FUNÇÕES

2020 - 2022

FUNÇÕES

Aprenda sobre funções: domínio, imagem, gráfico, função do 1º e 2º grau, função composta, inequações, paridade e classificação de funções e função inversa!

Esta subárea é composta pelos módulos:

1. Introdução ao Estudo de Funções
2. Funções e Gráficos
3. Domínio e Igualdade de Funções
4. Funções Lineares
5. Função Afim
6. Funções do Segundo Grau
7. Vértice da Parábola
8. Diferentes Representações de uma Função Quadrática
9. Composição de Funções
10. Estudo dos Sinais da Função
11. Inequações de Primeiro e Segundo Grau
12. Inequações Produto e Quociente
13. Paridade e Classificação de Funções
14. Função Inversa

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE FUNÇÕES

Quando alguém pergunta a você o que é função, o que vem à sua mente? Provavelmente você vai pensar em "tem variáveis em que uma depende da outra". Se você pensou isso, você está indo pelo caminho certo.

Uma função na matemática nada mais é do que uma **relação de dependência** entre duas variáveis. Por exemplo, a distância percorrida por um automóvel depende do tempo, a pressão atmosférica depende da altura, a nota da prova depende da quantidade de estudo.

Perceba que a distância percorrida está relacionada com o tempo, a pressão atmosférica está relacionada com a altura, a nota da prova está relacionada com a quantidade de estudo, e por aí vai.

Começaremos o estudo de funções pelos assuntos de produto cartesiano e plano cartesiano.

PRODUTO CARTESIANO E PLANO CARTESIANO

Dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano entre A e B é o conjunto formado por todos os possíveis pares de números oriundos dos conjuntos A e B, nessa ordem. Os elementos desse conjunto são chamados de **pares ordenados**. Matematicamente escrevemos:

Dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano entre A e B, denotado por A x B, é o conjunto $A \times B = \{(x, y) / x \in A \; e \; y \in B\}$.

Ou seja, o produto cartesiano entre A e B é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), em que o 1º elemento do par vem do conjunto A e o 2º elemento do par vem do conjunto B, nessa ordem.

Exemplo: Considere os conjuntos A = {1, 3, 5} e B = {7, 9}. Os pares ordenados entre A e B, nessa ordem, são: $(1,7); (1,9); (3,7); (3,9); (5,7); (5,9)$

E assim, $A \times B = \{(1,7); (1,9); (3,7); (3,9); (5,7); (5,9)\}$.

Se estivéssemos interessados em B x A teríamos:

$$B \times A = \{(7,1); (7,3); (7,5); (9,1); (9,3); (9,5)\}$$

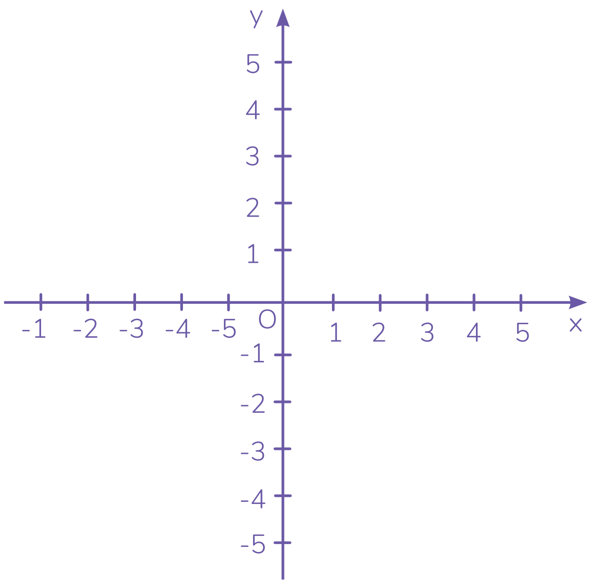
Note do exemplo acima que $A \times B \neq B \times A$. Perceba também que utilizamos **todos** os elementos do conjunto A e **todos** os elementos do conjunto B e construímos dessa forma **todos os pares ordenados possíveis.**

Observações:

- Quando os conjuntos A e B forem iguais, temos: A x A, que também é denotado por A^2.
- O produto cartesiano entre qualquer conjunto e o conjunto vazio é sempre o conjunto vazio, não importa quem seja o conjunto A.

Podemos representar os pares ordenados no **plano cartesiano**.

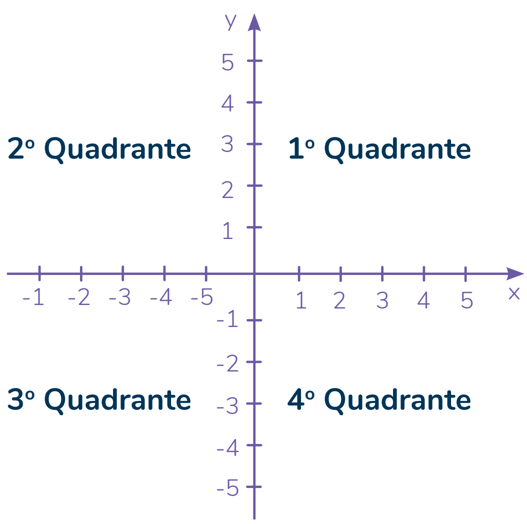
O plano cartesiano é um sistema de coordenadas utilizado para localização de pontos. Ele consiste em dois eixos perpendiculares, que se cruzam em um único ponto e que determinam um plano. O **eixo horizontal (Ox) é o eixo x,** também chamado de **eixo das abscissas** e o **eixo vertical (Oy) é o eixo y,** também chamado de **eixo das ordenadas**. O sentido de crescimento dos valores no eixo x é da esquerda para a direita e o crescimento dos valores no eixo y é de baixo para cima, conforme imagem abaixo:



Observações:

- No par ordenado (x, y), x é a primeira coordenada e y é a segunda coordenada.
- Os pares ordenados são vistos como as coordenadas de um ponto no plano cartesiano.
- No eixo x encontram-se os valores da primeira coordenada do ponto e no eixo y encontram-se os valores da segunda coordenada do ponto.
- O ponto de intersecção dos dois eixos é a **origem (o)**, a quem atribuímos o par ordenado (0, 0).
- Os pontos que estão localizados no eixo x são da forma (x, 0), para algum valor de x.
- Os pontos que estão localizados no eixo y são da forma (0, y), para algum valor de y.
- Não confunda ordenada (nome do eixo y) com coordenada (valor da entrada do par ordenado)!

A intersecção dos eixos divide o plano cartesiano em 4 quadrantes, como mostra a imagem ao lado:



Em relação aos quadrantes e os valores das coordenadas x e y de um ponto, temos:

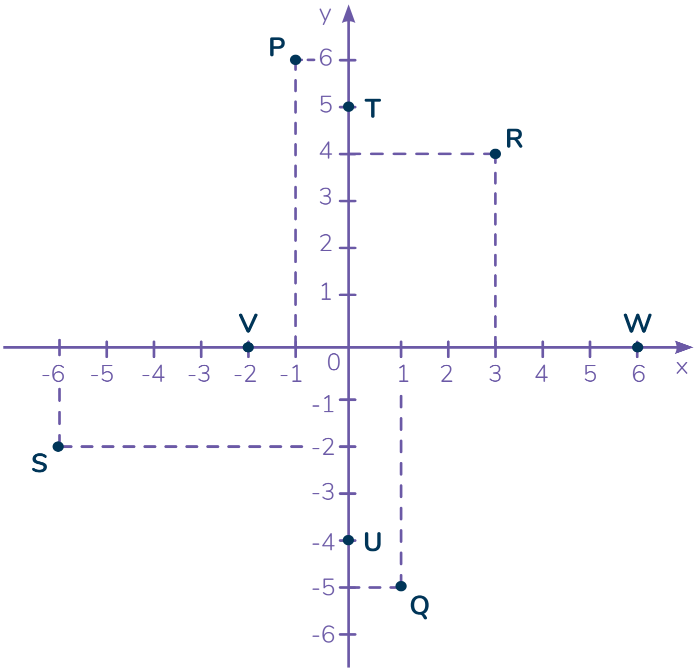
No 1° quadrante: x > 0 e y > 0

No 2° quadrante: x < 0 e y > 0

No 3° quadrante: x < 0 e y < 0

No 4° quadrante: x > 0 e y < 0

Dados então os pontos $P = (-1,6), Q = (1,-5), R = (3,4), S = (-6,-2), T = (0,5), U = (0,-4), V = (-2,0)$ e $W = (6,0)$ podemos representá-los no plano cartesiano da seguinte forma:

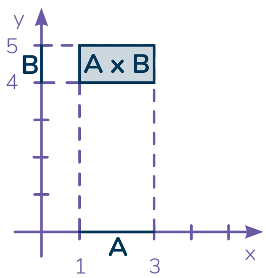


Da imagem ao lado temos que:

- $R \in 1^{\underline{o}}Q$
- $P \in 2^{\underline{o}}Q$
- $S \in 3^{\underline{o}}Q$
- $Q \in 4^{\underline{o}}Q$
- Os pontos W,T,U e V não pertencem a nenhum quadrante pois estão localizados sobre os eixos.

Até agora trabalhamos com os conjuntos A e B finitos, mas nada nos impede de trabalhar com conjuntos infinitos. Podemos pensar então, por exemplo, no produto cartesiano entre intervalos.

Sejam os intervalos A = [1, 3] e B = [4, 5] , por exemplo. Nesse caso não conseguimos listar todos os pares ordenados possíveis, mas sua representação no plano cartesiano se dá da seguinte forma:



Igualdade de Pares Ordenados

Se retomarmos os produtos cartesianos $A \times B = \{(1,7); (1,9); (3,7); (3,9); (5,7); (5,9)\}$ e $B \times A = \{(7,1); (7,3); (7,5); (9,1); (9,3); (9,5)\}$, percebemos que o par (1, 7) é diferente do par (7, 1); (1, 9) é diferente do par (9, 1) e por aí vai. Faz sentido então nos perguntarmos quando dois pares ordenados são iguais.

Dizemos que dois pares ordenados (a, b) e (x, y) são iguais se, e somente se, a = x e b = y.

Observações:

- Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$.
- Podemos fazer o produto cartesiano entre mais conjuntos, sendo eles finitos ou infinitos.
- O número de elementos de A x B é dado por: $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

Agora que já aprendemos sobre produto cartesiano, vamos ao estudo das relações.

RELAÇÕES

Definição

Dados dois conjuntos A e B, uma relação de A em B, denotada por R, é um subconjunto de A x B.

Estudamos o produto cartesiano entre dois conjuntos A e B, que é o conjunto de todos os pares ordenados possíveis entre os elementos de A e B, nessa ordem. Uma relação entre A e B é o conjunto formado **apenas** pelos pares ordenados que **satisfazem** a uma forma dada de associar os elementos de A e B.

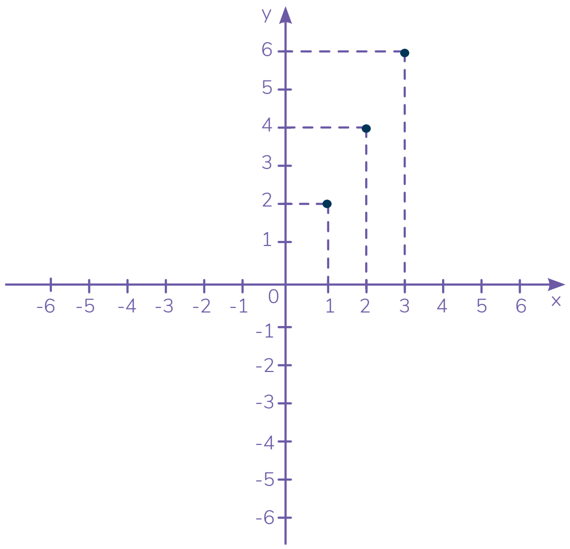
Exemplo: Sejam os conjuntos A ={1, 2, 3} e B = {2, 4, 5, 6}. R é o conjunto dos pares ordenados (a, b) tais que b = 2a.

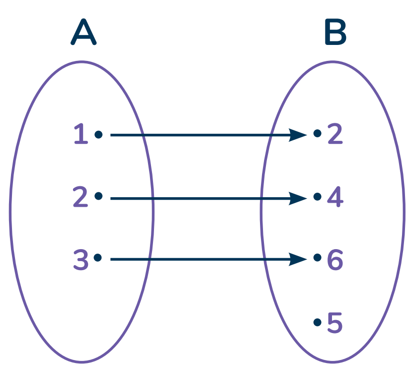
O produto cartesiano entre A e B é dado por:

$$A \times B = \{(1,2);(1,4);(1,5);(1,6);(2,2);(2,4);(2,5);(2,6);(3,2);(3,4);(3,5);(3,6)\}$$

Agora, os pares ordenados que satisfazem a condição de b = 2a são: (1,2); (2,4); (3,6). Assim, a nossa relação R é dada por R = {(1,2);(2,4);(3,6)}.

Podemos representar essa relação pelo plano cartesiano, mas também podemos representar por diagramas, conforme imagem abaixo:





Observação:

- Quando A = B, dizemos que R é uma relação em A.

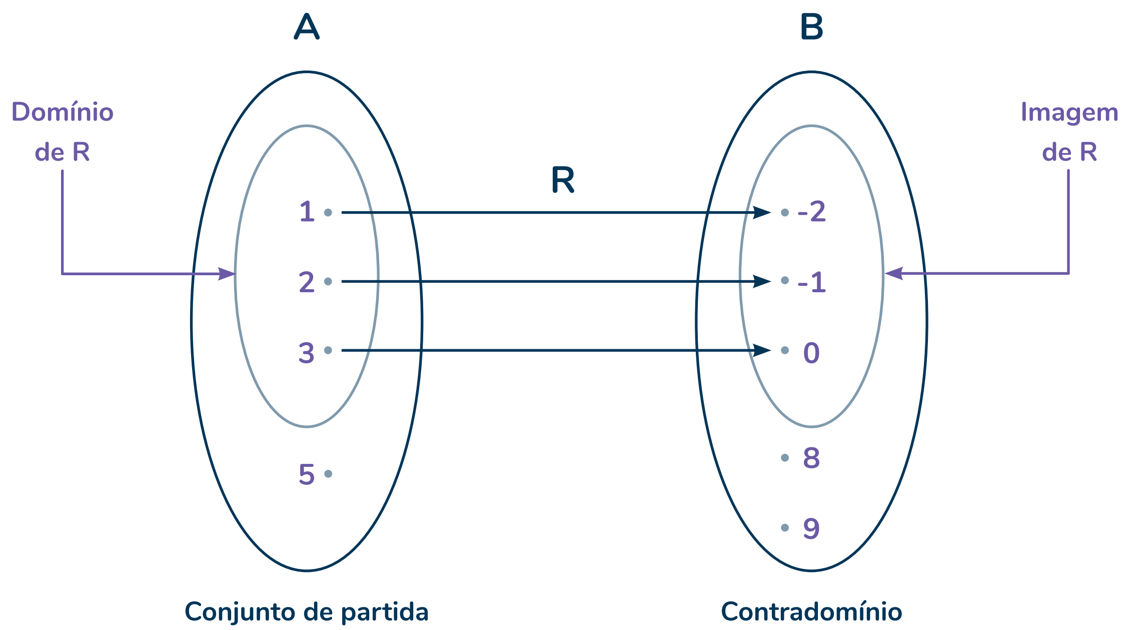
Domínio, Contradomínio e Imagem de uma Relação

O domínio de uma relação é o conjunto de partida e o denotamos por Dm(R). Já, o contradomínio é o conjunto de chegada e o denotamos por CD(R). Por fim, a imagem da relação é um subconjunto do contradomínio. A imagem é formada apenas pelos elementos do contradomínio que se relacionam com os elementos do domínio e a denotamos por Im(R).

Na relação $R = \{(1,2);(2,4);(3,6)\}$ temos: $Dm(R) = A, CD(R) = B \text{ e } Im(R) = \{2,4,6\}$.

Observação:

- Em uma relação, o conjunto A pode conter elementos que não se relacionam com nenhum elemento de B. Por exemplo:



FUNÇÕES

Definição

Falamos tudo isso acima para chegarmos no ponto central: as funções! Vamos à definição:

Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma função f de A em B é uma relação que a cada elemento de A associa um único elemento de B.

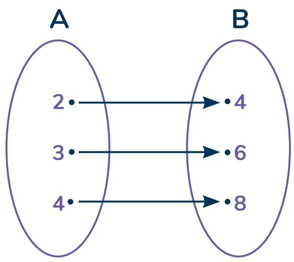
Notação: $f : A \longrightarrow B$ e lemos "f de A em B"

$x \mapsto y$ e lemos "x é levado em y".

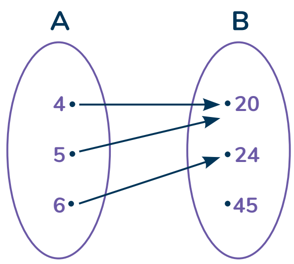
Perceba então que função nada mais é do que um **caso especial** de uma relação, que tem que obedecer a seguinte regra: **todo** elemento do conjunto A é levado a **apenas um** elemento do conjunto B.

Observação: Essa regra comumente é vista como duas regras separadas, que são: um elemento de A não pode se ligar a mais do que um elemento de B e não pode ter um elemento de A sem ter ligação com algum elemento em B.

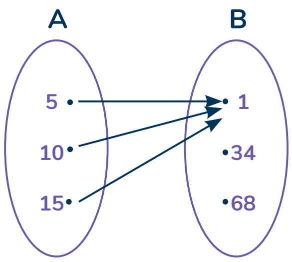
Exemplos:



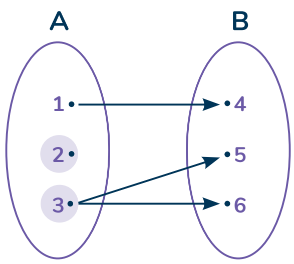
É função porque todo elemento de A está sendo levado a apenas um elemento em B.



É função porque todo elemento de A está sendo levado a apenas um elemento em B.



É função porque todo elemento de A está sendo levado a apenas um elemento em B.



Não é função porque existe elemento em A que não está relacionado com algum elemento de B e tem elemento de A que se relaciona com 2 elementos de B.

Perceba pelos exemplos que para não ser função, basta que um elemento do conjunto de partida não se relacione com ninguém no conjunto de chegada ou que um elemento do conjunto de partida se relacione a mais do que um elemento do conjunto de chegada, ou ainda, que ocorra as duas coisas.

Observações:

- Na notação acima, um elemento x qualquer de A é levado em um elemento y qualquer de B.
- x é chamado de variável independente e y é chamado de variável dependente.
- Analisamos o comportamento da variável y a partir do comportamento da variável x.
- Utilizamos letras minúsculas do nosso alfabeto para denotar funções e variáveis.

- **Não se prenda às letras f, x e y!** Essas são as letras mais comuns no estudo de funções, mas podem ser substituídas por quaisquer outras sem mudar o significado.

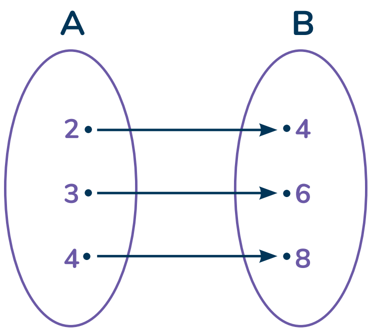
Domínio, Contradomínio e Imagem de uma Função

Da mesma forma que temos domínio, contradomínio e imagem de uma relação, temos também esses conceitos em função. O domínio de uma função é o conjunto de partida e o denotamos por Dm(f). Já, o contradomínio é o conjunto de chegada e o denotamos por CD(f).

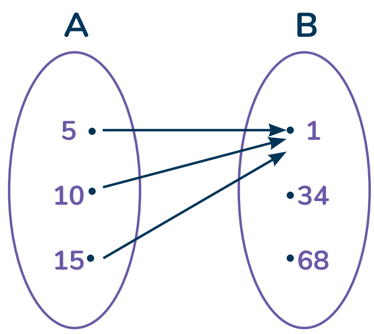
Por fim, a imagem da função é um subconjunto do contradomínio. A imagem é formada apenas pelos elementos do contradomínio que se relacionam com os elementos do domínio e a denotamos por Im(f).

Quando y estiver associado a x por meio de uma função, dizemos que y é **imagem de x pela função f** e representamos por $y = f(x)$.

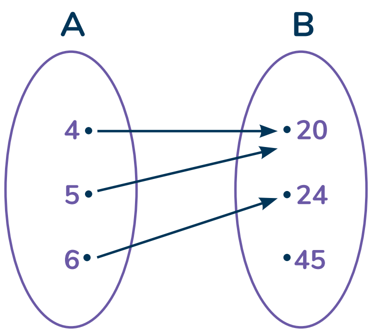
Por exemplo, se considerarmos os diagramas abaixo temos:



$Dm(f) = A, CD(f) = B \text{ e } Im(f) = B$



$Dm(f) = A, CD(f) = B, Im(f) = \{1\}$



$Dm(f) = A, CD(f) = B \text{ e } Im(f) = \{20{,}24\}$

Lei de Formação

Já sabemos que em uma relação, os pares ordenados que pertencem à essa relação são os pares que obedecem à uma regra de associação. No caso das funções essa regra de associação recebe o nome de **lei de formação.**

A lei de formação de uma função estabelece então, de qual forma os elementos do domínio e do contradomínio se relacionam.

Exemplo: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$

$f(x) = 2x - 1$ é a lei de formação, que diz que cada elemento x do domínio será relacionado a um elemento y do contradomínio através de $2x$ -1. Ou seja, o elemento x do domínio tem como imagem o número obtido por $2x$ -1. Por exemplo:

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 2 \cdot 3 - 1 \Rightarrow f(3) = 6 - 1 \Rightarrow f(3) = 5$$

$$x = -5 \Rightarrow f(5) = 2 \cdot (-5) - 1 \Rightarrow \mathrm{f}(5) = -10 - 1 \Rightarrow f(5) = -11$$

Lembrando que $f(x) = y$, temos então que para o elemento $x = 3$, $y = 5$ e para o elemento $x = -5$, $y = 11$.

ANOTAÇÕES