Estratégia
Militares

# Composição de movimentos e lançamento oblíquo

Prof. Toni Burgatto

*Aula 02*

# SUMÁRIO

# Introdução

Nesta aula iniciaremos o estudo de composição de movimentos e lançamento oblíquo, temas novos no edital do Colégio Naval.

Não temos questões do Colégio Naval, mas podemos nos preparar com questões de alguns concursos de níveis semelhantes e estar pronto para questões qualitativas ou questões quantitativas.

Os assuntos desta aula não são fáceis. Não fique triste se ficar travado em alguns tópicos. Fique à vontade para tirar suas dúvidas.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

# 1. Composição de movimentos

Muitas vezes o movimento de um móvel pode ser visto como a superposição de dois ou mais movimentos.

Dado dois vetores no espaço, podemos escrever cada vetor em relação a origem e podemos escrever um vetor em relação ao outro:

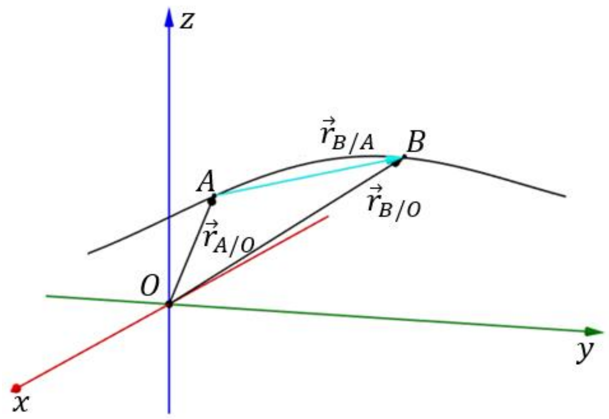



*Figura 1: Vetor deslocamento no R³.*

Quando escrevemos $\vec{r}_{A/O}$ estamos escrevendo o vetor de $A$ em relação a origem $O$, $\vec{r}_{B/O}$ o vetor de $B$ em relação a origem $O$ e $\vec{r}_{B/A}$ o vetor de $B$ em relação a $A$. Além disso, pela soma vetorial, temos que:

$$\boxed{\vec{r}_{B/O} = \vec{r}_{B/A} + \vec{r}_{A/O}}$$

$$\vec{r}_{B/O} = \vec{r}_{B/A} + \vec{r}_{A/O}$$

Dessa forma, podemos dizer que um vetor pode ser escrito como a soma de dois vetores, sendo que se pode escolher um ponto qualquer para escrever a soma vetorial (o ponto A poderia ser um ponto qualquer que valeria $\vec{r}_{B/O} = \vec{r}_{B/A} + \vec{r}_{A/O}$).

Está é a regra "das bolinhas": Digamos que temos três vetores $\vec{r}_{B/E}$, $\vec{r}_{B/O}$ e $\vec{r}_{E/O}$. Coloca-se o vetor desejado, vamos supor $\vec{r}_{E/O}$. Então devemos escolher dois vetores de forma que o termo escreveremos o vetor E em relação ao ponto B e o ponto B em relação ao ponto O, isto é:

$$\vec{r}_{E/O} = \vec{r}_{E/B} + \vec{r}_{B/O}$$

Como escrever $\vec{r}_{E/B}$ e $\vec{r}_{B/E}$ só altera o sentido dos vetores, então temos que:

$$\vec{r}_{E/B} = -\vec{r}_{B/E}$$

Então:

$$\vec{r}_{E/O} = -\vec{r}_{B/E} + \vec{r}_{B/O}$$

De acordo com os vetores dados.

Esta regra "das bolinhas" é muito utilizada nas questões de composição de movimento e soma vetorial.

A partir da relação das posições, derivando em relação ao tempo, chegamos na relação entre as velocidades, e derivando novamente em relação ao tempo, encontramos a relação das acelerações.

Vamos fazer um exercício de fixação para ilustrar essa relação entre os vetores.


**01)**
Considere um rio retilíneo na qual as águas movimentam-se com velocidade de 2,0 $m/s$ em relação as margens. Um barco cuja velocidade em relação as águas é 4,0 m/s e parte de uma ponte a outra que distam 60 metros. Inicialmente, o barco está subindo o rio de uma ponte para a outra e depois volta para a primeira.
a) determine o intervalo de tempo para o barco subir o rio, da primeira a segunda ponte.
b) determine o intervalo de tempo para o barco descer o rio, da segunda a primeira ponte.
c) se o rio estivesse parado em relação as margens, qual seria o tempo total de ida e volta.

**Comentários:**

Inicialmente, escrevemos todos os vetores velocidades:

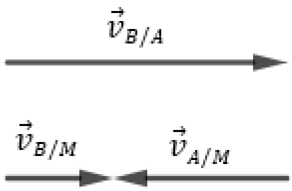
$$\begin{cases} \vec{v}_{B/M}: velocidade\ do\ barco\ em\ relação\ às\ margens \\ \vec{v}_{B/A}: velocidade\ do\ barco\ em\ relação\ à\ água \\ \vec{v}_{A/M}: velocidade\ da\ água\ em\ relacao\ às\ margens \end{cases}$$

Pela regra das bolinhas, temos que:

$$\boxed{\vec{v}_{B/M} = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_{A/M}}$$

a)

Quando o barco está subindo o rio, ou seja, indo contra a correnteza (o barco vai a montante), temos a seguinte disposição dos vetores velocidades:




Assim, podemos relacionar os módulos da seguinte forma:

$$\boxed{|\vec{v}_{B/M}| = |\vec{v}_{B/A}| - |\vec{v}_{A/M}|}$$

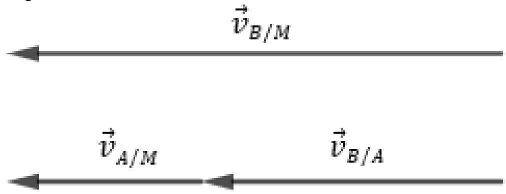
$$|\vec{v}_{B/M}| = 4{,}0 - 2{,}0 = 2{,}0\ m/s$$

Para um referencial nas margens do rio, a distância percorrida pelo barco para ir de uma ponte a outra é de 60 metros, portanto:

$$\Delta t_1 = \frac{60}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta t_1 = 30\ s}$$

b)

Quando o barco está descendo o rio, ou seja, indo a favor da correnteza (o barco vai a jusante), temos a seguinte disposição dos vetores velocidades:




Nesse caso, temos a seguinte relação dos módulos dos vetores:

$$|\vec{v}_{B/M}| = |\vec{v}_{B/A}| + |\vec{v}_{A/M}| = 4{,}0 + 2{,}0 = 6{,}0\ m/s$$

Logo, o tempo para descer o rio é de:

$$\Delta t_2 = \frac{60}{6} \Rightarrow \boxed{\Delta t_2 = 10\ s}$$

c)

O tempo total caso as águas estivessem paradas em relação às margens, isto é, $\vec{v}_{A/M} = \vec{0}$, pode ser dado por:

$$\vec{v}_{B/M} = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_{A/M} \Rightarrow \vec{v}_{B/M} = \vec{v}_{B/A}$$

Portanto:

$$|\vec{v}_{B/M}| = |\vec{v}_{B/A}| = 4{,}0\ m/s$$

Logo, o tempo total seria de:

$$\Delta t = 2.\frac{\Delta s}{\left|\vec{v}_{\frac{B}{M}}\right|} = \frac{2.60}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = 30\ s}$$

## 1.1. Velocidade relativa

Quando dois móveis se desloca em uma mesma direção, podemos ter 4 casos possíveis:

### 1.1.1. Velocidade relativa de aproximação – mesmo sentido

Quando dois móveis estão se movendo em uma mesma direção e em um mesmo sentido, só haverá aproximação se aquele que vem atrás possuir velocidade maior.

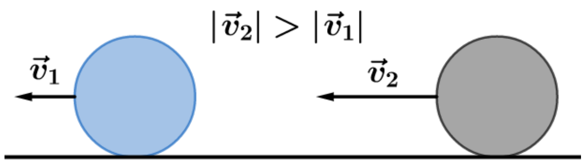



*Figura 2: Aproximação de dois móveis que se movem em um mesmo sentido.*

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2/1} + \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_{2/1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Em módulo, a velocidade de 2 em relação a 1, é dada por:

$$v_R = v_{2/1} = v_2 - v_1$$

Observe que esse resultado faz todo sentido. Se você está viajando em uma rodovia, no banco de trás e observa pelo vidro traseiro um carro se aproximando com uma velocidade maior, tudo se passa como se você estivesse parado e ele se aproximando com velocidade dada pela diferença das velocidades.

Por exemplo, seu carro viaja a 100 km/h e um carro surge na sua traseira a 120 km/h. Se você fixar seus olhos apenas no carro se aproximando, tudo se passa como se você estivesse vendo ele chegar com velocidade de 20 km/h.

Se desejássemos $\vec{v}_{1/2}$, faríamos:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1/2} + \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_{1/2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Note que o módulo da velocidade de 2 em relação a 1 é igual ao módulo da velocidade de 1 em relação a 2, mas são vetores que sentidos contrários.

### 1.1.2. Velocidade relativa de aproximação – sentidos opostos

Quando dois móveis estão se movendo em uma mesma direção e em sentido sentidos opostos, temos a seguinte situação:

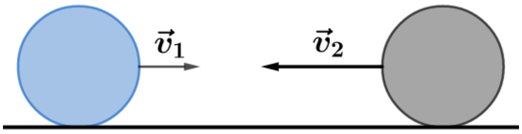



*Figura 3: Corpos se aproximando e se movendo em sentidos opostos.*

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2/1} + \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_{2/1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Podemos enxergar essa diferença entre os vetores como sendo:

$$\vec{v}_{2/1} = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$$

Mas, de acordo com a figura 3, $(-\vec{v}_1)$ tem o mesmo sentido de $\vec{v}_2$. Portanto, em módulo, temos que:

$$v_R = v_2 + v_1$$

Se desejássemos $\vec{v}_{1/2}$, faríamos:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1/2} + \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_{1/2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Mas, em módulo, temos que $v_{1/2} = v_R = v_1 + v_2$. Note que esse resultado faz todo sentido. Se você está se aproximando de um carro que viaja no sentido contrário em uma rodovia, você percebe que ele se aproxima com uma rapidez bem maior.

### 1.1.3. Velocidade relativa de afastamento – no mesmo sentido

Quando dois móveis estão se movendo em uma mesma direção e em um mesmo sentido, só haverá afastamento se aquele que viaja na frente tem velocidade maior.

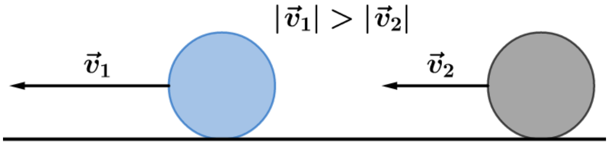



*Figura 4: Corpos se afastando e se movendo em um mesmo sentido.*

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2/1} + \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_{2/1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Em módulo, temos:

$$v_R = v_1 - v_2$$

Tudo se passa como se a pessoa que estivesse no carro 1 visse o carro 2 indo se afastando para trás com velocidade de módulo dada por $v_1 - v_2$.

Se desejássemos $\vec{v}_{1/2}$, faríamos:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1/2} + \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_{1/2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Se você estivesse no carro 2, você veria o carro 1 se afastando com velocidade de módulo dada por $v_1 - v_2$. Lembrando que $|\vec{v}_1| > |\vec{v}_2|$.

### 1.1.4. Velocidade relativa de afastamento – sentidos opostos

Quando dois móveis estão se movendo em uma mesma direção e em sentidos opostos, haverá afastamento e teremos.

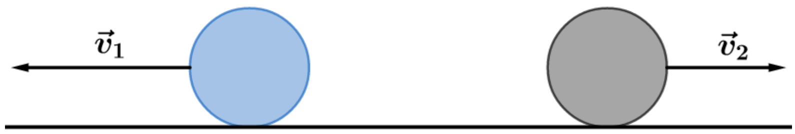



*Figura 5: Corpos se afastando e se movendo em sentidos opostos.*

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2/1} + \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_{2/1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Se você está no carro 1, você tem a sensação que o carro 2 está se afastando com uma velocidade maior que aquela do próprio carro, já que $v_R = v_1 + v_2$.

Se desejássemos $\vec{v}_{1/2}$, faríamos:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1/2} + \vec{v}_2$$

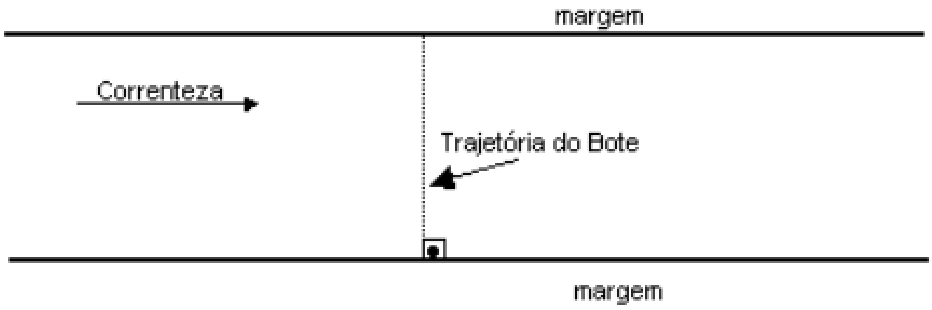
$$\vec{v}_{1/2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Seria a mesma sensação, mas como você está no carro 2, agora você tem a percepção de que 1 se afasta com $v_R = v_1 + v_2$, em módulo.

# 2. Lista de exercícios de composição de movimentos

**1. (EsPCEx – 2010)**

Um bote de assalto deve atravessar um rio de largura igual a $800\,m$, numa trajetória perpendicular à sua margem, num intervalo de tempo de 1 minuto e 40 segundos, com velocidade constante. Considerando o bote como uma partícula, desprezando a resistência do ar e sendo constante e igual a $6\,m/s$ a velocidade da correnteza do rio em relação à sua margem, o módulo da velocidade do bote em relação à água do rio deverá ser de:




Desenho Ilustrativo

a) 4 m/s

b) 6 m/s

c) 8 m/s

d) 10 m/s

e) 14 m/s

**2. (EsPCEx – 2003)**

Uma lancha atravessa um rio, deslocando-se segundo uma trajetória perpendicular à margem. Sua velocidade em relação à água é constante e tem módulo igual a $2\sqrt{13}\,m/s$. A velocidade da correnteza do rio em relação a um observador parado na sua margem é constante e vale $4\,m/s$. O módulo da velocidade da lancha em relação a este observador é

a) 2 m/s.

b) 4 m/s.

c) 6 m/s.

d) 8 m/s.

e) 10 m/s.

**3. (EsPCEx – 2001)**

Num dia sem vento, sob a chuva que cai verticalmente, com velocidade constante em relação ao solo, uma pessoa caminha horizontalmente em movimento retilíneo e uniforme com velocidade de 1,0 m/s, inclinando o guarda-chuva a 28,5° (em relação à vertical) para resguardar-se o melhor possível. A intensidade da velocidade da chuva a em relação ao solo é:

Dados:

- $cos\ 28{,}5° = 0{,}88$

- $sen\ 28{,}5° = 0{,}48$

- $tg\ 61{,}5° = 1{,}84$

a) 1,8 m/s

b) 0,9 m/s

c) 0,5 m/s

d) 1,5 m/s

e) 1,3 m/s

**4. (AFA – 2007)**

Um avião voa na direção leste a 120 km/h para ir da cidade A à cidade B. Havendo vento para o Sul com velocidade de 50 km/h, para que o tempo de viagem seja o mesmo, a velocidade do avião deverá ser

a) 130 km/h

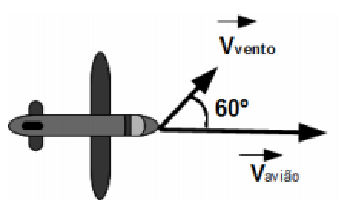
b) 145 km/h

c) 170 km/h

d) 185 km/h

**5. (EEAR – 2016)**

Um avião de brinquedo voa com uma velocidade de módulo igual a 16 km/h numa região com ventos de velocidade de módulo 5 km/h. As direções da velocidade do avião e da velocidade do vento formam entre si um ângulo de 60°. Conforme figura abaixo. Determine o módulo da velocidade resultante, em km/h, do avião nesta região.




a) 19

b) 81

c) 144

d) $\sqrt{201}$

**6. (EEAR – 2014)**

Um avião decola de uma cidade em direção a outra, situada a 1000 km de distância. O piloto estabelece a velocidade normal do avião para 500 km/h e o tempo de voo desconsiderando a ação de qualquer vento. Porém, durante todo o tempo do voo estabelecido, o avião sofre a ação de um vento no sentido contrário, com velocidade de módulo igual a 50 km/h. Decorrido, exatamente, o tempo inicialmente estabelecido pelo piloto, a distância que o avião estará do destino, em km, é de

a) 50

b) 100

c) 200

d) 900

**7. (EEAR – 2007/modificada)**

Um carro desloca-se ao lado de um caminhão, na mesma direção, no mesmo sentido e com mesma velocidade em relação ao solo, por alguns instantes. Neste intervalo de tempo, a velocidade relativa entre o carro e caminhão é:

a) nula.

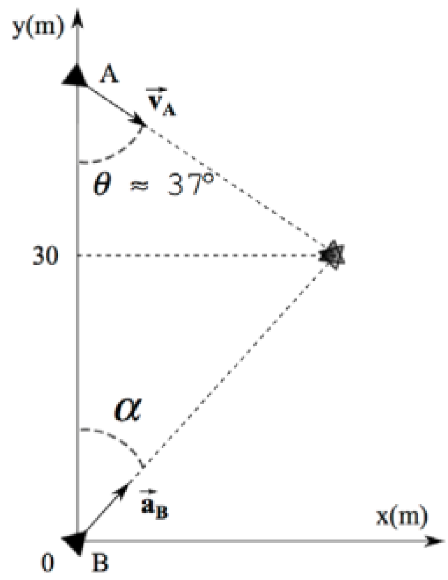
b) negativa.

c) positiva.

d) duas vezes a velocidade do carro.

**8. (EFOMM – 2013)**

Dois navios A e B podem mover-se apenas ao longo de um plano XY. O navio B estava em repouso na origem quando, em $t = 0$, parte com vetor aceleração constante fazendo um ângulo $\alpha$, com o eixo Y. No mesmo instante ($t = 0$), o navio A passa pela posição mostrada na figura com vetor velocidade constante de módulo 5,0 m/s e fazendo um ângulo $\theta$ com o eixo Y. Considerando que no instante $t_1 = 20\,s$, sendo $y_A(t_1) = y_B(t_1) = 30\,m$, ocorre uma colisão entre os navios, o valor de $tg(\alpha)$ é




Dados: $sen(\theta) = 0{,}60$ e $\cos(\theta) = 0{,}80$.

a) $\sqrt{3}/3$

b) $1{,}0$

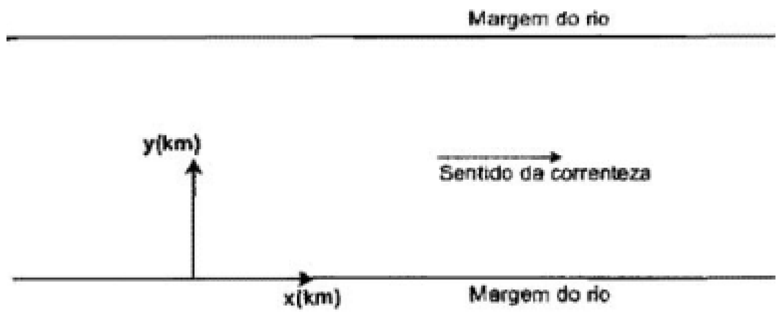
c) $1{,}5$

d) $\sqrt{3}$

e) 2,0

**9. (EFOMM – 2011)**

Um barco atravessa um rio de margens paralelas e largura de 4,0 km. Devido à correnteza, as componentes da velocidade do barco são $V_x = 0{,}50\ km/h$ e $V_y = 2{,}0\ km/h$. Considerando que, em $t = 0$, o barco parte da origem do sistema cartesiano $xy$ (indicado na figura), as coordenadas de posição, em quilômetro, e o instante, em horas, de chegada do barco à outra margem são




a) (1,0 ; 4,0) e 1,0

b) (1,0 ; 4,0) e 2,0

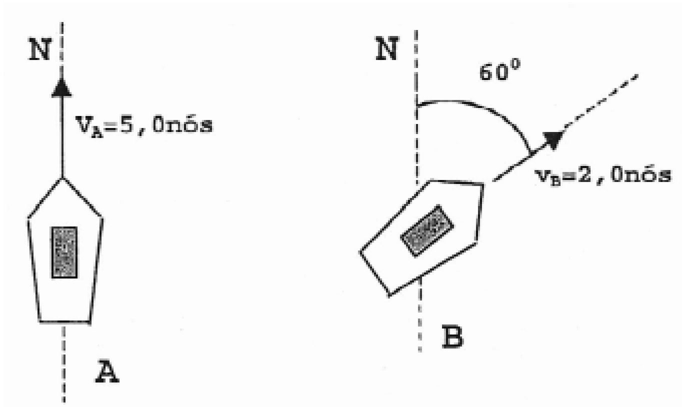
c) (2,0 ; 4,0) e 4,0

d) (16 ; 4,0) e 2,0

e) (16 ; 4,0) e 8,0

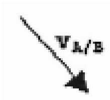
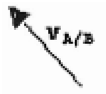
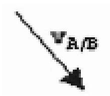
**10. (EFOMM – 2010)**

Observe as figuras a seguir.




Numa região de mar calmo, dois navios, A e B, navegam com velocidades, respectivamente, iguais a $v_A = 5{,}0\ nós$ no rumo norte e $v_B = 2{,}0\ nós$ na direção $60°NEE$, medidas em relação à terra, conforme indica a figura acima. O comandante do navio $B$ precisa medir a velocidade do navio $A$ em relação ao navio $B$. Que item informa o módulo, em nós, e esboça a direção e sentido do vetor velocidade a ser medido?

Dado: $\cos(60°) = 0{,}5$.

| | | |
|---|---|---|
| a) | 2,2 |  |
| b) | 4,4 |  |
| c) | 4,4 |  |
| d) | 6,6 |  |
| e) | 6,6 |  |

**11. (ITA-2009)**

Um barco leva 10 horas para subir e 4 horas para descer um mesmo trecho do rio Amazonas, mantendo constante o módulo de sua velocidade em relação à água. Quanto tempo o barco leva para descer esse trecho com os motores desligados?

a) 14 horas e 30 minutos.
b) 13 horas e 20 minutos.
c) 7 horas e 20 minutos.
d) 10 horas.
e) Não é possível resolver porque não foi dada a distância percorrida pelo barco.

GABARITO

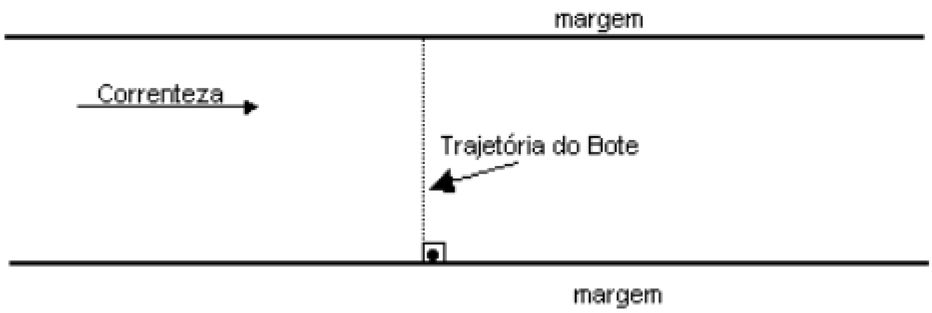
# 3. Gabarito de composição de movimentos sem comentários

1) D
2) C
3) A
4) A
5) A
6) B
7) A
8) E
9) B
10) C
11) B


# 4. Lista de composição de movimentos comentada

**1. (EsPCEx – 2010)**

Um bote de assalto deve atravessar um rio de largura igual a $800\,m$, numa trajetória perpendicular à sua margem, num intervalo de tempo de 1 minuto e 40 segundos, com velocidade constante. Considerando o bote como uma partícula, desprezando a resistência do ar e sendo constante e igual a $6\,m/s$ a velocidade da correnteza do rio em relação à sua margem, o módulo da velocidade do bote em relação à água do rio deverá ser de:




**Desenho Ilustrativo**

a) 4 m/s

b) 6 m/s

c) 8 m/s

d) 10 m/s

e) 14 m/s

**Comentários**:

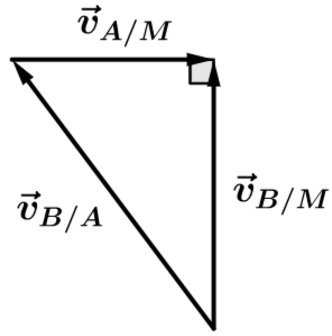
Vamos definir os vetores velocidades e a relação vetorial entre eles:

$$\begin{cases} \vec{v}_{B/M}: velocidade\ do\ barco\ em\ relação\ às\ margens \\ \vec{v}_{B/A}: velocidade\ do\ barco\ em\ relação\ à\ água \\ \vec{v}_{A/M}: velocidade\ da\ água\ em\ relacao\ às\ margens \end{cases}$$

Pela regra das bolinhas, temos que:

$$\vec{v}_{B/M} = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_{A/M}$$

Além disso, representamos geometricamente o problema:




A velocidade do barco em relação às margens é dado por:

$$\left|\vec{v}_{B/M}\right| = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\left|\vec{v}_{B/M}\right| = \frac{800}{100} = 8\ m/s$$

Logo, pela soma vetorial, o módulo da velocidade do barco em relação às águas é dado por:

$$\left|\vec{v}_{B/A}\right|^2 = \left|\vec{v}_{B/M}\right|^2 + \left|\vec{v}_{A/M}\right|^2$$

$$\left|\vec{v}_{B/A}\right|^2 = 8^2 + 6^2$$

$$\boxed{\left|\vec{v}_{B/A}\right| = 10\ m/s}$$

**Gabarito: D**

---

**2. (EsPCEx – 2003)**

Uma lancha atravessa um rio, deslocando-se segundo uma trajetória perpendicular à margem. Sua velocidade em relação à água é constante e tem módulo igual a $2\sqrt{13}\ m/s$. A velocidade da correnteza do rio em relação a um observador parado na sua margem é constante e vale $4\ m/s$. O módulo da velocidade da lancha em relação a este observador é

a) 2 m/s.

b) 4 m/s.

c) 6 m/s.

d) 8 m/s.

e) 10 m/s.

**Comentários**:

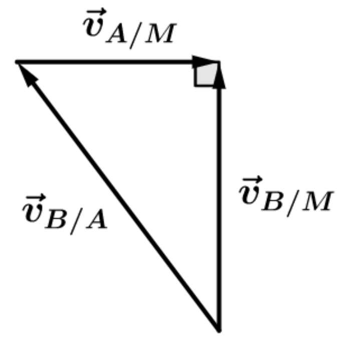
Vamos definir os vetores velocidades e a relação vetorial entre eles:

$$\begin{cases} \vec{v}_{B/M}: velocidade\ do\ barco\ em\ relação\ às\ margens \\ \vec{v}_{B/A}: velocidade\ do\ barco\ em\ relação\ à\ água \\ \vec{v}_{A/M}: velocidade\ da\ água\ em\ relacao\ às\ margens \end{cases}$$

Pela regra das bolinhas, temos que:

$$\vec{v}_{B/M} = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_{A/M}$$

Além disso, representamos geometricamente o problema:




Logo, pela soma vetorial, o módulo da velocidade do barco em relação às águas é dado por:

$$|\vec{v}_{B/A}|^2 = |\vec{v}_{B/M}|^2 + |\vec{v}_{A/M}|^2$$

$$\left(2\sqrt{13}\right)^2 = |\vec{v}_{B/M}|^2 + 4^2$$

$$52 = |\vec{v}_{B/M}|^2 + 16$$

$$\boxed{|\vec{v}_{B/M}| = 6\ m/s}$$

**Gabarito: C**

---

**3. (EsPCEx – 2001)**

Num dia sem vento, sob a chuva que cai verticalmente, com velocidade constante em relação ao solo, uma pessoa caminha horizontalmente em movimento retilíneo e uniforme com velocidade de 1,0 m/s, inclinando o guarda-chuva a 28,5° (em relação à vertical) para resguardar-se o melhor possível. A intensidade da velocidade da chuva a em relação ao solo é:

Dados:

- $cos\ 28{,}5° = 0{,}88$

- $sen\ 28{,}5° = 0{,}48$

- $tg\ 61{,}5° = 1{,}84$

a) 1,8 m/s

b) 0,9 m/s

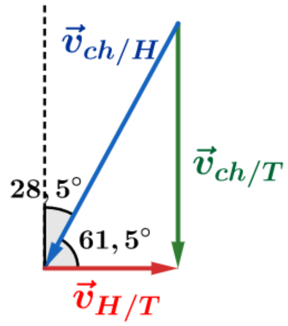
c) 0,5 m/s

d) 1,5 m/s

e) 1,3 m/s

**Comentários**:

Diante do problema em questão, temos a seguinte disposição dos vetores:




Portanto:

$$tg(61{,}5°) = \frac{|\vec{v}_{ch/T}|}{|\vec{v}_{H/T}|}$$

$$1{,}84 = \frac{|\vec{v}_{ch/T}|}{1{,}0}$$

$$\boxed{|\vec{v}_{ch/T}| = 1{,}8\ m/s}$$

**Gabarito: A**

---

**4. (AFA – 2007)**

Um avião voa na direção leste a 120 km/h para ir da cidade A à cidade B. Havendo vento para o Sul com velocidade de 50 km/h, para que o tempo de viagem seja o mesmo, a velocidade do avião deverá ser

a) 130 km/h

b) 145 km/h

c) 170 km/h

d) 185 km/h

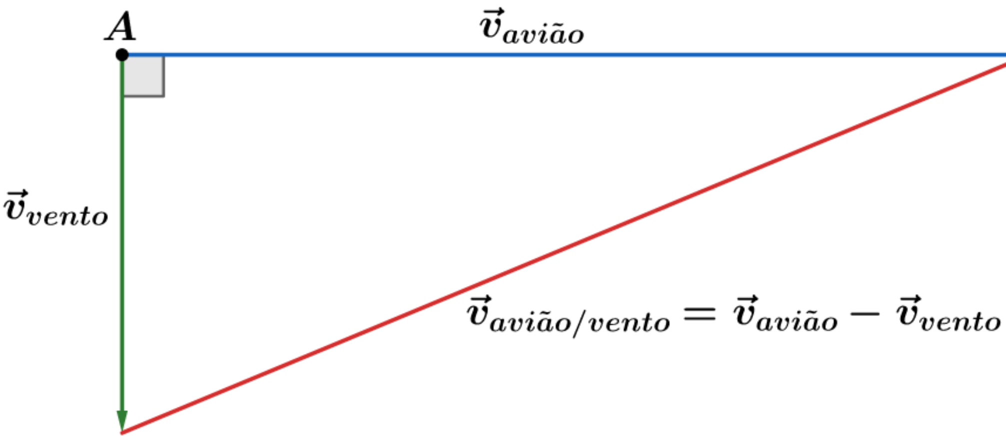
**Comentários**:

Pela composição dos movimentos, temos:

$$\vec{v}_{Avião/T} = \vec{v}_{Avião/Vento} + \vec{v}_{Vento/T}$$

$$\vec{v}_{Avião/Vento} = \vec{v}_{Avião/T} - \vec{v}_{Vento/T}$$

Geometricamente:




Pelo Teorema de Pitágoras, vem:

$$\left|\vec{v}_{avião/vento}\right|^2 = |\vec{v}_{avião}|^2 + |\vec{v}_{vento}|^2$$

$$\left|\vec{v}_{avião/vento}\right| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169}$$

$$\boxed{\left|\vec{v}_{avião/vento}\right| = 13\ m/s}$$

**Gabarito: A**

---

**5. (EEAR – 2016)**

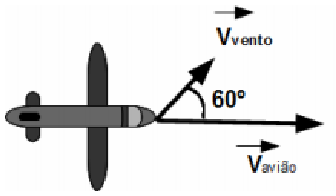
Um avião de brinquedo voa com uma velocidade de módulo igual a 16 km/h numa região com ventos de velocidade de módulo 5 km/h. As direções da velocidade do avião e da velocidade do vento formam entre si um ângulo de 60°. Conforme figura abaixo. Determine o módulo da velocidade resultante, em km/h, do avião nesta região.

a) 19

b) 81

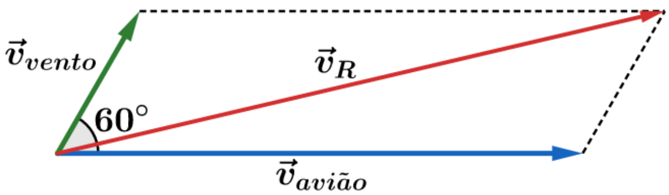
c) 144

d) $\sqrt{201}$




**Comentários**:

Fazendo a soma vetorial das velocidades, temos:




Aplicando a lei dos cossenos da física, temos:

$$|\vec{v}_R|^2 = |\vec{v}_{vento}|^2 + |\vec{v}_{avião}| + 2 \cdot |\vec{v}_{vento}| \cdot |\vec{v}_{avião}| \cdot \cos 60°$$

$$|\vec{v}_R|^2 = 5^2 + 16^2 + 2 \cdot 5 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2}$$

$$|\vec{v}_R|^2 = 361$$

$$\boxed{|\vec{v}_R| = 19\ m/s}$$

**Gabarito: A**

---

**6. (EEAR – 2014)**

Um avião decola de uma cidade em direção a outra, situada a 1000 km de distância. O piloto estabelece a velocidade normal do avião para 500 km/h e o tempo de voo desconsiderando a ação de qualquer vento. Porém, durante todo o tempo do voo estabelecido, o avião sofre a ação de um vento no sentido contrário, com velocidade de módulo igual a 50 km/h. Decorrido, exatamente, o tempo inicialmente estabelecido pelo piloto, a distância que o avião estará do destino, em km, é de

a) 50

b) 100

c) 200

d) 900

**Comentários**:

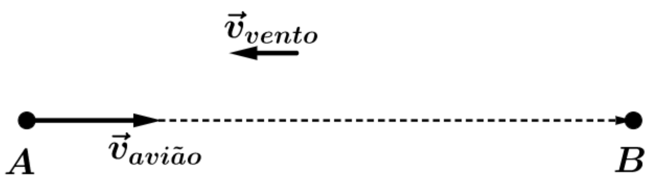
Desconsiderando qualquer ação dos ventos, o tempo de voo estabelecido pelo piloto é de:

$$t_1 = \frac{\Delta s}{v_{avião/Terra}}$$

$$t_1 = \frac{1000}{500} = 2\ h$$

Quando o ocorre a ação dos ventos, temos que:

$$\vec{v}_{avião/Terra} = \vec{v}_{avião/vento} + \vec{v}_{vento/Terra}$$




Como a velocidade do vento é contrária à velocidade, então:

$$|\vec{v}_{avião/Terra}| = |\vec{v}_{avião/vento}| - |\vec{v}_{vento/Terra}|$$

$$|\vec{v}_{avião/Terra}| = 500 - 50 = 450\ km/h$$

Para o tempo estabelecido, temos:

$$\Delta S_2 = |\vec{v}_{avião/Terra}| \cdot t_1$$

$$\Delta S_2 = 450 \cdot 2 = 900\ km$$

Logo, o avião está a $1000 - 900 = 100\ km$ do ponto desejado.

**Gabarito: B**

---

**7. (EEAR – 2007/modificada)**

Um carro desloca-se ao lado de um caminhão, na mesma direção, no mesmo sentido e com mesma velocidade em relação ao solo, por alguns instantes. Neste intervalo de tempo, a velocidade relativa entre o carro e caminhão é:

a) nula.

b) negativa.

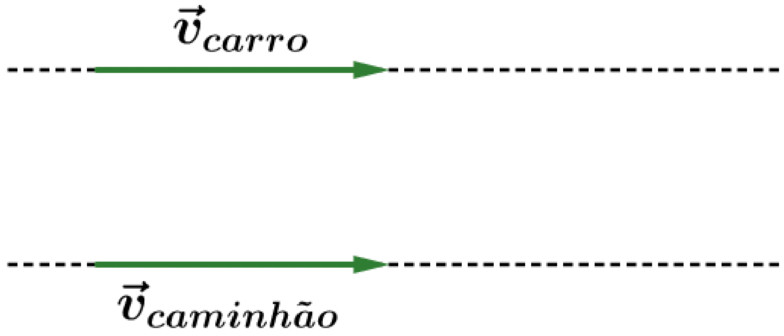
c) positiva.

d) duas vezes a velocidade do carro.

**Comentários**:

Podemos escrever a velocidade do carro em relação ao caminhão como sendo:

$$\vec{v}_{carro/Terra} = \vec{v}_{carro/caminhão} + \vec{v}_{caminhão/Terra}$$




Portanto:

$$\vec{v}_{carro/caminhão} = \vec{v}_{carro/Terra} - \vec{v}_{caminhão/Terra}$$

Como os vetores $\vec{v}_{carro/Terra}$ e $\vec{v}_{caminhão/Terra}$ são iguais, então:

$$\vec{v}_{carro/caminhão} = \vec{0}$$

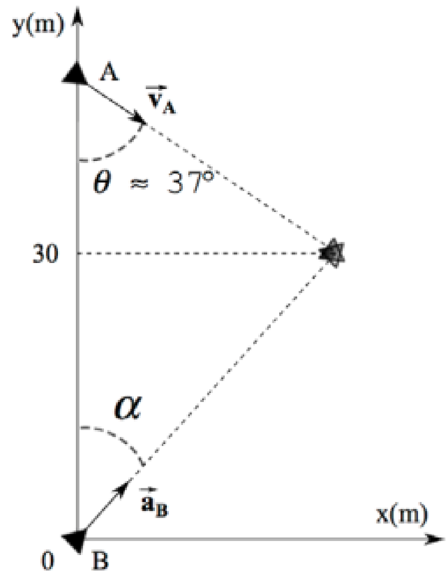
Logo, o módulo da velocidade do carro em relação ao caminhão é nulo.

**Gabarito: A**

---

**8. (EFOMM – 2013)**

Dois navios A e B podem mover-se apenas ao longo de um plano XY. O navio B estava em repouso na origem quando, em $t = 0$, parte com vetor aceleração constante fazendo um ângulo $\alpha$, com o eixo Y. No mesmo instante ($t = 0$), o navio A passa pela posição mostrada na figura com vetor velocidade constante de módulo 5,0 m/s e fazendo um ângulo $\theta$ com o eixo Y. Considerando que no instante $t_1 = 20\,s$, sendo $y_A(t_1) = y_B(t_1) = 30\,m$, ocorre uma colisão entre os navios, o valor de $tg(\alpha)$ é




Dados: $sen(\theta) = 0{,}60$ e $\cos(\theta) = 0{,}80$.

a) $\sqrt{3}/3$

b) $1{,}0$

c) $1{,}5$

d) $\sqrt{3}$

e) $2{,}0$

**Comentários**:

Decompondo a velocidade de A nas direções $x$ e $y$, temos que:

$$\begin{cases} v_x = v_A \cdot sen(\theta) \\ v_y = v_A \cdot \cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = 5{,}0 \cdot 0{,}6 \\ v_y = 5{,}0 \cdot 0{,}8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = 3{,}0\,m/s \\ v_y = 4{,}0\,m/s \end{cases}$$

Durante os 20 segundos, A percorreu em $x$ a seguinte distância:

$$x_A = v_x \cdot 20$$

$$x_A = 3{,}0 \cdot 20 = 60\,m$$

Note que no ponto de colisão, os navios também possuem a mesma abscissa. Portanto, $tg(\alpha)$ pode ser dada por:

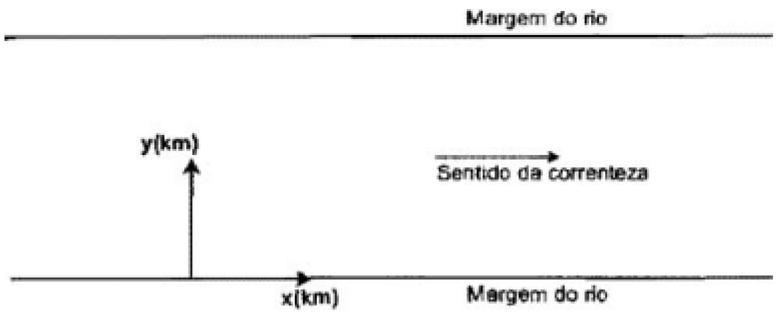
$$tg(\alpha) = \frac{x_A}{y_A} = \frac{60}{30} = 2{,}0$$

**Gabarito: E**

---

**9. (EFOMM – 2011)**

Um barco atravessa um rio de margens paralelas e largura de 4,0 km. Devido à correnteza, as componentes da velocidade do barco são $V_x = 0{,}50\,km/h$ e $V_y = 2{,}0\,km/h$. Considerando que, em $t = 0$, o barco parte da origem do sistema cartesiano $xy$ (indicado na figura), as coordenadas de posição, em quilômetro, e o instante, em horas, de chegada do barco à outra margem são




a) (1,0 ; 4,0) e 1,0

b) (1,0 ; 4,0) e 2,0

c) (2,0 ; 4,0) e 4,0

d) (16 ; 4,0) e 2,0

e) (16 ; 4,0) e 8,0

**Comentários**:

Note que a questão fornece as velocidades do barco em relação as margens, contabilizando o efeito da correnteza. Portanto, podemos determinar o tempo para atravessar o rio olhando apenas para a direção $y$:

$$\Delta t = \frac{\Delta y}{v_y}$$

$$\Delta t = \frac{4,0}{2,0} = 2,0\ h$$

Durante esse tempo, o barco se desloca no eixo $x$ uma distância igual a:

$$\Delta x = v_x \cdot \Delta t$$

$$\Delta x = 0,5 \cdot 2,0 = 1,0\ km$$

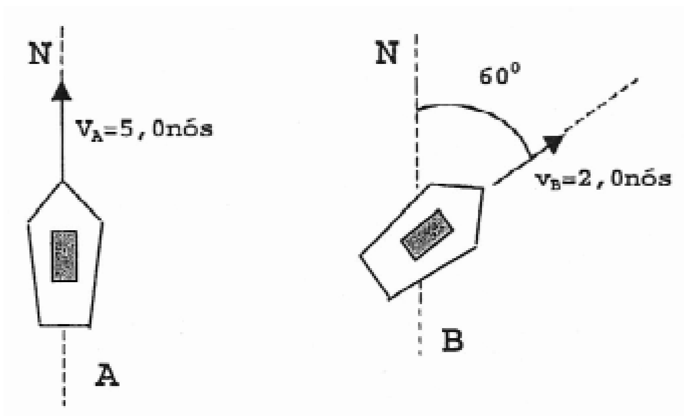
Logo, o ponto onde o barco chega ao atravessar o rio é (1,0 ; 4,0) e ele gasta 2,0 h.

**Gabarito: B**

---

**10. (EFOMM – 2010)**

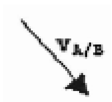
Observe as figuras a seguir.



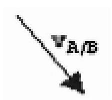

Numa região de mar calmo, dois navios, A e B, navegam com velocidades, respectivamente, iguais a $v_A = 5{,}0\ nós$ no rumo norte e $v_B = 2{,}0\ nós$ na direção $60°NEE$, medidas em relação à terra, conforme indica a figura acima. O comandante do navio $B$ precisa medir a velocidade do navio $A$ em relação ao navio $B$. Que item informa o módulo, em nós, e esboça a direção e sentido do vetor velocidade a ser medido?

Dado: $\cos(60°) = 0{,}5$.

a) 2,2 


b) 4,4 


c) 4,4 


d) 6,6 


e) 6,6 

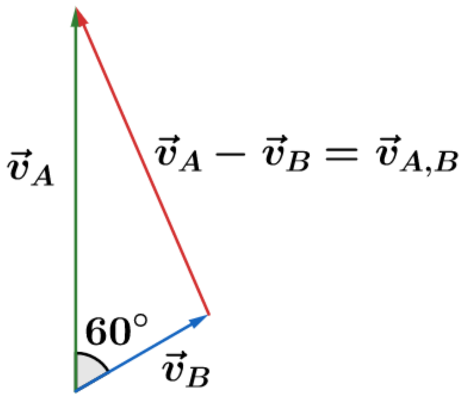

**Comentários**:

Podemos escrever que:

$$\vec{v}_{A,T} = \vec{v}_{A,B} + \vec{v}_{B,T}$$

$$\vec{v}_{A,B} = \vec{v}_{A,T} - \vec{v}_{B,T}$$

De acordo com as disposições espaciais dos vetores, temos:




Pela lei dos cossenos, temos:

$$v_{A,B}^2 = v_A^2 + v_B^2 - 2 \cdot v_A \cdot v_B \cdot \cos(60°)$$

$$v_{A,B}^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$v_{A,B}^2 = 19$$

$$\boxed{v_{A,B} \cong 4{,}4\ nós}$$

**Gabarito: C**

---

**11. (ITA-2009)**

Um barco leva 10 horas para subir e 4 horas para descer um mesmo trecho do rio Amazonas, mantendo constante o módulo de sua velocidade em relação à água. Quanto tempo o barco leva para descer esse trecho com os motores desligados?

a) 14 horas e 30 minutos.
b) 13 horas e 20 minutos.
c) 7 horas e 20 minutos.
d) 10 horas.
e) Não é possível resolver porque não foi dada a distância percorrida pelo barco.

**Comentários:**

Seja $u$ a velocidade que o motor do barco é capaz de gerar e $v$ a velocidade da correnteza. Então, na descida do rio com o motor ligado teremos (o sentido da velocidade da correnteza é sempre rio abaixo):

$$\boxed{\vec{v}_{Barco/terra} = \vec{v}_{Barco/Correnteza} + \vec{v}_{Correnteza/terra}}$$

$$u + v = \frac{\Delta S}{t_1} \quad (eq. 1)$$

Na subida a velocidade da correnteza se opõe a velocidade gerada pelo barco:

$$u - v = \frac{\Delta S}{t_2} \quad (eq. 2)$$

Dividindo (1) por (2), temos:

$$\frac{u+v}{u-v}=\frac{t_2}{t_1}$$

Do enunciado temos que $t_1 = 2\ h$ e $t_2 = 4h$, assim:

$$2u + 2v = 5u - 5v$$

$$u = \frac{7}{3}v$$

O motor do barco desenvolve uma velocidade igual a sete terços a da correnteza. Substituindo esse resultado em (1), obtemos:

$$\frac{10}{3}v = \frac{\Delta S}{t_1}$$

$$\Delta S = \frac{10}{3}v \cdot t_1 \quad (eq.3)$$

Na situação em que o barco desce o rio com seu motor desligado sua velocidade é $v$, assim:

$$v = \frac{\Delta S}{t}$$

Substituindo (3) na equação acima:

$$t = \frac{10}{3} \cdot \frac{v \cdot t_1}{v} = \frac{10}{3} \cdot\ 4 = \frac{40}{3}\ h$$

$$t = 13 + \frac{1}{3}\ h = 13h\ 20min$$

**Gabarito: B**

---


# 5. Lançamento oblíquo

Antes de começar o estudo de um corpo lançado obliquamente, vamos recordar o princípio da independência ou princípios da simultaneidade proposto por Galileu, quando estudava os problemas envolvendo composição de movimentos.

Quando um corpo apresenta um movimento composto, isto é, seu movimento pode ser dividido numa soma de movimentos independentes, cada um dos movimentos componentes se realizam como se os demais não existissem e os movimentos acontecem no mesmo intervalo de tempo.

De acordo com esse princípio, se pegarmos um barco realizando um movimento de travessia, podemos decompor em dois movimentos: perpendicular as margens e paralelo as margens. Cada um dos movimentos não depende do outro, mas a soma deles resultam no movimento real do barco. Além disso, esses movimentos ocorrem de forma simultânea, isto é, o transcorrer do tempo é o mesmo para cada um dos movimentos, assim como para o movimento resultante.

Outra consideração que devemos fazer é quanto ao módulo da aceleração da gravidade. Quando falamos de corpo em queda livre, mencionamos o fato de a gravidade ser considerada constante para a resolução dos nossos problemas. Além disso, como o raio de curvatura é muito grande, consideramos a superfície da Terra onde estamos realizando o movimento como plano.

Normalmente, apenas na vertical temos a aceleração da gravidade atuando no corpo e nessa direção o móvel realiza um MUV. Entretanto, em algumas questões aparecem acelerações na horizontal e na vertical. Dessa forma, sempre que vamos resolver uma questão de lançamento oblíquo iremos analisar as forças atuando no objeto, para conhecer as possíveis acelerações e conhecer a natureza de cada movimento.

Estudar lançamento oblíquo é relembrar os conceitos dos movimentos já estudados e aplicar corretamente de acordo com as condições do problema, trabalhando cada direção de forma independente, como proposto pelo princípio da independência de Galileu.

Nada mais é que a soma de dois movimentos: na horizontal trata-se de um MU, pois a aceleração na horizontal geralmente é nula e na vertical trata-se de um MUV, pois temos a aceleração da gravidade voltada para baixo. Assim, o lançamento oblíquo é o movimento resultante da soma dos movimentos em cada componente.

Inicialmente, trabalharemos o lançamento oblíquo mais comum, onde apenas a gravidade atual na vertical e na horizontal não existem forças atuando. Além disso, vamos desprezar a resistência e os efeitos do ar. Assim, considere um objeto lançado do ponto $O$, com velocidade inicial $\vec{v}_0$ cuja direção forma um ângulo $\theta$ com a horizontal na hora do lançamento, como visto abaixo:

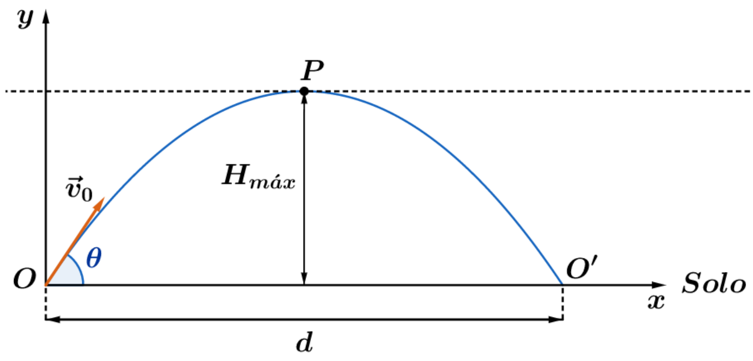



*Figura 6: Lançamento oblíquo de um corpo a partir do solo.*

Nesta situação, temos os seguintes elementos que compõem o lançamento:

1) Ângulo de lançamento ($\theta$): ângulo formado pelo vetor $\vec{v}_0$ com a direção horizontal;
2) Vértice da trajetória ($P$): ponto mais alto da trajetória; e
3) Alcance máximo (d): distância entre o ponto de lançamento ($O$) e o ponto onde o corpo atinge o solo novamente ($O'$).

Neste tipo de lançamento, sabemos que na horizontal não existem forças atuando, logo a aceleração na direção é nula, portanto, o movimento será uniforme, ou seja, ocorre com velocidade constante. Por isso, ao decompor a velocidade inicial na direção $x$ está componente se manterá constante ao longo do lançamento:

$$\boxed{\vec{v}_{0x}\ \text{é}\ constante}$$

Por outro lado, na direção vertical o corpo sofre ação da gravidade. Assim, podemos dividir esse movimento em duas fases: subida e descida. Na subida temos um movimento retardado, com o módulo da velocidade diminuindo a cada instante devido a ação da gravidade. Isto ocorre até o ponto, onde a velocidade na vertical se anula. Nesse instante, chegamos ao ponto mais alto da trajetória.

A partir desse momento o móvel inverte o sentido na vertical e começa a descer em movimento acelerado, repetindo os valores de velocidade na vertical, simetricamente, como visto no estudo do lançamento vertical. A figura abaixo esquematiza os vetores velocidades durante o lançamento.

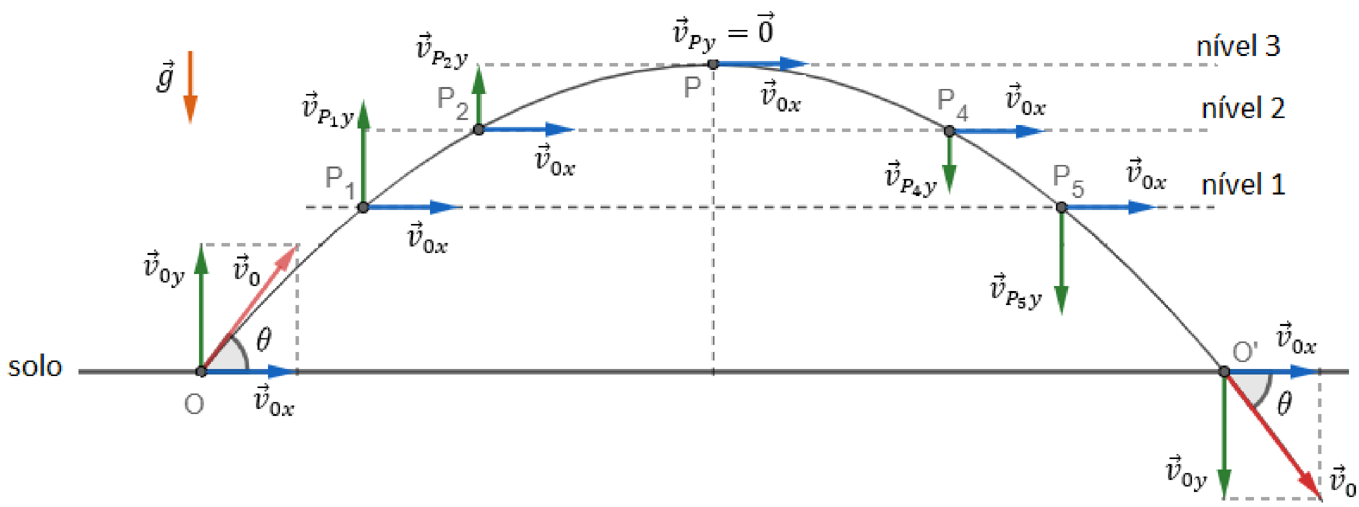



*Figura 7: Representação dos vetores velocidades no lançamento oblíquo.*

Na decomposição vertical, o móvel apenas sobe e desce. Assim, podemos certificar que as velocidades para um dado nível, possuem o mesmo módulo, mas direção oposta, como indicado na figura anterior. Portanto:

$$|\vec{v}_{P_1 y}| = |\vec{v}_{P_5 y}|$$
$$|\vec{v}_{P_2 y}| = |\vec{v}_{P_4 y}|$$
$$|\vec{v}_{Oy}| = |\vec{v}_{O'y}|$$
$$\vec{v}_{Py} = \vec{0}$$

## 5.1 Equações do lançamento oblíquo

Para deduzirmos as equações de espaço e de velocidade para cada direção e para o movimento resultante, vamos analisar cada componente individualmente, adotando um eixo de coordenadas $Oxy$ na origem do lançamento, da seguinte forma:

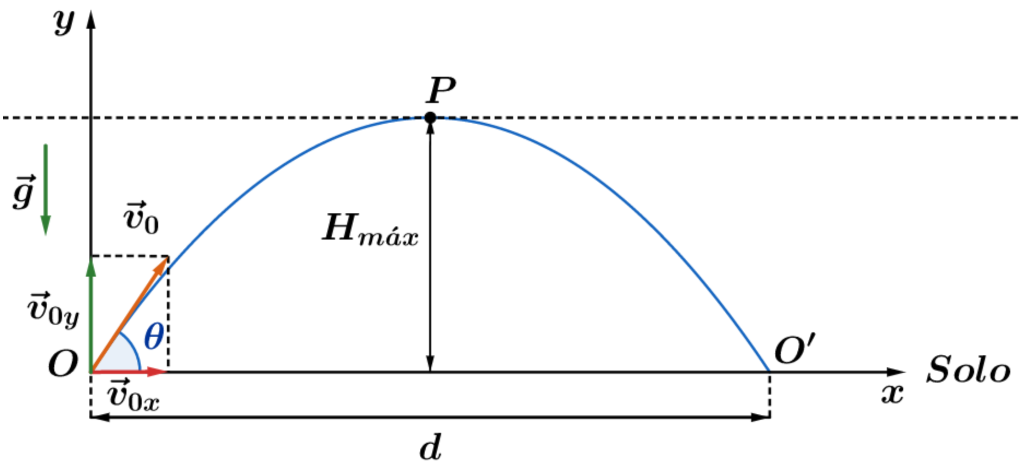



*Figura 8: Definição dos eixos cartesianos no lançamento oblíquo.*

Decompondo o movimento em cada direção, temos que:

**a) Direção horizontal:** o móvel não está sujeito a nenhuma força resultante, logo aceleração nesta direção é nula, então a velocidade ao longo do eixo $x$ é constante. Nessa direção, o corpo realiza um MRU:

$$s = s_0 + v \cdot t$$

Aplicando as condições do problema, temos que:

$$x = 0 + v_{0x} \cdot t$$
$$x = v_{0x} \cdot t$$

Pela decomposição vetorial da velocidade inicial, podemos escrever o módulo da velocidade nessa direção e o vetor velocidade:

$$v_{0x} = v_0 \cdot cos\theta$$

$$\boxed{\vec{v}_{0x} = v_0 \cdot cos\theta \ \hat{\imath}}$$

Assim, a função horária do espaço na horizontal é:

$$\boxed{x = (v_0 cos\theta) \cdot t}$$

**b) Direção vertical:** o móvel sofre apenas ação da força peso, isto é, existe a aceleração resultante não nula sobre o corpo, sendo ela a aceleração da gravidade no local apontando para baixo. Assim, na vertical teremos um MRUV, onde a equação horária de velocidade é dada por:

$$v_y = v_{0y} + a_y \cdot t$$

Como aceleração é contrária a orientação adotada na vertical, temos que:

$$\boxed{v_y = v_{0y} - g \cdot t}$$

Pela decomposição vetorial da velocidade na vertical, escrevemos:

$$v_{0y} = v_0 \cdot sen\theta$$

$$\boxed{\vec{v}_{0y} = v_0 \cdot sen\theta\ \hat{j}}$$

Portanto:

$$\boxed{v_y = v_0 \cdot sen\theta - g \cdot t}$$

Podemos notar que a partir da decomposição de vetores, temos a seguinte relação entre os vetores velocidades:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y}$$

$$\boxed{v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$$

Dessa forma, a equação horária do espaço é dada por:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Aplicando na direção, temos:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2} \Rightarrow \boxed{y = 0 + (v_0 \cdot sen\theta) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}}$$

Se olharmos apenas para o movimento na vertical, sabemos que existe uma simetria entre a subida e a descida. Pelo estudo de lançamento vertical, vimos que o tempo de subida é igual ao tempo de descida, isto é, o tempo que o móvel leva para chegar em P é o mesmo tempo para ele sair de P e chegar em O'. Portanto, o tempo de voo do corpo é o dobro do tempo de subida.

O tempo de subida pode ser calculado pela equação horária da velocidade na vertical, pois no ponto P, a velocidade na vertical é nula. Logo:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t$$

$$v_{Py} = v_{0y} - g \cdot t_{subida}$$

$$v_{Py} = 0$$

$$0 = v_0 . sen\theta - g \cdot t_{subida}$$

$$\therefore \boxed{t_{subida} = \frac{v_0 \cdot sen\theta}{g}}$$


Fique atento com essa afirmação! No ponto mais alto da trajetória (ponto P), a velocidade não é nula, pois existe a componente horizontal da velocidade, que é constante. Portanto, apenas a componente vertical é nula no ponto mais alto da trajetória.

Portanto, o **tempo de voo** é dado por:

$$t_{voo} = 2 \cdot t_{subida}$$

$$\boxed{t_{voo} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sen\theta}{g}}$$

O **alcance** do corpo pode ser encontrado pela função horária do espaço na direção $x$:

$$x(t) = (v_0 \cdot cos\theta) \cdot t$$

$$d = (v_0 \cdot cos\theta) \cdot t_{voo}$$

$$d = (v_0 \cdot cos\theta) \cdot \left(\frac{2 \cdot v_0 \cdot sen\theta}{g}\right)$$

$$d = \frac{v_0^2 (2 \cdot sen\,\theta \cdot \cos\theta)}{g}$$

Da trigonometria, temos a relação de seno do arco duplo dado por:

$$sen(2\theta) = 2 \cdot sen\,\theta \cdot \cos\theta$$

Finalmente, chegamos à equação do alcance:

$$\boxed{d = \frac{v_0^2 \cdot sen(2\theta)}{g}}$$

Por último, podemos calcular a altura máxima que o corpo atingiu na vertical, quando lançado com um ângulo $\theta$. Para isso, temos duas opções para chegar ao resultado: calculando a posição vertical no tempo de subida ou utilizando Torricelli na direção vertical entre os pontos O e P. Vamos utilizar Torricelli, então:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta y$$

$$0 = (v_0 sen\theta)^2 - 2 \cdot g \cdot H$$

$$\boxed{H = \frac{v_0^2 \cdot sen^2\theta}{2g}}$$

FIQUE ATENTO!

Olhando rapidamente para altura máxima atingida quando lançado com um ângulo $\theta$ vemos como é semelhante ao alcance para o mesmo ângulo. Na prática, considero bem desnecessário decorar essas fórmulas pois você pode rapidamente desenvolvê-las.

ESCLARECENDO!

**02)**

Um projétil é lançado em $t = 0$ do alto de um precipício abrupto situado 400 metros acima do nível do mar, formando um ângulo $\theta$ com a horizontal. O móvel cai no mar no ponto X. Dado que $v_0 = 100\ m/s$, $sen\theta = 0{,}8$ e $cos\theta = 0{,}6$. Desprezando a resistência do ar, determine:

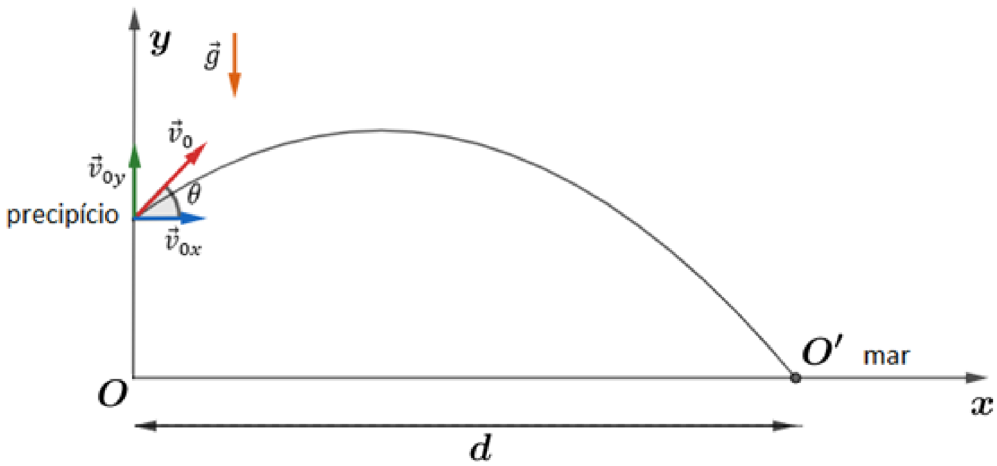
a) o tempo de voo do corpo até atingir o mar;

b) a distância entre o ponto de lançamento e o ponto X;

c) o módulo da velocidade quando o projétil atinge o mar.

**Comentários:**

Vamos fazer um desenho esquemático do problema e escrevermos as equações horárias em cada componente:




A partir da figura esquemática, vem:

Direção horizontal:

$$x(t) = v_{0x} \cdot t$$
$$x(t) = (v_0 cos\theta) \cdot t$$
$$x(t) = 100 \cdot 0{,}6 \cdot t$$
$$\boxed{x(t) = 60 \cdot t}$$

Direção vertical:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2}$$
$$y(t) = y_0 + (v_0 \cdot sen\theta) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$
$$y(t) = 400 + 100 \cdot 0{,}8 \cdot t - 5 \cdot t^2$$
$$\boxed{y(t) = 100 + 80 \cdot t - 5 \cdot t^2}$$

A equação horária da velocidade é dada por:

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y \cdot t$$
$$v_y(t) = v_0 \cdot sen\theta - g \cdot t$$
$$\boxed{v_y(t) = 80 - 10 \cdot t}$$

No instante que o corpo atinge o mar, sua posição vertical é nula, ou seja, $y(t_x) = 0$. Portanto:

$$y(t_x) = 0$$
$$400 + 80t - 5t^2 = 0$$
$$t = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot 400 \cdot (-5)}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-80 \pm 120}{-10} \begin{cases} t_1 = \dfrac{-80 + 120}{-10} = -4\, s\ (não\ serve) \\ t_2 = \dfrac{-80 - 120}{-10} \Rightarrow \boxed{t_2 = 20\, s} \end{cases}$$

Assim, o corpo leva 20 segundos para atingir o mar.

Para determinar a distância entre o ponto do lançamento e o ponto X, precisamos saber quanto o corpo se deslocou na direção horizontal:

$$x(t) = 60 \cdot t$$
$$x(20) = 60 \cdot 20 = 1200\, m$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos a distância $d_{PX}$:

$$d_{PX} = \sqrt{400^2 + 1200^2} = \sqrt{400^2(1 + 3^2)} \Rightarrow \boxed{d_{PX} = 400\sqrt{10}\, m = 1264{,}9\, m}$$

No ponto X temos a velocidade horizontal que permanece constante ao longo do movimento e a velocidade na vertical dada por:

$$v_y(t) = 80 - 10t$$
$$v_y(20) = 80 - 10x20 \Rightarrow \boxed{v_y(20) = -120\, m/s}$$

Assim, para calcular o módulo do vetor cujas componentes ortogonais são 60 e 120 (em módulo), basta aplicar o teorema de Pitágoras:

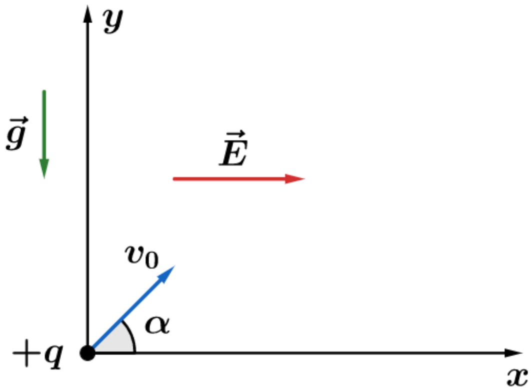
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$
$$v^2 = 60^2 + 120^2$$
$$v^2 = 60^2(1 + 2^2)$$
$$\boxed{v = 60\sqrt{5} m/s}$$

Note que aqui a velocidade do ponto de lançamento não foi igual a velocidade no instante quando toca o mar, pois não estamos falando de pontos simétricos da trajetória.

Vamos resolver uma questão onde colocamos uma aceleração no eixo horizontal. Embora ainda não estudemos ainda eletricidade, isso não comprometerá o entendimento da questão.


**03)**

Uma carga positiva de massa $m$ e carga $+q$ é lançada com uma velocidade inicial de $v_0$, com um ângulo de $\alpha$ com a horizontal numa região onde existe um campo elétrico uniforme, como na figura abaixo:




Determine o ponto onde a carga toca novamente o eixo x.

**Comentários**:

Decompondo o movimento nas direções x e y, temos que:

Em x: temos a força elétrica atuando no corpo para a direita com módulo:

$$F_e = q \cdot E$$

Como apenas ela atua na carga na horizontal, então ela é a força resultante nesta direção, portanto:

$$\overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{F_e}$$
$$F_r = F_e$$
$$m \cdot a_x = q \cdot E$$
$$\boxed{a_x = \frac{q \cdot E}{m}}$$

Temos um MUV na horizontal também, portanto temos a seguinte equação horária do espaço em x:

$$\boxed{x = (v_0 cos\alpha) \cdot t + \frac{\left(\frac{q \cdot E}{m}\right) \cdot t^2}{2}}$$

Em y: temos que a força peso é a única atuante no corpo nesta direção, dessa forma, temos um MUV, onde a aceleração da gravidade é a aceleração em y. Portanto:

$$v_y = v_0 sen\alpha - g \cdot t$$
$$y = (v_0 sen\alpha) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Pelo princípio da independência dos movimentos proposto por Galileu, podemos trabalhar os movimentos em cada componentes. Então, quando o corpo tocar o eixo x, sua coordenada y será zero, então:

$$y = 0$$

$$(v_0 sen\alpha) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = 0$$

$$t \cdot \left[(v_0 sen\alpha) - \frac{g \cdot t}{2}\right] = 0$$

$$\therefore t_1 = 0 \; ou \; \boxed{t_2 = \frac{2v_0 sen\alpha}{g}}$$

Como $t_1 = 0$ representa o momento do lançamento, estamos interessados no outro instante de tempo. Assim, o deslocamento em $x$ é dado por:

$$x(t_2) = v_0 cos\alpha \cdot \left(\frac{2v_0 sen\alpha}{g}\right) + \frac{\left(\frac{q \cdot E}{m}\right) \cdot \left(\frac{2v_0 sen\alpha}{g}\right)^2}{2}$$

$$\boxed{x(t_2) = \frac{v_0^2 sen2\alpha}{g} + \left(\frac{q}{m}\right) \cdot \left(\frac{E \cdot 2v_0^2 sen^2\alpha}{g^2}\right)}$$

Repare que embora tenha uma aceleração na horizontal, nós trabalhamos o exercício da mesma maneira que antes.

## 5.2. Alcance máximo

Como visto anteriormente, o alcance é calculado por:

$$d = \frac{v_0^2 . sen2\theta}{g}$$

Se **fixarmos a velocidade** de lançamento do objeto e **variar apenas o ângulo**, vemos que o alcance depende apenas do ângulo de inclinação com a horizontal. Então, para que o alcance seja máximo, $sen2\theta$ deve ser máximo.

Nas definições de seno, conhecemos que seno de um ângulo é um valor entre -1 e 1. Então, $sen2\theta$ assumi seu valor máximo quando é igual a 1.

Se $sen2\theta = 1$, o alcance máximo é dado por:

$$\boxed{d_{máx} = \frac{v_0^2}{g}}$$

Como $sen2\theta = 1$, então $2\theta = 90°$. Portanto, $\boxed{\theta = 45°}$.

**Propriedade do alcance:**

Se duas partículas são lançadas de um mesmo ponto, com velocidades de mesmo módulo e a soma dos ângulos de lançamento serem 90°, então as duas partículas terão o mesmo alcance.

**Demonstração:** dadas duas partículas A e B com velocidades cujos módulos são iguais a $v_0$ ($|\vec{v}_A| = |\vec{v}_B| = v_0$). Se A é lançada com um ângulo $\alpha$ e B é lançada com um ângulo $\beta$, tal que $\alpha + b = 90°$. Então, podemos escrever o alcance para cada uma das partículas.

$$d_A = \frac{v_0^2 sen2\alpha}{g} \; e \; d_B = \frac{v_0^2 sen2\beta}{g}$$

Pela trigonometria, sabemos que:

$$\alpha + \beta = 90$$
$$2\alpha + 2\beta = 180$$
$$2\alpha = 180 - 2\beta$$

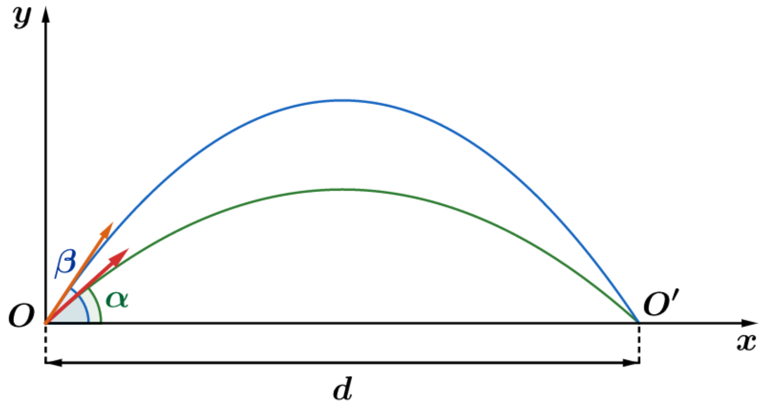
Logo:

$$sen(2\alpha) = sen(180 - 2\beta)$$

Mas, sabemos que: $sen(180 - \theta) = sen\theta$, portanto:

$$\boxed{sen(2\alpha) = sen(2\beta)}$$
$$\frac{v^2}{g}.sen(2\alpha) = \frac{v_0^2}{g}.sen(2\beta)$$
$$\boxed{d_A = d_B}$$

A volta da propriedade também é válida, isto é, se dois corpos partem de um mesmo ponto e possuem o mesmo alcance, então a soma dos ângulos de lançamento é igual 90° (em outras palavras, dizemos que os ângulos de lançamentos são complementares).




## 5.3 Equação da curva do lançamento oblíquo.

Até trabalhamos as equações de cada componente de forma isolada. Vamos agora cominar as funções horárias de espaço de cada direção e analisar o resultado obtido.

Para um lançamento oblíquo como na figura abaixo, temos as funções horárias de espaço:

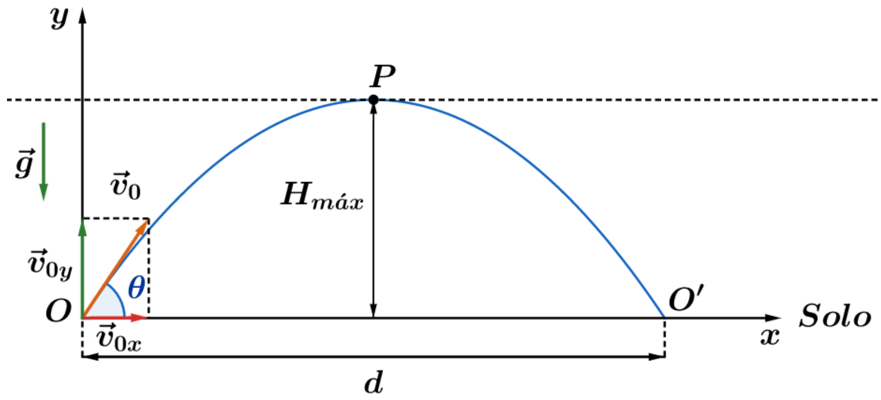



*Figura 9: Definição da origem dos eixos cartesianos no lançamento oblíquo.*

$$x = v_0 cos\theta \cdot t \text{ (1)}$$

$$y = v_0 sen\theta \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \text{ (2)}$$

Isolando o tempo em (1) e substituindo em (2), temos que:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot cos\theta}$$

$$y = v_0 \cdot sen\theta \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot cos\theta}\right) - \frac{g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot cos\theta}\right)^2}{2}$$

Como $\frac{sen\theta}{cos\theta} = tg\theta$, $sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$ para $cos\theta \neq 0$ e $\sec^2\theta = 1 + tg^2\theta$, logo, temos que:

$$\boxed{y = x \cdot tg\theta - \frac{g(1 + tg^2\theta)}{2v_0^2} \cdot x^2}$$

Essa é a equação da trajetória do lançamento oblíquo. Ela mostra que a curva descrita por um corpo lançado (desprezando a resistência do ar) é uma parábola, pois trata-se de uma função do segundo grau ($f(x) = ax^2 + bx + c$), onde o coeficiente na frente do termo quadrático é negativo, mostrando que é uma parábola com concavidade para baixo, como observado fisicamente no movimento.

Poucas questões trabalham diretamente com a equação da trajetória, mas nosso próximo, que é um tópico especial, utilizará essa equação para desenvolvimento teórico.

# 6. Lista de exercícios lançamento oblíquo

**1. (EsPCEx – 2015)**

Um projétil é lançado obliquamente, a partir de um solo plano e horizontal, com uma velocidade que forma com a horizontal um ângulo $\alpha$ e atinge a altura máxima de $8{,}45\ m$. Sabendo que, no ponto mais alto da trajetória, a velocidade escalar do projétil é $9{,}0\ m/s$, pode-se afirmar que o alcance horizontal do lançamento é:

Dados: intensidade da aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$, despreze a resistência do ar.

a) 11,7 m

b) 17,5 m

c) 19,4 m

d) 23,4 m

e) 30,4 m

**2. (EsPCEx – 2013)**

Uma esfera é lançada com velocidade horizontal constante de módulo $v = 5\ m/s$ da borda de uma mesa horizontal. Ela atinge o solo num ponto situado a 5 m do pé da mesa conforme o desenho abaixo.

Desprezando a resistência do ar, o módulo da velocidade com que a esfera atinge o solo é de:

Dado: aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$.

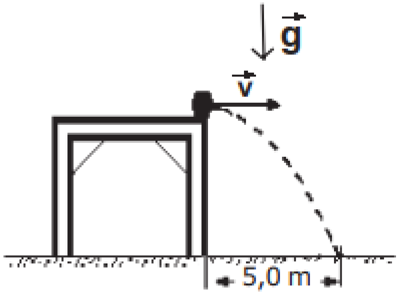
a) 4 m/s

b) 5 m/s

c) $5\sqrt{2}\ m/s$

d) $6\sqrt{2}\ m/s$

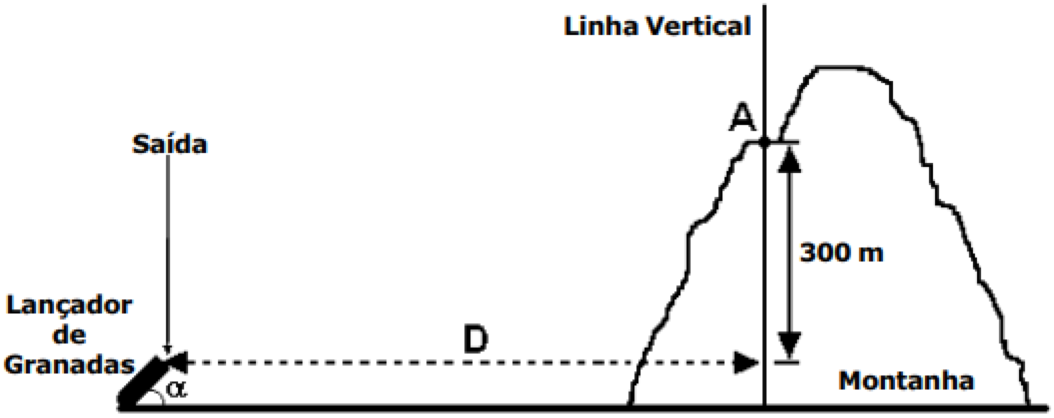
e) $5\sqrt{5}\ m/s$



desenho ilustrativo - fora de escala

**3. (EsPCEx – 2011)**

Um lançador de granadas deve ser posicionado a uma distância $D$ da linha vertical que passa por um ponto $A$. Este ponto está localizado em uma montanha a 300 m de altura em relação à extremidade de saída da granada, conforme o desenho abaixo.




A velocidade da granada, ao sair do lançador, é de $100\ m/s$ e forma um ângulo "$\alpha$" com a horizontal; a aceleração da gravidade é igual a $10\ m/s^2$ e todos os atritos são desprezíveis. Para que a granada atinja o ponto $A$, somente após a sua passagem pelo ponto de maior altura possível de ser atingido por ela, a distância $D$ deve ser de:

Dados: $\cos\alpha = 0{,}6$ e $sen\ \alpha = 0{,}8$

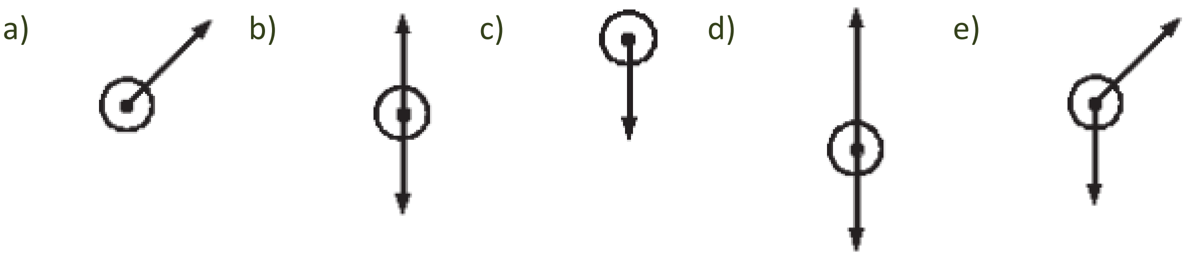
a) 240 m b) 360 m c) 480 m d) 600 m e) 960 m

**4. (EsPCEx – 2008)**

Uma bola é lançada obliquamente a partir do solo, com velocidade inicial $\vec{V}_0$, e descreve uma parábola, conforme representada no desenho abaixo. Os pontos de $A$ até $J$ representam posições sucessivas da bola. A força de resistência do ar é nula e o ponto $E$ é o mais alto da trajetória.


Desenho Ilustrativo

Com base nas informações acima, o desenho que representa corretamente a(s) força(s) que age(m) sobre a bola, no ponto $B$, quando ela está subindo, é:




**5. (EsPCEx – 2004)**

Uma bola é lançada do solo, com uma velocidade inicial de módulo $V$ que faz um ângulo $\theta$ com a superfície do terreno, que é plana e horizontal. Desprezando a resistência do ar, considerando a aceleração da gravidade igual a $10\,m/s^2$ e $0° < \theta < 90°$, podemos afirmar, em relação à bola, que:

a) no ponto mais alto da trajetória, a sua aceleração é nula.

b) no ponto mais alto da trajetória, a sua velocidade é nula.

c) quanto maior o valor de $\theta$ maior será o seu alcance.

d) ela descreve um movimento uniforme ao longo da direção vertical.

e) a direção e o sentido da sua aceleração são constantes.

**6. (EEAR – 2016)**

Um corpo é lançado obliquamente com velocidade $\vec{v}_0$, formando um ângulo com a horizontal. Desprezando-se a resistência do ar, podemos afirmar que

a) o módulo da velocidade vertical aumenta durante a subida.

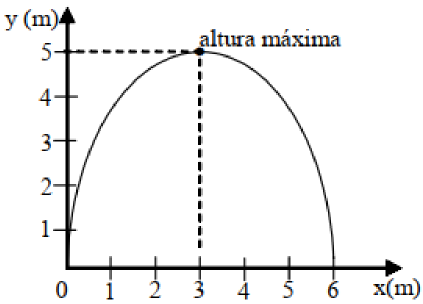
b) o corpo realiza um movimento retilíneo e uniforme na direção vertical.

c) o módulo da velocidade no ponto de altura máxima do movimento vertical é zero.

d) na direção horizontal o corpo realiza um movimento retilíneo uniformemente variado.

**7. (EEAR – 2013)**

Uma partícula é lançada obliquamente a partir do solo e descreve o movimento representado no gráfico que relaciona a altura (y), em relação ao solo, em função da posição horizontal (x). Durante todo movimento, sobre a partícula, atua somente a gravidade cujo módulo no local é constante e igual a 10 m/s². O tempo, em segundos, que a partícula atinge a altura máxima é




a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

**8. (EEAR – 2008)**

Durante a invasão da Normandia, os canhões dos navios aliados deveriam atingir as posições alemãs na praia de Omaha às 6 horas: 30 minutos: 00 segundos. Desprezando os efeitos da resistência do ar, determine o instante em que os disparos deveriam ocorrer para acertar os alvos no instante previsto.

Dado:

- Módulo da componente vertical da velocidade ($V_{0y}$) de lançamento igual a 10 m/s.

- Aceleração da gravidade no local igual a 10 m/s².

- Considere que as posições alemãs na praia e os navios estão na mesma altitude, ou seja, no mesmo plano horizontal.

a) 6 horas: 30 minutos : 02 segundos

b) 6 horas: 29 minutos : 58 segundos

c) 5 horas: 30 minutos : 02 segundos

d) 5 horas: 29 minutos : 58 segundos

**9. (EEAR – 2007)**

Um garoto lança uma pedra utilizando um estilingue (atiradeira) de maneira que o alcance horizontal seja o maior possível. Sendo $V$ o módulo da velocidade de lançamento da pedra, $V_x$ o módulo de sua componente horizontal e $V_y$ o módulo de sua componente vertical, assinale a alternativa correta que apresenta o valor de $V$.

a) $V = V_x + V_y$

b) $V = \left(V_x + V_y\right)^2$

c) $V = V_x/\sqrt{2}$

d) $V = V_x\sqrt{2}$

**10. (EEAR – 2016)**

Um canhão, cujo cano está inclinado em relação ao solo, dispara um tiro. Desprezando-se qualquer tipo de atrito, é CORRETO afirmar que o movimento

a) vertical do projétil é um movimento retilíneo uniforme.

b) horizontal do projétil é um movimento circular uniforme.

c) vertical do projétil é um movimento circular uniforme.

d) horizontal do projétil é um movimento retilíneo uniforme.

**11. (EEAR – 2006)**

Um lançador de projéteis dispara estes com uma velocidade inicial de 750 km/h, verticalmente para cima, atingindo uma altura máxima H. Se inclinarmos o lançador 30° em relação à vertical, qual deverá ser a velocidade inicial dos projéteis, em km/h, para atingir a mesma altura H?

a) $750\sqrt{3}$

b) $500\sqrt{3}$

c) $325\sqrt{3}$

d) $375\sqrt{3}$

**12. (AFA – 2010)**

No instante $t = 0$, uma partícula $A$ é lançada obliquamente, a partir do solo, com velocidade de $80\ m/s$ sob um ângulo de 30° com a horizontal. No instante $t = 2\ s$, outra partícula $B$ é lançada verticalmente para cima, também a partir do solo, com velocidade de $40\ m/s$, de um ponto situado a $200\sqrt{3}\ m$ da posição de lançamento da primeira. Sabendo-se que essas duas partículas colidem no ar, pode-se afirmar que no momento do encontro

a) ambas estão subindo.

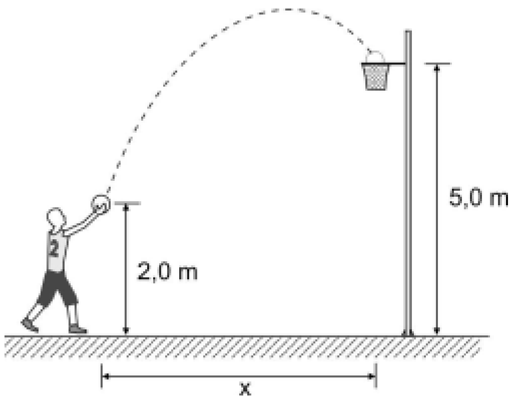
b) A está subindo e B descendo.

c) B está subindo e A descendo.

d) ambas estão descendo.

**13. (AFA – 2009)**

Uma bola de basquete descreve a trajetória mostrada na figura após ser arremessada por um jovem atleta que tenta bater um recorde de arremesso.




A bola é lançada com uma velocidade de $10\ m/s$ e, ao cair na cesta, sua componente horizontal vale $6{,}0\ m/s$. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10\ m/s^2$. Pode-se afirmar que a distância horizontal (x) percorrida pela bola desde o lançamento até cair na cesta, em metros, vale

a) 3,0

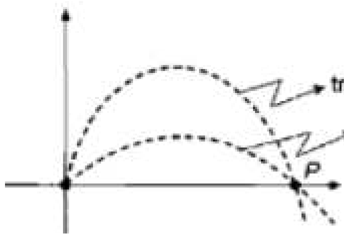
b) 3,6

c) 4,8

d) 6,0

**14. (AFA – 2007)**

A figura abaixo representa as trajetórias de dois projéteis A e B lançados no mesmo instante num local onde o campo gravitacional é constante e a resistência do ar é desprezível.




Ao passar pelo ponto P, ponto comum de suas trajetórias, os projéteis possuíam a mesma

a) velocidade tangencial.

b) velocidade horizontal.

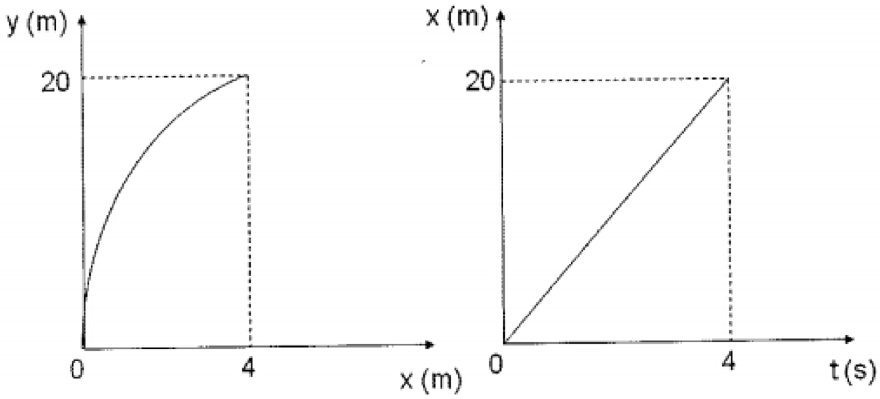
c) aceleração centrípeta.

d) aceleração resultante.

**15. (EN – 2013)**

Os gráficos abaixo foram obtidos da trajetória de um projétil, sendo $y$ a distância vertical e $x$ a distância horizontal percorrida pelo projétil. A componente vertical da velocidade, em m/s, do projétil no instante inicial vale:

Dado: $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$




a) zero

b) 5,0

c) 10

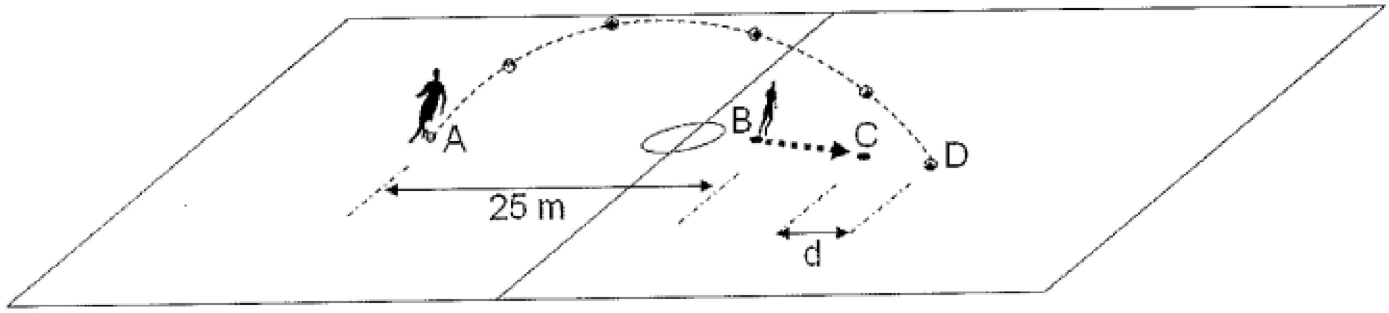
d) 17

e) 29

**16. (EN – 2013)**

Conforme mostra figura abaixo, em um jogo de futebol, no instante em que o jogador situado no ponto A faz um lançamento, o jogador situado no ponto B, que inicialmente estava parado, começa a correr com aceleração constante igual a 3,00 m/s², deslocando-se até o ponto C. Esse jogador chega em C no instante em que a bola toca o chão no ponto D. Todo o movimento se processa em um plano vertical, e a distância inicial entre A e B vale 25,0 m. Sabendo-se que a velocidade inicial da bola tem módulo igual a 20,0 m/s, e faz um ângulo de 45° com a horizontal, o valor da distância, d, entre os pontos C e D, em metros, é

Dado: $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$




a) 1,00

b) 3,00

c) 5,00

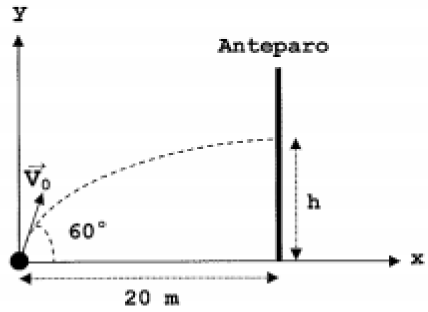
d) 12,0

e) 15,0

**17. (EN – 2012)**

Um projétil é lançado contra um anteparo vertical situado a 20 m do ponto de lançamento. Despreze a resistência do ar. Se esse lançamento é feito com uma velocidade inicial de 20 m/s numa direção que faz um ângulo de 60° com a horizontal, a altura aproximada do ponto onde o projétil se choca com o anteparo, em metros, é

Dados: $tg(60°) \approx 1{,}7$; $g = 10\ m/s^2$.




a) 7,0

b) 11

c) 14

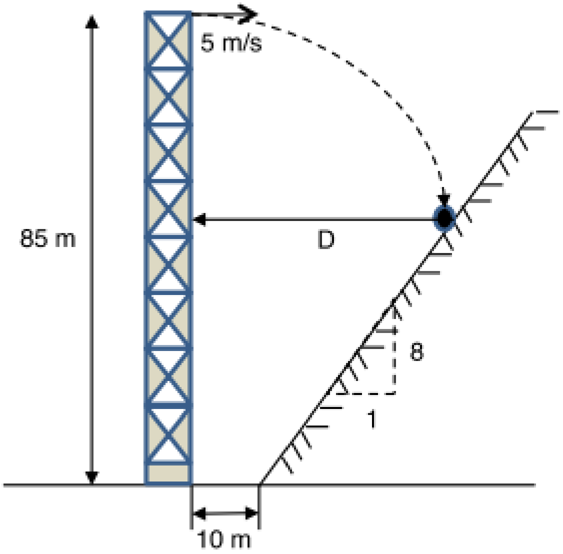
d) 19

e) 23

**18. (EFOMM – 2016)**

Uma bola é lançada do topo de uma torre de $85\ m$ de altura com uma velocidade horizontal de $5{,}0\ m/s$ (ver figura). A distância horizontal $D$, em metros, entre a torre e o ponto onde a bola atinge o barranco (plano inclinado), vale

Dado: $g = 10\ m/s^2$




a) 15

b) 17

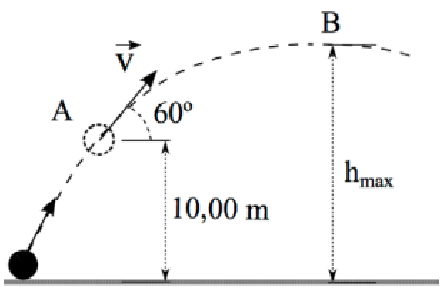
c) 20

d) 25

e) 28

**19. (EFOMM – 2013/modificada)**

Uma bola é lançada obliquamente e, quando atinge a altura de $10\ m$ do solo, seu vetor velocidade faz um ângulo de 60° com a horizontal e possui uma componente vertical de módulo $5{,}0\ m/s$. Desprezando a resistência do ar, a altura máxima alcançada pela bola, em metros, é de




Dado: $g = 10\ m/s^2$.

a) 45/4

b) 50/4

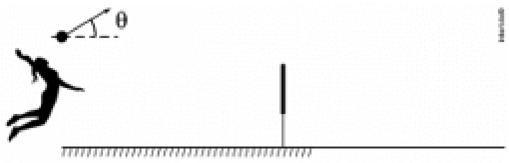
c) 55/4

d) 60/4

e) 65/4

**20. (ITA-2018)**

Numa quadra de vôlei de $18m$ de comprimento, com rede de $2{,}24m$ de altura, um atleta solitária faz um saque com a bola bem em cima da linha de fundo, a $3{,}0m$ de altura, num ângulo $\theta$ de $15°$ com a horizontal, conforme a figura, com trajetória num plano perpendicular à rede. Desprezando o atrito, pode-se dizer que, com $12m/s$ de velocidade inicial, a bola $(g = 10m/s^2)$




a) bate na rede.
b) passa tangenciando a rede.
c) passa a rede e cai antes da linha de fundo.
d) passa a rede e cai na linha de fundo.
e) passa a rede e cai fora da quadra.

GABARITO

# 7. Gabarito da lista de lançamento oblíquo sem comentários

1) D
2) E
3) D
4) C
5) E
6) C
7) A
8) B
9) D
10) D
11) B
12) C
13) D
14) D
15) E
16) B
17) C
18) A
19) A
20) C

ESCLARECENDO!

# 8. Lista comentada de lançamento oblíquo

**1. (EsPCEx – 2015)**

Um projétil é lançado obliquamente, a partir de um solo plano e horizontal, com uma velocidade que forma com a horizontal um ângulo $\alpha$ e atinge a altura máxima de $8{,}45\ m$. Sabendo que, no ponto mais alto da trajetória, a velocidade escalar do projétil é $9{,}0\ m/s$, pode-se afirmar que o alcance horizontal do lançamento é:

Dados: intensidade da aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$, despreze a resistência do ar.

a) 11,7 m

b) 17,5 m

c) 19,4 m

d) 23,4 m

e) 30,4 m

**Comentários**:

A partir da altura máxima, podemos determinar o tempo de voo do projétil, pois o tempo de voo é duas vezes o tempo de subida. Conhecendo a altura máxima atingida pelo corpo, podemos determinar a velocidade vertical inicial do corpo e o tempo de subida:

$$v_y^2 = v_{y0}^2 + 2 \cdot a_y \cdot \Delta y$$

$$0 = v_{0y}^2 - 2 \cdot g \cdot 8{,}45$$

$$0 = v_{0y}^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8{,}45$$

$$\boxed{v_{0y} = 13\ m/s}$$

Logo, o tempo de subida é de:

$$v_y = v_{0y} + a_y \cdot t$$

$$0 = 13 - g \cdot t_{subida}$$

$$t_{subida} = 1{,}3\ s$$

Portanto, o tempo de voo é dado por:

$$t_{voo} = 2 \cdot t_{subida}$$

$$\boxed{t_{voo} = 2{,}6\ s}$$

No ponto mais alto da trajetória, apenas a velocidade vertical é nula, mas a velocidade horizontal é igual a velocidade horizontal inicial, já que nesta direção o corpo executa um MRU. Portanto, o alcance do corpo é igual a:

$$\Delta x = v_{0x} \cdot t_{voo}$$

$$\Delta x = 9 \cdot 2{,}6$$

$$\boxed{\Delta x = 23{,}4\ m}$$

**Gabarito: D**

---

**2. (EsPCEx – 2013)**

Uma esfera é lançada com velocidade horizontal constante de módulo $v = 5\ m/s$ da borda de uma mesa horizontal. Ela atinge o solo num ponto situado a 5 m do pé da mesa conforme o desenho abaixo.

Desprezando a resistência do ar, o módulo da velocidade com que a esfera atinge o solo é de:

Dado: aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$.

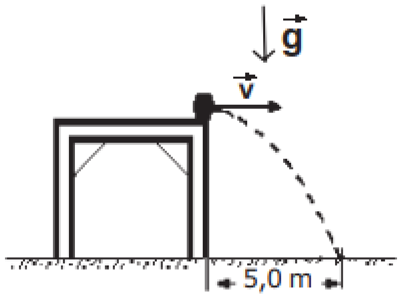
a) 4 m/s

b) 5 m/s

c) $5\sqrt{2}\ m/s$

d) $6\sqrt{2}\ m/s$

e) $5\sqrt{5}\ m/s$



desenho ilustrativo - fora de escala

**Comentários**:

Após ser lançada horizontalmente, a esfera está sujeita apenas a força peso na direção vertical, isto é, o sistema é livre de forças na horizontal e, por isso, executa um MRU na vertical. Se ele percorre a distância de 5 metros com uma velocidade de 5 m/s enquanto cai na vertical, então o tempo de queda é de:

$$\Delta x = v_x \cdot t_q$$

$$5 = 5 \cdot t_q$$

$$\boxed{t_q = 1\ s}$$

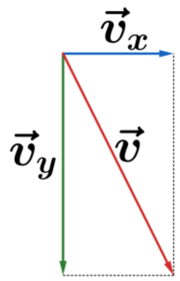
Dessa forma, como a velocidade inicial na vertical é nula, então a velocidade vertical com que o corpo chega ao solo, executando um MRUV na vertical é dado por:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t_q$$

$$v_y = 0 - 10 \cdot 1$$

$$\boxed{v_y = -10\ m/s}$$

O sinal negativo indica que a velocidade está para baixo, já que sempre adotamos o sistema de referências no solo e orientado para cima. Em módulo, ela é igual a 10 m/s. Dessa forma, temos os seguintes vetores quando a esfera chega ao solo:




Então:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2$$

$$|\vec{v}|^2 = 5^2 + 10^2$$

$$|\vec{v}|^2 = 5^2 + (2 \cdot 5)^2$$

$$|\vec{v}|^2 = 5^2 + 4 \cdot 5^2$$

$$|\vec{v}|^2 = 5^2 \cdot (1 + 4)$$

$$|\vec{v}|^2 = 5^2 \cdot 5$$

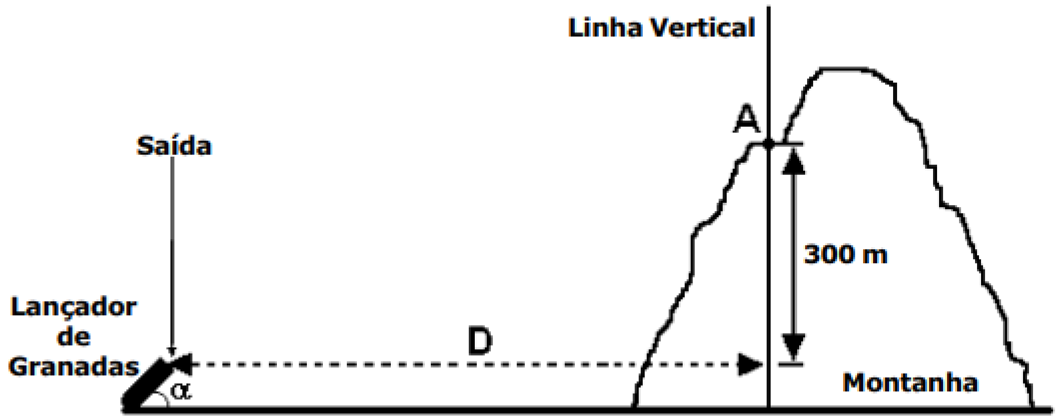
$$\boxed{|\vec{v}| = 5\sqrt{5}\, m/s}$$

**Gabarito: E**

---

**3. (EsPCEx – 2011)**

Um lançador de granadas deve ser posicionado a uma distância $D$ da linha vertical que passa por um ponto $A$. Este ponto está localizado em uma montanha a 300 m de altura em relação à extremidade de saída da granada, conforme o desenho abaixo.




A velocidade da granada, ao sair do lançador, é de $100\, m/s$ e forma um ângulo "$\alpha$" com a horizontal; a aceleração da gravidade é igual a $10\, m/s^2$ e todos os atritos são desprezíveis. Para que a granada atinja o ponto $A$, somente após a sua passagem pelo ponto de maior altura possível de ser atingido por ela, a distância $D$ deve ser de:

Dados: $\cos \alpha = 0{,}6$ e $sen\ \alpha = 0{,}8$

a) 240 m  b) 360 m  c) 480 m  d) 600 m  e) 960 m

**Comentários**:

Analisando o movimento vertical, podemos calcular os tempos quando o projétil atinge a altura de 300 metros. Para isso, vamos escrever a função horária do espaço na vertical, adotando como origem de eixos a posição do canhão e orientados o eixo $x$ para direita e o eixo $y$ para cima.

Logo:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2}$$

$$y = 0 + v_0 \cdot sen(\alpha) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$y = 100 \cdot 0{,}8 \cdot t - \frac{10 \cdot t^2}{2}$$

$$y = 80 \cdot t - 5t^2$$

Para $y = 300\ m$, temos:

$$300 = 80 \cdot t - 5 \cdot t^2$$

$$5 \cdot t^2 - 80 \cdot t + 300 = 0$$

$$t^2 - 16 \cdot t + 60 = 0$$

$$t^2 - 2 \cdot 8 \cdot t + 60 = 0$$

$$t^2 - 2 \cdot 8 \cdot t + 64 = 4$$

$$t^2 - 2 \cdot 8 \cdot t + 8^2 = 2^2$$

$$(t-8)^2 = 2^2$$

$$(t-8)^2 - 2^2 = 0$$

$$(t - 8 - 2) \cdot (t - 8 + 2) = 0$$

$$\underbrace{(t-10)}_{ou=0} \cdot \underbrace{(t-6)}_{ou\ =0} = 0$$

$$\begin{cases} t - 10 = 0\ ou \\ t - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 10\ s\ ou \\ t = 6\ s \end{cases}$$

Note que o tempo igual a 6 segundos corresponde ao primeiro momento em que o corpo está à altura de 300 metros, antes de atingir a altura máxima. Por isso, o tempo correspondente para quando o corpo está à 300 metros de altura e caindo é de 10 segundos.

Assim, o deslocamento horizontal $D$, durante estes 10 segundos, é dado por:

$$D = v_x \cdot t$$

$$D = 100 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

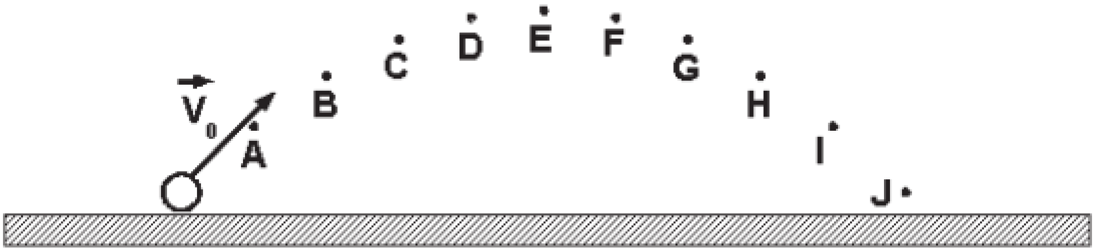
$$D = 100 \cdot 0{,}6 \cdot 10$$

$$\boxed{D = 600\ m}$$

**Gabarito: D**

**4. (EsPCEx – 2008)**

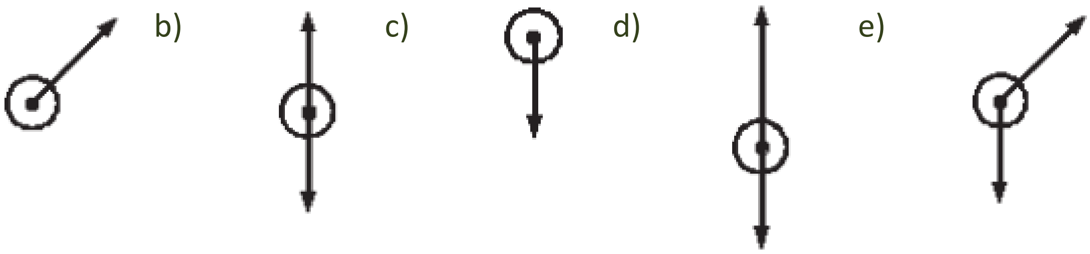
Uma bola é lançada obliquamente a partir do solo, com velocidade inicial $\vec{V}_0$, e descreve uma parábola, conforme representada no desenho abaixo. Os pontos de $A$ até $J$ representam posições sucessivas da bola. A força de resistência do ar é nula e o ponto $E$ é o mais alto da trajetória.




Desenho Ilustrativo

Com base nas informações acima, o desenho que representa corretamente a(s) força(s) que age(m) sobre a bola, no ponto $B$, quando ela está subindo, é:

a) b) c) d) e)



**Comentários**:

Durante todo movimento da bola, apenas a força peso atua na bola, para baixo, devido ao campo gravitacional terrestre. Portanto, apenas a letra C pode representar as forças que atuam na bola.

**Gabarito: C**

**5. (EsPCEx – 2004)**

Uma bola é lançada do solo, com uma velocidade inicial de módulo $V$ que faz um ângulo $\theta$ com a superfície do terreno, que é plana e horizontal. Desprezando a resistência do ar, considerando a aceleração da gravidade igual a $10\ m/s^2$ e $0° < \theta < 90°$, podemos afirmar, em relação à bola, que:

a) no ponto mais alto da trajetória, a sua aceleração é nula.

b) no ponto mais alto da trajetória, a sua velocidade é nula.

c) quanto maior o valor de $\theta$ maior será o seu alcance.

d) ela descreve um movimento uniforme ao longo da direção vertical.

e) a direção e o sentido da sua aceleração são constantes.

**Comentários**:

a) Incorreta. No ponto mais alto da trajetória, apenas a velocidade vertical é nula.

b) Incorreta. No ponto mais alto da trajetória, ainda temos a velocidade horizontal não nula, pois o movimento executa um MRU na horizontal.

c) Incorreta. Sabemos que o alcance é dado por:

$$A = \frac{v_0^2 sen(2\theta)}{g}$$

O alcance cresce à medida que aumentamos o valor de $\theta$, até que ele é máximo quando $\theta = 45°$ e depois começa a decrescer, conforme varia a função $sen(2\theta)$. Basta olhar para um lançamento vertical, onde $\theta = 90°$, isto é, o corpo é lançado verticalmente e cai no mesmo ponto de lançamento, resultando num alcance nulo.

Logo, o alcance não cresce sempre com o ângulo.

d) Incorreta. Como a força peso é a resultante na direção vertical, o movimento nesta direção é MRUV.

e) Correta. Durante todo o movimento, a única força que atua no corpo é a força peso, direcionada para baixo. Portanto, a aceleração que o corpo está sujeito é a aceleração da gravidade, sempre considerada constante em nossos problemas de nível médio.

**Gabarito: E**

---

**6. (EEAR – 2016)**

Um corpo é lançado obliquamente com velocidade $\vec{v}_0$, formando um ângulo com a horizontal. Desprezando-se a resistência do ar, podemos afirmar que

a) o módulo da velocidade vertical aumenta durante a subida.

b) o corpo realiza um movimento retilíneo e uniforme na direção vertical.

c) o módulo da velocidade no ponto de altura máxima do movimento vertical é zero.

d) na direção horizontal o corpo realiza um movimento retilíneo uniformemente variado.

**Comentários**:

Quando um corpo é lançado com velocidade $\vec{v}_0$ e ângulo de lançamento $\theta$, as componentes das velocidades são:

$$v_{0y} = v_0 \cdot sen\,\theta$$

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\theta$$

Na vertical, a resultante das forças é força peso. Adotando um referencial para cima, colocando a origem no solo, a aceleração resultante na vertical é a aceleração da gravidade, orientada para baixo, contra o sistema de referência adotado, o que deixa a alternativa b) incorreta.

Portanto, na subida do corpo temos um movimento retardado até que ele atinja a altura máxima (portanto, a alternativa a) está incorreta), caracterizada pelo fato da velocidade na vertical, $v_y$, ser nula. Portanto, a alternativa C está correta.

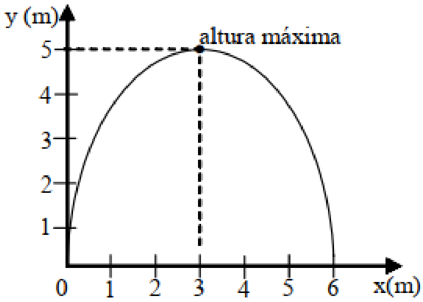
Na direção horizontal, não há forças atuando no corpo, portanto o movimento na horizontal é retilíneo e uniforme (MRU).

**Gabarito: C**

---

**7. (EEAR – 2013)**

Uma partícula é lançada obliquamente a partir do solo e descreve o movimento representado no gráfico que relaciona a altura (y), em relação ao solo, em função da posição horizontal (x). Durante todo movimento, sobre a partícula, atua somente a gravidade cujo módulo no local é constante e igual a 10 m/s². O tempo, em segundos, que a partícula atinge a altura máxima é




a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

**Comentários**:

A altura máxima alcançada pela partícula é de 5 metros, portanto:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta y$$

$$0 = v_{0y}^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5$$

$$v_{0y} = 10\ m/s$$

Por outro lado, pela função horária da velocidade, temos:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t$$

$$0 = 10 - 10 \cdot t_{subida}$$

$$\boxed{t_{subida} = 1\ s}$$

**Gabarito: A**

---

**8. (EEAR – 2008)**

Durante a invasão da Normandia, os canhões dos navios aliados deveriam atingir as posições alemãs na praia de Omaha às 6 horas: 30 minutos: 00 segundos. Desprezando os efeitos da resistência do ar, determine o instante em que os disparos deveriam ocorrer para acertar os alvos no instante previsto.

Dado:

- Módulo da componente vertical da velocidade ($V_{0y}$) de lançamento igual a 10 m/s.

- Aceleração da gravidade no local igual a 10 m/s².

- Considere que as posições alemãs na praia e os navios estão na mesma altitude, ou seja, no mesmo plano horizontal.

a) 6 horas: 30 minutos : 02 segundos

b) 6 horas: 29 minutos : 58 segundos

c) 5 horas: 30 minutos : 02 segundos

d) 5 horas: 29 minutos : 58 segundos

**Comentários**:

O tempo de voo da munição pode ser calculado apenas analisando o movimento na vertical. O tempo de voo é 2 vezes o tempo de subida do corpo. Portanto:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t$$

$$0 = 10 - 10 \cdot t_{subida}$$

$$t_{subida} = 1\ s$$

Logo, o tempo de voo é de:

$$t_{voo} = 2 \cdot t_{subida}$$

$$\boxed{t_{voo} = 2\ s}$$

Se o tempo de voo da munição é de 2 segundos e desejamos atingir o inimigo as 6 horas: 30 min : 00 segundos, então devemos disparar os canhões as 6 horas: 29 minutos: 58 segundos.

**Gabarito: B**

---

**9. (EEAR – 2007)**

Um garoto lança uma pedra utilizando um estilingue (atiradeira) de maneira que o alcance horizontal seja o maior possível. Sendo $V$ o módulo da velocidade de lançamento da pedra, $V_x$ o módulo de sua componente horizontal e $V_y$ o módulo de sua componente vertical, assinale a alternativa correta que apresenta o valor de $V$.

a) $V = V_x + V_y$

b) $V = (V_x + V_y)^2$

c) $V = V_x/\sqrt{2}$

d) $V = V_x\sqrt{2}$

**Comentários**:

Se o garoto lança a pedra com um ângulo de lançamento que proporciona o maior alcance possível, sabemos que esse ângulo é de 45°, conforme visto em teoria. Portanto:

$$V_x = V \cdot \cos 45°$$

$$V_x = V \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{2V_x}{\sqrt{2}}$$

$$V = \frac{2V_x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{V = V_x\sqrt{2}}$$

A relação entre as componentes e a velocidade total é dada pelo teorema de Pitágoras:

$$\boxed{V^2 = V_x^2 + V_y^2}$$

**Gabarito: D**

---

**10. (EEAR – 2016)**

Um canhão, cujo cano está inclinado em relação ao solo, dispara um tiro. Desprezando-se qualquer tipo de atrito, é CORRETO afirmar que o movimento

a) vertical do projétil é um movimento retilíneo uniforme.

b) horizontal do projétil é um movimento circular uniforme.

c) vertical do projétil é um movimento circular uniforme.

d) horizontal do projétil é um movimento retilíneo uniforme.

**Comentários**:

Em um problema de lançamento oblíquo, podemos decompor o movimento na direção vertical e na direção horizontal. Na direção vertical, a força resultante é a própria força peso, portanto, o corpo descreve um MRUV nessa direção, em que a aceleração do corpo é a aceleração da gravidade.

Já na direção horizontal, o corpo é livre de forças nessa direção, portanto, ele descreverá um MRU.

**Gabarito: D**

---

**11. (EEAR – 2006)**

Um lançador de projéteis dispara estes com uma velocidade inicial de 750 km/h, verticalmente para cima, atingindo uma altura máxima H. Se inclinarmos o lançador 30° em relação à vertical, qual deverá ser a velocidade inicial dos projéteis, em km/h, para atingir a mesma altura H?

a) $750\sqrt{3}$

b) $500\sqrt{3}$

c) $325\sqrt{3}$

d) $375\sqrt{3}$

**Comentários**:

No primeiro momento, quando o lançamento é na vertical, podemos determinar a altura máxima atingida pelo corpo, utilizando a equação de Torricelli:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2 \cdot a_y \cdot \Delta h$$

$$0^2 = (v_1)^2 - 2 \cdot g \cdot H$$

$$H = \frac{v_1^2}{2g}$$

Ao fazer o lançamento com inclinação de 30° em relação a vertical, ou seja, 60° em relação a horizontal que é o ângulo que sempre tomamos em teoria, a velocidade na vertical é de:

$$v_{2y} = v_2 \cdot sen\ 60°$$

$$v_{2y} = v_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para atingir a mesma altura H, temos:

$$H = \frac{v_{2y}^2}{2g}$$

Portanto:

$$v_{2y} = v_1$$

$$v_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 750$$

$$v_2 = \frac{2 \cdot 750}{\sqrt{3}}$$

$$v_2 = \frac{2 \cdot 750 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{v_2 = 500\sqrt{3}\ km/h}$$

**Gabarito: B**

---

**12. (AFA – 2010)**

No instante $t = 0$, uma partícula $A$ é lançada obliquamente, a partir do solo, com velocidade de $80\ m/s$ sob um ângulo de 30° com a horizontal. No instante $t = 2\ s$, outra partícula $B$ é lançada verticalmente para cima, também a partir do solo, com velocidade de $40\ m/s$, de um ponto situado a $200\sqrt{3}\ m$ da posição de lançamento da primeira. Sabendo-se que essas duas partículas colidem no ar, pode-se afirmar que no momento do encontro

a) ambas estão subindo.

b) A está subindo e B descendo.

c) B está subindo e A descendo.

d) ambas estão descendo.

**Comentários**:

Como a partícula B é lançada verticalmente para cima, se houver alguma colisão, essa colisão deverá ocorrer ao longo da reta $x = 200\sqrt{3}$. No momento em que as partículas colidem, ambas estão no mesmo ponto. Para chegar em $x = 200\sqrt{3}$, a partícula A gasta:

$$t = \frac{200\sqrt{3}}{v_x}$$

$$t = \frac{200\sqrt{3}}{80 \cdot \cos 30°} = \frac{200\sqrt{3}}{80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{t = 5\ s}$$

A altura alcançada pela partícula e a velocidade em $t = 5\ s$ são:

$$\begin{cases} y_A = 80 \cdot sen\ 30° \cdot t - 5 \cdot t^2 \\ v_A = 80 \cdot sen\ 30° - 10 \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_A = 80 \cdot sen\ 30° \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 \\ v_A = 80 \cdot sen\ 30° - 10 \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_A = 75\ m \\ v_A = -10\ m/s \end{cases}$$

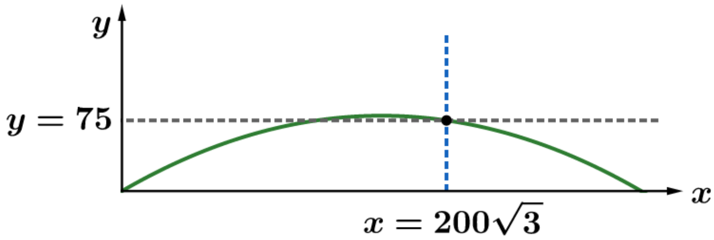
Em $x = 200\sqrt{3}$, a partícula A já está caindo. Por outro lado, temos as condições de B:

$$\begin{cases} y_B = 40 \cdot t - 5 \cdot t^2 \\ v_B = 40 - 5 \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_B = 40 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 \\ v_B = 40 - 5 \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_B = 75\ m \\ v_B = 15\ m/s \end{cases}$$

Portanto, B ainda está subindo quando ocorre a colisão, graficamente, temos:

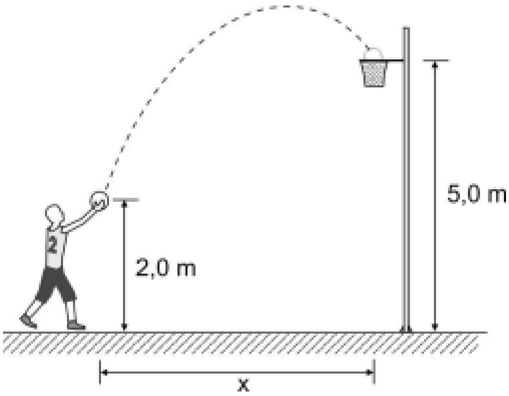



**Gabarito: C**

---

**13. (AFA – 2009)**

Uma bola de basquete descreve a trajetória mostrada na figura após ser arremessada por um jovem atleta que tenta bater um recorde de arremesso.




A bola é lançada com uma velocidade de $10\ m/s$ e, ao cair na cesta, sua componente horizontal vale $6{,}0\ m/s$. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10\ m/s^2$. Pode-se afirmar que a distância horizontal (x) percorrida pela bola desde o lançamento até cair na cesta, em metros, vale

a) 3,0

b) 3,6

c) 4,8

d) 6,0

**Comentários**:

Se a bola é lançada com 10 m/s e sua componente horizontal vale 6,0 m/s, então a componente vertical vale 8,0 m/s, pelo teorema de Pitágoras:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$10^2 = 6^3 + v_y^2$$

$$\boxed{v_y = 8{,}0\ m/s}$$

O tempo para a bola chegar à altura de 5 m é dado por:

$$y = y_0 + v_{0_y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$5 = 2{,}0 + 8{,}0 \cdot t - 5 \cdot t^2$$

$$5t^2 - 8t + 3 = 0$$

$$t = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{2 \cdot 5}$$

$$t = \frac{\left(8 \pm \sqrt{4}\right)}{10}$$

$$t_1 = \frac{8-2}{10} = 0{,}6\ s$$

$$t_2 = \frac{8+2}{10} = 1{,}0\ s$$

Note que $t = 0{,}6\ s$ corresponde ao tempo em que a bola possui a altura de 5 metros, mas ainda está subindo. Já $t = 1{,}0\ s$ corresponde ao tempo em que a bola possui altura igual a 5 metros, mas agora está descendo. Para a nossa situação em questão, a bola descenderá para o jogador fazer a cesta. Portanto, devemos utilizar este tempo para determinar a distância $x$ percorrida pela bola na horizontal:

$$x = v_x \cdot t$$

$$x = 6{,}0 \cdot 1{,}0$$

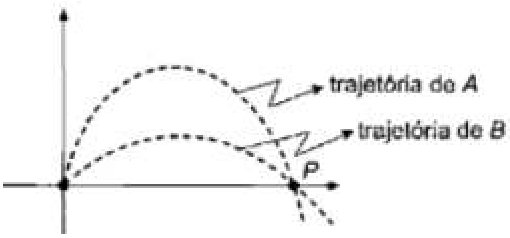
$$\boxed{x = 6{,}0\ m}$$

**Gabarito: D**

---

**14. (AFA – 2007)**

A figura abaixo representa as trajetórias de dois projéteis A e B lançados no mesmo instante num local onde o campo gravitacional é constante e a resistência do ar é desprezível.




Ao passar pelo ponto P, ponto comum de suas trajetórias, os projéteis possuíam a mesma

a) velocidade tangencial.

b) velocidade horizontal.

c) aceleração centrípeta.

d) aceleração resultante.

**Comentários**:

A questão faz uma pegadinha, pois ela não menciona se os projéteis passam simultaneamente pelo ponto P, diz apenas que elas passam por P. Por isso, não sabemos se a velocidade horizontal é a mesma ou não. De fato, o deslocamento horizontal dos projéteis para chegar em P é o mesmo e pode ser escrito como:

$$\begin{cases} x = v_{HA} \cdot t_A \\ x = v_{HB} \cdot t_B \end{cases}$$

Em que $v_{HA}$ é a velocidade horizontal de A e $v_{HB}$ é a velocidade horizontal de B. Portanto, não podemos afirmar se a velocidade horizontal é a mesma para os dois projéteis.

De acordo com a figura, no ponto P as curvas possuem velocidades diferentes, logo, possuem velocidades tangenciais diferentes.

A aceleração centrípeta pode ser calculada por:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{\rho}$$

Em que $v$ é a velocidade tangencial no ponto e $\rho$ o raio da circunferência osculadora. Dado que as velocidades tangenciais são diferentes, nada podemos falar sobre a circunferência osculadora e, por isso, nada podemos falar sobre a igualdade das acelerações centrípetas.

De fato, a única alternativa correta é a alternativa D, pois a única força que atua no lançamento oblíquo em questão é a força peso. Logo, a força resultante sobre os projéteis é a força peso, resultando na aceleração resultante sobre cada projétil ser a aceleração da gravidade local.

Portanto, ambos projéteis têm a mesma aceleração resultante.

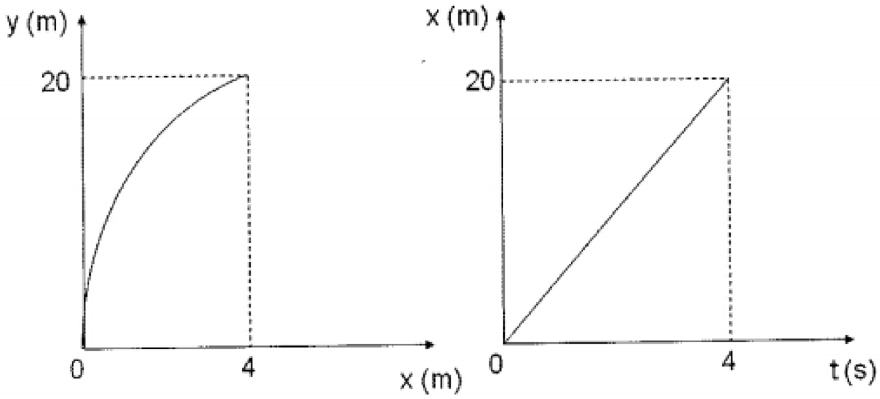
**Gabarito: D**

---

**15. (EN – 2013)**

Os gráficos abaixo foram obtidos da trajetória de um projétil, sendo $y$ a distância vertical e $x$ a distância horizontal percorrida pelo projétil. A componente vertical da velocidade, em m/s, do projétil no instante inicial vale:

Dado: $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$




a) zero

b) 5,0

c) 10

d) 17

e) 29

**Comentários**:

A velocidade horizontal do projétil é dada pela inclinação da reta no gráfico $x \times t$:

$$v_x = \frac{20}{4} = 5\ m/s$$

Para percorrer 4 metros em $x$, o projétil gasta um tempo igual a:

$$t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{4}{5} = 0{,}8\ s$$

Nesse mesmo intervalo de tempo, ele desloca 20 metros em $y$, que possui função horária dada por:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$\Delta y = v_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$20 = v_{0y} \cdot 0{,}8 - \frac{10 \cdot 0{,}8^2}{2}$$

$$\boxed{v_{0y} = 29\ m/s}$$

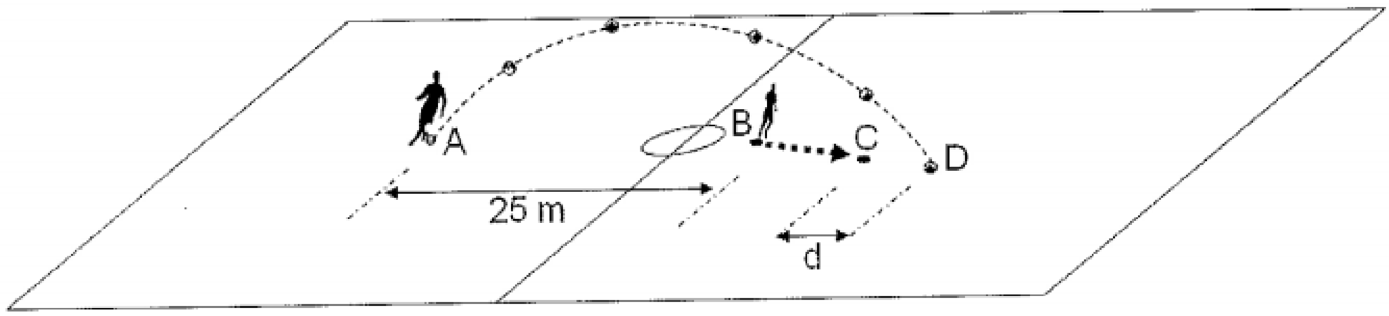
**Gabarito: E**

---

**16. (EN – 2013)**

Conforme mostra figura abaixo, em um jogo de futebol, no instante em que o jogador situado no ponto A faz um lançamento, o jogador situado no ponto B, que inicialmente estava parado, começa a correr com aceleração constante igual a 3,00 m/s², deslocando-se até o ponto C. Esse jogador chega em C no instante em que a bola toca o chão no ponto D. Todo o movimento se processa em um plano vertical, e a distância inicial entre A e B vale 25,0 m. Sabendo-se que a velocidade inicial da bola tem módulo igual a 20,0 m/s, e faz um ângulo de 45° com a horizontal, o valor da distância, d, entre os pontos C e D, em metros, é

Dado: $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$




a) 1,00

b) 3,00

c) 5,00

d) 12,0

e) 15,0

**Comentários**:

Durante o tempo de voo da bola, o jogador se desloca de B para C dado por:

$$BC = \frac{at^2}{2}$$

O tempo de voo da bola é dado por:

$$t_{voo} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sen(\theta)}{g}$$

$$t_{voo} = \frac{2 \cdot 20 \cdot \overbrace{sen(45°)}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{10}$$

$$\boxed{t_{voo} = 2\sqrt{2}\ s}$$

Portanto:

$$BC = \frac{3 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2}{2}$$

$$\boxed{BC = 12{,}0\ m}$$

Por outro lado, o alcance da bola é calculado por:

$$A = AD = \frac{v_0^2 \cdot sen(2\theta)}{g}$$

$$AD = \frac{20^2 \cdot sen(2 \cdot 45°)}{10}$$

$$\boxed{AD = 40{,}0\ m}$$

Portanto:

$$AD = AB + BC + CD$$

$$40 = 25 + 12 + CD$$

$$\boxed{CD = 3{,}00\ m}$$

**Gabarito: B**

---

**17. (EN – 2012)**

Um projétil é lançado contra um anteparo vertical situado a 20 m do ponto de lançamento. Despreze a resistência do ar. Se esse lançamento é feito com uma velocidade inicial de 20 m/s numa direção que faz um ângulo de 60° com a horizontal, a altura aproximada do ponto onde o projétil se choca com o anteparo, em metros, é

Dados: $tg(60°) \approx 1{,}7$; $g = 10\ m/s^2$.

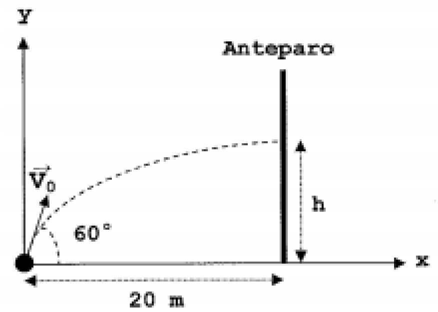
a) 7,0

b) 11

c) 14

d) 19

e) 23




**Comentários**:

Inicialmente, vamos calcular o tempo que o projétil leva para percorrer a distância horizontal de 20 metros:

$$\Delta x = v_x \cdot t$$

$$\Delta x = v_0 \cdot \cos 60° \cdot t$$

$$20 = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot t$$

$$\boxed{t = 2\ s}$$

O movimento em $y$ é um MRUV, com função horária dada por:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2}$$

$$y = 0 + 20 \cdot sen\ 60° \cdot t - \frac{10 \cdot t^2}{2}$$

Para $t = 2\ s$, temos:

$$y(2) = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 - 5 \cdot 2^2$$

$$y(2) = 20\sqrt{3} - 20$$

Como $tg(60°) = \sqrt{3}$ e o enunciado pediu para considerar $tg(60°) = 1{,}7$, então $\sqrt{3} = 1{,}7$. Portanto:

$$y(2) = 20 \cdot 1{,}7 - 20 = 20 \cdot (1{,}7 - 1) = 20 \cdot 0{,}7$$

$$\boxed{y(2) = 14\ m}$$

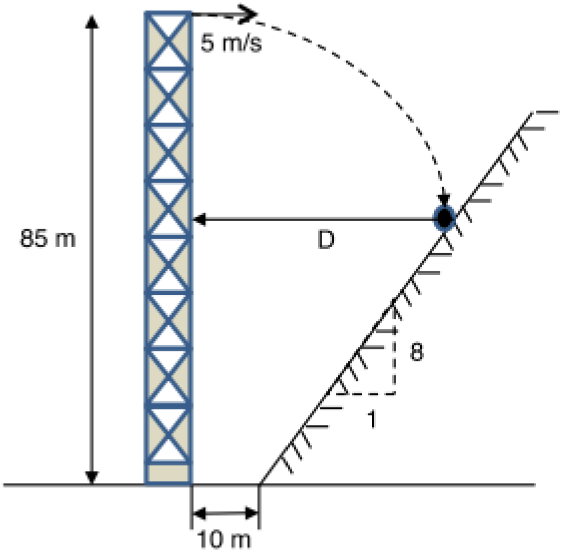
**Gabarito: C**

---

**18. (EFOMM – 2016)**

Uma bola é lançada do topo de uma torre de $85\ m$ de altura com uma velocidade horizontal de $5{,}0\ m/s$ (ver figura). A distância horizontal $D$, em metros, entre a torre e o ponto onde a bola atinge o barranco (plano inclinado), vale

Dado: $g = 10\ m/s^2$




a) 15

b) 17

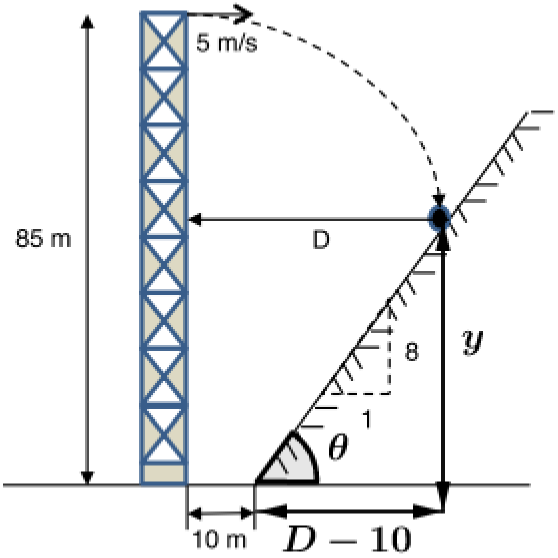
c) 20

d) 25

e) 28

**Comentários**:

De acordo com a figura, a bola descerá uma certa altura, dada pela geometria do problema:




$$tg(\theta) = \frac{8}{1} = \frac{y}{D-10}$$

$$y = 8 \cdot (D - 10)$$

Assim, a bola descerá:

$$H = 85 - y$$

$$H = 85 - 8 \cdot (D - 10)$$

Para descer essa altura, a bola gastará o seguinte tempo de queda:

$$t_q = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$t_q = \sqrt{\frac{2}{g}\left(85 - 8 \cdot (D - 10)\right)}$$

Entretanto, no eixo horizontal, a bola descreverá um MRU, com velocidade de 5,0 m/s e percorrerá a distância $D$. Então:

$$D = v_H \cdot t_q$$

$$D = 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{g}\left(85 - 8 \cdot (D - 10)\right)}$$

Considerando $g = 10\ m/s^2$, vem:

$$D = 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{10}\left(85 - 8 \cdot (D - 10)\right)}$$

$$D^2 = 5^2 \cdot \left[\frac{1}{5}\left(85 - 8 \cdot (D - 10)\right)\right]$$

$$D^2 = 5 \cdot 85 - 5 \cdot 8(D - 10)$$
$$D^2 + 40D = 825$$
$$D^2 + 2 \cdot 20 \cdot D + 20^2 = 825 + 20^2$$
$$(D + 20)^2 = 1225$$
$$(D + 20)^2 = 35^2$$
$$(D + 20)^2 - 35^2 = 0$$
$$(D + 20 - 35)(D + 20 + 35) = 0$$
$$\underbrace{(D + 20 - 35)}_{D=15}\underbrace{(D + 20 + 35)}_{D=-55} = 0$$

$D < 0$ não convém no nosso problema. Portanto:

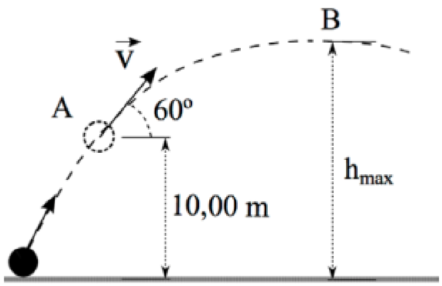
$$\boxed{D = 15\,m}$$

**Gabarito: A**

---

**19. (EFOMM – 2013/modificada)**

Uma bola é lançada obliquamente e, quando atinge a altura de $10\,m$ do solo, seu vetor velocidade faz um ângulo de 60° com a horizontal e possui uma componente vertical de módulo 5,0 $m/s$. Desprezando a resistência do ar, a altura máxima alcançada pela bola, em metros, é de




Dado: $g = 10\,m/s^2$.

a) 45/4

b) 50/4

c) 55/4

d) 60/4

e) 65/4

**Comentários**:

Podemos considerar o ponto A como origem do nosso lançamento e, assim, podemos determinar a altura máxima utilizando Torricelli.

$$v_y^2 = {v_0}_y^2 + 2 \cdot a_y \cdot \Delta y$$

$$0^2 = 5^2 + 2 \cdot (-10) \cdot (h_{máx} - 10)$$

$$h_{máx} - 10 = \frac{5^2}{2 \cdot 10}$$

$$h_{máx} = 10 + \frac{5}{4}$$

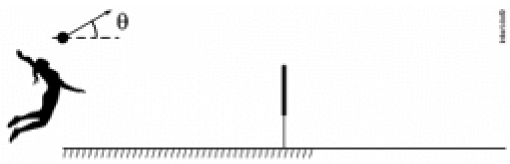
$$\boxed{h_{máx} = \frac{45}{4}\ m}$$

**Gabarito: A**

---

**20. (ITA-2018)**

Numa quadra de vôlei de $18m$ de comprimento, com rede de $2{,}24m$ de altura, um atleta solitária faz um saque com a bola bem em cima da linha de fundo, a $3{,}0m$ de altura, num ângulo $\theta$ de $15°$ com a horizontal, conforme a figura, com trajetória num plano perpendicular à rede. Desprezando o atrito, pode-se dizer que, com $12m/s$ de velocidade inicial, a bola $(g = 10m/s^2)$




a) bate na rede.
b) passa tangenciando a rede.
c) passa a rede e cai antes da linha de fundo.
d) passa a rede e cai na linha de fundo.
e) passa a rede e cai fora da quadra.

**Comentários:**

A equação da trajetória de um lançamento oblíquo é dada por:

$$y(x) = y_0 + x \tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$$

Substituindo os dados do problema:

$$y(x) = 3 + 0{,}27x - 0{,}037x^2$$

Primeiramente veremos se a bola ultrapassa a rede. Note que a rede está no meio da quadra em $x = 9\ m$, queremos saber a altura da bola quando passa na mesma vertical da rede:

$$y(9) = 3 + 0{,}27 \,.\, 9 - 0{,}037 \,.\, 81 = 2{,}433\ m$$

$$y(9) > 2{,}24\ m$$

E, portanto, a bola ultrapassa a rede. Para determinamos onde ela aterrissa devemos ver em qual $x$ sua altura é nula:

$$y(x_{fim}) = 0$$

$$3 + 0{,}27x - 0{,}037x^2 = 0$$

Essa equação tem solução positiva (a única relevante): $x_{fim} \approx 13{,}36\ m$

Como $x_{fim} < 18\ m$, podemos afirmar que a bola aterrissa dentro da quadra.

**Gabarito: C**

# 9. Considerações finais da aula

Chegamos ao final da nossa aula. Estudamos a última parte da Cinemática de uma partícula. Fomos mais afundo em composição de movimento e em lançamento oblíquo. Estude bem essa aula, pois o Colégio Naval pode surpreender com uma questão bem difícil ou simplesmente colocar um exercício qualitativa e não podemos perder nenhum ponto na prova.

Na nossa jornada até a aprovação vamos passar por diversos tópicos especiais, eles fazem parte da nossa trajetória, é inevitável. Muitas vezes é difícil a compreensão, são assuntos complexos, mas se esforce para entender o que for abordado no nosso material.

Conte comigo nessa caminhada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

# 10. Referências bibliográficas

[1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica. 1. ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.

[2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Selecionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.

[3] Brito, Renato. Fundamentos de Mecânica. 2 ed. VestSeller, 2010. 496p.

[4] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.

[5] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física 1. 9ª ed. Moderna. 490p.

[6] Resnick, Halliday. Fundamentos de Física. 8ª ed. LTC. 349p.

# 11. Versão da aula

| Versão da aula | Data de atualização |
| --- | --- |
| 1.0 | 28/01/2020 |