{30} = 0,8 \rightarrow \alpha = \arccos(0,8)$.

Segundo a tabela, $\alpha = 37°$.

2. USF C2-H9

Para propiciar maior acessibilidade a um shopping, o engenheiro responsável projetou uma rampa de entrada com 24 m de comprimento e 3 graus de inclinação. Considerando sen 3° ≈ 0,05, cos 3° ≈ 0,99 e tg 3° ≈ 0,05, determine qual o deslocamento vertical, em metros, de um cadeirante que percorreu a rampa completamente.

a) 1,0 m
b) 1,1 m
c) 1,2 m
d) 1,3 m
e) 1,4 m

Queremos saber o deslocamento vertical de um cadeirante que percorreu a rampa. Chamaremos esse deslocamento de h.

Como a rampa tem 24 m de comprimento, temos que $\text{sen } 3° = \frac{h}{24} = 0,05$.

Logo, $h = 24 \cdot 0,05 = 1,2$ m .

3. PUC-RS (adaptado) – Na equação tg x = cotg x, onde 0° < x < 90°, calcule o valor de x.

Temos que $\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\text{sen}x} = \text{cotg}x$.

Logo, multiplicando os dois lados da equação por $(\text{sen } x)\cdot(\cos x)$, temos: $\text{sen}^2 x = \cos^2 x$.

Como $0° < x < 90°$, então sen x = cos x. Pela tabela de seno, cosseno e tangente de ângulos notáveis, temos que $x = 45°$.

4. USF – Se cotg x = 2 e x é agudo, então cos x vale

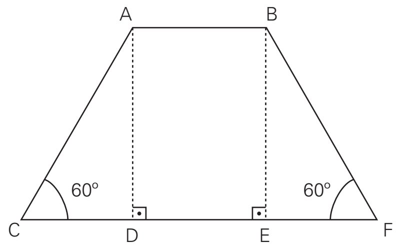
a) $\frac{1}{5}$
b) $2\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{5}$
d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
e) $\sqrt{5}$

Temos que $\frac{\cos x}{\text{sen } x} = 2$. Elevando ao quadrado ambos os lados da equação:

$\frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = 4 \rightarrow \cos^2 x = 4 \cdot \text{sen}^2 x = 4 - 4 \cdot \cos^2 x$

Logo, $5 \cdot \cos^2 x = 4 \rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5} \rightarrow \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

5. Mackenzie



Se na figura $AD = 3\sqrt{2}$ e $CF = 14\sqrt{6}$, então a medida de AB é

a) $8\sqrt{6}$
b) $10\sqrt{6}$
c) $12\sqrt{6}$
d) 28
e) $14\sqrt{5}$

No triângulo retângulo ACD, temos $tg\ 60° = \frac{3\sqrt{2}}{CD} = \sqrt{3}$. Então, $CD = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$.

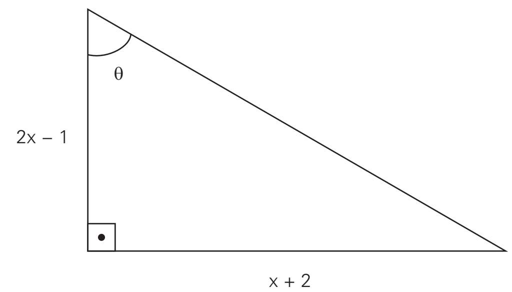
Analogamente no triângulo retângulo BEF, temos $EF = \sqrt{6}$.

Da figura, temos que

$CF = CD + DE + EF \rightarrow 14\sqrt{6} = DE + 2\sqrt{6} \rightarrow DE = 12\sqrt{6}$.

Como $DE = AB = 12\sqrt{6}$.

6. UPE (adaptado) – A medida da área do triângulo retângulo, representado a seguir, é de 12,5 cm².



Qual é o valor aproximado do seno do ângulo "θ"? Considere $\sqrt{2} = 1,4$.

$A = \frac{(x+2)\cdot(2x-1)}{2} = 12,5$

$2x^2 - x + 4x - 2 = 25$

$2x^2 + 3x - 27 = 0$

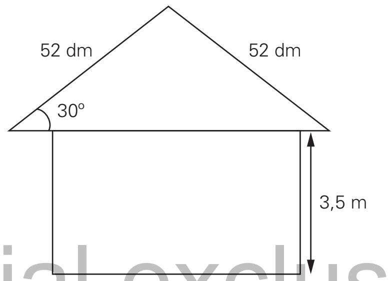
Resolvendo a equação de 2° grau e dado que $x > 0$, temos que $x = 3$.

Logo, o triângulo tem catetos de lados $2x - 1 = 5$ e $x + 2 = 5$. Portanto, o ângulo θ é igual a 45°.

Assim, $sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,71$.

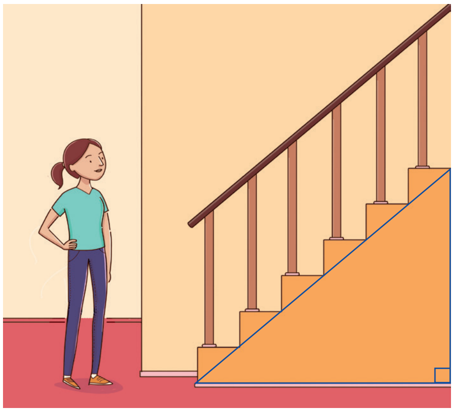
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UEMG (adaptado)



Conforme a figura acima, na construção de um telhado, com inclinação de 30° em relação ao solo, foram usadas telhas ecológicas. Em cada lado da casa, foram construídos 52 dm de telhado e a altura da parede lateral da casa é de 3,5 m. Considerando esses dados, calcule a altura do ponto mais alto do telhado em relação ao solo.

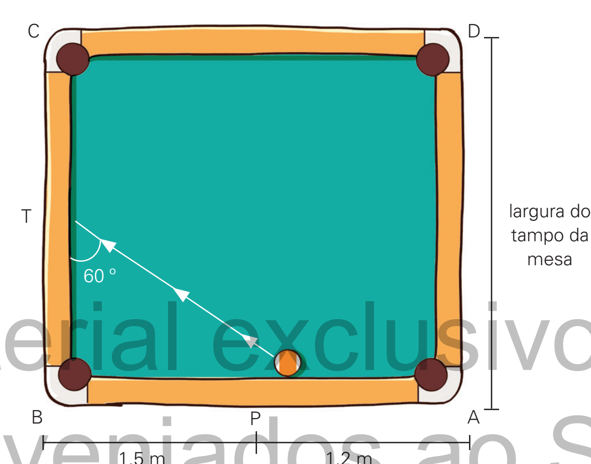
8. UEMG (adaptado) – Observe a figura:



Tendo como vista lateral da escada com 6 degraus um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $\sqrt{10}$ metros, Ana observa que todos os degraus da escada têm a mesma altura. A medida em cm, de cada degrau, corresponde aproximadamente a:

a) 37
b) 60
c) 75
d) 83

9. Unesp – A figura representa a vista superior do tampo plano e horizontal de uma mesa de bilhar retangular ABCD, com caçapas em A, B, C e D. O ponto P, localizado em $\overline{AB}$, representa a posição de uma bola de bilhar, sendo PB = 1,5 m e PA = 1,2 m. Após uma tacada na bola, ela se desloca em linha reta colidindo com $\overline{BC}$ no ponto T, sendo a medida do ângulo PTB igual a 60°. Após essa colisão, a bola segue, em trajetória reta, diretamente até a caçapa D.



Nas condições descritas e adotando $\sqrt{3} = 1{,}73$, a largura do tampo da mesa, em metros, é próxima de

a) 2,42
b) 2,08
c) 2,28
d) 2,00
e) 2,56

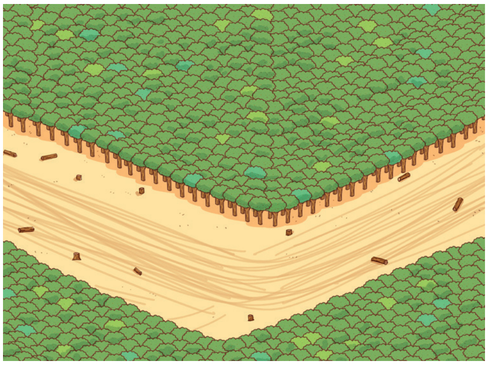
10. Unifenas – Acrescente ao resultado, obtido da expressão abaixo, dois.

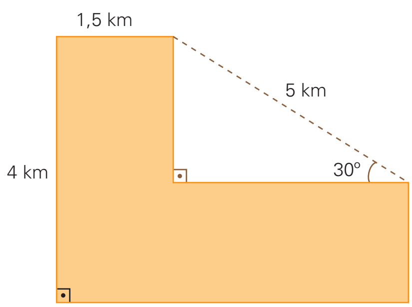
$\text{sen}^2\,(15°) + \text{sen}^2\,(31°) + \text{sen}^2\,(42°) + \text{sen}^2\,(59°) + \text{sen}^2\,(48°) + \text{sen}^2\,(75°)$.

Assim, o número pedido é:

a) 1
b) 2
c) −3
d) 3
e) 5

11. UEA – Admita que a área desmatada em Altamira, mostrada na figura, tenha a forma e as dimensões indicadas na figura.





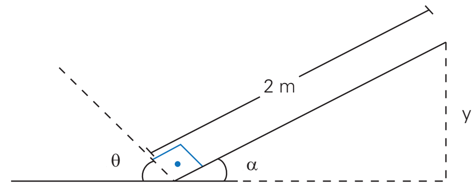
Usando a aproximação $\sqrt{3} \approx 17$, pode-se afirmar que a área desmatada, em quilômetros quadrados, é, aproximadamente,

a) 10,8
b) 13,2
c) 12,3
d) 11,3
e) 15,4

12. Unicamp (adaptado) – Seja x real tal que cos x = tg x. O valor de sen x é

a) $\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$
b) $\dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{2}$
c) $\dfrac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$
d) $\dfrac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}$

13. Unifor – Uma cama de hospital, equipada com um ajustador hidráulico, move-se de acordo com um controle manual de subir e descer. A altura y que a cama varia em função de θ é de:



a) $y = 2 \operatorname{sen} \theta$
b) $y = 2 \operatorname{sen} \theta + 2$
c) $y = \operatorname{tg} \theta + 2$
d) $y = 2 \cos \theta$
e) $y = 2 \cos \theta + 2$

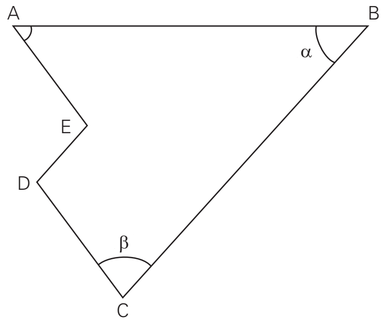
14. UEFS – Se $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{6}{5} \cos \theta$, então, sen θ é igual a

a) $-\dfrac{3}{2}$
b) $-\dfrac{3}{4}$
c) $-\dfrac{2}{3}$
d) $\dfrac{2}{3}$
e) $\dfrac{3}{4}$

15. UFPA – Qual das expressões é idêntica a $\dfrac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{sen} x}$?

a) sen x
b) cos x
c) tg x
d) cossec x
e) cotg x

16. Fuvest – Na figura, tem-se $\overline{AE}$ paralelo a $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ paralelo a $\overline{DE}$, AE = 2 e $\alpha = 45°$ e $\beta = 75°$. Nessas condições, a distância do ponto E ao segmento AB é igual a:



a) $\sqrt{3}$

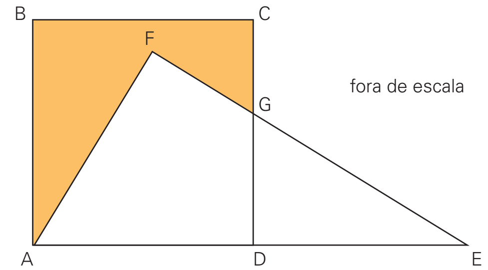
b) $\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

17. Famema – Na figura, ABCD é um quadrado de lado 6 cm e AFE é um triângulo retângulo de hipotenusa AE. Considere que $\overline{AD} = \overline{AF}$ e DE = 4 cm.

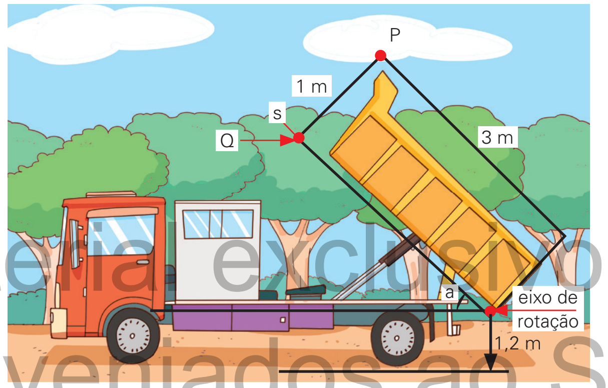


Sabendo que os pontos A, D e E estão alinhados, calcule o valor da área destacada, em cm².

ESTUDO PARA O ENEM

18. Unesp C2-H19

A caçamba de um caminhão basculante tem 3 m de comprimento das direções de seu ponto mais frontal P até a de seu eixo de rotação e 1 m de altura entre os pontos P e Q. Quando na posição horizontal, isto é, quando os segmentos de retas r e s se coincidirem, a base do fundo da caçamba distará 1,2 m do solo. Ela pode girar, no máximo, α graus em torno de seu eixo de rotação, localizado em sua parte traseira inferior, conforme indicado na figura.



Dado $\cos \alpha = 0,8$, a altura, em metros, atingida pelo ponto P, em relação ao solo, quando o ângulo de giro a for máximo, é

a) 4,8 **b)** 5,0 **c)** 3,8 **d)** 4,4 **e)** 4,0

19. Enem C2-H9

As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

DAVID CRESPO/ISTOCK

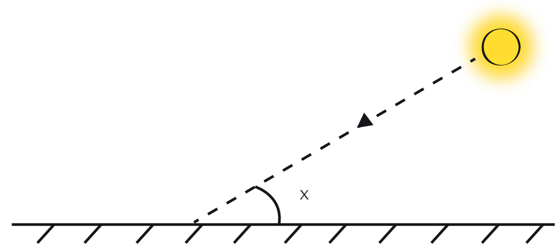
Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

a) menor que 100 m^2
b) entre 100 m^2 e 300 m^2
c) entre 300 m^2 e 500 m^2
d) entre 500 m^2 e 700 m^2
e) maior que 700 m^2

20. Enem C2-H8

Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago, formando um ângulo x com a superfície, conforme indica a figura.

Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $\ell(x) = k \cdot \text{sen}(x)$ sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90°.



Sabe-se que às 7:30 os raios atingem o lago, formando um ângulo de 3° e às 9:30 a medida do ângulo aumenta para 45°. O aumento percentual aproximado da intensidade luminosa na superfície do lago nesse período é de

a) 35%
b) 40%
c) 45%
d) 50%
e) 55%

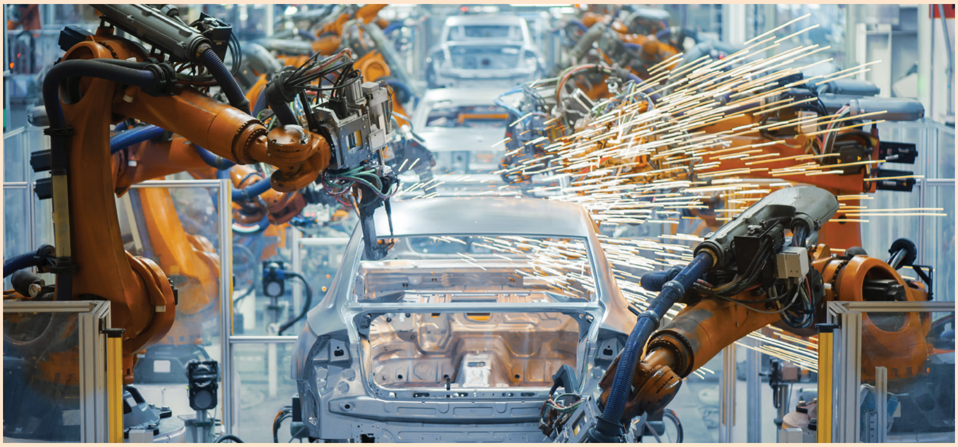
ÂNGULOS COMPLEMENTARES E ÂNGULOS NOTÁVEIS

3

- Arcos e ângulos
- Unidades de medida de arcos e ângulos
- Conversão de medidas de arcos e ângulos

HABILIDADES

- Relacionar a medida de arco em grau e em radiano com o respectivo comprimento.
- Identificar arcos e ângulos no ciclo trigonométrico.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

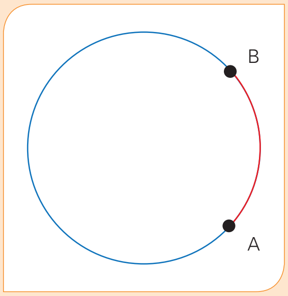

XIEYULIANG/SHUTTERSTOCK

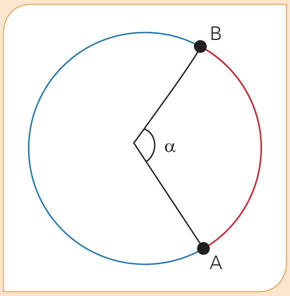
Os avanços na robótica tiveram contribuição da trigonometria.

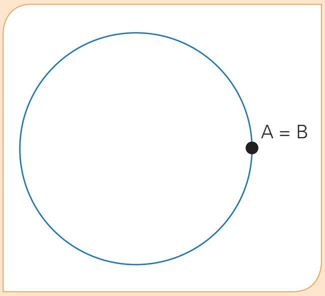
Os robôs industriais são construídos com uma série de componentes e circuitos eletrônicos. Para executarem movimentos precisos e desempenharem determinadas funções, é essencial o emprego da trigonometria.

Arcos e ângulos

Considere a circunferência com dois pontos A e B distintos a seguir.







Cada uma das partes em que ela é dividida por esses pontos é **um arco de circunferência**.

Se esses pontos forem coincidentes, temos o caso particular representado a seguir.

Nesse caso temos um arco **nulo** e um arco de **uma volta**.

Cada arco de circunferência também define um ângulo central, que é aquele cujo vértice é o centro da circunferência, como o ângulo α representado a seguir.

Observe que os lados que formam o ângulo central determinam sobre a circunferência os pontos A e B, da qual se toma o menor arco. Então, dizemos que a medida angular do arco corresponde à medida do ângulo central que o determina.

$$\text{med}\left(\widehat{AB}\right) = \alpha$$

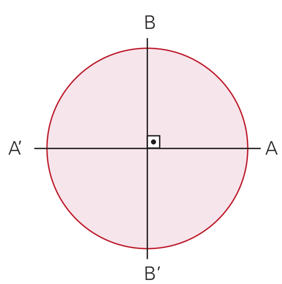
Unidades de medida de arcos e ângulos

As unidades usuais para medir arcos e ângulos são o **grau** e o **radiano**.

GRAU

Grau (°) é a medida do arco equivalente a $\frac{1}{360}$ da circunferência. Ou seja, o arco de uma volta completa mede 360°.

Na circunferência a seguir, observa-se que as retas $\overleftrightarrow{XX'}$ e $\overleftrightarrow{YY'}$, perpendiculares entre si, dividem a circunferência em quatro arcos de mesma medida, referentes a quatro ângulos retos centrais.



O grau tem dois outros submúltiplos: **minuto** (′) e **segundo** (″). Sua equivalência é:

$$1° = 60'$$
$$1' = 60''$$

Observação: Apesar do mesmo nome, minutos e segundos usados como unidade de tempo não têm nenhuma relação com os minutos e segundos definidos como submúltiplos do grau, exceto por constituírem também um sistema sexagesimal de unidades.

ADIÇÃO DE ARCOS

Para calcular a soma dos arcos dados, devem-se adicionar separadamente os valores de graus, minutos e segundos.

Por exemplo: sabendo que α e β são arcos que medem, respectivamente, 83°30′39″ e 12°43′45″, vamos determinar $\alpha + \beta$.

$$\begin{array}{r} 83°30'39'' \\ +\ 12°43'45'' \\ \hline 95°73'84'' \end{array}$$

Como as quantidades em minutos (73′) e segundos (84″) excedem 60 unidades, pode-se fazer:

$73' = 60' + 13' = 1°13'$ e

$84'' = 60'' + 24'' = 1'24''$

Desse modo, temos:

$73'84'' = 1°(13 + 1)'24'' = 1°14'24''$

Portanto, $\alpha + \beta = 96°14'24''$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Calcule 17°47′9″ + 70°25′56″.

Resolução

$17°47'9'' + 70°25'56'' = (17° + 70°) + (47' + 25') + (9'' + 56'') = 87°72'65'' =$

$= 87° + (60' + 12') + (60'' + 5'') = 87° + (1° + 12') + (1' + 5'') = 88°13'5''$

SUBTRAÇÃO DE ARCOS

Para subtrair arcos, deve-se calcular a diferença separando os valores em graus, minutos e segundos, como na adição.

Por exemplo: sabendo que α e β são arcos que medem, respectivamente, 83°30′39″ e 12°43′45″, vamos determinar $\alpha - \beta$.

Antes de calcular, devemos verificar se não há minuendos menores que os subtraendos (observe que 30′ < 43′ e 39″ < 45″), o que leva a resultados negativos na operação de minutos e segundos.

Neste caso, devemos transformar 1° em 60′ ou 1′ em 60″ e adicioná-los ao minuendo para tornar a diferença positiva.

Dessa forma, vem a seguinte transformação:

$$\alpha = 82°89'99''$$

$$\alpha = (83 - \mathbf{1})°(30 + \mathbf{60} - \mathbf{1})'(39 + \mathbf{60})''$$

Assim: $\alpha = 82°89'99''$.

$$\begin{array}{r} 82°89'99'' \\ -\ 12°43'45'' \\ \hline 70°46'54'' \end{array}$$

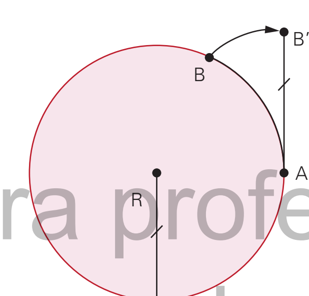
Portanto: $\alpha - \beta = 70°45'54''$.

RADIANO

Radiano (rad) é a medida de um arco de circunferência cujo comprimento é igual ao raio dessa circunferência.

Pode-se dizer que a medida de um arco, em radianos, equivale ao número de vezes que o comprimento do raio cabe nesse arco.

Por exemplo, considere o arco $\overset{\frown}{AB}$ a seguir.



O segmento $\overline{AB}$, tendo comprimento igual ao raio da circunferência, significa que med $(\overline{AB}) = 1$ rad.

Sendo α o arco em radianos e ℓ e R os comprimentos do arco e do raio da circunferência, respectivamente, então:

$$\alpha = \frac{\ell}{R}$$

O comprimento da circunferência é dado por $2\pi R$. Considerando essa relação, para calcular a medida do arco de uma volta em radianos, divide-se o comprimento da circunferência pelo seu raio. Assim:

$$\alpha = \frac{2\pi R}{R} \rightarrow \alpha = 2\pi \text{ rad}$$

Portanto, a medida do arco de uma volta completa é igual a 2π.

Com esse resultado, podemos concluir que:

$$90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$180° = \pi \text{ rad}$$

$$270° = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

Dado que o comprimento de circunferência de raio R é dado por $2\pi R$, então podemos determinar o valor de π como a relação entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Portanto, seja o comprimento $C = 2\pi R$, então, $\pi = \frac{C}{2R} \cong 3{,}14$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **Sistema Dom Bosco** – Numa circunferência de raio 3 cm, determinou-se, com os lados do ângulo central α, o arco de comprimento 9,42 cm. Calcule, em radianos, a medida de α.

Resolução

Temos que:

$$\alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{9{,}42}{3} = 3{,}14 \text{ rad}$$

Logo, $\alpha = 3{,}14$ rad.

2. **Sistema Dom Bosco** – Em uma circunferência, temos os ângulos a = 89°30′15″ e b = 39°43′45″. Calcule a diferença b – a.

Resolução

89°30'15" – 39°43'45" = 88°90'15" –
– 39°43'45" = 88°89'75"– 39°43'45" = 49°46'30"

CONVERSÃO DE MEDIDAS DE ARCOS E ÂNGULOS

Para converter as medidas de arcos de uma unidade para outra, é suficiente aplicar a regra de três simples, lembrando, por exemplo, a equivalência $180° = \pi$ rad.

Acompanhe os exemplos.

Para converter 135° em radianos:

$135° — \theta$

$180° — \pi$ rad

$$\frac{135°}{180°} = \frac{\theta}{\pi \text{ rad}} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Para converter $\frac{\pi}{6}$ rad para graus:

$$\frac{\frac{\pi}{6}\text{rad}}{\pi\text{rad}} = \frac{\theta}{180°} \rightarrow \theta = 30°$$

ROTEIRO DE AULA

ARCOS E ÂNGULOS

Circunferência (λ) de
centro O e raio r

Medida angular: 360°

Medida linear (comprimento): 360°

Pontos A **e** B $\in \lambda$

Ângulo

Arco

Medidas angulares

Unidade de medida

Medida linear (comprimento): fração de $2\pi r$

Medida angular

Grau

Radiano

180° = πRad

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFCE (adaptado) C2-H8

Considere um relógio analógico de doze horas. O maior ângulo formado entre os ponteiros que indicam a hora e o minuto, quando o relógio marca exatamente 5 horas e 20 minutos, é

a) 330° **c)** 310° **e)** 290°
b) 320° **d)** 300°

Ponteiro das horas:

Em 1 volta temos 12 horas. Logo, o ponteiro das horas percorre 360° em 12 horas:

$\frac{360°}{12h} = 30°/h = 0{,}5°/min$

Ponteiro dos minutos:

Em 1 volta há 60 minutos. Logo, o ponteiro dos minutos percorre 360° em 60 minutos:

$\frac{360°}{60\ min} = 6°/min$

Então, o ponteiro das horas (quando o relógio marcar 5h20min) terá percorrido um arco de $5 \cdot 30° + 0{,}5 \cdot 20 = 160°$. O ponteiro dos minutos terá percorrido um arco de $20 \cdot 6° = 120°$. Logo, o ângulo obtuso formado entre os dois ponteiros é de $360° - (160° - 120°) = 320°$.

2. IFSP (adaptado) – Considere uma circunferência de centro O e raio 6 cm. Sendo A e B pontos distintos dessa circunferência, sabe-se que o comprimento de um arco AB é 5 cm. A medida aproximada do ângulo central correspondente ao arco AÔB considerado, é

a) 40° **c)** 65° **e)** 75°
b) 50° **d)** 70°

O ângulo formado é de $A\hat{O}B = \frac{l}{R} = \frac{5}{6} rad = \frac{5}{6} \cdot \frac{180°}{\pi} \cong 50°$.

3. Fuvest (adaptado) – Calcule o ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos.

Ponteiro das horas:

Em 1 volta há 12 horas. Logo, o ponteiro das horas percorre 360° em 12 horas.

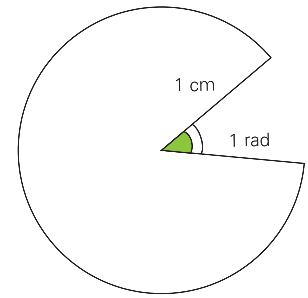
$\frac{360°}{12h} = 30°/h = 0{,}5°/min$

Ponteiro dos minutos:

Em 1 volta existem 60 minutos. Logo, o ponteiro dos minutos percorre 360° em 60 minutos. $\frac{360°}{60} = 6°/min$

Então, o ponteiro das horas (quando o relógio marcar 1h12min) terá percorrido um arco de $1 \cdot 30° + 0{,}5 \cdot 12 = 36°$. O ponteiro dos minutos terá percorrido um arco de $12 \cdot 6° = 72°$. Então, o ângulo agudo formado entre os dois ponteiros é de $72° - 36° = 36°$.

4. Unesp – Em um jogo eletrônico, o "monstro" tem a forma de um setor circular com raio 1 cm, como mostra a figura. A parte que falta no círculo é a boca do "monstro", e o ângulo de abertura mede 1 radiano. O perímetro do "monstro", em cm, é

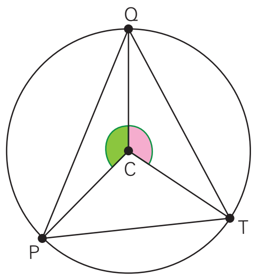


a) $\pi - 1$ **c)** $2\pi - 1$ **e)** $2\pi + 1$
b) $\pi + 1$ **d)** 2π

O valor do arco do monstro mede $2\pi - 1\ rad$. Logo, o comprimento desse arco é de $(2\pi - 1) \cdot 1\ cm = 2\pi - 1\ cm$.

Então, seu perímetro é igual a $2\pi - 1 + 2 = 2\pi + 1$ cm.

5. FGV – O triângulo PQT, indicado na figura, está inscrito em uma circunferência de centro C, sendo que as medidas dos ângulos PĈQ e TĈQ são, respectivamente, iguais a α e $\frac{4\alpha}{3}$ radianos.



Em tais condições, a medida do ângulo PQ̂T, em radianos, é igual a:

a) $\pi - 7\alpha$ **c)** $3\pi - 4\alpha$ **e)** $\frac{4\pi - \alpha}{6}$
b) $\frac{6\pi - 7\alpha}{6}$ **d)** $\frac{6\pi - 7\alpha}{3}$

Chamando de θ o ângulo $P\hat{C}T$, temos $P\hat{Q}T = \frac{\theta}{2}$.

Logo, $2\pi = \alpha + \frac{4\alpha}{3} + \theta \rightarrow \theta = \frac{6\pi - 7\alpha}{3}$.

Então, $P\hat{Q}T = \frac{\theta}{2} = \frac{6\pi - 7\alpha}{6}$.

6. Unesp (adaptado) – A figura mostra um relógio de parede, com 40 cm de diâmetro externo, marcando 1 hora e 54 minutos.

Usando a aproximação $\pi = 3$, calcule a medida, em cm, do arco externo do relógio determinado pelo menor ângulo central formado pelos ponteiros das horas e dos minutos, no horário mostrado.

O ângulo formado entre dois números consecutivos de um relógio é igual a:

$\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}\text{rad}$

Então, no ponteiro dos minutos:

60 min – 2πrad

1 min – α

Logo, $\alpha = \frac{\pi}{30}\text{rad}$.

No ponteiro das horas:

60 min – $\frac{\pi}{6}$rad

54 min – β

$\beta = \frac{60}{54} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{20}\text{rad}$

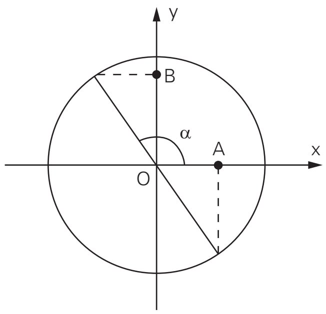
Portanto, o ângulo formado pelos ponteiros do relógio é:

$\frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi}{30} = \frac{31\pi}{60}\text{rad}$

Desse modo, a medida do arco é $\frac{31 \cdot 3}{60} \cdot 20 = 31$ cm.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UFRGS (adaptado) – No círculo de raio unitário da figura abaixo, tem-se $\alpha = 120°$. O valor de $OA \cdot OB$ é



a) $\frac{1}{2}$

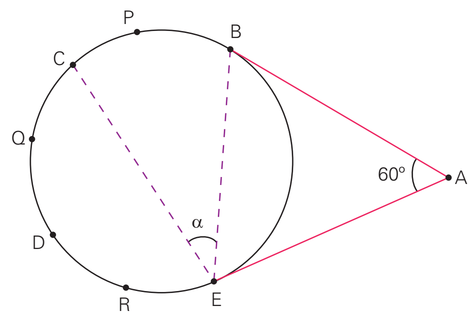
b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

8. FGV – Na figura, AB e AE são tangentes à circunferência nos pontos B e E, respectivamente, e $B\hat{A}E = 60°$. Se os arcos BPC, CQD e DRE têm medidas iguais, a medida do ângulo BEC, indicada na figura por α, é igual a



a) 20°

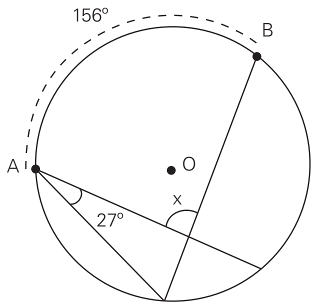
b) 40°

c) 45°

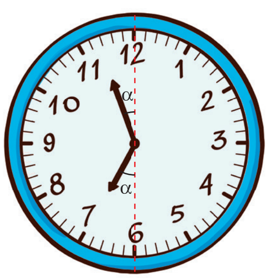
d) 60°

e) 80°

9. UFSC (adaptado) – Na figura da circunferência de centro O, se o ângulo agudo A mede 27° e o arco AB mede 156°, calcule a medida do ângulo indicado por x.



10. FGV – O relógio indicado na figura marca 6 horas e



a) $55\frac{7}{13}$ minutos

b) $55\frac{5}{11}$ minutos

c) $55\frac{5}{13}$ minutos

d) $54\frac{3}{11}$ minutos

e) $54\frac{2}{11}$ minutos

11. PUC-Rio (adaptado) – Em um círculo, um ângulo central de 20 graus determina um arco de 5 cm. Calcule o tamanho do arco, em cm, determinado por um ângulo central de 40 graus.

12. Fuvest – O perímetro de um setor circular de raio R e ângulo central medindo α radianos é igual ao perímetro de um quadrado de lado R. Então, α é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$

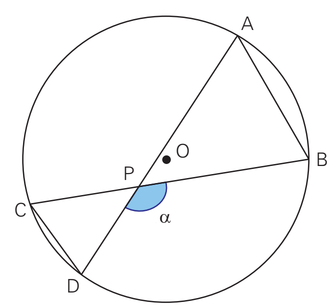
b) 2

c) 1

d) $2\frac{\pi}{3}$

e) $\frac{\pi}{2}$

13. FGV (adaptado) – Os arcos AB e CD de uma circunferência de centro O medem, respectivamente, 60° e 36°. Na mesma circunferência, as cordas AD e BC se intersectam no ponto P, conforme indica a figura a seguir.



A medida do ângulo, indicado na figura por α, é igual a

a) 120°

b) 124°

c) 128°

d) 130°

e) 132°

14. UECE (adaptado) – Considere a solução (x e y) do sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg}(x-y) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

em que x e y são ângulos agudos. Nessas condições, a soma $x^2 + y^2$, em radianos, é igual a

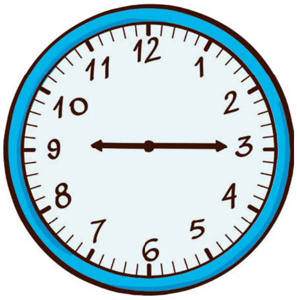
a) $\frac{5\pi^2}{72}$ **b)** $\frac{3\pi^2}{16}$ **c)** $\frac{4\pi^2}{15}$ **d)** $\frac{2\pi^2}{5}$

15. Unifenas (adaptado) – O quíntuplo de ângulo excede em 30° o dobro do seu complemento. Qual é o suplemento deste ângulo?

16. Unicamp (adaptado) – Seja x um número real, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tal que 2sec x = tg x + 2.
Então, a diferença 2 – sec x é igual a

a) 1 **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{1}{3}$

17. UPE – Um relógio quebrou e está marcando a hora representada a seguir:



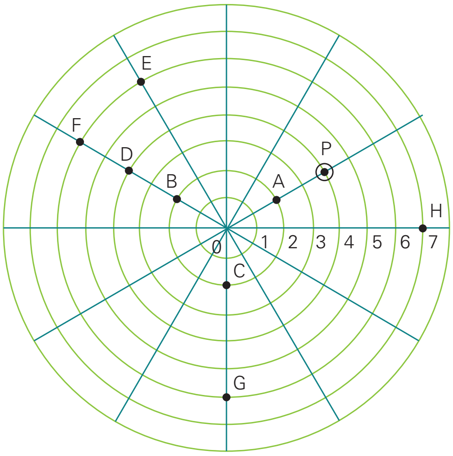
Felizmente os ponteiros ainda giram na mesma direção, mas a velocidade do ponteiro menor equivale a 9/8 da velocidade do ponteiro maior. Depois de quantas voltas o ponteiro pequeno vai encontrar o ponteiro grande?

a) 3,0 **b)** 4,0 **c)** 4,5 **d)** 6,5 **e)** 9,5

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H8

No jogo mostrado na figura, uma bolinha desloca-se somente de duas formas: ao longo de linhas retas ou por arcos de circunferências centradas no ponto O e raios variando de 1 a 8. Durante o jogo, a bolinha que estiver no ponto P deverá realizar a seguinte sequência de movimentos: 2 unidades no mesmo sentido utilizado para ir do ponto O até o ponto A e, no sentido anti-horário, um arco de circunferência cujo ângulo central é 120°.



Após a sequência de movimentos descrita, a bolinha estará no ponto

a) B **b)** D **c)** E **d)** F **e)** G

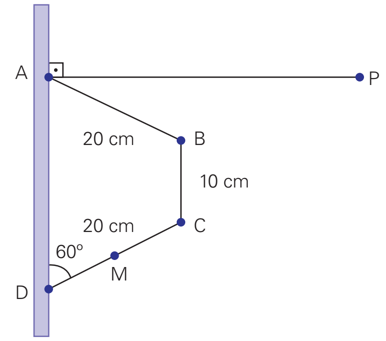
19. Enem C2-H8

Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a

a) uma volta completa.
b) uma volta e meia.
c) duas voltas completas.
d) duas voltas e meia.
e) cinco voltas completas.

20. FGV C2-H8

Na figura, ABCD representa uma placa em forma de trapézio isósceles de ângulo da base medindo 60°. A placa está fixada em uma parede por AD, e PA representa uma corda perfeitamente esticada, inicialmente perpendicular à parede.



Nesse dispositivo, o ponto P será girado em sentido horário, mantendo-se no plano da placa, e de forma que a corda fique sempre esticada ao máximo. O giro termina quando P atinge M, que é o ponto médio de $\overline{CD}$. Nas condições descritas, o percurso total realizado por P, em cm, será igual a

a) $\frac{50\pi}{3}$ **b)** $\frac{40\pi}{3}$ **c)** 15π **d)** 10π **e)** 9π

4 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

- Circunferência trigonométrica
- Razões trigonométricas na circunferência

HABILIDADES

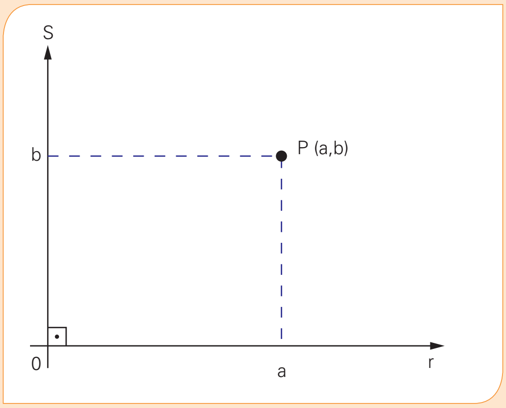
- Associar números reais a pontos na circunferência trigonométrica.
- Estabelecer as razões trigonométricas na circunferência trigonométrica.
- Determinar os valores de seno, cosseno e tangente para valores notáveis de ângulos.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Circunferência trigonométrica

O triângulo retângulo impõe limitações ao uso das razões trigonométricas: seus ângulos internos, passíveis de aplicação a essas relações, são agudos.

As razões trigonométricas, aplicadas aos arcos de circunferência, têm as propriedades válidas para o uso com ângulos agudos.

Inicialmente vale definir a circunferência sobre a qual são interpretadas as razões trigonométricas: a **circunferência trigonométrica**.



Considere um sistema de coordenadas cartesianas, como o representado a seguir.

Nos eixos **r** e **s**, perpendiculares entre si, cada ponto corresponde a um número real e vice-versa. Cada número real tem um ponto associado em cada uma das retas. A interseção dos eixos se dá no ponto de número zero, tanto para o eixo **x**, chamado de eixo das abscissas, como para o eixo **y**, chamado de eixo das ordenadas, constituindo a origem dos eixos coordenados.

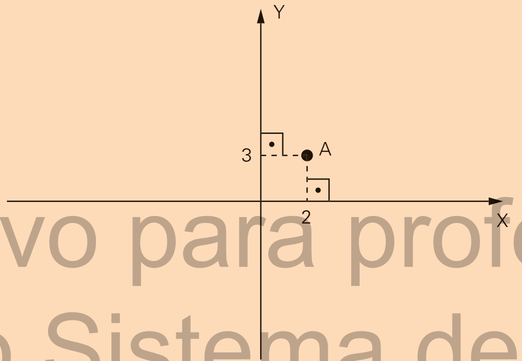
Desse modo, qualquer ponto do plano assim determinado pode ser representado por um par de números reais, denominado **par ordenado**. O ponto **P**, na figura, tem as coordenadas (**a**, **b**), sendo **a** o ponto da abscissa de **P** e **b**, o ponto da sua ordenada.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Represente o par ordenado (2,3) no sistema de coordenadas cartesianas.

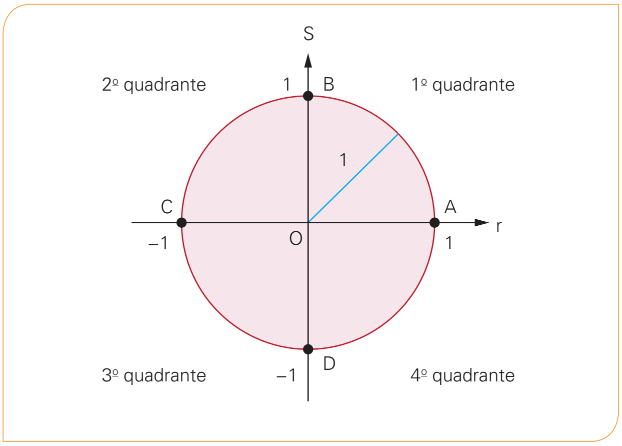
Resolução

Como a representação de um par ordenado no sistema de coordenadas é um ponto, denominamos o par (2,3) por **A**. Assim, temos:



Na figura a seguir, é representada uma circunferência trigonométrica com centro na origem dos eixos (0, 0) e raio unitário.

Como consequência, os pontos de interseção da circunferência com o par de eixos, indicados na figura por A, B, C e D, têm as coordenadas (1, 0), (0, 1), (–1, 0) e (0, –1), respectivamente.



Esses pontos dividem a circunferência trigonométrica em quatro arcos congruentes, denominados **quadrantes**, numerados a partir de A no sentido anti-horário.

NÚMEROS REAIS NA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Considere a associação entre pontos de uma reta e números reais. Definida a origem de um eixo, um número real **x** corresponde a um de seus pontos que diste |x| (valor absoluto de **x**) da origem.

A reta real a seguir, se $x > 0$, o ponto fica à direita de 0. Caso contrário, tal ponto se localiza à esquerda de 0. Observe a representação dos pontos associados aos números $-\sqrt{3}$, –1, 0, 1, 2, 3 e π.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Qual o significado de $|3|$?

Resolução

A distância, na reta real, do número 3 à origem (número zero).

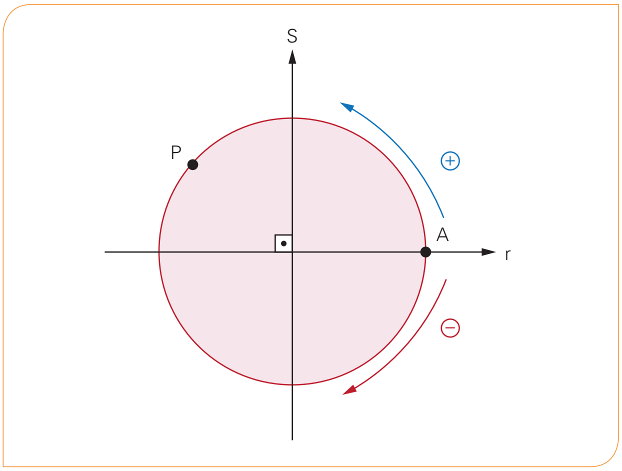
2. Sistema Dom Bosco – Calcule $|3| + |-2|$.

Resolução

$3 + 2 = 5$.

Agora considere que a cada número real x se faz corresponder um ponto sobre a circunferência, de tal forma que:

- o ponto **A** esteja associado ao número $x = 0$;
- um número real **x** seja associado a um ponto **P**, tal que o comprimento do arco AC seja igual a |x|;
- se $x > 0$, determina-se o arco AP sobre a circunferência no sentido anti-horário. Se $x < 0$, o arco é definido no sentido horário.



De acordo com a indicação, o ponto **P**, associado a um número real **x**, chama-se **imagem de x** na circunferência trigonométrica.

Lembrando que se pode calcular o comprimento da circunferência trigonométrica por $C = 2\pi R$, sendo **R** o seu raio.

Como ele mede uma unidade, o comprimento da circunferência trigonométrica é 2π unidades. Em decorrência:

- o arco de uma volta ou medida 2π rad tem comprimento de 2π unidades;
- o arco de comprimento |x| na circunferência trigonométrica tem medida de |x| rad.

Assim, a medida de um arco na circunferência trigonométrica é igual ao módulo do número real **x**, do qual **P** é a imagem.

Atualmente é comum o uso de uma calculadora científica para obter valores do seno, cosseno e tangente de ângulos e seus simétricos, em diferentes unidades.

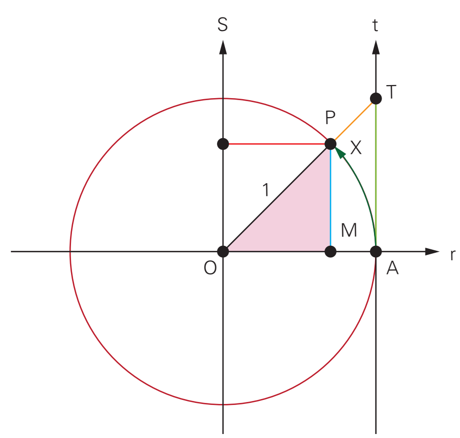
MARK EATON | DREAMSTIME.COM

Razões trigonométricas na circunferência

Definem-se seno, cosseno e tangente para o ângulo agudo interno de um triângulo retângulo como razões entre seus lados.

Para aplicar tais relações a quaisquer ângulos (nulo, reto e obtuso) e também a quaisquer arcos contidos na circunferência trigonométrica, é necessário redefinir esses conceitos.

Considere a circunferência trigonométrica de centro O (0, 0) e raio unitário a seguir. A reta **t** a tangencia no ponto **A**, de coordenadas (1, 0).



No primeiro quadrante, temos um ponto **P**, imagem na circunferência de um número real **x**. A semirreta intercepta a reta **t** no ponto **T**. Então:

sen x: ordenada de P
cos x: abscissa de P
tg x: ordenada de T

Assim, o ponto **P** tem coordenadas (cos x, sen x) e o ponto **T**, coordenadas (1, tg x).

Portanto, os eixos **r**, **s** e **t** correspondem, respectivamente, aos eixos dos cossenos, dos senos e das tangentes.

É necessário reconhecer que as razões antes definidas continuam válidas. Então, observe o recém-construído triângulo retângulo OMP, em destaque na figura anterior. Considerando **x** um número real positivo, é possível dizer que o ângulo $M\hat{O}P$ tem medida **x**. Assim:

$$\text{sen } x = \frac{MP}{OP} = \frac{MP}{R} = \frac{MP}{1} \rightarrow MP = \text{sen } x$$

$$\cos x = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{R} = \frac{OM}{1} \rightarrow OM = \cos x$$

$$\text{tg } x = \frac{MP}{OM} = \frac{\text{sen } x}{\cos x}.$$

O valor da tangente de **x** no triângulo OAT é $\frac{AT}{OA}$. Então: AT = tg x.

As medidas dos segmentos MP e OM podem ser dadas pelas coordenadas (positivas, no caso) de **P**: sen x e cos x, respectivamente. A medida do segmento AT pode ser dada pela ordenada de **T** (positiva), que é a tg x.

Para ampliar as noções de seno, cosseno e tangente para arcos da circunferência trigonométrica, considere o ponto **P**, da figura anterior, movimentando-se no sentido positivo de giro sobre a circunferência, conforme figuras a seguir. Note que o ponto **T** movimenta-se também sobre a reta **t**.

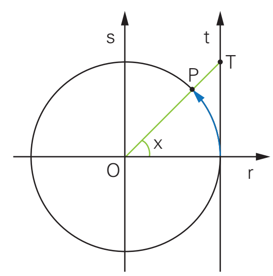
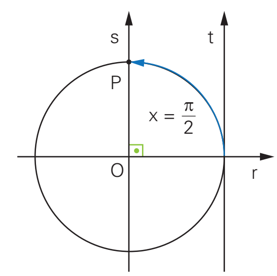


Figura a



(não existe ponto T)
Figura b

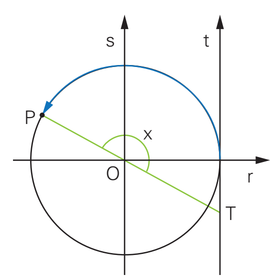


Figura c

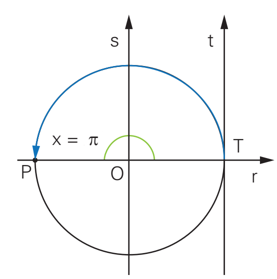


Figura d

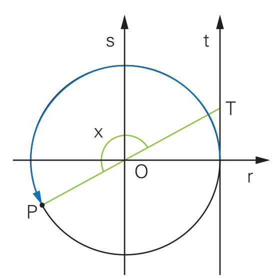
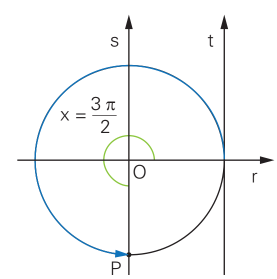


Figura e



(não existe ponto T)
Figura f

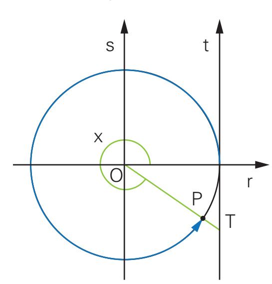


Figura g

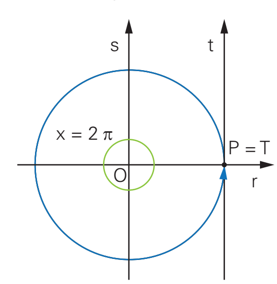


Figura h

Da sequência de ilustrações, podemos concluir que, se **x** é arco com extremidade no:

- primeiro quadrante, todas as coordenadas de **P** e **T** são positivas.

$\text{sen}\, x > 0,\ \cos x > 0,\ \text{tg}\, x > 0$

- segundo quadrante, o ponto **P** tem ordenada positiva e abscissa negativa, e o ponto **T** tem ordenada negativa.

$\text{sen}\, x > 0,\ \cos x < 0,\ \text{tg}\, x < 0$

- terceiro quadrante, as coordenadas de **P** são negativas, e o ponto **T** tem ordenada positiva.

$\text{sen}\, x < 0,\ \cos x < 0,\ \text{tg}\, x > 0$

- quarto quadrante, **P** tem ordenada negativa e abscissa positiva, e o ponto **T** tem ordenada negativa.

$\text{sen}\, x < 0,\ \cos x > 0,\ \text{tg}\, x < 0$

Temos também os casos nos ângulos retos, ou seja:

- $x = 0$ ou $x = 2\pi$, temos que $\text{sen}\, x = 0$ e $\cos x = 1$
- $x = \frac{\pi}{2}$, temos que $\text{sen}\, x = 1$ e $\cos x = 0$
- $x = \pi$, temos que $\text{sen}\, x = 0$ e $\cos x = -1$
- $x = \frac{3\pi}{2}$, temos que $\text{sen}\, x = -1$ e $\cos x = 0$

Observação: o valor da tangente para arcos de medida $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ não existe, uma vez que não há interseção entre a reta **t** e a semirreta.

Podemos montar uma tabela dos sinais das razões trigonométricas nos diferentes quadrantes, além dos valores para seno, cosseno e tangente de arcos notáveis da primeira volta, com extremidades nos limites desses quadrantes.

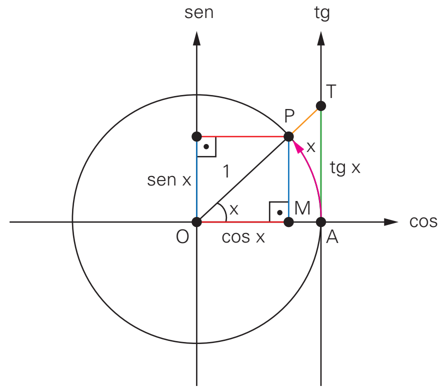
	Sinais			
	1º Q	2º Q	3º Q	4º Q
sen x	+	+	−	−
cos x	+	−	−	+
tg x	+	−	+	−

	Valores				
	0°	90°	180°	270°	360°
	0 rad	$\frac{\pi}{2}$rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}$rad	2πrad
sen x	0	1	0	−1	0
cos x	1	0	−1	0	1
tg x	0	∄	0	∄	0

ROTEIRO DE AULA

CICLO TRIGONOMÉTRICO

Seno
Cosseno
Tangente



	Valores				
	0°	90°	180°	270°	360°
	0 rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}$ rad	2π rad
sen x	0	1	0	−1	0
cos x	1	0	−1	0	1
tg x	0	∄	0	∄	0

	Sinais			
	1º Q	2º Q	3º Q	4º Q
sen x	+	+	−	−
cos x	+	−	−	+
tg x	+	−	+	−

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-Rio (adaptado) – Se tg θ = 1 e pertence ao primeiro quadrante, qual é o valor de cos θ?

Se tg θ = 1 e θ pertence ao primeiro quadrante, então θ = 45°, logo $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Sistema Dom Bosco – Sabendo que x é o menor arco positivo tal que $\cos(x) = -1$, quais são os valores de $\text{sen}\left(\frac{x}{6}\right)$ e cos (2x)?

a) $\frac{1}{2}$ e –1
b) $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2}$ e 1
d) –1 e 5
e) 0 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Da circunferência trigonométrica, temos x = 180°.

Então, $\text{sen}\left(\frac{x}{6}\right) = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ e $\cos(2x) = \cos 360° = -1$.

3. Fuvest – Os valores máximo e mínimo da função $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\cdot \text{sen}^2 x$ são, respectivamente:

a) 2 e 1
b) 1 e 0
c) 1 e $\frac{1}{2}$
d) 2 e 0
e) 2 e $\frac{1}{2}$

Da circunferência trigonométrica, temos que $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$.

Os números de –1 a 0 e de 0 a 1, quando elevados ao quadrado, passam a pertencer ao intervalo de 0 a 1. Então: $0 \leqslant \text{sen}^2 x \leqslant 1$.

Em virtude da subtração que consta na função, seu máximo ocorre quando $\text{sen}^2 x$ é mínimo e seu mínimo quando $\text{sen}^2 x$ é máximo.

Portanto:

$f_{máx} = 1 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 1$; $f_{mín} = 1 - \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

4. Mackenzie – Se $\cos x = \frac{2}{3}$, $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$, então o valor de tg x é igual a

a) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$
b) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
e) $2\sqrt{5}$

Temos que $\cos x = \frac{2}{3} \to \cos^2 x = \frac{4}{9} \to 1 - \text{sen}^2 x = \frac{4}{9} \to \text{sen}^2 x = \frac{5}{9}$.

Então, $\text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. Como $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$, então x está no 4º quadrante.

Logo, sen x < 0.

Assim, $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Portanto, $\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. UAB (adaptado) – Considerando $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, calcule o valor da expressão $\frac{(1+\text{cotg}^2 x)\cdot(1-\cos^2 x)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$.

Temos que $(1+\text{cotg}^2 x) = \text{cossec}^2 x = \frac{1}{\text{sen}^2 x}$;

$1 - \cos^2 x = \text{sen}^2 x$ e $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

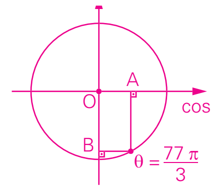
Logo, $\frac{(1+\text{cotg}^2 x)\cdot(1-\cos^2 x)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{\text{sen}^2 x}\text{sen}^2 x}{\frac{1}{2}} = 2$.

6. IFPE – Considere o arco $\theta = \frac{77\pi}{3}$. É correto dizer que:

a) sen θ < 0
b) cos θ < 0
c) tg θ > 0
d) sen θ + cos θ > 0
e) sen θ + cos θ = 1

Temos que a divisão de 77π por 3 resulta em $25\pi + \frac{2}{3}\pi$. Isto é, 11 voltas e meia na circunferência trigonométrica e mais $\frac{2}{3}\pi$.

Portanto, θ está situado no 4º quadrante.



Da figura, temos:

I) OB < 0 → sen θ < 0;

II) OA > 0 → cos θ < 0;

III) $\frac{OB}{OA} < 0 \to \text{tg } \theta < 0$;

IV) Como $|OB| > |OA|$, temos que OB + AO < 0. Daí vem sen θ + cos θ < 0.

Dos itens I, II, III e IV, concluímos que sen θ < 0.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Sistema Dom Bosco – Se sen $x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo x do primeiro quadrante, sobre sec x é verdade que

a) $1 < \sec x < \frac{3}{2}$

b) $\frac{2}{3} < \sec x \le \frac{4}{3}$

c) $\frac{1}{3} \le \sec x \le \frac{5}{3}$

d) $1 < \sec x \le 2$

8. Mackenzie (adaptado) – Seja $g(x) = x^2 + x \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta$.

Se g (x) = 0, $\beta = \frac{3\pi}{2}$ e x real, calcule x.

9. Mackenzie (adaptado) – Se $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \frac{1}{2}$, no intervalo $[0, \pi]$, o menor valor da tg x é

a) $-\sqrt{3}$.

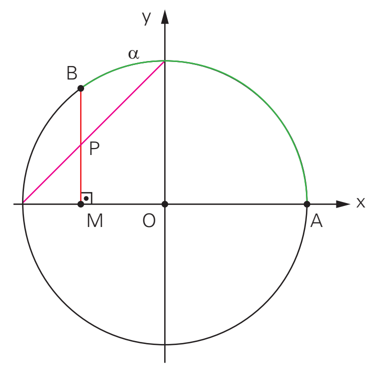
b) $-\sqrt{2}$.

c) -1.

d) $\sqrt{2}$.

e) $\sqrt{3}$.

10. FGV – No círculo trigonométrico de raio unitário indicado na figura, o arco AB mede α. Assim, PM é igual a



a) $-1 - \text{tg}\,\alpha$

b) $1 - \cos\alpha$

c) $1 + \cos\alpha$

d) $1 + \text{sen}\,\alpha$

e) $-1 + \text{cotg}\,\alpha$

11. UPF – Seja a um número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. A expressão que representa um número real positivo é:

a) cos a – sen a

b) sen a · tg a

c) cos a · sen a

d) sen a – tg a

e) cos a + tg a

12. Espcex (adaptado) – O valor de $\cos 65° - \text{sen } 35° - \text{sen } 25° + \cos 55°$ é

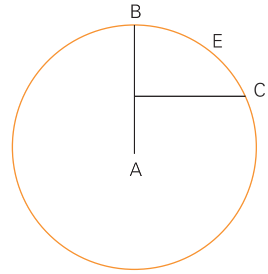
a) $\sqrt{2}$ **b)** -1 **c)** 0 **d)** 1 **e)** $\frac{1}{2}$

13. Sistema Dom Bosco – Considere a equação $4 \text{ sen}^2 x + 4 \cos x - 1 = 0$, resolvida no universo $U = [0, 2\pi[$. Se N é o seu número de soluções e β é sua maior raiz, então $N\text{tg } \beta$ vale

a) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **b)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **c)** $-4\sqrt{3}$ **d)** $4\sqrt{3}$ **e)** $2\sqrt{3}$

14. Sistema Dom Bosco – Sabendo-se que sen x = a e que x é um ângulo do 1º quadrante, calcule o valor, em função de a, da expressão $\text{sen }(x - 2\pi) - \cos^2(x - 2\pi)$.

15. Sistema Dom Bosco – Na figura abaixo, A é o centro da circunferência de raio AB = 300 m, BEC é um arco de medida linear 200 m, AB e CD são segmentos perpendiculares. Se uma pessoa caminha de A até B sobre o raio AB, depois percorre o arco BEC, em seguida anda de C a D em linha reta e, por fim, volta a A pelo segmento DA, ela percorre, em metros



a) $500 + 300\left[\text{sen}\left(\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

b) $500 + 2 \cdot \text{tg}\left(\frac{2}{3}\right)$

c) $500 + 600\sqrt{2}$

d) $500 + 300\sqrt{2}$

e) $500 + 200\sqrt{3}$

16. ITA – O número de soluções da equação $(1 + \sec \theta) \cdot (1 + \text{cossec } \theta) = 0$, com $\theta \in [-\pi, \pi]$, é

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

17. ITA (adaptado) – Calcule os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $2 \cdot \text{sen } x - \cos x = 1$. Calcule o maior valor de sec x.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Fuvest (adaptado) C2-H8

Sejam α e β números reais com $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ e $0 < \beta < \pi$. Se o sistema de equações $\begin{cases} \text{tg } \alpha + 2\cos\beta = 0 \\ 3\text{tg } \alpha + 4\cos\beta = \sqrt{3} \end{cases}$ for satisfeito, então α e β pertencem, respectivamente, aos quadrantes

a) primeiro e segundo.
b) quarto e primeiro.
c) quarto e segundo.
d) primeiro e terceiro.
e) quarto e terceiro.

19. Uneb (adaptado) C2-H9

Admitindo-se que o peso de determinada pessoa, ao longo de um ano, possa ser modelado pela função $P(t) = 65 - 5 \cdot \cos\left(\left(\frac{t+3}{6}\right)\pi\right)$, em que $t = 1, ..., 12$ corresponde aos meses de janeiro a dezembro e considerando $\sqrt{3} = 1{,}7$, pode-se estimar que, em relação a março, o peso dessa pessoa em setembro

a) diminuiu 5 kg.
b) aumentou 5 kg.
c) diminuiu 10 kg.
d) aumentou 5 kg.
e) não se alterou.

20. Enem C2-H8

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro x = 2 ao mês de fevereiro e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 2 ago. 2012. (Adaptado)

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

a) janeiro
b) abril
c) junho
d) julho
e) outubro

5

SIMETRIAS E REDUÇÃO DO 2º QUADRANTE AO 1º QUADRANTE

- Conceitos iniciais
- Simetria em relação ao eixo das ordenadas: redução do 2º quadrante ao 1º quadrante

HABILIDADES

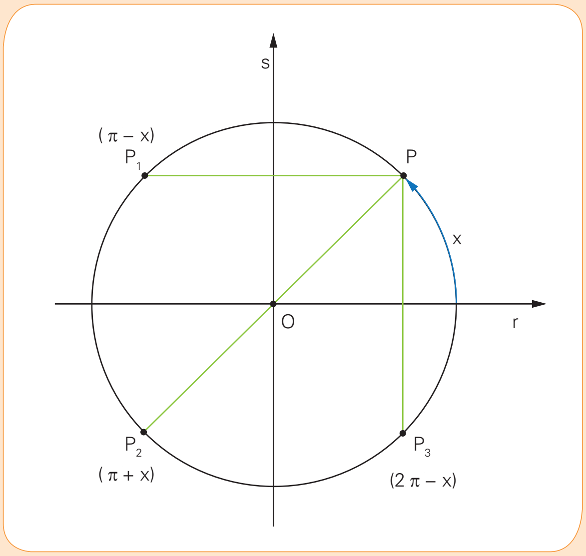
- Identificar a posição de arcos em relação ao 2º quadrante da circunferência trigonométrica.
- Determinar os valores do seno, cosseno e tangente de arcos no 2º quadrante, aplicando o procedimento de redução ao 1º quadrante.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

Conceitos iniciais

Na circunferência trigonométrica, há três tipos de simetria que possibilitam relacionar os valores de seno, cosseno e tangente de arco de qualquer quadrante com os valores do 1º quadrante. Por isso, o procedimento denomina-se **redução ao primeiro quadrante**.

A figura a seguir apresenta um ponto **P** em uma circunferência trigonométrica, que é imagem de um número real **x** ou, simplesmente, extremidade de um arco no primeiro quadrante.

Os pontos P_1, P_2 e P_3, pertencentes à circunferência, são simétricos de **P** em relação ao eixo das ordenadas, à origem dos eixos coordenados e ao eixo das abscissas, respectivamente.



Sendo **P** a imagem de um arco de medida **x**, temos:

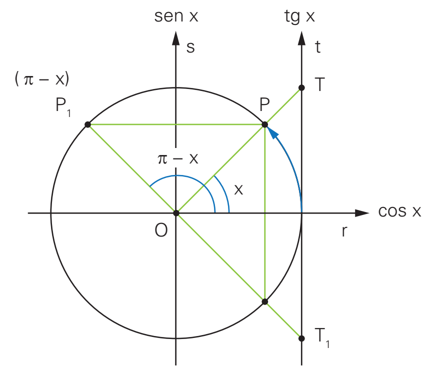
- P_1 como imagem do arco de medida $\pi - x$;
- P_2 como imagem do arco de medida $\pi + x$;
- P_3 como imagem do arco de medida $2\pi - x$ ou de medida $-x$.

Podemos analisar as simetrias encontradas para **P**, caso a caso.

Simetria em relação ao eixo das ordenadas: redução do 2º ao 1º quadrante

Na figura a seguir, os pontos P e P_1, simétricos em relação ao eixo das ordenadas, têm ordenadas iguais e abscissas simétricas. Com isso, podemos associar essas medidas e reduzi-las para o 1º quadrante.

Podemos escrever esses pontos como P(cos x, sen x) e P_1(cos $(\pi - x)$, sen $(\pi - x)$), originando as seguintes identidades:



$$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen } x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

Os pontos T e T_1, interseções da reta **t**, respectivamente com as semirretas $\overline{OP}$ e $\overline{OP_1}$, têm ordenadas simétricas. Podemos escrever T e T_1 como $T(1, \text{tg } x)$ e $T_1(1, \text{tg } (\pi - x))$, originando:

$$\text{tg}(\pi - x) = -\text{tg } x$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. USF – Se cotg x = 2 e x é do 1º quadrante, então cos x vale

a) $\frac{1}{5}$ **b)** $2\sqrt{5}$ **c)** $3\sqrt{5}$ **d)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **e)** $\sqrt{5}$

Resolução

$$\text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = 2 \rightarrow \text{sen}\,x = \frac{1}{2} \cdot \cos x$$

Pela identidade trigonométrica fundamental, temos que:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Substituindo os valores, temos:

$$\frac{1}{4} \cdot \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5}$$

$(\cos x \geq 0$, pois x é do primeiro quadrante$) \rightarrow$

$$\rightarrow \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

2. Sistema Dom Bosco – Simplifique a expressão a seguir:

$$A = \frac{\text{sen } 150° \cdot \sec 60°}{\text{sen}^2 40° - \cos^2 140°}$$

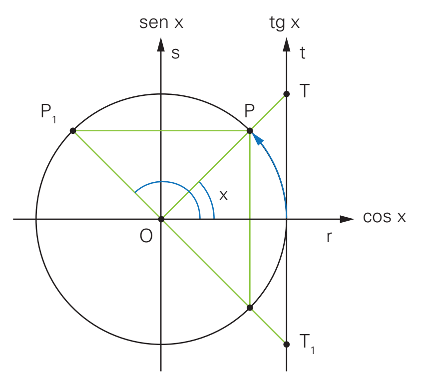
Resolução

Da circunferência trigonométrica, temos sen 150° = sen 30° e cos 140° = –cos 40°.

Assim:

$$A = \frac{\text{sen } 30° \cdot \frac{1}{\cos 60°}}{\text{sen}^2\ 40° + \cos^2 40°} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

SIMETRIA E REDUÇÃO DO 2º QUADRANTE AO 1º QUADRANTE



$\text{sen}(\pi - x) =$ sen x

$\cos(\pi - x) =$ − cos x

$\text{tg}(\pi - x) =$ − tg x

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RS (adaptado) – Na equação tg (x) = cotg (x) em R, onde $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor de x.

Temos que $\frac{\text{sen}x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\text{sen}x} \Leftrightarrow \text{sen}^2x - \cos^2x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2x - 1\ \text{sen}^2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2x = \frac{1}{2}$.

Portanto, $\text{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pois x está no 1º quadrante.

Logo, $x = \frac{\pi}{4}$.

2. Cesgranrio-RJ – Se $0 < a < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < b < \pi$ e $\text{sen a} = \text{sen b} = \frac{3}{5}$, então a + b vale:

a) π
c) $\frac{3\pi}{5}$
d) $\frac{6\pi}{5}$
b) $\frac{3\pi}{2}$
d) $\frac{5\pi}{3}$

Como **a** e **b** têm o mesmo valor de seno, eles são simétricos. Logo:

$(180° - a) = b \leftrightarrow a + b = 180° = \pi$.

3. FGV C2-H9

O número de quartos ocupados em um hotel varia de acordo com a época do ano. Estima-se que o número de quartos ocupados em cada mês de determinado ano seja dado por $Q(x) = 150 + 30 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$, em que x é estabelecido da seguinte forma: x = 1 representa o mês de janeiro, x = 2 representa o mês de fevereiro, x = 3 representa o mês de março, e assim por diante. Calcule a variação porcentual dos quartos ocupados em junho em relação a março.

a) – 20%
c) – 30%
e) – 50%
b) – 15%
d) – 25%

Em junho: $Q(6) = 150 + 30 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) = 150 - 30 = 120$

Em março: $Q(3) = 150 + 30 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 3\right) = 150 - 0 = 150$

Portanto, $\frac{Q(6)}{Q(3)} = \frac{120}{150} = 0{,}8 = 80\%$. Então, houve uma diminuição de 20%.

4. FSUL-RS (adaptado) – Sabendo-se que $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2}$ e que $\alpha \in 2º$ quadrante, o valor da expressão $y = \frac{\text{sen}(\alpha - 90°) \cdot \text{tg}\ \alpha}{\sec(180° - \alpha)}$ é

a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
c) $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

Da circunferência trigonométrica, temos que $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 150°$, pois $\alpha \in 2º$ quadrante. Então:

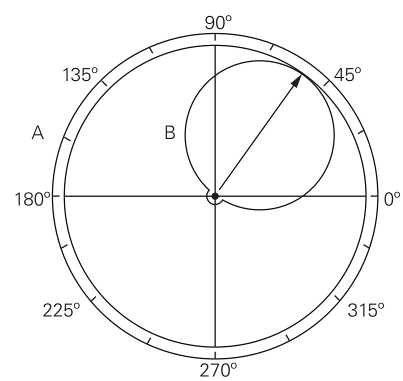
$y = \frac{\text{sen}\ (150° - 90°) \cdot \text{tg}\ 150°}{\sec\ (180° - 150°)} = \frac{\text{sen}60° \cdot \text{tg}\ 150°}{\sec 30°} = \frac{\text{sen}60° \cdot \text{tg}\ 150°}{\frac{1}{\cos 30°}} =$

$= \text{sen}\ 60º \cdot \cos\ 30° \cdot \text{tg}\ 150º$

Como tg 150º = –tg30°. Então,

$y = \text{sen}60° \cdot \cos 30° \cdot -\left(\frac{\text{sen}30°}{\cos 30°}\right) = -\text{sen}60° \cdot \text{sen}30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. UFRR – Conforme apresentado na figura a seguir, por meio de um dispositivo, articularam-se dois discos, A (maior) e B (menor). O disco B gira dentro do disco A, e o raio de B é igual à metade da medida do raio de A; a seta coincide com o diâmetro do disco B, e indica um ângulo central no disco A.



Os comprimentos dos segmentos determinados pelas interseções da borda do disco B com os eixos perpendiculares do disco A indicam os valores de quais funções trigonométricas?

a) seno e tangente.
b) seno e secante.
c) seno e cosseno.
d) cosseno e secante.
e) cosseno e tangente.

Os comprimentos dos segmentos determinados pelas interseções da borda do disco B com os eixos perpendiculares do disco A indicam os valores de seno (no eixo perpendicular de 90º) e cosseno (no eixo perpendicular de 0º).

6. Sistema Dom Bosco – A expressão

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\cos(180°-x)$ é equivalente a

a) 0
b) cos x
c) $\sqrt{1-\text{sen}x}$
d) $-\cos^2 x$
e) $\text{sen}^2 x$

Da circunferência trigonométrica, temos que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ e $\cos(180°-x)=-\cos x$. Como $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ e x são complementares:

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$. Então,

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\cos(180°-x)=\cos x\cdot(-\cos x)=-\cos^2 x.$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

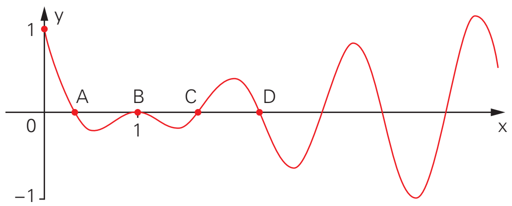
7. PUC-Rio – Se tg θ = 1 e θ pertence ao primeiro quadrante, então cos θ é igual a:

a) 0
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) 1

8. Unicentro – Considerando-se que x é um arco com extremidade no segundo quadrante e que $\text{sen}\,x=\frac{4}{5}$, então pode-se afirmar que o valor de $5\cos^2x-3\text{tg}\,x$ é

a) $-\frac{11}{5}$
b) $-\frac{29}{15}$
c) $\frac{11}{5}$
d) $\frac{45}{15}$
e) $\frac{29}{5}$

9. UPF (adaptado) – A figura abaixo é a representação gráfica da função definida por $f(x)=\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)$. Os pontos A, B, C e D indicam os quatro primeiros pontos de intersecção da função f com o eixo das abscissas. A coordenada x dos pontos A, B, C e D, nessa ordem, é:



10. Sistema Dom Bosco – Calcule a secante de um arco de medida 2 340º.

11. UEFS – Se x é um ângulo do segundo quadrante satisfazendo a equação $6\ \text{sen}^2 x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 4 + 2\cos(-x)$, então cos x é igual a

a) $-\frac{2}{3}$.
b) $-\frac{3}{5}$
c) $-\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{3}{4}$

12. UFRGS – Os pontos A(1,2), B(6,2) e C são os vértices de um triângulo equilátero, sendo o segmento AB a base deste. O seno do ângulo formado pelo eixo das abscissas e a reta suporte do lado BC no sentido anti-horário é

a) $-\frac{1}{2}$
b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. UFBA (adaptado)

Considere as funções reais f(x) = sen x e $g(x) = \frac{1}{2} + \cos x$ para responder às questões 13 e 14.

$f(\pi) = g\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$?

14. Sistema Dom Bosco – No intervalo [0,2π], as duas funções, graficamente, intersectam-se uma única vez?

15. UFPE – O PIB (Produto Interno Bruto, que representa a soma das riquezas e dos serviços produzidos por uma nação) de certo país, no ano 2000 + x, é dado, em bilhões de dólares, por: $P(x) = 500 + 0{,}5 \cdot x + 20 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, em que x é um inteiro não negativo.

a) Determine, em bilhões de dólares, o valor do PIB do país em 2004.

b) Em períodos de 12 anos, o PIB do país aumenta do mesmo valor, ou seja, $P(x+12) - P(x)$ é constante. Determine essa constante (em bilhões de dólares).

16. UFPB – Se sen $x = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ e x está no segundo quadrante, então

a) $tgx = \frac{6\sqrt{10}}{7}$

b) $tgx = \frac{6\sqrt{10}}{49}$

c) $tgx = \frac{-2\sqrt{10}}{3}$

d) $tgx = \frac{-3\sqrt{10}}{2}$

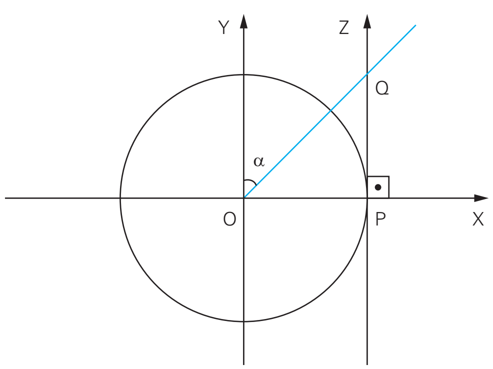
e) $tgx = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

17. UEFS (adaptado) – Se $tg\,\theta = \frac{6}{5} \cdot \cos\,\theta$, calcule sen θ.

ESTUDO PARA O ENEM

18. UFRN (adaptado) C2-H8

A figura a seguir é composta por dois eixos perpendiculares entre si, X e Y, que se interceptam no centro O de um círculo de raio 1, e outro eixo Z, paralelo a Y e tangente ao círculo no ponto P. A semirreta OQ, com Q pertencente a Z, forma um ângulo α com o eixo Y.



Podemos afirmar que o valor da medida do segmento PQ é:

a) sen α
b) tg α
c) cotg α
d) cos α
e) cossec α

19. Cecierj C2-H8

O valor máximo da função real $fx = \frac{1}{(2 + \cos(x))}$ é

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{2}$
c) 1
d) 3

20. PUC-Campinas (adaptado) C2-H8

Com um ângulo de inclinação de 30°, em relação ao solo plano, os raios solares que incidem sobre uma haste vertical de 2,5 m de comprimento geram uma sombra de x m. Um pouco mais tarde, quando o ângulo de inclinação dos raios solares é de 45°, a mesma sombra gerada agora é de y m. A diferença entre x e y é de, aproximadamente (dados: sen 30° = 0,5, cos 30° = 0,866, tg 30° = 0,577, sen 45° = 0,707, cos 45° = 0,707, tg 45° = 1):

a) 1 m
b) 1,83 m
c) 2,45 m
d) 0,88 m
e) 2,27 m

6

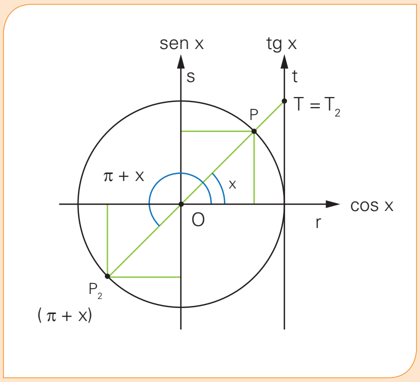
REDUÇÃO DO 3º E DO 4º QUADRANTE AO 1º QUADRANTE

- Simetria em relação à origem dos eixos coordenados: redução do 3º quadrante ao 1º quadrante
- Simetria em relação ao eixo das abscissas: redução do 4º quadrante ao 1º quadrante

HABILIDADES

- Identificar a posição de arcos em relação aos quadrantes da circunferência trigonométrica.
- Determinar os valores do seno, cosseno e tangente de arcos dos 3º e 4º quadrantes, aplicando o procedimento de redução ao 1º quadrante.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

Simetria em relação ao eixo das ordenadas: redução do 3º quadrante ao 1º quadrante



Na figura a seguir, os pontos P e P_2, simétricos em relação ao eixo das ordenadas, têm ordenadas e abscissas simétricas. Com isso, podemos associar essas medidas e reduzi-las para o 1º quadrante.

Podemos escrever esses pontos como P (cos x, sen x) e $P_2(\cos(\pi + x), \text{sen}(\pi - x))$, originando as seguintes identidades:

$$\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen } x$$

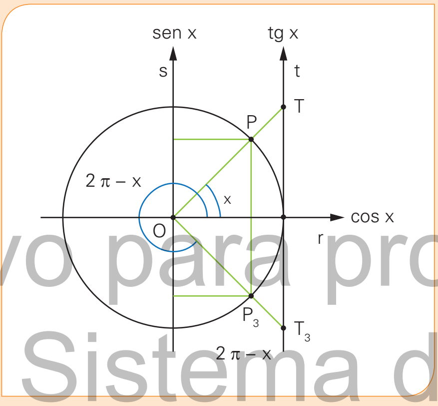
$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

Os pontos T e T_2, interseções da reta **t**, respectivamente, com as semirretas $\overline{OP}$ e $\overline{OP_2}$, têm ordenadas simétricas. Podemos escrever T e T_2 como $T(1, \text{tg } x)$ e $T_2(1, \text{tg}(\pi + x))$, originando:

$$\text{tg}(\pi + x) = \text{tg } x$$

Simetria em relação ao eixo das ordenadas: redução do 4º quadrante ao 1º quadrante

Na figura a seguir, os pontos P e P_3, simétricos em relação ao eixo das ordenadas, têm ordenadas simétricas e abscissas iguais. Com isso, podemos associar essas medidas e reduzi-las para o 1º quadrante.



Podemos escrever esses pontos como $P(\cos x, \text{sen } x)$ e $P_3(\cos(2\pi - x), \text{sen}(2\pi - x))$, originando as seguintes identidades:

$$\text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen } x$$
$$\cos(2\pi - x) = \cos x$$

Os pontos T e T_3, interseções da reta **t**, respectivamente, com as semirretas $\overline{OP}$ e $\overline{OP_3}$, têm ordenadas simétricas. Podemos escrever *T* e T_3 como $T(1, \text{tg } x)$ e $T_3(1, \text{tg}(2\pi - x))$, originando:

$$\text{tg}(2\pi - x) = -\text{tg } x$$

O ponto P_3 da circunferência pode ser considerado extremidade de um arco de medida negativa (–x). Esses resultados podem ser reescritos da seguinte maneira:

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$$

Em resumo, arcos com medidas entre 0 e 2 π rad têm:

- senos iguais se forem simétricos em relação ao eixo das ordenadas (eixo dos senos);
- cossenos iguais se forem simétricos em relação ao eixo das abscissas (eixo dos cossenos);
- tangentes iguais se forem simétricos em relação à origem dos eixos coordenados.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. PUC-SP – O valor de sen 1 200° é igual a:

a) cos 60°
b) –sen 60°
c) cos 30°
d) –sen 30°
e) cos 45°

Resolução

Temos que $1\,200° = 3 \cdot 360° + 120°$. Assim, podemos fazer a redução ao 1º quadrante da seguinte maneira:

$$\text{sen}(180° - 120°) = \text{sen } 60° = \cos 30°$$

2. Sistema Dom Bosco – Simplifique a expressão.

$$B = \frac{\cos(2\pi - \theta) \cdot \text{sen}(\pi + \theta)}{\cos(\pi - \theta) \cdot \cos(\pi + \theta)}$$

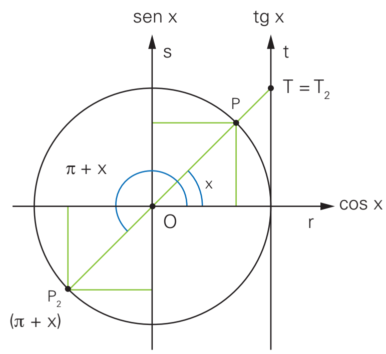
Resolução

$$B = \frac{\cos \theta \cdot (-\text{sen } \theta)}{(-\cos \theta) \cdot (-\cos \theta)} = -\frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = -\text{tg } \theta$$

ROTEIRO DE AULA

Redução do 3º e do 4º quadrantes a 1º quadrante

3º quadrante

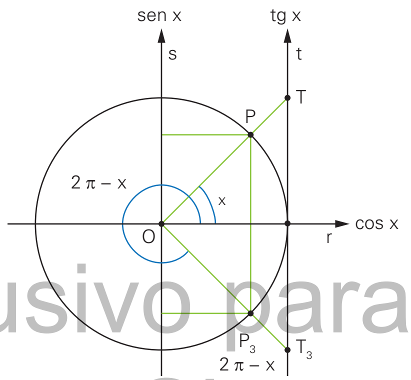


sen (π + x) = = −sen x

cos (π + x) = = −cos x

tg (π + x) = = tg x

4º quadrante



sen (2 π − x) = = −sen x

cos (2 π − x) = = −cos x

tg (2 π − x) = = −tg x

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RS – Se $x \in \mathbb{R}$, então a equação $\cos(x) = \cos(-x)$ apresenta o conjunto solução é

a) $\mathbb{R}$
b) $[-1; 1]$
c) $[0; +\infty)$
d) $(-\infty; 0]$
e) $\{-1, 0, 1\}$

Como a relação $\cos(x) = \cos(-x)$ é verdadeira para toda circunferência trigonométrica, então o conjunto solução é $\mathbb{R}$.

2. UFGD – Considere-se $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ e $\text{tg}\ \theta = \frac{2}{3}$. Calcule o valor da expressão $\text{cossec}\ \theta - \sec\ \theta$.

Temos que $\text{tg}\ \theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\ \theta} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{sen}\ \theta = \frac{2}{3} \cdot \cos.$

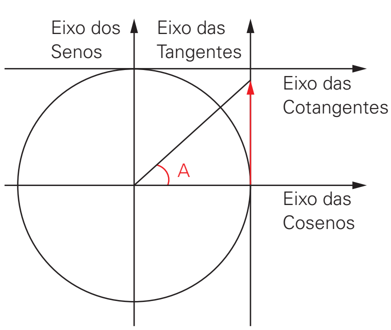
Da relação fundamental:

$\frac{4}{9} \cdot \cos^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \cos^2\theta = \frac{9}{13} \rightarrow \cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, pois $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Então, $\text{sen}\ \theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Portanto, $\text{cossec}\ \theta - \sec\ \theta = -\frac{\sqrt{13}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{13}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{13}}{6}$.

3. Unifenas – Utilize o esboço dos eixos para associar valores às funções seno, cosseno e tangente.



Fonte: <www.pt.wikipedia.org/wiki/Diferenciação_de_funções>.

Com relação aos seus conhecimentos sobre os valores absolutos das funções, assinale a verdadeira.

a) tg 225° > sen 225° > cos 225°
b) tg 225° < sen 225° = cos 225°
c) tg 225° = sen 225° = cos 225°
d) tg 225° > sen 225° < cos 225°
e) tg 225° > sen 225° = cos 225°

Da circunferência trigonométrica, temos:

$\text{tg}\ 225° = \text{tg}(180° + 45°) = \text{tg}\ 45° = 1$; $\text{sen}\ 225° = -\text{sen}\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos 225° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Os valores absolutos de tg 225°, sen 225° e cos 225° são, respectivamente, 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como $1 < \sqrt{2} < 2$, temos que $1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Fuvest – Se $\text{tg}\ x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, o valor de $\cos x - \text{sen}\ x$ é:

a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $-\frac{1}{5}$

$\text{tg}\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos\ x} = \frac{3}{4} \rightarrow \cos\ x = \frac{4}{3} \cdot \text{sen}\ x.$

Da relação fundamental, vem:

$\text{sen}^2 x + \frac{16}{9} \cdot \text{sen}^2 x = 1 \rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{9}{25} \rightarrow \text{sen}\ x = -\frac{3}{5}$, pois $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Logo, $\cos x = \frac{4}{3} \cdot \text{sen}\ x \rightarrow \cos x = \frac{4}{3} \cdot \frac{-3}{5} = \frac{-4}{5}$.

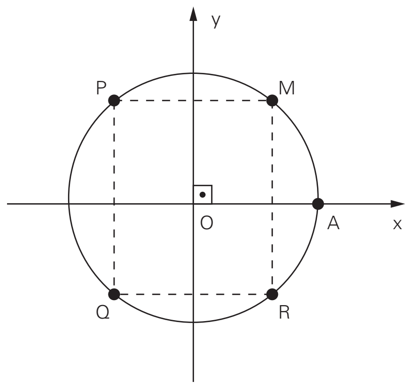
Assim, $\cos\ x - \text{sen}\ x = \frac{-4}{5} - \frac{(-3)}{5} = -\frac{1}{5}$.

5. Sistema Dom Bosco – Calcule a secante de um arco de medida 2 340°.

Como $2340° = 6 \cdot 360° + 180°$, então 2 340° correspondem a 180° na circunferência trigonométrica.

Então, $\sec 2\,340° = \sec 180° = \frac{1}{\cos 180°} = -1$.

6. Cesgranrio – Considere o ciclo trigonométrico da figura no qual o ponto A é a origem dos arcos, e MPQR é um retângulo com os lados paralelos aos eixos coordenados.



Se o ponto Q corresponde a $\frac{22\pi}{17}$, os pontos M, P e R correspondem, respectivamente, a

a) $\frac{20\pi}{17}, \frac{21\pi}{17}, \frac{23\pi}{17}$

b) $\frac{5\pi}{17}, \frac{12\pi}{17}, \frac{29\pi}{17}$

c) $\frac{5\pi}{17}, \frac{5\pi}{17}, \frac{12\pi}{17}$

d) $\frac{5\pi}{17}, \frac{5\pi}{17}, \frac{22\pi}{17}$

e) $\frac{7\pi}{34}, \frac{12\pi}{17}, \frac{29\pi}{17}$

Como o ângulo (α) formado pelo raio $\overline{OQ}$ com o eixo x é congruente ao ângulo (β) formado pelo raio $\overline{OM}$ com o eixo x, temos:

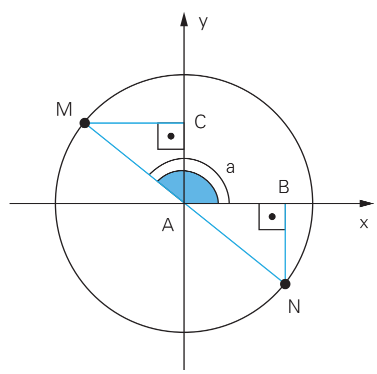
$\alpha = \frac{22\pi}{17} - \pi = \frac{5\pi}{17} = \beta$.

O mesmo α é congruente ao ângulo (γ) formado pelo raio $\overline{OP}$ com o eixo x. Logo, $\gamma = \frac{5\pi}{17}$; α também é congruente ao ângulo (θ) formado pelo raio $\overline{OR}$ com o eixo x. Então, $\theta = \frac{5\pi}{17}$. Portanto, $M = \beta = \frac{5\pi}{17}$;

$P = \pi - \gamma = \pi - \frac{5\pi}{17} = \frac{12\pi}{17}$ e $R = 2\pi - \theta = 2\pi - \frac{5\pi}{17} = \frac{29\pi}{17}$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Cefet-MG – A figura a seguir representa uma circunferência trigonométrica em que MN é diâmetro e o ângulo a mede $\frac{5\pi}{6}$ radianos.



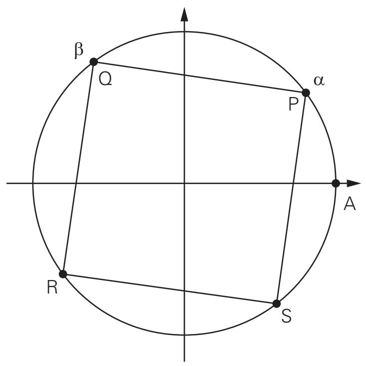
A razão entre as medidas dos segmentos AB e AC é:

a) $26\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{3}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. Sistema Dom Bosco – Calcule o valor da expressão

$$E = \text{sen } 1\,290° + \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos 1\,080° + \text{sen}^2\frac{\pi}{7} + \cos\frac{37\pi}{6}.$$

9. Insper – Na figura abaixo, em que o quadrado PQRS está inscrito na circunferência trigonométrica, os arcos AP e AQ têm medidas iguais a α e β, respectivamente, com $0 < \alpha < \beta < \pi$.



Sabendo que $\cos\,\alpha = 0{,}8$, pode-se concluir que o valor de $\cos\,\beta$ é

a) –0,8
b) 0,8
c) –0,6
d) 0,6
e) –0,2

10. Cefet-MG – O número

$N = \dfrac{(3 \cdot \cos 180° - 4 \cdot \text{sen}\,210° + 2 \cdot \text{tg}\,135°)}{6 \cdot \text{sen}\,45°}$ pertence ao

intervalo

a)]–4, –3[
b) [–3, –2[
c) [–2, –1]
d)]–1, 0]

11. UFPB – Se sen $x \neq 0$ e cos $x \neq 0$, a expressão

$\dfrac{\text{sen}(180° - x)}{\text{cotg}(270° - x) \cdot \cos(270° - x)}$ é igual a

a) cotg x
b) cossec x
c) –cotg x
d) tg x
e) sec x

12. Sistema Dom Bosco – Calcule o valor do cosseno do ângulo percorrido pelo ponteiro das horas de um relógio em 10 horas e 30 minutos.

13. UFPB – Se $\text{tg}\,\theta = -3$ e θ é um arco do 4º quadrante, então

a) $\text{sen}\,\theta = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$
b) $\cos\,\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$
c) $\text{cotg}\,\theta = \dfrac{1}{3}$
d) $\sec\,\theta = -2\sqrt{2}$
e) $\text{cossec}\,\theta = -\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

14. UFBA – Para responder a essa questão, considere as funções reais $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \frac{1}{2} + \cos x$. No intervalo $[0, 2\pi]$, as curvas que representam graficamente as duas funções intersectam-se uma única vez.

a) Verdadeiro
b) Falso

15. Acafe – Sobre funções trigonométricas, analise as proposições abaixo.

I. A expressão $\text{sen } x = 2m - 3$ é verdadeira, com $x \in$ ao 3º Q se, e somente se, m pertencer ao intervalo $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

II. A soma dos valores máximo e mínimo da função $f(x) = 1 + \frac{1}{3}\cos^2 x$ é $\frac{7}{3}$.

III. Sendo $\text{cossec } x = 1{,}333...$, com $x \in$ ao 2º Q, então, $\text{cotg } x$ vale $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Todas as afirmações corretas estão em:

a) I, II e III
b) I
c) II
d) I e II
e) II e II

16. UPF – Dentre as equações abaixo, assinale aquela que tem uma única solução em $]-\pi, \pi]$.

a) $\text{tg } \alpha = 1$
b) $\text{sen } \alpha = 0$
c) $\cos \alpha = -1$
d) $\text{tg } \alpha = 0$
e) $\cos \alpha = -2$

17. UPF – Dentre as equações abaixo, assinale aquela que tem uma única solução em $]\pi-, \pi]$

a) $\text{tg } \alpha = 1$
b) $\text{sen } \alpha = 0$
c) $\cos \alpha = -1$
d) $\text{tg } \alpha = 0$
e) $\cos \alpha = -2$

18. UPE C2-H9

No planeta Pressorius, todos os habitantes têm a mesma pressão arterial no mesmo momento. Essa pressão é calculada pela expressão $P(t) = 115 + 35 \cdot \cos(2t)$, em que t é o momento no qual ela é calculada em minutos, a partir da zero hora do dia.

Quais são, respectivamente, os valores da pressão máxima (sistólica) e mínima (diastólica) de um habitante desse planeta?

a) 115 e 35
b) 117 e 33
c) 120 e 80
d) 150 e 80
e) 150 e 35

19. PUC-SP (adaptado) C2-H9

Suponha que uma revista publicou um artigo no qual era estimado que, no ano de $2\,015 + x$, com $x \in \{0,1,2,...,9,10\}$, o valor arrecadado dos impostos incidentes sobre as exportações de certo país, em milhões de dólares, poderia ser obtido pela função $f(x) = 250 + 12 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$.

Caso essa previsão se confirme, então, relativamente ao total arrecadado a cada ano considerado, é correto afirmar que:

a) o valor máximo ocorrerá apenas em 2021.
b) atingirá o valor mínimo somente em duas ocasiões.
c) poderá superar 300 milhões de dólares.
d) nunca será inferior a 250 milhões de dólares.
e) o valor mínimo ocorrerá somente em 2022.

20. Insper C2-H7

Considere o produto abaixo, cujos fatores são os cossenos de todos os arcos trigonométricos cujas medidas, em graus, são números inteiros pertencentes ao intervalo [91, 269]

$P = \cos 91° \cdot \cos 92° \cdot \cos 93° \cdot \ldots \cdot \cos 268° \cdot \cos 269°$

Nessas condições, é correto afirmar que

a) $-1 < P < -\frac{1}{4}$
b) $-\frac{1}{4} < P < 0$
c) $P = 0$
d) $0 < P < -\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{4} < P < 1$

7 LEI DOS COSSENOS

- Lei dos cossenos

HABILIDADES

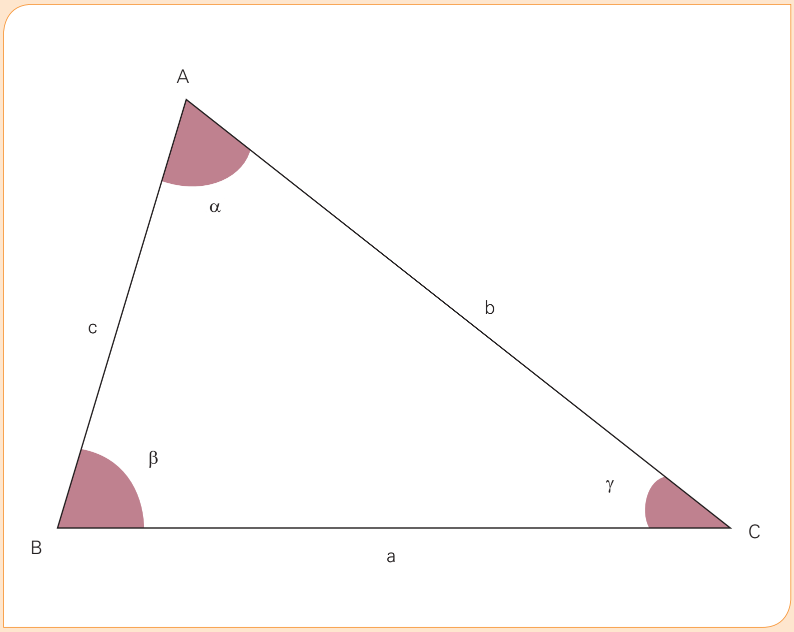
- Aplicar a lei dos cossenos em um triângulo qualquer.
- Resolver situações-problema envolvendo ângulos e medidas em triângulos quaisquer.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

A lei dos cossenos é uma importante ferramenta matemática para o cálculo das medidas dos lados e dos ângulos de triângulos quaisquer. É possível obter a medida de um dos seus lados conhecendo as medidas dos outros dois lados e o ângulo que eles formam.

Por exemplo, podemos calcular a distância entre duas cidades A e B sabendo a distância entre uma terceira cidade C e o ângulo $A\hat{C}B$ que elas formam.

Lei dos cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto dessas medidas pelo cosseno do ângulo por eles formado. Observe:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Vamos demonstrar essa lei para três situações diferentes.

1º CASO: $\beta < 90°$ (ÂNGULO AGUDO)

Considere o triângulo ABC, de lados **a**, **b** e **c**.

Demonstração do teorema para o lado **b** nos casos em que o ângulo $\beta = A\hat{B}C$ é agudo, obtuso ou reto, sabendo que se faz de modo análogo à demonstração para os lados **a** e **c**.

Consideremos BH = m, CH = a − m e AH = h.
Logo, temos que:

No ΔABH temos: $h^2 = c^2 - m^2$;

No ΔACH temos: $h^2 = b^2 - (a - m)^2$.

Com isso, $c^2 - m^2 = b^2 - (a - m)^2$.
Ou seja, $b^2 = a^2 + c^2 - 2am$.

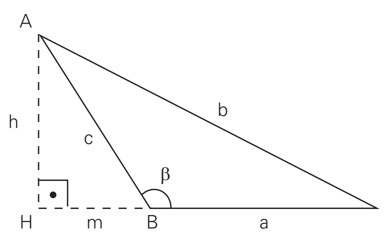
Como $\cos\beta = \dfrac{m}{c}$, então $m = c \cdot \cos\beta$.

Portanto:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

2º CASO: $\beta > 90°$ (ÂNGULO OBTUSO)

Considere o triângulo ABC, de lados **a**, **b** e **c**.
Consideremos BH = m, CH = a + m e AH = h.



Logo, temos que:

No ΔAHB: $h^2 = c^2 - m^2$;

No ΔAHC: $h^2 = b^2 - (a + m)^2$.

Com isso, temos que $c^2 - m^2 = b^2 - (a + m)^2$.

Ou seja, $b^2 = a^2 + c^2 + 2am$.

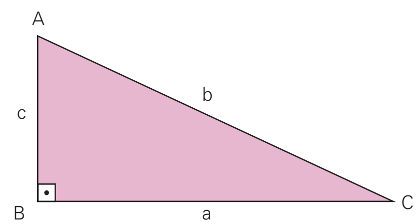
Como $\cos(180° - \beta) = -\cos(\beta) = \dfrac{m}{c}$, então $m = -c \cdot \cos\beta$

Portanto:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

3º CASO: $\beta = 90°$ (ÂNGULO RETO)

Considere o triângulo ABC, de lados **a**, **b** e **c**.



Como o ΔABC é retângulo, $b^2 = a^2 + c^2$ e $\cos\beta = \cos(90°) = 0 \rightarrow 2ac \cdot \cos\beta = 0$.
Portanto:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

Conclusão: pode-se aplicar a lei dos cossenos em qualquer triângulo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Em um triângulo ABC de lados $a = 4\sqrt{3}$, b = 3 e $\hat{C} = 30°$, calcule a medida de **c**.

Resolução

Pela lei dos cossenos, temos que:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$

$c^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 3^3 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 16 \cdot 3 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \dfrac{3}{2}$

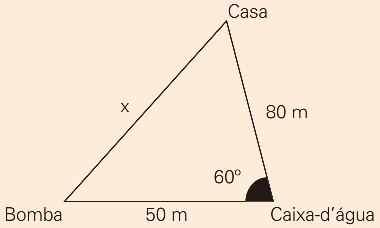
$c^2 = 57 - 36 = 21$

$c = \sqrt{21}$

2. Unicamp – A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa-d’água a 50 m de distância. A casa está a 80 m de distância da caixa-d’água e o ângulo formado pelas direções caixa d’água-bomba e caixa d’água-casa é de 60°. Se a ideia é bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento serão necessários?

Resolução

Considere a figura a seguir.



Pela lei dos cossenos:

$x^2 = 50^2 + 80^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \cos 60°$

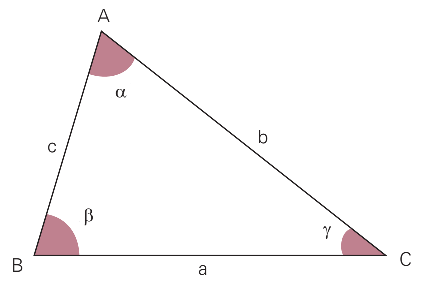
$x^2 = 2\,500 + 6\,400 - 8\,000 \cdot \dfrac{1}{2}$

$x^2 = 4\,900 \rightarrow x = 70$

Serão necessários 70 metros de encanamento.

ROTEIRO DE AULA

LEI DOS COSSENOS



Triângulo qualquer

- Acutângulo: $\alpha < 90°$
- Reto: $\alpha = 90°$
- Obtusângulo: $\alpha > 90°$

Lei dos cossenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Sistema Dom Bosco – Calcule a medida do lado **x** de um triângulo cujos outros lados medem 20 cm e 10 cm, sabendo que o ângulo oposto ao lado **x** mede 60°.

Utilizando a Lei dos cossenos, temos que:

$x^2 = 20^2 + 10^2 - 2 \cdot 20 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 400 + 100 - 200 = 300$

$x = 10\sqrt{3}$ cm

2. UFPR – Calcule o seno do maior ângulo de um triângulo cujos lados medem 4, 6 e 8 metros.

a) $\sqrt{15}/4$
b) 1/4
c) 1/2
d) $\sqrt{10}/4$
e) $\sqrt{3}/2$

Chamando de θ, o maior ângulo é o ângulo oposto ao maior lado. Utilizando a Lei dos cossenos, temos:

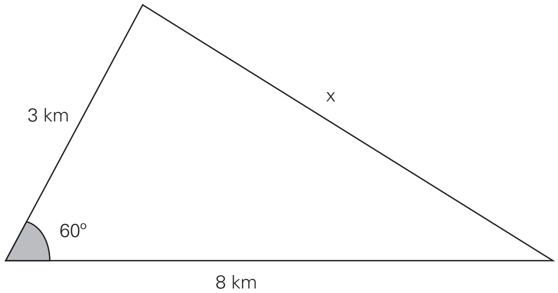
$8^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos\theta \rightarrow 64 = 36 + 16 - 48 \cdot \cos\theta \rightarrow 12 = -48 \cdot \cos\theta \rightarrow$

$\rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{4}$ (θ é do 2º quadrante). Portanto, pela identidade trigonométrica fundamental:

$\text{sen}^2\,\theta + \frac{1}{16} = 1 \rightarrow \text{sen}^2\,\theta = \frac{15}{16} \rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

3. Unemat C2-H8

A cidade de Brasília (DF) foi projetada e seu mapa foi todo desenhado para ter o formato de um avião. Já Triangolândia foi projetada no formato de um triângulo, conforme a figura abaixo.

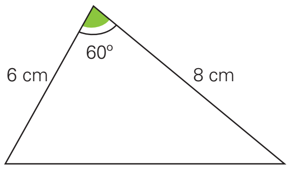


Qual é a medida da distância x?

a) 6 km
b) 5,5 km
c) 5 km
d) 7 km
e) 8 km

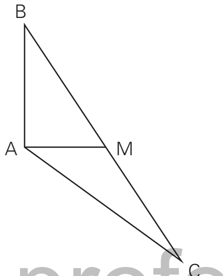
Pela Lei dos cossenos: $x^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos 60° \rightarrow$
$\rightarrow x^2 = 64 + 9 - 24 = 49 \rightarrow x = 7$ km

4. FGV-SP – Determine o perímetro do triângulo na forma decimal aproximada, até os décimos. Se quiser, use algum destes dados: $35^2 = 1225$; $36^2 = 1296$; $37^2 = 1369$.



Chamaremos de x o lado oposto ao ângulo de 60°.
Pela Lei dos cossenos:
$x^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 60° \rightarrow x^2 = 100 - 48 = 52 \rightarrow x = 2\sqrt{13}$
Observando os dados, temos:
$3{,}6^2 = 12{,}96 \approx 13$
Portanto, $x \approx 2 \cdot 3{,}6 = 7{,}2$.
Logo, o perímetro é dado por $8 + 6 + 7{,}2 = 21{,}2$ cm

5. Mackenzie



No triângulo ABC, da figura acima, AM é mediana relativa ao lado BC e é perpendicular ao lado AB. Se as medidas de BC e AM são, respectivamente, 4 cm e 1 cm, então a medida do lado AC, em cm, é

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt{5}$ **d)** $\sqrt{6}$ **e)** $\sqrt{7}$

Se AM é mediana relativa ao lado BC, então $BM = MC = 2\text{ cm}$

No triângulo ABM, temos que:

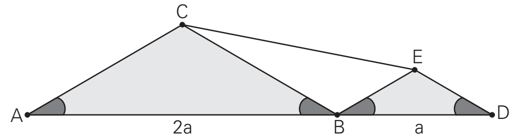
$$\cos B\hat{M}A = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{2} \rightarrow B\hat{M}A = 60°$$

Portanto, $A\hat{M}C = 180° - 60° = 120°$

Então, aplicando a Lei dos cossenos no triângulo AMC, temos

$$AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120° = 5 + 2 = 7 \rightarrow AC^2 = 7 \rightarrow AC = \sqrt{7}$$

6. Unicamp (adaptado) – Na figura abaixo, ABC e BDE são triângulos isósceles de bases 2a e a, respectivamente, e os ângulos CAB e EDB medem 30°. Portanto, o comprimento do segmento CE é:



a) $a\sqrt{\frac{5}{3}}$ **b)** $a\sqrt{\frac{8}{3}}$ **c)** $a\sqrt{\frac{7}{3}}$ **d)** $a\sqrt{2}$

Lembrando que a altura (h) que parte do vértice C, no triângulo isósceles ABC, é também mediana, podemos encontrar a medida BC traçando a altura (h) do triângulo ABC:

$$\cos 30° = \frac{a}{BC} \rightarrow BC = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Analogamente, no triângulo isósceles BDE, temos:

$$\cos 30° = \frac{\frac{a}{2}}{BE} \rightarrow BE = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Então, pela Lei dos cossenos, no triângulo BCE, temos:

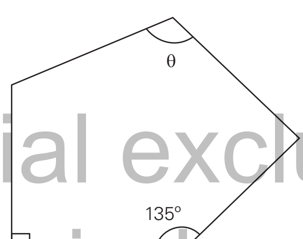
$$CE^2 = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 120° \rightarrow CE^2 = \frac{5a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} = \frac{7a^2}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow CE = a\sqrt{\frac{7}{3}}$$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UFRGS (adaptado) – Os lados de um losango medem 4 e um dos seus ângulos 30°. Calcule a medida da diagonal menor do losango.

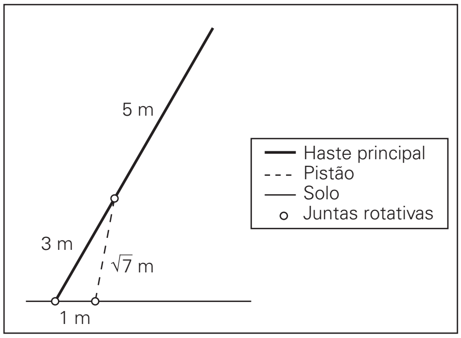
8. Unicamp – A figura a seguir exibe um pentágono com todos os lados de mesmo comprimento.



A medida do ângulo θ é igual a

a) 05° **b)** 120° **C)** 135° **d)** 150°

9. Udesc (adaptado) – Um guindaste industrial simples, usado para elevar cargas até o topo de uma máquina em uma fábrica, é formado por duas partes principais: uma haste rígida de 8 m de comprimento fixada ao solo em uma de suas extremidades; e um pistão hidráulico que pode variar de 2 m a 3 m de comprimento, fixado em uma de suas extremidades ao solo, em um ponto a 1 m da base da haste principal, e na outra extremidade em um ponto da haste a 3 m de sua base, conforme a figura a seguir. Todas as três junções (haste com o solo, pistão com o solo e haste com o pistão) são rotativas (como uma dobradiça).



De acordo com a Figura 4, a altura que a ponta elevada da haste principal atingirá quando o pistão hidráulico estiver estendido em $\sqrt{7}$ m será de:

a) $4\sqrt{3}$ m

b) $\dfrac{8\sqrt{7}}{3}$ m

c) 4 m

d) $4\sqrt{7}$ m

e) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ m

10. UFJF – Dois lados de um triângulo medem 8 m e 10 m e formam um ângulo de 60°. Calcule o terceiro lado desse triângulo.

a) $2\sqrt{21}$ m

b) $2\sqrt{31}$ m

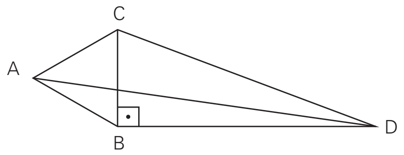
c) $2\sqrt{41}$ m

d) $2\sqrt{51}$ m

e) $2\sqrt{61}$ m

11. UFC-CE – Um octógono regular está inscrito em uma circunferência de raio 1. Os vértices A, D e E do octógono são tais que AE é um diâmetro de sua circunferência circunscrita e D e E são adjacentes. Determine o comprimento da diagonal AD.

12. Unemat – Na figura abaixo, o triângulo ABC é um triângulo equilátero de 3 cm de lado, e o triângulo retângulo BCD tem lados BD = 4 cm e CD = 5 cm e $C\hat{B}D = 90°$.



Qual a medida do segmento AD?

a) $\sqrt{3}$

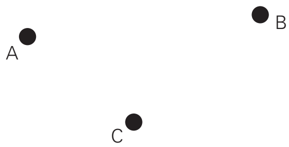
b) $4\sqrt{3}$

c) $\sqrt{100+\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$

e) $2\sqrt{3}$

13. IFSUL – Em certa cidade, a igreja está localizada no ponto A, a prefeitura no ponto B e a livraria no ponto C, como mostra os pontos a seguir. Sabendo-se que a distância da igreja à prefeitura é de 10 metros, a distância da prefeitura à livraria corresponde a 15 metros e que o ângulo formado por essas duas direções é 60°, a distância da livraria à igreja é



a) $17\sqrt{5}$ m
b) $5\sqrt{7}$ m
c) $25\sqrt{7}$ m
d) $7\sqrt{5}$ m

14. Sistema Dom Bosco – Calcule o maior perímetro de um triângulo ABC para o qual tem-se que AB = 8 cm, BC = 7 cm e $\hat{A}$ = 60°.

15. ITA – Os lados de um triângulo de vértices A, B e C medem AB = 3 cm, BC = 7 cm e CA = 8 cm. A circunferência inscrita no triângulo tangencia o lado AB no ponto N e o lado CA no ponto K. Então, o comprimento do segmento NK, em cm, é

a) 2
b) $2\sqrt{2}$
c) 3
d) $2\sqrt{3}$
e) $\frac{7}{2}$

16. ITA – Seja ABC um triângulo equilátero, suponha que M e N são pontos pertencentes ao lado BC tais que BM = MN = NC. Sendo α a medida, em radianos, do ângulo $M\hat{A}N$, então o valor de cos α é

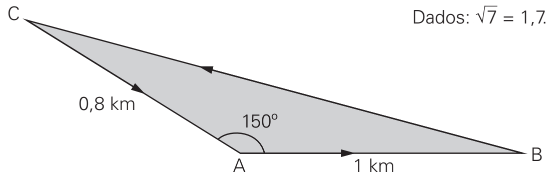
a) $\frac{13}{14}$
b) $\frac{14}{15}$
c) $\frac{15}{16}$
d) $\frac{16}{17}$
e) $\frac{17}{18}$

17. Sistema Dom Bosco – É possível que três segmentos de reta medindo 5, 7 e 13 cm possam formar um triângulo?

18. UFSM C2-H7

A caminhada é uma das atividades físicas que, quando realizada com frequência, torna-se eficaz na prevenção de doenças crônicas e na melhora da qualidade de vida. Para a prática de uma caminhada, uma pessoa sai do ponto A, passa pelos pontos B e C e retorna ao ponto A, conforme trajeto indicado na figura.

Dados: $\sqrt{7} = 1{,}7$.



Quantos quilômetros ela terá caminhado, se percorrer todo o trajeto?

a) 2,29
b) 2,33
c) 3,16
d) 3,50
e) 4,80

19. UPE C2-H9

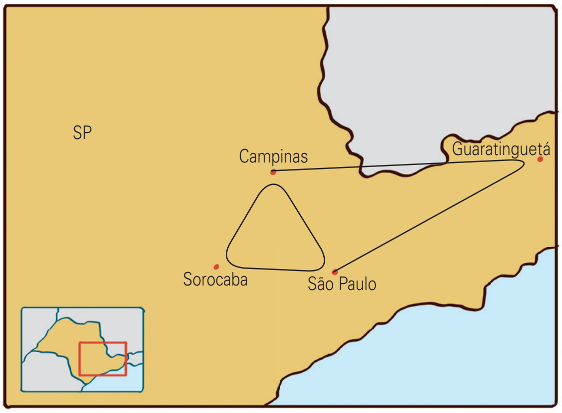
João está procurando cercar um terreno triangular que ele comprou no campo. Ele sabe que dois lados desse terreno medem, respectivamente, 10 m e 6 m e formam entre si um ângulo de 120°. O terreno será cercado com três voltas de arame farpado. Se o preço do metro do arame custa R$ 5,00, qual será o valor gasto por João com a compra do arame?

Dados: sen de $120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e cos de $120° = -\frac{1}{2}$

a) R$ 300,00
b) R$ 420,00
c) R$ 450,00
d) R$ 500,00
e) R$ 520,00

20. Unesp (adaptado) C2-H8

Um professor de Geografia forneceu a seus alunos um mapa do estado de São Paulo, que informava que as distâncias aproximadas em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Campinas e entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Guaratinguetá eram, respectivamente, 80 km e 160 km. Um dos alunos observou, então, que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Campinas e Sorocaba formavam um triângulo equilátero. Já um outro aluno notou que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Guaratinguetá e Campinas formavam um triângulo retângulo, conforme mostra o mapa.



Com essas informações, os alunos determinaram que a distância em linha reta entre os pontos que representam as cidades de Guaratinguetá e Sorocaba, em km, é próxima de

a) $80 \cdot \sqrt{2+5 \cdot \sqrt{3}}$
b) $80 \cdot \sqrt{5+2 \cdot \sqrt{3}}$
c) $80 \cdot \sqrt{6}$
d) $80 \cdot \sqrt{5+3 \cdot \sqrt{2}}$
e) $80 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{3}}$

18 LEI DOS SENOS

- Conceitos iniciais
- Ângulos suplementares
- Lei dos senos

HABILIDADES

- Aplicar a Lei dos senos em um triângulo qualquer.
- Resolver situações--problema envolvendo ângulos e medidas em triângulos quaisquer.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

Conceitos iniciais

Desde suas origens, a Trigonometria é utilizada para resolver problemas práticos do cotidiano, como na agricultura, construção civil, astronomia e navegação. Ao longo do tempo, instrumentos foram criados para auxiliar a humanidade na aplicação dessa área da Matemática.

O teodolito, por exemplo, é um aparelho usado por agrimensores e engenheiros para medir ângulos horizontais e verticais em trabalhos topográficos. Eles tiveram sua "primeira versão" no século XVI.

BANNAFARSAI_STOCK/SHUTTERSTOCK

Teodolito, usado para medir ângulos em trabalhos topográficos.

O astrolábio é um antigo instrumento utilizado sobretudo para navegação marítima, que utilizava a posição das estrelas como referência. Posteriormente foi desenvolvido o sextante, que fazia a mesma função. Esses instrumentos também eram utilizados para cálculos na construção civil – por exemplo, para se obter a altura de um edifício.

SERGEY MELNIKOV/SHUTTERSTOCK

Astrolábio

SCORPP/SHUTTERSTOCK

Sextante

Para determinar a distância de um barco até uma ilha utilizando um sextante, basta apontá-lo para o ponto mais alto dela. Sabendo a altura da ilha (disponível na carta náutica, por exemplo), verifica-se o ângulo de inclinação formado com a horizontal e, então, utilizam-se as razões trigonométricas para determinar a distância desejada.

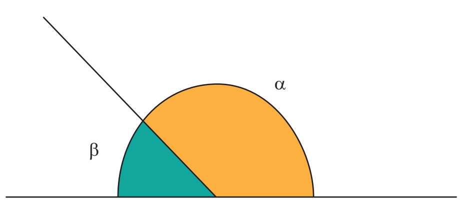
SATTAHIPBEACH/SHUTTERSTOCK

Navegador utilizando um sextante.

As razões entre dois lados de um triângulo retângulo definem os valores de seno, cosseno e tangente. Eles estão associados a um dos ângulos agudos do triângulo. Existem duas importantes relações entre as medidas dos lados de um triângulo qualquer em que se aplicam os conceitos de seno e cosseno de ângulo obtuso.

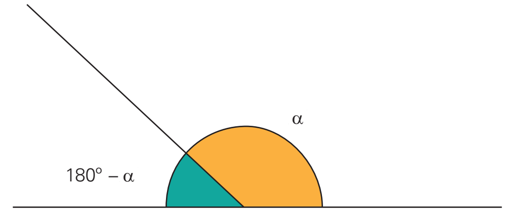
Ângulos suplementares

Retomando, dois ângulos cuja soma das medidas seja igual a 180° são chamados de **ângulos suplementares**. Considera-se cada um como **suplemento** do outro.



$\alpha + \beta = 180° \rightarrow \alpha$ e β são suplementares

Se α é a medida de um ângulo obtuso, isto é, $90° < \alpha < 180°$, então a medida do ângulo agudo suplementar é $180° - \alpha$.



Exemplos:

- 30° é suplemento de 150°, pois 180° − 30° = 150°.
- 120° é suplemento de 60°, pois 180° − 120° = 60°.

Da circunferência trigonométrica, podemos estabelecer as seguintes relações entre ângulos complementares:

- Seno de um ângulo obtuso é o seno de seu suplemento, ou seja,

$$\text{sen } x = \text{sen}(180° - x)$$

- Cosseno de um ângulo obtuso é o oposto do cosseno de seu suplemento, ou seja:

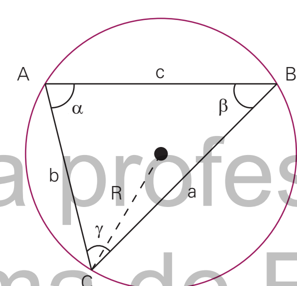
$$\cos x = -\cos(180° - x)$$

Exemplos:

- $\text{sen } 135° = \text{sen}(180° - 135°) = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{sen } 150° = \text{sen}(180° - 150°) = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 135° = -\cos(180° - 135°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lei dos senos

Os lados de um triângulo são diretamente proporcionais aos senos dos ângulos opostos em razão igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

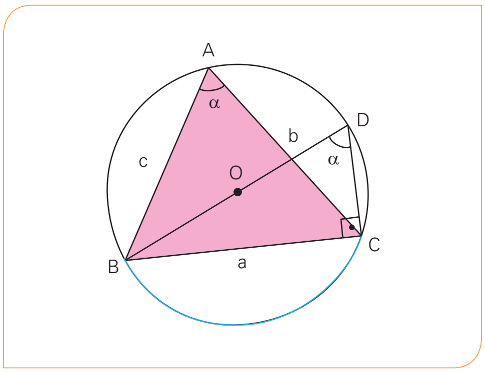


$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=2R$$

Vamos demonstrar essa lei em três situações diferentes.

1º CASO: TRIÂNGULO ACUTÂNGULO

Considere um triângulo acutângulo ABC, de lados a, b e c, inscrito na circunferência de centro O. Traçando o diâmetro $\overline{BD}$, obtém-se o triângulo BCD.



Como $\overline{BD}$ é o diâmetro da circunferência, então o ângulo $B\hat{C}D$ é 90°. O ângulo $\alpha = B\hat{D}C$ é igual ao ângulo $B\hat{A}C$, pois são inscritos no mesmo arco.

Assim, no triângulo retângulo BCD, temos que:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{BC}{BD}=\frac{a}{2R}\rightarrow\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=2R$$

Analogamente, temos:

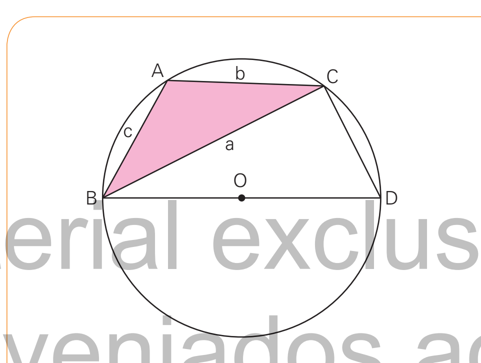
$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=2R \quad \text{e} \quad \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=2R$$

Portanto:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=2R$$

2º CASO: TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO

Considere um triângulo obtusângulo ABC, de lados a, b e c, inscrito em uma circunferência de centro O. Traçando o diâmetro $\overline{BD}$, obtém-se o triângulo BCD.



Como $\overline{BD}$ é o diâmetro da circunferência, então o ângulo $B\hat{C}D$ é 90°. Os ângulos $\alpha = B\hat{A}C$ e $B\hat{D}C$ são suplementares, pois ABDC é um quadrilátero inscrito numa circunferência, ou seja, o ângulo $B\hat{D}C$ é igual a $180° - \alpha$.

Assim, no triângulo retângulo BCD, tem-se:

$$\operatorname{sen}(180°-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha=\frac{BC}{BD}=\frac{a}{2R}\rightarrow\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=2R$$

Analogamente, temos:

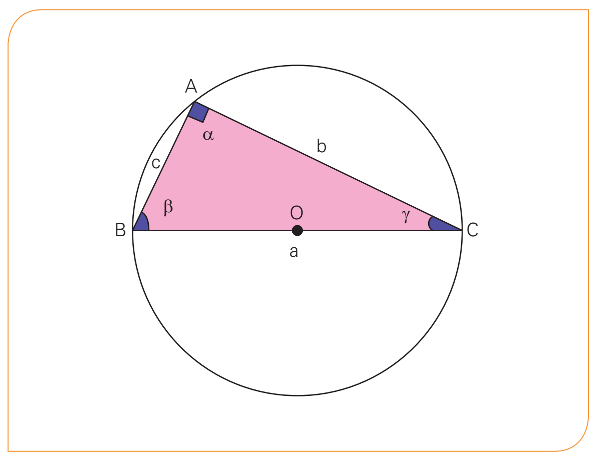
$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=2R \quad \text{e} \quad \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=2R$$

Portanto:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=2R$$

3º CASO: TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considere um triângulo retângulo ABC, de lados a, b e c, inscrito em uma circunferência de centro O.



Como $\alpha = 90°$, $\operatorname{sen}\alpha = 1$ e $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R$, então:

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{AC}{BC}\rightarrow\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=2R$$

$$\operatorname{sen}\gamma=\frac{AB}{BC}\rightarrow\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=2R$$

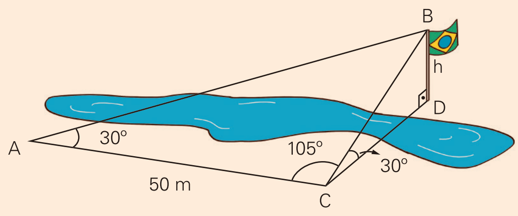
Assim:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=2R$$

Desse modo, podemos concluir que é possível aplicar a Lei dos senos em qualquer triângulo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Unesp – Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto B. Com o objetivo de determinar a altura h do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o pé do mastro, avalia que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ valem 30°, e o ângulo $A\hat{C}B$ vale 105°, como mostra a figura.



A altura h do mastro da bandeira, em metros, é

- **a)** 12,5
- **b)** $12{,}5\cdot\sqrt{2}$
- **c)** 25,0
- **d)** $25{,}0\cdot\sqrt{2}$
- **e)** 35,0

Resolução

Aplicando a Lei dos senos no triângulo ABC, temos:

$$\frac{BC}{\text{sen } 30°}=\frac{50}{\text{sen } 45°}$$

$$\frac{BC}{\frac{1}{2}}=\frac{50}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\rightarrow BC=25\sqrt{2}\text{ m}$$

Assim, no triângulo retângulo BCD, temos:

$$\text{sen } 30°=\frac{h}{BC}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{h}{25\sqrt{2}}\rightarrow h=12{,}5\cdot\sqrt{2}\text{ m}$$

2. Uema – Considere um triângulo ABC inscrito numa circunferência de raio unitário cujos lados medem $a=\sqrt{3}$, $b=1$ e $c=2$. Determine a soma $2\hat{A}+3\hat{B}+\hat{C}$, em que $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos internos desse triângulo.

Resolução

Utilizando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{a}{\text{sen }\hat{A}}=\frac{b}{\text{sen }\hat{B}}=\frac{c}{\text{sen }\hat{C}}=2R$$

Como o raio é unitário, R = 1.

Então, $\frac{\sqrt{3}}{\text{sen }\hat{A}}=\frac{1}{\text{sen }\hat{B}}=\frac{2}{\text{sen }\hat{C}}=2\cdot 1=2.$

Assim:

$$\frac{\sqrt{3}}{\text{sen }\hat{A}}=2\rightarrow \text{sen }\hat{A}=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow \hat{A}=60°$$

$$\frac{1}{\text{sen}\hat{B}}=2\rightarrow \text{sen}\hat{B}=\frac{1}{2}\rightarrow \hat{B}=30°$$

$$\frac{2}{\text{sen }\hat{C}}=2\rightarrow \text{sen}\hat{C}=1\rightarrow \hat{C}=90°$$

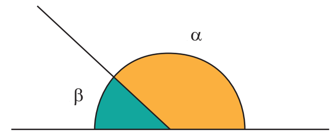
Portanto, a soma é

$2\hat{A}+3\hat{B}+\hat{C}=2\cdot 60°+3\cdot 30°+1\cdot 90°=300°.$

ROTEIRO DE AULA

LEI DOS SENOS

Ângulos suplementares



$\alpha + \beta =$ 180°

Seno de um ângulo obtuso é o seno do seu suplemento, ou seja,

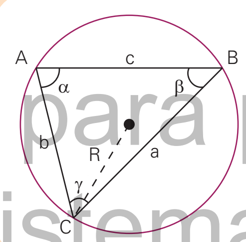
sen x = sen (180° – x)

Cosseno de um ângulo obtuso é o oposto do cosseno de seu suplemento, ou seja,

cos x = cos (180° – x)

Triângulo qualquer

Acutângulo	$\alpha < 90°$
Obtusângulo	$\alpha > 90°$
Reto	$\alpha = 90°$



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

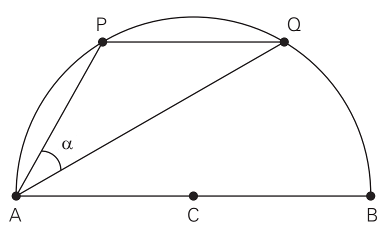
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Espcex – O valor de (cos 165° + sen 155° + cos 145° – sen 25° + cos 35° + cos 15°) é

a) $\sqrt{2}$
b) –1
c) 0
d) 1
e) 1/2

Temos que: $\cos 165° = -\cos(180° - 165°) = -\cos 15°$
$\text{sen } 155° = \text{sen}(180° - 155°) = \text{sen } 25°$
$\cos 145° = -\cos(180° - 145°) = -\cos 35°$
Portanto, substituindo os valores na expressão acima, temos que:
$-\cos 15° + \text{sen } 25° - \cos 35° - \text{sen } 25° + \cos 35° + \cos 15° = 0$

2. FGV-SP – Os pontos P e Q estão em uma semicircunferência de centro C e diâmetro AB, formando com A o triângulo APQ, conforme indica a figura.



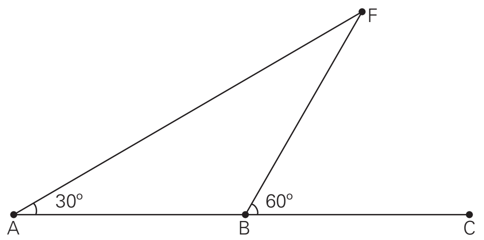
Sabendo-se que $\overline{PQ}$ é paralelo a $\overline{AB}$, e que AB = 3PQ = = 6 cm, então sen α é igual a:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{1}{6}$

Pela Lei dos senos, temos:
$\frac{PQ}{\text{sen}\alpha} = 2R \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3. UFU (adaptado) C2-H8

O comandante de um navio fez, pela primeira vez, uma rota retilínea AC orientado por um farol F, localizado numa ilha. Ele pretendia determinar a distância do ponto inicial A ao farol F. No início da viagem, o comandante obteve a medida FAC = 30° e, após percorrer 6 milhas marítimas, localizando-se em B, ele fez a medição do ângulo FBC, obtendo 60°. Observe a figura a seguir, que ilustra esta situação.



De acordo com as informações, a distância, em milhas, do ponto inicial A ao farol F, obtida pelo comandante foi de

a) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
b) $4\sqrt{3}$
c) $6\sqrt{3}$
d) $\sqrt{3}$
e) $7\sqrt{3}$

Considerando $\hat{F} = a$, como o ângulo $F\hat{B}C$ é externo ao triângulo, temos que $60° = 30° + \alpha \rightarrow a = 30°$.
Utilizando a Lei dos senos:
$\frac{AB}{\text{sen }\alpha} = \frac{AF}{\text{sen B}} \rightarrow \frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{AF}{\text{sen } 120°} \rightarrow AF = 12 \cdot \text{sen } 120° \rightarrow AF = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

4. Sistema Dom Bosco – Em um triângulo ABC, temos os ângulos $\hat{A} = 105°$ e $\hat{B} = 45°$. Os lados opostos aos vértices B e C medem x e 100 cm, respectivamente. Calcule x.

Temos que o ângulo $\hat{C} = 180° - 105° - 45° = 30°$. Logo, pela Lei dos senos:

$\frac{x}{\text{sen } 45°} = \frac{100}{\text{sen } 30°} \leftrightarrow x = 200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2}$ cm

5. Unifenas (adaptado) – Resolva:

$$x + \text{sen } 90° = (\text{tg } 30°)^{\sec 60°}$$

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $-\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $-\frac{4}{3}$ **e)** $\frac{5}{3}$

Temos que $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{sen } 90° = 1$ e $\sec 60° = \frac{1}{\cos 60°} = 2$.

Substituindo na equação do enunciado, temos:

$$x + 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \rightarrow x + 1 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

6. Sistema Dom Bosco – Um triângulo ABC está inscrito em uma circunferência de raio R. Dado que o seu maior ângulo mede 150° e a aresta oposta a esse ângulo mede 10 cm, calcule o raio da circunferência.

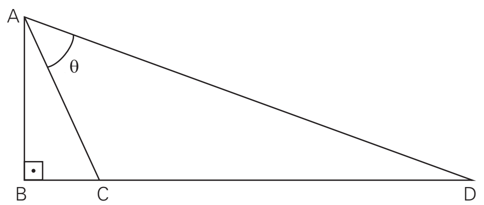
Pela Lei dos senos, temos:

$$\frac{10}{\text{sen } 150°} = 2R \leftrightarrow R = \frac{10}{0{,}5} = 20 \text{ cm}$$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

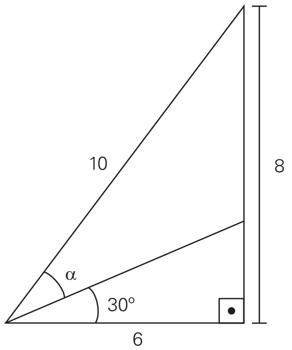
7. Sistema Dom Bosco – Em um triângulo ABC, tem-se AC = 2 cm, AB = $\sqrt{3}$ cm e Â = 30°. Calcule a medida do ângulo B.

8. Unicamp – Considere o triângulo retângulo ABD exibido na figura abaixo, em que AB = 2 cm, BC = 1 cm e CD = 5 cm. Então, o ângulo θ é igual a



a) 15°
b) 30°
c) 45°
d) 60°

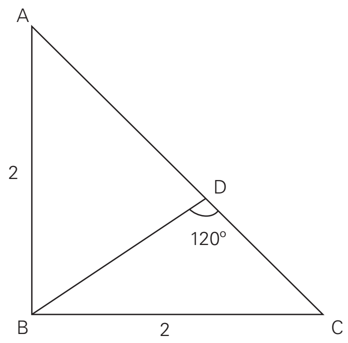
9. UFG-GO – Observe a figura a seguir, em que estão indicadas as medidas dos lados do triângulo maior e alguns dos ângulos.



O seno do ângulo indicado por α na figura vale:

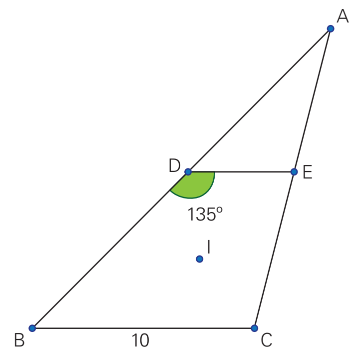
a) $\frac{4\sqrt{3} - 3}{10}$
b) $\frac{4 - \sqrt{3}}{10}$
c) $\frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$
d) $\frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}$
e) $\frac{4\sqrt{3} + 3}{10}$

10. UFU-MG (adaptado) – Considere o triângulo ABC retângulo em B a seguir.



Sabendo que $\hat{D}$ = 120°, AB = AC = 2 cm, calcule a medida BD.

11. Udesc – Observe a Figura 1:



Sabendo que os segmentos BC e DE são paralelos, que o ponto I é o incentro do triângulo ABC e que $B\hat{I}C$ é igual a 105°, então o segmento AC mede:

a) $5\sqrt{2}$

b) $\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$

c) $20\sqrt{2}$

d) $10\sqrt{2}$

e) $\dfrac{20\sqrt{2}}{3}$

12. Sistema Dom Bosco – Calcule o valor da expressão

$$\frac{\operatorname{sen}(180° - x) \cdot \operatorname{tg}(180° - x)}{\operatorname{cossec}(90° - x) \cdot \cos^2(90° + x)}.$$

13. PUC-SP – A diagonal de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um de 60° e o outro de 45°. A razão entre os lados menor e maior do paralelogramo é:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

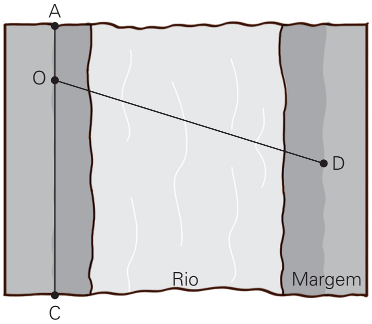
b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

14. UniFOA-RJ – Um topógrafo pretende calcular o comprimento da ponte OD que passa sobre o rio mostrado na figura a seguir. Para isso, toma como referência os pontos A, O e C, situados em uma das margens do rio. Com ponto de referência em A, calcula o ângulo $D\hat{A}C$ = 45°. Caminha 200 m até o ponto O e, com ponto de referência nele, calcula o ângulo $D\hat{O}C$ = 75°. Com esses dados, qual será o comprimento da ponte calculado pelo topógrafo?



a) $200\sqrt{2}$ m

b) $250\sqrt{3}$ m

c) $300\sqrt{3}$ m

d) $100\sqrt{2}$ m

e) $150\sqrt{2}$ m

16. Sistema Dom Bosco – Calcule a medida do raio da circunferência, de centro O, circunscrita ao triângulo ABC abaixo, no qual temos AB = 10, AC = 16 e AH = 8.

15. Sistema Dom Bosco – O triângulo equilátero ABC tem lados de 3 cm e D um ponto do lado $\overline{BC}$ tal que CD = 1 cm. Determine o seno do ângulo $B\hat{A}D$.

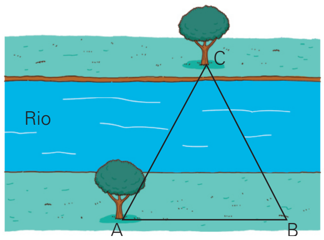
17. Colégio Naval-RJ – Considere que ABC é um triângulo acutângulo inscrito em uma circunferência L. A altura traçada do vértice B intersecta L no ponto D. Sabendo-se que AD = 4 e BC = 8, calcule o raio de L.

a) $2\sqrt{10}$
b) $4\sqrt{10}$
c) $2\sqrt{5}$
d) $4\sqrt{5}$
e) $3\sqrt{10}$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem-(adaptado) C2-H8

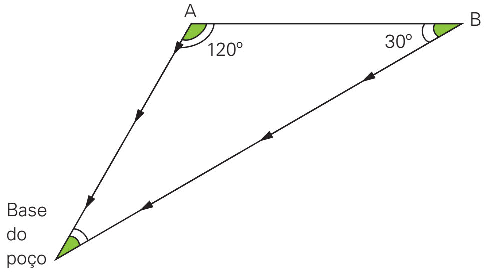
Para se calcular a distância entre duas árvores, representadas pelos pontos A e B, situados em margens opostas de um rio, foi escolhido um ponto C arbitrário, na margem onde se localiza a árvore A. As medidas necessárias foram tomadas, e os resultados obtidos foram os seguintes: AC = 70 m, $B\hat{A}C = 62°$ e $A\hat{C}B = 74°$. Sendo cos 28° = 0,88, sen 74° = 0,96 e sen 44° = 0,70, podemos afirmar que a distância entre as árvores é:



a) 48 metros
b) 78 metros
c) 85 metros
d) 96 metros
e) 102 metros

19. UEL C2-H7

Duas plataformas marítimas (A e B) estão localizadas de tal forma que os ângulos de emissão de sinais de comunicação com a base de um poço submarino são, respectivamente, iguais a 120° e 30°, conforme indica a figura a seguir:



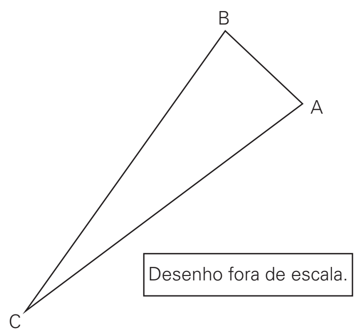
Admitindo-se que os sinais se desloquem em linha reta até a base do poço e que a distância entre a plataforma A e B, em linha reta, seja AB = 1 km, a maior distância entre a base do poço e uma das duas plataformas, em km, é, aproximadamente, igual a:

a) 1,7
b) 1,5
c) 1,3
d) 1,1
e) 1,0

20. Fatec-(adaptado) C2-H8

A maior parte dos refugiados sírios que solicita abrigo na Europa escolhe a Alemanha como destino. No entanto, muitos refugiados sírios têm vindo também para o Brasil.

Considere o triângulo **ABC** no qual o vértice **A** representa a cidade de Aleppo, na Síria; o vértice **B** representa a cidade de Berlim, na Alemanha, e o vértice **C** representa a cidade de Campinas, no Brasil.



Nesse triângulo, a distância entre A e B é de 3 700 km, a medida de $A\hat{C}B$ é igual a 18° e a medida de $A\hat{B}C$ é igual a 81°.

Com base nos dados apresentados, se um refugiado sírio viaja de Aleppo a Berlim e, em seguida, de Berlim a Campinas, terá percorrido no mínimo x quilômetros em todo o trajeto.

O valor de x é mais próximo de

a) 11 300.
b) 12 300.
c) 13 300.
d) 14 300.
e) 15 300.

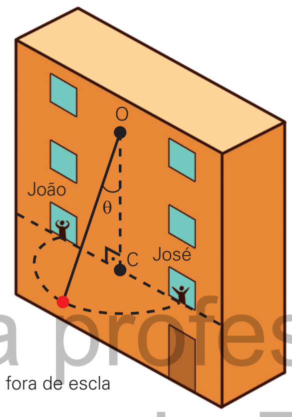
Adote:
sen 18° = 0,31
cos 18° = 0,95
sen 81° = 0,98
cos 81° = 0,16

EXERCÍCIOS **INTERDISCIPLINARES**

21. UPE-SSA – Se um ano-luz corresponde à distância percorrida pela luz em um ano, qual é a ordem de grandeza, em metros, da distância percorrida pela luz em 2 anos, levando-se em consideração um ano tendo 365 dias e a velocidade da luz igual a 300 000 km/s

a) 10^8
b) 10^{10}
c) 10^{13}
d) 10^{15}
e) 10^{16}

22. Unesp – Em um edifício em construção, João lança para José um objeto amarrado a uma corda inextensível e de massa desprezível, presa no ponto O da parede. O objeto é lançado perpendicularmente à parede e percorre, suspenso no ar, um arco de circunferência de diâmetro igual a 15 m, contido em um plano horizontal e em movimento uniforme, conforme a figura. O ponto O está sobre a mesma reta vertical que passa pelo ponto C, ponto médio do segmento que une João a José. O ângulo θ, formado entre a corda e o segmento de reta OC, é constante.



Considerando sen θ = 0,6, cos θ = 0,8, g = 10 m/s² e desprezando a resistência do ar, a velocidade angular do objeto, em seu movimento de João a José, é igual a

a) 1,0 rad/s.
b) 1,5 rad/s.
c) 2,5 rad/s
d) 2,0 rad/s.
e) 3,0 rad/s.

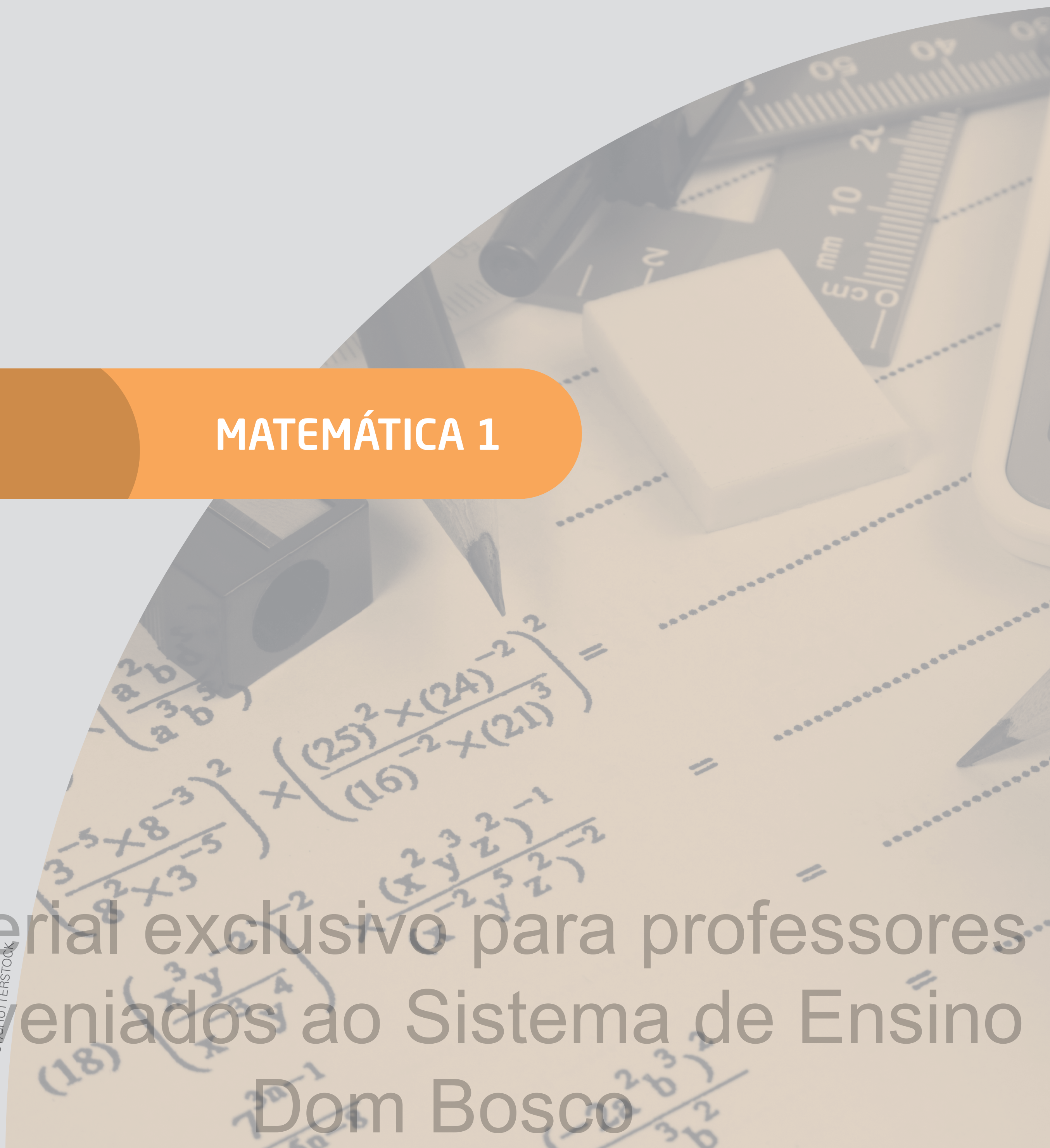
23. PUC-RS – A pressão arterial é a pressão que o sangue exerce sobre as paredes das artérias. Ela atinge o valor máximo (pressão sistólica) quando os ventrículos se contraem, e o valor mínimo (pressão diastólica) quando eles estão em repouso. Suponhamos que a variação da pressão arterial (em mmHg) de um cidadão alegrense em função do tempo (em segundos) é dada por $P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$. Diante disso, os valores da pressão diastólica e sistólica, em mmHg, são iguais, respectivamente, a

a) 60 e 100
b) 60 e 120
c) 80 e 120
d) 80 e 130
e) 90 e 120

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 1



WITTAYAYUT/SHUTTERSTOCK

APRESENTAÇÃO

A disciplina de Matemática é uma ciência de características específicas, que se organiza por meio de **definições, teoremas e demonstrações**. Os alunos do ensino pré-vestibular devem demonstrar teoremas, justificar definições e, principalmente, usar a Matemática para **resolver problemas do cotidiano** e compreender fenômenos de outras áreas do conhecimento. Para tanto, precisam valorizar o raciocínio matemático, nos aspectos de formular questões, indagar a existência de solução, estabelecer hipóteses e conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar de maneira lógico-dedutiva.

Esse material respalda-se na qualidade dos conhecimentos e na prática de sala de aula, abrangendo as áreas de conhecimento do Ensino Médio, cujos conteúdos conceituais são exigidos nos principais vestibulares do Brasil e no novo Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), e contempla **uma ampla coletânea de questões** extraídas de tais provas, com respectivos gabaritos e resoluções comentadas.

Por critério de organização didática, os conteúdos conceituais estão separados da sequência de exercícios e distribuídos para atender à demanda das diversas formatações de cursos, considerando as prioridades dos principais vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Com base nisso, o material didático produzido para essa etapa de ensino contempla e destaca inúmeras competências da nova Matriz de Referências para o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e, consequentemente, habilidades a elas relacionadas.

CONTEÚDO

MATEMÁTICA 1

Volume	Módulo	Conteúdo
1	1	Potenciação
	2	Radiciação
	3	Produtos notáveis e fatoração
	4	Múltiplos e divisores
	5	Conjuntos
	6	Intervalos reais e diagrama de venn
	7	Equações do 1º grau
	8	Equações do 2º grau, redutíveis e irracionais
	9	Introdução ao estudo de funções
	10	Proporcionalidade e função Linear
	11	Função afim
	12	Função linear, identidade e constante
	13	Função quadrática
	14	Máximos e mínimos de uma função quadrática
	15	Inequação do 1º grau e do 2º grau
	16	Inequações – Produto e quociente

MATEMÁTICA 2

Volume	Módulo	Conteúdo
2	1	Porcentagem
	2	Aumentos e descontos: fator de correção
	3	Matemática financeira: juros simples
	4	Matemática financeira: juros compostos
	5	Ângulos
	6	Paralelismo
	7	Ângulos de um triângulo
	8	Ângulos na circunferência
	9	Comprimento da circunferência
	10	Polígonos regulares
	11	Pontos notáveis no triângulo
	12	Quadriláteros notáveis (I)
	13	Quadriláteros notáveis (II)
	14	Teorema de Tales
	15	Semelhança de triângulos (I)
	16	Semelhança de triângulos (II)

MATEMÁTICA 3

Volume	Módulo	Conteúdo
3	1	Razões trigonométricas no triângulo retângulo
	2	Ângulos complementares e ângulos notáveis
	3	Arcos e ângulos
	4	Razões trigonométricas na circunferência
	5	Simetria e redução do 2º quadrante ao 1º quadrante
	6	Redução do 3º e 4º quadrante ao 1º quadrante
	7	Lei dos cossenos
	8	Lei dos senos

1 POTENCIAÇÃO

Comentário sobre o módulo

O conteúdo abordado de potenciação está relacionado à aritmética. A proposta é retomar conceitos abordados no ensino fundamental.

É fato que, pensando dessa forma, teríamos que retomar outros pontos dessa área da matemática, como as quatro operações.

Mas entendemos que o grau de dificuldade em potenciação é mais elevado, cabendo ao professor identificar demais dúvidas relacionadas à aritmética e saná-las no decorrer das aulas pensadas para este módulo, que foi dividido em etapas.

Abordamos o conteúdo de potenciação, trazendo definição, propriedades, casos particulares e uma aplicação para o caso de potência de base 10. Para finalizar há uma série de exercícios de compreensão, desenvolvimento e aplicação dos conceitos de potenciação estudados no módulo.

Para ir além

As propriedades operatórias de potenciação podem ser apresentadas após "comprovação numérica", ou seja, é possível que nos casos com maior dificuldade de compreensão o professor possa apoiar-se em uma explicação numérica, conforme exemplo a seguir.

É fato que: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Isso pode ser verificado numericamente:

$$\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}^{2^3} \cdot \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}^{2^4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7.$$

Logo, pode-se mostrar que: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$. É claro que esse artifício matemático não deve ser utilizado como método de demonstração. Mas pode ser usado para esclarecer possíveis dúvidas dos alunos.

O uso de ferramentas digitais no ensino de Matemática proporciona principalmente uma aproximação do professor à realidade do aluno. Existem poucos *softwares* ou recursos digitais relacionados ao contexto do pré-vestibular, quando tratamos de potenciação; eles são geralmente encontrados em *sites* do MEC, como o Rived (Rede Interativa Virtual de Educação), disponível em:

<http://rived.mec.gov.br>.

A seguir, indicamos algumas referências para o professor se aprofundar no estudo de potenciação, bem como buscar novos recursos metodológicos para corroborar com suas aulas.

- DAMAZIO, Admir. O processo de elaboração do conceito de potenciação de números fracionários: uma abordagem histórico-cultural. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 219-243, abr. 2011.

  Disponível em:

  <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4602/3708>.

- Um texto sobre potenciação e os grandes números publicado pela revista *Superinteressante* – Editora Abril:

  <https://super.abril.com.br/ciencia/a-magia-dos-grandes-numeros/>

Exercícios propostos

7. Temos que

$$\frac{18^n \cdot 2^2}{2 \cdot (6^n \cdot 3^n)} = \frac{18^n \cdot 2^2}{2 \cdot (18^n)} = \frac{2^2}{2} = 2$$

8. D

Transformando todos os números para a base 3, temos 3^{45}, $(3^2)^{21}$, $(3^5)^8$, $(3^4)^{12}$, ou seja, 3^{45}, 3^{42}, 3^{40}, 3^{48}. Portanto, 81^{12} é o maior número.

9. B

Transformando para potências de base 3, temos $2 \cdot (3^4)^3 + 3 \cdot (3^2)^6 + 4 \cdot (3^3)^4 = 3^{12} \cdot (2 + 3 + 4) =$
$= 3^{12} \cdot 9 = 3^{12} \cdot 3^2 = 3^{14} = (3^2)^7 = 9^7$.

10. E

$$\frac{10^{-3} \cdot (0{,}001)^{-2}}{1000^{-4}} = \frac{10^{-3} \cdot (10^{-3})^{-2}}{(10^3)^{-4}} = \frac{10^{-3} \cdot 10^6}{10^{-12}} = \frac{10^3}{10^{-12}} = 10^{15}.$$

Como $x = 10^3$, temos: $10^{15} = (10^3)^5 = x^5$.

11. B

Temos que $X = \dfrac{125 \cdot 10^2 \cdot 10^9\,g \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot 10^9\,g}{12 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{12}\,g} =$

$$= \frac{125 \cdot 6 \cdot 10^7}{12 \cdot 10^6} = 62{,}5 \cdot 10 = 625g$$

Portanto, $500 < X < 1\,000$.

12. B

$$\frac{(4{,}25)^3 \cdot (9{,}8)^2}{(10{,}1)^4} \cong \frac{4^3 \cdot 10^2}{10^4} = \frac{64}{100} = 0{,}64.$$

13. D

Como $0{,}125 = (0{,}5)^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = 2^{-3}$ temos que

$(0{,}125)^{15} = (2^{-3})^{15} = 2^{-45}$.

14. $$\frac{(1{,}25)^{-2} + 4 \cdot 5^{-1}}{(0{,}999...)^2 - 2 \cdot (-10)^{-1}} = \frac{\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-2} + 4 \cdot \dfrac{1}{5}}{1^2 + 2 \cdot \dfrac{1}{10}} =$$

$$= \frac{\dfrac{16 + 20}{25}}{\dfrac{6}{5}} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

15. E

I. FALSA, pois
$$\left(2^a\right)^3 = 3^6 \rightarrow \left(2^a\right)^3 = \left(3^2\right)^3 \rightarrow 2^a = 3^2 = 9 \rightarrow 2^{-a} = \frac{1}{9}$$

II. FALSA, pois $(1{,}25 \cdot 10^{-4} - 1{,}16 \cdot 10^{-7}) =$
$= 10^{-4} \cdot (1{,}25 - 1{,}16 \cdot 10^{-3}) \neq 1{,}19 \cdot 10^{-4}$

III. FALSA, pois $x^2 = (25^6)^2 \rightarrow x = 25^6$; $y^6 =$
$= (25^2)^6 \rightarrow y = 25^2$ e $w^7 = (25^9)^7 \rightarrow w =$
$= 25^9$. Logo $(x \cdot y \cdot w)^{12} = (25^{6+2+9})^{12} = 25^{204}$

16. C

Todas as potências com expoentes naturais de nove terminam em nove quando o expoente é ímpar e em 1 quando o expoente é par; da mesma forma, todas as potências com expoentes naturais de quatro terminam em quatro quando o expoente é ímpar e em seis quando o expoente é par.
Concluímos então que o último algarismo de 9^{99} é 9 e o último algarismo de 4^{44} é 6; portanto, a diferença entre eles é 3.

17. Temos que o volume é dado por V = (área) · (espessura). Daí: 10 000 ℓ = 150 000 m^2 · (espessura). Como 1 m^3 = 1 000 ℓ, vem: 10 m^3 = 15 · $10^4 \rightarrow$
$\rightarrow$ (altura) = (altura) = $\frac{10}{15} \cdot 10^{-4} = 0{,}66... \cdot 10^{-4} =$
$= 6{,}6... \cdot 10^{-5}$. Utilizando a definição de ordem de grandeza de um número, temos que a ordem de grandeza da espessura da camada de óleo é de 10^{-4}.

Estudo para o Enem

18. D

1 real = $2{,}75 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3$ réis =
= $2{,}75 \cdot 10^{18}$ réis.

Logo, 300 *contos* = $300 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^8$ réis. Portanto, o saldo da conta seria de $\frac{3 \cdot 10^8}{2{,}75 \cdot 10^{18}} \approx \frac{1}{10^{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10^9}$.

Ou seja, aproximadamente um décimo de bilionésimo de real.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

19. B

Temos que, em segundo, $43{,}18 = 4{,}318 \cdot 10^1$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

20. D

Temos a distância de 149 600 000 km =

$= 1{,}496 \cdot 10^8 \cdot 10^3$ m $= 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

2 RADICIAÇÃO

Comentário sobre o módulo

O conteúdo abordado sobre radiciação está relacionado à aritmética. A proposta é retomar conceitos abordados no ensino fundamental. o grau de dificuldade em radiciação é mais elevado, cabendo ao professor identificar demais dúvidas relacionadas à aritmética e saná-las no decorrer das aulas pensadas para este módulo.

O conteúdo de radiciação é abordado, com a apresentação de definições, propriedades operatórias e processo de racionalização. Para finalizar, há uma série de exercícios de compreensão, desenvolvimento e aplicação dos conceitos de radiciação estudados no módulo.

Para ir além

O uso de ferramentas digitais no ensino de Matemática proporciona principalmente uma aproximação do professor à realidade do aluno. Existem poucos *softwares* ou recursos digitais relacionados ao contexto do pré-vestibular, quando tratamos de radiciação; eles são geralmente encontrados em *sites* do MEC, como o Rived (Rede Interativa Virtual de Educação), disponível em:

<http://rived.mec.gov.br>.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. *O que é radiciação?* Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-radiciacao.htm>. Acesso em: 19 jun. 2018.

Exercícios propostos

7. B

Temos que $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1.$

8. 01 + 08 = 09

01) $2^{2016} - 2^{2015} = 2^{2015}$

VERDADEIRA, pois $2^{2015}\cdot 2^1 - 2^{2015} = 2^{2015}\cdot(2-1) = 2^{2015}$

02) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{5}{2}=1$

FALSA, pois $\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{2}+\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{5}{5}=\dfrac{4}{10}+\dfrac{25}{10}=\dfrac{29}{10}\neq 1$

04) $\sqrt{25\%}=5\%$

FALSA, pois $\sqrt{\dfrac{25}{100}}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{50}{100}=50\%$

08) $-\dfrac{3}{4}\cdot\left(2-\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{9}{8}$

VERDADEIRA, pois $-\dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{4}{2}-\dfrac{7}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{8}$

16) $\sqrt{16}=\pm 4$

FALSA, pois $\sqrt{16} = +4$ (por definição).

Soma: 01 + 08 = 09

9. Temos que $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{2^1}{\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{2^1}{2^{2/3}}=2^{1-\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}.$

10. C

Temos que $\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}}=1+\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^1}}=1+\sqrt[3]{3}.$

11. C

Transformando os termos da expressão em potências:

$$\sqrt{2\cdot 5^2}-\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2\cdot 7^2}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}+7\sqrt{2}=9\sqrt{2}$$

12. A

Temos que $\sqrt{x}=2015^3 \rightarrow x=2015^6$,

$y^{\frac{2}{3}}=2015^4 \rightarrow (y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}=(2015^4)^{\frac{3}{2}} \rightarrow y=2015^6$,

e $z^3=2015^6 \rightarrow \sqrt[3]{z^3}=\sqrt[3]{2015^6} \rightarrow z=2015^2$.

Vamos calcular $\sqrt{x\cdot y\cdot z}=\sqrt{2015^6\cdot 2015^6\cdot 2015^2}=$
$=\sqrt{2015^{14}}=2015^7$

Portanto, $\dfrac{1}{\sqrt{x\cdot y\cdot z}}=\dfrac{1}{2015^7}=2015^{-7}$.

13. C

Sendo $x=\left(\sqrt{2017}-\sqrt{2016}\right)\rightarrow$

$\rightarrow x=\left(\sqrt{2017}-\sqrt{2016}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{2017}+\sqrt{2016}}{\sqrt{2017}+\sqrt{2016}}=$

$=\dfrac{2017-2016}{\sqrt{2017}+\sqrt{2016}}\rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2016}}.$

$y=\left(\sqrt{2016}-\sqrt{2015}\right)\rightarrow$

$\rightarrow y=\left(\sqrt{2016}-\sqrt{2015}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{2016}+\sqrt{2015}}{\sqrt{2016}+\sqrt{2015}}=$

$=\dfrac{2016-2015}{\sqrt{2016}+\sqrt{2015}}\rightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2015}}.$

$z=\dfrac{1}{2\sqrt{2016}}\rightarrow z=\dfrac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2016}}.$

Como $\sqrt{2015}<\sqrt{2016}<\sqrt{2017}$, então, $y<z<x$.

Portanto,

$\sqrt{2017}-\sqrt{2016}<(2\sqrt{2016})^{-1}<\sqrt{2016}-\sqrt{2015}$.

14. B

$a = \sqrt{8} = \sqrt[6]{8^3} = \sqrt[6]{512};$

$b = 3 = \sqrt[6]{3^6} = \sqrt[6]{729};$

$c = \sqrt[3]{25} = \sqrt[6]{25^2} = \sqrt[6]{625}.$

Portanto, $a < c < b$.

15. B

I. Se $A = \dfrac{5 - 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{5 - 5^{\frac{1}{2}}}$, então A é irracional.

VERDADEIRA, pois $A = \dfrac{5 \cdot \left(1 - 5^{\frac{1}{2}}\right)}{5 \cdot \left(1 - 5^{\frac{1}{2} - 1}\right)} = \dfrac{1 - 5^{\frac{1}{2}}}{1 - 5^{-\frac{1}{2}}} =$

$= \dfrac{1-\sqrt{5}}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}} = -\left(\sqrt{5}-1\right) \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} =$

$= -\sqrt{5}.$

II. O valor da expressão $\left[\dfrac{(0,001)^4 \cdot 100^7}{10^5}\right] \cdot (0,1)^{-4}$ é $100^{\frac{1}{2}}$.

VERDADEIRA, pois $\left[\dfrac{(0,001)^4 \cdot 100^7}{10^5}\right] \cdot (0,1)^{-4} =$

$= \left[\dfrac{10^{-12} \cdot 10^{14}}{10^5}\right] \cdot 10^4 = 10^{-3} \cdot 10^4 = 10 = 100^{\frac{1}{2}}.$

III. Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*$, uma forma simplificada para a expressão $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$ é a^{-4}.

FALSA, pois $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{a}}} = \dfrac{a^{1/2}}{a^{1/4}} = a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}}$

16. E

$$X = \left(\dfrac{1 + 1 + \dfrac{3125}{3125} + 1}{1,5 - 0,5 + 1}\right)^{\sqrt[7]{\frac{3^{21} \cdot (1+3^2)}{10}}} = \left(\dfrac{4}{2}\right)^{\sqrt[7]{3^{21}}} = 2^{3^3} = 2^{27}$$

17. A

$5\sqrt[3]{27 \cdot 2} - 3\sqrt[3]{8 \cdot 2} = 15\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{9^3 \cdot 2} =$

$= \sqrt[3]{729 \cdot 2} = \sqrt[3]{1458}.$

Estudo para o Enem

18. E

Do texto, temos que $\Delta t = (1 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3\,600)$ s e $V = 300\,000$ km/s.

Logo, a distância percorrida é de $\Delta S = V \cdot \Delta t \approx 1,89 \cdot 10^{13}$ km $= 1,89 \cdot 10^{16}$ m.

Como $1,89 < \sqrt{10} \approx 3,16$, segue que a resposta é 10^{16}.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

19. A

$T = \left(T_n - T_s\right)(\sqrt[6]{2})^{-t} + T_s$

$31 = (37 - 25)(\sqrt[6]{2})^{-t} + 25 \rightarrow 6 = 12(\sqrt[6]{2})^{-t} \rightarrow \dfrac{1}{2} = 2^{-\frac{t}{6}} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{-t}{6} = -1 \rightarrow t = 6\,\text{h}$

Portanto, se faz 6 horas que a morte ocorreu, isso significa que ela aconteceu às 11 horas da noite do dia 27.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

20. B

$k \cdot (8m)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} \cdot k \cdot m^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} \cdot k \cdot m^{\frac{2}{3}} = 4 \cdot k \cdot m^{\frac{2}{3}} = 4A$

Logo, a área ficará multiplicada por 4.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

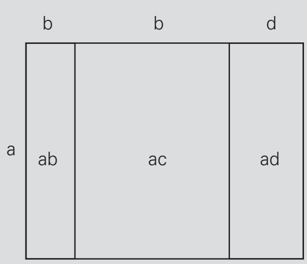
3 PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO

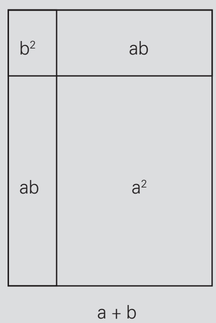
Comentário sobre o módulo

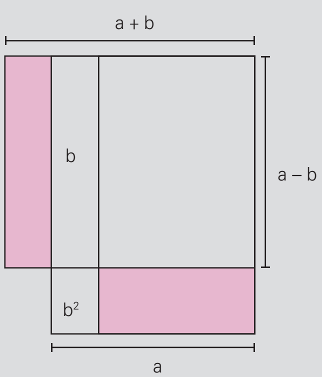
O desenvolvimento deste módulo está subdividido em duas etapas: 1. produtos notáveis; 2. fatoração. Na primeira etapa, ao tratar de produtos notáveis, consideramos a relação álgebra-geometria, existente desde a origem deste objeto de estudo. No clássico *Elementos*, livro II, Euclides enuncia a proposição 4:

"Se uma linha reta é cortada ao acaso, o quadrado do total é igual à soma do quadrado dos segmentos e duas vezes o retângulo formado pelos segmentos". *Isto é, em linguagem algébrica moderna:* $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (MILIES; BUSSAB, 1999, p. 66).

A lei de distribuição $a(b + c + d) = ab + ac + ad$, assim como a de identidade $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ e a da diferença de dois quadrados $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, era representada de modos semelhantes.







Nesse relato histórico, é perceptível a importante relação álgebra-geometria, a qual enfatizamos neste primeiro momento, buscando dar significado ao estudo de polinômios abordado em módulos seguintes.

Na segunda etapa, são apresentados e desenvolvidos os conceitos e propriedades operatórias de fatoração, os quais vão auxiliar na simplificação e na resolução de expressões e equações algébricas.

Para ir além

O uso de ferramentas digitais, esquemas ou resumos certamente vai enriquecer a aula. Por mais que a fixação das "fórmulas" tenha importância crucial nesta etapa do ensino, não deixe de apresentar a representação geométrica de produtos notáveis.

7. E

a) Falsa. Seria verdadeira se $a^3 + b^3 = (a + b)^3$.

b) Falsa. Seria verdadeira se $a^2 + b^2 = (a + b)^2$.

c) Falsa, pois $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a \cdot b} + b$.

d) Falsa, pois $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{a \cdot b}$.

e) Verdadeira, pois $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} =$

$= \frac{(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2} = a - b$, para quaisquer a e b reais positivos.

8. A

(V) $(3a^2 - 2b)^2 = 9a^4 - 12a^2b + 4b^2$

VERDADEIRA, pois $(3a^2 - 2b)^2 = (3a^2)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot 2b + (2b)^2 = 9a^4 - 12a^2b + 4b^2$.

(F) $(a - b)^3 = a^3 - b^3$

FALSA, pois $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

(V) $64a^2 - 49b^2 = (8a - 7b) \cdot (8a + 7b)$

VERDADEIRA, pois $64a^2 - 49b^2$ é uma diferença de quadrados. Sua forma fatorada é $(8a - 7b) \cdot (8a + 7b)$.

(F) $4a^2 - 16b^2 = (2a - 4b)^2$

FALSA, pois $4a^2 - 16b^2$ é uma diferença de quadrados. Sua forma fatorada é

$(2a - 4b) \cdot (2a + 4b) \neq (2a - 4b)^2$

(V) $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

VERDADEIRA, pois $a^3 + b^3$ é uma soma de cubos. Sua forma fatorada é

$(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$.

9. Temos que $(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$.

10. B

Simplificando a expressão: $\frac{(x+y)^2 - 4xy}{x^2 - y^2} =$

$= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - 4xy}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x+y)\cdot(x-y)} =$

$= \frac{(x-y)^2}{(x+y)\cdot(x-y)} = \frac{x-y}{x+y}$.

11. D

Temos uma diferença de quadrados, da forma $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Portanto, podemos reescrever a expressão como $(7777)^2 - (2223)^2 =$
$=(7777 + 2223) \cdot (7777 - 2223) =$
$= 10000 \cdot 5554 = 5{,}554 \cdot 10^7$.

12. D

O número $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 1$, de acordo com o enunciado, pode ser escrito das seguintes formas:

$180 = (2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (2) \cdot (1) \therefore$ soma $= 22$;

$180 = (3 \cdot 2) \cdot (5) \cdot (3) \cdot (2) \therefore$ soma $= 16$;

$180 = (3 \cdot 3) \cdot (5) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (1) \therefore$ soma $= 19$;

$180 = (2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3) \cdot (1) \therefore$ soma $= 20$.

13. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x^2} \rightarrow$

$\rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + \frac{3}{x} \rightarrow$

$\rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)$. Como $x + \frac{1}{x} = 3$,

vem: $(3)^3 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3 \cdot 3$.

Portanto, $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 27 - 9 = 18$.

14. A

$$\frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^2+2x+1}{x^2+x} = \frac{x^3-1}{x \cdot (x-1)} - \frac{(x+1)^2}{x \cdot (x+1)} =$$

$$= \frac{(x-1) \cdot (x^2+x+1)}{x \cdot (x-1)} - \frac{(x+1)}{x} = \frac{x^2+x+1}{x} - \frac{x+1}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{x} = x$$

15. D

Temos que $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Então, $xy + xz + yz = 6 \rightarrow 2xy + 2xz + 2yz = 12$.

Logo, $(x + y + z)^2 = 6 + 12 = 18$.

Portanto, $x + y + z = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$. Um possível valor é $3\sqrt{2}$.

16. C

Temos que $x^3 + x^2 y - 8x - 8y =$
$= x^2 \cdot (x + y) - 8 \cdot (x + y) = 7$.

$(x^2 - 8) \cdot (x + y) = 7$. Como a soma de números naturais é um número natural, há duas possibilidades:

I) $x + y = 1 \rightarrow x^2 - 8 = 7 \rightarrow x^2 = 15 \rightarrow x = \pm\sqrt{15}$ (x não natural);

II) $x + y = 7 \rightarrow x^2 - 8 = 1 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$. Como x é natural: $x = 3$ e $y = 4$.

Portanto, $x - y = -1$.

17. A

$$\left(\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right) \cdot \left(\frac{xy \cdot (x+y)}{(x+y) \cdot (x-y)}\right) = \left(\frac{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}{\frac{y+x}{xy}}\right) \cdot \left(\frac{xy}{x-y}\right)$$

$$\left(\frac{\frac{(y+x) \cdot (y-x)}{x^2 \cdot y^2}}{\frac{y+x}{x \cdot y}}\right) \cdot \left(\frac{xy}{x-y}\right) = \left(\frac{y-x}{xy}\right) \cdot \left(\frac{xy}{x-y}\right) = -1$$

Estudo para o Enem

18. B

Reescrevendo a expressão:

$$\frac{(x^3-14x^2+49x) \cdot (ax-bx+7a-7b)}{(x^2-49) \cdot (2a-2b) \cdot (7x-49)} =$$

$$= \frac{x(x-7) \cdot (x-7) \cdot [x \cdot (a-b) + 7 \cdot (a-b)]}{(x+7) \cdot (x-7) \cdot 2 \cdot (a-b) \cdot 7 \cdot (x-7)} =$$

$$= \frac{x \cdot (x+7) \cdot (a-b)}{(x+7) \cdot (a-b) \cdot 2 \cdot 7} = \frac{x}{14} = \frac{966}{14} = 69$$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

19. D

Temos uma diferença de quadrados, da forma $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Portanto, podemos reescrever a expressão como:
$x = 525^2 - 523^2 = (525 + 523) \cdot (525 - 523) =$
$= 1048 \cdot 2 = 2096$.
A soma dos algarismos de x é $2 + 0 + 9 + 6 = 17$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. E

Tomando um quadro qualquer e representando o valor da cédula central por x, há duas possibilidades:

I) cédula anterior: $x - 1$ e posterior: $x + 1$;

II) cédula anterior: $x + 1$ e posterior: $x - 1$;

Sendo $x = 2^{2013}$, vem: $(2^{2013} + 1) \cdot (2^{2013} - 1) = (2^{2013} - 1) \cdot (2^{2013} + 1) = (2^{2013})^2 - 1^2 = 2^{4026} - 1$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

4 MÚLTIPLOS E DIVISORES

Comentário sobre o módulo

São abordados conceitos de múltiplos e divisores. O principal foco de estudo, neste momento, deve se voltar para a compreensão de fenômenos repetitivos ou com eventos comuns, aos quais se aplicam os conceitos de MMC ou MDC.

Vale destacar que existem poucos itens abordados no Enem que envolvem esses conceitos.

Para ir além

O software disponível em <http://clic.xtec.cat/db/act_es.jsp?id=1290> possibilita encontrar números primos entre 2 e 100, utilizando o método de Eratóstenes ou Crivo de Eratóstenes, que consiste em excluir desses números os múltiplos de 2, 3, 5 e 7, com exceção deles mesmos. Os que não forem assinalados serão números primos.

Exercícios propostos

7. A

Fatorando os polinômios:

$P_1 = x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$

$P_2 = x^3 - 8 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$

$P_3 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

Logo, $MDC(P_1, P_2, P_3) = x - 2$ e o $MMC(P_1, P_2, P_3) = (x - 2)^2 \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$.

8. C

Considerando-se **a** e **b** números naturais, como $MDC(a, b) \neq 1$, pois **a** e **b** são primos entre si, **a** e **b** têm pelo menos um fator primo em comum.

Sendo $a \cdot b = 825 = 3 \cdot 5^2 \cdot 11 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$, o único fator primo em comum aos números **a** e **b** é o 5. Logo, $MDC(a, b) = 5$.

9. Os elementos de $\varnothing(24)$ são os valores de **x** (naturais de 1 a 24), de modo que $MDC(x, 24) = 1$. Como $24 = 2^3 \cdot 3$, **x** não pode ser múltiplo de 2 ou múltiplo de 3. Então:

$\varnothing(24) = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$.

Portanto, o indicador do número 24 é 8.

10. A

Tempo para a colheita da variedade $V_1 = 5 + 3 + 1 = 9$ semanas.

Tempo para a colheita da variedade $V_2 = 3 + 2 + 1 = 6$ semanas.

Tempo para a colheita da variedade $V_3 = 2 + 1 + 1 = 4$ semanas.

O número mínimo de semanas necessárias para que a colheita das três variedades ocorra simultaneamente será: $MMC(9, 6, 4) = 36$ semanas.

11. A

Como os alunos das três escolas serão divididos em **x** grupos (com mesma quantidade de alunos de cada escola) e **x** deve ser o maior possível, temos que **x** é máximo divisor comum dos números de alunos de cada escola. Ou seja, $x = MDC(120, 180, 252)$. Fatorando 120, 180 e 252:

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5;$

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5;$

$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7.$

Portanto, $x = MDC(120, 180, 252) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

12. B

Como $15 = 3 \cdot 5$, um número divisível por 15 é divisível por 3 e 5. Para que o número citado seja divisível por 5, tem-se $b = 0$ ou $b = 5$. Do enunciado, temos que $b \neq 0$. Logo, $b = 5$.

Para que o número citado seja divisível por 3, tem-se que a soma $4 + 3 + 2 + a + 7 + 5 = 21 + a$ seja divisível por 3. Do enunciado, temos que $a \neq 0$ e $a < 5$. Logo, $a = 3$.

13. C

Desenvolvendo a expressão dada:

$N = 2^{48} - 1 = (2^{24} + 1) \cdot (2^{24} - 1) = (2^{12} + 1) \cdot (2^{12} - 1) \cdot (2^{24} + 1) \rightarrow N = (2^6 + 1) \cdot (2^6 - 1) \cdot (2^{12} + 1) \cdot (2^{24} + 1) \rightarrow N = (2^3 - 1) \cdot (2^3 + 1) \cdot (2^6 + 1) \cdot (2^{12} + 1) \cdot (2^{24} + 1) \rightarrow N = (7) \cdot (9) \cdot (65) \cdot (2^{12} + 1) \cdot (2^{24} + 1)$

Portanto, pode-se concluir que o número **N**:

- não é primo, pois é divisível por 7, 9 e 65, pelo menos;
- não é par, pois é resultado de multiplicações de números ímpares;
- é múltiplo de $2^{24} + 1$, divisível por 9 e múltiplo de 7.

14. a) A menor quantidade de dias **x** para que os três rituais sejam celebrados simultaneamente é menor múltiplo positivo da quantidade de dias em que cada ritual se repete. Ou seja, $x = MMC(20, 66, 30)$. Fatorando 20, 66 e 30:

$20 = 2^2 \cdot 5;$

$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11;$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$

Portanto, $x = MMC(20, 66, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 660$.

b) Como os dias da semana formam um ciclo completo de 7 dias, dividindo o intervalo dado por 7, obtemos o número de ciclos completos (quociente dessa divisão) e o número de dias excedentes que não completam um ciclo (resto dessa divisão). Ou seja: 3 960 ÷ 7 = 565 *ciclos completos* + 5 *dias*.

Assim, como cada ciclo completo inicia-se na segunda-feira (resto 0), o quinto dia (resto 5) será um sábado.

15. 01 + 02 + 04 + 08 = 15

Utilizando a propriedade do MDC e do MMC:

MMC(a, 15) · MDC(a, 15) = a · 15 → 120 · 5 = = a · 15 → a = 40.

MMC(b, 20) · MDC(b, 20) = b · 20 → 140 · 4 = = b · 20 → b = 28.

Analisando os itens:

01) MMC(a, b) = 280

VERDADEIRA, pois MMC(40, 28) = MMC(2^3 · 5, 2^2 · 7)=2^3 · 5 · 7 = 280.

02) MDC(a, b) = 4

VERDADEIRA, pois MDC(40, 28) = MDC(2^3 · 5, 2^2 · 7) = 2^2 = 4.

04) **a** e **b** são números pares.

VERDADEIRA, pois a = 40 e b = 28, os quais são números pares.

08) a > b

VERDADEIRA, pois 40 > 28.

Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15.

16. B

$$n_1 = \frac{\sqrt{1+\sqrt{12-\sqrt[3]{8-(-19)}}}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{12-\sqrt[3]{27}}}}{3-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\sqrt{9}}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}}{3-\sqrt{3}} = \frac{2}{3-\sqrt{3}} = \frac{2\cdot(3+\sqrt{3})}{6} = \frac{3+\sqrt{3}}{3};$$

$$n_2 = (0{,}01)^{-\frac{1}{2}} + 5^{12} : (0{,}2)^{-9} = \left(\frac{1}{100}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{5^{12}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-9}} =$$

$$= 100^{\frac{1}{2}} + \frac{5^{12}}{5^9} = \sqrt{100} = 10 + 5^3 = 135.$$

$n_3 = 10 + 10 : 2 = 10 + 5 = 15.$

Analisando as alternativas:

a) Falsa, pois MDC(135, 15) = MDC(3^3 · 5, 3 · 5) = 3 · 5 = 15.

b) Verdadeira, pois MMC(2, 135, 15) = MMC(2, 3^3 · 5, 3 · 5) = 2 · 3^3 · 5 = 270.

c) Falsa, pois 135 é múltiplo de 15, e não divisor de 15.

d) Falsa, pois $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ não é inteiro.

e) Falsa, pois $\dfrac{15\cdot\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\cdot 135}{27} = 25\left(3+\sqrt{3}\right)$.

17. Fatorando-se o produto das idades:

37 037	7
5 291	11
481	13
37	37
1	

Logo, a idade da mãe será 37 anos e das filhas, 7, 11 e 13 anos. A diferença de idade entre a filha mais velha e a mais nova será de 6 anos.

Estudo para o Enem

18. B

Os três tipos de documentos (contratos de locação; de compra e venda; e laudos de avaliação de imóveis) serão divididos em **y** pastas com o mesmo número **x** de documentos em cada uma. Para que o número **y** de pastas seja o menor possível, o número **x** de documentos em cada uma deverá ser o maior possível. Então, **x** é o maior divisor das quantidades desses três tipos de documentos. Ou seja, x = MDC(42, 30, 18). Fatorando 42, 30 e 18:

42 = 2 · 3 · 7

30 = 2 · 3 · 5

18 = 2 · 3^2

Portanto, MDC(42, 30, 18) = 2 · 3 = 6. O número **y** de pastas:

$$\frac{42}{6}+\frac{30}{6}+\frac{18}{6} = 7+5+3 = 15.$$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

19. B

Para atender à exigência do feirante, o número **x** de famílias que dividirão as três espécies de frutas deverá ser o maior possível. Ou seja, **x** será o MDC das quantidades de frutas de cada espécie.

Fatorando as quantidades de goiabas, laranjas e maçãs:

$576 = 2^6 \cdot 3^2$

$432 = 2^4 \cdot 3^3$

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

$x = MDC(432, 504, 576) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$, ou seja, 72 famílias.

Assim, cada família receberá:

$576 \div 72 = 8 \rightarrow 8$ goiabas

$732 \div 72 = 6 \rightarrow 6$ laranjas

$507 \div 72 = 7 \rightarrow 7$ maçãs

Somando as frutas que cada família receberá, tem-se o número 21, que é múltiplo de 7.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

20. A

A duração de cada ciclo completo é igual a $1765 - 1755 + 1 = 11$ anos. De 1755 a 2101 se passaram $2101 - 1755 + 1 = 347$ anos. O quociente da divisão de 347 por 11 indica o número **x** de ciclos completos. O resto dessa divisão é a quantidade de anos de atividades magnéticas durante o próximo ciclo $(x + 1)$. Executando a divisão 347 por 11, obtêm-se quociente 31 e resto 6. Então, conclui-se que houve 31 ciclos completos e mais 6 anos de atividade magnética. Portanto, em 2101 o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número 32.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

5 CONJUNTOS

Comentário sobre o módulo

O conteúdo abordado envolve a teoria dos conjuntos. No início do módulo, é apresentada a parte teórica relacionada à teoria de conjuntos, dividida em tópicos, seguidos de alguns exemplos com o objetivo de auxiliar na compreensão do aluno.

Por fim, apresenta-se uma sequência de exercícios, com a distribuição por grau de dificuldade, mesmo entendendo que essa classificação é relativa.

Ferramentas tecnológicas certamente podem auxiliar na compreensão de determinados assuntos, principalmente na Matemática. Se julgar necessário, indique o banco de conteúdos digitais disponíveis em: <http://rived.mec.gov.br/>, para os alunos que apresentam dificuldades pontuais.

Para ir além

Existem muitas aplicações para o estudo de teoria de conjuntos ligadas ao dia a dia do aluno. Em <http://drapestakes.blogspot.com.br/2008/04/geometry-of-twitter.html>, encontre uma aplicação da teoria de conjuntos na análise de perfis do Twitter.

Exercícios propostos

7. D

I. O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números inteiros.

VERDADEIRA, pois todo número natural é um número inteiro.

II. O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números racionais.

VERDADEIRA, pois todo número natural pode ser escrito na forma de fração, ou seja, como um número racional.

III. O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números irracionais.

FALSA, pois, como todo número natural é racional, pode-se afirmar que não existe número natural que seja irracional.

8. Se $A \cap B = \{0,2\}$, então os elementos 0 e 2 pertencem a B; se $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $A = \{0, 1, 2\}$, então os elementos 3 e 4 pertencem somente a B. Então, $B = \{0, 2, 3, 4\}$.

9. C

I. Todo número natural é também real.

VERDADEIRA, pois o conjunto dos números naturais é um subconjunto do conjunto dos números reais.

II. Todo número irracional é também real.

VERDADEIRA, pois o conjunto dos números naturais é um subconjunto do conjunto dos números reais.

III. O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

FALSA, pois o produto de um irracional com seu inverso é número racional.

10. O número de homens que jogam xadrez é 25% de 40 $= \frac{1}{4}$ de 40 $= 10$.

Se 14 pessoas jogam xadrez, entre elas 10 homens, então 4 são mulheres, que correspondem a 25% (1/4) do total de mulheres. Portanto, o número de mulheres (100%) é $4 \cdot 4 = 16$.

Logo, $x = 40 + 16 = 56$.

11. C

Se $A \cap B = \{b,d\}$, então B tem os elementos b e d. Se $B - A = \{a\}$, então B tem o elemento a. Logo, $B = \{a, b, d\}$.

12. D

a) pertencem ao conjunto dos números naturais.

FALSA, pois os três números são decimais.

b) pertencem ao conjunto dos números inteiros.

FALSA, pois os três números são decimais.

c) $\frac{25}{3} < \frac{36}{5} < \sqrt{17}$

FALSA, pois $\frac{25}{3} > \frac{36}{5}$ $(\frac{25}{3} = 8{,}333....$ e $\frac{36}{5} = 7{,}2)$.

d) $\sqrt{17} < \frac{36}{5} < \frac{25}{3}$

VERDADEIRA, pois $\sqrt{17} \cong 4$, $\frac{36}{5} = 7{,}2$ e $\frac{25}{3} = 8{,}333.....$

13. E

Como os conjuntos dos números naturais, dos inteiros, dos racionais e dos irracionais são subconjuntos dos reais, qualquer que seja esse número, ele é real.

14. A

As possibilidades para o conjunto X são: {1,2} ou {1,2,3} ou {1,2,4} ou {1,2,3,4}.

15. C

a) Falsa, pois $x^2 + y^2 = 1 = 1 + 0 \rightarrow x = \pm 1$ e $y = 0$.

b) Falsa, pois $x^2 + y^2 = 2 = 1 + 1 \rightarrow x = \pm 1$ e $y = 1$.

c) Verdadeira, pois $x^2 + y^2 = 3 = 0 + 3 = 3 + 0 = 1 + 2 = 2 + 1$.

Então, temos:

$x = 0$ e $y = \pm\sqrt{3}$

ou

$x = \pm\sqrt{3}$ e $y = 0$

ou

$x = 1$ e $y = \pm\sqrt{2}$

ou

$x = \pm\sqrt{2}$ e $y = 1$

d) Falsa, pois $x^2 + y^2 = 4 = 4 + 0 \rightarrow x = \pm 2$ e $y = 0$.

e) Falsa, pois $x^2 + y^2 = 5 = 4 + 1 \rightarrow x = \pm 2$ e $y = \pm 1$.

16. A

I. Se $a < b$, então $-a > -b$.

VERDADEIRA, pois, ao multiplicar a desigualdade $a < b$ por -1, inverte-se o sinal da desigualdade. Então: $-a > -b$.

II. Sendo a e b não nulos e $a > b$, então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

FALSA, pois $10 > -2 \rightarrow \frac{1}{10} > -\frac{1}{2}$.

III. Se $a < b$, então $a^2 < b^2$.

FALSA, pois $-5 < 2 \rightarrow (-5)^2 > 2^2$.

17. Se 25% dos funcionários são mulheres, então 75% dos funcionários são homens.

Se 20% dos homens têm menos de 30 anos, então 80% dos homens têm pelo menos 30 anos.

Dessas conclusões, temos que 80% de 75% = 60% é a porcentagem dos funcionários que são homens e têm pelo menos 30 anos.

Se 80% dos funcionários têm pelo menos 30 anos e 60% são homens, então 20% são mulheres.

Entre as mulheres, a porcentagem das que têm pelo menos 30 anos é dada pela razão:

$$\frac{20\% \text{ dos funcionários}}{25\% \text{ dos funcionários}} = \frac{20}{25} = \frac{80}{100} = 80\%.$$

Estudo para o Enem

18. C

Temos que a diferença entre a espessura de cada lente em relação à lente de 3 mm é dada por:

$|3{,}10 - 3{,}00| = 0{,}10$; $|3{,}021 - 3{,}000| = 0{,}021$; $|2{,}96 - 3{,}00| = 0{,}040$; $|2{,}099 - 3{,}000| = 0{,}901$ e $|3{,}07 - 3{,}00| = 0{,}07$. Portanto, o menor desvio absoluto é da lente de espessura 3,021 mm.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

19. E

Temos que $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$. Logo, 3.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

20. C

Serão necessários $2 \cdot 81 + 190 = 352$ metros de tela para cercar o terreno. Logo, como cada rolo tem 48 metros de comprimento, segue-se que o número de rolos necessários é o menor número inteiro maior do que $\frac{352}{48} \simeq 7{,}3$, ou seja, 8.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

6 INTERVALOS REAIS E DIAGRAMA DE VENN

Comentário sobre o módulo

O conteúdo abordado envolve os intervalos reais e o diagrama de Venn. Por fim, apresenta-se uma sequência de exercícios, distribuídos por grau de dificuldade, mesmo entendendo que essa classificação é relativa.

Ferramentas tecnológicas certamente podem auxiliar na compreensão de determinados assuntos, principalmente na Matemática. Se julgar necessário, indique o banco de conteúdos digitais disponíveis em <http://rived.mec.gov.br/> para os alunos que apresentam dificuldades pontuais.

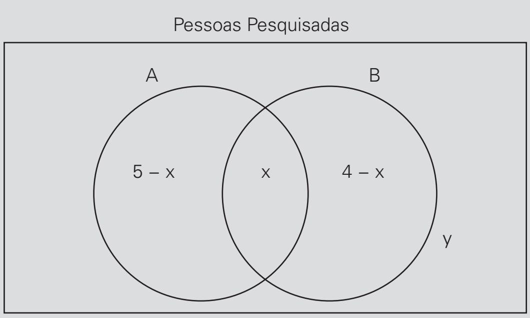
Para ir além

Existem muitas aplicações que podem facilitar o nosso dia a dia usando conjuntos e diagrama de Venn.

Em <http://drapestakes.blogspot.com.br/2008/04/geometry-of-twitter.html>, é possível encontrar uma aplicação da teoria de conjuntos na análise de perfis do Twitter.

Exercícios propostos

7. C



$5 - x + x + 4 - x + y = 10 \rightarrow y - x = 1 \rightarrow$ $\rightarrow y = x + 1$. Como x é quantidade de pessoas, temos $4 - x \geqslant 0 \rightarrow x \leqslant 4$. Há 5 possibilidades:

I) $x = 0 \rightarrow y = 1$ ou II) $x = 1 \rightarrow y = 2$ ou III) $x = 2$ $\rightarrow y = 3$ ou IV) $x = 3 \rightarrow y = 4$ ou V) $x = 4 \rightarrow y = 5$.

Dessas possiblidades, temos: $x \in \{0,1, 2, 3, 4\}$ e $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Analisando as alternativas:

a) Falsa, pois x pode ser zero, ou seja, nenhuma delas ter lido os dois livros.

b) Falsa, pois x não é necessariamente zero, ou seja, há possibilidade de uma ou mais de uma delas ter lido os dois livros.

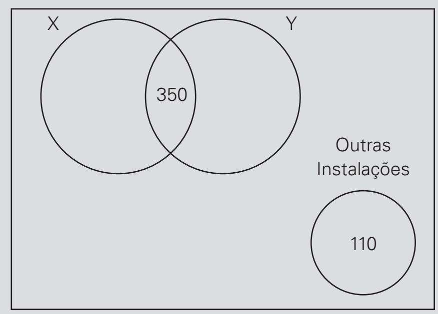
c) Verdadeira, pois $y \in \{1,2, 3, 4, 5\}$, ou seja, pelo menos uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.

d) Falsa, a justificativa é a mesma do item anterior.

8. B

Sendo X o conjunto das pessoas que sugerem reformas na sala de aula e Y o das que sugerem reformas na biblioteca, e sabendo que 350 pessoas sugerem reformas nas salas de aula e na biblioteca, há 350 pessoas na intersecção de X e Y.

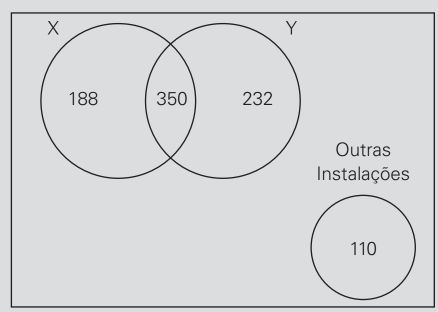
Logo, pode-se aplicar o diagrama de Euler-Venn para tal situação da seguinte maneira:



Como em X há 538 pessoas e em Y há 582, basta calcular as diferenças de $538 - 350$ e $582 - 350$ para obter as regiões não preenchidas de X e Y, respectivamente. Dessa forma:

$538 - 350 = 188$ e $582 - 350 = 232$

Transcrevendo para o diagrama de Euler-Venn, temos:

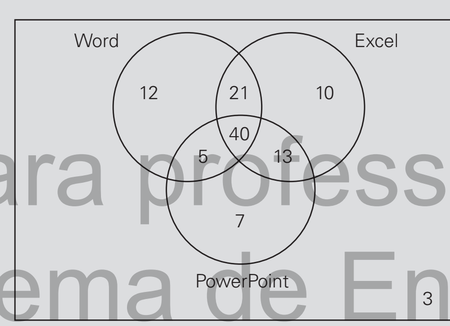


Para obter a quantidade de pessoas entrevistadas, basta somar todos os valores. Note que a amostra tem 110 pessoas que opinaram sobre reformas em outras instalações. Somando todos os valores:

$188 + 350 + 232 + 110 = 880$ pessoas.

9. D

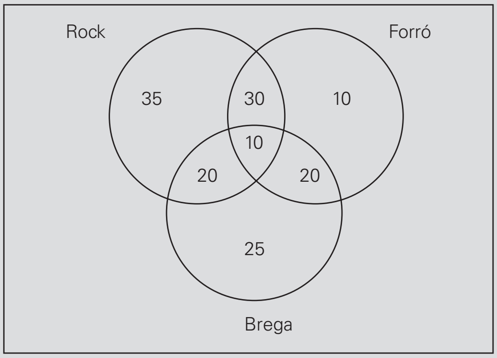
De acordo com os dados apresentados, tem-se:



Somando todos os valores do diagrama, temos:

$12 + 21 + 10 + 5 + 40 + 13 + 7 + 3 = 111$.

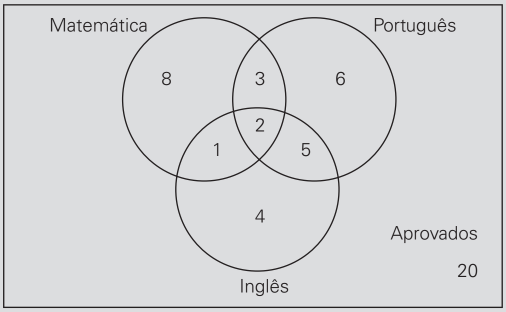
10. De acordo com o enunciado da questão:



Então, se temos 200 estudantes no total, o número de alunos que não gostam de nenhum desses três estilos musicais é $200 - (35 + 30 + 10 + 10 + 10 + 20 + 25) = 60$.

11. E

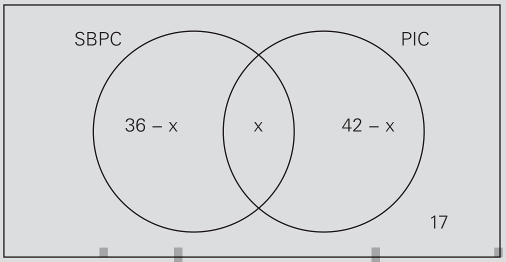
Considerando o diagrama com os conjuntos dos alunos que não obtiveram a nota mínima em uma disciplina, temos:



Portanto, o total de alunos é dado pela soma $8 + 3 + 6 + 1 + 2 + 5 + 4 + 20 = 49$.

12. D

Transcrevendo o problema para o diagrama de Euler-Venn:

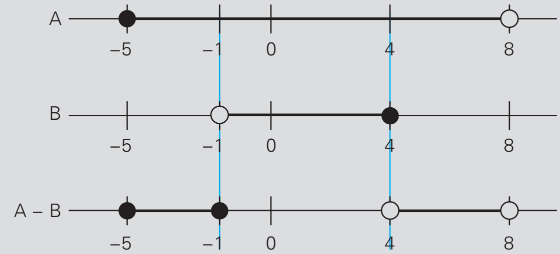


Portanto, $36 - x + x + 42 - x + 17 = 75$.

$-x = -20 \rightarrow x = 20$.

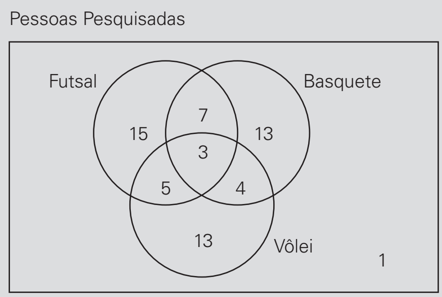
13. C

Colocando os conjuntos A e B em uma reta real:



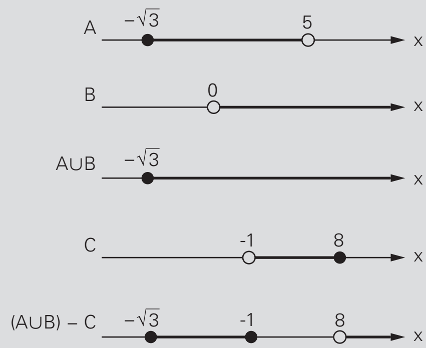
Logo, $A - B = [-1, 1] \cup (4, 8)$.

14. A

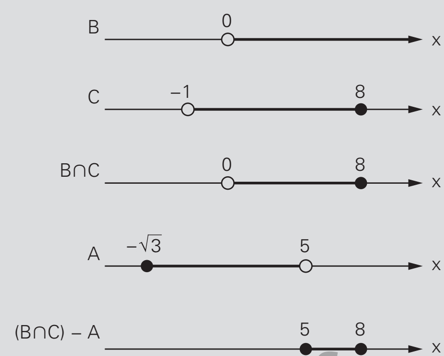


A quantidade de pessoas que praticam somente dois esportes é $7 + 4 + 5 = 16$.

15.



Portanto, $(A \cup B) - C = [-3, -1] \cup]8, \infty[$.



Portanto, $(B \cap C) - A = [5, 8]$.

16. Se y não pertence ao intervalo fechado de extremo -3 e 4, então $y < -3$ ou $y > 4$. Como qualquer número real menor que -3 é menor que -2 e qualquer número real maior que 5 é maior que 4, temos que $y < -3$ ou $y > 5$, ou seja, $y \in \,]-\infty, -3[\, \cup \,]5, \infty[$.

17. 02 + 04 + 16 = 22

01) O modelo A tem a preferência de menos que 17% dos moradores.

FALSA, pois 600 + 200 + 100 + 100 = 1 000 é o número de pessoas que preferem o modelo A ($n(A) = 1\,000$). O percentual correspondente é $\dfrac{1\,000}{5\,000} = 0{,}2 = 20\% > 17\%$.

02) 70% dos moradores não comprariam o modelo B.

VERDADEIRA, pois 1 000 + 100 + 100 + 300 = 1 500 comprariam o modelo B ($n(B) = 1\,500$). Logo, o percentual mencionado é $\dfrac{5\,000 - 1\,500}{5\,000} = 0{,}7 = 70\%$.

04) 14% dos moradores comprariam pelo menos dois dos modelos oferecidos.

VERDADEIRA, pois o número de pessoas que comprariam ao menos dois dos modelos é 200 + 100 + 100 + 300 = 700, o que corresponde a $\dfrac{700}{5\,000} = 0{,}14 = 14\%$ do total de entrevistados.

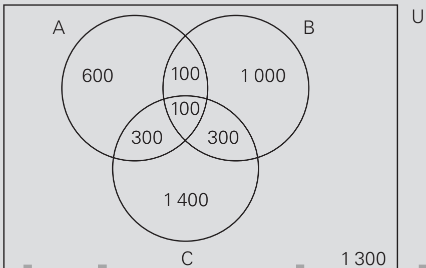
08) Mais que 50% dos moradores não comprariam os modelos A ou C.

FALSA, pois o número de moradores que não comprariam os modelos A ou C é igual a 1 000 + 1 300 = = 2 300, correspondendo, portanto, a um percentual de $\dfrac{2\,300}{5\,000} = 0{,}46 = 46\% < 50\%$.

16) O modelo C é o de maior preferência.

VERDADEIRA, pois 1 400 + 200 + 100 + 300 = = 2 000 é o número de moradores que preferem C ($n(C) = 1\,000$). Então: $n(C) > n(B) > n(A)$.

Considere o diagrama para as justificativas de cada item.



Seja U o conjunto universo da pesquisa, temos:

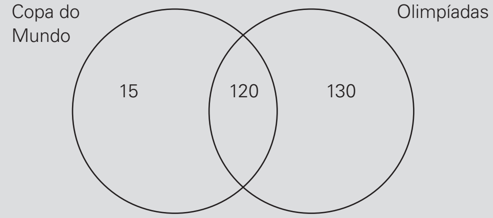
$n(U) = 600 + 200 + 100 + 100 + 300 + 1\,000 + + 1\,400 + 1\,300 = 5\,000$

Soma das corretas: 02 + 04 + 16 = 22

Estudo para o Enem

18. B

Considere o diagrama de Euler-Venn:



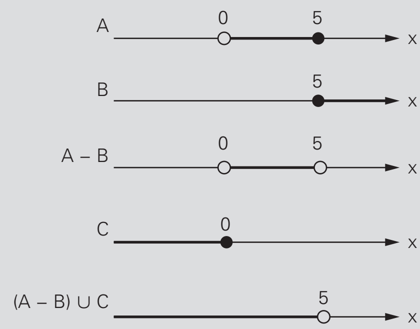
Temos que 15 + 120 + 130 + x = 420.

Logo, x = 155.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

19. B



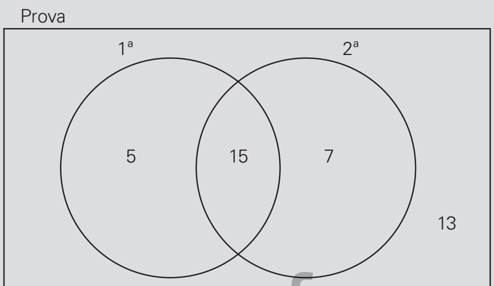
Portanto, $(A - B) \cup C = \,]-\infty, 5[\, = \mathbb{R} - [5, \infty[\, = = \mathbb{R} - B$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. B

De acordo com o enunciado, temos:



Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

7 EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Comentário sobre o módulo

As páginas iniciais trazem situações-problema cuja resolução ocorre por meio de equações. Apesar de os alunos já conhecerem o tema, ressalte que uma equação nada mais é do que a igualdade de duas expressões algébricas. Em seguida, apresente a definição de equações de 1º grau com uma incógnita.

O conteúdo abordado neste módulo tem grande importância para a Matemática. Nos vestibulares e no Enem, de maneira geral, ele é abordado dentro de um contexto, ou seja, na resolução de situações-problema.

Para ir além

EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

Exercícios propostos

7. A

$mx - 2m + 15 - 10x = 2 + 2x + 6m \rightarrow mx - 12x = 8x - 13 \rightarrow$

$\rightarrow (m - 12) \cdot x = 8m - 13 \rightarrow x = \dfrac{8m - 13}{m - 12}; \ m \neq 12$

8. B

Considere V_A e V_B as velocidades de produção de Adriana e Beatriz, respectivamente, e V_{A+B} a velocidade de produção de Adriana e Beatriz juntas.

Do enunciado, temos que $V_A = \dfrac{240}{T+4}$, $V_B = \dfrac{240}{T+9}$ e $V_{A+B} = \dfrac{240}{T}$.

Logo, como $V_{A+B} = V_A + V_B$

$$V_{A+B} = \frac{240}{T+4} + \frac{240}{T+9}$$

$$\therefore \frac{1}{T} = \frac{1}{T+4} + \frac{1}{T+9}$$

$$\therefore \frac{1}{T} = \frac{T+9+T+40}{(T+4)\cdot(T+9)}$$

$$\therefore \frac{1}{T} = \frac{2T+13}{T^2+13T+36}$$

$$\therefore T^2 + 13T + 36 = 2T^2 + 13T$$

$$\therefore T^2 = 36$$

$$\therefore T = 6$$

Assim, $V_A = \dfrac{240}{10} = 24$ peças/hora e $V_B = \dfrac{240}{15} =$

$= 16$ peças/hora.

Portanto, Adriana produz 8 peças por hora a mais que Beatriz.

9. Número de meninas: x

Número de meninos: 3x

Portanto:

$3x + x = 36$

$4x = 36$

$x = 9$

Então, nessa turma há 9 meninas.

10. D

Considere **x** e **y** os preços dos azulejos do tipo 1 e 2, respectivamente. Do enunciado, temos as equações:

(I) $35x + 13y = 1\,354$ e (II) $21x + 6y = 780 \rightarrow$
$\rightarrow 7x + 2y = 260$ (III) $\leftrightarrow 35x + 10y = 1\,300$ (IV)

Subtraindo (I) – (IV), vem: $3y = 54 \rightarrow y = 18$. Substituindo o valor de **y** em (III), temos

$7x + 36 = 260 \rightarrow 7x = 224 \rightarrow x = 32$

11. E

Temos

$x - 3 \cdot (x-1) = \dfrac{x}{3} + 2 \rightarrow x - 3x + 3 = \dfrac{x}{3} + 2 \rightarrow$

$\rightarrow -2x - \dfrac{x}{3} = 2 - 3 \rightarrow -\dfrac{7x}{3} = -1 \rightarrow x = \dfrac{3}{7}$

12. D

Se **t** é a taxa pedida, então:

$t - 12 \cdot (900 - t) = 6\,950 \rightarrow 11t = 3\,850 \rightarrow t = 350$

13. $\sqrt{9x - 14} = 2 \rightarrow 9x - 14 = 4 \rightarrow 9x = 18 \rightarrow x = 2$

14. D

Considerando **x** e **y**, respectivamente, a massa de uma telha e a massa de um tijolo, então:

$1500x = 1\,200 \rightarrow y = \dfrac{5x}{4}$

Se **n** é o número máximo de tijolos que o caminhão pode transportar quando está carregado com 900 telhas, então:

$900x + ny = 1\,500 \rightarrow n \cdot \dfrac{5x}{4} = 600 \rightarrow n = 480$

15. B

Horas que passaram: x

Horas que faltam passar: 24 – x

De acordo com o enunciado, podemos escrever que:

$x - (24 - x) = 3$ horas $+ 16$ minutos

$2x = 27$ horas $+ 16$ minutos

$x = 13$ horas $+ 30$ minutos $+ 8$ minutos

Portanto, o horário em que o aluno fez a pergunta foi 13 h 38 min.

16. Bruno tinha x moedas e Carlos 78 – x moedas.

I. Bruno deu a Carlos o dobro das moedas que Carlos tinha:

Bruno ficou com $x - 2(78 - x) = 3x - 156$.

Carlos ficou com: $(78 - x) + 2(78 - x) = = 234 - 3x$.

II. Carlos deu 10 moedas a Bruno.

Bruno ficou com $3x - 156 + 10 = 3x - 146$.

Carlos ficou com $234 - 3x - 10 = 224 - 3x$.

Como Bruno, no final, ficou com duas moedas a mais que Carlos, podemos escrever que:

$3x - 146 - (-3x + 224) = 2$

$6x - 370 = 2$

$6x = 372$

$x = 62$

Inicialmente, Bruno tinha 62 moedas e Carlos, 16 moedas.

17. D

$$2x + \frac{6}{x-3} = 6 + \frac{6}{x-3} \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3.$$

Como $x \neq 3$, pois $x = 3$ torna o denominador nulo, conclui-se que não existem raízes para a equação do enunciado.

Estudo para o Enem

18. E

Temos que o custo é dado por

$$\text{custo} = 18 \cdot \frac{2}{3} + 14{,}70 \cdot \frac{1}{3} = 16{,}90$$

$$16{,}90 = x \cdot \frac{2}{3} + 15{,}30 \cdot \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2x}{3} = 11{,}8 \rightarrow x = 17{,}70$$

Redução de R$ 0,30.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. D

Considere 2g e 3g, respectivamente, o número de garrafas de vidro entregues pelo primeiro e pelo segundo grupo. Como a diferença das quantidades de cupons entre os grupos (10) ocorre unicamente pelo aumento do número de garrafas entre os grupos, (2g): $\frac{2g}{3} = 10 \rightarrow g = 15 \rightarrow 3g = 45$. Logo, o número de cupons do segundo grupo é $\frac{45}{3} = 15$; sendo L o número de latinhas de alumínio do segundo grupo, temos: $\frac{L}{5} = 5 \rightarrow L = 25$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. B

Seja **q** a quantidade que era comprada antes do aumento, temos:

$1{,}2 \cdot 10 \cdot (q - 2) = 10 \cdot q + 6 \rightarrow 2q = 30 \rightarrow$ $\rightarrow q = 15$. Portanto, a quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era $10 \cdot 15 + 6 = 156$, ou seja, R$ 156,00.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

8 EQUAÇÕES DO 2º GRAU, REDUTÍVEIS E IRRACIONAIS

Comentário sobre o módulo

As páginas iniciais trazem situações-problema cujas resoluções ocorrem por meio de equações. Apesar de os alunos já conhecerem o tema, ressalte que uma equação nada mais é do que a igualdade de duas expressões algébricas. Em seguida, apresente a definição de equações de 2º grau com uma incógnita.

Para ir além

A seguir estão duas referências que abordam de forma clara e diferenciada o assunto trabalhado neste módulo.

- ENZENSBERGER, H. M. *O diabo dos números*. São Paulo: Cia. das Letras, 2008.
- REVISTA Pré-Univesp. O número de ouro e a divina proporção. Disponível em:

<http://pre.univesp.br/o-numero-de-ouro-e-a-divina-proporcao#.WqVwwL87wbIU>.

Acesso em: jul. 2018.

Exercícios propostos

7. A

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$x^2 = y$

$y^2 - 10y + 9 = 0.$

Utilizando a soma e o produto das raízes, temos:

$y = 1 \rightarrow x = \pm 1$

ou

$y = 9 \rightarrow x = \pm 3$

8.

a) $a_1 = 1^2 - 1 + 41 \rightarrow a_1 = 41$

b) $251 = n^2 - n + 41 \rightarrow n^2 - n - 210 = 0$

Utilizando Bhaskara, temos:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-210) = 1 + 840 \rightarrow \Delta = 841$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{841}}{2 \cdot 1} \rightarrow$$

$$\rightarrow n_1 = \frac{1+29}{2} \rightarrow n_1 = \frac{30}{2} \rightarrow n_1 = 15$$

$$\rightarrow n_2 = \frac{1-29}{2} \rightarrow n_2 = \frac{-28}{2} \rightarrow n_2 = -14$$

Como n é natural, temos: n = 15. Portanto, é o décimo quinto termo.

9. D

$$\sqrt{x^2 - 7x + 12} = 2\sqrt{3} \rightarrow \left(\sqrt{x^2 - 7x + 12}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 7x + 12 = 12 \rightarrow x^2 - 7x = 0$$

Utilizando a fatoração, temos:

$x \cdot (x - 7) = 0$

$x = 0$ ou $x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$

Portanto, $S = \{0, 7\}$

10. C

Dividindo a sentença $3x^2 + 9x - 120 = 0$ por 3 e aplicando a fórmula de Bhaskara, temos:

$x^2 + 3x - 40 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2 \cdot 1} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3+13}{2} \rightarrow x_1 = \frac{10}{2} \rightarrow x_1 = 5 \\ x_2 = \frac{-3+13}{2} \rightarrow x_2 = \frac{-16}{2} \rightarrow \end{cases}$$

$\rightarrow x_2 = -8$

11. A

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (x-3)^2$$

$x + 3 = x^2 - 6x + 9$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

utilizando a soma e o produto das raízes, temos:

$x = 1$ ou $x = 6$

Como a raiz quadrada é um número positivo ou nulo, tem-se $x \geqslant 3$.

Então, $S = \{6\}$.

12.

a) Temos que $29^2 = 21^2 + 20^2 \rightarrow 841 = 441 + 400.$

Logo, (20, 21, 29) é uma tripla pitagórica.

b) $(n + 5)^2 = (n + 3)^2 + n^2 \rightarrow n^2 + 10n + 25 = n^2 + 6n + 9 - n^2 \rightarrow n^2 - 4n - 16 = 0$

Utilizando Bhaskara, temos:

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow$$

$$\rightarrow n = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} \rightarrow$$

$$\rightarrow n = \frac{4 \pm \sqrt{16+64}}{2} \rightarrow n = \frac{4 \pm \sqrt{80}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow n_1 = \frac{4 + \sqrt{16 \cdot 5}}{2} \rightarrow n_1 = \frac{4 + 4\sqrt{5}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow n_1 = \frac{4 \cdot \left(1+\sqrt{5}\right)}{2} \rightarrow n_1 = 2\left(1+\sqrt{5}\right)$$

ou

$$n_2 = \frac{4-\sqrt{16\cdot 5}}{2} \to n_2 = \frac{4-4\sqrt{5}}{2} \to$$

$$\to n_2 = \frac{4\cdot(1-\sqrt{5})}{2} \to n_2 = 2(1-\sqrt{5})$$

Logo, não há número inteiro n que constitua uma tripla pitagórica para a sequência dada.

13. B

(V) $2\varphi = 1+\sqrt{5}$

$x^2 = x+1 \to x^2 - x - 1 = 0$

Utilizando Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \to x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1} \to$$

$$\to x = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} \to x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \to \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Como $\varphi > 0$, temos $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \to 2\varphi = 1+\sqrt{5}$

(F) O número de ouro φ pode ser expresso como um quociente de números inteiros não nulos.

O número de ouro é um número irracional; portanto, não pode ser expresso como um quociente de números inteiros não nulos.

(V) $\varphi^{-1} = \varphi - 1$

$$\varphi^2 = \varphi+1 \to \frac{\varphi^2}{\varphi} = \frac{\varphi+1}{\varphi} \to \varphi = 1+\frac{1}{\varphi} \to 1+\varphi^{-1} \to$$

$\to \varphi^{-1} = \varphi - 1.$

(F) φ não pode ser expresso por meio de uma equação, por ser derivado de uma relação geométrica.

O número de ouro pode ser expresso como raiz da equação $x^2 + 1$, conforme enunciado.

14. D

(V) Para todo $m > 2$, a equação tem conjunto solução vazio.

$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot (m + 2) \cdot (m + 1)$

$\Delta = 4m^2 - 4 \cdot (m^2 - m + 2m - 2)$

$\Delta = 8 - 4m$

A equação dada terá como solução o conjunto vazio.

$8 - 4m < 0 \to 4m > 8 \to m > 2$

(F) Existem dois valores reais de m para que a equação admita raízes iguais.

Para que a equação admita duas raízes reais e iguais, devemos ter:

$8 - 4m = 0 \to 4m = 8 \to m = 2$

(F) Na equação, se $\Delta > 0$, então m só poderá assumir valores positivos.

$8 - 4m < 0 \to 4m < 8 \to m < 2$

Portanto, existem números negativos nesse intervalo.

15. D

Sejam x o número de alunos e y o valor de cada aluno; temos as duas situações:

$$\begin{cases} \dfrac{3600}{x} = y & \text{(I)} \\ \dfrac{3600}{x-8} = y + 75 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, temos:

$$\frac{3600}{x-8} = \frac{3600}{x} + 75 \to \frac{3600\cdot x}{x\cdot(x-8)} =$$

$$= \frac{3600}{x\cdot(x-8)} + \frac{75\cdot x\cdot(x-8)}{x\cdot(x-8)} \to$$

$\to -75x^2 + 600x + 28\,800 = 0$

Dividindo a equação por 75, temos:

$-x^2 + 8x + 384 = 0$

Aplicando soma e produto, temos:

$x = -16$ ou $x = 24$

Logo, o total de alunos da turma é 24.

16.

a) $x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) \to \Delta = 1 + 8 \to \Delta = 9$

$$= \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \to x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1} \to x = \frac{1\pm3}{2} \to$$

$$\to \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} \end{cases}$$

Portanto, $S = \{-1, 2\}$

b) $\sqrt{x^2+3x+6} = 2x \to \left(\sqrt{x^2+3x+6}\right)^2 = (2x)^2 \to$

$\to x^2 + 3x + 6 = 4x^2 \to 4x^2 - x^2 - 3x - 6 = 0 \to$

$\to 3x^2 - 3x - 6 = 0$

Usando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \to$$

$$\to x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot3\cdot(-6)}}{2\cdot3} \to$$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+81}}{6} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm 9}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+9}{6} = \dfrac{12}{6} = 2 \\ x_2 = \dfrac{3-9}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

Como a raiz quadrada é positiva ou nula, tem-se $x > 0$.

Portanto, $S = \{2\}$.

17. C

$x = \sqrt{3x + a^2 + 3a} \rightarrow x^2 = 3x + a^2 + 3a \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 3x - (a^2 + 3a) = 0$

Utilizando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a^2 - 3a)}}{2 \times 1} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4a^2 + 12a}}{2} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(2a+3)^2}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3 \rightarrow (2a+3)}{2} \rightarrow x = a + 3 \text{ ou } x = -a.$$

Como $a + 30 < 0$, concluímos que $x = -a$ é a única solução, pois $x \geqslant 0$.

Portanto, o conjunto solução possui apenas uma solução, $x = -a$, contrariando a afirmação I.

Para $a < -3$, temos $-a$ maior que 3. Logo, as afirmações II e III estão corretas.

Estudo para o Enem

18. B

Se um aluno errou apenas o termo independente da equação, ou seja, o coeficiente c, e encontrou como raízes os números 2 e -14, então é correto afirmar que a soma das raízes é -12.

Se o outro aluno, na resolução da mesma equação do 2º grau, errou apenas o coeficiente do termo de 1º grau, ou seja, o coeficiente b, e encontrou como raízes os números 2 e 16, então é correto afirmar que o produto das raízes é 32.

Portanto, as raízes dessa equação são -8 e -4.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. B

Assumindo que:

$I = 300$ livros

$n =$ número de prateleiras

$x =$ livros por prateleiras

Assim, temos:

$$x = \frac{I}{n} \rightarrow x = \frac{300}{n}.$$

Como os livros foram divididos em 3 prateleiras a menos e a cada prateleira foram adicionados 5 livros, então, temos:

$$\frac{300}{n-3} = x + 5 \rightarrow \frac{300}{n-3} = \frac{300}{n} + 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{60}{n-3} = \frac{60}{n} + 1 \rightarrow 60n = 60 \cdot (n-3) + n^2 - 3n \rightarrow$$

$\rightarrow n^2 - 3n - 180 = 0$

Utilizando a soma e o produto das raízes, temos:

$n = 15$ ou $n = -12$.

Como n é natural não nulo, então $n = 15$.

Portanto, n é múltiplo de 3.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. C

A área do *outdoor* A_{out} é dada pelo produto dos lados do retângulo. Então:

$$A_{out} = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{21}{1} = 21 \rightarrow 21 \text{ m}^2.$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

9 INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE FUNÇÕES

Comentário sobre o módulo

Este módulo inicia o estudo sobre funções – das noções básicas de representação de uma função até a análise detalhada de gráficos, bem como determinação de domínio, imagem e contradomínio.

Uma sequência de exercícios propostos e de aplicação, os quais podem ser resolvidos pelo professor em sala de aula e os demais encaminhados para resolução extraclasse, finaliza o módulo.

No momento da resolução de exercícios, acreditamos no enfoque em questões de contexto mais abrangente, ou seja, contextualizadas, como as apresentadas no Enem e nas principais instituições de ensino espalhadas pelo Brasil.

Para ir além

O professor tem total autonomia na preparação e no desenvolvimento de suas aulas. Mas entendemos também que objetos auxiliadores são sempre bem-vindos.

A utilização de objetos digitais de aprendizagem no ensino proporciona uma formação continuada de qualidade, que potencializa a aprendizagem significativa. Tão importante quanto o uso adequado de objetos educacionais para o ensino e a aprendizagem são a escolha dos ambientes utilizados e a forma de apoio dada aos alunos a serem capacitados.

Existem vários *softwares* disponibilizados gratuitamente pelo MEC na Rived (Rede Internacional Virtual de Educação). Professores e alunos podem acessar, fazer *download* e utilizar todos os recursos disponíveis.

Acesse: <*http://rived.mec.gov.br/*>.

Exercícios propostos

7. E

São irracionais $\sqrt{2}$ e π. Logo, $f(\sqrt{2}) = f(\pi) = 0{,}75 = \frac{3}{4}$ e $f\left(\frac{3}{5}\right) = 0{,}4 = \frac{2}{5}$. Portanto,

$$\frac{f\left(\sqrt{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)}{f(\pi)} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{15}{20}+\frac{8}{20}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{13}{20}}{\frac{3}{4}} = \frac{23}{20}\cdot\frac{4}{3} = \frac{23}{15}$$

8. C

$65 = 160 \cdot 2^{-0{,}8 \cdot t} + 25 \rightarrow 65 - 25 = 160 \cdot 2^{-0{,}8 \cdot t} \rightarrow$
$\rightarrow 40 = 160 \cdot 2^{-0{,}8 \cdot t} \rightarrow \frac{40}{160} = 2^{-0{,}8 \cdot t} \rightarrow$
$\rightarrow \frac{1}{4} = 2^{-0{,}8 \cdot t} \rightarrow \frac{1}{2^2} = 2^{-0{,}8 \cdot t} \rightarrow 2^{-2} = 12^{-0{,}8 \cdot t} \rightarrow$
$\rightarrow -2 = 0{,}8 \cdot t \rightarrow t = \frac{2}{0{,}8} \rightarrow t = \frac{20}{8} \rightarrow t = 2{,}5$, ou seja, 2,5 min.

9. B

Nessa função cada boi reage à medicação, ou seja, cada número natural não nulo indica um boi que se associa com 1 (reação positiva) ou com zero (reação negativa).
Portanto, $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 51\}$.

10. $F(X) = C \cdot 0{,}8^x$

$40\,000 \cdot 0{,}8^x = 0{,}512 \cdot 4\,000$

$0{,}8^x = 0{,}512$

$\left(\frac{8}{10}\right)^x = \frac{8^3}{10^3}$

$\left(\frac{8}{10}\right)^x = \left(\frac{8}{10}\right)^3$

$x = 3$

Logo, $x = 3$ anos.

11. B

Como as estátuas estão dispostas simetricamente em relação ao eixo Oy, temos que a estátua Naum, situada no ponto J, e a estátua de letra I têm mesma ordenada e abscissas opostas. Portanto, suas coordenadas são $(-10, -1)$.

12. B

$f(x) = 5$ indica os elementos de *A* cujos algarismos das unidades é 5. São eles: 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95.

13. B

Analisando o gráfico, no eixo y, a metade da diferença entre valores consecutivos é $\frac{7{,}5}{2} = 3{,}75$. Então, tem-se que o valor médio entre 26,2 e 33,7 é 29,95 (26,2 + 3,75). Os segmentos azuis, indicativos dos índices pluviométricos em cada respectiva data, que têm medidas verticais maiores que 29,95, são: 10/01; 16/01; 18/01; 11/02. Portanto, 4 dias.

14. a) $I = \frac{M}{h^2} = \frac{64}{(1{,}6)^2} = \frac{64}{2{,}56} = 25$. A mulher está levemente obesa.

b) Para que o homem não seja considerado obeso, seu índice de massa corporal máximo é 30. Daí vem: $30 = \frac{97{,}2}{h^2} \rightarrow h^2 = 3{,}24 \rightarrow h = 1{,}8$ m.

15. B

Analisando as alternativas, com relação ao valor absoluto da variação do nível de água em cada intervalo apresentado, temos:

a) 200 cm;
b) 300 cm;
c) 0 cm;
d) 100 cm;
e) 200 cm.

16. Analisando o gráfico, temos: $y = a^x \rightarrow 0{,}2 = a^1 \rightarrow \rightarrow a = 0{,}2$.

Portanto, para $x = -0{,}5$, vem:

$$y = (0{,}2)^{-0{,}5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-0{,}5} = 5^{0{,}5} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}\,.$$

17. B

A primeira relação não é uma função, pois Carlos e Juca têm mais de um filho. A segunda relação é uma função, pois cada filho tem um único pai. A terceira relação não é uma função, pois cada filho tem mais de um primo.

Estudo para o Enem

18. A

Podemos observar no gráfico que o carro estava com velocidade zero em dois momentos. Portanto, ele parou em 2 semáforos.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. B

Temos que a função correspondente à conta de telefone é constante em R$ 12,00 quando há até 100 ligações por mês; crescente de 101 até 300 ligações e constante em R$ 32,00, quando há de 300 até 500 ligações.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. C

Observando cada gráfico, conclui-se que com 30 reais:

Plano A: terá direito a exatamente 20 minutos de chamadas mensais;

Plano B: não terá direito a nenhum minuto de chamadas mensais, pois nesse plano o preço é fixo de 50 reais;

Plano C: terá direito a exatamente 30 minutos de chamadas mensais;

Plano D: não terá direito a nenhum minuto de chamadas mensais, pois nesse plano o preço inicial é de 30 reais;

Plano E: terá direito a uma quantidade entre 20 e 30 minutos de chamadas mensais.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

10 PROPORCIONALIDADE E FUNÇÃO LINEAR

Comentários sobre o módulo

O módulo visa apresentar o conceito matemático de grandezas proporcionais e a correlação entre função linear e grandezas diretamente proporcionais. Será de grande valia destacar que não há equivalência entre funções crescentes/grandezas diretamente proporcionais e funções decrescentes/grandezas inversamente proporcionais. Buscar exemplos contextualizados ajuda bastante a evidenciar tais fatos.

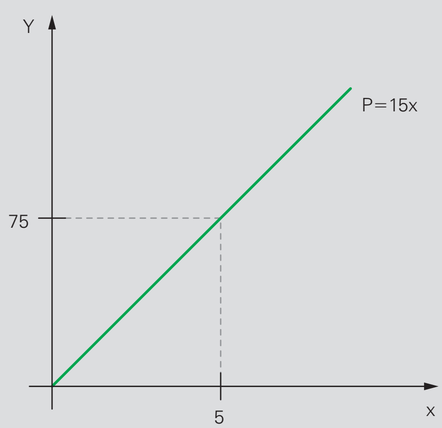
Ressaltamos que a escolha dos exercícios e sua ordenação, apesar do caráter particular, têm o propósito de auxiliar no entendimento e no domínio dos conteúdos abordados.

Exercícios propostos

7. a) De acordo com o enunciado: $30 = k \cdot 2 \rightarrow$ $\rightarrow k = 15$.

$F = 15 \cdot 5 = 75$ N

b)



8. D

Seja x o número de candidatas:

$x + 3x = 120 \rightarrow 4x = 120 \rightarrow x = \dfrac{120}{4} \rightarrow x = 30.$

Logo, havia 90 candidatos e 30 candidatas. Foram contratados 15 mulheres e 60 homens. Portanto, a quantidade de homens não contratados foi de $90 - 60 = 30$.

9. A

Do enunciado, temos: $x \cdot y = k \rightarrow 6 \cdot 10 = k \rightarrow$ $\rightarrow k = 60$.

$60 = 4 \cdot y \rightarrow y = \dfrac{60}{4} \rightarrow y = 15.$

10. Sendo d a distância percorrida pelo carro, em metros, até parar, e sendo v a velocidade do automóvel, em km/h, quando os freios são acionados, temos:

$$\frac{d}{v^2} = k \rightarrow \frac{7}{35^2} = k \rightarrow k = \frac{1}{175} \rightarrow \frac{1}{175} = \frac{d}{70^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow d = \frac{4900}{175} = \frac{700}{25} = 28 \rightarrow 28 \text{ metros.}$$

11. B

Sejam x e y os valores recebidos na divisão dos lucros pelo primeiro e segundo sócios, respectivamente, do enunciado vem:

$$\frac{x}{18\,000} = \frac{y}{23\,000} = k \rightarrow x = 18\,000k;\ y = 23\,000k$$

$$x + y = 5000 \rightarrow 18\,000k = 23\,000k = 5000 \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \frac{5000}{41000} \rightarrow k = \frac{5}{41}$$

Portanto, $y - x = 5000k \rightarrow x - y = 5000 \cdot \dfrac{5}{41} \rightarrow$

$$\rightarrow y = \frac{25\,000}{41} \cong 609 \rightarrow \text{R\$ } 609{,}00.$$

12. B

Sejam x, y e z a massa de mamão, maçã e banana, respectivamente, do enunciado vem:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k \rightarrow x = 3k;\ y = 4k;\ z = 5k$$

$$x + y + z = 15 \rightarrow 12k = 15 \rightarrow k = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Portanto, $5k = 5 \cdot 1{,}25 = 6{,}25$.

13. B

Sejam x, y, z, w e v as áreas de lazer, em m^2, de cada residência, em ordem crescente de suas áreas, do enunciado temos:

$$\frac{x}{102} = \frac{y}{110} = \frac{z}{112} = \frac{w}{116} = \frac{v}{120} = k \rightarrow x = 102k;$$

$y = 100k;\ z = 112k;\ w = 116k;\ v = 120k$

$$x + y + z + w + v = 84 \rightarrow 102k + 110k + {} + 112k + 116k + 120k = 84 \rightarrow 560k = 84 \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \frac{84}{560} = \frac{3}{20}$$

Portanto, $y = 110k \rightarrow y = 100 \cdot \dfrac{3}{20} \rightarrow$

$$\rightarrow y = \frac{330}{20} = \frac{33}{2} = 16{,}5$$

14. A quantidade de impressoras (m) e o número de horas trabalhadas (n) são grandezas inversamente proporcionais. Então:

$m \cdot n = k$ (constante) $\rightarrow 4 \cdot 2{,}5 = 2 \cdot n \rightarrow$ $\rightarrow n = \dfrac{10}{2} \rightarrow n = 5$. Ou seja, duas impressoras, em 5 horas de trabalho, conseguem imprimir 600 cartazes. Logo, para imprimir 1800 cartazes, essas 2 impressoras gastam 15 horas.

15. D

A quantidade de máquinas e o número de horas trabalhadas (n) são grandezas inversamente proporcionais. Então:

$$20 \cdot (6 \cdot 12) = 15 \cdot n \rightarrow n = \frac{20 \cdot 6 \cdot 12}{15} \rightarrow n = 96.$$

Ou seja, 15 máquinas produzirão 6 000 peças em 96 horas.

O número de peças produzidas é diretamente proporcional ao número de horas trabalhadas (m).Então:

$$\frac{6\,000}{96} = \frac{4\,000}{m} \rightarrow m = \frac{4\,000 \cdot 96}{6\,000} \rightarrow m = 64.$$

Ou seja, 15 máquinas produzirão 4 000 peças em 64 horas. Trabalhando 4 horas a menos por dia, o número de dias é

$$\frac{64}{12-4} = \frac{64}{8} = 8, \text{ ou seja, 8 dias.}$$

16. B

I. Verdadeira, pois, para ingestões de até 20 mg/dia, ou seja $x \geqslant 20$, tem-se a representação gráfica da função linear
$y = \frac{18}{20}x \rightarrow y = \frac{9}{10}x$.
Então: $\frac{y}{x} = 0{,}9$ (constante). Logo, a absorção (y) é proporcional à ingestão (x).

II. Falsa, para ingestões acima de 20 mg/dia, ou seja, $x > 20$. A razão $\frac{y}{x} = \frac{180}{x}$ não é constante pelo fato de x ser variável.

III. Verdadeira, pois, sendo $x > 20$, a razão $\frac{y}{x} = \frac{180}{x}$ decresce à medida que x cresce.
Ou seja, quanto maior a ingestão (x), menor a porcentagem (razão) que indica a absorção.

IV. Verdadeira, pois a absorção e a ingestão não são proporcionais. Veja que 18 mg/dia é a máxima absorção, então, a partir desse ponto, não aumenta, mas a ingestão, sim.

17. Sendo x, y e z a produtividade de Juca, Alex e Silvio, respectivamente, temos:

$$x = \frac{20}{4 \cdot 3} + \frac{15}{2 \cdot 8} = \frac{20}{12} + \frac{15}{16} = \frac{80}{48} + \frac{45}{48} = \frac{125}{48} = \frac{250}{96}.$$

Ou seja, Juca consegue construir 250 cadeiras em 96 horas. Como trabalhará 6 horas por dia, levará $\frac{96}{6} = 16 \rightarrow 16$ dias.

Estudo para o Enem

18. B

Valor pago pelo consumidor: $12{,}60 \cdot 2{,}5 = 31{,}50 \rightarrow$ $\rightarrow$ R\$ 31,50.

Preço real do kg do peixe: $\frac{31{,}50}{2{,}5-0{,}2-0{,}2} = \frac{31{,}50}{2{,}1} =$ $= \frac{315}{21} = 15 \rightarrow$ R\$ 15,00/kg.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. E

No claro, temos: $m_1 = \frac{y}{x} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = 4$.

No escuro, temos: $m_2 = \frac{y}{x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = 2$.

Logo, $m_1 = 2m_2$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

20. C

Seja P o preço e A, a área da pizza, temos:

$$\frac{P}{A} = k \text{ (constante)} \rightarrow k = \frac{36}{100\pi} = \frac{P}{225\pi} \rightarrow$$
$$\rightarrow P = \frac{225\pi \cdot 36}{100\pi} = 81 \rightarrow \text{R\$ } 81{,}00.$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

11 FUNÇÃO AFIM

Comentário sobre o módulo

Comente com os alunos sobre problemas reais envolvendo funções. Instigue-os a pensar em uma situação que poderia ser representada por uma função afim decrescente, como a desvalorização de um automóvel ou o esvaziamento de uma caixa-d'água com o passar do tempo, sempre relacionando as leis das funções aos seus gráficos. Apresentar a aplicação do zero da função facilita a compreensão dos alunos. Utilize um gráfico de uma função. Por exemplo, de uma conta bancária com saldo negativo que recebe um depósito por mês. Analisem em qual mês o saldo ficou em zero.

Para ir além

Acesse o software Equation Grapher, disponível em:

<http://ultradownloads.com.br/download/Equation-Grapher/>

Então, explore propriedades das funções apresentadas no material. É possível inserir até 12 funções num mesmo gráfico, o que pode facilitar o estudo dos coeficientes e sinais das funções.

Outro software para resolução de problemas e visualização de dados pode ser acessado no link:

<http://www.wolframalpha.com/>

Exercícios propostos

7. D

Do gráfico do Sr. Luiz o coeficiente a é calculado por:

$\frac{100-80}{25-15} = \frac{20}{10} = 2$. Ou seja, 2 reais/metro. Logo, a alternativa C é incorreta.

Para determinar a parte fixa (coeficiente b) cobrada pelo Sr. Luiz, podemos utilizar um ponto de coordenadas conhecidas de seu gráfico e substituí-lo na expressão algébrica que a representa. Utilizando o ponto (15, 80), temos:

$2 \cdot 15 + b = 80 \rightarrow 30 + b = 80 \rightarrow b = 50$.

Portanto, a parte fixa cobrada pelo Sr. Luiz é de R$ 50,00. Logo, alternativa A é incorreta.

Para 20 metros de fio:

- O preço do Sr. Luiz é $2 \cdot 20 - 50 = 40 + 50 = 90 \rightarrow$ R$ 90,00.
- O preço do Sr. José é $4{,}5 \cdot 20 = 90 \rightarrow$ R$ 90,00.

8. A

Temos que, se cada carro parte com um intervalo de 15 minutos, e que há 24 intervalos entre o primeiro e vigésimo quinto carro, então, até que o último carro parta, temos um tempo de:

$15 \cdot 24 = 360 \rightarrow 360$ minutos = 6 horas.

Se o primeiro carro partiu às 7 horas, o último carro saiu às 13h (7h + 6h = 13 h).

9. E

Analisando o problema, temos uma função afim $y = a \cdot x + b$, com $a = 750$ e $b = 360$; x e y indicam, respectivamente, a quantidade de dias após o derramamento e a taxa de concentração de hidrocarbonetos.

Assim, 27 dias após o derramamento, temos:

$750 \cdot 27 + 360 = 20\,250 + 360 = 20\,610 \rightarrow$ $\rightarrow 20\,610$ ppm.

10. O gráfico da função g passa pela origem. Logo, g é uma função linear cujo formato algébrico é $g(x) = ax$. Como A pertence à reta que representa a função f, temos: $y = -2 + 3 \rightarrow y = 1$. Logo, A (2,1). Calculando o coeficiente a, já que A também pertence à reta que representa a função b, temos: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$.

Portanto, $g(x) = \frac{1}{2}x$.

11. B

Sendo $f(t) = a \cdot t + b$ a função que fornece o percentual de reflexão do asfalto, em função do tempo *t*, temos então que:

$f(0) = a \cdot 0 + b = 10 \rightarrow b = 10$

$f(6) = 16 \rightarrow a \cdot 6 + 10 = 16 \rightarrow a = 1$

$f(t) = t + 10$

Analogamente, sendo $g(t) = m \cdot t + n$ a função de reflexão do concreto:

$g(0) = 35 \rightarrow m \cdot 0 + n = 35 \rightarrow n = 35$

$g(6) = 25 \rightarrow m \cdot 6 + 35 = 25 \rightarrow m = -\frac{5}{3}$

$g(t) = -\frac{5}{3}t + 35$

As pistas novas, uma de concreto e outra de asfalto, atingirão a mesma porcentagem de reflexão dos raios solares, quando $f(t) = g(t)$:

$t + 10 = -\frac{5}{3}t + 35 \rightarrow 3t + 30 = -5t + 105 \rightarrow$

$\rightarrow 8t = 75 \rightarrow t = \frac{75}{8} = 9{,}375$.

12. E

Sendo f_A e f_B os preços, respectivamente, dos planos A e B para t minutos de conexão mensal, temos: $f_A(t) = 0{,}05 \cdot t + 15$ e $f_B = 0{,}02 \cdot t + 40$.

Analisando as alternativas:

a) Falsa, pois existe t de modo que $f_A(t) = f_B(t) \rightarrow$ $\rightarrow 0{,}03t = 25 \rightarrow t = \frac{2500}{3}$.

Ou seja, para $\frac{2500}{3}$ minutos de conexão, a escolha do plano é indiferente.

b) Falsa, pois $f_A(60 \cdot 30) = 0,05 \cdot 60 \cdot 30 + 15 = 105$ e $f_B(60 \cdot 30) = 0,02 \cdot 60 \cdot 30 + 40 = 76$.

Logo, mais vantajoso é o B.

c) Falsa (vide justificativa do item a).

d) Falsa, pois $f_A(900) = 0,05 \cdot 900 + 15 = 60$ e $f_B(900) = 0,02 \cdot 900 + 40 = 58$. Logo, mais vantajoso é o B.

e) Verdadeira (vide justificativa do item anterior).

13. C

$f(t) = a \cdot t + b$

$$a = \frac{1150 - 1000}{9} = \frac{150}{9} = \frac{50}{3}$$

b = 1000 (intersecção com o eixo y)

$$f(22,5) = \frac{50}{3} \cdot 22,5 + 1000 = 375 + 1000 = 1375.$$

14. Sendo y o valor, em reais, de uma corrida de táxi que tenha percorrido x km, tem-se $y = a \cdot x + b$. Calculando os coeficientes a e b, vem:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{32 - 23}{10 - 7} = \frac{9}{3} = 3;$$

$23 = 3 \cdot 7 + b \rightarrow 23 = 21 + b \rightarrow b = 2$. Portanto, $y = 3 \cdot x + 2$.

Para uma corrida de 90 km, temos: $y = 3 \cdot 90 + 2 = 272$. O rendimento de R$ 272,00 aplicado à taxa de 10% ao mês é $0,1 \cdot 272 = 27,2 \rightarrow 27,2$ reais. Calculando a quantidade de quilômetros que é possível percorrer com 27,2 reais:

$$27,2 = 3 \cdot x + 2 \rightarrow x = \frac{25,2}{3} = 8,4.$$

15. D

A área da região em cinza é dada por:

$$y = A(x) = a^2 - 2 \cdot \left(\frac{a \cdot (a - x)}{2}\right) = a^2 - a^2 + ax \rightarrow$$

$\rightarrow y = ax$, cujo gráfico é uma reta.

16. C

Como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é constante, o gráfico do comprimento (C) da parte não queimada do fósforo em função do tempo (t) é um segmento de reta cuja representação algébrica segue o modelo matemático: $C = a \cdot t + b$. Sendo $a = \frac{10 - 10,5}{3 - 0} = -\frac{0,5}{3}$ e $b = 10,5$.

Portanto, quando o comprimento for igual a zero, teremos:

$$0 = -\frac{0,5}{3}t + 10,5 \rightarrow t = \frac{10,5 \cdot 3}{0,5} = 63 \rightarrow$$

$\rightarrow$ 63 segundos. Ou seja, 1 minuto e 3 segundos.

17. A

Como a porcentagem varia linearmente de acordo com o tempo, o modelo matemático que descreve a situação é $y = a \cdot x + b$. Sendo a porcentagem (y); o tempo (x) e a, b coeficientes reais, do enunciado, temos:

$0,6 = a \cdot 0 + b \rightarrow b = 0,6$ e $0,85 = a \cdot 10 + 0,6 \rightarrow 10 \cdot a = 0,25 \rightarrow a = 0,025$

Portanto, $y = 0,95 \rightarrow 0,025x + 0,6 = 0,95 \rightarrow 0,025x = 0,35 \rightarrow x = \frac{350}{25} \rightarrow x = 14$.

Então, a porcentagem é de 95%, após 14 anos contados do atual ano. Ou seja, 2018 + 14 = 2032.

Estudo para o Enem

18. D

Seja x o tempo do 1º corredor; (x − 15) o tempo do 2º corredor; (x − 20), o tempo do 3º corredor; $\frac{3}{4}x$ o tempo do 4º corredor. Desse modo, temos que $x + (x - 15) + (x - 20) + \frac{3}{4}x = 325$.

Portanto: $3x + \frac{3}{4}x = 325 + 25 = 360 \rightarrow \frac{15}{4}x = 360 \rightarrow x = 96 \rightarrow 96$ s. Assim, o tempo do último atleta é de $\frac{3}{4}x = \frac{3}{4} \cdot 96 = 72 \rightarrow 72$ s.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. C

Cada segmento de reta do gráfico é a representação de uma função afim, da forma $y = a \cdot x + b$, cujo coeficiente (a) indica a vazão de água.

No segmento contido no intervalo $0 \leqslant t \leqslant 1$, temos $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\,000 - 6\,000}{1 - 0} = -1000$. Portanto, a primeira bomba tem vazão de 1000 litros/hora.

No outro segmento contido no intervalo $1 \leqslant t \leqslant 3$, temos $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 5\,000}{3 - 1} = \frac{-5\,000}{2} = -2\,500$.

Portanto, as duas bombas, trabalhando juntas, têm vazão de 2500 litros/ hora. Sendo v a vazão da segunda bomba: $1\,000 + v = 2\,500 - 1\,000 \rightarrow$ $\rightarrow v = 1\,500 \rightarrow 1\,500$ litros/hora.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

20. A

Seja P a porcentagem do nível de água no reservatório em relação à sua capacidade e t o período de monitoramento, em meses, temos que $P = a \cdot t + b$, sendo $a = \frac{10\% - 30\%}{6 - 1} = \frac{-20\%}{5} =$ $= -4\%$. Ou seja, há perda constante de 4% da capacidade do reservatório a cada mês. Assim, a partir do sexto mês de monitoramento, o reservatório irá zerar se houver perda de 10% da sua capacidade.

Então: $\frac{-10\%}{-4\%} = 2{,}5 \rightarrow 2{,}5$ meses.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

12 FUNÇÃO LINEAR, IDENTIDADE E CONSTANTE

Comentário sobre o módulo

Neste módulo estudam-se as funções linear, identidade e constante. É importante compará-las com a função afim nos aspectos algébrico e gráfico.

Para ir além

No *link* a seguir encontre uma proposta de modelagem matemática para o estudo de funções. O estudo é direcionado para professores do 1º ano do Ensino Médio e pode enriquecer sua prática pedagógica:

<http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Soraya.pdf>

Exercícios propostos

7. B

Como a soma 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 18 + 19 + + 20 é número real, então f(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 18 + 19 + 20) = 25, pois f(x) = 25, para todo x real.

8. D

A máquina sofreu uma desvalorização de $\frac{8\,000}{4} = 2\,000 \to$ R\$ 2.000,00 ao ano. Portanto, após 8 anos de uso, temos uma desvalorização de R\$ 16 000,00.
Assim, o preço da máquina ficará R\$ 40.000 − R\$ 16.000 = R\$ 24.000,00

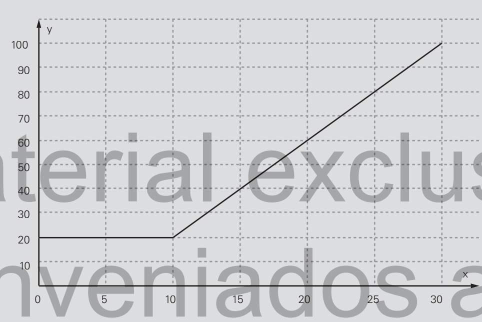
9. D

Seja C(x) o custo, em reais, para uma tiragem de x exemplares da revista, temos:
$g(x) = 4 \cdot x + 100\,000$.

Para o custo de R\$ 200 000, temos: $200\,000 = 4 \cdot x + 100\,000 \to x = 25\,000$.
O custo por exemplar, em reais, para x exemplares é $\frac{C(x)}{x}$. Então, para 5 000 exemplares o custo é: $\frac{4 \cdot 5000 + 100\,000}{5000} = \frac{120\,000}{5000} = 24 \to$ R\$ 24,00.

10. a) A função C(x) é dada por:

$C(x) = 20$ se $0 \leqslant x \leqslant 10$ e $C(x) = 20 + 4x - 40 \to C(x) = 4x - 20$ se $x > 10$. Então:



b) Para x = 4 m³, temos $\frac{C(4)}{4} = \frac{20}{4} = 5 \to 5$ reais por metro cúbico.
Para x = 25 m³ o preço unitário é dado por $\frac{C(25)}{25} = \frac{4 \cdot 25 - 20}{25} = \frac{80}{25} = 3{,}2 \to 3{,}2$ reais por metro cúbico.

11. A partir do primeiro dia ($t \geqslant 1$), e sendo n_1 e n_2 o número de pacientes, respectivamente, atendidos no ambulatório e o de internados em área restrita, temos que $n_1 = t + 16$ e $n_2 = 2t + 5$. A condição $n_1 = n_2$ responde à questão. Então: $t + 16 = 2t + 5 \to t = 11$. Portanto, no décimo primeiro dia.

12. B

Sejam t o número de horas decorridas a partir do instante em que a mãe de João foi ao seu encontro e m e j as distâncias percorridas pela mãe e por João no tempo t, temos: m = 60t e j = (20t 1 0,5).
Haverá o encontro se m = j. Então:

$$60t = 20(t + 0{,}5) \to 40t = 10 \to t = \frac{10}{40} \to t = 0{,}25 \to 0{,}25\text{h} = 15 \text{ min}$$

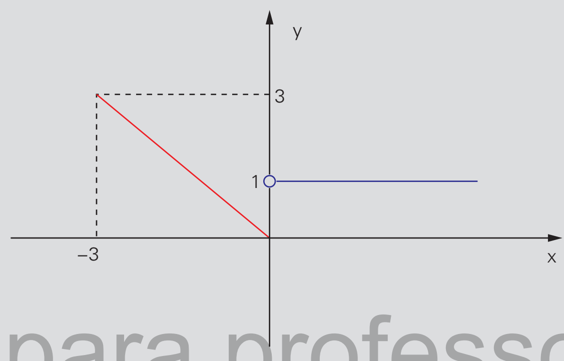
Logo, a distância em que ocorre o encontro é $m = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15 \to 15$ km.

13. A

Temos uma função linear em $0 \leqslant x \leqslant 2$ e constante em k em $2 < x \leqslant 5$. Na função linear, da forma $f(x) = a \cdot x + b$, o coeficiente a é de $\frac{k-0}{2-0} = \frac{k}{2}$.

14. A

Para $-3 \leqslant x \leqslant 0$, temos uma função afim $y = -x$ e, para $x > 0$, uma função constante $y = 1$. Representando graficamente a função afim em vermelho e a constante em azul:



Observando o gráfico, temos: Im = [−3, 0] ∪ {1}.

15. a) $t(23{,}8) = 35 \to a \cdot (23{,}8) + b = 35$ (I)
$t(27{,}3) = 42 \to a \cdot (27{,}3) + b = 42$ (II)

Fazendo (II) − (I), temos: $3{,}5a = 7 \rightarrow a = \frac{7}{3{,}5} \rightarrow$
$\rightarrow a = 2$. Substituindo o valor de a em (II):
$2 \cdot 27{,}3 + b = 42 \rightarrow b = 42 - 54{,}6 \rightarrow b = -12{,}6$

b) Do item a, temos: $t(x) = 2x - 12{,}6 \rightarrow$
$\rightarrow 40 = 2x - 12{,}6 \rightarrow x = \frac{52{,}6}{2} = 26{,}3 \rightarrow 26{,}3$ cm.

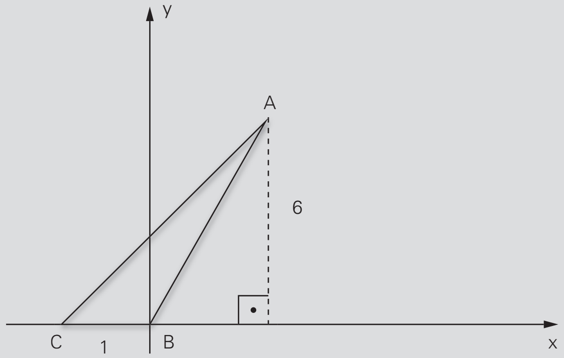
16. C

No primeiro gráfico, temos os pontos (c, c^2) e $(3c, 9c^2)$. No segundo gráfico, temos os pontos (c^2, c^2) e $(9c^2, 9c^2)$. Então, temos que a área do trapézio é dada por:

$$A = 160 \rightarrow \frac{(9c^2 + c^2) \cdot (9c^2 - c^2)}{2} = 160 \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{10c^2 \cdot 8c^2}{2} = 160 \rightarrow 40c^4 = 160 \rightarrow c^4 = \frac{160}{40} \rightarrow$$
$$\rightarrow c^4 = 4 \rightarrow c = \sqrt[4]{4} \rightarrow c = \sqrt[4]{2^2} \rightarrow c = \sqrt{2}$$

17. D

Como A pertence às funções f e g, temos que x_A é a solução de $f(x) = g(x)$. Então: $3x = 2x + 2 \rightarrow x = 2$. Portanto, $x_A = 2$. Substituindo o valor do x_A em uma das funções, obtém-se $y_A = 6$.
x_B e x_C são as raízes, respectivamente, das funções f e g. Portanto, $x_B = 0$ e $x_C = -1$.



Representando o triângulo ABC no plano cartesiano, a área do triângulo ABC é $\frac{1 \cdot 6}{2} = 3$.

Estudo para o Enem

18. D

A função linear que descreve o preço é $P(x) = \frac{3{,}6}{4 \cdot 30}x$, na qual x é o comprimento de papel dos rolos. Então, $P(x) = 0{,}03x$.

Como teremos um desconto de 10%, devemos ter $P'(x) = 0{,}9 \cdot 0{,}03x \rightarrow P'(x) = 0{,}027x$.

Então, o preço da embalagem com 10 rolos de 50 m será $P'(500) = 0{,}027 \cdot 500 \rightarrow P(x) = 13{,}50$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. A

Seja x o valor cobrado pelos dois dias de estacionamento, então $10 + x \leqslant 80 \rightarrow x \leqslant 70$.

Portanto, o valor cobrado por dia de estacionamento deverá ser $\frac{70}{2} = 35 \rightarrow$ R$ 35,00.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

20. A

Plano A: $6 \cdot 500 + 4 \cdot 650 = 3000 + 2600 = 5600$.
Plano B: $6 \cdot 200 + 6 \cdot 650 = 1200 + 3900 = 5100$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

13 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Comentário sobre o módulo

Explore com os alunos os conceitos de função quadrática e como podemos modelar um problema real utilizando-a. Certifique-se do entendimento da definição de uma função quadrática e seus componentes, principalmente a exigência de que o coeficiente a deve ser diferente de zero, para que o aluno perceba que, se a = 0, teremos uma função afim.

O trabalho com o conceito de raiz da função auxilia no entendimento e na construção do gráfico da função. Enfatize que determinar a raiz de uma função f significa encontrar o número real x tal que f(x) = 0.

Para ir além

No *link* a seguir estão disponíveis conceitos e exercícios de funções quadráticas:

<https://pt-pt.khanacademy.org/math/algebra/quadratics>.

Exercícios propostos

7. a) A abscissa do ponto mais alto é o tempo total de carregamento: $x = 120$ min. Como a reta r é o eixo de simetria da parábola, a função quadrática correspondente tem como zeros $x = 0$ e $x = 240$. Assim, a expressão da função tem a forma: $y = ax(x - 240)$.

No ponto mais alto do gráfico, $x = 120$ e $y = 100$. Portanto, $100 = a \cdot 120 \cdot (-120)$, ou seja, $a = \frac{-1}{144}$. Então, $y = \frac{-1}{144} \cdot x \cdot (x - 240)$ para $0 \leqslant x \leqslant 120$.

b) Se $x = 60$ obtemos $y = \frac{-1}{144} \cdot 60 \cdot (60 - 240) = \frac{60 \cdot 180}{144} = 75$. Logo, 75% da carga total.

8. A

No enunciado da questão, tem-se que $t = 6$.

A umidade relativa do ar será
$f(6) = 0{,}4 \cdot 36 - 11 \cdot 6 + 92 = 40{,}4$.
Logo, $f(6) > 40\%$.

9. C

O ponto A de abscissa 8, ou seja, $x_A = 8$, pertence à parábola. Então:

$y_A = f(8) = 8^2 - 20 \cdot 8 + 98 = 64 - 160 + 98 = 2$

O ponto B de ordenada 7. Ou seja, $y_B = 7$, pertence à parábola. Então:

$7 = x^2 - 20x + 98 \rightarrow x^2 - 20x + 91 = 0$.

Resolvendo a equação do 2° grau pela soma e pelo produto: $x_1 = 7$ e $x_2 = 13$. Pelo gráfico, x_B é o menor valor entre x_1 e x_2, ou seja, $x_B = 7$.

Então, temos que a área do trapézio é dada por

$$A = \frac{(x_A + x_B)\cdot(y_A + y_B)}{2} = \frac{(8+7)\cdot(7-2)}{2} = \frac{15\cdot 5}{2} = \frac{75}{2} = 37{,}5 \rightarrow \text{ 37,5 unidades de área.}$$

10. A representação algébrica da função quadrática é $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Como os pontos A, B e C pertencem à parábola:

$A(0,1) \rightarrow 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 1$

$B(-1, -2) \rightarrow -2 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \rightarrow \rightarrow -2 = a - b + c = -3$ (I)

$C(-2, -7) \rightarrow -7 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \rightarrow \rightarrow -7 = 4a - 2b + 1 \rightarrow 4a - 2b = -8 \rightarrow \rightarrow 2a - b = -4$ (II)

Fazendo (II) − (I): $a = -1$. Substituindo o valor de a em (I): $-1 - b = -3 \rightarrow b = 2$.

Portanto, $y = -x^2 + 2x + 1$.

11. B

Há encontro dos gráficos se $f(x) = g(x)$. Então: $x^2 + 1 = mx \rightarrow x^2 - mx + 1 = 0$.

Como há um único ponto de encontro, a equação do 2° grau tem uma única solução. Ou seja, $\Delta = 0$. Logo, $\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \rightarrow \rightarrow m^2 - 4 = 0 \rightarrow m = -2$ ou $m = 2$.

12. E

Como a curva se assemelha a uma parábola, a função quadrática, da forma $n(t) = at^2 + bt + c$, é aquela que melhor representa o gráfico. O ponto de intersecção do gráfico com o eixo y é igual a zero. Logo, $c = 0$. Como o ponto (2,40) e (4,0) pertence à parábola, temos:

$n(2) = a \cdot 4 + b \cdot 2 = 40 \rightarrow 2a + b = 20$

$n(4) = a \cdot 16 + b \cdot 4 = 0 \rightarrow 4a + b = 0$

Subtraindo as equações: $a = -10$. Substituindo o valor de a na primeira equação: $b = 40$. Assim, $n(t) = -10t^2 + 40t$.

13. B

Do enunciado, temos:

$g(1) = a(1)^2 + b(1) + 3 = 9 \rightarrow a + b + 3 = 9 \rightarrow \rightarrow a + b = 6$ (I) e

$g(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + 3 = 1 \rightarrow \rightarrow a - b + 3 = 1 \rightarrow a - b = -2$ (II)

Somando (I) + (II): $2a = 4 \rightarrow a = 2$. Substituindo o valor de a em (I):

$b = 4$. Logo, $a - b = 2 - 4 = -2$.

14. C

Analisando as alternativas:

a) Falsa, pois a função $y = ax^2 + bx + c$ representará uma parábola se $a \neq 0$.

b) Falsa, pois se $x = 0$, tem-se $y = c$. O gráfico passará pela origem se $c = 0$.

c) Verdadeira, pois se $x = 1$, tem-se
$y = a + b + c = 1$. Portanto, o gráfico passa por $(1,1)$.

d) Falsa, pela conclusão da alternativa C.

e) Falsa, pois a função $y = ax^2 + bx + c$ representará uma reta se $a = 0$.

15. E

Se a parábola que representa função intercepta o eixo x em um único ponto, temos que
$\Delta = 0$. Ou seja, $(-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m - 2) = 0 \rightarrow$ $\rightarrow m^2 - 8m + 16 = 0$. Resolvendo a equação do 2º grau pela soma (s) e produto (p): $s = 8$ e $p = 16$. Então, $m = 4$.

Assim, o valor de y se $x = -1$: $y = 2 \cdot (-1)^2 -$ $- 4 \cdot (-1) + 2 = 2 + 4 + 2 = 8$.

16. E

Seja $y = ax^2 + bx + c$ na qual y indica a temperatura do refrigerador após x minutos de medição, temos:

$a + b + c = 3$ (I)

$4a + 2b + c = 5$ (II)

$9a + 3b + c = 1$ (III)

Fazendo (II) − (I), vem: $3a + b = 2$ (IV).

Fazendo (III) − (II), temos: $5a + b = -4$ (V).

(V) − (IV): $2a = -6 \rightarrow a = -3$.

Substituindo o valor de a em (IV): $-9 + b = 2 \rightarrow$ $\rightarrow b = 11$.

Substituindo o valor de a e b em (I): $-3 + 11 + c = 3 \rightarrow c = -5$.

No início das medições da temperatura ($x = 0$), tem-se: $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -5 \rightarrow -5$°C.

17. B

A função que representa a parábola tem uma única raiz. Logo, a equação $0 = x^2 + kx + (8 - k)$ tem uma única raiz, ou seja, $\Delta = 0$. Então:

$\Delta = 0 \rightarrow k^2 - 4 \cdot (8 - k) = 0 \rightarrow k^2 + 4k - 32 = 0$

Resolvendo pela soma ($s = -4$) e pelo produto ($p = -32$), temos: $k = -8$ ou $k = 4$.

Para $k = -8 \rightarrow y = x^2 - 8x + 16 \rightarrow y = (x - 4)^2$. A raiz dessa função é $x = 4$.

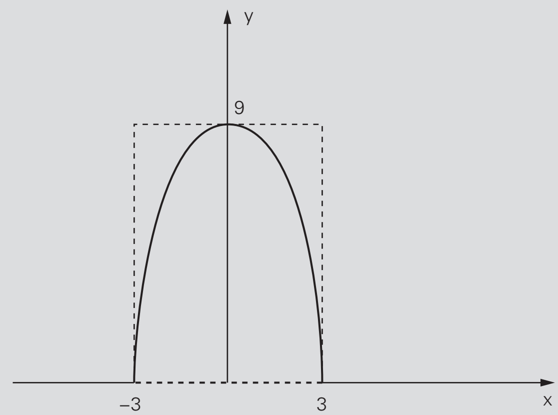
Para $k = 4 \rightarrow y = x^2 + 4x + 4 \rightarrow (x + 2)^2$. A raiz dessa função é $x = -2$.

Como a única raiz é negativa, $y = x^2 + 4x + 4$. O valor de $y = m$ ocorre para $x = 0$. Então $y =$ $= m = 0^2 + 4 \cdot 0 + 4 = 4$.

Estudo para o Enem

18. C

Representando a situação descrita no enunciado no plano cartesiano, temos:



Sendo (A) a área frontal do túnel e (S) a área do retângulo de lados tracejados, conforme o enunciado: A: $\frac{2}{3}$ S = $\frac{2}{3} \cdot (6 \cdot 9) = 36 \rightarrow 36$ m².

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. B

$f(t) = -2t^2 + 120t \rightarrow 1600 = -2t^2 - 120 +$ $+ 1600 = 0 \rightarrow t^2 - 60t + 800 = 0$

Resolvendo a equação pela soma (s) e pelo produto (p), temos:

$s = 60$ e $p = 800$. Logo, $t = 20$ e $t = 40$. Portanto, a segunda dedetização ocorre no 20º dia, ou seja, na primeira ocasião que se tem 1 600 de infectados.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

20. C

Para um desconto de x centavos, o preço do álcool (p), em reais, será $p = 3{,}15 - \frac{x}{100}$, e a quantidade vendida q = 10000 + 100x. O valor arrecadado (V) é dado por V = p · q. Assim:

$$V = \left(3{,}15 - \frac{x}{100}\right) \cdot (10\,000 + 100x) = 31\,500 +$$
$$+ 315x - x^2 = 31\,500 - 215 - x^2.$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

14 MÁXIMOS E MÍNIMOS DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Comentário sobre o módulo

A busca pelos pontos de máximo ou de mínimo da função quadrática tem muitas aplicações. Utilize os exemplos apresentados no módulo para facilitar a compreensão dos alunos.

Para ir além

O site *<https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/mathematical-functions/>* pode ajudar a visualização e resolução de funções.

Exercícios propostos

7. C

Do enunciado, temos: $2 = 1^2 + b \to 1 + c \to b + c = 1$ (I)

$$x_v = \frac{-b}{2} = 2 \to -b = 4 \to b = -4.$$

Retornando o valor de b em (I): c = 5. Substituindo o valor da abscissa do vértice na função que representa a parábola:

$$2^2 - 4 \times 2 + 5 = y_v = n = 4 - 8 + 5 = 1$$

8. D

O maior valor que a dívida atingirá, em bilhões de reais, é y_v. O ano em que isso ocorrerá é x_v. Assim:

$$x_v = \frac{-18}{2 \cdot \frac{(-9)}{2}} = 2$$

Isso corresponde a 2016 + 2 = 2018 e $y_v = D(x) = -\frac{9}{2}(2)^2 + 18 \cdot (2) + 30 \to y_v = 48$

9. D

O maior lucro possível será obtido para x sendo x_v. Como −10 e 50 são raízes (x_1 e x_2) de L, $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-10+50}{2} = 20$.

10.

a) A equação da reta (r) é $y = ax + 2$, pois ela corta o eixo y no ponto y = 2. Como o ponto $(-2, 0) \in r$ $-2a + 2 = 0 \to a = 1$.

Portanto, a equação da reta é $y = ax + 2$.

b) A equação da parábola é $y = ax^2 + bx + c$. Substituindo os pontos dados na expressão, temos:

$$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \to c = 8$$

Como x = 2 e x = 4 são raízes, vem:

$$p = 2 \cdot 4 = \frac{c}{a} = \frac{8}{a} \to a = 1$$

$$s = 2 + 4 = \frac{-b}{a} \to b = -6$$

Portanto, a equação da parábola é $y = x^2 - 6x + 8$.

c) Nos pontos de interseção, tem-se:

$x^2 - 6x + 8 = x + 2 \to x^2 - 7x + 6$.

Portanto, x = 1 ou x = 6.

Substituindo os valores de x na equação da reta ou da parábola, encontramos os pontos de intersecção: (1,3) e (6,8).

11. C

Temos que P é o vértice da parábola que representa a função f. Assim:

$$a = x_v = \frac{-2}{-2} = 1 \text{ e } b = y_v = f(x_v) = -1 + 2 + 8 = 9$$

Então, $g(a) = b \to 3^{-2 \cdot 1+k} = 9 \to 3^{-2 \cdot 1 + k} = 3^2$.

Logo, $-2 + k = 2 \to k = 4$.

12. C

Temos então que $f(3) = 1 + 2^{3-k} = 5 \to 2^{3-k} = 4 = 2^2$. Logo, $3 - k = 2 \to k = 1$ e $g(3) = 6 + b = 5 \to b = -1$.

Portanto, como as raízes são 1 e −1, temos que a abscissa do vértice do gráfico dessa função é a média aritmética das raízes, ou seja, $x_v = \frac{1-1}{2} = 0$.

13. C

Calculando as raízes da função f, vem: $-4x^2 + 8x + 5 = 0$. Resolvendo por Bhaskara, temos:

$$\Delta = 60 + 80 = 144$$

$x = \frac{-8 \pm 12}{-8} \to x = -\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2}$. Logo, $M\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

Como a abscissa do vértice da função g é $\frac{5}{2}$, a média aritmética das raízes de g é igual a $\frac{5}{2}$.

$$\frac{5}{2} = \frac{1+x_2}{2} \to x_2 = 4$$

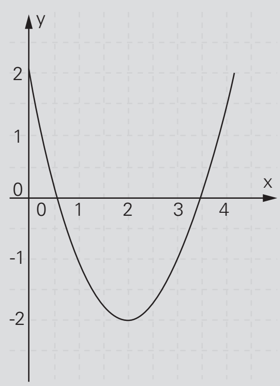
Podemos escrever g da forma fatorada: $g(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$.

Como $g(2) = a(2 - 1)(2 - 4) = 5 \rightarrow a = -\frac{5}{2}$.

Temos que o produto das raízes é dado por $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow 1 \cdot 4 = \frac{c}{\frac{-5}{2}} \rightarrow c = -10$.

14. Conforme o enunciado, o vértice da função f é a forma $(\alpha, -\alpha)$. Assim: $x_v = \frac{4}{2} = 2$ e $y_v = -2 \rightarrow \rightarrow y_v = f(x_v) = f(2) = -2 \rightarrow 4 - 8 + c = -2 \rightarrow \rightarrow c = 2$.

A representação algébrica de f é $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Os pontos A(0,2) (intersecção com eixo y); V(2,−2) (vértice) e B (4,2) (simétrico de A) pertencem ao gráfico de f. Então:



15. B

Calculando as raízes da função f, $-x^2 - x + 2 = 0$.

Portanto, $x = 1$ e $x = -2$.

Logo, $A(-2,0)$ e $E(1,0)$.

Calculando as coordenadas do vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{-2} = -\frac{1}{2}$ e $y_v = \frac{-(1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2)}{4 \cdot (-1)} = \frac{9}{4}$.

Logo, $C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

Dividindo o polígono ABCDE em duas partes iguais, temos $A_{ABCDE} = 2 \cdot A_{CDEP}$, sendo que o F é o ponto de intersecção entre o eixo de simetria da parábola e o eixo x.

$$A_{CDEF} = A_{CDOF(\text{trapézio retângulo})} + A_{OED(\text{triângulo retângulo})} = \frac{\left(2 + \frac{9}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{17}{4} \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{17}{16} + \frac{16}{16} = \frac{33}{16}$$

$$A_{ABCDE} = 2\frac{33}{16} = \frac{33}{8} = 4\frac{1}{8}$$

16. Do enunciado, tem-se $y = 12 - 2x$, sendo $P = x \cdot y$. Então:

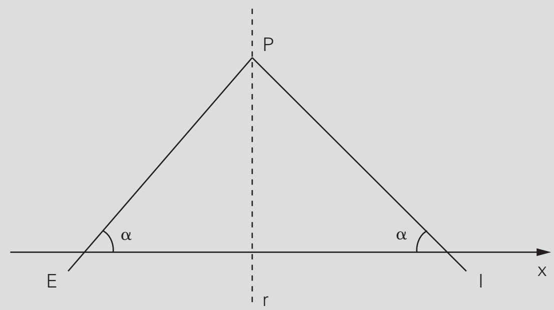
$P(x) = x \cdot (12 - 2x) \rightarrow P(x) = -2x^2 + 12x$.

O produto máximo é a ordenada do vértice da parábola y_v, que representa a função P. Logo,

$y_v = P(x_v) = P\left(\frac{-12}{-4}\right) = P(3) = -2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 = = -18 + + 36 = 18$.

17. B

Do enunciado, conclui-se a figura:



Como o triângulo PEI é isósceles, a reta tracejada (r) que passa por P é perpendicular ao eixo x. Sendo P um ponto da parábola que representa o gráfico de f, temos que r é o eixo de simetria dessa parábola. Portanto, P é vértice. Então: $\alpha = = \frac{-9}{2 \cdot (-1)} = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

Estudo para o Enem

18. B

Sejam P, x e Q, respectivamente, o preço, o desconto (em reais, de cada camiseta) e a quantidade de camisetas vendidas, então: $P = 40 - x$ e $Q = 200 + 10x$.

Sendo R a receita obtida na venda das camisetas, temos:

$R = P \cdot Q \rightarrow R(x) = (40 - x) \cdot (200 + 10x) = = -10x^2 + 200x + 8000$.

A maior receita na venda dessas camisetas é a ordenada do vértice y_v da parábola que representa a função R. Assim:

$R(x_v)R\left(\frac{-200}{-20}\right) = R(10) = -1000 + 2000 + + 8000 = 9000 \rightarrow$ R\$ 9.000,00

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. D

Conforme o enunciado, o maior número possível de bactérias ocorre na temperatura máxima da estufa, que é o y_v da parábola, que representa a função T. Assim:

$$y_v = T(x_v) = T\left(\frac{-22}{-2}\right) = T(11) = -121 + 22 \cdot$$

$$\cdot\, 11 - 85 = -121 + 2 \cdot 121 - 85 = 36 \rightarrow 36°C$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

20. D

A temperatura máxima é o y_v da parábola descrita por f(x). Logo:

$$y_v = f(x_v) = f\left(\frac{-2}{2\left(\frac{-1}{12}\right)}\right) = f\left(\frac{-2}{-\frac{1}{6}}\right) = f(12) = \frac{-144}{12} +$$

$$+ 24 + 10 = 22 \rightarrow 22°C$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

15 INEQUAÇÕES DO 1º E DO 2º GRAU

Comentário sobre o módulo

É de vital importância ressaltar que o estudo sobre inequações (1º e 2º graus) está fundamentado na análise dos sinais da respectiva função. Não menos importante é associar a multiplicação ou divisão da inequação por um número negativo à alteração que esse fato acarreta tanto no aspecto algébrico quanto na representação gráfica.

Exercícios propostos

7.

a) $x \leq \sqrt{5} - 2$

b) Devemos ter $2 + x \geqslant 0 \rightarrow x \geqslant -2$, pois o radicando de uma raiz quadrada é positiva ou nula. Com isso, temos que $2 + x \leqslant 5 \rightarrow x \leqslant 3$. Assim, a solução é $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

c) Tal como no item anterior, temos $x \geqslant -2$. Então:

$2+\sqrt{2+x} \geq 0$

Assim, temos que:

$2+\sqrt{2+x} \leq 5 \rightarrow \sqrt{2+x} \leq 3 \rightarrow \left(\sqrt{2+x}\right)^2 \leq (3)^2 \rightarrow 2+$
$+x \leq 9 \rightarrow x \leq 7$

Logo, a solução será $-2 \leqslant x \leqslant 7$.

d) Analogamente aos itens anteriores, temos $x \geqslant -2$, o que implica em:

$2+\sqrt{2+x} \geq 0$ e $\sqrt{2+\sqrt{2+x}} \geq 0$

Portanto,

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}} \leq 5 \rightarrow \sqrt{2+\sqrt{2+x}} \leq 3 \rightarrow 2+\sqrt{2+x} \leq 9 \rightarrow$
$\rightarrow \sqrt{2+x} \leq 7 \rightarrow 2+x \leq 49 \rightarrow x \leq 47$

Logo, a solução será $-2 \leqslant x \leqslant 47$.

8. D

a) f é crescente no intervalo [a, 0].

Falsa, pois no intervalo [a, c] f é crescente; no intervalo, [c, 0] é decrescente.

b) $f(x) \leqslant f(e)$ para todo x no intervalo [d, b].

Falsa, pois para x no intervalo [d, b] $f(x) \leqslant f(e)$.

c) $f(x) \leqslant 0$ para todo x no intervalo [c, 0].

Falsa, pois para x no intervalo [c, 0] temos $f(x) > 0$.

d) A função f é decrescente no intervalo [c, e].

Verdadeira, pois para x_1 e x_2 no intervalo [c, e] se $x_1 > x_2$ tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.

e) Se $x_1 \in [a, c]$ e $x_2 \in [d, e]$. Então, $f(x_1) < f(x_2)$.

Falsa, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, pois $f(x_1), \geqslant 0$ e $f(x_2) \leqslant 0$.

9. E

Para que o valor de f(x) seja sempre real, temos que ter $x - 1 \geqslant 0 \rightarrow x \geqslant 1$ e $2 - x > 0 \rightarrow x < 2$. Logo, o mais amplo domínio para a função real é [1,2[.

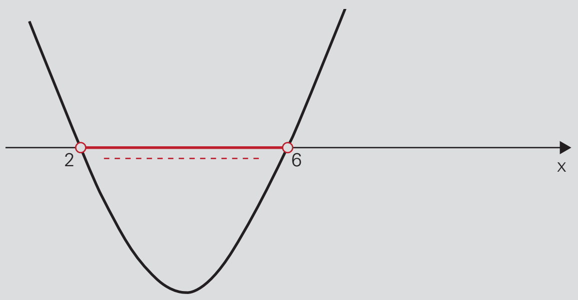
10. C

Temos que $x^2 - 6x < 2x - 12$.

$x^2 - 8x + 12 < 0$

As raízes da função $y = x^2 - 8x + 12$ são $x = -2$ e $x = -6$.

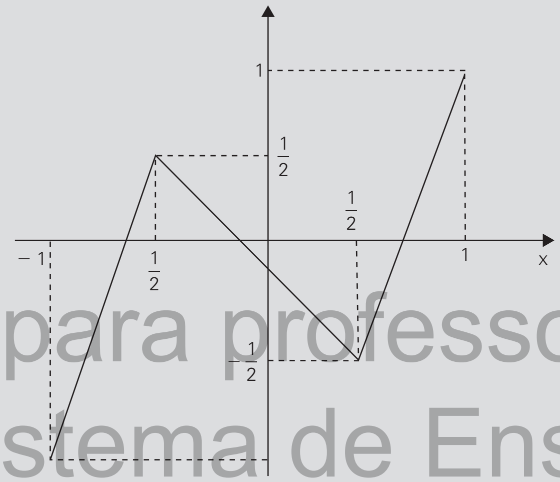
Esboçando o gráfico da função em torno das raízes, vem:



Logo, $y < 0$ no intervalo $2 < x < 6$. Assim, o produto dos valores inteiros no intervalo é de $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

11.

a)



b) Como $\frac{1}{3} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, temos

$f_2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2} f_1\left(\frac{2}{3}\right)$. Como $\frac{2}{3} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, temos

$f_2\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{2}{2} - 2 = 0 \rightarrow f_2\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$

12. D

O valor da ordenada do vértice é dado por

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(9 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4))}{4 \cdot (-2)} = -2{,}875$$

A parábola tem concavidade para baixo, pois $a < 0$.

Portanto, o conjunto imagem é dado por $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y < -2{,}875\}$.

13. B

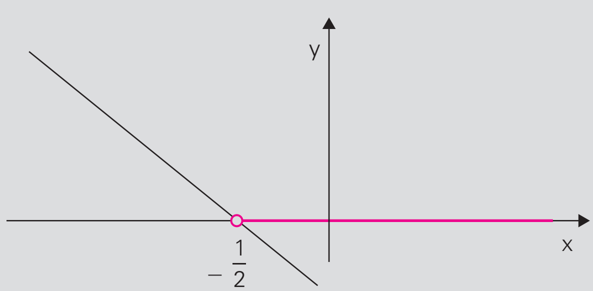
Temos que: $2x - 3 \cdot (2x + 3) < 7 \rightarrow$ $\rightarrow 2x - 6x - 9 < 7 \rightarrow -4x < 16 \rightarrow x > -4$;

$\frac{x-1}{2} - \frac{1-x}{3} < \frac{5}{6} \rightarrow 3x - 3 - 2 + 2x < 5 \rightarrow$ $\rightarrow 5x < 10 \rightarrow x < 2.$

Portanto, $-4 < x < 2$. Os valores inteiros de x são $-3, -2, -1, 0$ e 1.

14. A

Seja $y = ax + b$. Esboçando seu gráfico, conforme inequação e respectiva solução do enunciado, temos:



Como a reta é decrescente, tem-se $a < 0$ e, na sua intersecção com eixo y ($x = 0$), tem-se

$y = b < 0.$

15. E

Como f é decrescente, temos que, se $f(3x - 2) > f(x + 4)$, então $3x - 2 < x + 4 \rightarrow$ $\rightarrow 2x < 6 \rightarrow x < 3.$

Como g é crescente, temos que, se $g(5 - x) <$ $< g(3)$, então $5 - x < 3 \rightarrow -x < -2 \rightarrow x > 2.$

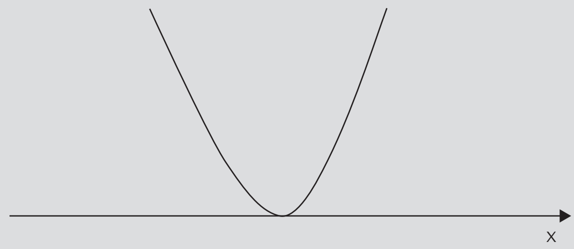
Logo, $2 < x < 3$.

16. A

Os números de estudantes presentes no ônibus pequeno e no grande são 24x e 40y, respectivamente. O custo com os ônibus pequenos é 500x e com os grandes é 800y. Do enunciado, vem: $24x + 40y \geqslant 120$ e $500x + 800y \leqslant 4\,000$.

17. C

Seja a função $y = 2x^2 - 20x + 2m$. Temos $y > 0$ para todo x real no esboço do gráfico da função a seguir.



Nesse gráfico, não há raízes reais. Portanto: $\Delta < 0 \rightarrow$ $\rightarrow 400 - 4 \cdot 2 \cdot 2m < 0 \rightarrow 400 < 16m \rightarrow m > 25.$

Estudo para o Enem

18. A

Temos que a arrecadação é dada por $A(p) = (400 - 100p) \cdot p$.

Para que a arrecadação seja de R$ 300,00, devemos ter

$(400 - 100p) \cdot p = 300 \rightarrow 4p^2 - p^2 = 3 \rightarrow$ $\rightarrow p^2 - 4p + 3 = 0.$

Então, $p = 1$ ou $p = 3$.

Para $p = 1$, sabe-se pelo enunciado que a quantidade vendida de pães é 300. Para $p = 3$, a quantidade vendida de pães é $400 - 100 \cdot 3 = 100$.

Logo, o preço que mantém a arrecadação e maximiza a quantidade vendida é R$1,00.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. E

Analisando a figura, temos que o contorno não pode ser maior que 115. Assim:

$90 = 24 + 24 + y \rightarrow y = 42$

$42 + 24 + x \leqslant 115 \rightarrow x \leqslant 115 - 66 \rightarrow$
$\rightarrow x \leqslant 49$ cm

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. E

O custo com gasolina para percorrer uma distância d é 45x. Para percorrer a mesma distância, o custo com álcool é 60y. Economicamente é mais vantajoso abastecer com gasolina se:

$$45x < 60y \rightarrow \frac{x}{y} < \frac{45}{60} \rightarrow \frac{3}{4}$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

16 INEQUAÇÕES PRODUTO E QUOCIENTE

Comentário sobre o módulo

As inequações são, em geral, um obstáculo aos alunos. Ressalte, fortemente, que resolver inequações é basicamente analisar sinais em torno das raízes e que o quadro é uma forma compacta dessa análise.

O *site* a seguir possibilita construir gráficos de equações e inequações. O GrafiEq 2.13 não é um *software* livre, mas existe uma versão para teste:

<http://www.peda.com/download/>.

Para ir além

Leia o artigo disponível no link a seguir para enriquecer suas aulas:

<http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/10-03.pdf>.

Exercícios propostos

7. C

Reescrevendo a inequação, obtemos:

$$(-4x^2+2x-1)\cdot(x^2-6x+8)\geq 0$$

$$(4x^2-2x+1)\cdot(x^2-6x+8)\leq 0$$

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\cdot(x-2)\cdot(x-4)\leq 0$$

$$x=\frac{1}{2}\text{ ou } 2\leq x\leq 4.$$

Portanto, o conjunto solução da inequação, em $\mathbb{Z}$ é $S=\{x\in\mathbb{Z}; 2\leq x\leq 4\}$.

8. E

Analisando o sinal da expressão do radicando em torno do eixo x, concluímos que ela é positiva para todo x real. Logo, o denominador é positivo. Como o quociente e o denominador são positivos, concluímos que o numerador é positivo, ou seja, $(5-x^2)\cdot(x^2-2)>0$. Fazendo o quadro de sinais para essa inequação produto, obtemos:

$$S=\{x\in\mathbb{R}; -\sqrt{5}<x<-\sqrt{2}\text{ ou }\sqrt{2}<x<\sqrt{5}\}$$

Como $\sqrt{2}\cong 1,41$ e $\sqrt{5}\cong 2,23$, portanto as únicas soluções inteiras são $x=-2$ e $x=2$.

9. B

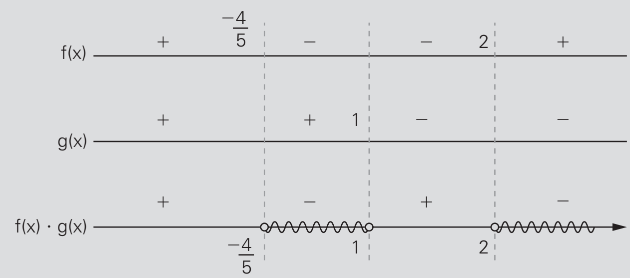
O domínio da função é a solução da seguinte inequação: $\dfrac{9-x^2}{x^2+x-2}\geq 0.$

Ao final do quadro de sinais da inequação quociente $\dfrac{9-x^2}{x^2+x-2}\geq 0$, temos:

Portanto, $S=\{x\in\mathbb{R}|\ -3\leq x\leq -2\text{ ou }1<x\leq 3\}$.

10. E

Fazendo o quadro de sinais da inequação produto do enunciado, temos:



$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\ |\ -\frac{4}{5}<x<1\text{ ou }x>2\right\}$$

11. B

Temos que:

$x-1>(x^2-2x+2)-1\rightarrow -x^2+3x-2>0\rightarrow$
$\rightarrow x^2-3x+2<0$

Raízes da função: $x=1$ e $x=2$. Então, temos que a solução da inequação é o conjunto $\{x\in\mathbb{R}\ |\ 1<x<2\}$.

12. E

Aplicando o discriminante (Δ) da equação do 2º grau, temos:

$\Delta=k^2-4\cdot(-1)\cdot k^2=5k^2$. Analisando o sinal da expressão $5k^2$, temos $\Delta\geqslant 0$. Ou seja, para qualquer k real, a equação do enunciado tem raízes reais (iguais ou distintas).

13. D

Chamamos $f(x)=x^2-4x+4$ e $g(x)=x^2-9x-10$

A raiz da função f(x) é $x=2$. As raízes da função g(x) são $x=-1$ e $x=10$. Portanto, $f(x)\geqslant 0$ para $x=2$ e $g(x)\geqslant 0$ para $x\leqslant -1$ e $x\geqslant 10$. Então:

$S=\{x$ reais tais que $x\leqslant -1,\ x\geqslant 10$ ou $x=2\}$.

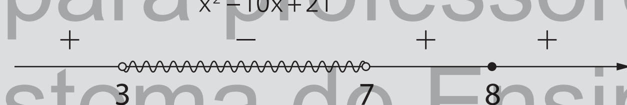
14. B

Sendo $5x-40=0\rightarrow x=8$ satisfaz.

Como $(5x-40)^2\geqslant 0$, pois tendo x real, x^2-10x+
$+21<0$.

$x^2-10x+12<0\rightarrow x=3$ ou $x=7$

Analisando o quadro de sinais da inequação quociente $f(x)=\dfrac{(5x-40)^2}{x^2-10x+21}$, temos:



Logo, $x^2 - 10x + 21 < 0 \rightarrow 3 < x < 7$.
Como x é inteiro, pode ser 4, 5 ou 6.
Portanto, a soma (S) pedida será dada por:
$S = 4 + 5 + 6 + 8 = 23$.

15. $\frac{x \cdot a}{x+12} > \frac{(x+1) \cdot a}{24} \rightarrow \frac{x}{x+12} - \frac{(x+1)}{24} > 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{-x^2+11x-12}{24(x+12)} > 0.$

x é positivo, então o denominador é positivo. Sendo o quociente e o denominador positivos, concluímos que o numerador é positivo. Ou seja, $-x^2 + 11x - 12 > 0$. Analisando o sinal de $y = -x^2 + 11x - 12$ em torno do eixo x, temos: $S = \{x \in \mathbb{R}\ 1 < x < 12\}$. Como $2 \leqslant x \leqslant 13$, temos: $2 \leqslant x < 12$.

16. D

Na 1ª inequação, temos:

$\frac{x^2-2x-14}{x} > 3 \rightarrow \frac{x^2-5x-14}{x} > 0$

Fazendo o quadro de sinais da inequação quociente, temos:
$\{x \in \mathbb{R};\ -2 < x < 0$ ou $x > 7\}$. Como $x \leqslant 12$, a solução do sistema é:
$S = \{x \in \mathbb{R};\ -2 < x < 0$ ou $7 < x < 12\}$.
Os inteiros que pertencem a esse conjunto são $\{-1, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Portanto, $k = 6$. Com isso, temos que $6 \leqslant k < 8$.

17. $\sqrt{x^2-4x+5} > \frac{1}{2} \rightarrow x^2-4x+5 > \frac{1}{4} \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2-16x+19 > 0$

Analisando os sinais de $y = 4x^2 - 16x + 19$ em torno do eixo x, temos: $S = \mathbb{R}$.

Estudo para o Enem

18. B

Pelo enunciado, sabemos que o recipiente tem o formato de um paralelepípedo. O volume V do recipiente, em cm^3, pode ser calculado do seguinte modo:

$40 \cdot 25 \cdot 20 = 20\,000 \rightarrow 20\,000\ cm^3$

Na etapa 1 = 1 esfera = 0,5.

Na etapa 2 = 2 esferas.

Na etapa 3 = 4 = 2^2 esferas.

Na etapa 4 = 8 = 2^3 esferas.

Na etapa n = $2^n - 1$ esferas.

Assim, temos:

$\frac{0{,}5 \cdot (2^n-1)}{2-1} > 20\,000 \rightarrow 2^n - 1 > 40\,000 \rightarrow$

$\rightarrow 2^n > 40\,001$

Sendo que $40\,001 > 40\,000$, então podemos fazer: $2^n > 40\,000$. Então,

$2^n > 40\,000 \rightarrow 2^n > 40 \cdot 2^{10} \rightarrow \frac{2^n}{2^{10}} > 40 \rightarrow$

$\rightarrow 2^{n-10} > 40$

Como $2^5 = 32$, logo: $2^{n-10} \geqslant 2^6 \rightarrow n - 10 \geqslant 6 \rightarrow$
$\rightarrow n \geqslant 16$.

O menor número de etapas é 16.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. D

De acordo com o enunciado, $E(p) > 1$:

$\frac{-p^2-2p+1}{-4p+1} > 1$

$\frac{-p^2-2p+1}{-4p+1} - 1 > 0$

$\frac{-p^2-2p+1+4p-1}{-4p+1} > 0$

$\frac{-p^2+2p}{-4p+1} > 0$

Fazendo o quadro de sinais da inequação quociente, temos:

$0 < p < \frac{1}{4}$ ou $p > 2$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

20. D

Como Antônio aplicou R\$ 2.500,00 inicialmente, após um ano obteve R\$ 5.000,00. Portanto, temos que a razão é de $q = \frac{5\,000}{2\,500} \rightarrow q = 2$. Assim,

$40\,000 < 2\,500 \cdot 2^n$

$16 < 2^n$

$2^4 < 2^n$

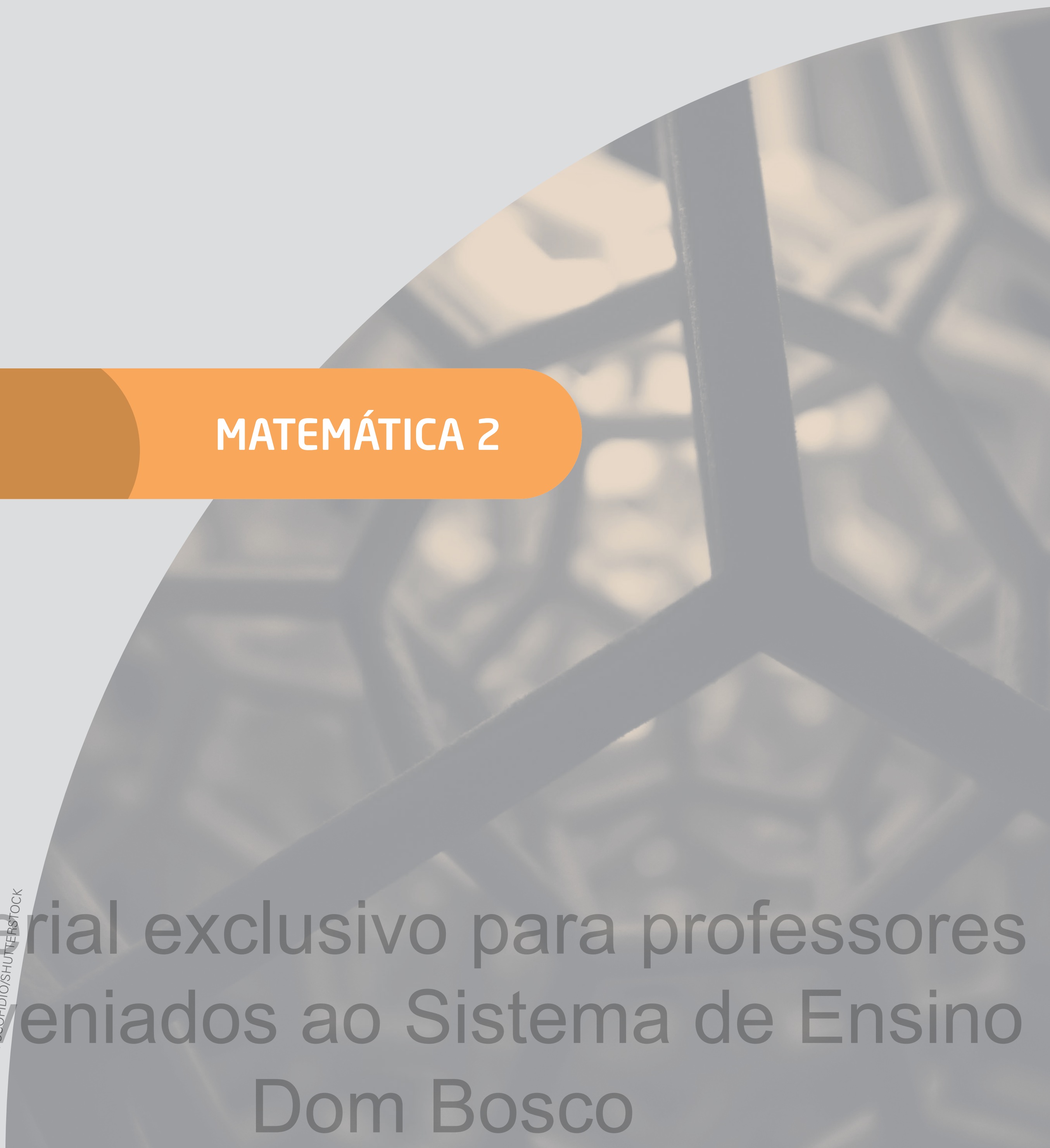
Portanto, $4 < n$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS



ELIZABETH SCOFIDIO/SHUTTERSTOCK

MATEMÁTICA 2

1 PORCENTAGEM

Comentário sobre o módulo

Ao definir o que é uma porcentagem, reforce a ideia de que ela é apenas uma forma de comparar dois valores. Dê exemplos de comparação absoluta (diferença entre valores) e comparação relativa (razão entre valores) e mostre que a porcentagem é uma comparação relativa.

Muitos alunos têm a ideia de que, para calcular uma porcentagem, devem multiplicar ou dividir por 100. Mostre que essa divisão por 100 é apenas para mudar uma porcentagem da forma decimal para a percentual e vice-versa. A porcentagem, de fato, é obtida pela razão entre os dois valores comparados.

Na seção *Porcentagem de quantias*, reforce o fato de usar a multiplicação na hora dos cálculos. Muitos alunos usam a regra de três: sempre que possível evitaremos isso, pois quando essa regra é aplicada, vários estudantes podem não estar plenamente conscientes do processo que estão realizando, apenas reproduzindo um procedimento que aprenderam sem ter real noção que qual conceito justifica essa ação.

Exercícios Propostos

7. A

Calculando, temos: $0{,}64 \cdot 0{,}3 \cdot T = 60\,000 \therefore T = 312\,500$

8. D

Calculando, temos: $\frac{630}{504} = 1{,}25.$

Portanto, houve um aumento de 25%.

9. A

Note que 3% de meio litro ou 500 ml de leite correspondem a: $0{,}03 \cdot 500$ ml $= 15$ ml.

Como a colher tem 3 cm^3, ou seja, 3 ml, serão necessárias 5 colheres, pois: $\frac{15\text{ ml}}{3\text{ ml por colher}} = 5$ colheres.

10. Total de cirurgias de fêmur: $800 \cdot 0{,}45 = 360$.

Total de cirurgias de fêmur em homens:

$440 \cdot 0{,}4 = 176$.

Total de cirurgias de fêmur em mulheres:

$360 - 176 = 184$.

11. C

Consideramos n o número total de indivíduos dessa população.

- Mulheres: 0,6 n
- Homens: 0,4 n
- Mulheres vegetarianas: $0{,}1 \cdot 0{,}6\,n = 0{,}06\,n$
- Homens vegetarianos: $0{,}05 \cdot 0{,}4\,n = 0{,}02\,n$

Dessa forma, a porcentagem pedida é:

$$\frac{0{,}06n}{0{,}06n + 0{,}02n} = \frac{0{,}06n}{0{,}08n} = \frac{6}{8} = 75\%.$$

12. A

Calculando, temos:

$(1)16 \text{ anos} \to 25 \text{ alunos} \to \frac{25}{80} = 31{,}25\%$

em graus: $31{,}25\% \cdot 360° = 112{,}5°$

$(2)17 \text{ anos} \to 15 \text{ alunos} \to \frac{15}{80} = 18{,}75\%$

em graus: $18{,}75\% \cdot 360° = 67{,}5°$

$(3)18 \text{ anos} \to 35 \text{ alunos} \to \frac{35}{80} = 43{,}75\%$

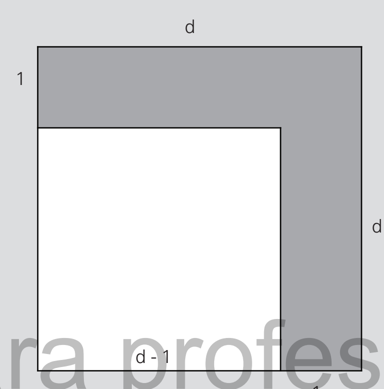
em graus: $43{,}75\% \cdot 360° = 157{,}5°$

$(4)19 \text{ anos} \to 5 \text{ alunos} \to \frac{5}{80} = 6{,}25\%$

em graus: $6{,}25\% \cdot 360° = 22{,}5°$

13. A

Considere a figura, em que se tem a reprodução do padrão de preenchimento da malha num quadrado de lado **d**.



O quadrado de lado d − 1 corresponde à área transparente do padrão. Logo, para que a taxa de cobertura seja de 75%, deve-se ter:

$$\frac{(d-1)^2}{d^2}=\frac{1}{4}\rightarrow\frac{d-1}{d}=\frac{1}{2}\rightarrow d=2\text{ mm.}$$

14. Sendo **g** e **a**, respectivamente, as quantidades iniciais de litros de gasolina pura e de álcool, temos:

$$\begin{cases} g+a=1000 \\ \dfrac{g}{a}=\dfrac{19}{6} \end{cases}$$

Isolando g na segunda equação, temos $g=\frac{19a}{6}$.

Substituindo na segunda equação:

$$\frac{19a}{6}+a=1000\rightarrow a=240$$

Consequentemente g = 760.

Acrescentando x litros na mistura, devemos ter 240 L de álcool, representando 20% do total:

$$\frac{240}{1000+x}=\frac{2}{10}\rightarrow x=200L$$

15. D

O percentual correspondente aos cinco vereadores que se abstiveram na primeira votação é igual a 100% − (42% + 48%) = 10%. Logo, podemos concluir que o número total de vereadores da câmara é 50 (10% de 50 = 5). Assim, é imediato que 0,42 · 50 = 21 vereadores aprovaram a proposta.

Portanto, se na votação seguinte o número de vereadores favoráveis à proposta foi igual a $21+4+3=28$, então a resposta é $\frac{28}{50}=0{,}56=56\%$.

16. C

Sendo **x** e **y**, respectivamente, o número de vagas para homens e o número de vagas para mulheres, logo, tem-se inicialmente que x = 0,8y.

Após a mudança, a relação entre os números de vagas passou a ser: x + 30 = 0,84(y + 15).

Substituindo o valor de *x* na segunda equação, temos:

$$0{,}8y + 30 = 0{,}84y + 12{,}6$$

$$17{,}4 = 0{,}04y \therefore y = 435$$

O número de vagas para homens, antes do aumento, era de 0,8 · 435 = 348.

Logo, o total de vagas é: 348 + 435 + 45 = 828.

17.

Sabendo que o terreno é retangular e que sua área é de 20 m², podem-se deduzir suas medidas, sendo **h** o comprimento do terreno: 5h = 20 ∴ ∴ h = 4 m.

Se o terreno tem ao todo 4 metros de comprimento, então o lago terá comprimento igual a: 4 − (1 + 0,5) = 2,5 m.

Sabendo a área total do terreno e considerando como X a largura do deque e do lago, pode-se escrever:

grama + lago + deque = 20

$$0{,}48\cdot 20+2{,}5\cdot x+4\cdot x=20 \therefore x=1{,}6$$

Logo, a área do lago será igual a: $2{,}5\cdot 1{,}6=4\text{ m}^2$

Estudo para o Enem

18. A

Calculando cada aumento:

$$\text{Site U}: \frac{56}{40}=1{,}4\rightarrow \text{aumento de } 40\%$$

$$\text{Site X}: \frac{21}{12}=1{,}75\rightarrow \text{aumento de } 75\%$$

$$\text{Site Y}: \frac{51}{30}=1{,}7\rightarrow \text{aumento de } 70\%$$

$$\text{Site Z}: \frac{11}{10}=1{,}1\rightarrow \text{aumento de } 10\%$$

$$\text{Site W}: \frac{57}{38}=1{,}5\rightarrow \text{aumento de } 50\%$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. A

Sendo $64\%-(20\%+8\%+15\%+1\%)=20\%$, o percentual correspondente ao desperdício durante o processamento culinário e hábitos alimentares, podemos concluir que o resultado é $150\cdot\frac{2}{3}\cdot 0{,}2=20$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

20. E

Calculando o percentual de acerto de cada um dos jogadores, temos:

I) $\%_{\text{Acertos}}=\frac{20}{30}\approx 0{,}66667\approx 66{,}67\%$ de acerto.

II) $\%_{\text{Acertos}} = \dfrac{10}{34} \approx 0{,}2941 \approx 29{,}41\%$ de acerto.

III) $\%_{\text{Acertos}} = \dfrac{19}{32} = 0{,}59375 = 59{,}375\%$ de acerto.

IV) $\%_{\text{Acertos}} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$ de acerto.

V) $\%_{\text{Acertos}} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8 = 80\%$ de acerto.

Logo, o jogador com maior percentual de acertos (o qual deve entrar em quadra) é o jogador V.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

2 AUMENTO E DESCONTOS: FATOR DE CORREÇÃO

Comentário sobre o módulo

Enfatize o uso do fator de correção em contraponto ao uso da regra de três. Principalmente em exercícios de variações sucessivas, o fator de correção facilita muito a organização e a resolução.

Para ir além

SANTOS, Robinson Nelson dos. Porcentagem "por dentro" e a conta de luz. **Revista do Professor de Matemática**, n. 78. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/78/3.html>. Acesso em: 29 maio 2018.

Artigo sobre a aplicação de porcentagens para aumentos ou descontos sobre o valor final.

Exercícios propostos

7. D

Sendo x o preço anunciado, temos o valor que será parcelado de 1,2x. Como o cliente pagou 10 parcelas de R$ 3.240,00, podemos escrever:

$1{,}2x = 10 \cdot 3240 \to x = 27000$

Já o valor à vista será de $0{,}9 \cdot 27000 = 24300$.

Portanto, a economia entre as duas opções de compra será de $32400 - 24300 =$ R$ 8.100,00.

8. C

Despesa com o item calças:
$80 \cdot (0{,}95 + 0{,}9 + 0{,}8) =$ R$ 212,00

Despesa com o item camisetas:
$40 \cdot (0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}65 + 0{,}5 + 0{,}5) =$ R$ 134,00

Despesa com o item bonés:
$50 \cdot (0{,}9 + 0{,}8) =$ R$ 85,00

Portanto, a despesa total foi de:
$212 + 134 + 85 =$ R$ 431,00.

9. D

Os dois descontos sucessivos farão com que o preço seja multiplicado por dois fatores de correção: 0,9 e 0,95. Como a ordem dos fatores não altera o produto, o cliente pagará

$0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 100 =$ R$ 85,50.
O resultado independe da ordem em que os descontos fossem dados.

10. A relação entre as grandezas é expressa por:

$$\frac{P \cdot V}{T} = \frac{P' \cdot V'}{T'}$$

Pelo enunciado, temos que $T' = 1{,}2T$ e $V' = 0{,}8V$. Logo,

$\frac{P \cdot V}{T} = \frac{P' \cdot 0{,}8V}{1{,}2T} \to P' = \frac{1{,}2P}{0{,}8} = 1{,}5P$, ou seja, P aumentou 50%.

11. C

[A]: Falso, pois $\frac{1035}{1500} = 0{,}69$, o que indica uma queda de 31%.

[B]: Falso, pois as receitas diminuíram de $1500 \cdot 30 = 45000$ para $1035 \cdot 40 = 41400$.

[C]: Verdadeiro, pois $\frac{41400}{45000} = 0{,}92 \to$ queda de 8%

[D] e [E]: Falsos, pois a receita sofreu uma queda de 8%.

12. A

Consideramos x o preço de custo do produto. A farmácia W vende o produto por 1,5x, e a farmácia Y vende 80% mais caro. Isto é, $1{,}8 \cdot 1{,}5x$. Logo, o preço na farmácia Y é:

$$1{,}8 \cdot 1{,}5x = 2{,}7x = x + 1{,}7x$$

Portanto, o lucro é de 170%.

13. B

Sendo N a população inicial, P, o PIB, e N′ e P′, a população e o PIB após o crescimento, temos:

$$\frac{P'}{N'} = \frac{(1+1{,}5)P}{(1+1)N} = \frac{2{,}5}{2} \cdot \frac{P}{N} = 1{,}25 \cdot \frac{P}{N}$$

Ou seja, o PIB per capita cresceu 25%.

14. Valor aplicado em A: x

Valor aplicado em B: 4x

Total aplicado: 5x

Agora vamos aplicar as taxas de rentabilidade de cada aplicação:

$A_{final} = 0{,}98x$

$B_{final} = 1{,}15 \cdot 4x = 4{,}6x$

$Total_{final} = 0{,}98x + 4{,}6x = 5{,}58x$

Logo, a rentabilidade anual foi de:

$$\frac{5{,}58x - 5x}{5x} = 0{,}116 = 11{,}6\%$$

15. B

Seja g a quantidade, em litros, de gasolina pura que deverá ser adicionada ao estoque, temos que:

$$\frac{g+0,75\cdot 40000}{g+40000}=0,8\rightarrow g+30000=$$

$$=0,8g+32000\rightarrow 0,2g=2000\therefore g=10000$$

16. C

Digamos que um consumidor tem R$ 100,00 para comprar carne.

Inicialmente, 1 arroba custa R$ 100,00. Logo, o consumidor consegue comprar 1 arroba.

Após a redução de preço, os mesmos R$ 100,00 poderão comprar mais carne do que antes. Temos a seguinte igualdade, comparando-se as duas situações: $1 \cdot 100 = n \cdot 93$, em que n é a quantidade de arrobas que o consumidor consegue comprar após a redução do preço. Resolvendo a equação, temos que $n \cong 1,075$, o que significa um ganho de 7,5% no poder aquisitivo.

17. a) Verdadeira. Calculando:

$$\text{Se } x<0\rightarrow\begin{cases}|x|>0\\ \dfrac{2^x}{x}<0\end{cases}\rightarrow|x|>\frac{2^x}{x}$$

b) Sim, é correto afirmar que o lucro da livraria em 2015 foi maior que em 2013. Calculando:

$$\left.\begin{array}{l}L_{2014}=L_{2013}\cdot\dfrac{100+x}{100}\\ L_{2015}=L_{2014}\cdot\dfrac{100-y}{100}\end{array}\right\}\rightarrow L_{2015}=L_{2013}\cdot\frac{100+x}{100}\cdot\frac{100-y}{100}$$

$$\therefore L_{2015}=L_{2013}\cdot\left(1+\frac{100(x-y)-xy}{100^2}\right)$$

Do enunciado sabemos que $x-y>\dfrac{xy}{100}$, ou seja, $100(x-y) > xy$.

Portanto:

$100(x-y) - xy > 0$

Assim podemos concluir que $L_{2015} > L_{2013}$.

Estudo para o Enem

18. E

Em virtude da proporcionalidade, podemos escrever:

$$\frac{13,5}{75\%}=\frac{x}{80\%}\therefore x=14,40\text{ km/L}$$

Competência: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

19. C

Se o lucro total foi de R$ 40,00 cada caixa deu um lucro de $40 \div 4 =$ R$ 10,00. Se a pessoa deseja aumentar seus lucros em 20%, no segundo dia deverá ter um lucro igual $1,2 \cdot 10 =$ R$ 12,00. Logo, o preço de venda em cada caixa será de $16 + 12 =$ = R$ 28,00. Assim, cada picolé será vendido por $28 \div 20 =$ R$ 1,40.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. C

Custo total atual: $150 \cdot 0,5 + 4,5 =$ R$ 79,50

Custo pretendido: $0,9 \cdot 79,5 =$ R$ 71,55.

Devemos verificar se haverá mudança de faixa de cobrança da Cosip. O menor custo dentro da mesma faixa que o consumidor se encontra é de $140 \cdot 0,5 + 4,5 =$ R$ 74,50. Portanto, ele deverá reduzir seu consumo o suficiente para mudar de faixa. Vejamos se dentro da faixa $100 < x < 140$ é possível reduzir o custo para no mínimo R$ 71,55. Sendo x o consumo em kWh, temos:

$x \cdot 0,5 + 3 = 71,55 \therefore x = 137,1$

Como o valor de x se encaixa na faixa usada, concluímos que o consumo da residência deve consumir no máximo 137,1 kWh.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

3 MATEMÁTICA FINANCEIRA: JUROS SIMPLES

Comentário sobre o módulo

Ao falar sobre juros, enfatize o fato de que **juro** é **dinheiro**. É muito comum os alunos pensarem que juros é porcentagem. Deixe bem clara a diferença entre **juro** e **taxa** de juro.

Reforce o uso de fator de correção em movimentações de apenas um período: mostre aos alunos a vantagem dessa abordagem em comparação à regra de três. Comente também que o fator de correção é a ferramenta que usamos para deslocar valores ao longo do tempo: ao multiplicarmos um valor pelo fator de correção, estamos calculando o valor futuro. Em contraponto, para determinarmos o valor passado, devemos dividir pelo fator de correção. Exemplo: uma aplicação rende 10% ao mês.

a) Se R$ 200 reais foram aplicados, qual será o valor daqui um mês?

$V_f = 200 \cdot 1{,}1 = \text{R\$ } 220$

b) Qual valor foi aplicado um mês atrás se hoje há R$ 200 aplicados?

$V_i = \dfrac{200}{1{,}1} = \text{R\$ } 181{,}81$

Muitos alunos, no item **b** do exemplo, pensariam em retirar 10% de 200, o que seria equivalente a multiplicar por 0,9. Mas essa ideia está errada, pois um desconto de 10% não desfaz um aumento de 10%.

Exercícios propostos

7. B

Após um desconto de 21% sobre o valor x, seu novo valor passará a ser $x \cdot (1 - 0{,}21)$, ou seja, $0{,}79\,x$.

Dessa forma, a função f que representa o valor a ser pago após um desconto de 21% sobre o valor de um produto é $f(x) = 0{,}79\,x$.

8. [01] Verdadeira, pois

$8000 \cdot \dfrac{0{,}15}{12} \cdot 4 = \text{R\$ } 400{,}00 > \text{R\$ } 300{,}00.$

[02] Falsa. O montante produzido após quatro meses será igual a

$8000 \cdot (1 + 0{,}0004 \cdot 120) =$
$= \text{R\$ } 8.384{,}00 < \text{R\$ } 8.400{,}00.$

[04] Verdadeira. É imediato que $384 < 416$.

[08] Falsa. Sendo i a taxa de juros simples, temos:

$416 = 8000 \cdot i \cdot 4 \rightarrow i = 1{,}3\%$ a.m. $= 7{,}8\%$ a.s.

Somatória das afirmações corretas: 01 + 04 = 05

9. B

O acréscimo percentual, em relação ao valor inicial, é igual a $5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5$.

10. Aplicando a fórmula de juros simples:

$M = C \cdot (1 + n \cdot i) = 3000(1 + 18 \cdot 0{,}008) =$
$= \text{R\$ } 3.432{,}00$

11. Desde que $i_1 = 0{,}01$ e $i_2 = \dfrac{0{,}18}{12} = 0{,}015$, temos:

$2000 \cdot (1 + 0{,}01 \cdot t) = 3840$

$20t + 22{,}5t = 3840 - 3500$

$42{,}5t = 340$

$t = \dfrac{340}{42{,}5}$

$t = 8$

Se M_2 é o montante produzido por C_2 para $t = 8$ m, então

$M_2 = 1500 \cdot (1 + 0{,}015 \cdot 8) = \text{R\$ } 1.680{,}00.$

Seja J_1 os juros simples produzidos por C_1 para $t = 8$ m. Logo, $J_1 = 2000 \cdot 0{,}01 \cdot 8 = \text{R\$ } 160{,}00$.

[01] Verdadeira, pois $t = 8 \text{ m} > 6 \text{ m}$.

[02] Falsa. Na verdade, temos $M_2 = \text{R\$ } 1.680{,}00$.

[04] Verdadeira, pois $J_1 = \text{R\$ } 160{,}00$.

[08] Falsa, pois $t = 8 \text{ m} = 240 \text{ d}$.

Somatória das corretas: 01 + 04 = 05

12. C

A primeira parcela de R$ 460,00 será paga à vista, portanto não há incidência de juros. A segunda parcela, caso não houvesse incidência de juros, seria de R$ 400,00, pois o preço do fogão à vista é de R$ 860,00 (860 − 460 = 400). No entanto, há um acréscimo de R$ 60,00 na segunda parcela, os quais representam os juros após 30 dias. Logo, os juros são:

$\dfrac{60}{400} = 0{,}15 \rightarrow 15\%$

13. Desde que $C_1 = 0{,}6 \cdot C_2$, temos:

$0{,}6 \cdot C_2 \cdot 0{,}18 \cdot 2 + C_2 \cdot 0{,}24 \cdot 2 = 487{,}2$

$0{,}696 \cdot C_2 = 487{,}2$

$C_2 = \dfrac{487{,}2}{0{,}696}$

$C_2 = 700$, ou seja, $C_2 = \text{R\$ } 700{,}00$

Logo, $C_1 = 0{,}6 \cdot 700 = \text{R\$ } 420{,}00$.

[01] Falsa. Temos $f(C_2) = f(700) = 700 - 770 = -70 < 0$.

[02] Verdadeira, pois $C_1 + C_2 = 420 + 700 =$ R$ 1.120,00.

[04] Falsa, pois R$ 700,00 < R$ 750,00.

[08] Falsa. Tomando o módulo da diferença: $|C_1 - C_2| = |420 - 700| =$ R$ 280,00 < R$ 300,00.

[16] Verdadeira, conforme mostramos acima.

Somatória das corretas: $02 + 16 = 18$

14. Valor emprestado com juros

$600 + 2 \cdot \dfrac{4}{100} \cdot 600 = 648$ reais.

Desconto concedido pelo sorteio: $648 - 602{,}64 = 45{,}36$ reais.

Em porcentagem: $\dfrac{45{,}36}{648} = 0{,}07$, ou seja, um desconto de 7%.

15. B

Como se trata de juros simples, o valor devido V, após n meses, será igual a:

$V = 80 + 80 \cdot 30\% \cdot n = 80 + 80 \cdot 0{,}3 \cdot n \rightarrow V = 80 + 24n$

16. C

Dentre juros e taxa fixa, o contribuinte pagará $5\,000 \cdot 0{,}0182 =$ R$ 91,00. Desse modo, o resultado pedido é dado por:

$\dfrac{5\,000 + 91}{5} = \dfrac{5\,091}{5} = 1018{,}20$, ou seja, R$ 1.018,20

17. Sendo C a parte financiada pelo agricultor.

Desde que $i = 2\% = 0{,}02$ a.m. e $n = 10$ meses, temos:

$208\,800 = C \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 10)$

$C = \dfrac{208\,800}{1{,}2}$

$C = 174.000{,}00$.

Logo, a parte financiada foi de R$ 174. 000,00.

Estudo para o Enem

18. E

O valor pago à vista foi de $0{,}2 \cdot 130 = 26$. Portanto, o saldo devedor é de R$ 104,00. Aplicando a fórmula de juros simples, temos:

$128{,}96 = 104 \cdot (1 + 3 \cdot i)$

$1{,}24 = 1 + 3i \therefore i = 8\%$ ao mês

Logo, a taxa anual será de $12 \cdot 8\% = 96\%$.

Competência: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

19. D

O resultado pedido é dado por:

$1000 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1 =$ R$ 774,40.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

20. E

Analisando as alternativas:

a) Renegociar com banco: $18 \cdot 125 =$ R$ 2.250;

b) Empréstimo do total da dívida com José:
$(10 \cdot 150 + 5 \cdot 0{,}75 \cdot 80) \cdot 1{,}25 =$
$= (1.500 + 300) \cdot 1{,}25 = 1800 \cdot 1{,}25 =$
= R$ 2.250;

c) Pagamento da dívida no prazo:
$12 \cdot 150 + 5 \cdot 80 = 1.800 + 400 =$ R$ 2.200;

d) Empréstimo do valor da quitação do cheque especial com José: $(10 \cdot 150) \cdot 1{,}25 + 400 = 1.875 + 400 =$ R$2.275;

e) Empréstimo do valor da quitação do cartão de crédito com José:

$1.800 + 300 \cdot 1{,}25 = 1.800 + 375 = 2\,175$, ou seja, R$ 2.175,00.

Competência: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

4 MATEMÁTICA FINANCEIRA: JUROS COMPOSTOS

Comentário sobre o módulo

Enfatize a diferença entre os regimes de juros compostos e juros simples: comente como no cotidiano são mais comuns operações baseadas em juros compostos.

Comente também como o cálculo da variável tempo se torna mais trabalhoso nos juros compostos, sendo necessário o uso dos logaritmos.

Sobre equivalência de taxas, mostre que as diferenças entre os dois regimes é mais perceptível em variações grandes de tempo. Por exemplo: 1% ao mês em regime de juros compostos é igual a 12,68%; entretanto, se a situação não exigir muita precisão, talvez possamos aproximar para 12%, que seria a taxa equivalente em regime de juros simples; este último regime de cálculo de juro deixa o cálculo de equivalência de taxas muito mais simples, mas deve ser usado com muita cautela e bom senso.

Para ir além

- NOVAES, Rosa Cordelia Novellino de. *Uma abordagem visual para o ensino de matemática financeira no ensino médio.* Rio de Janeiro: UFRJ, 2009. 205 p. Dissertação (Mestrado em Educação).

Exercícios Propostos

7. C

$M = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}085)^{15}$

$M = 1\,000\,000 \cdot (1{,}085)^{15}$

$M = 1\,000\,000 \cdot (1{,}085)^5 \cdot (1{,}085)^5 \cdot (1{,}085)^5$

$M = 1\,000\,000 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5$

$M = 1\,000\,000 \cdot 3{,}375 = 3\,375\,000$, ou seja, 3,375 milhões

8. B

O saldo devedor após o pagamento da entrada é igual a $1\,000 - 600 = 400$, ou seja, R$ 400,00. Portanto, a taxa de juros aplicada na mensalidade é igual a: $\frac{420 - 400}{400} \cdot 100\% = 5\%$.

9. B

10/jan. $\rightarrow 0 + 1\,000 = 1\,000$

10/fev. $\rightarrow (1\,000 \cdot 1{,}10) + 1\,000 = 2\,100$

10/mar. $\rightarrow (2\,100 \cdot 1{,}10) + 1\,000 = 3\,310$

10/abr. $\rightarrow (3\,310 \cdot 1{,}10) = 3\,461$

10. O texto informa que a primeira parcela é de R$ 400,00. O saldo devedor será, portanto, de R$ 600,00. Logo, a segunda parcela será de:

$600 \cdot 1{,}05 =$ R$ 630,00

11. E

Para obter o valor do empréstimo, deve-se calcular quanto 30% representam de R$ 1.368,00. Ou seja:

$1\,368 \cdot 0{,}3 = 410{,}40 \rightarrow$ R$ 410,40

Sabendo o valor do empréstimo, basta aplicar a fórmula de juros compostos: $M = C \cdot (1 + i)^t$

Sendo que M representa o montante final; C refere-se ao capital inicial; i representa a taxa de juros; t refere-se ao tempo de aplicação. Sabendo que o valor do empréstimo representa capital inicial, temos:

$M = C \cdot (1 + i)^t$

$M = (410{,}4) \cdot (1 + 0{,}02)^2$

$M = (410{,}4) \cdot (1{,}02)^2$

$M = (410{,}4) \cdot 1{,}0404$

$M = 426{,}98 \rightarrow M =$ R$ 426,98

12. B

1 ano e 6 meses = 18 meses.

Sendo x o capital aplicado por Patrícia e M, o montante obtido por essa aplicação, temos:

$M = x \cdot (1{,}08)^{18} = x + 11960 \rightarrow x \cdot 3{,}99 - x = 11\,960 \rightarrow 2{,}99x = 11960 \rightarrow x = 4\,000$

Portanto, o capital empregado é de R$ 4.000,00.

13. A

O montante obtido com o presente dos pais é:

$5\,000 \cdot (1 + 0{,}005)^{60} = 5\,000 \cdot 1{,}35 = 6\,750$, ou seja, R$ 6.750,00

14. Seja C o valor inicialmente aplicado e M, o montante obtido por essa aplicação, temos que:

$M = C + 4\,020 = C(1{,}01)^2 \rightarrow C + 4\,020 = 1{,}0201C \rightarrow C + 4\,020 = C + 0{,}0201C \rightarrow \rightarrow C = \frac{4\,020}{0{,}0201}$

Portanto, o valor inicialmente aplicado R$ 200.000,00.

15. A

Seja C o valor inicialmente aplicado e 4C, o montante(M) obtido por essa aplicação, temos que:

$4C = C \cdot (1 + i)^2 \rightarrow 4 = (1 + i)^2 \rightarrow 1 + i = 2 \rightarrow \rightarrow i = 1.$

Após t anos, o capital C renderá 7C de juros; assim o novo montante será de 8C. Então:

$8C = C \cdot (1 + i)t \rightarrow 8 = (1 + 1)^t \rightarrow 8 = 2t \rightarrow$
$\rightarrow t = 3.$

16. D

Sendo 180 dias correspondentes a 6 meses, considerando como sendo x o valor que Mariana pegou emprestado e y, o valor gasto com os pagamentos, pode-se escrever:

$x \cdot (1,1)^6 = 9\,000 \rightarrow 1,8x = 9\,000 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{9\,000}{1,8} = 5\,000$

$x - y = 1\,250 \rightarrow 5\,000 - y = 1\,250 \rightarrow y = 3\,750$, ou seja, R$ 3.750,00

17. C

Supondo que o preço do produto seja P, como o ano tem 3 quadrimestres, temos:

$P \cdot (1 - 0,1)^3 = P \cdot (0,9)^3 = 0,729P = P - 0,271P.$

Portanto, a deflação anual é de 27,1%.

Estudo para o Enem

18. C

Vejamos a evolução da aplicação que João tem à disposição:

$20\,000 \cdot 1,02 = 20\,400$ (primeiro mês)

$20\,400 \cdot 1,02 = 20\,808$ (segundo mês)

$20\,808 \cdot 1,02 \cong 21\,224$ (terceiro mês)

Portanto, no terceiro mês ele comprará o carro e ainda lhe sobrarão aproximadamente 225 reais.

Competência: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

19. A

Sendo P o valor da parcela mensal, devemos retroceder o valor das 7ª e 8ª parcelas em um e dois períodos, respectivamente. Sendo assim, o valor a ser pago no ato da 6ª parcela será:

$$P + \frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)} + \frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2} = P \cdot \left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. C

Do gráfico, tem-se que o saldo devedor inicial é de R$ 500,00. Além disso, como a capitalização é composta, podemos concluir que a parcela mensal de juros é variável. Finalmente, supondo uma taxa de juros constante e igual a 10% ao mês, teríamos, ao final de 1% mês, um saldo devedor igual a $500 \cdot (1,1) =$ R$ 550,00. Portanto, comparando esse resultado com o gráfico, podemos afirmar que a taxa de juros mensal é superior a 10%.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

5 ÂNGULOS

Comentário sobre o módulo

O roteiro da aula é um bom direcionamento para este módulo. Provavelmente, a maior dificuldade dos alunos estará no equacionamento das questões que utilizam os conceitos de ângulos complementares e/ou suplementares. Se julgar necessário, faça questões introdutórias de maior simplicidade algébrica semelhantes aos exercícios resolvidos.

7. B

De acordo com a figura, podemos escrever:

$6x + 4° = 2x + 100°$

$4x = 96°$

$x = 24°$

Logo, $y = 180° - (2 \cdot 24° + 100°) = 32°$

8. E

De acordo com a figura, podemos escrever:

$y - 10° = x + 30° \rightarrow y = x + 40°$ (OP é bissetriz)

$2y + y - 10° + x + 30° = 180° \rightarrow 3y + x = 160°$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} y = x + 40° \\ 3y + x = 160° \end{cases}$, temos:

$x = 10°$ e $y = 50°$.

A medida do suplemento de x é 170° e do complemento de y, 40°.

9. B

A primeira afirmação é verdadeira, pois é a definição de ângulos opostos pelo vértice.

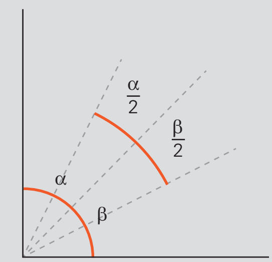
A segunda afirmação é falsa, pois:

$$\frac{x}{180° - x} = \frac{2}{7} \rightarrow 7x = 360° - 2x \rightarrow 9x = 360° \rightarrow x = 40°$$

Os ângulos são 40° e 140°. Logo, o complemento do menor ângulo é 40°.

A terceira afirmação é verdadeira, pois a diferença citada é $179° - 89° = 90°$

10. Sejam α e β dois ângulos complementares, $\alpha + \beta = 90°$. Observe a figura abaixo, na qual foram traçadas as bissetrizes de α e β.



Com base na figura, concluímos que o ângulo formado pelas bissetrizes é:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$$

11. B

Como a e b são ângulos agudos e complementares, então temos que $a + b = 90°$.

Assim,

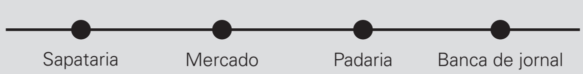
$\text{sen}^2(a + b) - \cos^2(a + b) = \text{sen}^2 90° - \cos^2 90°$

$\text{sen}^2(a + b) - \cos^2(a + b) = 1^2 - 0^2$

$\text{sen}^2(a + b) - \cos^2(a + b) = 1$

12. D

De acordo o enunciado, temos



Portanto, o mercado fica entre a sapataria e a padaria.

13. E

Se α é a medida em graus de $\hat{A}$, então a medida em graus de $\hat{B}$ é $90° - \alpha$. Do enunciado, temos:

$$\frac{\alpha}{90° - \alpha} = \frac{13}{17} \rightarrow 17\alpha = 1170° - 13\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow 30\alpha = 1170° \rightarrow \alpha = 39°$$

Logo, $90° - \alpha = 51°$.

Portanto, a razão procurada é

$$\frac{180° - 39°}{180° - 51°} = \frac{141°}{129°} = \frac{47°}{43°}.$$

14. C

A soma das medidas dos três ângulos é igual a 90°. Desse modo:

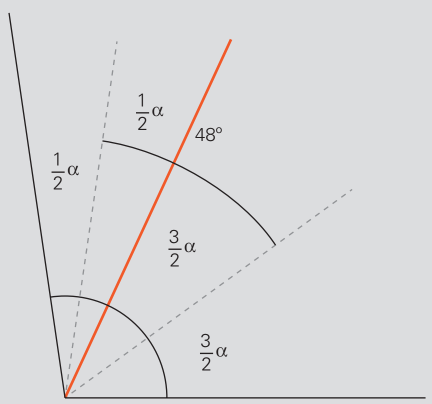
$12° + 2x + 40° - x = 90° \therefore x = 38°$

15. Como se trata de ângulos, vamos considerar que as medidas dos ângulos e das alternativas estejam em graus. Assim, temos que:

$x + 8x + 9x = 180° \rightarrow 18x = 180° \rightarrow x = 10°$

16. C

Do enunciado, temos:



Da figura, vem: $\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = 48° \rightarrow 2\alpha = 48° \rightarrow$ $\rightarrow \alpha = 24°$. A soma dos ângulos é

$3\alpha + \alpha = 4\alpha = 96°$.

17. D

O segmento de reta inicial de comprimento 10 cm foi dividido em dois em cada um dos segmentos resultantes foi dividido ao meio. Cada uma dessas metades resultantes, quando somadas, serão sempre iguais a metade do segmento inicial.

$$\begin{cases} XP = a \\ PY = b \end{cases}$$

$$XY = a + b = 10$$

$$XM = MP = \frac{a}{2}$$

$$PN = NY = \frac{b}{2}$$

$$MN = \frac{a+b}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Estudo para o Enem

18. E

Uma simetria em relação ao ponto O pode ser obtida girando a figura 180°, o que nos leva à alternativa E.

Competência: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

19. B

Basta observar que o ponto no quadro que está na posição A rotacionou 135° no sentido anti-horário. Para voltar o quadro no lugar, basta girá-lo 135° no sentido horário.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. D

Como o triângulo DCB é isósceles, logo as medidas dos ângulos são:

$$B\hat{D}C = C\hat{B}D = 45°$$

$$B\hat{C}E = 180° - 45° - 75° = 60°$$

$$C\hat{E}D = 180° - 75° = 105°$$

$$E\hat{C}D = 90° - 60° = 30°$$

Portanto, as medidas dos ângulos BDC, BCE, CED e ECD vale 45°, 60°, 105° e 30° respectivamente.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

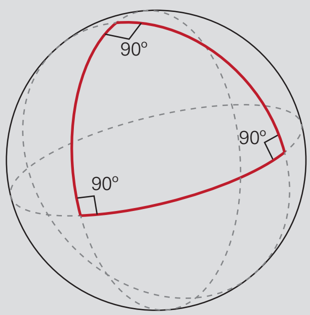
Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

6 PARALELISMO

Comentário sobre o módulo

Sempre enfatize que retas paralelas ajudam muito nos exercícios pelo fato de criarem ângulos congruentes. Essa ação se mostrará bastante útil quando falarmos sobre o teorema de Tales e semelhança de triângulos.

Na introdução da aula, ao comentar sobre o quinto postulado de Euclides, você pode mostrar aos alunos a existência de geometrias não euclidianas: a Geometria esférica pode ser um bom caminho, em virtude da familiaridade que os alunos têm com o globo terrestre. Na superfície de um modelo de globo, é fácil observar um triângulo com três ângulos retos, o que é impossível na Geometria plana euclidiana.

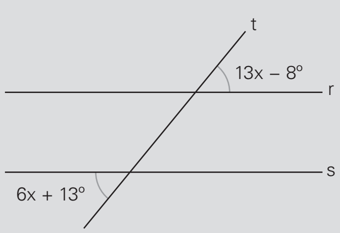


Esse tipo de exemplo reforça a importância das paralelas para a Geometria plana euclidiana.

Exercícios propostos

7. A

De acordo o enunciado, temos:



Como ângulos alternos são congruentes:

$13x - 8° = 6x + 13° \rightarrow 7x = 21° \rightarrow x = \dfrac{21°}{7} \rightarrow$
$\rightarrow x = 3°$

Substituindo o valor de x, temos:

$13 \cdot 3° - 8° = 31°$ e $6 \cdot 3° + 13° = 31°$

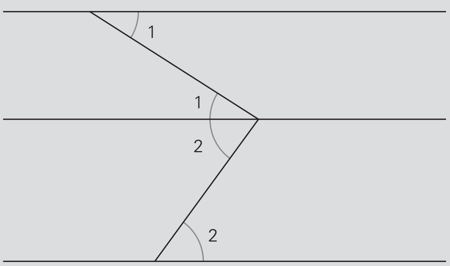
Portanto, os ângulos medem 31°.

8. D

Os ângulos $(60° - \alpha + 4\alpha) = (60° + 3\alpha)$ e $2\alpha + 90°$ são alternos internos. Portanto,
$60° + 3\alpha = 2\alpha + 90° \rightarrow \alpha = 30°$, que é um divisor de 60.

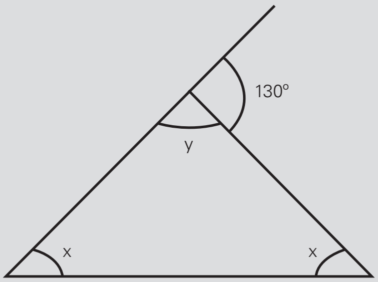
9. E

Traçando uma paralela às retas r e s pelo vértice do ângulo 3, vemos que este é formado por dois ângulos alternos internos dos ângulos 1 e 2.



Portanto, a medida do ângulo 3 é 45° + 55° = 100°.

10. De acordo o enunciado, temos o seguinte triângulo:



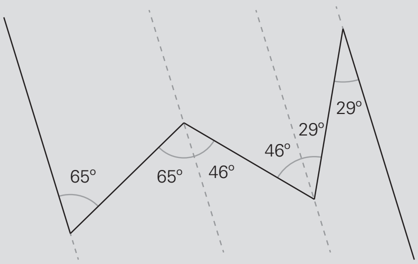
No triângulo, é fácil verificar que os valores de x e y são:

$y = 180° - 130° \rightarrow y = 50°$
$x + x = 130° \rightarrow 2x = 130° \rightarrow x = 65°$

Portanto, os ângulos internos do triângulo medem 50°, 65° e 65°.

11. C

Traçando duas paralelas às retas r e s, temos três pares de ângulos alternos internos, conforme a figura:



Concluímos que o ângulo A mede 65° + 46° = 111°. Nove vezes o valor do ângulo a será $9 \cdot 111 = 999$.

12. B

Se as retas forem paralelas, os ângulos alternos internos assinalados serão suplementares. Assim:

$x + 20° + 4x + 30° = 180° \rightarrow 5x = 130° \rightarrow x = 26°$

Logo, o valor de x = 26°

13. D

$x = 60°$. Os ângulos cujas medidas são x e 120° são suplementares (x e 120° são colaterais internos).

$z = 50°$. Os ângulos cujas medidas são z e 130° são suplementares (z e 130° são colaterais internos).
Da figura, temos $x + y + z = 180° \rightarrow y = 70°$.

Portanto, $\frac{y}{z} = \frac{70°}{50°} = \frac{7}{5} = 1{,}4$.

14. D

Sejam x, y e z as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo e x', y' e z' as medidas dos ângulos externos adjacentes aos ângulos de medidas x, y e z, respectivamente:
De acordo com as informações do enunciado, podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y + z = 180° & \text{(I)} \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6} = k & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo a equação II, obtemos:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6} = k \rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = 6k \end{cases}$$

Substituindo os valores obtidos na equação (II) em (I), temos:

$k + 2k + 6k = 180° \rightarrow 9k = 180° \rightarrow$

$\rightarrow k = \frac{180°}{9}$ $k = 20°$

Então:

$x = 20° \rightarrow x' = 160°$

$y = 40° \rightarrow y' = 140°$

$z = 120° \rightarrow z' = 60°$

Assim, podemos a soma em graus destacar os dois ângulos externos:

$y' + z' = 200°$

$x' + y' = 300°$

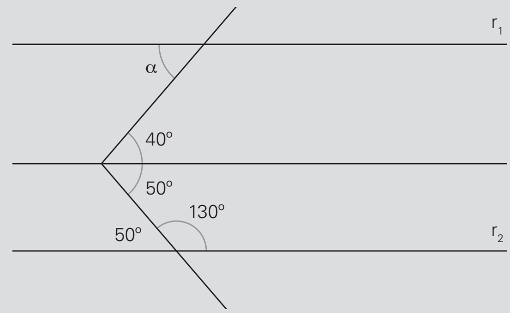
$x' + z' = 220°$

Logo, a soma dos dois ângulos externos mede 200°.

15. A

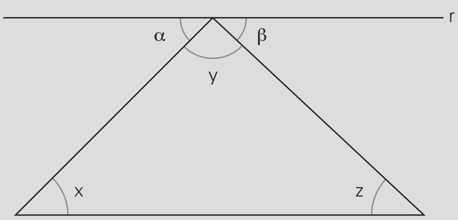
O ângulo adjacente a 130° mede 50°, pois são suplementares.

Traçando uma rela paralela a r_1 e r_2 que passe pelo vértice do ângulo reto, temos:



Portanto, o ângulo a mede 40°, pois são alternos internos.

16. Sendo r paralela ao segmento horizontal:

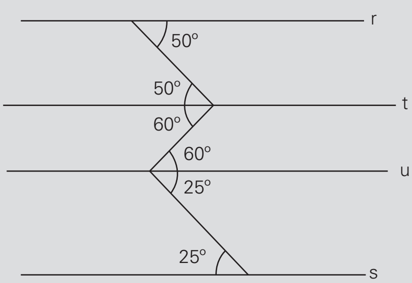


$x = \alpha$, pois são alternos internos. Analogamente, $z = \beta$. Da figura, temos:

$\alpha + y + \beta = 180°$

Assim, provamos que $x + y + z = 180°$.

17. Traçando as retas paralelas "t" e "u", temos:



Com os ângulos alternos internos que surgem com a nova paralela, podemos escrever:

$x = 60° + 25° \rightarrow x = 85°$

Logo, x mede 85°.

Estudo para o Enem

18. D

Através da simetria, é possível observar que o imóvel deverá estar sobre a mediatriz do segmento de reta que une o consultório do pai e o local de trabalho da mãe. Essa mediatriz corresponde à rua 4. Por observação, concluímos que a rua horizontal que cumpre a condição é a D.

Competência: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

19. C

Observando que há uma travessa horizontal unindo cada par de pernas e que após fechadas irão assumir uma posição vertical, pernas, podemos concluir que a alternativa c) é que a melhor representa a vista lateral de uma cadeira fechada.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. A

O ângulo adjacente a θ_2 é correspondente a θ_1. Portanto: $\theta_1 + \theta_2 = 180° \rightarrow \theta_2 = 173°$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

7 ÂNGULOS NO TRIÂNGULO

Comentário sobre o módulo

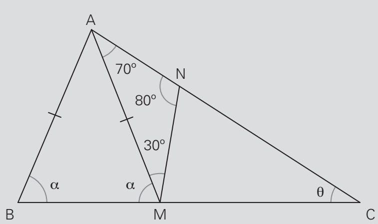
É interessante demonstrar, por meio do paralelismo, a soma dos ângulos internos do triângulo. Tal procedimento reforça a importância do paralelismo.

Enfatize a construção do ângulo externo, mostrando a necessidade de prolongarmos o lado do triângulo. Destaque o teorema do ângulo externo, que sempre encurta as resoluções dos problemas apresentados.

Sobre a soma dos ângulos externos, mostre que o resultado obtido decorre do fato de um ângulo interno e seu adjacente (externo) serem suplementares.

Exercícios propostos

7. C



Observando o triângulo, temos que:

$AB = AM \rightarrow A\hat{M}B = \alpha$

Utilizando o teorema do ângulo externo no triângulo AMC temos:

$\alpha = 70° + \theta \rightarrow \alpha - \theta = 70°$

Logo, $\alpha - \theta = 70°$

8. B

Pelo teorema do ângulo externo aplicado no triângulo ACD temos:

$A\hat{D}E = C\hat{A}D + D\hat{C}A \rightarrow A\hat{D}E = \alpha + 40°$

Logo, aplicando novamente o teorema no triângulo ADE,

$A\hat{E}B = A\hat{D}E + D\hat{A}E$

$70° = \alpha + 40° + \alpha$

$2\alpha = 70° - 40°$

$\alpha = \dfrac{30°}{2} \rightarrow \alpha = 15°$

Portanto, o valor de $\alpha = 15°$.

9. D

Observando o triângulo, verificamos que:

$\overline{CD} // \overline{EF}$, então temos que $\hat{F} = \alpha$

$med(\overline{AB}) = med(\overline{BC})$, então temos que $A\hat{C}B = \theta$

$\overline{BC} // \overline{DE}$, então temos $\hat{E} = \theta + \beta$

Como a soma dos ângulos internos de um triangulo é 180° temos:

$\theta + \alpha + \theta + \beta = 180 \rightarrow \theta = \dfrac{180° - \alpha - \beta}{2}$

Portanto, O valor de θ escrito em função de α e β é $\theta = \dfrac{180° - \alpha - \beta}{2}$

10. Como é bissetriz do ângulo $M\hat{O}N$, então calculando $\overline{MP}$ e $\overline{NP}$, temos:

$\dfrac{52}{x^2+1} = \dfrac{32}{3x+1} \rightarrow (x^2+1) = \dfrac{52}{32} \cdot (3x + 1) \rightarrow$

$\rightarrow (x^2 + 1) = \dfrac{13}{8} \cdot (3x + 1) \rightarrow 8 \cdot (x^2 + 1) =$

$= 13 \cdot (3x + 1) \rightarrow$

$\rightarrow 8x^2 + 8 = 39x + 13 \rightarrow 8x^2 - 39x - 5 = 0$

Resolvendo a equação do 2° grau, obtemos:

$x = -\dfrac{1}{8}$ (não convém) ou $x = 5$

Substituindo valor de x, obtemos:

$x^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$ e $3x + 1 = 3 \cdot 51 = 16$

Assim, temos que:

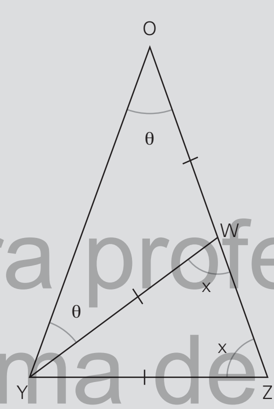
$\overline{MN} = 16 + 26 = 42$

Logo, $\overline{MN} = 42$ cm

11. A

Seja $C\hat{B}D = x$. Logo, dado que $\overline{CB} = \overline{CE}$, $C\hat{E}B = x + 39°$. Em consequência, usando o fato de a soma dos ângulos internos do triângulo BED ser igual a 180°, obtemos $E\hat{D}B = 102° - x$. Além disso, como $\overline{AB} = \overline{AD}$, segue que $A\hat{B}E = 63° - x$. Portanto, a medida do ângulo ABC é a soma das medidas dos ângulos ABE, EBD e CBD. Ou seja, $63° - x + 39° + x = 102°$.

12. De acordo com o enunciado, temos o seguinte triângulo:



Logo, n o triângulo YWO pelo teorema do ângulo externo, temos $x = 2 \cdot \theta$ e no triângulo OYZ temos $\theta + 2x = 180° \to 5 \cdot \theta = 180° \to \theta = 36°$.

Portanto, $Y\hat{O}Z = 36°$.

13. C

O enunciado nos diz que o triângulo é equilátero, então temos que a medida de todos os lados são iguais, logo, pode-se igualar quaisquer dois lados. Assim, temos:

$\overline{AB} = \overline{BC} \to 3x + y = x + 3y$

$2x = 2y \to x = y$

Como $x = y$ e fazendo $\overline{AB} = \overline{AC}$ temos:

$\overline{AB} = \overline{AC} \to 3x + y = 2x + y + 2 \to 3x + x =$
$= 2x + x + 2$

$x = 2$

Como $x = 2$ temos que $y = 2$ uma vez que $x = y$. Assim, os lados são dados por:

$\overline{AB} = 3x + y = 6 + 2 = 8$

$\overline{AC} = 2x + y + 2 = 4 + 2 + 2 = 8$

$\overline{BC} = x + 3y = 2 + 6 = 8$

E o perímetro $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 8 + 8 + 8 =$
$= 24 \to 24$ u.c.

14. A

Sabendo que a condição de existência de um triangulo é: a soma de dois lados quaisquer deve ser maior que o terceiro lado e, o valor absoluto da diferença entre estes dois lados, deve ser menor que o terceiro lado.

Dessa maneira, temos que a última afirmação é incorreta pois, $10 + 10 < 21$ e não atende a condição necessária.

E mais,

I. $|10 - 8| < 6 < 10 + 8$

II. $|9 - 15| < 12 < 9 + 15$

III. $|12 - 15| < 12 < 12 + 15$

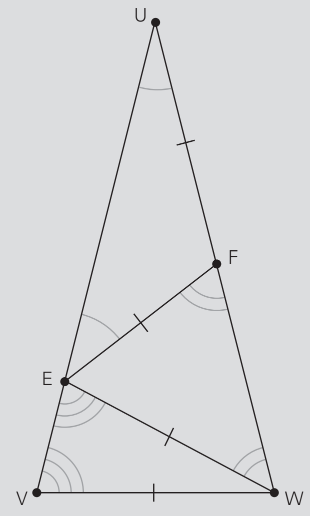
IV. $|9 - 8| < 4 < 9 + 8$

V. $|10 - 10| < 21 < 10 + 10$ (Falso)

Portanto, as alternativas I, II, III e IV são verdadeiras.

15. C

De acordo com o enunciado, podemos considerar o seguinte triângulo



Se $\overline{EF} = \overline{FU}$, então o triângulo EFU é isósceles de base EU. Então, tomando $E\hat{U}F \equiv U\hat{E}F = \theta$, pelo teorema do ângulo externo, temos $E\hat{F}W = 2\theta$. Ademais, $\overline{EF} = \overline{EW}$ implica em EFW isósceles de base FW. Assim, $E\hat{W}F = 2\theta$.

Tomando o triângulo EUW pelo teorema do ângulo externo, concluímos que $V\hat{E}W = 3\theta$. Portanto, sendo $\overline{VW} = \overline{EW}$ e $\overline{VU} = \overline{WU}$, temos

$U\hat{V}W \equiv V\hat{W}U = 3\theta$.

Finalmente, do triângulo UVW encontramos:

$\theta + 3\theta + 3\theta = 180° \leftrightarrow \theta = \dfrac{180°}{7}$.

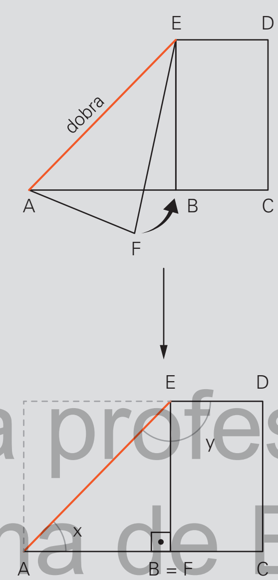
Em consequência, temos:

$25° = \left(\dfrac{175}{7}\right)^{\circ} < V\hat{U}W < \left(\dfrac{182}{7}\right)^{\circ} = 26° < 27°$.

Portanto, podemos afirmar corretamente que a medida do ângulo $V\hat{U}W$ é maior do que 25° e menor do que 27°.

16. D

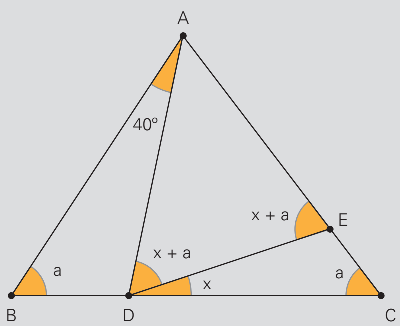
A única maneira possível para a dobradura é:



Assim, fica fácil verificar que o triângulo ABE é isósceles. Então: $B\hat{A}E = B\hat{E}A = 45°$.

Portanto, $x = 45°$ e $y = 90° + 45° = 135°$.

17. As informações sobre triângulos isósceles e o teorema do ângulo externo possibilitam montar a seguinte figura:



Aplicando o teorema do ângulo externo no triângulo ABD, temos:

$2x + a = 40° + a \rightarrow 2x = 40° \rightarrow x = 20°$

Estudo para o Enem

18. C

Sabendo que o triângulo ABC é isósceles e o ângulo $B\hat{A}C = 120°$, os ângulos $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 30°$.

Então, como $A\hat{B}C = 30°$ e os segmentos DE e FG são perpendiculares à base BC, ou seja, formam um ângulo reto entre a base e os segmentos, o ângulo $B\hat{D}E$ oposto pelo segmento DE também é reto e vale 90°.

Desta maneira, para obter o valor de x deve-se somar todos ângulos do triângulo BDE:

$x + B\hat{D}E + E\hat{B}D = 180°$

$x + 90 + 30 = 180 \rightarrow x = 60°$

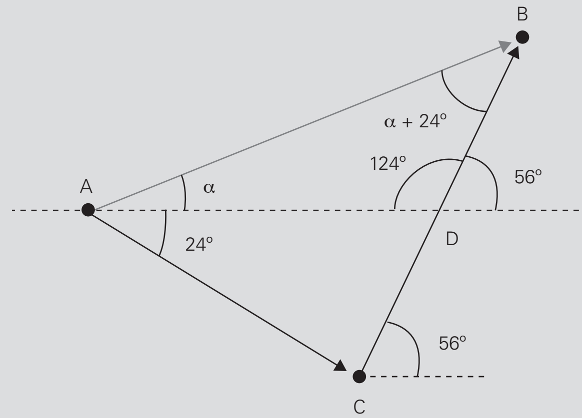
Portanto, a medida do ângulo é $B\hat{E}D$ é 60°.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. B

Sabendo que os dois lados descritos medem 30 cm logo temos um triˆAngulo isósceles e que o ângulo D possui os ângulos suplementares 56° + 124° considere a situação:



Igualando a soma dos ângulos internos do triangulo ADB a 180° temos:

$\alpha + 124° + \alpha + 24° = 180° \rightarrow$
$\rightarrow 2\alpha = 180° - 124° - 24° \rightarrow$
$\rightarrow 2\alpha = 32° \rightarrow \alpha = \dfrac{32°}{2} \rightarrow \alpha = 16°$

Logo, elas deveriam ter iniciado sob a medida $\alpha = 16°$ em relação ao eixo horizontal para realizar a prova com o menor percurso.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

20. D

Na figura há dois triângulos retângulos. O ângulo que está escondido é suplementar do ângulo agudo. Então:

$90° - 38° = 52°$ e $90° - 50° = 40°$

Logo, a resposta ao problema é $52° + 40° = 92°$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

8 ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Comentário sobre o módulo

Neste módulo, o professor pode utilizar questões do Enem para contextualizar o objeto de estudo. Aquelas desenvolvidas nesse padrão possibilitam abordar alguns conceitos de forma interdisciplinar. Algumas exploram obras de arte e outras estão no contexto da Física, apresentando ilusão de óptica e associação de espelhos planos. Explore essa oportunidade de trabalho contextualizado.

Para ir além

O professor pode demonstrar matematicamente as propriedades dos ângulos inscritos em uma circunferência, provar que o triângulo inscrito em uma semicircunferência é um triângulo retângulo e demonstrar as propriedades dos ângulos de vértice interno e ângulos de vértice externo.

Se o professor julgar necessário, também pode usar o *GeoGebra*, disponível gratuitamente em *<www.geogebra.org>* para construir a aula. Esse software possibilita que, uma vez definido um ângulo central, por exemplo, o ângulo inscrito seja determinado; ao movimentar um deles, o outro é alterado automaticamente.

Exercícios Propostos

7. B

Seja S um ponto do menor arco $\widehat{BE}$.

Como $\widehat{BPC} = \widehat{CQD} = \widehat{DRE} = 2\alpha$, segue-se que $\widehat{BSE} = 360° - 6\alpha$. Logo, como $E\hat{A}B$ é excêntrico exterior, temos

$$E\hat{A}B = \frac{\widehat{BQE} - \widehat{BSE}}{2}$$

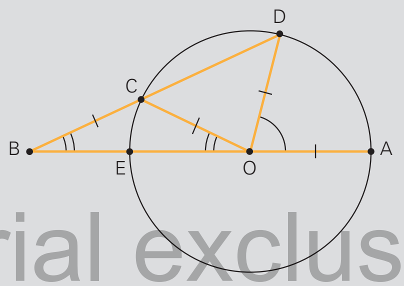
$$60° = \frac{6\alpha - (360° - 6\alpha)}{2}$$

$$60° = 6\alpha - 180°$$

$$\alpha = 40°$$

8. E

Considere a figura:



Sejam $A\hat{O}D = \alpha$ e $C\hat{O}B = \beta$

Sabendo que $\overline{BC} = \overline{OA} = \overline{OC}$, vem $O\hat{B}C = \beta$. Daí, como $\widehat{AD} = \alpha$ e $\widehat{CE} = \beta$, encontramos

$$O\hat{B}C = \frac{\widehat{AD} - \widehat{CE}}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 3$$

9. A

Sabendo que $\overline{AP} = \overline{AD}$, tem-se $A\hat{D}P \equiv B\hat{P}D$. Além disso, os ângulos inscritos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ subentendem o mesmo arco, bem como os ângulos $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$. Logo, $A\hat{B}C \equiv A\hat{D}C$ e $B\hat{A}D \equiv B\hat{C}D$. Por outro lado, $B\hat{A}D$ é ângulo externo do triângulo ADP e, portanto, $B\hat{A}D = 2 \cdot A\hat{D}P$. Desse modo, como $AD \perp BC$ e sendo Q o ponto de interseção das cordas AD e BC, vem, do triângulo QCD

$$A\hat{D}C + B\hat{C}D = 90°$$

$$A\hat{D}P + B\hat{A}D = 90°$$

$$A\hat{D}P + 2 \cdot A\hat{D}P = 90°$$

$$A\hat{D}P = 30°.$$

10. E

Se o lado AB refere-se a um polígono regular de 6 lados, o arco AB mede 60°.

Se o lado CD refere-se a um polígono regular de 10 lados, o arco CD mede 36°.

A circunferência tem um total de 360°. Sendo assim, o ângulo pedido será:

$$\alpha = \frac{360 - 60 - 36}{2}$$

$$\alpha = 132°$$

11. D

O ângulo CAB é inscrito; logo, o menor arco BC mede 80°. Como $\overline{AB}$ é diâmetro, o arco AB mede 180° e então, o arco ABC mede 180° + 80° = 260°. O ângulo inscrito ADC "enxerga" o arco ABC, portanto $A\hat{D}C$ = 130°.

12. C

Os ângulos DAB e BCD são congruentes, pois são inscritos e observam o mesmo arco. Então, $D\hat{A}B = \widehat{BD} = 80°$.

$\widehat{AD} = \widehat{BD} = 80°$, pois o segmento CD é bissetriz do ângulo do vértice C. Logo, $\hat{C} = 80°$.

Os ângulos dos vértices B e C são congruentes, pois o triângulo ABC é isósceles. Logo, nesse triângulo temos: $80° + 80° + \alpha = 180° \rightarrow \alpha = 20°$.

13. D

Como o ângulo de medida x é excêntrico exterior, e sendo y a medida do arco BCP e z a medida do menor arco AP, temos:

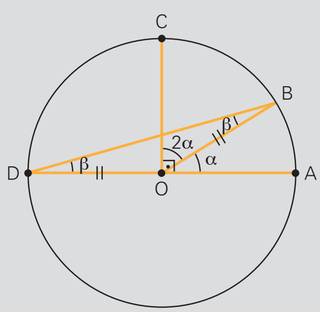
$x = \dfrac{y-z}{2} = \dfrac{194° - (360° - 194° - 100°)}{2} =$

$= \dfrac{194° - (66°)}{2} = \dfrac{128°}{2} = 64°.$

14. Sejam ABC os vértices do triângulo retângulo da figura, sendo $\hat{A} = 90°$ e $\hat{B} = 50°$, então: $\hat{C} = 50°$. Considere P e Q, respectivamente, os pontos de intersecção de AC e BC com a circunferência. Como o ângulo A é inscrito, tem-se que a medida do arco PQB mede 180°. Consequentemente, o arco PAB mede (360° – 180°) = 180°.
O ângulo PQB é reto, pois é inscrito e "enxerga" o arco PAB. Portanto, o triângulo CPQ é retângulo. Desse triângulo, temos: $\alpha = 90° - 40° = 50°$.

15. O ângulo de vértice N é inscrito, logo a medida do menor arco AD é 2y e o ângulo de vértice P é excêntrico externo. Então, $x = \dfrac{(46° + 42°) - 2y}{2} \rightarrow$
$\rightarrow 2x + 2y = 88° \rightarrow x + y = 44°.$

16. Do enunciado e da figura, temos:



Se $A\hat{O}B = \alpha$, $B\hat{O}C = 2\alpha$.

$A\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}C$

Como $A\hat{O}C = 90°$, $A\hat{O}B = \alpha$ e $B\hat{O}C = 2\alpha$,

$90° = \alpha + 2\alpha$

$90° = 3\alpha$

$\dfrac{90°}{3} = \alpha$

$\alpha = 30°$

Seja r a medida do raio do círculo.

$\overline{OD} = \overline{OB} = r$, logo, o triângulo ODB é isósceles. Então, se $O\hat{D}B = \beta$, $D\hat{B}O = \beta$.

Note que $A\hat{O}B$ é ângulo externo do triângulo ODB portanto, $\alpha = 2\beta$

Como $\alpha = 30°$, $\beta = 15°$.

Assim, $O\hat{D}B = 15°$.

17. Os ângulos $B\hat{E}D$ e $B\hat{P}D$ são, respectivamente, excêntricos interno e externo. Sendo x e y as medidas dos arcos BRD e AQC, respectivamente, temos:

$88° = \dfrac{x+y}{2} \rightarrow x + y = 176°$ (I) e

$32° = \dfrac{x-y}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x - y = 64°$ (II). Fazendo (I) + (II):

$x = 120°$ e $y = 56°$.

Estudo para o Enem

18. C

Se $\overline{AC} = R$, temos o triângulo AFC equilátero. Logo, $\theta = 60°$.

Competência: utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

19. B

$3' = \left(\dfrac{3}{60}\right)^{\circ} = 0{,}05°$

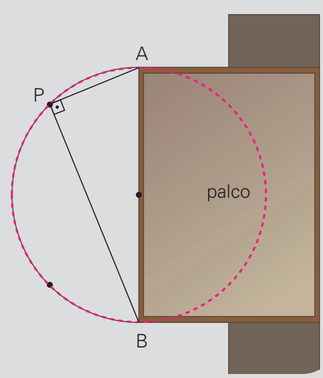
$124°3'0'' = 124{,}05°$

Competência: utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. E

Para qualquer posição do ponto P, o ângulo $A\hat{P}B$ situado na semicircunferência (mostrada na figura) é constante, ou seja, reto.



$A\hat{P}B = \dfrac{180°}{2} = 90°$

Logo, o trilho deverá ser aquele representado na figura da alternativa E.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

9 COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Comentário sobre o módulo

Neste módulo, o professor pode demonstrar o valor de π usando um barbante e materiais circulares com diferentes diâmetros. Também deve ser enfatizada a obtenção do número π de forma geométrica, com desenhos sucessivos dos polígonos inscritos ou uso de software de matemática. Por fim, o comprimento da circunferência é uma medida relevante na produção de peças de qualquer tipo de aparelho que funcione por meio de torque. Logo, pode-se reforçar o uso de circunferências em objetos diversos.

Para ir além

O cálculo do número π foi desenvolvido por egípcios, árabes, indianos e gregos na Antiguidade – cada um ao seu tempo e do seu jeito. O professor pode sugerir uma pesquisa sobre a descoberta do número π em diferentes tempos e civilizações.

Exercícios Propostos

7. C

Como a praça tem 30 m de raio, basta calcular o comprimento da praça (C_p) e dividi-lo pelo total de refletores. Assim, temos:

$C_p = 2 \cdot \pi \cdot r \rightarrow C_p = 2 \cdot (3{,}15) \cdot 30$ m

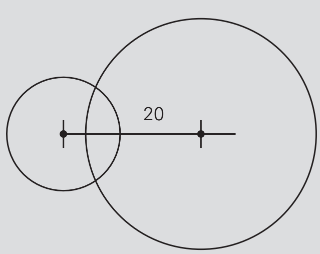
$\therefore C_p = 189$ m

Dividindo por 21, temos:

$\dfrac{189\text{ m}}{21} = 9$ m de distância entre cada dois refletores vizinhos.

Portanto, os refletores deverão ter 9 m de distância entre cada dois refletores vizinhos.

8. C



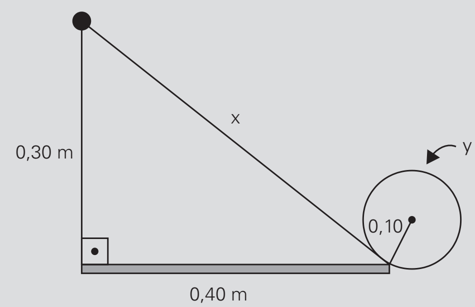
$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$

$15 - 8 < 20 < 15 + 8$

$7 < 20 < 22$

$\therefore$ As circunferências são tangentes.

9. Considere a figura a seguir.



Considerando que x é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo da figura e que y é o comprimento da circunferência de raio 0,10 m, podemos escrever que:

$x^2 = (0{,}30)^2 + (0{,}40)^2$

$\therefore x = 0{,}50$ m

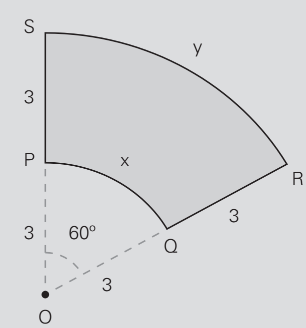
$y = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}10 \rightarrow y = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}10$

$\therefore y = 0{,}628$ m

Logo, $x + y \rightarrow 0{,}50 + 0{,}628 = 1{,}128$ m $\cong 1{,}13$ m.

10. C

Considerando x a medida do arco com extremidades nos pontos P e Q e sendo Y a medida do arco com extremidades nos pontos R e S, temos:



$$x = \frac{(2 \cdot \pi \cdot 3) \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \pi$$

$$y = \frac{(2 \cdot \pi \cdot 6) \cdot 60^\circ}{360^\circ} = 2 \cdot \pi$$

Logo, o perímetro da figura será:

$P = 3 + 3 + x + y \rightarrow P = 6 + \pi + 2\pi$

$\therefore P = 3\pi + 6$

11. C

Na figura temos 8 semicircunferências com diâmetros $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_8$.

A soma dos comprimentos de todas as semicircunferências será dada por:

$$S=\frac{d_1\cdot\pi}{2}+\frac{d_2\cdot\pi}{2}+\frac{d_3\cdot\pi}{2}+\frac{d_4\cdot\pi}{2}+\frac{d_5\cdot\pi}{2}+\frac{d_6\cdot\pi}{2}+\frac{d_7\cdot\pi}{2}+\frac{d_8\cdot\pi}{2}$$

$$S=\pi\cdot\frac{d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6+d_7+d_8}{2}$$

$$S=\pi\cdot\frac{AB}{2}$$

$$S=\frac{\pi\cdot x}{2}$$

12. Se a baratinha percorreu toda a faixa de Möebius, então ela percorreu duas vezes o comprimento da faixa. Assim, o comprimento da faixa será igual à metade da distância percorrida.

Para encontrar o raio da base da superfície cilíndrica obtida com a faixa retangular, basta igualar esta distância ao comprimento do círculo da base, ou seja:

$$\frac{7{,}2}{2}=2\pi R\rightarrow R=0{,}6\text{ m}$$

13. B

Se $\overline{PQ}$ é o lado de um hexágono regular de lado de medida 3 cm, então o ângulo $P\hat{O}Q$ mede 60°, e o triângulo PQO é equilátero. Logo, os segmentos $\overline{PO}$ e $\overline{QO}$ têm a mesma medida que o raio da circunferência que mede 3 cm. Assim, pode-se escrever:

$360° - 60° = 300°$ percorridos pela formiga

$\frac{5}{6}$ do comprimento total da circunferência

$$d_{formiga}=\frac{5}{6}\cdot 2\cdot\pi\cdot R\rightarrow d_{formiga}=\frac{5}{6}\cdot 2\cdot\pi\cdot 3$$

$$\therefore d_{formiga}=5\pi\text{ cm}$$

14. A

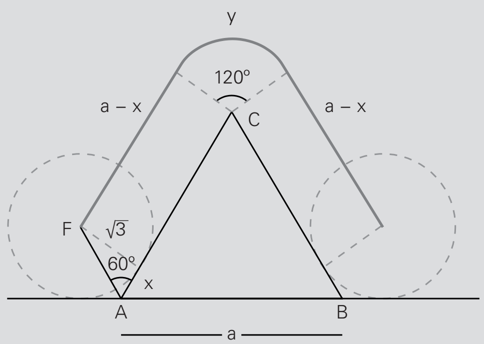
Determinando as raízes da equação $x^2-7x-44=0$, temos $x=-4$ ou $x=11$.

Logo, o raio da circunferência é $x=11$. Portanto, o comprimento da circunferência será dado por:

$$C=2\cdot\pi\cdot r\rightarrow C=2\cdot 3{,}14\cdot 11$$

$$\therefore C=69{,}08$$

15. Considere a figura a seguir.



Na figura, temos:

$$\text{tg } 60° = \frac{\sqrt{3}}{x}\rightarrow x=1$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\rightarrow a=4$$

$$y=\frac{2\pi\cdot\sqrt{3}\cdot 120°}{360°}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, a distância d percorrida pelo centro F é dada por:

$$d=a-x+a-x+y=\left(6+\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}\right)\text{dm}$$

16. C

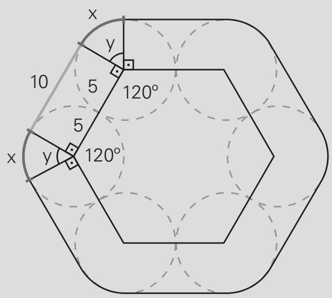
O comprimento do percurso realizado por Maria é dado por

$$\frac{1}{8}\cdot 2\pi\cdot OC+OC-OD\cong\frac{1}{8}\cdot 2\cdot 3\cdot 42+$$
$$+42-5\cong 31{,}5+37\cong 68{,}5\text{ m.}$$

Portanto, segue que $68{,}5\in[65{,}70[$.

17. D

Conforme enunciado, pode-se escrever:



$$C_{correia}=6\cdot 10+6x$$

$$y=360-120-90-90\rightarrow y=60$$

$$x=\frac{2\pi R\cdot y}{360}\rightarrow x=\frac{2\pi\cdot 5\cdot 60}{360}\rightarrow x=\frac{5\pi}{3}\text{ cm}$$

$$C_{correia} = 6 \cdot 10 + 6 \cdot \frac{5\pi}{3}$$

$$C_{correia} = 60 + 10\pi \text{ cm}$$

18. B

A posição dos cavalos é irrelevante, pois ambos completarão as 10 voltas, iniciando e terminando o percurso no mesmo ponto. Assim, sobre a distância percorrida por cada cavalo do carrossel, pode-se escrever:

$$D_{C1} = 10 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_1 = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \rightarrow D_{C1} = 240$$

$$D_{C2} = 10 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_2 = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \rightarrow D_{C2} = 180$$

Dessa forma, a diferença das distâncias percorridas entre os dois cavalos será 60 m.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. E

A distância percorrida pelo homem em sua caminhada diária corresponde a

$$15 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cong 4500 \text{ m} = 4,5 \text{ km}.$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. D

Sendo R o raio das rodas da bicicleta; C o comprimento da circunferência da roda; N o número de voltas dadas na distância percorrida, podemos calcular:

$$R_A = \frac{60}{2} \rightarrow R_A = 30 \text{ cm} \rightarrow R_A = 0,3 \text{ m}$$

$$C_A = 2 \cdot \pi \cdot R \rightarrow C_A = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,3 \rightarrow$$
$$\rightarrow C_A = 1,884 \text{ m}$$

$$N_A = \frac{10\ 000}{1,884} \cong 5\ 307,86 \text{ voltas}$$

$$R_B = \frac{40}{2} \rightarrow R_B = 20 \text{ cm} \rightarrow R_B = 0,2 \text{ m}$$

$$C_B = 2 \cdot \pi \cdot R \rightarrow C_B = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,2 \rightarrow$$
$$\rightarrow C_B = 1,256 \text{ m}$$

$$N_B = \frac{5\ 000}{1,256} \cong 3\ 980,89 \text{ voltas}$$

$$\frac{N_A}{N_B} = \frac{5\ 307,86}{3\ 980,89} \cong 1,33333 \cong \frac{4}{3}$$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

10 POLÍGONOS REGULARES

Comentário sobre o módulo

Na hora de explorar com os alunos as fórmulas para soma dos ângulos internos e do número de diagonais, insista com eles no raciocínio que levou a elas, pois ter em mente as ideias que resultaram nas expressões facilita recordá-las. A ideia sempre é mais importante que o resultado em si.

Enfatize também que os resultados que estamos estudando são válidos para polígonos convexos, o que não se aplica em polígonos não convexos.

Mostre aos alunos como a soma dos ângulos é vantajosa no caso de polígonos regulares, por não depender do número de lados.

Exercícios Propostos

7. E

Se o lado AB refere-se a um polígono regular de 6 lados, então o arco AB mede 60°.

Se o lado CD refere-se a um polígono regular de 10 lados, então o arco CD mede 36°.

A medida do ângulo excêntrico interno APB é $\frac{60°+36°}{2}=\frac{96°}{2} = 48°$. Como o ângulo BPD é suplemento de APB: $B\hat{P}D = 180° - 48° = 132°$

8. C

O polígono de n lados tem n ângulos internos. Se dois desses ângulos medem 125°, então os outros (n – 2) ângulos medem 165°. Sendo S_i a soma dos ângulos internos:

$125° \cdot 2 + 165° \cdot (n - 2) = S_i = 180° \cdot (n - 2) \rightarrow$
$\rightarrow 250° = 25° \cdot (n - 2) \rightarrow n - 2 = 10 \rightarrow n = 12$

9. Polígono 1: (n + 4) lados. A_1: medida do ângulo interno.

Polígono 2: n lados. A_2: medida do ângulo interno. Do enunciado, temos: $A_1 - A_2 = 15° \rightarrow$

$\rightarrow \left(180° - \frac{360°}{n+4}\right) - \left(180° - \frac{360°}{n}\right) = 15° \rightarrow$

$\rightarrow \frac{360°}{n} - \frac{360°}{n+4} = 15° \rightarrow 15n^2 + 60n = 360n + 1440 - 360n \rightarrow n^2 + 4n - 96 = 0.$

Portanto, n = –12 ou n = 8. Como n é natural, n = 8. Os polígonos são octógono e dodecágono.

10. B

n = número de vértices ou lados

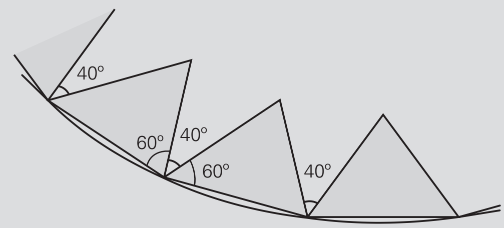
$S_{externos} = 360° = n \cdot 18° \rightarrow n = 20$ vértices ou lados

Diagonais $= \frac{n \cdot (n-3)}{2} = \frac{20 \cdot (20-3)}{2} = 170$

11. C

Os vértices do pentágono regular dividem a circunferência em cinco arcos congruentes de medida igual a $\frac{360°}{5} = 72°$. Além disso, como $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência nos pontos A e B, segue que os ângulos $O\hat{A}P$ e $O\hat{B}P$ são retos. Em consequência, $A\hat{P}B$ é o suplemento do ângulo central $A\hat{O}Q$ ou seja, 180° – 72° = 108°.

12. E



A medida de cada um dos ângulos internos do polígono será 60° + 60° + 40° = 160°.

Portanto, cada um de seus ângulos externos será de 20°. Admitindo que n é o número de lados do polígono regular, podemos escrever:

$\frac{360°}{n} = 20° \rightarrow n = \frac{360°}{20°} \rightarrow n = 18$

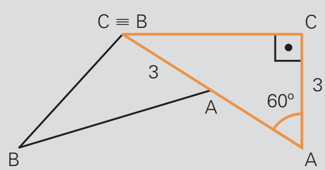
Logo, o número de triângulos será igual ao número de lados, ou seja, 18.

13. a) Sendo o ângulo externo (e) e o ângulo interno (i), $e = \frac{360°}{6} = 60°$.

Logo, i = 180° – 60° = 120°.

b) x = 60° (ângulo externo do hexágono menor) e y = 30° (complemento de x no triângulo retângulo).

c) Da figura do enunciado, temos:



x = medida do lado do hexágono menor = AB (em laranja) – 3.

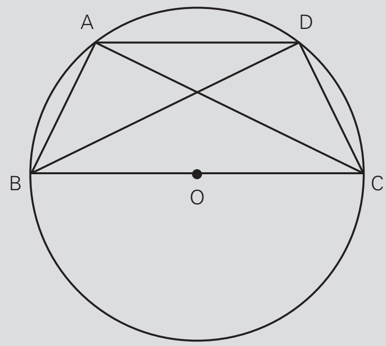
No triângulo ABC (em vermelho), temos:

$\cos 60° = \frac{3}{AB} \rightarrow \overline{AB} = 6$

Logo, x = 6 – 3 = 3. O perímetro do hexágono menor $6 \cdot x = 6 \cdot 3 = 18$.

14. B

Lembrando que todo triângulo retângulo é inscritível na semicircunferência, e como os triângulos ABC e DBC são retângulos de mesma hipotenusa, temos a figura abaixo, sendo O o centro da circunferência:



Os ângulos ACB e ADB são congruentes, pois são ângulos inscritos que "enxergam" o mesmo arco (menor arco AB). Logo, $A\hat{D}B = 33°$.

15. E

A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é sempre 360°. Então:

$n \cdot 15° = 360° \rightarrow n = 24$.

Logo, o número de diagonais de um polígono de 24 lados será dado por:

$$d = \frac{24 \cdot (24-3)}{3} = 168$$

16. A

A medida de cada ângulo interno do pentágono regular ABCDE é dada por:

$$\frac{180° \cdot (5-2)}{5} = \frac{180° \cdot 3}{5} = \frac{540°}{5} = 108°$$

Logo, sendo os triângulos ABC e BCD isósceles congruentes, temos:

$$C\hat{A}B \triangleq A\hat{C}B \equiv D\hat{B}C \equiv B\hat{D}C = \frac{180°+108°}{2} = 36°$$

Em consequência:

$$A\hat{P}B \equiv D\hat{P}C \equiv D\hat{C}P = 72°$$

Portanto, como o triângulo AP é isósceles de base PB, segue que $\overline{AP} = 2$ cm. Assim, pela semelhança dos triângulos ABC e BPC, encontramos:

$$\frac{2+\overline{PC}}{2} = \frac{2}{\overline{PC}} \rightarrow \overline{PC}^2 + 2\overline{PC} - 4 = 0 \rightarrow \overline{PC} = \left(-1+\sqrt{5}\right) \text{ cm}$$

Logo,

$$\overline{AC} = \overline{AP} + \overline{PC} = \left(1+\sqrt{5}\right) \text{ cm}$$

17. C

Como se trata de um polígono regular, a soma dos ângulos internos será igual a $144° \cdot n$, sendo n o número de lados do polígono. Pela soma dos ângulos internos (S), tem-se:

$S = 144n = 180° \cdot (n-2) \rightarrow$
$\rightarrow 144n - 180 = -360 \rightarrow 36n = 360 \rightarrow n = 10$

Sabendo que o polígono tem $n = 10$ lados, calcula-se o número de diagonais (d):

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2} = \frac{10 \cdot (10-3)}{2} = \frac{70}{2} \rightarrow d = 35$$

18. C

Sabemos que um pentágono é formado por cinco triângulos. Se o pentágono for 100%, então cada triângulo equivale a 20% da área do pentágono. De acordo com o enunciado, os carboidratos representam 60%, ou seja, três triângulos. Proteínas representam 10%, ou seja, metade de um triângulo. Gorduras representam 30%, isto é, um triângulo e meio. Portanto, a figura correta é o pentágono.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. C

Observação :108 e 180 = 108° e 180°
Então, temos:
pentágono retangular → z é o ângulo

$S_{internos} = 180° \cdot (n-2) = 180° \cdot (5-2) = 540°$

$$z = \frac{S_{internos}}{n} = \frac{540°}{5} = 108°$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z = 108° \\ x = y \end{array}\right\} \rightarrow 2x + 108° = 180° \rightarrow x = y = 36°$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. B

A diagonal IJ liga vértices diametralmente opostos do hexágono inscrito na circunferência. Há apenas mais duas diagonais possíveis ligando vértices diametralmente opostos, ou seja, tendo o mesmo comprimento igual ao diâmetro. São elas: NQ e MP.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

11 PONTOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO

Comentário sobre o módulo

Enfatize a definição de cada ceviana notável. Os alunos não podem acabar este módulo confundindo mediana com bissetriz e mediatriz. Destaque a caracterização de bissetriz e mediatriz como lugares geométricos.

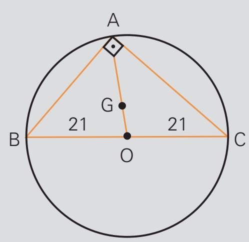
Sobre os pontos notáveis, os alunos devem entender quais cevianas geram aquele ponto e qual propriedade aquele ponto tem (no caso do baricentro, incentro e circuncentro). Por exemplo, em vários exercícios é dito que um ponto é o incentro, e o aluno deveria automaticamente pensar nas bissetrizes que geraram aquele ponto e desenhá-las, pois provavelmente serão úteis na resolução.

Finalmente, mostre como os pontos notáveis coincidem no triângulo equilátero. A relação entre lado, altura e propriedade do baricentro é frequente nos exercícios em que há triângulo equilátero.

Exercícios Propostos

7. C

Do enunciado, temos a figura:



Na figura, O é circuncentro, G é baricentro, A é ortocentro e AO é mediana. Sendo OG = x e AG = 2x (propriedade do baricentro), e como AO = 21 cm, temos: $x + 2x = 21 \rightarrow x = 7$ cm. Portanto, $AG = 2 \cdot 7 = 14$ cm.

8. C

O triângulo ABC é escaleno, pois seus lados têm medidas diferentes e qualquer triângulo pode ser inscrito numa circunferência. O centro dessa circunferência é o circuncentro do triângulo, ou seja, o ponto de encontro das mediatrizes dos lados.

9. A

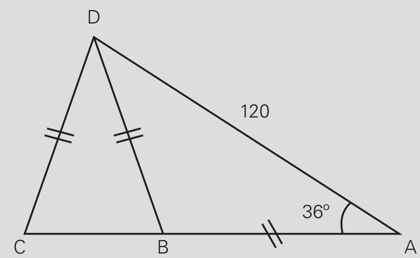
O é baricentro, pois os pontos notáveis no triângulo equilátero coincidem. Aplicando a propriedade do baricentro no triângulo ABC, temos $OA = 2 \cdot OD$. Como OD = OE (raio), temos OA = 4 cm. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AEO, pois $A\hat{E}O$ é reto (ângulo formado pelo raio e reta tangente no ponto de tangência), temos: $4^2 = 2^2 + AE^2 \rightarrow AE^2 = 12 \rightarrow$ $\rightarrow AE = 2\sqrt{3}$ cm.

10. D

O enunciado traz exatamente a definição da altura de um triângulo.

11. A

Do enunciado, temos:



Da figura: $A\hat{D}B = 360°$ e $C\hat{D}B = B\hat{C}D$. No triângulo ABD:

I) Aplicando o teorema do ângulo externo, vem:

$C\hat{D}B = 72° = B\hat{C}D$

$C\hat{B}D = 72° = B\hat{C}D$.

II) Aplicando a soma dos ângulos internos, temos $B\hat{D}C = 36°$.

Logo, $A\hat{D}C = A\hat{D}B + B\hat{D}C = 72°$. Assim, o triângulo ACD é isósceles, pois os ângulos ACD e CDA são congruentes. Portanto, os lados AD e AC são congruentes, ou seja, AC = 120 km.

12. E

Temos que pela propriedade do baricentro, o raio da circunferência inscrita equivale a $\frac{1}{3} \cdot h$.

Ainda pela propriedade do baricentro, notamos que o raio da circunferência circunscrita equivale a $\frac{2}{3} \cdot h$.

Como $\frac{2}{3} \cdot h = 18 \rightarrow 18 = 27$ cm, logo, o raio da circunferência inscrita é dado por $r = \frac{27}{3} = 3$ cm.

13.

(F) – O incentro é o centro da circunferência inscrita.

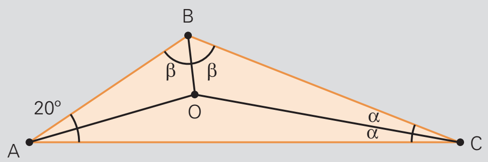
(V) – Essa é a definição de baricentro.

(F) – O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita.

(V) – Essa é a definição de ortocentro.

14. B

Do enunciado, temos a figura:

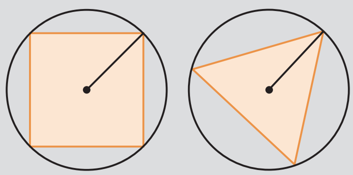


Como a soma dos ângulos internos é 180°, temos que $2\alpha + 2\beta = 160°$. Portanto, $\alpha + \beta = 80°$. Então, olhando para o triângulo BOC, temos:

$$B\hat{O}C + \alpha + \beta = 180° \therefore B\hat{O}C = 100°$$

15. B

Ambos os polígonos estão inscritos na mesma circunferência.



Primeiro vamos analisar o quadrado: sua diagonal é igual ao diâmetro da circunferência, ou seja, o dobro do raio (r). Portanto, $r = 4\sqrt{2}$ m.

Vejamos agora o triângulo: ele está inscrito na circunferência, cujo centro é o circuncentro, que é também o baricentro e o ortocentro, pois o triângulo é equilátero. Da propriedade do baricentro, temos que o apótema (a), que é a distância do circuncentro (baricentro) ao lado, é metade da distância do baricentro ao vértice oposto a esse lado, ou seja, o raio. Portanto,

$$a = \frac{r}{2} = 2\sqrt{2} \text{ m.}$$

16. E

Como o incentro (centro do circunferência inscrita) é também baricentro(G) e ortocentro, pois o triângulo é equilátero, aplicando a propriedade do baricentro tem-se que a distância de G a um vértice do triângulo (x) é dobro do raio(r), que é a distância de G ao lado oposto a esse vértice. Sendo $r = 10$ cm $\rightarrow x = 20$ cm. Logo, a mediana do triângulo equilátero mede $(10 + 20) = 30$ cm.

Lembrando que a mediana é também a altura e que a altura de um triângulo equilátero (h) de lado L é $h = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$30 = \frac{L\sqrt{3}}{2} \therefore L = 20\sqrt{3} \text{ cm.}$$ Portanto, o perímetro será $60\sqrt{3}$ cm.

17. Sendo G o baricentro (encontro das medianas), $AG = 2GM$. Logo, $x = 5$ cm.

Analogamente, $y = 2z$. Como $y + z = 18$, temos $z = 6$ cm e $y = 12$ cm.

Estudo para o Enem

18. A

Marcando três pontos na circunferência, determinamos os vértices de um triângulo nela inscrito. O centro da moeda é o circuncentro do triângulo obtido.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

19. C

Por se tratar de um triângulo equilátero, o encontro das alturas, o ortocentro, também é baricentro, circuncentro e incentro. A altura do triângulo é:

$H = \dfrac{L\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Da propriedade do baricentro, pode-se concluir que:

$$AO = \frac{2}{3} \cdot H = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

20. A

Na situação descrita, os átomos de oxigênio (O) são os vértices de um triângulo equilátero, e o átomo de enxofre (S) é o baricentro, incentro e ortocentro do triângulo. Pela propriedade do baricentro, pode-se afirmar que o segmento OS, ou seja, distância (d), é $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{L\sqrt{3}}{2} = \dfrac{248\sqrt{3}}{3}$ pm.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

12 QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS (I)

Comentário sobre o módulo

O assunto abordado são os quadriláteros notáveis. Antes de iniciar a leitura deste módulo, explore os conhecimentos prévios dos alunos, perguntando qual a soma da medida dos ângulos internos de um quadrilátero e quantas diagonais a figura tem. Provavelmente eles chegarão à conclusão de que a resposta é 360°, com duas diagonais, pelo fato de saberem que um quadrado tem quatro ângulos retos e duas diagonais. Chame a atenção para os significados de lado, ângulo e vértice opostos. Inicialmente analise com os alunos as características básicas de um paralelogramo e, em seguida, mostre as propriedades desse polígono.

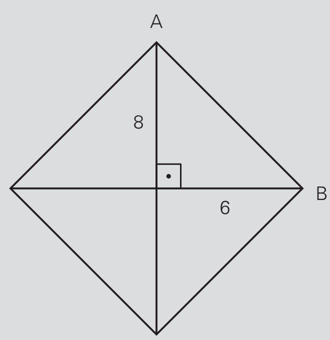
Para ir além

Enfatize que as demonstrações das propriedades dos quadriláteros estão na apostila e que, havendo tempo hábil, serão estudadas. No entanto, elas podem servir como material base para os alunos que querem se aprofundar, sendo coerente, pelo tempo de aula, que sejam focados os resultados finais e que as demonstrações sejam feitas caso haja tempo ou a grade curricular as comporte.

Exercícios Propostos

7. A

Desejamos obter o perímetro do losango. Do enunciado, vem a figura:

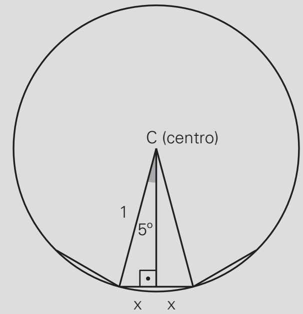


AB = 10 dm (triângulo retângulo pitagórico). Logo, o perímetro é $10 \cdot 4 = 40$ dm.

8. C

Marcando 36 pontos igualmente espaçados na circunferência, encontraremos um polígono regular de 36 lados inscrito nela.

A medida do ângulo central desse polígono será dada por $\frac{360°}{36} = 10°$. Podemos, então, desenhar a figura a seguir:



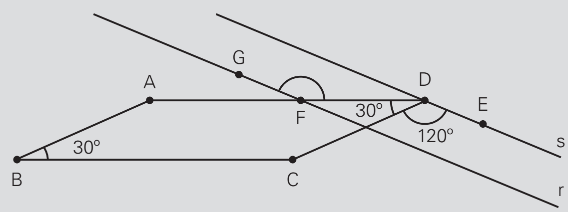
Na figura, os triângulos da direita e da esquerda são congruentes pelo caso cateto-hipotenusa.

$\text{sem } 5° = \frac{x}{1} \rightarrow 1 \cdot 0{,}08 = 0{,}08$

Portanto, o lado do polígono mede:

$2 \cdot x = 2 \cdot 0{,}08 = 0{,}16$

9. D

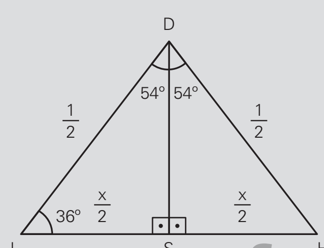


$A\hat{D}C = 30°$ (ângulos opostos do paralelogramo)

$G\hat{F}D = 30° + 120° = 150°$ (alternos internos)

10. B

Ao traçarmos a altura DS do triângulo DIH, temos que o triângulo DSI é congruente ao DSH pelo caso cateto-hipotenusa. Seja x a medida do lado IH e lembrando que o ângulo interno do pentágono mede $\frac{180°(5-2)}{5} = 108°$, temos a figura:



No triângulo DIS: $\cos 36° = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} = x$

Portanto, $x = \cos 36°$.

11. Soma: 01 + 16 = 17

01. Verdadeira, pois A é um ângulo inscrito na circunferência e mede a metade do arco que ele determina nessa circunferência.

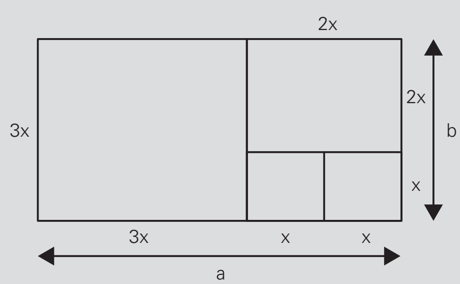
02. Falsa, pois a única propriedade do quadrilátero inscritível é ter os ângulos opostos suplementares.

04. Falsa. Mesma justificativa do item anterior.

08. Falsa. Mesma justificativa do item 02.

16. Verdadeira, pois ângulos BÂD e BÊD são ângulos inscritos na circunferência e "enxergam" o mesmo arco BD.

12. Do enunciado, vem a figura:



$\therefore \ \frac{b}{a} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$

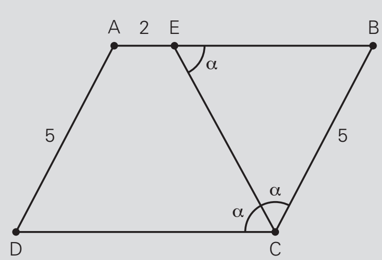
13. D

A distância percorrida é dada pela soma das dimensões da praça de alimentação, ou seja,

d = 16 + 12

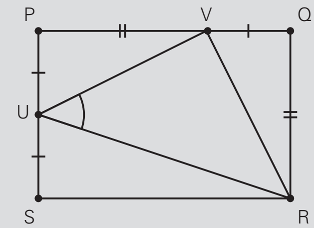
Portanto, d = 28 m.

14. E



BÊC = DĈE (alternos internos). Portanto, o triângulo BCE é isósceles, sendo BE = BC = 5. O perímetro do paralelogramo ABCD é 2 · (AB + + BC) = 2 · (7 + 5) = 24.

15. D



Sabendo que $\overline{VQ}$ = 1 m e U é ponto médio de PS, temos $\overline{PV} = \overline{QR}$ = 2 m e $\overline{PU}$ = 1 m.

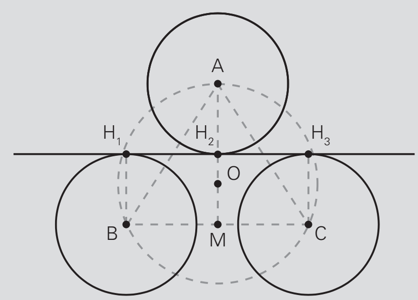
Aplicando Pitágoras nos triângulos PVU, VQR e USR, obtemos: VU = VR = $\sqrt{5}$ e UR = $\sqrt{10}$. Como é válido o teorema de Pitágoras no triângulo isósceles VUR, temos que ele é retângulo, sendo o ângulo UVR reto. Então, VÛR. = 45°.

16. Se ABCD e A'B'C'D são retângulos, e os percursos de Fábio e André têm o mesmo comprimento:

FB = $\widehat{B'C}$ - $\widehat{A'D}$

$\frac{2\pi}{5} \cdot (40 - 30) \cong 12$ m

17. Na figura abaixo, H_1, H_2 e H_3 são os pontos em que os círculos de centros A,B e C tangenciam a reta.



O é o centro do círculo circunscrito ao triângulo equilátero ABC, ou seja, o circuncentro ao triângulo ABC.

Como o triângulo ABC é equilátero, O é também ortocentro e baricentro. Então AM é altura e mediana desse triângulo.

Do fato de AM ser altura e AH_2 ser perpendicular à reta tangente, a reta tangente é paralela ao segmento BC. Analogamente, temos que o segmento BH_1 é paralelo a AM. Logo, BMH_2H_1 é um paralelogramo. Então: $BH_1 = MH_2$ e AM = $= AH_2 + BH_1 = 2r$, sendo r o raio da circunferência menor. Aplicando a propriedade do baricentro, $R = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}(2r) = \frac{4r}{3}$, sendo R o raio da circunferência maior. Portanto, $\frac{R}{r} = \frac{4}{3}$.

18. E

A nova arrumação (figura 2) consiste em reposicionar o retângulo da figura 1 de forma que seu comprimento passa a ser sua altura e vice-versa. De acordo com enunciado e as figuras, temos:

$4^{a} = 2b + 2 \rightarrow 2^{a} - 1$ (I)

e

$3b = 5^{a} + 5$ (II).

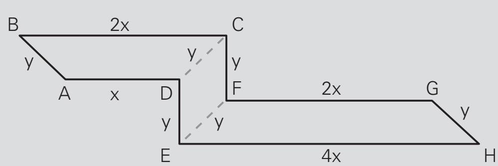
Substituindo (I) em (II), vem: $a = 8$ cm $\rightarrow b = 15$ cm. Portanto, a figura 2, ou seja, a nova arrumação tem comprimento de 45 cm e altura 32 cm. Dessa maneira, a troca será possível.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais espaço e forma.

19. B

Considerando os trapézios isósceles, o losango e as informações da questão, temos:



O perímetro da figura será dado pela soma de todos os lados. Logo:

$P = x + 4x + 2x + 2x + y + y + y + y$

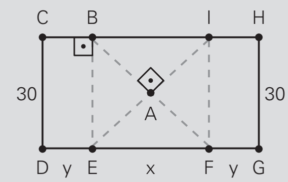
$P = 9x + 4y$

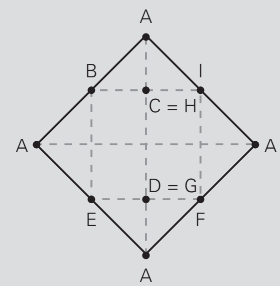
Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

20. D

Considere as figuras, em que IF//BE; $\overline{EF} = \overline{BI} = x$ e $\overline{DE} = \overline{BC} = \overline{FG} = \overline{HI} = \overline{FG} = y$.





É fácil ver que $\overline{BI} = \overline{BC} + \overline{HI} \rightarrow x = 2y$

Além disso, BEFI é quadrado, pois os triângulos $ABI \cong AIF \cong ABE$ (caso ALA).

Então, temos $x = 30$ e, portanto, $\overline{DG} = 2x = 2 \cdot \cdot 30 = 60$ cm

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

13 QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS II

Comentário sobre o módulo

Com o objetivo de aplicar de forma rápida e efetiva as classificações, características e propriedades dos quadriláteros, faça uma rápida e direta revisão dos conceitos trabalhados no módulo anterior.

Para ir além

O *software* GeoGebra é uma ótima ferramenta para auxiliar nas construções e demonstrações de geometria. Disponível em: *<www.geogebra.org>*.

Exercícios propostos

7. D

I. Verdadeira, pois os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares e, como são congruentes, são retos. Portanto, o paralelogramo de ângulos congruentes (retos) é o retângulo.

II. Verdadeira. Temos que h é a altura do trapézio e ℓ é a medida do lado não perpendicular às bases. Logo, como sen 30° $= \frac{h}{\ell}$, vem $h = \frac{\ell}{2}$.

III. Falsa. Para que a descrição do enunciado seja verdadeira, é necessário que o ponto de intersecção das diagonais seja ponto médio.

8. B

I. Incorreto, pois a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

II. Correta.

III. Incorreto, não há dados suficientes para se calcular o valor dos ângulos.

9. D

$x + x + 2x + 2x = 600$

$6x = 600$

$x = 100$ m

Logo, o maior lado mede $2x = 2 \cdot 100 = 200$ m.

10. Os paralelogramos têm pares de ângulos iguais. Logo:

$\hat{A} + \hat{C} = x$

$\hat{B} = \hat{D} = 4x$

A soma dos ângulos internos é igual a 180°. Então:

$\hat{A} + \hat{C} + \hat{B} + \hat{D} = 180°$

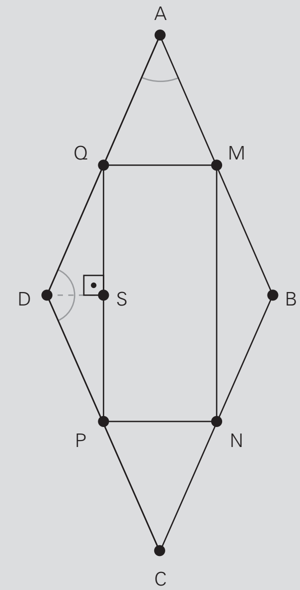
$x + x + 4x + 4x = 180°$

$10x = 180° \rightarrow x = 18°$

Logo, o maior ângulo mede $4 \cdot x = 4 \cdot 18° = 72°$.

11. E

Considere a figura:



Temos que l é a medida do lado do losango ABCD.

Assim, como $\overline{AQ} = \overline{AM} = \frac{l}{2}$ e supondo $Q\hat{A}M = 60°$, o triângulo AQM é equilátero. Portanto, $\overline{MQ} = \frac{l}{2}$.

Analogamente, segue que $\overline{PN} = \frac{l}{2}$.

Por outro lado, temos que $Q\hat{D}P = 120°$. Então, se S é o pé da perpendicular baixada de D sobre PQ, concluímos que $Q\hat{D}S = 60°$, pois $\Delta DSQ \cong \Delta DSP$ pelo caso cateto-hipotenusa. Logo, do triângulo DQS vem:

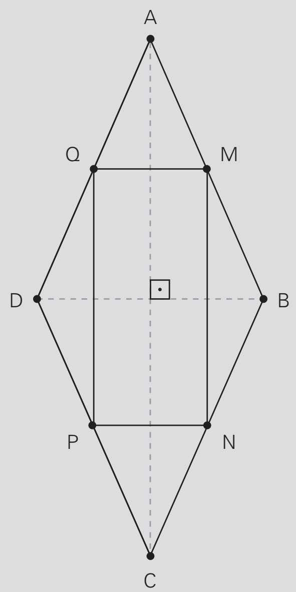
$$\text{sen}\, Q\hat{D}S = \frac{\overline{QS}}{\overline{DQ}} \rightarrow \text{sen}\, 60° = \frac{\frac{\overline{PQ}}{2}}{\frac{l}{2}} \rightarrow \overline{PQ} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Por conseguinte, a razão entre os perímetros (2p) pedida é igual a:

$$\frac{2p_{ABCD}}{2p_{MNPQ}} \rightarrow \frac{4l}{2 \cdot \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} + \frac{l}{2}\right)} \rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} \rightarrow 2\sqrt{3} - 2.$$

12. B

Considere a figura:



As alturas dos triângulos ADB e BCD partem, respectivamente dos vértices A e C do losango e se cruzam, sendo perpendiculares entre si. O mesmo ocorre com as alturas dos triângulos ABC e CDA, que partem dos vértices B e D. Como os ângulos AMQ e BMN são complementares, o ângulo QMN do quadrilátero é de 90°, e o mesmo ocorre com os outros quatro lados. Logo, trata-se de um retângulo que não é losango.

13. Como P é ponto médio das diagonais: $x = 2y - 5$ (I) e $x + 14 = 3y + 2$ (II).

Substituindo (I) em (II), temos $y = 7 \rightarrow x = 9$.

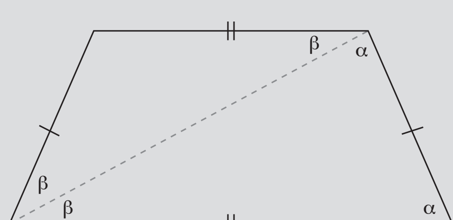
Portanto, as diagonais:

$\overline{AC} = 2x = 18$ e $\overline{BD} = 2(x + 14) = 46$.

Portanto, $\overline{AC} = 18$ e $\overline{BD} = 46$

14. C

Temos,



Então, podemos calcular:

$\alpha = 2 \cdot \beta \rightarrow \beta = \dfrac{\alpha}{2}$

$\beta + \alpha + \alpha = 180°$

$\dfrac{\alpha}{2} + 2\alpha = 180° \rightarrow 2{,}5\alpha = 180° \rightarrow \alpha = 72°$

15. A

Sejam a, b, c e d as medidas dos ângulos internos do quadrilátero.

Temos que $5a = 8b = 10c = 40d = k \rightarrow$ $\rightarrow a = \dfrac{k}{5}; b = \dfrac{k}{8}; c = \dfrac{k}{10}; d = \dfrac{k}{40}$, em que k é a constante de proporcionalidade.

Além disso, sabendo que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360°, temos:

$a + b + c + d = 360°$

$\dfrac{k}{5} + \dfrac{k}{8} + \dfrac{k}{10} + \dfrac{k}{40} = 360°$

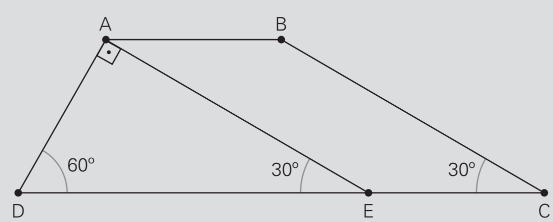
$8k + 5k + 4k + k = 40 \cdot 360°$

$k = \dfrac{40 \cdot 360°}{18} = 800°.$

$\therefore a = 160°, b = 100°, c = 80°, d = 20°$

16. E

Considere a figura, em que $AE//BC$.



Sendo $\overline{CD} = 12$ cm e $\overline{EC} = 4$ cm, temos $\overline{DE} = \overline{CD} - \overline{EC} = 8$ cm. Além disso, $AE//BC$ implica em $A\hat{E}D = 30°$, pois $B\hat{C}E$ e $A\hat{E}D$ são ângulos correspondentes.

Portanto, como $A\hat{D}E = 60°$, vem $D\hat{A}E = 90°$

Do triângulo ADE encontramos:

$\cos 60° = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{AD} = 4$ cm e

$\operatorname{sen} 60° = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{AE} = 4\sqrt{3}$ cm.

$\therefore 2p_{ABCD} = (20 + 4\sqrt{3})$ cm. Então, 2p é o perímetro do trapézio ABCD.

17. Seja N o ponto do segmento BC, tal que MN é paralelo a AB.

Logo, MN é a base média do trapézio ABCD. Portanto: $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$.

Além disso, MN é a mediana relativa à hipotenusa BC do triângulo BMC.

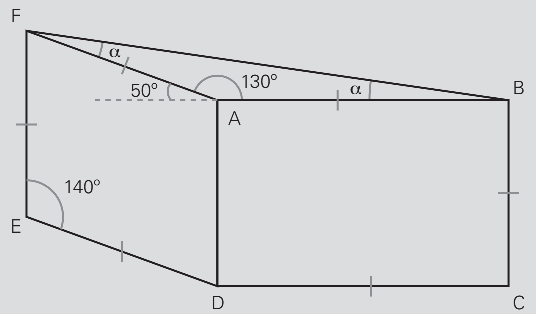
Desse modo, temos $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2} = 2$ cm.

Logo, podemos afirmar que o perímetro do trapézio ABCD é igual a 12 cm.

Estudo para o Enem

18. E

De acordo o enunciado, temos:



$\alpha + \alpha + 130° = 180°$

$2 \cdot \alpha = 180° - 130° = 50°$

$\therefore \alpha = 25°$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. B

De acordo com as medidas indicadas na imagem 1, as dimensões dos retângulos são 40,3 m e 16,5 m.

Logo, o perímetro (P) é:

$P = 2 \cdot (40{,}3 + 16{,}5)$

$P = 2 \cdot 56{,}8$

$\therefore P = 113{,}6$ m.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

20. E

Como o ângulo $A\hat{B}C$ é reto, e o segmento $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, o ângulo $D\hat{B}C$ vale 45°.

A soma dos ângulos internos do triângulo é 180°. Logo, o ângulo $B\hat{C}D$ vale: $180° - 95° - 45° = 40°$

Então, o ângulo $\hat{C}$ vale:

$\hat{C} = 180° - 40° = 140°$

$\therefore \hat{C} = 140°$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

14 TEOREMA DE TALES

Comentário sobre o módulo

Reforce o fato de que as figuras devem ser analisadas com cuidado: se a proporção não for montada na ordem correta, todo o exercício será perdido.

Também deixe claro que a proporção estabelecida pelo teorema de Tales pode ser montada de diferentes maneiras. Por exemplo, se invertermos os dois lados da igualdade, a equação continua verdadeira. Talvez seja uma boa ideia mostrar as propriedades que uma proporção tem, como:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$$

Para ir além

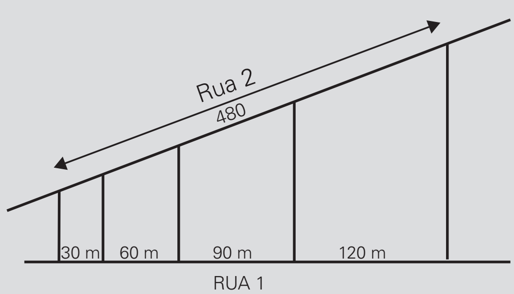
O texto "O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico", de Vincenzo Bongiovanni, mostra um pouco a história em torno desse teorema e discute a dificuldade de suas demonstrações, apresentando uma delas. Disponível em:

<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/12993/12094>.

Acesso em: jun. 2018.

Exercícios Propostos

7. Chamando as frentes da rua 2 de x, y, z e w, temos:



Somando as frentes da rua 1, teremos:
30 m + 60 m + 90 m + 120 m = 300 m
Usando o teorema de Tales:

$$\frac{x}{30}=\frac{y}{60}=\frac{w}{90}=\frac{z}{120}=\frac{480}{300}=1{,}6$$

Assim,

$$\frac{x}{30}=1{,}6 \rightarrow x=48$$

$$\frac{y}{60}=1{,}6 \rightarrow y=96$$

$$\frac{z}{90}=1{,}6 \rightarrow z=144$$

$$\frac{w}{120}=1{,}6 \rightarrow w=192$$

Logo, a medida de cada frente é 48 m, 96 m, 144 m e 192 m.

8. C

Temos que:

$a = 18 + 22 \rightarrow a = 40$

$a + b + c = 120 \rightarrow 40 + b + c = 120 \rightarrow b + c = 80$

Usando o teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{b}{22}=\frac{c}{18}=\frac{b+c}{22+18} \rightarrow \frac{b}{22}=\frac{c}{18}=\frac{80}{40} \rightarrow \frac{b}{22}=\frac{c}{18}=2 \rightarrow$$

$\rightarrow c = 36$ e $b = 44$

Portanto, a medida do maior lado do triângulo é de 44 cm.

9. B

Observando a figura, temos:

$$\tan 30° = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\overline{BA}}{6\sqrt{3}} \rightarrow 3\overline{BA}=18 \rightarrow \overline{BA}=6$$

Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\overline{BA}^2 \rightarrow \overline{AC}^2=\left(6\sqrt{3}\right)^2+6^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{AC}^2=108+36 \rightarrow \overline{AC}^2=144 \rightarrow \overline{AC}=12$$

Agora, usando o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{PA}} \rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\overline{CP}}=\frac{6}{12-\overline{CP}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 6\cdot\overline{CP}=72\sqrt{3}-6\sqrt{3}\cdot\overline{CP} \rightarrow$$

$$\rightarrow 6\cdot\overline{CP}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)=72\sqrt{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow 6\cdot\overline{CP}=\frac{72\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}\right)}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow 6\cdot\overline{CP}=36\sqrt{3}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{CP}=\frac{36\sqrt{3}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{CP}=6\sqrt{3}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{CP}=6\left(3-\sqrt{3}\right)$$

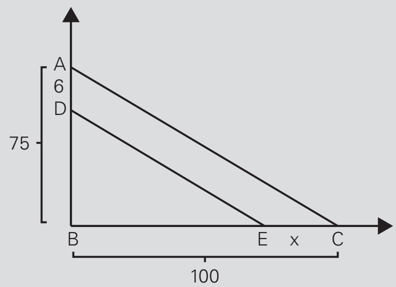
Portanto, $\overline{CP}=6\left(3-\sqrt{3}\right)$.

10. D

Cabem 12 segmentos de mesma medida de AD (6 m) em 1 segmento de 75 m, pois

75 m = 12 · (6 m) + 3 m. Para que sejam formados esses 12 segmentos, são necessários 13 pontos, em que cada ponto representa 1 estão.

11. B



Aplicando o teorema de Tales:

$$\frac{6}{75} = \frac{x}{100} = 75x = 600 \rightarrow x = \frac{600}{75} \rightarrow x = 8$$

Portanto, a distância entre os pontos E e C é igual a 8 m.

12. Sejam

Lote I: 40 m para rua A e (x)m para rua B;
Lote II: 30 m para rua A e (y)m para rua B;
Lote III: 20 m para rua A e (z)m para rua B.

Aplicando o teorema de Tales, pois as divisas laterais são paralelas (perpendiculares a uma mesma reta), temos:

$$\frac{x+y+z}{40+30+20} = \frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{180}{90} = \frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} \rightarrow \frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} = 2 \rightarrow$$

$\rightarrow x = 80$ m; $y = 60$ m e $z = 40$ m.

A medida de frente para a rua B de cada lote é 80 m, 60 m e 40 m, respectivamente.

13. B

Temos:
$a = 2$ (menor primo)
$b = 1{,}5 \cdot 2 = 3$ (50% maior que a)

Aplicando o teorema de Tales na figura, temos:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{x}{9} \rightarrow 2x = 3x - 6 \rightarrow x = 6$$

Portanto, o valor de $x = 6$.

14. Usando o Teorema de Tales, temos:

$$\frac{5}{7} = \frac{6}{x} \rightarrow 5x = 42 \rightarrow x = \frac{42}{5}$$

e

$$\frac{5}{y} = \frac{6}{2{,}8} \rightarrow 6y = 14 \rightarrow y = \frac{14}{6}$$

Logo, a soma é $x + y = \frac{42}{5} + \frac{14}{6} = \frac{161}{15}$.

15. B

Aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{20} = \frac{35}{25} = \frac{y}{40} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{20} = \frac{35}{25} \rightarrow 25x = 700 \rightarrow x = 28 \\ \frac{y}{40} = \frac{35}{25} \rightarrow 25y = 1400 \rightarrow y = 56 \end{cases}$$

Portanto, $x = 28$ cm e $y = 56$ cm.

16. D

Sendo x o maior lado e y o menor lado do triângulo DEF pode-se escrever:

$p_{ABC} = 8 + 10 + 16 = 34$

$$\frac{34}{16} = \frac{204}{x} \rightarrow 34x = 3264 \rightarrow x = 96$$

$$\frac{34}{8} = \frac{204}{y} \rightarrow 34y = 1632 \rightarrow y = 48$$

Portanto, $y = 48$ cm e $x = 96$ cm

17. Utilizando a relação entre as cordas, temos:

$2x \cdot (x + 3) = x \cdot (3x - 1)$

$2x^2 + 6x = 3x^2 - x$

$-x^2 + 7x = 0$

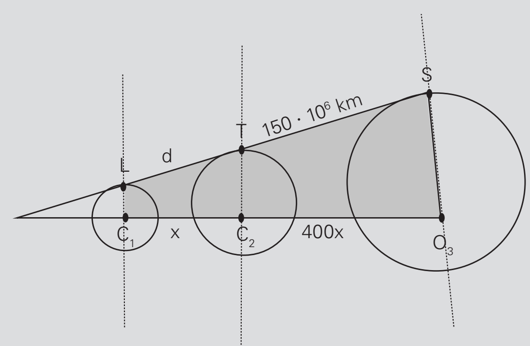
Resolvendo a equação, temos: $x = 0$ (não convém) ou $x = 7$.

Portanto, $x = 7$.

Estudo para o Enem

18. A

Aplicando o teorema de Tales na figura, temos:



Logo:

$$\frac{d}{150 \cdot 10^6} = \frac{x}{400x} \rightarrow 400 \cdot d = 150 \cdot 10^6 \rightarrow$$

$$\rightarrow d = \frac{150 \cdot 10^6}{400} \rightarrow d = 37{,}5 \cdot 10^4 \rightarrow d = 375\,000 \text{ km}$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. B

Sendo x o tamanho da barreira, e aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{30}{24} = \frac{x+2}{56-24} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{x+2}{32} \rightarrow 4(x + 2) = 160 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x + 8 = 160 \rightarrow 4x = 152 \rightarrow x = 38.$$

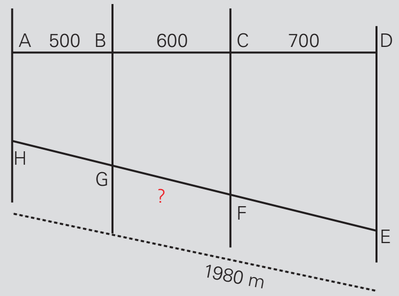
Portanto, $x = 38$ m.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. B

De acordo com o enunciado, temos:



Utilizando o teorema de Tales, teremos:

$$\frac{\overline{GF}}{1980} = \frac{600}{1800} \rightarrow \frac{\overline{GF}}{1980} = \frac{1}{3} \rightarrow 3 \cdot \overline{GF} = 1980 \rightarrow \overline{GF} = 600$$

Portanto, $GF = 600$ m

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

15 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS I

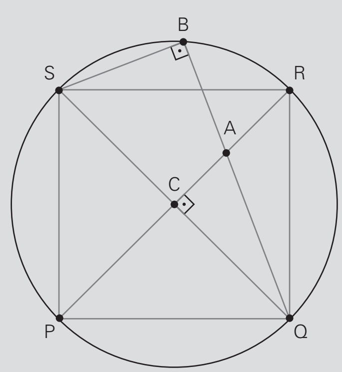
Comentário sobre o módulo

Neste módulo, o professor pode, por meio de aula dialogada, observar com os alunos as diferentes formas de triângulos e suas mais diversas aplicações. Deve ser enfatizado o teorema fundamental da semelhança de triângulos, demonstrando-o teoricamente, se desejável. Devem-se desenvolver os três casos de semelhanças de triângulos com a demonstração teórica dos teoremas.

Os triângulos servem como elemento de fixação e, justamente por isso, é comum encontrá-los na construção civil. As semelhanças de triângulos foram utilizadas por Tales de Mileto para determinar as grandes pirâmides do Egito, assim como aparece de maneira mística no curioso Triângulo das Bermudas. Contudo, o professor pode sugerir uma pesquisa em grupo sobre as curiosidades ao longo dos tempos envolvendo o uso dos triângulos.

Exercícios propostos

7. Considere a figura, em que ℓ é a medida do lado do quadrado PQRS.



É fácil ver que os triângulos BQS e CQS são semelhantes por AA. Assim, como $\overline{QS} = \ell\sqrt{2}$ cm e C é o ponto médio de QS, temos:

$$\frac{QC}{QB} = \frac{QA}{QS}$$

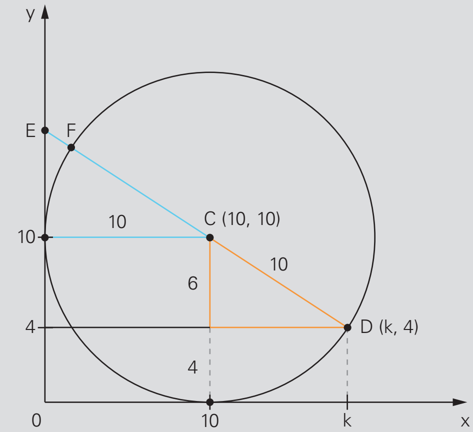
$$\frac{\frac{\ell\sqrt{2}}{2}}{10} = \frac{6}{\ell\sqrt{2}}$$

$\ell^2 = 60 \rightarrow \ell = 2\sqrt{15}$ cm.

Portanto, $\ell = 2\sqrt{15}$ cm.

8. D

Como a circunferência é tangente aos eixos coordenados e está no primeiro quadrante, as coordenadas do seu centro são c(10,10). Sendo assim:



Analisando o triângulo destacado em laranja, percebe-se que ele tem catetos 6 e 8 (pelo teorema de Pitágoras).

Assim, a coordenada do ponto D será (18,4).

Devemos observar que o triângulo em laranja é semelhante ao triângulo EBC (em azul).

Logo, pode-se escrever:

$$\frac{\overline{EC}}{10} = \frac{10}{8} \rightarrow 8 \cdot \overline{EC} = 100 \rightarrow \overline{EC} = 12{,}5$$

Assim, temos:

$$\overline{EF} = \overline{EC} - 10$$

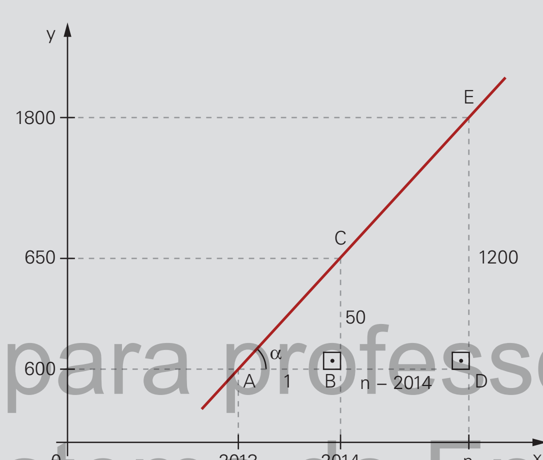
$$\overline{EF} = 12{,}5 - 10$$

$$\overline{EF} = 2{,}5$$

Portanto, a medida do segmento $\overline{EF} = 2{,}5$

9. D

Do enunciado, temos:



$C\hat{A}B = E\hat{A}D = \alpha$ e $A\hat{B}C = A\hat{D}E = 90°$. Logo, os triângulos ACB e AED são semelhantes.

Então:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{ED}$$

$$\frac{1}{n-2013} = \frac{50}{1200} \rightarrow \frac{1}{n-2013} = \frac{1}{24} \rightarrow$$

$$1 \cdot 24 = 1 \cdot (n - 2013) \rightarrow 24 = n - 2013 \rightarrow$$

$$\rightarrow n = 24 + 2013 \rightarrow n = 2037$$

Desta forma, a exportação triplicará em relação à de 2013 no ano de 2037.

10. Os triângulos AEB e BDC são semelhantes e do tipo 30, 60 e 90 (o ângulo em C é igual ao ângulo em B e em A).

Logo, pode-se calcular:

$$\Delta 30/60/90 \rightarrow \begin{cases} x = \text{cateto menor} \\ x\sqrt{3} = \text{cateto maior} \\ 2x = \text{hipotenusa} \end{cases}$$

Em ΔBCD:

$\Delta BCD \rightarrow \Delta 30/60/90$

$\overline{CD} = 3 = x\sqrt{3} \rightarrow x = \sqrt{3}$

$2x = \overline{BD} = 2\sqrt{3}$

Em ΔAEB:

$\Delta AEB \rightarrow \Delta 30/60/90$

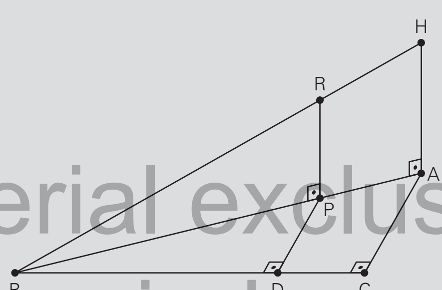
$2x = AB = 6 \rightarrow x = 3$

$x = \overline{BE} = 3$

$\overline{DE} = 3 + 2\sqrt{3}$

Portanto a medida de $\overline{DE} = 3 + 2\sqrt{3}$ cm.

11. De acordo com o enunciado, temos:



Como $\overline{AC} \,//\, \overline{PD}$, pelo teorema de Tales segue que:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

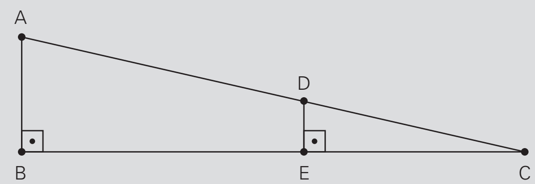
Os triângulos HAB e RPB são semelhantes. Portanto:

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} \rightarrow \frac{\overline{HA}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{AP}+\overline{PB}}{\overline{PB}}$$

$$\frac{\overline{HA}}{2{,}43} = \frac{4}{3}$$

$\overline{HA} = 3{,}24$ m

12. Considere a figura abaixo.



Os triângulos retângulos ABC e DEC são semelhantes por AA.

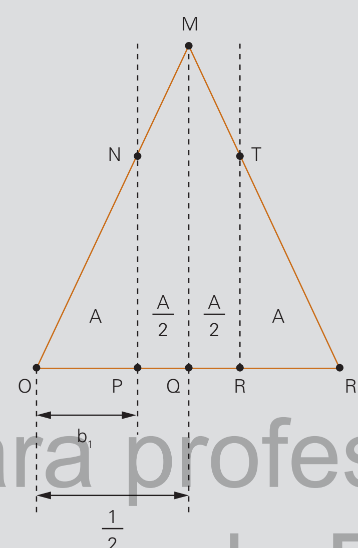
Portanto, sabendo que $\overline{AB} = 21$ dm, $\overline{DE} = 9$ dm e BE = 120 dm e vem:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} \rightarrow \frac{21}{9} = \frac{120+\overline{EC}}{\overline{EC}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 7 \cdot \overline{EC} = 360 + 3 \cdot \overline{EC} \rightarrow \overline{EC} = 90 \text{ dm} = 9 \text{ m}$$

13. E

Considere a figura.



Como os triângulos NOP e MOQ são semelhantes, temos:

$$\frac{(NOP)}{(MOQ)} = \frac{A}{\frac{3A}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Sabendo que a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança, temos:

$$\frac{b_1}{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

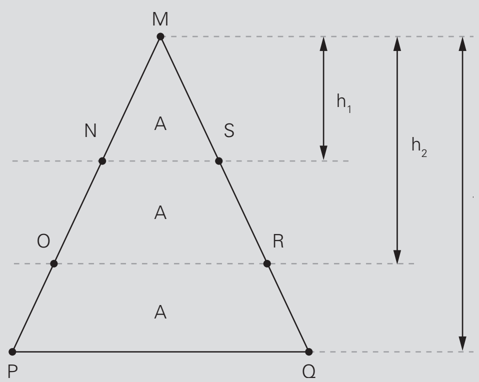
$$b_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Portanto, a distância pedida é dada por:

$$2\cdot\overline{PQ} = 2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{3-\sqrt{6}}{3}.$$

14. D

Considere a figura.



Como os triângulos MNS e MPQ são semelhantes, temos:

$$\frac{(MNS)}{(MPQ)} = \frac{A}{3A} = \frac{1}{3}.$$

Assim, como a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança:

$$\frac{h_1}{1} = \sqrt{\frac{1}{3}} \to h_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Além disso, os triângulos MNS e MOR também são semelhantes. Então:

$$\frac{(MNS)}{(MOR)} = \frac{A}{2A} = \frac{1}{2}.$$

Portanto:

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

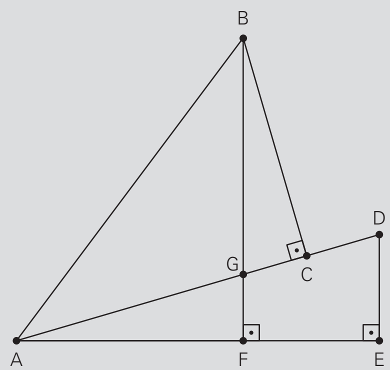
$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{h_2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$h_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Logo, a distância pedida é igual a:

$$h_2 - h_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}.$$

15. Considere a figura.



Como $\overline{AB} = 25 = 5 \cdot 5$ e $\overline{BC} = 15 = 5 \cdot 3$, segue que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo retângulo de lados 5, 3 e 4.

Logo, $AC = 5 \cdot 4 = 20$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ADE:

$$\overline{AD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{AE}^2 \to \overline{AE}^2 = 25^2 - 7^2 \to$$

$$\to \overline{AE} = \sqrt{576} \to \overline{AE} = 24$$

Como os triângulos ADE e BGC são semelhantes por AA:

$$\frac{\overline{GC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AE}} \to \overline{GC} = \frac{15\cdot 7}{24} = \frac{35}{8}$$

Logo, $\overline{AG} = \overline{AD} - \overline{CG} = 20 - \frac{35}{8} = \frac{125}{8}$.

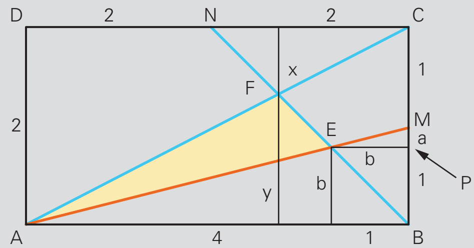
Por outro lado, os triângulos ADE e AGF também são semelhantes por AA.

Portanto:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AD}} \to \overline{AF} = \frac{\frac{125}{8}\cdot 24}{25} = 15$$

16. D

De acordo com o enunciado, temos:



$\Delta NFC \sim \Delta AFBQ$

$\frac{2}{4} = \frac{x}{y} \rightarrow 2y = 4x \rightarrow y = \frac{4x}{2} \rightarrow y = 2x$

$x + y = 2 \rightarrow x + 2x = 2 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

Logo, $y = 2x \rightarrow y = 2 \cdot \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{4}{3}$

$\rightarrow y = \Delta MEP \sim \Delta MAB$

$\frac{1}{4} = \frac{a}{b} \rightarrow b = 4a$

$a + b = 1 \rightarrow a + 4a = 1 \rightarrow 5a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{5}$

Assim, $b = 4a \rightarrow b = 4 \cdot \frac{1}{5} \rightarrow b = \frac{4}{5}$

Assim, a área do triângulo AEF será:

$S_{\Delta AEF} = S_{\Delta ABF} - S_{\Delta ABE}$

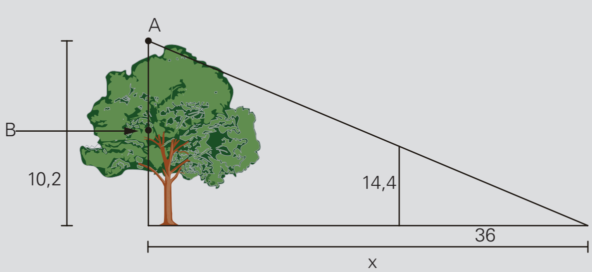
$S_{\Delta AEF} = \frac{4y}{2} - \frac{4b}{2} \rightarrow S_{\Delta AEF} = \frac{4 \cdot \frac{4}{3}}{2} - \frac{4 \cdot \frac{4}{5}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow S_{\Delta AEF} = \frac{8}{3} - \frac{8}{5}$

$\therefore S_{\Delta AEF} = \frac{16}{15}$

17.

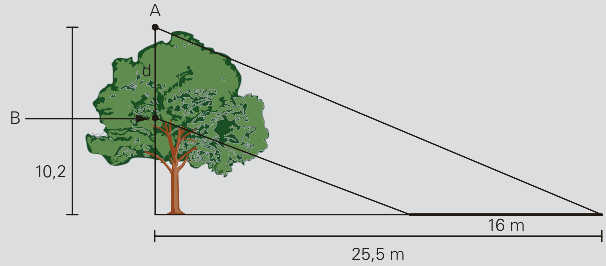
Calculando a medida da sombra da árvore:



$\frac{10,2}{x} = \frac{14,4}{36} \rightarrow 14,4x = 10,2 \cdot 36 \rightarrow$

$\rightarrow 14,4x = 367,2 \rightarrow x = \frac{367,2}{14,4}$

$\therefore x = 25,5$ m



Aplicando teorema de Tales:

$\frac{d}{10,2} = \frac{16}{25,5} \rightarrow 25,5d = 163,2 \rightarrow d = \frac{163,2}{25,5}$

$\therefore d = 6,4$ m

Estudo para o Enem

18. E

Para obter a altura, basta aplicar a semelhança de triângulos. Então, temos a seguinte relação:

$\frac{h}{30} = \frac{8}{12} \rightarrow 12 \cdot h = 30 \cdot 8 \rightarrow 12h = 240 \rightarrow$

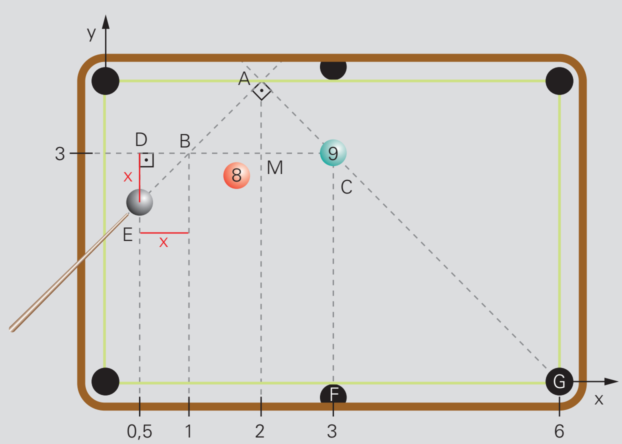
$\rightarrow h = \frac{240}{12} \quad \therefore h = 20$ m

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. E

Considerando os dados do enunciado, temos:



Logo,

$\Delta ABC \sim \Delta CFG$

$AB = AC$

BM = CM

BM = 1

B(1, 3)

e

$\Delta ABC \sim \Delta DBE$

$\overline{DE} = \overline{DB}$

DE = 0,5

E (0,5; 2,5)

Portanto, a ordenada da posição original da bola branca era 2,5.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização de um resultado de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

20. B

O mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o 2.

De fato, pois os triângulos 30°, 60° 90° são congruentes e o triângulo 30°, 30°, 120° é isósceles.

No mosaico 1, o triângulo 30°, 20°, 120° é isósceles, mas os triângulos 30°, 60°, 90° não são congruentes.

No mosaico 3, os triângulos 22°, 68°, 90° são congruentes, mas o triângulo 44°, 46°, 90° não é isósceles.

Nos mosaicos 4 e 5, não é possível formar um triângulo retângulo com as três peças.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização de um resultado de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

16 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS II

Comentário sobre o módulo

Neste módulo, o professor pode recapitular os três casos de semelhanças de triângulo, revisar o conceito de perímetro de um polígono e demonstrar o cálculo de áreas em triângulos e quadriláteros. Deve-se reforçar o conceito de polígonos semelhantes e desenvolver algebricamente as razões entre perímetros e áreas de figuras semelhantes.

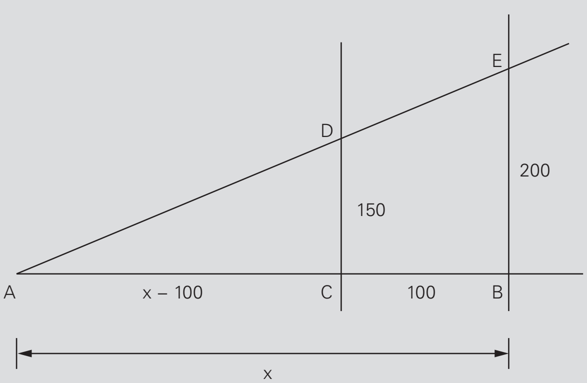
Para ir além

O *software* GeoGebra é uma ótima ferramenta para auxiliar nas construções e demonstrações de geometria. Podem-se dividir os alunos em duplas e trabalhar a construção dos triângulos e polígonos estudados nos dois últimos módulos, atentando-se aos três casos de semelhança de triângulos e às propriedades de semelhanças dos polígonos. Acesse-o em: *<www.geogebra.org>*.

Exercícios Propostos

7. D

De acordo com o problema, temos a seguinte figura com x sendo a distância procurada.



$$\Delta ACD \sim \Delta ABE \rightarrow \frac{x-100}{x} = \frac{150}{200} \rightarrow \frac{x-100}{x} = \frac{3}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 400 \text{ m}$$

8. C

Podemos utilizar a semelhança de triângulos. Desse modo, temos:

$$\frac{h}{4{,}2} = \frac{3}{0{,}12} \rightarrow 0{,}12h = 3 \cdot 4{,}2 \rightarrow 0{,}12h = 12{,}6 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{12{,}6}{0{,}12} \rightarrow h = 105 \text{ m}$$

9. E

Desde que os triângulos ACE e BCD sejam semelhantes por AA, temos:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{BD}{AE} \rightarrow \frac{CD}{CD+3} = \frac{4}{5} \rightarrow CD = 12$$

Portanto, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ACE, encontramos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 5^2 + 15^2$$

$$\overline{AC} = 5\sqrt{10}$$

10. Sabemos que a altura é proporcional ao comprimento da sombra projetada. Segue-se que a altura h do pau-de-sebo é dada por:

$$\frac{h}{125} = \frac{1}{25} \rightarrow 25h = 1 \cdot 125 \rightarrow h = \frac{125}{25} \rightarrow h = 5 \text{ m}$$

11. D

Seja h a altura no triângulo ABC, como os triângulos ABC e DGC são semelhantes, temos:

$$\frac{h-12}{h} = \frac{8}{15} \rightarrow 15 \cdot (h - 12) = 8h \rightarrow$$

$$\rightarrow 15h - 180 = 8h \rightarrow$$

$$15h - 8h = 180 \rightarrow 7h = 180 \rightarrow h = \frac{180}{7}$$

12. B

Se d é a distância procurada, então:

$$\frac{d}{12} = \frac{2}{3} \rightarrow 3d = 12 \cdot 2 \rightarrow 3d = 24 \rightarrow$$

$$\rightarrow d = \frac{24}{3} \rightarrow d = 8 \text{ m}$$

13. A

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo RST, temos:

$$z^2 + 3^2 = 5^2 \rightarrow z^2 = 25 - 9 \rightarrow z^2 = 16 \rightarrow$$

$$\rightarrow z = \sqrt{16} \rightarrow z = 4$$

$\Delta RST \sim \Delta RPQ$, logo:

$$\frac{3}{x} = \frac{4}{6+4} \rightarrow 4x = 3 \cdot (6+4) \rightarrow 4x = 18 + 12 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x = 30 \rightarrow x = \frac{30}{4} \rightarrow x = 7{,}5$$

14. B

Temos que Ryan mora no 13º andar e que a distância do seu piso até o piso térreo é de 39 metros.

Considerando que cada andar é da mesma altura, temos 12 andares mais o térreo, ou seja, 13 pavimentos.

Se são 39 metros e 13 pavimentos, cada pavimento mede 3 metros de altura.

Somando-se as alturas dos andares 13, 14 e 15, temos que o edifício mede 48 metros.

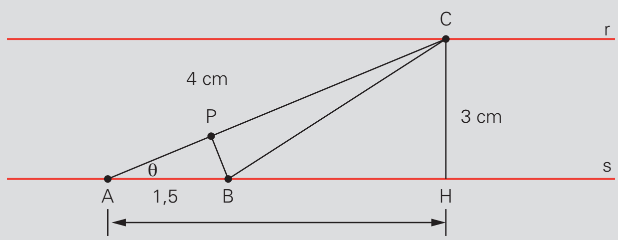
Sabendo que o sol forma o mesmo ângulo com o prédio e com a pessoa, podemos calcular usando semelhança de triângulos:

$$\frac{48}{x} = \frac{1,8}{0,3} \rightarrow 1,8x = 0,3 \cdot 48 \rightarrow 1,8x = 14,4 \rightarrow$$

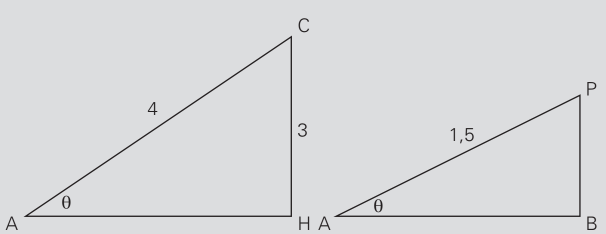
$$\rightarrow x = \frac{14,4}{1,8} \rightarrow x = 8 \text{ m}$$

15. B

Considere a figura a seguir:



Nesse sentido, podemos aplicar a semelhança de triângulos:



Assim, temos:

$$\frac{4}{3} = \frac{1,5}{x} \rightarrow 4x = 1,5 \cdot 3 \rightarrow x = \frac{4,5}{4} \rightarrow x = \frac{9}{8}$$

16. D

Seja x a medida do lado do quadrado DEFG.

Os triângulos ABC e AEF são semelhantes por AA.

Portanto:

$$\frac{x}{40} = \frac{24 - x}{24} \rightarrow 120 - 5x = 3x \rightarrow 8x = 120 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 15$$

Logo, x = 15 que é um múltiplo de 5.

17. C

Podemos utilizar a semelhança de triângulos:

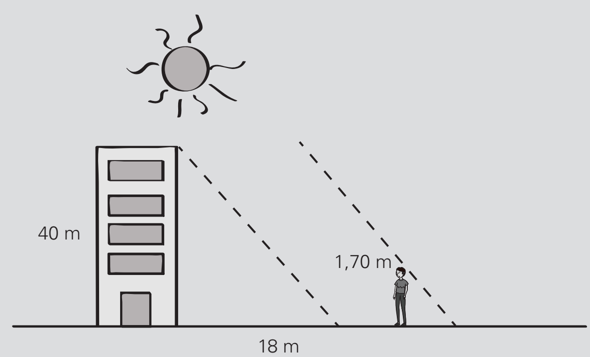
$$\frac{h}{4,2} = \frac{3}{0,12} \rightarrow 0,12h = 3 \cdot 4,2 \rightarrow 0,12h = 12,6 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{12,6}{0,12} \rightarrow h = 105 \text{ m}$$

Estudo para o Enem

18. D

Considerando a figura a seguir, temos:



Considerando que x é a medida da sombra da pessoa, podemos escrever que:

$$\frac{48}{18} = \frac{1,70}{x} \rightarrow 48x = 30,6 \rightarrow x = \frac{30,6}{48} \rightarrow x = 0,765$$

Logo, a medida da sombra da pessoa será x = = 0,765 m = 76,5 cm

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. A

Sendo x o comprimento da escada e y a altura aproximada do seu centro de gravidade, pode-se escrever, utilizando o teorema de Pitágoras e a semelhança de triângulos:

$$x^2 = 16^2 + 12^2 \rightarrow x^2 = 256 + 144 \rightarrow$$

$\rightarrow x^2 = 400 \rightarrow x = \sqrt{400} \rightarrow x = 20\text{ m}$

$$\frac{y}{16} = \frac{\frac{20}{3}}{20} \rightarrow \frac{y}{16} = \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{20} \rightarrow \frac{y}{16} = \frac{1}{3} \rightarrow$$

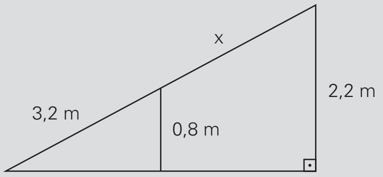
$$\rightarrow 60y = 20 \cdot 16 \rightarrow y = \frac{16}{3} \rightarrow y = 5{,}33\text{ m}$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

20. D

Considere a figura a seguir:



Desse modo, temos:

$$\frac{3{,}2}{3{,}2+x} = \frac{0{,}8}{2{,}2}$$

$0{,}8 \cdot (3{,}5 + x) = 3{,}5 \cdot 2{,}2$

$x = 5{,}6\text{ m}$

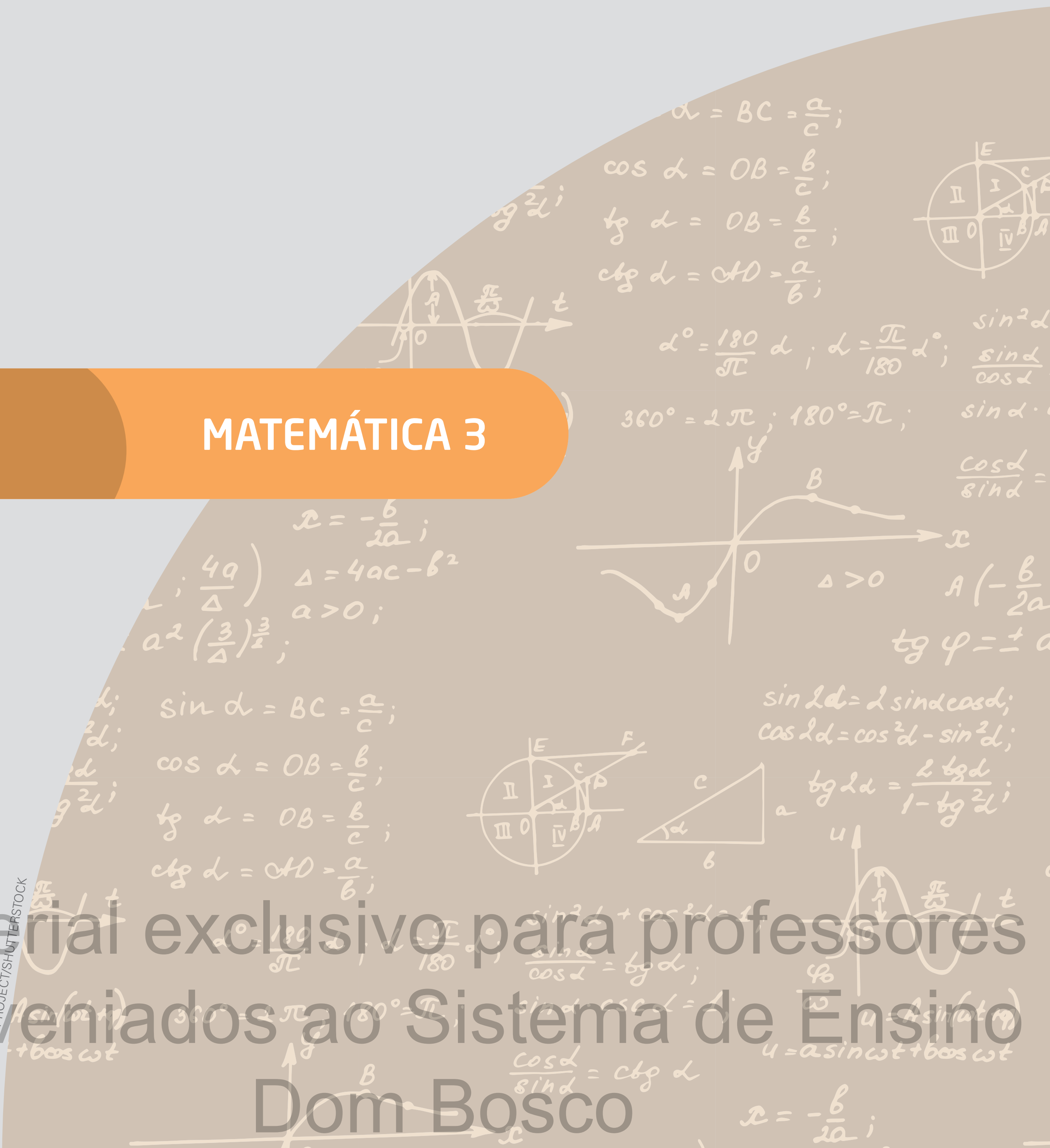
Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 3



DR PROJECT/SHUTTERSTOCK

1 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Comentário sobre o módulo

O estudo da Trigonometria é dedicado à determinação de razões envolvendo lados e ângulos de triângulos retângulos. Introduz conceitos iniciais, como o de ângulos complementares e nomenclatura dos lados do triângulo retângulo. Fica a critério do professor demonstrar o teorema de Pitágoras. Num segundo momento, são apresentadas as razões seno, cosseno e tangente referentes aos lados de um triângulo retângulo, de acordo com seus ângulos agudos.

Para ir além

Estimule os alunos a entender a importância das razões trigonométricas, considerando que são extremamente úteis em várias situações do dia a dia. Apresente alguns exemplos relacionados a astronomia, agricultura, topografia e/ou construção civil.

O livro *Medidas desesperadas*, de Kjartan Poskitt, da Editora Melhoramentos, traz divertidas histórias para ajudar os estudantes a compreender melhor os temas deste e do próximo módulo. Se possível, leia, neste primeiro momento, "O problema da caixa fechada". Vale lembrar que esse livro não aborda especificamente a Trigonometria, mas retoma muitos aspectos importantes de medidas de polígonos e ângulos, conceitos relacionados ao tema deste e do próximo módulo. A leitura pode, portanto, ser um jeito divertido de rever esse conhecimento.

Exercícios Propostos

7. D

Como a área do paralelogramo é dada por:

$A_{paralelogramo}$ = (base) · (altura), temos que

$A_{paralelogramo} = b \cdot 6 = 6 \rightarrow b = 1$.

Assim, o triângulo retângulo tem catetos iguais a 6 e 8. Assim, sua hipotenusa, segundo o teorema de Pitágoras, mede 10.

Logo, o cosseno de α é dado por

$$\cos\alpha = \frac{(9-1)}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

8. C

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então, $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \cos^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Logo, $\operatorname{sen} x = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ e, assim,

$\operatorname{tg} x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Portanto, sen(x) + cos(x) + tg(x) =

$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right)$.

9. Multiplicando ambos os termos, temos

(sec x – tg x) ? (sec x + tg x) = sec2 x – tg2 x

Pela identidade trigonométrica

$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$, logo $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x =$

$= 1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$.

10. B

Temos que a tangente do ângulo CÂD é

$\operatorname{tg} C\hat{A}D = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$

Pelas medidas de cada batente, temos que:

$\overline{AB} = 8 \cdot 30 = 240 \rightarrow 240$ cm

$\overline{BC} = 6 \cdot 30 = 180 \rightarrow 180$ cm

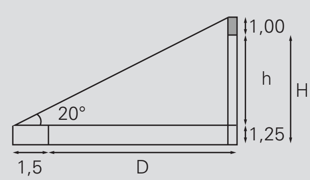
Logo, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $\overline{AC} = 300$ cm.

Como a altura de cada batente é de 20 cm, a medida $\overline{DC}$ é dada por (6 + 8) · 20 = 280 cm.

Então, $\operatorname{tg} C\hat{A}D = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \frac{280}{300} = \frac{14}{15}$

11. B

Considere a figura a seguir.



A primeira afirmação é verdadeira (V), pois:

$\operatorname{tg} 20° = \frac{h+1}{D+1{,}5} = 0{,}36 \rightarrow h + 1 = 0{,}36 \cdot D + 0{,}54$

$0{,}36 \cdot D = 2{,}15 - 0{,}54 = 1{,}61$

$D = \frac{1{,}61}{0{,}36} = 4{,}4 \rightarrow 4{,}4$ m

A segunda afirmação é falsa (F), pois:

$\operatorname{tg} 20° = \frac{h+1}{14{,}6} = 0{,}36$

$h + 1 = 5{,}256$

$h = 4{,}256 \rightarrow h = 4{,}256$ m

Assim, $H = 4{,}256 + 1{,}25 \approx 5{,}5$ m

A terceira afirmação é verdadeira (V), pois a diferença entre eles é 5,5 – 2,4 = 3,6 m.

Logo, V – F – V.

12. A

Temos que, pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC} = 5$ cm. Como $\overline{AD} = 3$ cm, $\overline{DB} = 1$ cm e então $\overline{CD} = \sqrt{10}$ cm.

Assim, sendo α o ângulo CÂB, então sen α = $\frac{3}{5}$.

Mas, $\text{sen}\,\theta = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{3} = \frac{3}{5} \rightarrow ED = \frac{9}{5}$.

Pelo teorema de Pitágoras, temos que $(CD)^2 = (ED)^2 + (CE)^2$.

Então (CE) = $10 = \frac{81}{25} + (CE)^2 \rightarrow CE = \frac{13}{5}$.

Portanto $A_{CDE} = A_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{5} \cdot \frac{9}{5} = \frac{117}{50} \rightarrow \frac{117}{50}\ cm^2$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

13. E

Temos que $x \cdot y = 10$.

Como o enunciado pede a área $A = x \cdot z$, mas

$\cos 25° = \frac{z}{y} \cong 0,9 \rightarrow z \cong 0,9 \cdot y$

Multiplicando ambos os lados da equação por x, temos:
$x \cdot z = 0,9 \cdot y \cdot x = 0,9 \cdot 10 = 9 \rightarrow 9\ m^2$
Logo, $A = 9\ m^2$.

14. A área do triângulo é dada por: $A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$

Assim, $30 \rightarrow b = \frac{60}{h}$

Como um dos catetos mede 5 cm, então h = 5 cm, por exemplo (poderia ser qualquer um dos catetos). Logo, b = 12.
Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos que a hipotenusa **a** mede:

$a^2 = h^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$
Portanto, a = 13 cm.

15. C

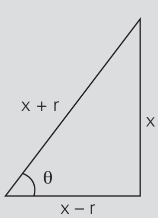
Podemos escrever os lados do triângulo da seguinte maneira:

Cateto menor: x – r

Cateto maior: x

Hipotenusa: x + r

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:



$(x + r)^2 = x^2 + (x - r)^2$

$x^2 + 2rx + r^2 = x^2 + x^2 - 2rx + r^2$

$x^2 - 4rx = 0$

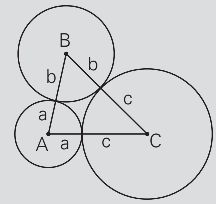
$x \cdot (x - 4r) = 0$

Como x > 0, temos que:

$x - 4r = 0 \rightarrow x = 4r$

Logo, o valor de $\cos\theta = \frac{x-r}{x+r} = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5}$.

16. Escrevendo as medidas dos raios nos círculos, temos:



a) Assim, temos que a + b = 5 cm, a + c = 6 cm e b + c = 9 cm
Resolvendo o sistema de equações lineares, temos que a = 1 cm, b = 4 cm, c = 5 cm.

b) Como c > b e b > a, o comprimento do maior lado do triângulo é b + c.

Assim, como o triângulo deve ser retângulo, pelo teorema de Pitágoras, temos:
$(b + c)^2 = (a + b)^2 + (a + c)^2$

Ou seja, $(3 + c)^2 = (2 + 3)^2 + (2 + c)^2$. Logo, $9 + 6c + c^2 = 25 + 4 + 4c + c^2$
Portanto, c = 10 cm.

17. Utilizando Pitágoras, temos:
$(2\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a})^2 + a^2 \rightarrow 4a + a^2 \rightarrow 3a = a^2$ (dividindo por a, pois $a \neq 0$), vem a = 3. Portanto, os lados do triângulo retângulo medem, em ordem crescente, $\sqrt{3}$, 3 e $2\sqrt{3}$. Como o menor ângulo (x) em um triângulo está oposto ao menor lado, temos que:

$\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

Logo x = 30°.

Estudo para o Enem

18. E

Temos que $\frac{2\alpha}{14,8\ \text{dias}} = \frac{360°}{(14,8 + 14,9)\ \text{dias}}$

Então, $\frac{2\alpha}{14,8} = \frac{360°}{29,7}$

Logo, $2\alpha \approx 179,4° \rightarrow \alpha \approx 89,7°$

Portanto, $\cos\alpha = \frac{d_L}{d_S} \approx \cos 89,7°$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. C

Sendo x a medida do lado $\overline{BC}$, podemos representar os lados AB e AC como x – 3 e x + 3.

Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$(x+3)^2 = x^2 + (x-3)^2$

$x^2 + 6x + 9 = x^2 + x^2 + 6x + 9$

$x^2 - 12x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 12) = 0$

Ou seja, $x = 0$ ou $x = 12$.

Como $x = 0$ não convém, $x = 12$.

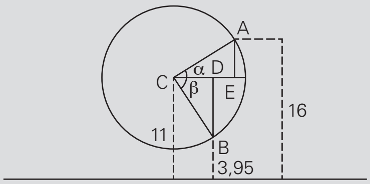
Logo, os lados do triângulo medem 9, 12 e 15.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

20. C

Considere a figura a seguir.



No triângulo ACE retângulo em E, temos que

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$. Logo $\alpha = 30°$.

No triângulo BCD retângulo em D, temos que

$\text{sen}\,\beta = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{7{,}05}{10} = 0{,}705$; $\beta \approx 45°$.

Então, $A\hat{C}B = \alpha + \beta \cong 75°$.

2 ÂNGULOS COMPLEMENTARES E ÂNGULOS NOTÁVEIS

Comentários sobre o módulo

O estudo da Trigonometria é dedicado à determinação de razões envolvendo lados e ângulos de triângulos retângulos e seus ângulos complementares. Também é explorada a demonstração e aplicação da identidade trigonométrica fundamental.

A aplicação dessas razões vai além da simples determinação de lados e ângulos, ou seja, torna-se possível resolver uma infinidade de problemas e situações práticas muito exploradas em exames de vestibular. Constam as razões secante, cossecante e cotangente, uma vez que também apresentam aplicabilidade na resolução de problemas, tanto nos vestibulares como em problemas reais. Ao final, a determinação dos valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) visa demonstrar aos alunos que tenham dificuldade de memorização a maneira de obtê-los facilmente com base em um quadrado e um triângulo equilátero.

Para ir além

Sugestão de vídeo: *Discovery na Escola – Conceitos de Trigonometria*. Documentário feito pelo Discovery Channel sobre aplicações de Trigonometria em diversos problemas, em várias áreas de estudo.

Os livros I e II da série "Os elementos", de Euclides. Série de livros clássicos que abordam o estudo da geometria plana e a construção de diversas proposições e medidas matemáticas, com suas demonstrações.

7.

Temos que $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$. Logo, a altura do telhado **h** é dada por:

$$h = \frac{1}{2} \cdot 52 \text{ dm} = 26 \text{ dm} = 2,6 \text{ m}$$

Portanto, o ponto mais alto do telhado em relação ao solo é de 2,6 + 3,5 = 6,1 m.

8. A

Como o triângulo é isósceles, então seus catetos têm a mesma medida. Logo, o ângulo entre a hipotenusa e o chão é de 45°.

Portanto, temos que

$$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{\sqrt{10}} \rightarrow h = \frac{\sqrt{20}}{2} \approx 2,24 \text{ m}.$$

Assim, como a escada tem 6 degraus, cada degrau tem aproximadamente $\frac{2,24}{6} \text{ m} \approx 37 \text{ cm}$.

9. A

Chamamos as distâncias $BT = d_1$ e $TC = d_2$. O ângulo $C\hat{T}D$ é igual a 60°.

Então, temos que $\text{tg } 60° = \sqrt{3} = \frac{1,5}{d_1}$ e $\text{tg } 60° = \sqrt{3} = \frac{(1,5 + 1,2)}{d_2}$.

Logo, a largura ℓ do tampo da mesa é dada por:

$$\ell = d_1 + d_2 = \frac{1,5}{\sqrt{3}} + \frac{2,7}{\sqrt{3}} \approx 2,42 \text{ m}.$$

10. E

Temos que $\text{sen } 15° = \cos 75°$, $\text{sen } 31° = \cos 59°$ e $\text{sen } 42° = \cos 48°$.

Portanto:

$\text{sen}^2(15°) + \text{sen}^2(31°) + \text{sen}^2(42°) + \text{sen}^2(59°) +$
$+ \text{sen}^2(48°) + \text{sen}^2(75°) =$

$= \cos^2(75°) + \cos^2(59°) + \cos^2(48°) + \text{sen}^2(59°) +$
$+ \text{sen}^2(48°) + \text{sen}^2(75°) = 3$

Acrescentando 2 ao resultado, obtemos 5.

11. C

Temos que $\text{sen } 30° = \frac{1}{2} = 0,5$ e $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,85$.

Logo, o cateto menor do triângulo retângulo da figura será igual a 2,5 km e o cateto maior, igual a $5 \cdot 0,85 = 4,25 \text{ km}$.

Portanto, a área desmatada é dada por:

$A_{desmatada} = 1,5 \cdot 2,5 + (4 - 2,5) \cdot (1,5 + 4,25) = 3,75 +$
$+ 8,625 = 12,375 \text{ km}^2$.

12. C

Temos que $\cos x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, ou seja, $\cos^2 x = \text{sen } x$.

Pela identidade trigonométrica fundamental:

$$1 - \text{sen}^2 x = \text{sen } x \rightarrow \text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$$

Resolvendo a equação do 2° grau e sabendo que $\text{sen } x > 0$, pois $0^0 < x < 90^0$, temos que um dos valores é $\text{sen } x = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$.

13. D

Temos que $\alpha = 90° - \theta$

Portanto, $\frac{y}{2} = \text{sen } \alpha = \cos \theta \rightarrow y = 2 \cdot \cos \theta$.

14. D

Como $\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \frac{6}{5} \cdot \cos \theta$, então

$\text{sen } \theta = \frac{6}{5} \cdot \cos^2 \theta$.

Pela identidade trigonométrica fundamental, temos:

$\text{sen } \theta = \frac{6}{5} \cdot (1 - \text{sen}^2 \theta)$

$$\text{sen}^2\theta + \frac{5}{6}\cdot \text{sen}\ \theta - 1 = 0$$

Resolvendo a equação de 2° grau e sabendo que

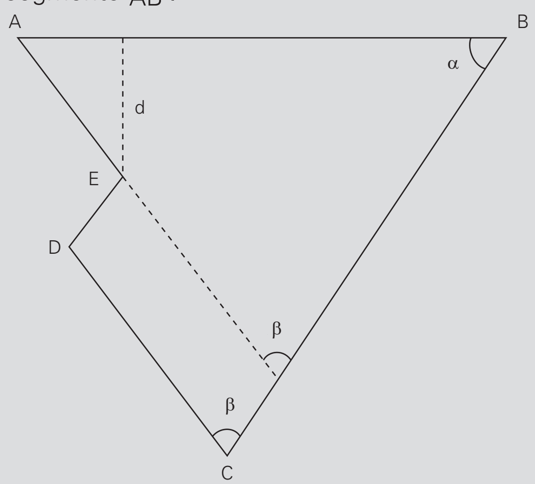
sen $\theta > 0$, pois $0° < \theta < 90°$, temos que sen $\theta = \frac{2}{3}$.

15. B

$$\frac{1-\text{sen}^2 x}{\text{cotg}\ x \cdot \text{sen}\ x} = \frac{\cos^2 x}{\frac{\cos x}{\text{sen}\ x}\text{sen}\ x} = \cos x.$$

16. A

Prolongando o segmento $\overline{AE}$ até o segmento $\overline{BC}$, obtemos outro ângulo β, pois $\overline{AE}$ é paralelo a $\overline{CD}$. Chamamos de d a distância do ponto E até o segmento $\overline{AB}$.



Portanto, o ângulo EAB é igual a 180 − α − β = 180° − 45° − 75° = 60°.

Então, temos que:

$$\text{sen}\ 60° = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow d = \sqrt{3}.$$

17. Como AD é a medida do lado do quadrado, no triângulo AFE temos:
AF = AD = 6 cm e AE = AD + DE = 6 + 4 = 10 cm.
Sabemos, do enunciado, que o triângulo AFE é retângulo e, como a hipotenusa mede 10 cm e um dos catetos, 6 cm, por Pitágoras, temos que a medida do outro cateto é 8 cm. Desse triângulo, vem:

$$\text{sen}\ \hat{E} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Do triângulo DEG que é retângulo, pois o ângulo de vértice D é reto, temos:

$$\text{sen}\ \hat{E} = \frac{3}{5} = \frac{DG}{GE}.$$

Como DG < 6 cm, então DG = 3 cm.

Área do triângulo AFE:

$$A_{AFE} = \frac{6\cdot 8}{2} = 24$$

Área do triângulo DGE:

$$A_{DGE} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$$

Portanto, a área do quadrilátero ADGF é:

$$A_{ADGF} = 24 - 6 = 18$$

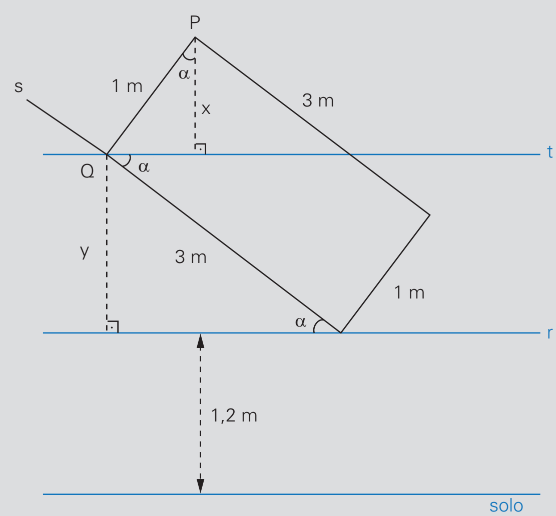
Finalmente, a área destacada é igual à área do quadrado menos a área do quadrilátero ADGF. Logo:

$$A_{destacada} = 6^2 - 18 = 18\ \text{cm}^2$$

Estudo para o Enem

18. C

Seja uma reta **t** paralela a **r** que passa pelo ponto **Q**, conforme representado a seguir.



Chamamos de **x** e **y** as distâncias de **P** até **t** e de **Q** até **r**, respectivamente.
Como cos α = 0, pela identidade trigonométrica fundamental, temos que:

$$0{,}8^2 + \text{sen}^2\alpha = 1{,}0 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 0{,}6$$

Logo, $\cos\alpha = \frac{x}{1} = 0{,}8 \Rightarrow x = 0{,}8$ m e

$\text{sen}\ \alpha = \frac{y}{3} = 0{,}6 \Rightarrow y = 1{,}8$ m.

Portanto, a altura atingida pelo ponto **P** em relação ao solo é de 1,2 m + 1,8 m + 0,8 m = 3,8 m.

19. E

Sabemos que $\text{tg}\ 15° \approx 0{,}26$,. Portanto, sendo **b** a base da torre:

$$\text{tg}\ 15° = \frac{b}{114} \approx 0{,}26 \Rightarrow b \approx 29{,}64$$

Então, a área da base (b^2) da torre é de aproximadamente 878,5 m^2.

20. B

A intensidade luminosa às 7:30 é $k \cdot \text{sen } 30°$, ou seja, 0,5k. Às 9:30 é $k \cdot \text{sen } 45°$.

Como $\text{sen } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sqrt{2} \cong 1{,}4$, a intensidade luminosa às 9:30 é aproximadamente 0,7k. O aumento aproximado, nesse período, é 0,2k.

Portanto, o aumento percentual aproximado do período é $\dfrac{0{,}2k}{0{,}5k} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

3 ÂNGULOS COMPLEMENTARES E ÂNGULOS NOTÁVEIS

Comentários sobre o módulo

Iniciamos o módulo com a relação de arcos e ângulos e as respectivas medições. Por questões práticas, apresentamos uma relação de conversão de unidades de medidas em graus e radianos, muito útil na resolução de problemas. Vale lembrar: é mais fácil visualizar e quantificar o grau que o radiano. Também são mostrados exemplos de aplicação de arcos e ângulos.

7. E

Sendo $\alpha = 120°$, os triângulos formados no 2° e 4° quadrantes têm ângulos iguais a 90°, 60° e 30°. Assim, $OA = \cos 60° = \frac{1}{2}$, e o valor de $OB = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Então, $OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

8. B

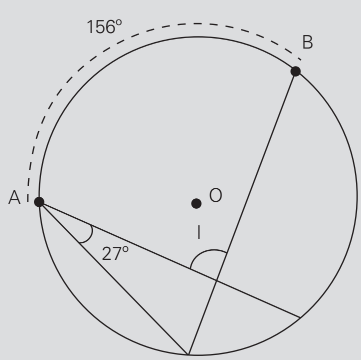
Lembrando que o ângulo BAE é excêntrico externo e sendo **x** a medida do maior arco BE e **y**, a menor:

$$\begin{cases} x + y = 360° \\ \frac{x-y}{2} = 60° \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 360° \\ x - y = 120° \end{cases} \rightarrow x = 240°.$$

Como o arco BPC é $\frac{x}{3}$, a medida de BPC é 80°.

Logo, $\alpha = \frac{BPC}{2} = 40°$.

9. Considere a figura a seguir.



O ângulo agudo $A\hat{C}B = \frac{156°}{2} = 78°$ (ângulo inscrito).

Além disso, **x** é a medida de um ângulo externo do triângulo que contém o ângulo de vértice A.

Então: $x = 78° + 27° = 105°$.

10. C

A cada 360° que o ponteiro dos minutos gira, o ponteiro das horas gira 30°.

Então, se o ponteiro dos minutos percorre $360° - \alpha$, o ponteiro das horas percorre α. Logo:

$$\frac{360°}{360° - \alpha} = \frac{30°}{\alpha} \rightarrow 12\alpha = 360° - \alpha \rightarrow \alpha = \frac{360°}{13}$$

A cada hora, o ponteiro dos minutos gira 30°. Logo, a quantidade de minutos (m) percorrida após 6 horas é:

$$30° \cdot m = 60 \cdot \frac{360°}{13} \rightarrow m = \frac{720}{13} = 55\frac{5}{13}$$

11. Em um ângulo de 20°, o arco formado é de 5 cm. Logo, se dobrarmos o ângulo, dobraremos o arco.

Portanto, o tamanho do arco formado por um ângulo central de 40° é de 10 cm.

12. B

O perímetro do setor circular é dado por $\alpha R + 2R$. O perímetro do quadrado de lado R é dado por 4R. Assim:

$$\alpha R + 2R = 4R \rightarrow \alpha = 2$$

13. E

Lembrando que o ângulo APB é excêntrico interno, $APB = \frac{60° + 36°}{2} = 48°$.

Da figura, vem que $\alpha + 48° = 180° \rightarrow \alpha = 132°$.

14. A

Do sistema de equações do enunciado, temos que $\begin{cases} x + y = 60° \\ x - y = 30° \end{cases}$. Somando as equações desse último sistema, x = 45°. Substituindo o valor obtido de x em uma das equações, temos y = 15°.

Convertendo para radiano: $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = \frac{\pi}{12}$.

Portanto, a soma é $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{144} = \frac{10\pi^2}{144} = \frac{5\pi^2}{72}$.

15. Seja α o ângulo em questão.

Então, $5\alpha = 2 \cdot (90° - \alpha) + 30° \rightarrow$
$\rightarrow 7\alpha = 180° + 30° = 210° \rightarrow \alpha = 30°$

Portanto, o suplemento de α é igual a $180° - \alpha = 150°$.

16. D

Da equação do enunciado, temos:

$\frac{2}{\cos x} = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} + 2 \rightarrow 2 = \text{sen}\, x + 2 \cdot \cos x \rightarrow$
$\rightarrow \text{sen}\, x = 2 - 2\cos x$.

Utilizando a relação fundamental da Trigonometria:
$(2 - 2\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \rightarrow 4 - 8\cos x + 4\cos^2 x +$
$+ \cos^2 x = 1 \rightarrow 5\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau na variável cos x:

$\cos x = 1$ ou, $\cos x = \frac{3}{5}$ como $0 < x < \frac{\pi}{2}$ então $\cos x = \frac{3}{5}$

Assim, $\sec x = \frac{5}{3}$ e $2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$.

17. B

Como $\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$, podemos afirmar que a cada volta percorrida pelo ponteiro grande, o ponteiro pequeno percorra uma volta mais $\frac{1}{8}$ de volta, ou seja, a cada volta o pequeno percorre $\frac{1}{8}$ de volta a mais que o grande.

Para que eles se encontrem, é necessário que o pequeno percorra meia volta a mais que o grande. O número de voltas para que esse fato ocorra é dado pela razão $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = 4$.

18. D

Andando duas casas no mesmo sentido que o movimento de O até A e deslocando-se 120° no sentido anti-horário, chegaremos ao ponto F.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. D

Observe que $\frac{900°}{360°} = 2{,}5$.

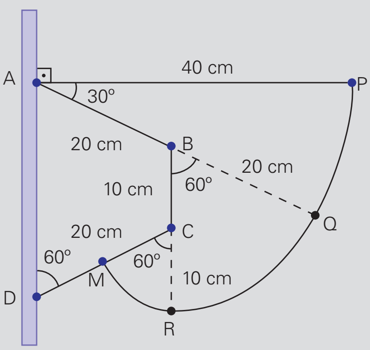
Logo, o skatista deu duas voltas e meia no ar.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. A

Considere a figura a seguir.



Temos:

$$\widehat{PQ} = \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot 40 = 20\frac{\pi}{3}\text{ cm}$$

$$\widehat{QR} = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 20 = 20\frac{\pi}{3}\text{ cm}$$

$$\widehat{RM} = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 10 = 10\frac{\pi}{3}\text{ cm}$$

Portanto: $\widehat{PQ} + \widehat{QR} + \widehat{RM} = 50\frac{\pi}{3}\text{ cm} = \frac{50\pi}{3}\text{ cm}$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

4 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

Comentários sobre o módulo

O objetivo é estender os conceitos das razões trigonométricas do triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica, que são úteis quando se trata de ângulos obtusos e funções trigonométricas.

Em seguida, com base na circunferência trigonométrica, estão definidas as razões seno, cosseno e tangente, assim como estabelecidos os respectivos sinais para cada quadrante da circunferência trigonométrica e os valores para arcos de extremidades da circunferência.

Para ir além

No livro *História da matemática*, da editora Edgar Blücher, o autor Boyer apresenta informações sobre o desenvolvimento da Trigonometria ao longo de vários séculos.

7. A

Utilizando a circunferência trigonométrica, temos que $0° < x \leq 60°$.

Como $\sec 0° = \dfrac{1}{\cos 0°} = 1$ e $\sec 60° =$

$= \dfrac{1}{\cos 60°} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ e, observando que nesse intervalo, ao qual x pertence à sec **x** é crescente, pois seu inverso cos x é decrescente. Então, $1 < \sec x \leq 2$.

8. Observe que para $g(x) = 0$ e $\beta = \dfrac{3\pi}{2}$, $x^2 + x \cdot \cos\dfrac{3\pi}{2} +$

$+ \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} = x^2 - 1 = 0$, ou seja, $x^2 = 1$.

Então $x = -1$ ou $x = 1$.

9. A

Sendo $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cdot(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)$, temos:

$(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cdot(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = \dfrac{1}{2}$

Como $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, então:

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2} \to \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \to$

$\to 2\cos 2x = \dfrac{1}{2} \to \quad \cos^2 x = \dfrac{3}{4} \to \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Sendo $x \in [0, \pi]$ e $\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, o menor valor para tg x ocorrerá se x pertencer ao segundo quadrante. Assim, $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Da relação fundamental vem: $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$.

Portanto, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

10. C

Pelo enunciado, temos que $OM = -\cos\alpha$. Da figura, o triângulo retângulo de cateto PM é isósceles, pois o segmento não perpendicular ao eixo x forma com esse um ângulo de 45°.

Com isso,

$PM = 1 - OM = 1 - (-\cos\alpha) \to PM = 1 + \cos\alpha$.

11. D

No intervalo $\dfrac{\pi}{2}$, π, temos que $\operatorname{sen} a > 0$, $\cos a < 0$ e $\operatorname{tg} a < 0$. Logo, analisando as expressões, temos que $\operatorname{sen} a - \operatorname{tg} a > 0$.

12. C

O par de ângulos de medidas 65° e 25° são complementares, assim como o par 55° e 35°. Então, cos 65° = sen 25° e cos 55° = sen 35°.

Logo, o cos 65° – sen 35°–sen 25° + cos 55° = = sen 25° – sen 35° – sen 25°+ sen 35°= 0.

13. E

$4\operatorname{sen}^2 x + 4\cos x - 1 = 0 \to 4(1 - \cos 2x) + 4\cos x - 1 = 0 \to 4 - 4\cos^2 x + 4\cos x - 1 = 0 \to$

$\to -4\cos^2 x + 4\cos x + 3 = 0 \to \cos x = \dfrac{3}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

Como $\cos x = \dfrac{3}{2}$ é falso para todo x ($\dfrac{3}{2} > 1$), as raízes vêm de $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

Da circunferência trigonométrica, vem N = 2 e β pertencente ao terceiro quadrante. Utilizando a relação fundamental, então $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}$.

Logo $N \operatorname{tg}\beta = 2\sqrt{3}$.

14. Da circunferência trigonométrica, temos:

$\operatorname{sen}(x - 2\pi) = \operatorname{sen} x = a$.

Da relação fundamental, vem:

$\cos^2(x - 2\pi) = 1 - \operatorname{sen}^2(x - 2\pi) = 1 - a^2$.

Portanto,

$\operatorname{sen}(x - 2\pi) - \cos^2(x - 2\pi) = a - (1 - a^2) = a^2 + a - 1$.

15. A

A medida em radianos do ângulo central BÂC é a mesma que a do arco BEC: $\dfrac{200}{300} = \dfrac{2}{3}$ rad.

Do triângulo ADC, temos:

$$\text{sen}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \rightarrow DC = 300\ \text{sen}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\overline{DA}}{\overline{AC}} \rightarrow DA = 300\ \cos\left(\frac{2}{3}\right)0$$

Logo, o caminho percorrido, em metros, é:

$$300 + 200 + 300\ \text{sen}\left(\frac{2}{3}\right) + 300\ \cos\left(\frac{2}{3}\right) =$$

$$= 500 + 300\left[\text{sen}\left(\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

16. A

Temos que se $(1+\sec\theta)\cdot(1+\text{cossec}\ \theta)=0$, então:

$(1 + \sec\theta) = 0$ ou $(1 + \text{cossec}\ \theta) = 0$

$1 + \sec\theta = 0 \Rightarrow \sec\theta = -1 \Rightarrow \cos\theta = -1 \therefore \theta = -\pi$ ou $\theta = \pi$

ou $1 + \text{cossec}\ \theta = 0 \Rightarrow \text{cossec}\ \theta = -1 \rightarrow \text{sen}\ \theta = = -1 \therefore \theta = -\frac{\pi}{2}$

Vale ressaltar que, para $\theta = -\pi$ ou $\theta = \pi$, não existe cossec θ. Para $\theta = -\frac{\pi}{2}$, não existe sec θ. Logo, a expressão $(1+\sec\theta)\cdot(1+\text{cossec}\ \theta)$ não existe para valores de θ encontrados.

17. Temos que $2\cdot\text{sen}\ x = 1 + \cos x$.
Logo:

$4\cdot\text{sen}^2 x = 1 + 2\cdot\cos x + \cos^2 x \rightarrow$
$\rightarrow 4 - 4\cdot\cos^2 x = 1 + 2\cdot\cos x + \cos^2 x \rightarrow$
$\rightarrow 5\cdot\cos^2 x + 2\cdot\cos x - 3 = 0$

Resolvendo a equação do 2° grau, temos:

$\cos x = \frac{3}{5}$ ou $\cos x = -1$

Como $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, temos $\sec x = \frac{5}{3}$ ou $\sec x = -1$.

Portanto, a maior valor de sec x é $\frac{5}{3}$.

18. B

Resolvendo esse sistema de equações, temos que $\text{tg}\alpha = -\sqrt{3}$ e $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como e $\text{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, então $\alpha \in 4°$ quadrante.

Como $0 < \beta < \pi$ e $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então $\beta \in 1°$ quadrante.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. C

Março: (t = 3) :

$$P(3) = 65 - 5\cdot\cos\left(\left(\frac{3+3}{6}\right)\pi\right) = 65 - 5\cdot\cos(\pi) =$$

$= 65 + 5 = 70$ Kg;

Setembro: (t = 9t):

$$P(9) = 65 - 5\cdot\cos\left(\left(\frac{9+3}{6}\right)\pi\right) = 65 - 5\cdot\cos(2\pi) =$$

$= 65 - 5 = 60$ Kg.

Portanto, o peso da pessoa diminuiu 10 kg.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

20. D

O mês de produção máxima se dá quando temos o menor preço. Como o menor ocorre quando cosseno é mínimo, ou seja, −1, temos que

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1 \rightarrow \frac{\pi x - \pi}{6} = \pi \rightarrow x = 7.$$

Logo, o mês é julho.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

5 SIMETRIAS E REDUÇÃO DO 2° QUADRANTE AO 1° QUADRANTE

Comentário sobre o módulo

O conteúdo de redução ao 1° quadrante está contido em módulo separado, para maior destaque, porque se trata de conteúdo muito útil na resolução de uma série de exercícios e problemas, nos quais o ângulo em questão seja maior que 90°.

Assim é apresentada a redução ao 2° quadrante, considerando as simetrias das razões trigonométricas presentes na circunferência trigonométrica. Vale ressaltar: em alguns problemas, a relação fundamental da Trigonometria ($sen^2x + cos^2x = 1$) consta como informação a considerar para a resolução. Essa relação vem demonstrada em outro módulo.

Na seção de exercícios propostos "Aprofundamento" e "Enem", são indicadas questões que envolvem a ideia de função trigonométrica. É importante que o professor relacione este conteúdo ao módulo a fim de mostrar que a redução ao 1° quadrante consiste em calcular valores de arcos e de funções trigonométricas com extremidades no 2° quadrante por meio de valores do 1° quadrante.

7. C

Temos que $\text{tg}\ \theta = \dfrac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta} = 1 \rightarrow \text{sen}\ \theta = \cos\theta$.

Como θ pertence ao primeiro quadrante, então $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

8. E

Como **x** é um arco com extremidade no 2° quadrante e $\text{sen}\ x = \dfrac{4}{5}$, temos que $\cos x < 0$. Então, pela identidade trigonométrica fundamental:

$$\cos^2x = 1 - \text{sen}^2x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \rightarrow \cos x = -\frac{3}{5}$$

Logo,

$$5\cos^2x - 3\text{tg}\ x = 5\cdot\frac{9}{25} - 3\cdot\frac{\frac{4}{5}}{\left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{9}{5} + 4 = \frac{29}{5}.$$

9.

É preciso encontrar as raízes da função f(x), ou seja:

$$f(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{x}\right) = 0 \rightarrow \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = 0 \text{ ou}$$

$$\left(1-\sqrt{x}\right) = 0$$

Portanto, $\sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1$.

Assim:

$$\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{3\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Considera-se também que, ao completar uma volta na circunferência trigonométrica, temos:

$$\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{3\pi x}{2} = \frac{5\pi}{2} \rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ e}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{3\pi x}{2} = \frac{7\pi}{2} \rightarrow x = \frac{7}{3}$$

Portanto, as abscissas dos pontos A, B, C e D são, respectivamente, $\dfrac{1}{3}$, 1, $\dfrac{5}{3}$ e $\dfrac{7}{3}$.

10. Como $2340° = 6\cdot 360° + 180°$ (seis voltas e meia na circunferência trigonométrica), e tão 2340° correspondem a 180°. Então,

$$\sec 2340° = \sec 180° = \frac{1}{\cos 180°} = -1.$$

11. A

Temos que $\text{sen}^2x = 1 - \cos^2x$, $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ (ângulos complementares).

Observando a circunferência trigonométrica: $\cos(-x) = \cos x$.

Substituindo na equação do enunciado:

$$6\cdot(1-\cos^2x) + \cos x = 4 + 2\cdot\cos x \rightarrow$$

$$\rightarrow 6 - 6\cdot\cos^2x - 4 - \cos x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6\cdot\cos^2x + \cos x - 2 = 0$$

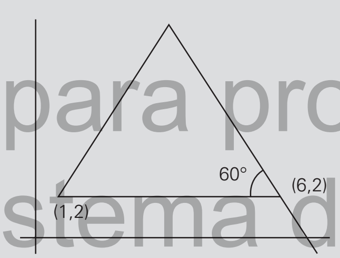
Resolvendo a equação do 2° grau: $\cos x = -\dfrac{2}{3}$ ou $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Como **x** pertence ao segundo quadrante, então $\cos x < 0$.

Logo, $\cos x = -\dfrac{2}{3}$.

12. E

Considere a figura a seguir.



Como o triângulo ABC é equilátero e a base AB é paralela ao eixo das abscissas, o ângulo formado é 120°. Então, da circunferência trigonométrica, temos sen 120° = sen 60°. Desse modo, o seno do ângulo procurado é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. Sim, pois $f(\pi) = \text{sen}\pi = 0$ e como $-\frac{4\pi}{3} = -\pi - \frac{\pi}{3}$ (corresponde à meia mais $\frac{1}{6}$ de volta no sentido horário na circunferência trigonométrica). Então, $-\frac{4\pi}{3}$ correspondem a 120°. Logo:

$$g\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Desse modo, $f(\pi) = g\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

14. Não. A intersecção das funções **f** e **g** ocorre para valor(es) de **x** tal que $f(x) = g(x)$.
Então:

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} + \cos x \rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos x + \cos^2 x \rightarrow$$

$$1 - \cos^2 x = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos x + \cos^2 x \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cdot \cos^2 x + \cos x - \frac{3}{4} = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau: $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}$.

Como $2 < \sqrt{7} < 3$, há mais de um valor de **x** que satisfaz essa última igualdade.

Portanto, as funções intersectam-se mais de uma vez.

15. a) $P(4) = 500 + 0,5 \cdot 4 + 20 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) =$

$= 500 + 2 + 20 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 500 + 2 - 10 = 492$ bilhões

b) Podemos calcular para x = 0. Então:

$P(12) - P(0) = 500 + 6 + 20 \cdot \cos(2\pi) - 500 -$

$- 20 \cdot \cos(0°) = 6$

16. C

Pela identidade trigonométrica fundamental, temos:

$\frac{4 \cdot 10}{49} + \cos^2 x = \rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{49} \rightarrow \cos x = -\frac{3}{7}$, pois **x** está no 2º quadrante.

Assim, $\text{tg } x = \frac{\frac{2\sqrt{10}}{7}}{-\frac{3}{7}} = \frac{-2\sqrt{10}}{3}$.

17. Observe que:

$$\frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \frac{6}{5} \cdot \cos \theta \rightarrow \text{sen } \theta = \frac{6}{5} \cdot \cos^2\theta \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen } \theta = \frac{6}{5} \cdot (1 - \text{sen}^2\theta) \rightarrow 6 \cdot \text{sen}^2\theta + 5 \cdot \text{sen } \theta - 6 = 0.$$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos:

$\text{sen } \theta = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ou $\text{sen } \theta = \frac{-18}{12} = \frac{-3}{2}$ (não existe θ).

Logo, $\text{sen } \theta = \frac{2}{3}$.

18. C

Temos que o segmento PQ é a tangente do ângulo 90° – α.

Então:

$\text{tg}(90° - \alpha) = \frac{\text{sen}(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$ (ângulos complementares).

Portanto, $\text{tg}(90° - \alpha) = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = \text{cotg } \alpha$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. C

Para que o valor de f (x) seja máximo, devemos ter o valor mínimo do denominador (2+ cos (x)), que ocorre para o menor valor do cosseno, ou seja, –1.

O maior valor da função é $\frac{1}{2-1} = 1$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. B

Observe que:

$$\text{tg } 30° = \frac{2,5}{x} = 0,577 \rightarrow x = 4,3328$$

$$\text{tg } 45° = \frac{y}{2,5} = 1 \rightarrow y = 2,5$$

Então, $x - y = 4,3328 - 2,5 \approx 1,83 \text{ m}$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

6 REDUÇÃO DO 3° E DO 4° QUADRANTE AO 1° QUADRANTE

Comentário sobre o módulo

O conteúdo de redução ao 1° quadrante está contido em módulo separado, para maior destaque, porque se trata de conteúdo muito útil na resolução de uma série de exercícios e problemas, nos quais o ângulo em questão seja maior que 90°.

Assim estão apresentadas as reduções aos 3° e 4° quadrantes, considerando as simetrias das razões trigonométricas presentes na circunferência trigonométrica. Vale ressaltar: em alguns problemas, a relação fundamental da Trigonometria $(\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1)$ consta como informação a considerar para a resolução. Essa relação vem demonstrada em outro módulo.

Antes de iniciar a explicação sobre a redução aos 2°, 3° e 4° quadrantes, relembre a representação de um ângulo no primeiro quadrante.

É possível baixar do link a seguir um programa que faz simulações do movimento de um ponto sobre a circunferência trigonométrica com os correspondentes valores de seno, cosseno e tangente dos arcos: <http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=tex&cod=_funcaotrigonometricasgraficosi>.

Para ir além

DRABACH, André Luiz Mognol. Quadro trigonométrico: o uso do software R.E.C. no estudo das razões trigonométricas no ciclo trigonométrico. XII Encontro Nacional de Educação Matemática — Enem 2016. Anais... Curitiba, Paraná. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6083_3339_ID.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2018.

7. B

Da figura, temos:

$$M = \frac{5\pi}{6} = 150° \text{ e } N = 150° + 180° = 330°.$$

Então:

$$AB = \cos 330° \text{ e } AC = \text{sen}150°.$$

Logo, a razão entre AB e AC é:

$$\frac{\cos 330°}{\text{sen } 150°} = \frac{\cos 30°}{\text{sen } 30°} = \text{tg } 30° = \sqrt{3}.$$

8. Como

- 1 290° = 360°.3 + 210°, ou seja, 3 voltas mais 210° (1 290° correspondem a 210°);
- 1 080° = 360°·3, ou seja, 3 voltas mais 120° (1 080° correspondem a 0°);
- $\frac{37\pi}{6} = \frac{36\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 6\pi + \frac{\pi}{6}$, ou seja, 3 voltas mais 30° $\left(\frac{37\pi}{6}\text{ correspondem a } 30°\right)$.

Então:

$$E = \text{sen } 210° + \cos 0° + \cos 30° + \text{sen}^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} =$$

$$= -\text{sen } 30° + \cos 0° + \cos 30° + 1 =$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

9. C

Podemos observar que, como o quadrado está inscrito na circunferência, o valor de β é igual a:

$\alpha + 90°$.

Portanto, $\cos\beta = \cos(\alpha + 90°) = \text{sen }(-\alpha)$ (ângulos complementares).

Como $\cos\alpha = 0{,}8$, então, pela identidade trigonométrica fundamental:

$$\text{sen}^2\alpha + 0{,}64 = 1 \rightarrow \text{sen}^2\alpha = 0{,}36 \rightarrow \text{sen}\alpha = 0{,}6$$

Como $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$ então, $\cos\beta = -0{,}6$.

10. C

$$N = \frac{3\cdot(-1) - 4\cdot(-\text{sen}30°) + 2\cdot(-\text{tg}45°)}{6\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{-3 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\cdot(-1)}{6\cdot\frac{1}{2}} = \frac{-3+2-2}{3} = -1,$$

Logo, N pertence ao intervalo [–2, –1].

11. C

Observe que:

$$\frac{\text{sen}(180° - x)}{\text{cotg}(270° - x)\cdot\cos(270° - x)} =$$

$$= \frac{\text{sen}x}{\frac{\cos(270° - x)}{\text{sen}(270° - x)}\cdot\cos(270° - x)} = \frac{\text{sen}x}{\frac{\cos^2(270° - x)}{\text{sen}(270° - x)}}.$$

Da circunferência trigonométrica, temos:

$\text{sen }(270° - x) = -\text{ sen}(90° - x)$ e $\cos(270° - x) = -\cos(90° - x)$

Como (90° – x) e (x) são complementares, temos:

$\text{sen}(90° - x) = \cos(x)$ e $\cos(90° - x) = \text{sen}(x)$.

Então:

$$\frac{\text{senx}}{\frac{\cos^2(270°-x)}{\text{sen}(270°-x)}} = \frac{\text{senx}}{\frac{(-\text{senx})^2}{-\text{cosx}}} = -\frac{\text{cosx}}{\text{senx}} = -\text{cotgx}.$$

12. O ponteiro das horas percorre 360° em 12 horas. Logo 30°/h, ou 0,5°/min.

Então, em 10 horas e 50 minutos, temos $10 \cdot 30° + 30 \cdot 0{,}5° = 300° + 15° = 315°$.

Da circunferência trigonométrica, vem: cos 315° = = cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. E

Temos que $\text{tg}\ \theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\ \theta} = -3 \to \text{sen}\ \theta = -3 \cdot \cos\ \theta$.

Da relação fundamental, vem:

$$9\cos^2\theta + \cos^2\theta = 1 \to \cos^2\ \theta = \frac{1}{10}$$

Como θ é do quarto quadrante, então cos θ = $\frac{1}{\sqrt{10}}$

Então, $\text{sen}\ \theta = -3 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Portanto, $\text{cossec}\ \theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}$.

14. B

Na intersecção das curvas f e g, $f(x) = g(x)$.

$$\text{sen}\ x = \frac{1}{2} + \cos\ x$$

$$\text{sen}^2x = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\ x + \cos^2x$$

$$1 - \cos^2x = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\ x + \cos^2x$$

$$2 \cdot \cos^2x + \cos\ x - \frac{3}{4} = 0$$

Na equação de 2º grau, temos que $\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) =$

$= 1 + 6 = 7 > 0$.

Portanto, existem duas soluções reais para esse problema.

Assim, as curvas se interceptam duas vezes, o que é falso.

15. D

I. Verdadeiro.

Se x pertence ao 3° quadrante, então $\text{sen}\ x < 0$.

Portanto, 2m –3 < 0 → $m < \frac{3}{2}$, e $\text{sen}\ x > -1$. Então,

2m –3 > – 1 → m >1, logo $1 < m < \frac{3}{2}$.

II. Verdadeiro.

O valor máximo de f ocorre quando $\cos^2x = 1$.

Então, $f(x)_{MÁX} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

O valor mínimo de f ocorre quando $\cos^2x = 0$. Então, $f(x)_{MIN} = 1$.

Portanto, a soma dos valores máximo e mínimo é igual a $\frac{7}{3}$.

III. Falso.

cossec x $\frac{1}{\text{sen}x}$ = 1,333... + 1+ 0,33... = $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \to$

$\to \text{sen}\ x = \frac{3}{4}$.

Assim, pela relação fundamental:

$$\cos^2x = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \to \cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Então, cotgx} = \frac{\cos\ x}{\text{sen}x} = \frac{-\sqrt{\frac{7}{4}}}{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

16. C

Analisando as alternativas:

a) $\text{tg}\ \alpha = 1 \to \alpha = -\frac{3\pi}{4}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

b) $\text{sen}\ \alpha = 0 \to \alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$.

c) $\cos\ \alpha = -1 \to \alpha = \pi$

d) $\text{tg}\ \alpha = 0 \to \alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$.

e) cos a = – 2 $\nexists$ α.

17. C

$\text{tg}\alpha = 1 \to a = \frac{\pi}{4}$ e $a = \frac{5\pi}{4}$

$\text{sen}\alpha = 0 \to a = 0$ e $a = \pi$

$\cos\alpha = -1 \to a = \pi$

$\text{tg}\alpha = 0 \to a = 0$ e $a = \pi$

$\cos\alpha = -2 \to \nexists\ a$

18. D

A pressão máxima é dada quando $\cos(2t) = 1$. Ou seja, $P_{máx}(t) = 115 + 35 = 150$.

A pressão mínima é dada quando $\cos(2t) = -1$. Ou seja, $P_{min}(t) = 115 - 35 = 80$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade : Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano

19. B

Valor máximo: ocorre se

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot x\right)=1\rightarrow\frac{\pi}{3}\cdot x=0\rightarrow x=0$

ou $\frac{\pi}{3}\cdot x=2\pi\rightarrow x=6$.

Portanto, o valor máximo ocorre nos anos de 2015 e 2 021.

$f_{máx}$= 250 + 12 = 262 milhões.

Valor mínimo: ocorre se $\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot x\right)=-1\rightarrow\frac{\pi}{3}\cdot x=\pi\rightarrow$

$\rightarrow x=3$ ou $\frac{\pi}{3}\cdot x=3\pi\rightarrow$ $x = 9$.

Portanto, o valor mínimo ocorre nos anos de 2018 e 2024.

$f_{mín}$= 250 – 12 = 238 milhões.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

20. B

Temos que $\cos(360°-1)=\cos x$, logo $P=$

$=\cos 91°\cdot\cos 92°\cdot\cos 93°\cdot\ldots\cdot\cos 268°\cdot\cos 269°$

$P=\cos^2 91°\cdot\cos^2 92\cdot\cos^2 93°\cdot\ldots\cdot\cos^2 179\cdot$

$\cdot\cos^2 180°<0$

Pois $P=\cos^2 91°\cdot\cos^2 92\cdot\cos^2 93°\cdot\ldots\cdot\cos^2 179>$

>0 e $\cos^2 180°=-1$

Como $\cos^2 120°\cdot\cos^2 135=\frac{1}{8}$ e os outros termos de

P são todos positivos e menores que 1, temos que:

$0<\cos^2 91\cdot\cos^2 92°\cdot\cos^2 93°\cdot\ldots\cdot\cos^2 179°<\frac{1}{8}<\frac{1}{4}$,

ou seja, $-\frac{1}{4}<P<0$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

7 LEI DOS COSSENOS

Comentário sobre o capítulo

Após estudar as razões trigonométricas no triângulo retângulo, este módulo dedica-se a apresentar uma ferramenta matemática muito útil na resolução de problemas em que seja preciso determinar distâncias não possíveis de medição direta. A lei dos cossenos serve para os ângulos agudo, obtuso e reto. Também são apresentados exemplos de aplicação no dia a dia em instrumentos que utilizam estes teoremas como base.

Para ir além

Sugerimos a leitura do texto "O mundo na palma das mãos", que relata um pouco da história da evolução dos mapas e das medições referentes ao nosso planeta e a outros astros. Disponível em: *<http://super.abril.com.br/superarquivo/1992/conteudo_113048.shtml>. Acesso em: 15 jun. 2018.*

7. Traçando o segmento oposto ao ângulo de 30° de forma a obtermos um triângulo com dois lados medindo 4 cm e chamando esse segmento de x, pela lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 30° \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = 16 + 16 - 32\frac{\sqrt{3}}{2} = 16 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) \rightarrow$$

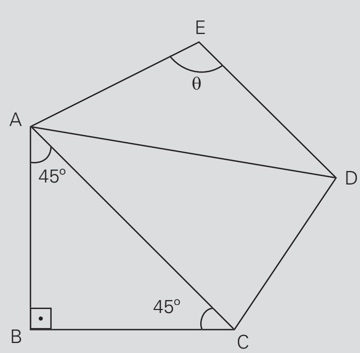
$$\rightarrow x = 4\sqrt{2-\sqrt{3}} \rightarrow x = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

8. B

Traçando as diagonais como na figura a seguir:

Temos que o triângulo ABC é retângulo e isósceles. Portanto:

$$B\hat{A}C = B\hat{C}A = 45° \text{ e } A\hat{C}D = 135° - 45° = 90°$$



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$(\overline{AC})^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \rightarrow \overline{AC} = a\sqrt{2}$$

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo ACD, temos:

$$(\overline{AD})^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 3a^2 \rightarrow AD = a\sqrt{3}$$

Portanto, utilizando a lei dos cossenos no triângulo ADE, temos:

$$(\overline{AD})^2 = (\overline{AE})^2 + (\overline{ED})^2 - 2 \cdot \left(\overline{AE}\right) \cdot \left(\overline{ED}\right) \cdot \cos\theta$$

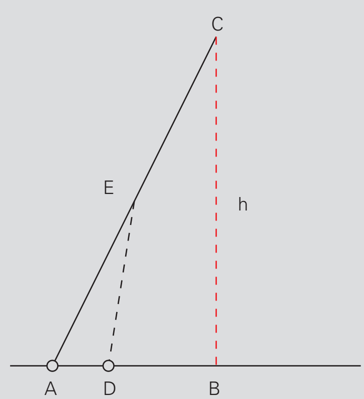
$$(a\sqrt{3})^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos\theta$$

$$3a^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \rightarrow \theta = 120°$$

9. A

Considere a figura a seguir



Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo ADE, temos:

$$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cos\hat{A} \rightarrow 7 = 10 - 6 \cdot \cos\hat{A}$$

$$\rightarrow \cos\hat{A} = \frac{1}{2} \rightarrow \hat{A} = 60°$$

Logo, $\text{sen}\,60° = \frac{h}{8} \rightarrow h = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

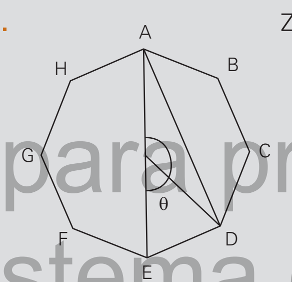
10. A

Chamando o terceiro lado do triângulo de **x** e utilizando a Lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 100 + 64 - 80 = 84 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt{84} = \sqrt{4 \cdot 21} = 2\sqrt{21}\,\text{m}$$

11. Z



Sendo θ o centro da circunferência circunscrita e como menor arco ED mede, em graus, um oitavo da circunferência, temos que $\theta = \frac{360°}{8} = 45°$. Então, o ângulo AOD mede 180°– 45° = 135°.

Utilizando a Lei dos cossenos no triângulo AOD, temos:

$$\overline{AD}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos 135° \to$$

$$\to \overline{AD}^2 = 2 - 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2} \to \overline{AD} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

12. D

Como o triângulo ABC é equilátero de lado 3 cm, seus ângulos internos medem 60°. Portanto:

$$A\hat{B}D = 90° + 60° = 150°$$

Assim, como $\overline{AB}$ = 3 cm e aplicando a Lei dos cossenos no triângulo ABD, temos:

$$\overline{AD}^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cos 150° = 9 + 16 + 24\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 25 + 12\sqrt{3} \to \overline{AD} = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$$

13. B

Utilizando a Lei dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot \cos 60° \to$$

$$\to AC^2 = 100 + 225 - 2\cdot 10\cdot 15\cdot\frac{1}{2}$$

$$AC^2 = 100 + 225 - 150 = 175 = 25\cdot 7 \to AC = 5\sqrt{7}\text{m}$$

14. Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot \cos\hat{A} \to$$

$$\to 49 = 64 + AC^2 - 8AC \to$$

$$\to AC^2 - 8AC + 15 = 0$$

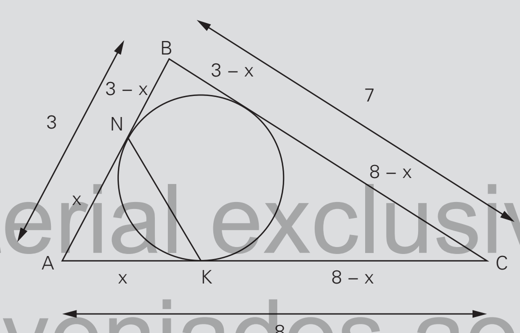
Resolvendo a equação do 2º grau, vem:

AC = 3 cm ou AC = 5 cm.

Portanto, o maior perímetro é (8 + 7 + 5) cm, ou seja, 20 cm.

15. A

Considere a figura a seguir.



Vale lembrar que segmentos com extremidade comum e tangentes à mesma circunferência são congruentes. Então, AN = AK = x.

Sendo M o ponto de tangência do lado $\overline{BC}$, temos que $BN = BM = 3 - x$ e $CK = CM = 8 - x$.

Observando a figura, temos:

$$7 = 3 - x + 8 - x \to 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$$7^2 = 8^2 + 3^2 - 2\cdot 8\cdot 3\cdot \cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{1}{2} \to \hat{A} = 60°$$

Portanto, como AN = AK = 2 e $\hat{A} = 60°$, o triângulo ANK é equilátero. Então, NK = 2.

16 A

Seja ℓ a medida do lado do triângulo equilátero, $BM = MN = NC = \frac{\ell}{3}$.

Assim, aplicando a Lei dos cossenos:

$$AM^2 = \ell^2 + \left(\frac{l}{3}\right)^2 - 2\cdot\ell\cdot\frac{\ell}{3}\cdot\cos 60° = \ell^2 + \frac{\ell^2}{9} -$$

$$-2\cdot\frac{\ell^2}{3}\cdot\frac{1}{2} \to AM = \frac{\ell\sqrt{7}}{3}$$

Temos que $AM = AN = \frac{\ell\sqrt{7}}{3}$, pois os triângulos ABM e ACN são congruentes (caso LAL).

Sendo $\alpha = M\hat{A}N$ e aplicando a Lei dos cossenos no triângulo AMN, temos:

$$\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{7}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{\ell\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\ell\sqrt{7}}{3}\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{14\ell^2}{9}\cdot\cos\alpha = \frac{7\ell^2}{9} + \frac{7\ell^2}{9} - \frac{\ell^2}{9} = \frac{13\ell^2}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{13}{14}$$

17. Não, supondo que seja possível obter o triângulo com as medidas estabelecidas no enunciado. Aplicando a Lei dos cossenos nesse triângulo:

$$169 = 49 + 25 - 70\cdot\cos\alpha \to \cos\alpha = \frac{-95}{70} < -1$$

Como o menor valor do cosseno de um ângulo é –1, concluímos que não existe o triângulo, pois não existe α, um de seus ângulos internos.

18. D

Para encontrar a medida BC, deve-se utilizar a Lei dos cossenos:

$$BC^2 = 1^2 + (0,8)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0,8 \cdot \cos 150^\circ = 1 + 0,64 +$$
$$+ 0,64 + 1 \cdot 0,8 \cdot \sqrt{3} = 1 + 0,64 + 1,36 \rightarrow$$

$$BC^2 = 3 \rightarrow BC = \sqrt{3} = 1,7\,km$$

Logo, $AB + BC + CA = 1 + 1,7 + 0,8 = 3,5\,km$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. C

Chamando o lado oposto ao ângulo de 120° de **x** e utilizando a Lei dos cossenos:

$$x^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 100 + 36 + 60$$

$$x^2 = 196 \rightarrow x = 14\,m$$

Portanto, o perímetro desse terreno é igual a $14 + 10 + 6 = 30\,m$.

Então, a quantidade de arame necessária é $3 \cdot 30 = 90\,m$.

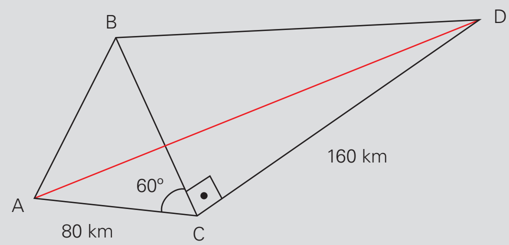
Como o preço por metro do arame é R$ 5,00, então João irá gastar R$ 90,00 · 5 = R$ 450,00.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

20. B

Como as distâncias entre as cidades de Sorocaba, São Paulo e Campinas formam um triângulo equilátero de lado 80 km, temos que AC = AB = = BC = 80 km.



Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo ACD:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2 \cdot AC \cdot CD \cdot \cos A\hat{C}D$$

$$AD^2 = 80^2 + 160^2 - 2 \cdot 80 \cdot 160 \cdot \cos 150^\circ$$

$$AD^2 = 6\,400 + 25\,600 - 25\,600 \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow AD^2 = 32\,000 + 12\,800\sqrt{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow AD^2 = 6\,400 \cdot \left(5 + 2\sqrt{3}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow AD = \sqrt{6\,400 \cdot \left(5 + 2\sqrt{3}\right)} = 80\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

8 LEI DOS SENOS

Comentário sobre o capítulo

Após estudar as razões trigonométricas no triângulo retângulo, este módulo dedica-se a apresentar uma ferramenta matemática muito útil na resolução de problemas em que seja preciso determinar distâncias não possíveis de medição direta.

A primeira explicação envolve o conceito de ângulos suplementares e as razões de seno definidas para esse tipo de ângulo.

Em seguida, é apresentada e demonstrada a Lei dos senos, para cada caso de ângulo: agudo, obtuso e reto. Também são apresentados exemplos de aplicação no dia a dia, citando instrumentos que utilizam estes teoremas como base.

Para ir além

A elaboração de plantas de terrenos, em muitas situações irregulares, com a presença de córregos ou rios, exige participação da área de engenharia chamada topografia. O topógrafo usa o teodolito, instrumento que mede distâncias e determina “ângulos de visada” com base em dois pontos marcados no local em que ele se encontra, cuja distância possa medir. Obtém-se assim um triângulo do qual se conhecem dois ângulos e o lado que contém seus vértices. As relações trigonométricas que envolvem triângulos quaisquer permitem ao topógrafo determinar as medidas dos elementos restantes.

Para saber mais, acesse

<http://www.infoescola.com/matematica/trigonometria/>.

Exercícios propostos

7. C

Chamando de Sendo BC = x e utilizando a Lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 4 + 3 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30° \to$$

$$\to x^2 = 7 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \to x^2 = 1 \to x = 1 \cdot$$

Aplicando a Lei dos cossenos:

$$\frac{x}{\text{sen A}} = \frac{AC}{\text{sen B}} \to \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\text{senB}} \to \text{sen B} = 1 \therefore B = 90°.$$

8. C

Temos que $AC^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \to AC = \sqrt{5}$ e

$$AD^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \to AD = \sqrt{40}$$

Chamando de α o ângulo $A\hat{C}B$, temos

$$A\hat{C}D = 180° - \alpha \text{ e } \text{sen} A\hat{C}D = \text{sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Utilizando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sqrt{40}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{\text{sen}\theta} \to \text{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $\theta = 45°$.

9. A

Chamando de x o cateto vertical do menor triângulo retângulo da figura, temos que:

$$\text{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{6} \to x = 2\sqrt{3}$$

Assim, pela Lei dos senos:

$$\frac{8 - 2\sqrt{3}}{\text{sen}\alpha} = \frac{10}{\text{sen}120°} \to$$

$$\to 10 \cdot \text{sen}\alpha = \left(8 - 2\sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \to$$

$$\to 10 \cdot \text{sen}\alpha = 4\sqrt{3} - 3 \to \text{sen}\alpha = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}$$

10. Temos que, como o triângulo é retângulo e isósceles, o ângulo $\hat{C} = 45°$.

Portanto, pela Lei dos senos:

$$\frac{BD}{\text{sen } 45°} = \frac{2}{\text{sen } 120°} \to$$

$$\to BD = \frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ cm.}$$

11. D

No triângulo BIC: $\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} + 105° = 180° \to$

$$\to \hat{B} + \hat{C} = 150°.$$

No triângulo ABC: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \to \hat{A} = 30°$

Pela Lei dos senos:

$$\frac{AC}{\text{sen } 45°} = \frac{10}{\text{sen } 30°} \to AC = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$$

12. Temos que

$$\text{sen}(180° - x) = \text{sen}x,$$

$$\text{tg}(180° - x) = \frac{\text{sen}(180° - x)}{\cos(180° - x)} = \frac{\text{sen}x}{-\cos x},$$

$$\text{cossec }(90° - x) = \frac{1}{\text{sen}(90° - x)} = \frac{1}{\cos x} \text{ e}$$

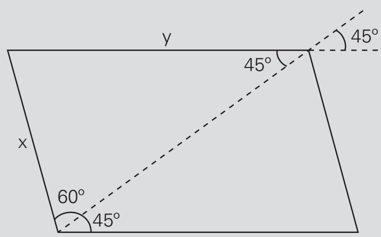
$$\cos^2(90° + x) = [\text{sen}(-x)]^2 = [-\text{sen}x]^2 = \text{sen}^2 x$$

Substituindo os valores na expressão:

$$\frac{\operatorname{sen}x \cdot \dfrac{\operatorname{sen}x}{(-\cos x)}}{\dfrac{1}{\cos x}\cdot(\operatorname{sen}^2 x)} = -1.$$

13. D

Considere a figura:



Sejam x e y, respectivamente, as medidas dos lados menor e maior do paralelogramo, então pela Lei dos senos:

$$\frac{x}{\operatorname{sen}45^\circ} = \frac{y}{\operatorname{sen}60^\circ}$$

Logo, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\operatorname{sen}45^\circ}{\operatorname{sen}60^\circ} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

14. A

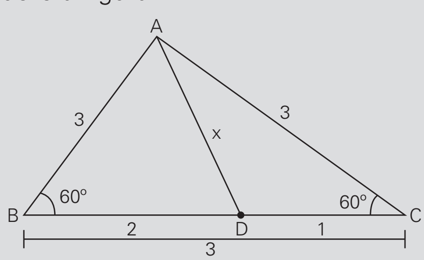
Seja $A\hat{D}O = \alpha$, como o ângulo $D\hat{O}C$ é externo do triângulo ADO:

$75^\circ = 45^\circ + \alpha \rightarrow \alpha = 30^\circ$

Aplicando a Lei dos senos no triângulo ADO:

$$\frac{\overline{DO}}{\operatorname{sen}45^\circ} = \frac{\overline{AO}}{\operatorname{sen}30^\circ} \rightarrow \frac{\overline{OD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{200}{\frac{1}{2}} \rightarrow DO = 200\sqrt{2}\ \text{m}$$

15. Considere a figura:



Sendo x a medida AD e aplicando a Lei dos cossenos no triângulo ACD:

$x^2 = 9 + 1 - 6\cos 60^\circ \rightarrow$

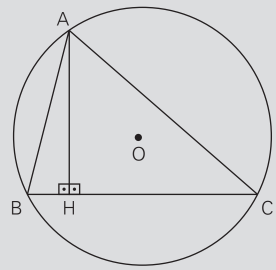
$\rightarrow x^2 = 10 - 3 \rightarrow x^2 = 7 \therefore x = \sqrt{7}.$

Sendo $B\hat{A}D = \alpha$ e utilizando a Lei dos senos no triângulo ABD:

$$\frac{x}{\operatorname{sen}60^\circ} = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha} \rightarrow \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

16. Considere a figura:

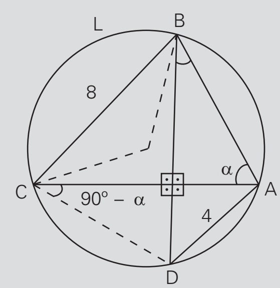


No triângulo retângulo ABH: $\operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{8}{10}$.

Aplicando a Lei dos senos no triângulo inscrito ABC:

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}\hat{B}} = 2r \rightarrow \frac{16}{\frac{8}{10}} = 2r \rightarrow 2r = 20 \rightarrow r = 10$$

17. C



Observe que o ângulo $C\hat{D}B = \alpha$. Logo, o ângulo $A\hat{C}D = 90^\circ - \alpha$.

Aplicando a Lei dos senos no triângulo BCA:

$$\frac{8}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R \leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{R}.$$

Aplicando a Lei dos senos no triângulo ACD:

$$\frac{4}{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)} = 2R \rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{R}$$

Assim, pela identidade trigonométrica fundamental:

$$\frac{16}{R^2} + \frac{4}{R^2} = 1 \rightarrow R^2 = 20$$

Portanto, $R = 2\sqrt{5}$.

18. D

Temos que $A\hat{B}C = 180° - 74° - 62° = 44°$.

Portanto, pela Lei dos senos:

$$\frac{AC}{\text{sen}44°} = \frac{AB}{\text{sen}74°} \rightarrow \frac{70}{0,7} = \frac{AB}{0,96} \rightarrow AB = 96 \text{ m}$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. A

Da soma dos ângulos internos de um triângulo (180°), concluímos que o terceiro ângulo interno (base do poço) mede 30°. Sendo x a medida do maior lado, oposto ao maior ângulo, podemos obtê-lo aplicando a Lei dos senos:

$$\frac{1}{\text{sen } 30°} = \frac{x}{\text{sen } 120°} \rightarrow x = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1,7.$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

20. E

Da soma dos ângulos internos de um triângulo (180°), concluímos que o ângulo ACB = 81°. Logo, o triângulo ABC é isósceles.

Seja CA = CB = d, pela Lei dos senos:

$$\frac{3700}{\text{sen } 18°} = \frac{d}{\text{sen } 81°} \Rightarrow d = \frac{3700 \cdot 0,98}{0,31} \approx$$
$$\approx 3\,700 \cdot 3,16 \approx 37 \cdot 316 \approx 11692 \text{ km}$$

Assim, o valor de *x* é 3 700 + 11 692 ≈

≈ 15 392 km.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

21. E

Do texto, temos:

$\Delta t = (2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3\,600)$ segundos

e

$V = 300\,000$ km/s

Assim, a distância percorrida é dada por:

$\Delta S = V \cdot \Delta t$

$2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3\,600 \cdot 300\,000 \cong 1,89 \cdot 10^{13}$ km $=$
$= 1,89 \cdot 10^{16}$ m.

Em consequência, como $1,89 < \sqrt{10} \cong 3,16$, segue que a resposta é 10^{16}.

22. A

O objeto gira em movimento circular uniforme. Como a aceleração centrípeta é igual a $a_c = \omega^2 R$, sendo a tração T:

$$T \cdot \cos\theta = m \cdot g \rightarrow T = \frac{m \cdot g}{\cos\theta}$$

Assim:

$$T_x = m \cdot a_c \rightarrow T \cdot \text{sen}\theta = m \cdot a_c \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{m \cdot g}{\cos\theta} \cdot \text{sen}\theta = m \cdot \omega^2 \cdot R \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \cdot \text{sen}\theta}{R \cdot \cos\theta}}$$

Substituindo R = 7,5 m, sen θ = 0,6, cos θ = 0,8, g = 10 m/s², temos:

$\omega = 1$ rad/s

23. C

Pressão mínima quando $\cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right) = 1$. Então, P(t) = 100 − 20 = 80 mmHg.

Pressão máxima quando $\cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right) = -1$. Então, P(t) = 100 + 20 = 120 mmHg.