MATEMÁTICA

FRENTE: MATEMÁTICA IV

PROFESSOR(A): MARCELO MENDES

EAD – ITA/IME

AULAS 26 E 27

ASSUNTO: TRIÂNGULO DE PASCAL E BINÔMIO DE NEWTON - PARTE 1

Resumo Teórico

Triângulo de Pascal

Trata-se de uma tabela formado por números binomiais de tal forma que na linha **j** fiquem elementos da forma $\binom{j}{m}, 0 \le m \le j$, $j = 1, 2, ...$, e na coluna **i** fiquem elementos da forma $\binom{n}{j}$, $i = 0, 1, 2, ..., n$:

$$\begin{array}{lllll}
\binom{0}{0} & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\cdots\cdots & & & & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots \; \binom{n}{n}
\end{array}$$

Os coeficientes do desenvolvimento de $(x + y)^n$ são os elementos da n-ésima linha do Triângulo de Pascal.

A propriedade dos números binomiais que nos permite construir rapidamente o Triângulo de Pascal é a **Relação de Stifel** dada por $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Teoremas

1. Prove o Teorema das Linhas:
$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$

2. Prove o Teorema das Colunas:
$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\ldots+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}$

3. Prove o Teorema das Diagonais:
$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$

Exercícios de Fixação

01. Prove a Relação de Stifel $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

02. Qual é o valor da soma $S = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$?

03. Seja **n** um inteiro ímpar maior que 1. Prove que a sequência $\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ contém uma quantidade ímpar de números ímpares. (Sugestão: Teorema das Linhas)

04. Prove que $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]$ é ímpar, $\forall n \in \mathbb{N}$.

05. Seja $1 \le r \le n$ e considere todos os subconjuntos de **r** elementos do {1, 2, ..., n}. Cada um desses subconjuntos tem um menor elemento. Seja F(n, r) a média aritmética desses menores elementos. Prove que $F(n,r)=\frac{n+1}{r+1}$.

Exercícios Propostos

01. Qual é o maior dos números $a = 101^{50}$ e $b = 100^{50} + 99^{50}$?

02. Prove que $\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^n\right]$ é ímpar, $\forall n \in \mathbb{N}$.

03. Mostre que se $n \ge 2$ é par, os valores de $\binom{n}{p}$ para p = 0, 1, 2, ..., n vão crescendo, atingem um valor máximo para $p=\frac{n}{2}$ e depois vão decrescendo.

04. Mostre que se **n** é ímpar, os valores de $\binom{n}{p}$ para p = 0, 1, 2, ..., n vão crescendo, atingem um valor máximo para dois valores de **p** $\left(p=\frac{n-1}{2}, p=\frac{n+1}{2}\right)$ e, em seguida, vão decrescendo.

05. (ITA) Dadas as afirmações:

I. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n, n\in\mathbb{N}$;

II. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}, n\in\mathbb{N}$, k = 0, 1, 2, ..., n;

III. Existem mais possibilidades de serem escolhidos 44 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50 do que serem escolhidos 6 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50.

Conclui-se que:
A) todas são verdadeiras.
B) apenas I e II são verdadeiras.
C) apenas I é verdadeira.
D) apenas II é verdadeira.
E) apenas II e III são verdadeiras.

06. (ITA) Seja $n \geq 1$ um inteiro e $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Qual das afirmações abaixo é sempre verdadeira?
A) $(1 - \text{sen } x)^n \geq 1 - n \cdot \text{sen } x$
B) $(1 - \text{sen } x)^n \geq 1 - n \cdot \text{sen } x$, apenas para **n** par
C) $(1 - \text{sen } x)^n \leq 1 - n \cdot \text{sen } x$
D) $(1 - \text{sen } x)^n \leq 1 - n \cdot \cos x$
E) n.d.a.

07. (ITA) A condição para que $\binom{n}{k}$ seja o dobro de $\binom{n}{k-1}$ é:

A) n + 1 seja múltiplo de 3.
B) n seja divisível por 3.
C) n – 1 seja par.
D) n = 2k.
E) n.d.a.

08. A soma $S=\frac{1}{1!9!}+\frac{1}{3!7!}+\frac{1}{5!5!}+\frac{1}{7!3!}+\frac{1}{9!1!}$ pode ser escrita na forma $\frac{2^a}{b!}$, onde **a** e **b** são inteiros positivos. Encontre **a** e **b**.

09. (ITA) Seja $P(x) = a_0 + a_1{}^x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{100}x^{100}$, sendo $a_{100} = 1$, um polinômio divisível por $(x + 9)^{100}$. Nestas condições, temos:
A) $a_2 = 50 \cdot 99 \cdot 9^{98}$
B) $a_2=\frac{100!}{2!98!}$
C) $a_2=\frac{99!}{2!98!}$
D) $a_2=\frac{100!9^2}{2!98!}$
E) n.d.a.

10. Seja N = {1, 2, 3, ...}. O conjunto de todos os $n\in\mathbb{N}$, n > 2 e para os quais $\binom{n}{3}=\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{2}$ é o conjunto:

A) {3}
B) {3, 5}
C) {3, 4}
D) $\{n\in\mathbb{N};\ n > 3\}$
E) {3, 4, 5}

Gabarito

Exercícios de Fixação				
01	**02**	**03**	**04**	**05**
–	*	–	–	–

– Demonstração.

***02:** $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercícios Propostos				
01	**02**	**03**	**04**	**05**
*	–	–	–	B
06	**07**	**08**	**09**	**10**
A	E	*	A	D

– Demonstração.

***01:** a

08: a = 9, b = 10

Supervisor(a)/Diretor(a): Marcelo Pena – Autor(a): Marcelo Mendes
Dig.: Sofia – Rev.: Rita