INTEGRAL

1. PRIMITIVA E INTEGRAL INDEFINIDA

Seja uma função f definida em um intervalo I. Uma primitiva de f em I é uma função F definida em I, tal que

$$\mathbf{F'(x)=f(x)}$$

Exemplo: $F(x)=\frac{x^3}{3}+1$ é uma primitiva de $f(x)=x^2$, pois $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+1\right)'=\frac{3x^2}{3}+0=x^2=f(x)$.

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então toda função $F(x)+k$, onde k é constante, também é uma primitiva de $f(x)$. Assim, $y=F(x)+k$, onde k é constante, é a família das primitivas de f.

A **família das primitivas de f**, também chamada **integral indefinida de f**, é denotada por

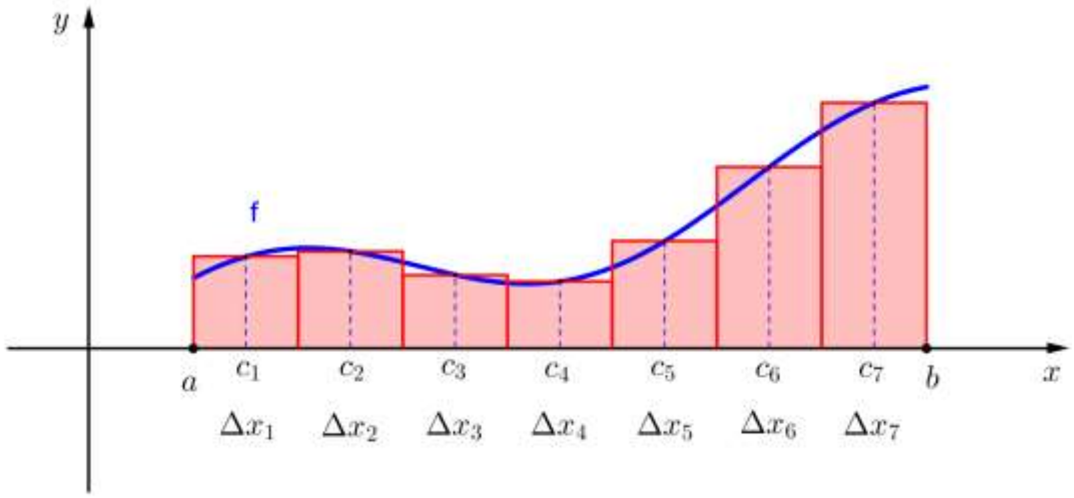
$$\mathbf{\int f(x)dx=F(x)+k}$$

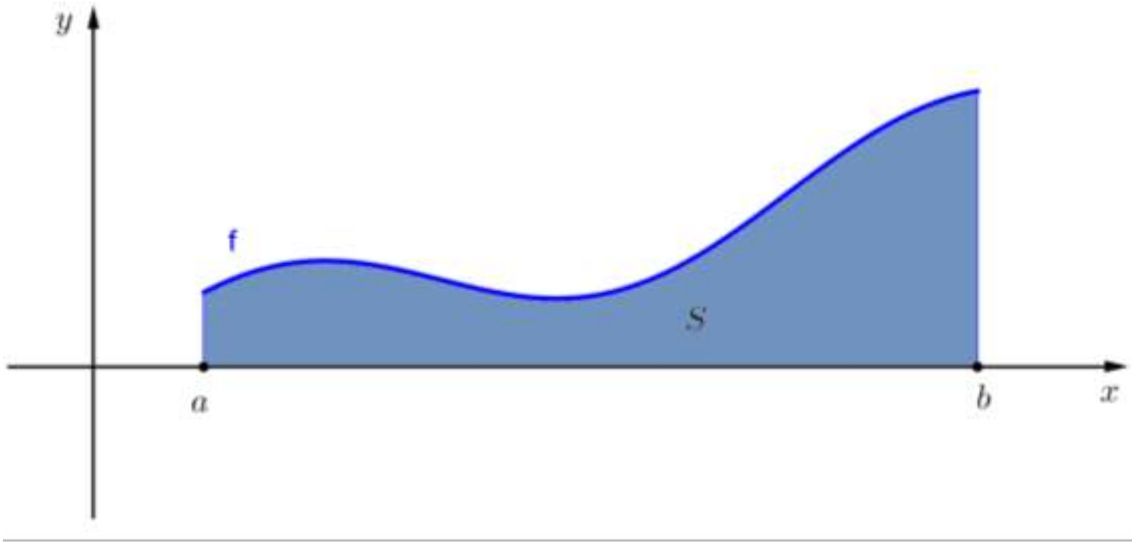
Na expressão acima, $f(x)$ é chamado integrando.

Exemplo: $\int \text{sen}x\,dx=-\cos x+k$, pois $(-\cos x)'=\text{sen}x$.

2. INTEGRAL DE RIEMANN OU INTEGRAL DEFINIDA

A integral de Riemann ou integral definida de f em $[a,b]$ é dada por $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, onde c_i está no intervalo Δx_i, e representa a área sob o gráfico de f, obtida como a soma das áreas dos retângulos sob a curva para uma dada partição de $[a,b]$, quando as bases dos retângulos Δx_i tendem a zero.





Se $\int_a^b f(x)dx$ existe, dizemos que f é integrável segundo Riemann em $[a,b]$.

2.1. PROPRIEDADES

São válidas as seguintes relações para as integrais de Riemann.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b [k \cdot f(x)]dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$f(x) \geq 0 \text{ em } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$c \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Se f é uma função ímpar $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Se f é uma função par $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)dx$

3. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Se f for integrável em $[a,b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Observe que o teorema fundamental do Cálculo relaciona os conceitos de primitiva e integral de Riemann. Esse resultado pode ser demonstrado por meio do Teorema do Valor Médio (TVM).

Exemplo: $\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$

4. TÁBUA DE INTEGRAIS

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1)$$
$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$
$$\int e^u du = e^u + C$$
$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$
$$\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$$
$$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$$
$$\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C$$
$$\int \operatorname{cossec}^2 u\, du = -\operatorname{cotg} u + C$$
$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C = -\operatorname{arccotg} u + C$$
$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen} u + C = -\arccos u + C$$
$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

Observe a tábua de integrais apresenta funções de u integradas du. Caso isso não ocorra, devem ser utilizadas técnicas de substituição.

5. INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Seja $x = g(t)$, então $dx = g'(t)dt$. Assim, temos:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

Seja $x = g(t)$, $g(c) = a$ e $g(d) = b$, então temos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

Exemplo: $\int_0^1 e^{3x}dx$

$$\left.\begin{matrix} u = 3x \Rightarrow du = 3dx \\ x = 0 \Rightarrow u = 3 \cdot 0 = 0 \\ x = 1 \Rightarrow u = 3 \cdot 1 = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_0^1 e^{3x}dx = \int_0^3 e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\left[e^u\right]_0^3 = \frac{1}{3}\left(e^3 - e^0\right) = \frac{e^3 - 1}{3}$$

Exemplo: **(Integração por substituição trigonométrica)** $\int \sqrt{1 - x^2}dx$

$u = \text{arcsen}\, x$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\, u = x \Rightarrow dx = \cos u\, du$ e $\cos u = \sqrt{1 - x^2}$

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \int \sqrt{1 - \text{sen}^2 u} \cos u\, du = \int \sqrt{\cos^2 u} \cos u\, du = \int |\cos u| \cos u\, du$$

Como $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, então $|\cos u| = \cos u$. Assim, temos:

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \int \cos^2 u\, du = \int \frac{1 + \cos 2u}{2} du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}\, 2u}{2} + C.$$

$$\text{sen}\, 2u = 2\,\text{sen}\, u \cos u = 2x\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \int \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{1}{2}\text{arcsen}\, x + \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} + C$$

6. INTEGRAÇÃO POR PARTES

Considerando a expressão da derivada de um produto de funções, temos:

$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)g(x) + f(x)\cdot g'(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot g'(x) = \left[f(x)\cdot g(x)\right]' - f'(x)g(x)$

Integrando, vem:

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Alternativamente, podemos fazer $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$ e $v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x)dx$, então

$$\boldsymbol{\int udv = uv - \int vdu}$$

Exemplo: $\int x\,\text{sen}\,x\,dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \text{sen}\,x\,dx \Rightarrow v = -\cos x$

$\int x\,\text{sen}\,x\,dx = x\cdot(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \text{sen}\,x + C$

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (EFOMM 1993) A função que tem a diferencial $(\text{tg}\theta + \text{cotg}\theta)^2 d\theta$ é:

a) $\text{cotg}\,\theta - \text{tg}\,\theta + C$

b) $\text{tg}\,\theta + \text{cotg}\,\theta + C$

c) $\text{tg}\,\theta - 2\text{cotg}\,\theta + C$

d) $2\text{tg}\,\theta + \text{cotg}\,\theta + C$

e) $\text{tg}\,\theta - \text{cotg}\,\theta + C$

2. (EFOMM 1993) Calculando $\int \frac{\text{sen}\left(\frac{x-1}{3}\right)}{\cos^2\left(\frac{x-1}{3}\right)} dx$, encontramos:

a) $\text{sen}\frac{x-1}{3} + C$

b) $3\sec\frac{x-1}{3} + C$

c) $\cos\frac{x-1}{3} + C$

d) $\sec\frac{x-1}{3} + C$

e) $3\text{cossec}\frac{x-1}{3} + C$

3. (EFOMM 1993) A $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x}$ é igual a:

a) $\text{tg}\,x + C$

b) $\text{cotg}\,x + C$

c) $-\text{tg}\,x + C$

d) $-\text{cotg}\,x + C$

e) $\sec x + C$

4. (EFOMM 1995) Sabendo que $f'(x)=\dfrac{x+2}{x^2+4x+11}$ e que $f(1)=0$, então o valor de $f(0)$ é:

a) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{11}}{4}\right)$

b) $\dfrac{\ln\sqrt{11}}{\ln 4}$

c) $\ln\left(4\sqrt{11}\right)$

d) $\ln\left(\dfrac{4}{\ln\sqrt{11}}\right)$

e) $\sqrt{11}\ln 4$

5. (EFOMM 1995) A solução de $\int \dfrac{e^{3y}}{\sqrt[3]{e^{3y}+3}}dy$ é:

a) $\dfrac{1}{2}\left(e^{3y}+3\right)^{3/2}+c$

b) $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(e^{3y}+3\right)^2+c}$

c) $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\left(e^{3y}+3\right)^2}+c$

d) $\dfrac{1}{3}\left(e^{3y}+3\right)^{3/2}+c$

e) $\dfrac{1}{2}\left(e^{3y}+3\right)^{-2/3}+c$

6. (EFOMM 1999) Resolvendo $\int 3\text{sen}(x/2)dx$, encontramos:

a) $6\cos\dfrac{x}{2}+c$

b) $3\cos\dfrac{x}{2}+c$

c) $-3\cos\dfrac{x}{2}+c$

d) $-6\cos\dfrac{x}{2}+c$

e) $\cos\dfrac{x}{2}\cdot\text{sen}\dfrac{x}{2}+c$

7. (EFOMM 2013) O valor da integral $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx$ é:

a) $-\cos x + c$

b) $-\frac{1}{4}\cos 2x + c$

c) $-\frac{1}{2}\cos x + c$

d) $+\frac{1}{4}\cos x + c$

e) $+\frac{1}{2}\cos 2x + c$

8. (EFOMM 2013) O gráfico da função contínua $y = f(x)$, no plano xy, é uma curva situada acima do eixo x para $x > 0$ e possui a seguinte propriedade:

“A área da região entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $a \leq x \leq b$ ($a > 0$) é igual a área entre a curva e o eixo x no intervalo $ka \leq x \leq kb$ ($k > 0$)”.

Se a área da região entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x para x no intervalo $1 \leq x \leq 3$ é o número A então a área entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $9 \leq x \leq 243$ vale:

a) $2A$

b) $3A$

c) $4A$

d) $5A$

e) $6A$

9. (EFOMM 2014) Uma pesquisa indica a taxa de crescimento populacional de uma cidade através da função $P(x) = 117 + 200x$, por pessoas anualmente há x anos. Passados 10 anos, o crescimento é dado pela integral $\int_0^{10} (117 + 200x)dx$. Pode-se afirmar que esse crescimento será de

a) 10130 pessoas.

b) 11170 pessoas.

c) 11200 pessoas.

d) 11310 pessoas.

e) 12171 pessoas.

10. (EFOMM 2015) Dada uma função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sabe-se que:

i. $F'(x)=\text{sen}(3x)\cos(5x)$, onde $F'(x)$ é a derivada da função F, em relação à variável independente x;

ii. $F(0)=0$.

O valor de $F\left(\frac{\pi}{16}\right)$ é

a) $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$

b) $\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\frac{3}{4}\right)$

c) $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$

d) $\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\frac{3}{4}\right)$

e) $\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$

11. (EN 1989) $\int_0^1 \frac{x}{2-2x^2+x^4}dx$ é igual a:

a) $-\frac{\pi}{8}$

b) $-\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{8}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) 0

12. (EN 2004) Seja p uma constante real positiva. A integral $\int e^{\frac{1n(2px)}{2}}dx$ é igual a:

a) $\frac{2}{3}(2px)^{3/2}+c$

b) $p(2px)^{-1/2}+c$

c) $\frac{1}{3}(2px)^{3/2}+c$

d) $\frac{2}{3}x(2px)^{1/2}+c$

e) $\frac{1}{3}x(2px)^{-1/2}+c$

13. (EN 2005) Sabendo-se que $y(x)$ é uma função real derivável em todo o seu domínio e que $y'(x)=e^{3x}+\frac{1}{x^2+2x+2}+\frac{1}{1-3x}$ e $y(0)=\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}$, pode-se afirmar que $y(-1)$ é igual a

a) $\frac{e^{-3}-2\ln 2}{3}$

b) $\frac{4e^{-3}+5}{4}$

c) $\frac{e^{-3}+3\ln 2+3}{3}$

d) $\frac{3-2\ln 2+e^{-3}}{3}$

e) $\frac{e^{-3}-\ln 2+3}{3}$

14. (EN 2006) O cálculo de $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$ é igual a

a) $\frac{\ln\left|1+e^{4x}\right|}{4}+c$

b) $2\,\text{arctg}\,e^{2x}+c$

c) $\frac{\text{arctg}\,e^{2x}}{4}+c$

d) $\frac{\ln\left|1+e^{4x}\right|}{4e^{2x}}+c$

e) $\frac{-\text{arccotg}\,e^{2x}}{2}+c$

15. (EN 2006) Seja $y=y(x)$ uma função real que satisfaz à equação $8y-\left(\frac{x^6+2}{x^2}\right)=0$, $x\in\mathbb{R}_-^*$. O valor de $\int x^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ é

a) $\frac{x^6}{12}+\frac{\ln|x|}{2}+c$

b) $-\frac{x^4}{8}+\frac{x^{-2}}{4}+c$

c) $-\frac{x^6}{12}-\ln|x|+c$

d) $\frac{-x^6}{12}-\frac{\ln|x|}{2}+c$

e) $\frac{x^4}{8}-\frac{x^{-2}}{4}+c$

16. (EN 2007) Sejam a e b constantes reais positivas, $a\neq b$. Se x é uma variável real, então $\int\frac{\left(a^x-b^x\right)^2}{a^xb^x}dx$ é

a) $(\ln a-\ln b)\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x+c$

b) $(\ln b-\ln a)\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x+c$

c) $\frac{1}{(\ln a-\ln b)}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x+c$

d) $\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}-2x+c$

e) $\frac{1}{(\ln b-\ln a)}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x+c$

17. (EN 2008) O valor de $\int 4\,\text{sen}\,2x\cos^2 x\,dx$ é

a) $-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{4}+C$

b) $-\cos 2x - \frac{\text{sen}^2 2x}{2} + C$

c) $-\frac{4\cos^3 x}{3} + C$

d) $-\frac{3}{2}\cos 2x + C$

e) $-\cos 2x - \frac{\cos 4x}{4} + C$

18. (EN 2008) Considere $y = f(x)$ uma função real, de variável real, derivável até 2^a ordem e tal que $f''(x) + f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se $g(x) = f'(x)\text{sen}x - f(x)\cos x + \cos^2 x$, então

a) $g(x) = \frac{\text{sen}2x}{2} + C$

b) $g(x) = C$

c) $g(x) = \frac{\cos 2x}{2} + C$

d) $g(x) = 2f(x) - \frac{\cos 2x}{2} + C$

e) $g(x) = \text{sen}x + \cos^2 x + C$

19. (EN 2009) O valor de $\int \frac{1 + x^2 + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{(1 - x^4)(1 + x^2)}} dx$ é

a) $\arccos x + \text{arccotg}\, x + C$

b) $\text{arcsen}\, x - \text{arctg}\, x + C$

c) $-\text{arcsen}\, x - \text{arccotg}\, x + C$

d) $\arccos x + \text{arctg}\, x + C$

e) $-\arccos x + \text{arctg}\, x + C$

20. (EN 2009) A medida da área da região plana limitada pela curva de equação $y = \sqrt{4x - x^2}$ e pela reta de equação $y = x$ mede, em unidades de área,

a) $\frac{\pi}{4} + 2$

b) $\pi-2$

c) $\pi+4$

d) $\pi+2$

e) $\pi-1$

21. (EN 2010) Qual o valor de $\int \text{sen}6x\cos x\,dx$?

a) $-\frac{7\cos 7x}{2}-\frac{5\cos 5x}{2}+c$

b) $\frac{7\text{sen}7x}{2}+\frac{5\text{sen}5x}{2}+c$

c) $\frac{\text{sen}7x}{14}+\frac{\text{sen}5x}{10}+c$

d) $-\frac{\cos 7x}{14}-\frac{\cos 5x}{10}+c$

e) $\frac{7\cos 7x}{2}+\frac{5\cos 5x}{2}+c$

22. (EN 2011) Sejam $f(x)=\ln(\cos x)^2$, $0\le x<\frac{\pi}{2}$ e $F(x)=\int\left[(f'(x))^2+\text{sen}^2 2x\right]dx$. Se $F(0)=\frac{7\pi}{8}-5$, então $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} F(x)$ vale

a) –2

b) –1

c) 0

d) 1

e) 1

23. (EN 2011) Sejam $f(x)=\ln(\cos x)^2$, $0\le x<\frac{\pi}{2}$ e $F(x)=\int\left[(f'(x))^2+\text{sen}^2 2x\right]dx$. Se $F(0)=\frac{7\pi}{8}-5$, então $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} F(x)$ vale

a) –2

b) –1

c) 0

d) 1

e) 1

24. (EN 2012) Qual o valor de $\int(\text{cossec}\, x \cdot \sec x)^{-2} dx$?

a) $\frac{1}{32}(4x - \text{sen}\, 4x) + c$

b) $\frac{\text{sen}^5 x}{5} - \frac{\text{sen}^3 x}{3} + c$

c) $\frac{\text{sen}^3 x \cdot \cos^3 x}{9} + c$

d) $\frac{1}{16}(4x - \text{sen}\, 4x) + c$

e) $\frac{1}{16}(4x + \text{sen}\, 4x) + c$

25. (EN 2012) A taxa de depreciação $\frac{dV}{dt}$ de determinada máquina é inversamente proporcional ao quadrado de $t+1$, onde V é o valor, em reais, da máquina t anos depois de ter sido comprada. Se a máquina foi comprada por R\$ 500.000,00 e seu valor decresceu R\$ 100.000,00 no primeiro ano, qual o valor estimado da máquina após 4 anos?

a) R\$ 350.000,00

b) R\$ 340.000,00

c) R\$ 260.000,00

d) R\$ 250.000,00

e) R\$ 140.000,00

26. (EN 2013) Considere a função $f(x) = \ln(\sec x + \text{tg}\, x) + 2\,\text{sen}\, x$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$. O resultado de $\int\left[(f'(x))^2 + 2 - 2\cos 2x\right]dx$ é

a) $\text{tg}\, x + 8x + 2\,\text{sen}\, 2x + C$

b) $\sec x + 6x + C$

c) $\sec x - 2x - \text{sen}\, 2x + C$

d) $\text{tg}\,x + 8x + C$

e) $\sec x + 6x - \text{sen}\,2x + C$

27. (EN 2013) O valor de $\int_0^{\pi/2} \left(e^{2x} - \cos x\right) dx$ é

a) $\frac{e^{\pi}}{2} - \frac{3}{2}$

b) $\frac{e^{\pi/2}}{2} - \frac{1}{2}$

c) $\frac{e^{\pi}}{2} + \frac{3}{2}$

d) $\frac{e^{\pi/2}}{2} - \frac{3}{2}$

e) $\frac{e^{\pi/2}}{2} + \frac{1}{2}$

28. (EN 2015) Sabendo-se que f é uma função real de variável real, tal que a derivada segunda de f em x é $f''(x) = \cos^2 x + 1$ e que $f(0) = \frac{7}{8}$ e $f'(0) = 2$, o valor de $f(\pi)$ é

a) $2\pi + \frac{11}{8}$

b) $\pi^2 + \pi + \frac{5}{8}$

c) $2\pi^2 + 5$

d) $\frac{3\pi^2}{4} + 2\pi + \frac{7}{8}$

e) $3\pi^2 + \pi + \frac{5}{8}$

29. (EN 2015) Considere a função real de variável real $y = f(x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, cujo gráfico contém o ponto $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$. Se $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \text{sen}\,x \cdot \cos x$, então $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ é igual a

a) $-\sqrt{3} + \frac{1}{8}$

b) $\frac{9}{8}$

c) $\frac{7}{8}$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}$

e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{4}$

30. (ITA 2008) Seja C uma circunferência de raio r e centro O e $\overline{AB}$ um diâmetro de C. Considere o triângulo equilátero BDE inscrito em C. Traça-se a reta s passando pelos pontos O e E até interceptar em F a reta t tangente à circunferência C no ponto A. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco AE e pelos segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{EF}$ em torno do diâmetro $\overline{AB}$.

GABARITO

1.

RESPOSTA: E

$$\int(\mathrm{tg}\theta+\mathrm{cotg}\theta)^2 d\theta=\int\left(\mathrm{tg}^2\theta+2+\mathrm{cotg}^2\theta\right)d\theta=\int\left(1+\mathrm{tg}^2\theta+1+\mathrm{cotg}^2\theta\right)d\theta=$$
$$=\int\left(\sec^2\theta+\mathrm{cossec}^2\theta\right)d\theta=\mathrm{tg}\,\theta-\mathrm{cotg}\,\theta+C$$

2.

RESPOSTA: B

$$u=\cos\left(\frac{x-1}{3}\right)\Rightarrow du=-\mathrm{sen}\left(\frac{x-1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}dx\Leftrightarrow \mathrm{sen}\left(\frac{x-1}{3}\right)dx=-3du$$

$$\int\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{x-1}{3}\right)}{\cos^2\left(\frac{x-1}{3}\right)}dx=-3\int\frac{du}{u^2}=-3\cdot\left(-\frac{1}{u}\right)+C=\frac{3}{\cos\left(\frac{x-1}{3}\right)}+C=3\sec\left(\frac{x-1}{3}\right)+C$$

3.

RESPOSTA: D

$$\int\frac{dx}{\mathrm{sen}^2 x}=\int\mathrm{cossec}^2 x\,dx=-\mathrm{cotg}\,x+C$$

4.

RESPOSTA: A

$$u=x^2+4x+11\Rightarrow du=(2x+4)dx\Leftrightarrow(x+2)dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x+2}{x^2+4x+11}dx=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\ln\sqrt{x^2+4x+11}+C$$

$$f(1)=0\Leftrightarrow\ln\sqrt{16}+C=0\Leftrightarrow C=-\ln 4$$

$$f(0)=\ln\sqrt{11}-\ln 4=\ln\frac{\sqrt{11}}{4}$$

5.

RESPOSTA: C

$u=e^{3y}+3 \Rightarrow du=e^{3y}\cdot 3dy \Leftrightarrow e^{3y}dy=\frac{du}{3}$

$$\int \frac{e^{3y}}{\sqrt[3]{e^{3y}+3}}dy=\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}}=\frac{1}{3}\left(\frac{u^{2/3}}{2/3}\right)+c=\frac{1}{2}\sqrt[3]{u^2}+c=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(e^{3y}+3\right)^2}+c$$

6.

RESPOSTA: D

$$\int 3\text{sen}(x/2)dx=3\cdot\left(\frac{-\cos\frac{x}{2}}{1/2}\right)+c=-6\cos\frac{x}{2}+c$$

7.

RESPOSTA: B

$$\int \text{sen}x\cdot\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int 2\text{sen}x\cdot\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int \text{sen}2x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)+c=-\frac{1}{4}\cos 2x+c$$

8.

RESPOSTA: B

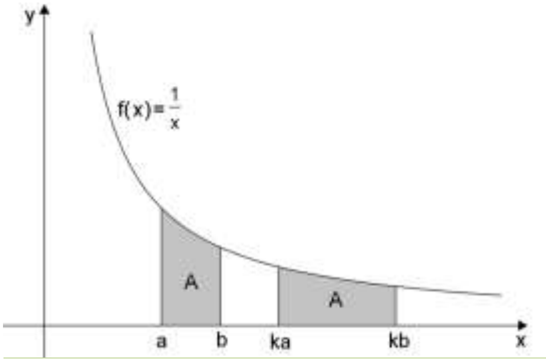
Se a área entre a curva $y=f(x)$ e o eixo x para $x\in[1,3]$ é o número A, então para cada uma das regiões determinadas por $x\in[9\cdot 1,9\cdot 3]=[9,27]$, $x\in[3\cdot 9,3\cdot 27]=[27,81]$ e $x\in[3\cdot 27,3\cdot 81]=[81,243]$ a área também é igual a A.

Assim, para $x\in[9,243]=[9,27]\cup[27,81]\cup[81,243]$, a área entre a curva $y=f(x)$ e o eixo x é igual a $A+A+A=3A$.

Observe que o enunciado afirma que $\int_a^b f(x)dx=\int_{ka}^{kb} f(x)dx$, $\forall k>0$. Essa propriedade é compatível com a função $f(x)=\frac{1}{x}$, com $x>0$, pois $\int f(x)dx=\int \frac{dx}{x}=\ln x+c$, o que resulta

$$\int_{ka}^{kb} f(x)dx=\int_{ka}^{kb}\frac{dx}{x}=[\ln x]_{ka}^{kb}=\ln(kb)-\ln(ka)=\ln\left(\frac{kb}{ka}\right)=\ln\left(\frac{b}{a}\right)=\ln(b)-\ln a=\int_a^b\frac{dx}{x}=\int_a^b f(x)dx.$$

Essa situação é ilustrada no gráfico a seguir:



9.

RESPOSTA: B

O crescimento pedido é o valor da integral definida $\int_0^{10}(117+200x)dx$. Assim, temos:

$$\int_0^{10}(117+200x)dx=\left[117x+200\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{10}=\left[117x+100x^2\right]_0^{10}=$$
$$=\left(117\cdot10+100\cdot10^2\right)-\left(117\cdot0+100\cdot0^2\right)=11170$$

10.

RESPOSTA: C

Aplicando a transformação de produto em soma, temos: $\operatorname{sen}(3x)\cos(5x)=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(8x)-\operatorname{sen}(2x)]$.

Vamos recordar a integral $\int\operatorname{sen}(kx)dx=-\frac{\cos(kx)}{k}+c$.

$$F(x)=\int F'(x)dx+c=\int\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(8x)-\operatorname{sen}(2x))dx+c=-\frac{\cos(8x)}{16}+\frac{\cos(2x)}{4}+c$$

$$F(0)=-\frac{\cos(8\cdot0)}{16}+\frac{\cos(2\cdot0)}{4}+c=0\Leftrightarrow c=-\frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow F(x)=-\frac{\cos(8x)}{16}+\frac{\cos(2x)}{4}-\frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{16}\right)=-\frac{\cos\left(8\cdot\frac{\pi}{16}\right)}{16}+\frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{16}\right)}{4}-\frac{3}{16}=-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{16}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{4}-\frac{3}{16}=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1\Leftrightarrow\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

11.

RESPOSTA: C

$$\int_0^1 \frac{x}{2-2x^2+x^4}dx=\int_0^1 \frac{x}{1+\left(x^2-1\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+u^2}du=\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} u\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}\left[0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\pi}{8}$$

$u=x^2-1 \Rightarrow du=2xdx$

12.

RESPOSTA: D

$$\int e^{\frac{1n(2px)}{2}}dx=\int e^{\ln\sqrt{2px}}dx=\int\sqrt{2px}\,dx=\sqrt{2p}\int x^{1/2}dx=\sqrt{2p}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}+c=\frac{2}{3}x\cdot(2px)^{1/2}+c$$

13.

RESPOSTA: D

$$y(x)=\int y'(x)dx=\int\left(e^{3x}+\frac{1}{x^2+2x+2}+\frac{1}{1-3x}\right)dx=\int e^{3x}dx+\int\frac{1}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{1}{1-3x}dx=$$

$$=\int e^{3x}dx+\int\frac{1}{1+(x+1)^2}d(x+1)-\frac{1}{3}\int\frac{1}{1-3x}d(1-3x)=\frac{e^{3x}}{3}+\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{1}{3}\ln|1-3x|+C$$

$$y(0)=\frac{e^{3\cdot0}}{3}+\operatorname{arctg}(0+1)-\frac{1}{3}\ln|1-3\cdot0|+C=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}+C=\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}\Leftrightarrow C=1$$

$$y(-1)=\frac{e^{3\cdot(-1)}}{3}+\operatorname{arctg}(-1+1)-\frac{1}{3}\ln|1-3\cdot(-1)|+1=\frac{e^{-3}}{3}-\frac{1}{3}\cdot\ln4+1=\frac{3-2\ln2+e^{-3}}{3}$$

14.

RESPOSTA: E

$$\int\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2}=-\frac{1}{2}\operatorname{arccotg} u+C=-\frac{1}{2}\operatorname{arccotg} e^{2x}+C$$

$u=e^{2x}\Rightarrow du=2\cdot e^{2x}dx$

15.

RESPOSTA: D

$$8y-\left(\frac{x^6+2}{x^2}\right)=0,\ x\in\mathbb{R}_-^*\Rightarrow 8\frac{dy}{dx}=\frac{6x^5\cdot x^2-\left(x^6+2\right)\cdot2x}{x^4}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{4}\left(x^6-2+\frac{1}{x^6}\right)\Rightarrow 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{4}\left(x^6+2+\frac{1}{x^6}\right)=\frac{1}{4}\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2$$

$$\int x^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int x^2\sqrt{\frac{1}{4}\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int x^2\left|x^3+\frac{1}{x^3}\right|dx=-\frac{1}{2}\int x^2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(x^5+\frac{1}{x}\right)dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{6}+\ln|x|\right)+C=-\frac{x^6}{12}-\frac{\ln|x|}{2}+C$$

16.

RESPOSTA: C

Relembrando as derivadas das exponenciais e logaritmos.

$$\left(e^x\right)'=e^x,\ \left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a,\ (\ln x)'=\frac{1}{x},\ (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$$

Para efetuar a integral do problema vamos usar: $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

$$\int\frac{\left(a^x-b^x\right)^2}{a^xb^x}dx=\int\frac{a^{2x}-2a^xb^x+b^{2x}}{a^xb^x}dx=\int\left(\frac{a}{b}\right)^x dx-2\int dx+\int\left(\frac{b}{a}\right)^x dx$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}-2x+\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}+C\Leftrightarrow\frac{1}{\ln a-\ln b}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x+C$$

17.

RESPOSTA: E

$$\int 4\,\text{sen}2x\cos^2 x dx=\int 4\,\text{sen}2x\cdot\frac{\cos 2x+1}{2}dx=\int 2\,\text{sen}2x\cos 2x dx+2\int\text{sen}2x dx$$

$$=\int\text{sen}4x dx+2\int\text{sen}2x dx=-\frac{\cos 4x}{4}+2\cdot\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)+C=-\frac{\cos 4x}{4}-\cos 2x+C$$

18.

RESPOSTA: C

$$g'(x)=\left(f''(x)\text{sen}x+\cancel{f'(x)\cos x}\right)-\left(\cancel{f'(x)\cos x}+f(x)(-\text{sen}x)\right)+2\cos x(-\text{sen}x)$$

$$g'(x)=\left(f''(x)+f(x)\right)\text{sen}x-\text{sen}2x$$

$$f''(x)+f(x)=0\Rightarrow g'(x)=-\text{sen}2x$$

$$\Rightarrow g(x)=\int(-\text{sen}2x)dx=\frac{\cos 2x}{2}+C$$

19.

RESPOSTA: E

$$\int \frac{1+x^2+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^4)(1+x^2)}}dx=\int \frac{1+x^2+\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{1+x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx+\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int \frac{1}{1+x^2}dx=-\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int \frac{1}{1+x^2}dx=-\arccos x+\operatorname{arctg} x+C$$

20.

RESPOSTA: B

Vamos mostrar como resolver essa questão usando integrais, entretanto a solução mais simples combina geometria analítica e geometria plana, e dispensa o uso de integração.

Vamos inicialmente identificar os limites de integração

$$\sqrt{4x-x^2}=x \Leftrightarrow 4x-x^2=x^2 \wedge x\geq 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$$

A área será dada por:

$$S=\int_0^2\left(\sqrt{4x-x^2}-x\right)dx=\int_0^2\sqrt{4x-x^2}dx-\int_0^2 x dx=\pi-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\pi-2$$

$$\int_0^2\sqrt{4x-x^2}dx=\int_0^2\sqrt{4-(2-x)^2}dx=2\int_0^2\sqrt{1-\left(\frac{2-x}{2}\right)^2}dx=2\int_{\pi/2}^0\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}\,(-2\cos u du)=$$

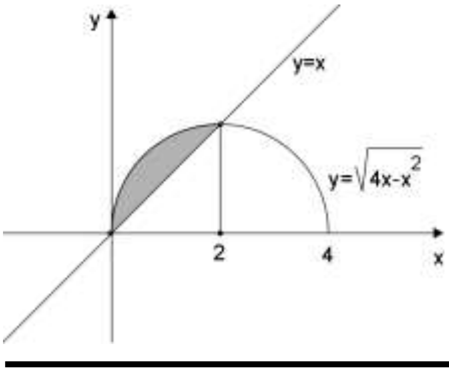
$$-4\int_{\pi/2}^0\cos^2 u du=-4\int_{\pi/2}^0\frac{\cos 2u+1}{2}du=-2\left[\frac{\operatorname{sen}2u}{2}+u\right]_{\pi/2}^0=-2\left[\left(\frac{\operatorname{sen}2\cdot 0}{2}+0\right)-\left(\frac{\operatorname{sen}2\cdot\frac{\pi}{2}}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\pi$$

$$u=\operatorname{arcsen}\left(\frac{2-x}{2}\right)\Leftrightarrow \operatorname{sen}u=\frac{2-x}{2}\Rightarrow \cos u du=-\frac{dx}{2}$$

Alternativamente, podemos observar o seguinte:

$$y=\sqrt{4x-x^2}\Leftrightarrow y^2=4x-x^2 \wedge y\geq 0\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=2^2 \wedge y\geq 0$$

Logo, essa equação representa uma semicircunferência de centro $(2,0)$ e raio 2.



A área pedida é a área de um segmento circular de 90° em um círculo de raio 2.

$$S=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2-\frac{2\cdot 2}{2}=\pi-2$$

21.

RESPOSTA: D

$\text{sen}6x \cdot \cos x = \frac{1}{2}(\text{sen}7x + \text{sen}5x)$

$\int \text{sen}6x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2}\int(\text{sen}7x + \text{sen}5x)dx = \frac{1}{14}\int \text{sen}7x\, d(7x) + \frac{1}{10}\int \text{sen}5x\, d(5x) =$

$= \frac{1}{14}(-\cos 7x) + \frac{1}{10}(-\cos 5x) + c = -\frac{\cos 7x}{14} - \frac{\cos 5x}{10} + c$

22.

RESPOSTA: B

$f(x) = \ln(\cos x)^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} \cdot (2\cos x) \cdot (-\text{sen} x) = -2\,\text{tg}\, x$

$F(x) = \int\left[(f'(x))^2 + \text{sen}^2 2x\right]dx = \int\left[4\,\text{tg}^2 x + \text{sen}^2 2x\right]dx =$

$= \int\left[4\sec^2 x - 4 + \frac{1-\cos 4x}{2}\right]dx = 4\int d(\text{tg}\, x) - \frac{7}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x dx =$

$= 4\,\text{tg}\, x - \frac{7}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}4x}{4} + C$

$F(0) = 4\,\text{tg}\, 0 - \frac{7}{2} \cdot 0 - \frac{1}{8} \cdot \text{sen}(4 \cdot 0) + C = C = \frac{7\pi}{8} - 5$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} F(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}}\left(4\,\text{tg}\, x - \frac{7}{2}x - \frac{\text{sen}4x}{8} + \frac{7\pi}{8} - 5\right) = 4 - \frac{7\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} - 5 = -1$

23.

RESPOSTA: B

$f(x) = \ln(\cos x)^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} \cdot (2\cos x) \cdot (-\text{sen} x) = -2\,\text{tg}\, x$

$F(x) = \int\left[(f'(x))^2 + \text{sen}^2 2x\right]dx = \int\left[4\,\text{tg}^2 x + \text{sen}^2 2x\right]dx =$

$= \int\left[4\sec^2 x - 4 + \frac{1-\cos 4x}{2}\right]dx = 4\int d(\text{tg}\, x) - \frac{7}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x dx =$

$= 4\,\text{tg}\, x - \frac{7}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}4x}{4} + C$

$F(0) = 4\,\text{tg}\, 0 - \frac{7}{2} \cdot 0 - \frac{1}{8} \cdot \text{sen}(4 \cdot 0) + C = C = \frac{7\pi}{8} - 5$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} F(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(4\,\text{tg}\,x-\frac{7}{2}x-\frac{\text{sen}4x}{8}+\frac{7\pi}{8}-5\right)=4-\frac{7\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}-5=-1$$

24.

RESPOSTA: A

$$\int(\text{cossec}\,x\cdot\sec x)^{-2}\,dx=\int\frac{1}{\text{cossec}^2 x\sec^2 x}dx=\int\text{sen}^2 x\cos^2 x dx=\frac{1}{4}\int(2\,\text{sen}\,x\cos x)^2\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\text{sen}^2(2x)dx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{\text{sen}4x}{4}\right)+c=\frac{1}{32}(4x-\text{sen}4x)+c$$

25.

RESPOSTA: B

$\frac{dV}{dt}=k.\frac{1}{(t+1)^2}\Rightarrow\int_0^t\frac{dV}{ds}ds=k\int_0^t\frac{1}{(s+1)^2}ds\Rightarrow V(t)-V(0)=-k(s+1)^{-1}\Big|_0^t\Rightarrow V(t)-V(0)=k\frac{t}{t+1}$ Como o valor decresceu $R\$\,100.000,00$ no primeiro ano, então $-100.000=V(1)-V(0)=k.\frac{1}{2}\Rightarrow k=-200.000$.

Portanto, tomando $V(0)=500.000$ e $t=4$ teremos $V(4)=340.000$.

26.

RESPOSTA: D

$$f(x)=\ln(\sec x+\text{tg}\,x)+2\,\text{sen}\,x$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sec x+\text{tg}\,x}\cdot(\sec x+\text{tg}\,x)'+2\cos x=\frac{\sec x\,\text{tg}\,x+\sec^2 x}{\sec x+\text{tg}\,x}+2\cos x=$$

$$=\frac{\sec x(\text{tg}\,x+\sec x)}{\sec x+\text{tg}\,x}+2\cos x=\sec x+2\cos x$$

$$\Rightarrow(f'(x))^2=(\sec x+2\cos x)^2=\sec^2 x+2\sec x\cdot 2\cos x+4\cos^2 x=\sec^2 x+4+4\cos^2 x$$

$$(f'(x))^2+2-2\cos 2x=\sec^2 x+4+4\cos^2 x+2-2(2\cos^2 x-1)=\sec^2 x+8$$

$$\int\left[(f'(x))^2+2-2\cos 2x\right]dx=\int\left[\sec^2 x+8\right]dx=\text{tg}\,x+8x+C$$

27.

RESPOSTA: A

$$\int_0^{\pi/2}\left(e^{2x}-\cos x\right)dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}-\operatorname{sen}x\right]_0^{\pi/2}=\left(\frac{e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{e^{2\cdot 0}}{2}-\operatorname{sen}0\right)=\frac{e^{\pi}}{2}-\frac{3}{2}$$

28.

RESPOSTA: D

Inicialmente, devemos recordar as integrais $\int \cos kx dx=\frac{\operatorname{sen}kx}{k}+c$ e $\int \operatorname{sen}kx dx=-\frac{\cos kx}{k}+c$.

$$\cos^2 x+1=\frac{\cos 2x+1}{2}+1=\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=\int f''(x)dx+c_0=\int\left(\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{2}\right)dx+c_0=\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\frac{3x}{2}+c_0$$

$$f'(0)=2\Rightarrow f'(0)=\frac{\operatorname{sen}2\cdot 0}{4}+\frac{3\cdot 0}{2}+c_0=2\Leftrightarrow c_0=2$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\frac{3x}{2}+2$$

$$f(x)=\int f'(x)dx+c_1=\int\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\frac{3x}{2}+2\right)dx+c_1=-\frac{\cos 2x}{8}+\frac{3x^2}{4}+2x+c_1$$

$$f(0)=\frac{7}{8}\Rightarrow f(0)=-\frac{\cos 2\cdot 0}{8}+\frac{3\cdot 0^2}{4}+2\cdot 0+c_1=\frac{7}{8}\Leftrightarrow c_1=1$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{\cos 2x}{8}+\frac{3x^2}{4}+2x+1 \text{ e } \Rightarrow f(x)=-\frac{\cos 2\cdot\pi}{8}+\frac{3\cdot\pi^2}{4}+2\cdot\pi+1=\frac{3\pi^2}{4}+2\pi+\frac{7}{8}$$

29.

RESPOSTA: C

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{sen}x\cdot\cos x=\sec^2 x+\frac{\operatorname{sen}2x}{2}$$

$$f(x)=\int f'(x)dx+C=\int\left(\sec^2 x+\frac{\operatorname{sen}2x}{2}\right)dx+C=\operatorname{tg}x-\frac{\cos 2x}{4}+C$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=-\frac{1}{8}$$

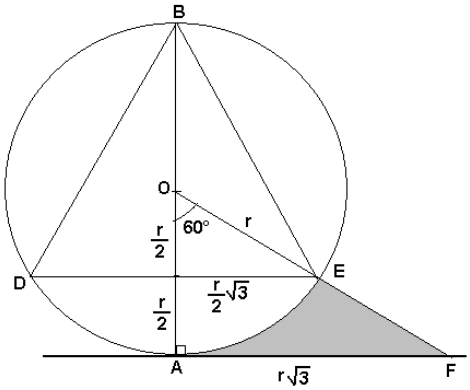
$$\Rightarrow f(x)=\operatorname{tg}x-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}=1-\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

30.

1ª SOLUÇÃO:

A figura em questão é dada pelo esquema abaixo:



A rotação de AEF em torno do eixo AB gera um sólido cujo volume é dado pela retirada de uma calota esférica (altura r/2 e raio da seção $r\sqrt{3}/2$), de um tronco de cone (altura r/2 e raios de base $r\sqrt{3}/2$ e $r\sqrt{3}$).

$$V_{TRONCO} = \frac{h}{3}\left(S_B + S_b + \sqrt{S_B . S_b}\right) \Rightarrow$$

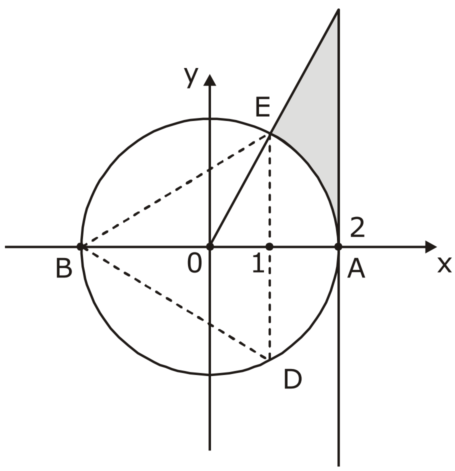
$$V_{TRONCO} = \frac{r}{6}\left(3\pi r^2 + \frac{3\pi r^2}{4} + \sqrt{3\pi r^2 . \frac{3\pi r^2}{4}}\right) = \frac{21\pi r^3}{24}$$

$$V_{CALOTA} = \frac{\pi h}{6}\left(3R^2 + h^2\right) = \frac{\pi r}{12}\left[3\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2\right] = \frac{5\pi r^3}{24}$$

$$V_S = V_{TRONCO} - V_{CALOTA} = \frac{21\pi r^3}{24} - \frac{5\pi r^3}{24} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

2ª SOLUÇÃO:

Vamos utilizar uma circunferência de raio 2 e, depois, aplicar a razão de semelhança para o caso geral.



Para r = 2, utilizando o sistema de eixos indicado, a reta OE tem equação $y=\sqrt{3}x$, e a circunferência, $x^2+y^2=4$. Assim, o volume procurado é igual a

$$V=\int_1^2 \pi y_1^2(x)dx-\int_1^2 \pi y_2^2(x)dx\text{ , com }\begin{cases} y_1(x)=\sqrt{3}x \\ y_2(x)=\sqrt{4-x^2} \end{cases}.$$

Logo, $V=\pi\int_1^2\left(3x^2-\left(4-x^2\right)\right)=4\pi\int_1^2\left(x^2-1\right)dx=4\pi\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2=4\pi\cdot\left(\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{16\pi}{3}.$

Para calcular o volume no caso geral, basta multiplicar pelo cubo da razão de semelhança:

$$V_S=\frac{16\pi}{3}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^3=\frac{2\pi}{3}r^3.$$