DOM BOSCO
by Pearson

PRÉ-VESTIBULAR
# EXTENSIVO 2

MATERIAL DO PROFESSOR

Matemática

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

DOM BOSCO - SISTEMA DE ENSINO
PRÉ-VESTIBULAR 2
Matemática e suas tecnologias.


| | |
|---|---|
| **Vice-presidência de Educação** | Juliano Melo Costa |
| **Gerência editorial nacional** | Alexandre Mattioli |
| **Gerência de produto** | Silvana Afonso |
| **Autoria** | Vinícius Piloto Amaro Fernandes e Edilson Sousa |
| **Coordenação editorial** | Luiz Molina Luz |
| **Edição de conteúdo** | Paulo Roberto de Jesus |
| **Asistência editorial** | Felipe Gabriel |
| **Leitura crítica** | Fernando Manenti |
| **Preparação e revisão** | Igor Debiasi e Sérgio Nascimento |
| **Gerência de Design** | Cleber Figueira Carvalho |
| **Coordenação de Design** | Diogo Mecabo |
| **Edição de arte** | Alexandre Silva |
| **Coordenação de pesquisa e licenciamento** | Maiti Salla |
| **Pesquisa e licenciamento** | Cristiane Gameiro, Heraldo Colon, Andrea Bolanho, Sandra Sebastião, Shirlei Sebastião |
| **Ilustrações** | Carla Viana |
| **Cartografia** | Allmaps |
| **Projeto Gráfico** | Apis design integrado |
| **Diagramação** | Editorial 5 |
| **Capa** | Apis design integrado |
| **Imagem de capa** | mvp64/istock |
| **Produtor multimídia** | Cristian Neil Zaramella |
| **PCP** | George Baldim |



Av. Santa Marina, 1193 - Água Branca
São Paulo, SP – CEP 05036-001
Tel. (11) 3521-3500

www.pearson.com.br

# APRESENTAÇÃO

Um bom material didático voltado ao vestibular deve ser maior que um grupo de conteúdos a ser memorizado pelos alunos. A sociedade atual exige que nossos jovens, além de dominar conteúdos aprendidos ao longo da Educação Básica, conheçam a diversidade de contextos sociais, tecnológicos, ambientais e políticos. Desenvolver as habilidades a fim de obterem autonomia e entenderem criticamente a realidade e os acontecimentos que os cercam são critérios básicos para se ter sucesso no Ensino Superior.

O Enem e os principais vestibulares do país esperam que o aluno, ao final do Ensino Médio, seja capaz de dominar linguagens e seus códigos; construir argumentações consistentes; selecionar, organizar e interpretar dados para enfrentar situações-problema em diferentes áreas do conhecimento; e compreender fenômenos naturais, processos histórico-geográficos e de produção tecnológica.

O Pré-Vestibular do Sistema de Ensino Dom Bosco sempre se destacou no mercado editorial brasileiro como um material didático completo dentro de seu segmento educacional. A nova edição traz novidades, a fim de atender às sugestões apresentadas pelas escolas parceiras que participaram do Construindo Juntos – que é o programa realizado pela área de Educação da Pearson Brasil, para promover a troca de experiências, o compartilhamento de conhecimento e a participação dos parceiros no desenvolvimento dos materiais didáticos de suas marcas.

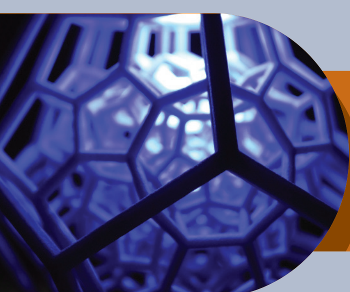
Assim, o Pré-Vestibular Extensivo Dom Bosco by Pearson foi elaborado por uma equipe de excelência, respaldada na qualidade acadêmica dos conhecimentos e na prática de sala de aula, abrangendo as quatro áreas de conhecimento com projeto editorial exclusivo e adequado às recentes mudanças educacionais do país.

O novo material envolve temáticas diversas, por meio do diálogo entre os conteúdos dos diferentes componentes curriculares de uma ou mais áreas do conhecimento, com propostas curriculares que contemplem as dimensões do trabalho, da ciência, da tecnologia e da cultura como eixos integradores entre os conhecimentos de distintas naturezas; o trabalho como princípio educativo; a pesquisa como princípio pedagógico; os direitos humanos como princípio norteador; e a sustentabilidade socioambiental como meta universal.

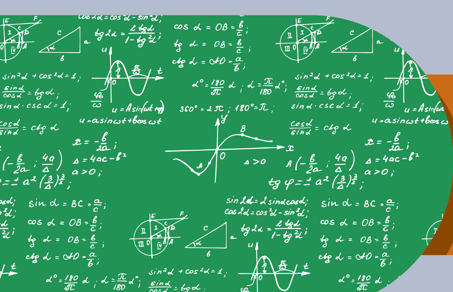
A coleção contempla todos os conteúdos exigidos no Enem e nos vestibulares de todo o país, organizados e estruturados em módulos, com desenvolvimento teórico associado a exemplos e exercícios resolvidos que facilitam a aprendizagem. Soma-se a isso, uma seleção refinada de questões selecionadas, quadro de respostas e roteiro de aula integrado a cada módulo.

# SUMÁRIO









WITTAYAYUT/SHUTTERSTOCK

# MATEMÁTICA 1

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

17

# FUNÇÃO COMPOSTA I

- Introdução
- Definição
- Notação

**HABILIDADES**

- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

## Introdução

Uma função é uma relação entre os elementos de um conjunto (chamado **domínio**) e um único elemento de outro conjunto (chamado **contradomínio)**.

Em um caso particular, pode haver duas funções **f** e **g**, em que o domínio da função **g** é o contradomínio da função **f**.

Por exemplo, em uma conta de telefone de uma família, cada pessoa faz em média 4 ligações por dia, sendo o custo de cada uma de aproximadamente R$ 0,70.

BRIANAJACKSON/ISTOCKPHOTO

Ao analisarmos matematicamente essa situação, temos que a quantidade de ligações (**y**) está em função da quantidade de pessoas **(x**) que utilizam o telefone diariamente. Como cada uma faz em média 4 ligações:

$$y = f(x) = 4x$$

Portanto, o preço das ligações (**z**) está em função da quantidade de ligações (**y**) feitas por dia. Como o preço de cada ligação é R$ 0,70:

$$z = g(y) = 0{,}70y.$$

Com base nessas informações, podemos relacionar diretamente o preço das ligações (**z**) ao número de pessoas (**x**) que utilizam o telefone nessa casa.

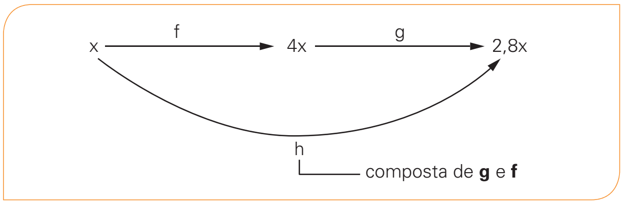
Para isso, devemos fazer uma composição entre as duas funções.

Considerando y = 4x e z = 0,70y, ao substituirmos 4x no lugar de **y** na função **z**, temos:

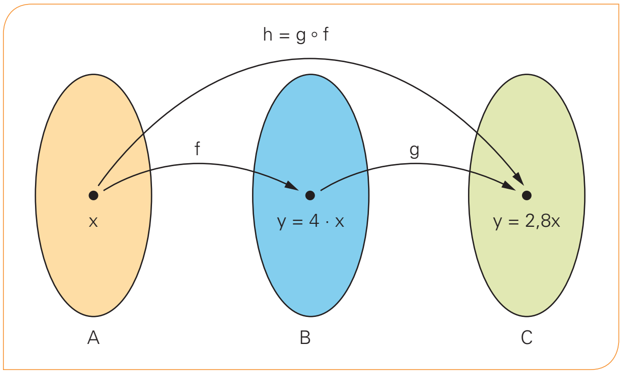
$$z = h(x) = 0{,}70 \cdot 4x,$$

Ou seja:

$$z = h(x) = 2{,}8 \cdot x.$$




Assim, obtemos a função **h**, chamada **função composta de g com** f, a qual pode ser identificada por $g \circ f$.




Portanto, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo $x \in D(f)$.

Também podemos obter quantas funções compostas forem necessárias. Se tivermos **n** funções **f**, podemos definir $f \circ f$, $f \circ f \circ f$ etc. Assim: $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n vezes).

Temos então que $f^{\circ}$ é a identidade da função em seu domínio.

$$f^1 = f$$
$$f^2 = f \circ f$$
$$\vdots$$
$$f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f \text{ (n vezes).}$$

Com isso, podemos estabelecer a relação

$$f^n \circ f^m = f^{n+m}.$$

## Definição

Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, denomina-se **função composta de g e f** a função $g \circ f: A \to C$, que é definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, em que $x \in A$.

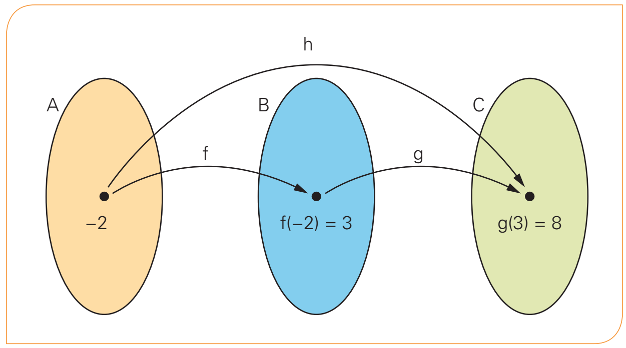
**Exemplo:**

Vamos considerar duas funções reais, definidas pelas sentenças $f(x) = 2x + 7$ e $g(x) = x^2 - 1$. Podemos determinar a imagem do elemento $-2$ usando a sentença $f(x)$ da seguinte maneira: $f(-2) = 2 \cdot (-2) + 7 = 3$.

Pelo uso da sentença $g(x)$, temos que $g(3) = 3^2 - 1 = 8$.

Assim: $g(3) = g[f(-2)] = 8$.

A função composta de **f** e **g** é uma sentença **h** capaz de diretamente conduzir o elemento $-2$ até a imagem 8.




Só podemos compor as funções **g** com **f** se o conjunto da imagem **f** for o domínio da função **g** ($Im(f) = D(g)$).

## NOTAÇÃO

A notação usual para indicarmos a composição da função $g(x)$ com a função $f(x)$ é $g \circ f(x)$ – lemos "**g** bola **f** na variável **x**" ou "**g** composto com **f** na variável **x**". No entanto, podemos encontrar a indicação apenas como $g \circ f$ ou $(g \circ f)(x)$. O importante é sabermos que:

$$g \circ f(x) = g[f(x)].$$

# ROTEIRO DE AULA

## FUNÇÃO COMPOSTA

### Definição

Dadas as funções f: $A \to B$ e g: $B \to C$, denominamos função composta de g e f a função $g \circ f =$ $g[f(x)]$, em que $x \in$ A

### Notação

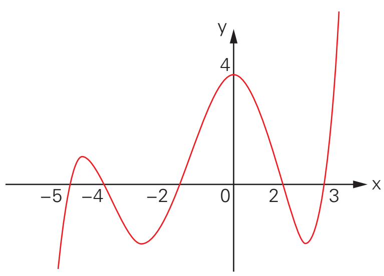
$g \circ f =$ $g[f(x)]$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Sistema Dom Bosco** – Sejam as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{x - 2}$. Calcule o valor de $g \circ f(-2)$.

Temos que: $g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g(4 - 1) = g(3) = \dfrac{1}{3 - 2} = 1$.

**2. UPF-SC** – Considere a função real g, cuja representação gráfica está parcialmente ilustrada na figura a seguir. Sendo $g \circ g$ a função composta de g com g, então o valor de $g \circ g(-2)$ é:




**a)** 0
**b)** 4
**c)** 2
**d)** $-2$
**e)** $-5$

Temos que $g \circ g(-2) = g(g(-2))$.
Mas $g(-2) = 0$.
Então, $g(g(-2)) = g(0) = 4$.

**3. Univag-MT** – Considere as funções $f(x) = 2^{x+k}$, com k um número real, e $g(x) = x^2 + 5x - 6$. Sabendo que $g(k) = 0$ e $f(-1) = k$, o valor de $g(f(0))$ é igual a

**a)** 8
**b)** 0
**c)** 4
**d)** 10
**e)** 6

Temos que $g(k) = k^2 + 5k - 6 = 0$.
Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos:
$k = 1$ ou $k = -6$
Como $f(-1) = 2^{-1+k} = k$, temos que $k = 1$.
Assim, $g(f(0)) = g(2^{0+1}) = g(2) = 4 + 10 - 6 = 8$.

**4. UECE-CE** – Sejam f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$. O valor da função composta $f \circ g$ no elemento $x = 2$ é igual a

**a)** 8
**b)** 2
**c)** 1
**d)** 4

Temos que $f \circ g(2) = f(g(2))$.
Mas $g(2) = 4 - 4 + 1 = 1$.
Então, $f(g(2)) = f(1) = 2^1 = 2$.

**5. Unicamp-SP** – Considere a função afim $f(x) = ax + b$ definida para todo número real x, onde a e b são números reais. Sabendo que $f(4) = 2$, podemos afirmar que $f(f(3) + f(5))$ é igual a

**a)** 5
**b)** 4
**c)** 3
**d)** 2

Como $f(4) = 2$, temos que $4a + b = 2$.
Assim, $f(3) = 3a + b$ e $f(5) = 5a + b$.
Logo, $f(3) + f(5) = 3a + b + 5a + b = 8a + 2b = 2 \cdot (4a + b) = 2 \cdot 2 = 4$.
Então, $f(f(3) + f(5)) = f(4) = 2$.

**6. UFPR** – O número N de caminhões produzidos em uma montadora durante um dia, após t horas de operação, é dado por $N(t) = 20 \cdot t - t^2$, sendo que $0 \le t \le 10$. Suponha que o custo C (em milhares de reais) para se produzir N caminhões seja dado por $C(N) = 50 + 30 \cdot N$.

**a)** Escreva o custo C como uma função do tempo t de operação da montadora.

**b)** Em que instante t, de um dia de produção, o custo alcançará o valor de 2 300 milhares de reais?

a) $C \circ N(t) = C(N(t)) = 50 + 30N(t) = 50 + 30(20t - t^2) = 50 + 600t - 30t^2$
$C(t) = -30t^2 + 600t + 50.$

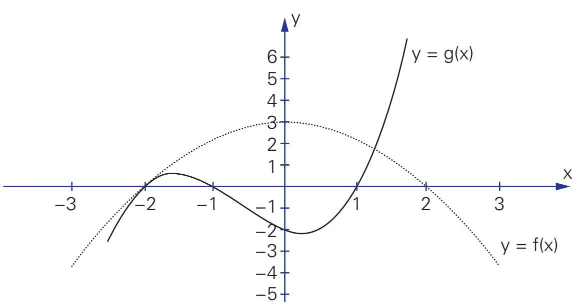
b) $C(t) = 2\,300 \rightarrow -30t^2 + 600t + 50 = 2\,300$
$-3t^2 + 60t + 5 = 230$
$-3t^2 + 60t - 225 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos: $t = 15$ ou $t = 5$

Como $0 \le t \le 10$, temos que $t = 5$ horas.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. UEG-GO** – O gráfico das funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$ é mostrado na figura a seguir.




De acordo com o gráfico, verifica-se que o valor de $g(f(2)) + f(g(0))$ é

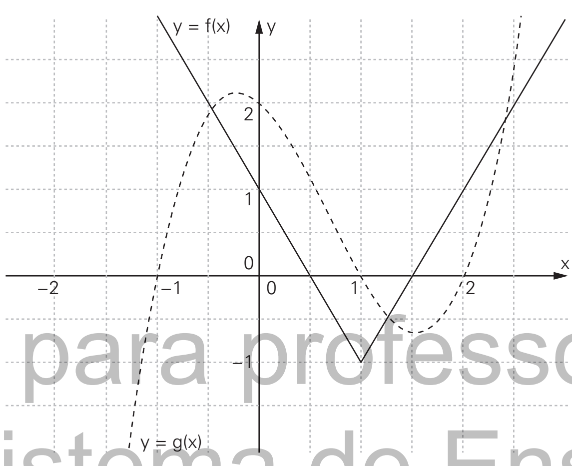
**a)** $-2$

**b)** 0

**c)** 1

**d)** 3

**8. Unicamp-SP** – Considere as funções f e g, cujos gráficos estão representados na figura abaixo.



O valor de f(g(1)) − g(f(1)) é igual a

**a)** 0 **b)** −1 **c)** 2 **d)** 1

**9. UEM-PR** – Sobre as funções f e g, definidas por $f(x) = 3^{-x}$ e $g(x) = |x - x^2|$, assinale o que for **correto**.

**01)** $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

**02)** $g\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$.

**04)** f é sobrejetora.

**08)** $g(f(0)) = f(g(0))$.

**16)** O gráfico da função g é uma parábola.

**10. Unicamp (adaptado)** – Considere as funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = x^3$, definidas para todo número real x. Calcule o número de soluções da equação $f(g(x)) = g(f(x))$.

**11. UEM-PR** – Em relação às funções reais f e g definidas por $f(x) = x^2 + x - 1$ e $g(x) = 2^x$ para todo x real, assinale o que for **correto**.

**01)** A função g é injetora.

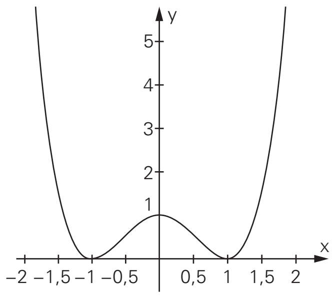
**02)** Para todo x real, $(g \circ f)(x) \geq \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

**04)** $(f \circ g)(x) = 2^{2x} + 2^x - 1$, para todo x real.

**08)** $f(-1) = -3$.

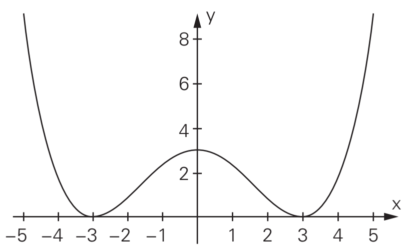
**16)** $g(-2) = -4$.

**12. UEG-GO** – Sabendo-se que o gráfico da função $y = f(x)$ é

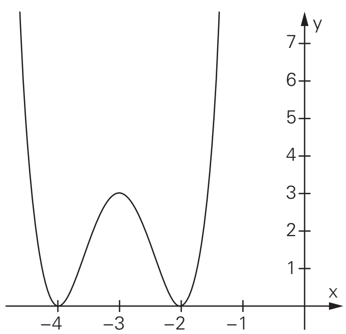



O gráfico que melhor representa a função $y = 3f(x - 3)$ é

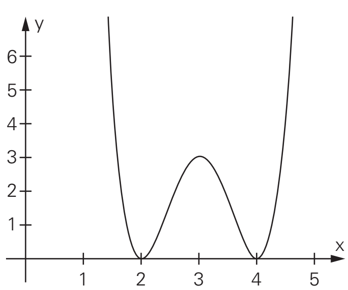
**a)**



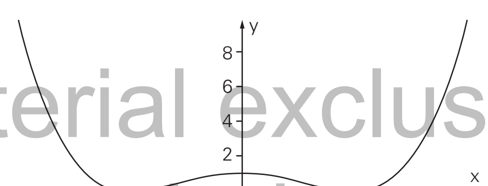

**b)**



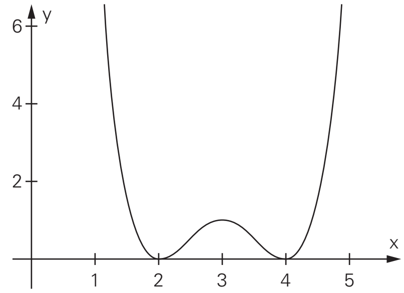

**c)**




**d)**




**e)**




**13. UEM-PR** – Acerca das funções reais f, g e h dadas, respectivamente, por $f(x) = x - 2$, $g(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 2}$ e $h(x) = \sqrt{2x^2 + 4}$, assinale o que for **correto**

**01)** $g \circ f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 4x + 6}$.

**02)** Existe x real para o qual $(f + h)(x) = 0$.

**04)** Para todo x real, $fg(x) = 1$.

**08)** Para todo x real, $gh(x) = (x - 2)\sqrt{2}$.

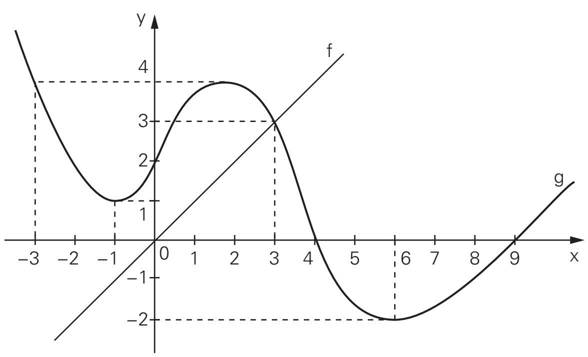
**16)** A função h possui inversa.

**14. Unicamp-SP** – Seja a um número real positivo e considere as funções afins $f(x) = ax + 3a$ e $g(x) = 9 - 2x$, definidas para todo número real x.

**a)** Encontre o número de soluções inteiras da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$.

**b)** Encontre o valor de a tal que $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo número real x.

**15. AFA** – Considere as funções reais $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujos gráficos estão representados abaixo.




Sobre essas funções, é correto afirmar que

**a)** $\forall x \in [0, 4], g(x) - f(x) > 0.$

**b)** $f(g(0)) - g(f(0)) > 0.$

**c)** $\dfrac{g(x)f(x)}{[f(x)]^2} \leq 0, \forall x \in ]-\infty, 0[ \cup [4, 9].$

**d)** $\forall x \in [0, 3]$ tem-se $g(x) \in [2, 3]$.

**16. Escola Naval-RJ** – Considere f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = \dfrac{1}{4x - 1}$ e $g(x) = 2x^2$. Qual é o domínio da função composta $(f \circ g)(x)$?

**a)** $\mathbb{R}$

**b)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, x \neq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

**c)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\dfrac{1}{4}\right\}$

**d)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{1}{4}, x \neq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

**e)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\dfrac{1}{4}, x \neq -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

**17. ITA** – Considere as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$, em que $\alpha$ é uma constante real positiva, e $g: [0, \infty[ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Determine o conjunto-solução da inequação $(g \circ f)(x) > (f \circ g)(x)$.

**18. PUC-Rio** C5-H21

Um fazendeiro comprou 5 lotes de terra iguais, pelo mesmo valor. Um ano depois ele revendeu os 5 lotes. Em dois deles, ele teve lucro de 20%; nos outros três, ele teve prejuízo de 10%. Qual foi o lucro ou prejuízo do fazendeiro na operação completa?

**a)** Lucro de 10%
**b)** Prejuízo de 5%
**c)** Não teve lucro nem prejuízo
**d)** Prejuízo de 8%
**e)** Lucro de 2%

**19. Sistema Dom Bosco** C5-H21

Em uma empresa são consumidos, em média, 15 copinhos de plástico por pessoa em um mês, e cada copinho custa R$ 0,05. Considerando **y** o número de copinhos, **p** o número de pessoas e **v** o valor gasto, a alternativa correspondente à expressão algébrica que relaciona corretamente o valor gasto em função do número de pessoas é

**a)** $v = 0,075 \cdot p$
**b)** $v = 0,75 \cdot p$
**c)** $v = 300 \cdot p$
**d)** $v = 3,00 \cdot p$
**e)** $v = 7,5 \cdot p$

**20. Sistema Dom Bosco** C5-H21

Uma fábrica de produtos químicos produz um composto que possui uma quantidade média de cloreto de sódio que pode ser descrita por $\mathbf{c(v) = 0,5v + 2}$ partes por milhão, em que v representa o volume do composto produzido. O volume total produzido por dia nessa fábrica é de $\mathbf{v(t) = 0,2t^2 + 5}$. A função que expressa a quantidade média de cloreto de sódio no composto em função do tempo é

**a)** $c(t) = 0,1t^2 + 1$
**b)** $c(t) = 0,02t^2$
**c)** $c(t) = 0,01t^2 + \frac{9}{2}$
**d)** $c(t) = 0,01^2 + 9$
**e)** $c(t) = 0,01t^2$

# FUNÇÃO COMPOSTA II

18

## Determinação de função composta

As funções compostas têm diversas aplicações no cotidiano. Neste módulo, apresentaremos algumas propriedades das funções compostas e como construí-las.

PHONGPHAN5922/ISTOCKPHOTO


Muitos gráficos no mercado financeiro são construídos com base em cálculos de composição de funções.

Para exemplificar a determinação da função composta, utilizamos as funções já apresentadas:

$$f(x) = 2x + 7 \text{ e } g(x) = x^2 - 1$$

Assim:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g[f(x)] = f(x)^2 - 1 = (2x + 7)^2 - 1 = \\ &= 4x^2 + 28x + 49 - 1 \\ g \circ f(x) &= 4x^2 + 28x + 48 \end{aligned}$$

Aproveitando as duas funções e tendo-as como exemplo de determinação da sentença que representa a composição delas, vamos determinar a sentença $f \circ g(x)$. Assim:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f[g(x)] = 2g(x) + 7 = 2(x^2 - 1) + 7 = \\ &= 2x^2 - 2 + 7 \\ f \circ g(x) &= 2x^2 + 5 \end{aligned}$$

- Determinação de função composta

**HABILIDADES**

- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Se houver uma terceira função **h**, dada por $h(x) = x + 1$, podemos calcular a composta:

$$f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x))) = f(g(x + 1)) =$$
$$= f((x + 1)^2 - 1) = f(x^2 + 2x + 1 - 1) = f(x^2 + 2x) =$$
$$= 2(x^2 + 2x) + 7 = 2x^2 + 4x + 7$$

Ou, como $f \circ g(x) = 2x^2 + 5$, temos:

$$f \circ g(h(x)) = 2(x + 1)^2 + 5 = 2x^2 + 4x + 2 + 5 =$$
$$= 2x^2 + 4x + 7.$$

É importante termos atenção ao domínio e ao contradomínio das funções.

Comparando os dois exemplos de composição de funções, notamos que ela não admite a **propriedade comutativa**. Ou seja, em geral:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Na área de programação, são utilizadas funções compostas em diversas aplicações, com base em cálculos complexos. Por meio delas, podemos criar um programa que consiga calcular anos bissextos ou identificar dados em planilhas, por exemplo. Podemos, inclusive, traçar trajetórias de asteroides no Sistema Solar. Além disso, uma das aplicações mais comuns das funções compostas serve para decompor números (fatoração).

É importante ressaltar que não existe uma regra específica para o estudo do gráfico de uma função composta. Então, para resolver situações-problema relacionadas a ele, precisamos encontrar a função composta e, em seguida, analisar seu gráfico.


BELYAEVSKIY/ISTOCKPHOTO

Linhas de código em um computador.

## EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**1. Cefet-PR** – Se $f(x) = x^5$ e $g(x) = x - 1$, a função composta $f[g(x)]$, será igual a:

**a)** $x^5 + x - 1$
**b)** $x^6 - x^5$
**c)** $x^6 - 5x^5 + 10x^4 - 10x^3 + 5x^2 - 5x + 1$
**d)** $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$
**e)** $x^5 - 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 - 5x - 1$

**Resolução:**

Fazendo f composta em g, temos:

$f[g(x)] = (x - 1)^5$

Assim:

$f[g(x)] = (x - 1)^2 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x - 1)$

$f[g(x)] = (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1) \cdot (x - 1)$

$f[g(x)] = (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1)$

$f[g(x)] = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

# ROTEIRO DE AULA

## FUNÇÃO COMPOSTA

Em geral, g ∘ f ___≠___ f ∘ g(x)

Só é possível compor as funções g com f se o ___conjunto imagem___ f for o ___domínio___ da função g

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. UVA-RF** – Sejam as funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \frac{1}{x}$. Então, $f(g(-1))$ é igual a:

**a)** –1
**b)** 0
**c)** 1
**d)** 2

Temos que $g(-1) = \frac{1}{-1} = -1$, $f(g(-1)) = f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$.

**2. Unifenas-MG** – Sejam $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = 2x$, onde $x \in \mathbb{R}$. Encontre $g \circ f(5)$.

**a)** 56
**b)** 65
**c)** 70
**d)** 75
**e)** 87

Temos que $g \circ f(5) = g(f(5)) = g(25 + 3) = g(28) = 2 \cdot 28 = 56$.

**3. UPF-RS** C5-H21

Um estudo das condições ambientais de um município do Rio Grande do Sul indica que a taxa média de monóxido de carbono (CO) no ar será de $C(P) = 0{,}2P - 1$ partes por milhão (ppm) quando a população for P milhares de habitantes. Sabe-se que em t anos, a população desse município será dada pela relação $P(t) = 50 + 0{,}5t^2$. O nível de monóxido de carbono, em função do tempo t, é dado por

**a)** $C(t) = 9 + 0{,}01t^2$
**b)** $C(t) = 0{,}2(49 + 0{,}05t^2)$
**c)** $C(t) = 9 + 0{,}05t^2$
**d)** $C(t) = 0{,}1(1 + 0{,}05t^2) - 1$
**e)** $C(t) = 10 + 0{,}951t^2$

De acordo com o enunciado, temos:
$C(P) = 0{,}2P - 1$
$P(t) = 50 + 0{,}5t^2$
Assim:
$C(t) = 0{,}2 \cdot (49 + 0{,}05t^2)$
$C(t) = 10 + 0{,}01t^2 - 1$
$(t) = 9 + 0{,}01t^2$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos

**4. Unitau-SP** – Sabendo-se que $f(x) = x^2$, $g(x) = 3 \cdot \text{sen}(x)$ e $h(x) = x^5$ é correto afirmar que

**a)** f(x) é uma função ímpar.
**b)** g(x) é uma função par.
**c)** $f(x) \cdot g(x)$ resulta em uma função par.
**d)** $h(x) + g(x)$ resulta em uma função par.
**e)** $g(x) \cdot h(x)$ resulta em uma função par.

a) f(x) é uma função ímpar.
$f(-x) = x^2 = f(x)$, f é par.
b) g(x) é uma função par.
$g(-x) = 3 \cdot \text{sen}(-x) = -3 \cdot \text{sen}(x) = -g(x)$,
Então, g é ímpar.
c) $f(x) \cdot g(x)$ resulta em uma função par.
$f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot 3 \cdot \text{sen}(x)$
$f(-x)g(-x) = -3x^2 \cdot \text{sen}(x) = -f(x)g(x)$,
Função ímpar.
d) $h(x) + g(x)$ resulta em uma função par.
$h(x) + g(x) = x^5 + 3 \cdot \text{sen}(x)$
$h(-x) + g(-x) = -x^5 + 3 \cdot (-\text{sen}(x)) = -x^5 - 3 \cdot \text{sen}(x) = -h(x) - g(x)$,
Função ímpar.
e) $g(x) \cdot h(x)$ resulta em uma função par.
$g(x) \cdot h(x) = 3 \cdot \text{sen}(x) \cdot x^5$
$g(-x) \cdot h(-x) = -3 \cdot \text{sen}(x) \cdot (-x^5)$
$= x^5 \cdot 3 \cdot \text{sen}(x) = g(x)h(x)$,
Função par.

**5. PUC-SP** – Considere as funções $f(x) = \frac{x^2}{2} + b$ e $g(x) = x + k$, com b e k, números reais. Sabendo que $f(g(-5)) = g(-2)$ e que $g(f(-2)) = 12$, o valor de $f(-4)$ é igual a

**a)** $g(g(0))$
**b)** $f(g(-3))$
**c)** $2f(2)$
**d)** $5 + g(1)$

Temos que $g(-5) = k - 5$. Logo, $f(g(-5)) = f(k-5) = \frac{(k-5)^2}{2} + b = k - 2 = g(-2)$ (1).

Temos também que $g(f(-2)) = g\left(\frac{4}{2}+b\right) = g(b + 2) = b + k + 2 = 12$.

Assim, $b + k = 10 \rightarrow b = 10 - k$.
Substituindo na equação (1):

$$\frac{(k-5)^2}{2} + 10 - k = k - 2$$

$$\frac{(k-5)^2}{2} = 2k - 12$$

$k^2 - 10k + 25 = 4k - 24$
$k^2 - 14k + 49 = 0$
Resolvendo a equação, temos: $k = 7 \rightarrow b = 3$

Então, $f(-4) = \frac{16}{2} + 3 = 11 = f(g(-3))$.

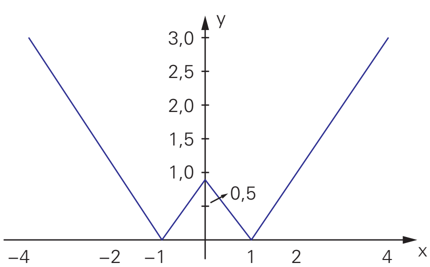
**6. Mackenzie-SP** – Sejam funções f e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2 - 4x + 10$ e $g(x) = -5x + 20$.
Qual á o valor de $\frac{(f(4))^2 - g(f(4))}{f(0) - g(f(0))}$?

Calculando as funções, temos:
$(f(4))^2 = (4^2 - 4 \cdot 4 + 10)^2 \rightarrow 10^2 = 100$
$g(f(4)) = -5 \cdot (10) + 20 = -50 + 20 = -30$
$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 10 = 10$
$g(f(0)) = -5 \cdot 10 + 20 = -50 + 20 = -30$
Assim:

$$\frac{(f(4))^2 - g(f(4))}{f(0) - g(f(0))} = \frac{100 + 30}{10 + 30} = \frac{130}{40} = \frac{13}{4}$$

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. PUC-PR** – Considere os seguintes dados. Pode-se dizer que quando duas variáveis x e y são tais que a cada valor de x corresponde um único valor de y, segundo uma lei matemática, diz-se que y é função de x. Considere uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ que é representada pelo gráfico ao lado.




Analisando o gráfico, julgue as proposições a seguir.

**I.** f é ímpar.
**II.** f é injetora.
**III.** A lei matemática de f é $f(x) = ||x| - 1|$.
**IV.** f é crescente se, e só se, $x > 1$.
**V.** $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.

**a)** Somente II é correta.
**b)** Somente I é correta.
**c)** Somente III e V são corretas.
**d)** Todas as proposições são corretas.
**e)** Todas as proposições são falsas.

**8. UFGD-MS** – Sendo $f(x) = ax + b$, para quais valores de a e b tem-se $(f \circ f)(x) = x - 3$?

**a)** $a = 1$ e $b = -\dfrac{3}{2}$

**b)** $a = -1$ e $b = 0$

**c)** $a = -1$ e $b = -\dfrac{3}{2}$

**d)** $a = 1$ e $b = -1$

**e)** $a = 0$ e $b = -1$

**9. UEM-PR** – Considerando as propriedades de funções, assinale o que for correto.

**01)** O gráfico de uma função afim, cujos domínio e contradomínio são $\mathbb{R}$, é uma reta.

**02)** Sejam A um conjunto formado por 10 crianças e B um conjunto formado por 20 adultos, sendo os adultos as 10 mães e os 10 pais destas crianças. Então, a lei que associa cada criança a seu casal de pais é uma função de A em B.

**04)** Se f e g são funções reais, sendo f crescente e g decrescente, então $f - g$ é uma função constante.

**08)** Quaisquer que sejam os conjuntos distintos A e B, e funções $f: A \to B$ e $g: A \to B$ é possível definir a função $g \circ f: A \to B$.

**16)** Uma função $f: A \to B$ é injetora se todo elemento de $Y \in B$ possui um correspondente $x \in A$ de tal forma que $f(x) = y$.

**10. Sistema Dom Bosco** – Sejam as funções $f(x) = 4x^2 + 5$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ e $h(x) = x - 4$, com $x \in$ . Calcule o valor de $f \circ g \circ h(6)$.

**11. UEM-PR** – Considere as funções $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: B \to \mathbb{R}$ sendo A o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde $f(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x}}$ está definida, e B o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde $g(x) = \cos(x)$ está definida. A partir desses dados, assinale o que for correto.

**01)** O único valor real onde f não está definida é 0.

**02)** O número real $-1$ pertence à imagem de f.

**04)** É possível definir $g \circ f$ em todo domínio de f.

**08)** A inversa $f^{-1}: Im(f) \to Dom(f)$ é dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{y^2 - 1}$.

**16)** A composta $f \circ g$ não está definida para pontos da forma $2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

**12. Unioeste-PR** – Considere as funções $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$. É correto afirmar que

**a)** $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

**b)** o gráfico de $f(g(x))$ não intercepta o gráfico de $g(f(x))$.

**c)** $g(f(x)) = 8x^2 + 20x + 13$.

**d)** $f(g(x)) = 2x^2 + 4$.

**e)** o domínio da função $h(x) = f(g(x))$ é o conjunto $(0, \infty)$.

**13. Acafe** – Considere as informações apresentadas a seguir sobre a função de variáveis reais, definida por:

$$f(x)\begin{cases} x-1, & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2+x+6, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

**I.** A soma das raízes de $f(x)$ é igual a 4.

**II.** Sendo $N = f(f(f(3))) + f(f(f(0)))$, então, o valor de N é igual a $-5$.

**III.** A função $f(x)$ é decrescente para $x < 1$.

**IV.** A função $f(x) > 0$, para $-2 < x < 3$.

**V.** A imagem de $f(x)$ é dada por $Im = ]-\infty, 6[$.

Todas as afirmações corretas estão em:

**a)** II – IV

**b)** II – III – V

**c)** I – III – IV – V

**d)** I – II – V

**14. Mackenzie-SP (adaptado)** – Se $f(x) = 3^{1+x}$ e $g(x) = \text{sen } x$ são duas funções definidas em $\mathbb{R}$, então calcule os conjuntos imagem de $f \circ g$ e $g \circ f$.

**15. Unicamp** – Seja a função h(x) definida para todo número real x por

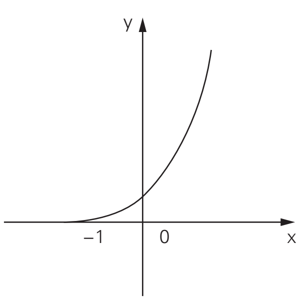
$$h(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & \text{se} \quad x \leq 1, \\ \sqrt{x-1} & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

Então, $h\big(h(h(0))\big)$ é igual a

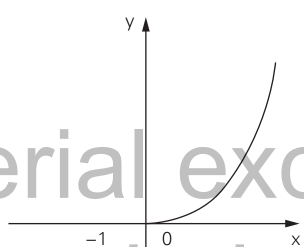
**a)** 0.
**b)** 2.
**c)** 4.
**d)** 8.

**16. Cefet** – Sendo $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1}$ definida em $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ e $g(x) = x^2$ definida em $\mathbb{R}_+$, o gráfico que representa a função $(g \circ f)(x)$ é:

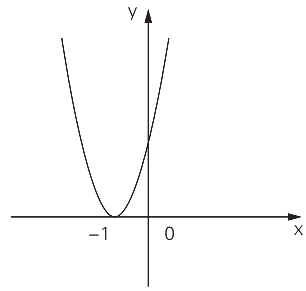
**a)**



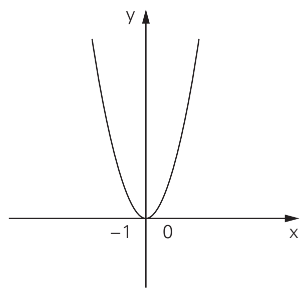

**b)**




**c)**



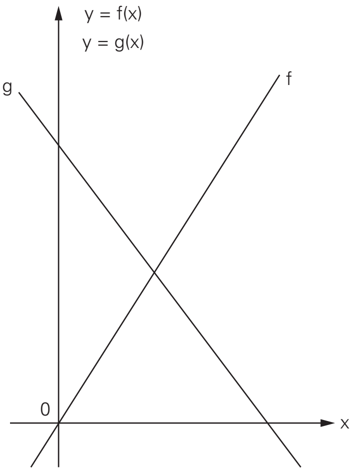

**d)**




**17. UEFS-BA (adaptado)** – Se $f(x) = x^2$ e g(x) é uma função bijetora satisfazendo as relações $f(g(u)) = g(u)$, $g(f(u)) = g(1)$ e $g^{-1}(1) = 0$, então calcule o valor de $u \cdot g(u)$.

**18. Famerp-SP (adaptado)** C6-H24

A figura mostra os gráficos de duas funções polinomiais do 1º grau, f e g, num mesmo sistema cartesiano ortogonal, sendo que o gráfico de f passa pela origem.




Sabendo-se que $f(5) = g(5) = \frac{25}{3}$ e $g(f(0)) = 14$, é correto afirmar que g(6) é igual a

**a)** $\frac{36}{5}$

**b)** 7

**c)** $\frac{37}{5}$

**d)** $\frac{34}{5}$

**e)** $\frac{32}{5}$

**19. Unifor-CE** C5-H22

Os ambientalistas estimam que, em uma cidade, a concentração média diária de monóxido de carbono no ar será $C(p) = 0{,}5p + 1$ parte por milhão quando a cidade tiver uma população de p mil habitantes. Um estudo demográfico indica que a população da cidade dentro de t anos será $p(t) = 10 + 0{,}1 \cdot t^2$ mil habitantes. Daqui a quanto tempo a concentração de monóxido de carbono atingirá o valor de 6,8 partes por milhão?

**a)** 1 ano

**b)** 2 anos

**c)** 3 anos

**d)** 4 anos

**20. UFSM-RS** C5-H22

Os praticantes de exercícios físicos se preocupam com o conforto dos calçados utilizados em cada modalidade. O mais comum é o tênis, que é utilizado em corridas, caminhadas, etc. A numeração para esses calçados é diferente em vários países, porém existe uma forma para converter essa numeração de acordo com os tamanhos.

Assim, a função $g(x) = \frac{x}{6}$ converte a numeração dos tênis fabricados no Brasil para a dos tênis fabricados nos Estados Unidos, e a função $f(x) = 40x + 1$ converte a numeração dos tênis fabricados nos Estados Unidos para a dos tênis fabricados na Coreia. A função h que converte a numeração dos tênis brasileiros para a dos tênis coreanos é

**a)** $h(x) = \frac{20}{3}x + \frac{1}{6}$.

**b)** $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$.

**c)** $h(x) = \frac{20}{3}x + 1$.

**d)** $h(x) = \frac{20x + 1}{3}$.

**e)** $h(x) = \frac{2x + 1}{3}$.

19

# FUNÇÃO MODULAR I

- Introdução
- Módulo de um número real

**HABILIDADES**

- Identificar representações algébricas que expressam a relação entre grandezas.
- Interpretar gráficos cartesianos que representam relações entre grandezas.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

## Introdução

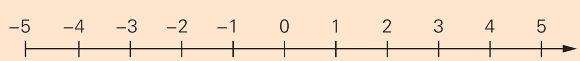
Em muitas situações do cotidiano, nós nos deparamos com o conceito de distância entre pontos. Podem ser pontos de um mapa, pontos em um gráfico etc. Para esse tipo de análise, o conceito de valor absoluto é essencial. Por exemplo, não podemos calcular a distância entre duas cidades e obter um resultado negativo.

EKAPHON MANEECHOT/SHUTTERSTOCK

O uso de GPS é cada vez mais comum no dia a dia de motoristas que transitam, principalmente, em grandes cidades.

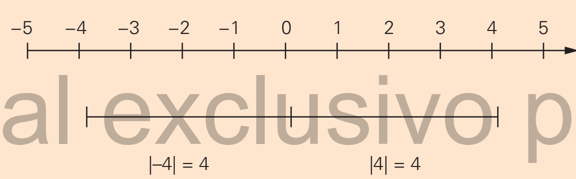
## Módulo de um número real

O módulo de um número real é igual à distância do ponto que o representa até o ponto que representa a origem, ou seja, considerando-o na reta real orientada, o zero. Denota-se o módulo de x por $|x|$.




**Exemplos**

- $|4| = 4$, pois a distância entre a origem e o 4, na reta real, é 4.
- $|-4| = 4$, porque a distância entre a origem e o $-4$, na reta real, é 4.




- $|84| = 84$, pois a distância entre a origem e o 84, na reta real, é 84.
- $|-84| = 84$, porque a distância entre a origem e o $-84$, na reta real, é 84.

## DEFINIÇÃO

A distância de um número real não negativo até o zero é dada pelo próprio número. E a distância de um número real negativo até o zero é dada pelo oposto do número.

Vamos supor um número x na reta real orientada. Temos, então:

$|x| = x$, se $x \geq 0$
$|x| = -x$, se $x < 0$

Em outras palavras, se $a \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que:

$a > 0 \rightarrow |a| = a$
$a = 0 \rightarrow |a| = 0$
$a < 0 \rightarrow |a| = -a$

**Exemplos**

Calcule o valor de:

- $|1 - \sqrt{2}|$
  Como $1 - \sqrt{2} < 0$, temos que $|1 - \sqrt{2}| =$
  $= -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$.
- $|\sqrt{2} - 1|$
  Como $\sqrt{2} - 1 > 0$, temos que $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$.

## PROPRIEDADES IMPORTANTES

**I.** O módulo de um número é igual ao módulo de seu simétrico: $|x| = |-x|$.

**II.** O módulo do quadrado de um número é igual ao quadrado desse número: $|x^2| = x^2$.

**III.** O módulo da diferença de dois números é comutativo: $|a - b| = |b - a|$.

**IV.** O módulo de um número é igual à raiz quadrada de seu quadrado: $|x| = \sqrt{x^2}$.

**Exemplos**

- $|2| = 2 = |-2|$
- $|2^2| = |4| = 4 = 2^2$
- $|2 - 1| = |1| = 1 = |-1| = |1 - 2|$
- $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$

No caso de raízes de índice ímpar, temos:
$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

Portanto, no caso de raiz de índice ímpar, para $x \in \mathbb{R}$, temos: $\sqrt[k]{x^k} = x, \forall x, k \in \mathbb{R}$.

### EXERCÍCIO RESOLVIDO

**1. UERJ (adaptado)** – O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a seguinte equação:

$$V = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|, t \in \mathbb{R}_+$$

Nela, **V** é o volume medido em **m³** após **t** horas, contadas a partir de 8 h de uma manhã. Assinale a alternativa que representa os horários inicial e final dessa manhã em que o volume permanece constante.

**a)** Exatamente 9h
**b)** Entre 9 e 10h
**c)** Exatamente 10h
**d)** Entre 10 e 11h
**e)** Exatamente 11h

**Resolução:**

Para $t < 2$

$V = 10 - (4 - 2t) - (6 - 2t)$

$V = 10 - 4 + 2t - 6 + 2t$

$V = 4t$

Para $2 \leq t \leq 3$

$V = 10 - (2t - 4) - (2t - 6)$

$V = 10 - 2t + 4 + 2t - 6$

$V = 8$

Para $t \geq 3$

$V = 10 - (2t - 4) - (2t - 6)$

$V = 10 - 2t + 4 + 2t - 6$

$V = 20 - 4t$

V será constante igual a 8 para

$t = 2$ ou $t = 3$

$t = 2 + 8 = 10h$

$t = 3 + 8 = 11h$

Portanto, V será constante entre 10 e 11 horas.

# ROTEIRO DE AULA

## Função modular

### Módulo

A distância de um número real não negativo até zero é dada pelo próprio número.
E a distância de um número real negativo até o zero é dada pelo oposto de um número.

$|x| = x$, se $x \geq 0$

$|x| = -x$, se $x < 0$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Sistema Dom Bosco** – Calcule os módulos.

**a)** $|\sqrt{5} - 2|$

**b)** $\left|\frac{\pi}{2} - 2\right|$

**c)** $|0|$

a) Como $\sqrt{5} - 2 > 0$, temos que $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$.

b) Como $\frac{\pi}{2} - 2 < 0$, temos que $\left|\frac{\pi}{2} - 2\right| = 2 - \frac{\pi}{2}$.

c) Como $0 \geq 0$, temos que $|0| = 0$.

**2. PUC-RS** – Se $|4x - 8| > 16$, então

**a)** $x > 6$

**b)** $x > 6$ e $x < -2$

**c)** $x > 6$ ou $x < 2$

**d)** $x > 2$ ou $x < -6$

**e)** $x > 6$ ou $x < -2$

Temos que $|4x - 8| > 16$.
Se $4x - 8 \geq 0$, temos:
$4x - 8 > 16$
$x > 6$
Se $4x - 8 < 0$, temos:
$-4x + 8 > 16$
$-x > 2$
Logo, $x < -2$.

**3. Sistema Dom Bosco** – Os valores de $|\sqrt{3} - 2|$, $|-1|$ e $|\pi - 3|$ são, respectivamente:

**a)** $2 - \sqrt{3}$, $-1$ e $\pi - 3$

**b)** $\sqrt{3} - 2$, $1$ e $3 - \pi$

**c)** $2 - \sqrt{3}$, $1$ e $\pi - 3$

**d)** $\sqrt{3} - 2$, $1$ e $3 - \pi$

Como $\sqrt{3} - 2 < 0$, $-1 < 0$ e $\pi - 3 > 0$, então $|\sqrt{3} - 2|$, $|-1|$ e $|\pi - 3|$ são iguais a $2 - \sqrt{3}$, $1$ e $\pi - 3$, respectivamente.

**4. PUC-RS** – A expressão $|x - a| < 16$ também pode ser representada por

**a)** $x - a < 16$

**b)** $x + a > 16$

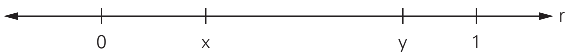
**c)** $-a - 16 < x < a + 16$

**d)** $-16 + a < x < a + 16$

**e)** $x - a < -16$ ou $x - a > 0$

Se $x - a \geq 0$, $x - a < 16$
Se $x - a < 0$, $a - x < 16 \rightarrow x - a > -16$
Ou seja, $-16 < x - a < 16$
$a - 16 < x < a + 16$

**5. PUC-SP** – A figura abaixo apresenta uma reta real na qual estão assinalados os números reais 0, x, y e 1.




Sendo x e y os números assinalados, considere as seguintes afirmações:

(1) $x > x \cdot y$

(2) $y^2 - x^2 > 0$

(3) $\frac{y}{x} < \frac{x}{y}$

Relativamente a essas afirmações, é correto afirmar que

**a)** as três são verdadeiras.
**b)** apenas duas são verdadeiras.
**c)** apenas (1) é verdadeira.
**d)** apenas (2) é verdadeira.
**e)** apenas (3) é verdadeira.

(1) $x > x \cdot y$
Verdadeiro. Como $x \neq 0$, $x > x \cdot y \rightarrow 1 > y \rightarrow y < 1$.

(2) $y^2 - x^2 > 0$
Verdadeiro, pois $y^2 - x^2 > 0 \rightarrow y^2 > x^2 \rightarrow \sqrt{y^2} > \sqrt{x^2} \rightarrow |y| = |x|$.

(3) $\frac{y}{x} < \frac{x}{y}$

Falso, pois $\frac{y}{x} < \frac{x}{y} \rightarrow y^2 < x^2 \rightarrow \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2} \rightarrow |y| < |x|$ (absurdo)

Como os números (1) e (2) são verdadeiros, há duas afirmações verdadeiras.

**6. Sistema Dom Bosco** – Encontre as soluções inteiras da equação $|x - 3| \geq 5$.

Temos que, se $x - 3 \geq 0$, então $x - 3 \geq 5 \rightarrow x \geq 8$.
Se $x - 3 < 0$, então $3 - x < 5 \rightarrow -x < 2 \rightarrow x > -2$.
Assim, $-2 < x < 8$.
Portanto, $x = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. PUC-PR** – Considere x e y números reais, analise as afirmações a seguir e assinale a alternativa que indica aquelas que são sempre corretas.

**I.** Se $|x| = -x$ então $x < 0$.

**II.** Se $0 < x < y$ então $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

**III.** Se $\frac{2}{x} > 1$ então $x < 2$.

**IV.** Se $x > y$ então $-x > -y$

**a)** Somente II e IV.
**b)** Somente I e II.
**c)** Somente I e III.
**d)** I, II, III e IV.
**e)** Somente I e IV.

**8. PUC-Minas (adaptado)** – Certo estudante do Ensino Médio, após fazer um curso sobre inequações, escreveu as duas afirmativas a seguir:

**I.** A solução da desigualdade $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ é o conjunto $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

**II.** Se $|x + 2| < 2$, então $x \in ]-3, -1[$.

O número de afirmativas corretas é:

**a)** Nenhuma
**b)** Somente I
**c)** Somente II
**d)** I e II

**9. Unitau-SP** – O conjunto de todos os valores de x pertencentes aos números reais, para os quais $|3x - 2| > x$, é

**a)** $\left\{\frac{1}{2} < x < 1\right\}$
**b)** $\left\{x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 1\right\}$
**c)** $\left\{\frac{2}{3} < x < 1\right\}$
**d)** $\left\{x < \frac{2}{3} \text{ou} x > 1\right\}$
**e)** $\left\{x < \frac{2}{3}\right\}$

**10. Sistema Dom Bosco** – Encontre as soluções da equação $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$.

**11. Unit-AL** – Sabendo-se que $x_1$ e $x_2$ são números reais distintos que satisfazem a equação $|3x + 10| = |5x + 2|$, é correto afirmar que o valor de $|x_1 - x_2|$ é

**a)** $\frac{7}{2}$
**b)** 4
**c)** $\frac{11}{2}$
**d)** 6
**e)** $\frac{15}{12}$

**12. Unitau-SP (adaptado)** – Sendo x um número real, encontre o conjunto solução da inequação $||4x - 6| - 2| < 3$ é

**13. Insper-SP** – A tabela a seguir mostra os símbolos normalmente usados para representar alguns conectivos lógicos.

| Nome | Símbolo | Modo de ler |
|---|---|---|
| Conjunção | $\wedge$ | e |
| Disjunção | $\vee$ | ou |
| Condicional | $\rightarrow$ | Se..., então... |
| Bicondicional | $\leftrightarrow$ | Se, e somente se, |

Sendo r um número real, considere as proposições abaixo, em que cada linha pontilhada representa um conectivo lógico.

(I) $(r^3 = 8)$ ...... $(r \neq 2)$

(II) $(|r| < 4)$ ...... $(r < 4)$

Sabe-se que, qualquer que seja o valor de r, essas proposições são ambas verdadeiras. Assim, os conectivos lógicos que foram omitidos das proposições (I) e (II) são, respectivamente,

a) $\vee$ e $\leftrightarrow$

b) $\vee$ e $\rightarrow$

c) $\wedge$ e $\leftrightarrow$

d) $\rightarrow$ e $\rightarrow$

e) $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

**14. UESB-BA** – Se b é uma constante real com $|b| < 40$, então o polinômio $p(x) = -x^2 + bx - 441$ tem raízes cujo módulo é um divisor de

a) 49

b) 54

c) 65

d) 72

e) 84

**15. Cefet-MG** – Em relação aos conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{1}{x^2 + 1} > \frac{1}{x + 3}\right\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x|(x^2 + 1) > x\}$, analise as afirmações que se seguem.

(I) $A \cap B = (-1, 0) \cup (0, 2)$

(II) $B - A = \{\}$

(III) $A \cup B = \mathbb{R}$

(IV) $B = A$

São corretas apenas as afirmativas

**a)** I e II.

**b)** I e III.

**c)** II e III.

**d)** II e IV.

**e)** III e IV.

**16. ITA (adaptado)** – Calcule o número de soluções inteiras da inequação $0 \leq x^2 - |3x^2 + 8x| \leq 2$.

**17. PUC-PR** – Considere os seguintes conjuntos numéricos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4\}$. A respeito desses conjuntos, assinale a alternativa correta.

$\mathbb{R} \rightarrow$ conjunto dos números reais.

$\mathbb{Z} \rightarrow$ conjunto dos números inteiros.

**a)** $3 \in B$

**b)** $A \cup C = C$

**c)** O produto cartesiano B x C tem 25 elementos.

**d)** $B - C = \varnothing$

**e)** $A \cap B = ]-3, -1] \cup [1, 3[$

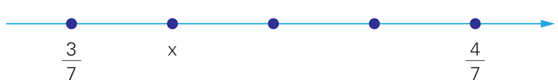
**18. FGV-SP** C5-H21

Na reta real, os pontos P e Q correspondem, respectivamente, aos números –5 e 3. R e S são pontos distintos nessa mesma reta, e a distância de cada um deles até o ponto P é igual ao dobro da distância deles até o ponto Q. Sendo assim, o triplo da distância entre R e S nessa reta é igual a

**a)** 23
**b)** 29
**c)** 32
**d)** 35
**e)** 38

**19. FGV** C5-H21

Na reta numérica indicada a seguir, todos os pontos marcados estão igualmente espaçados.

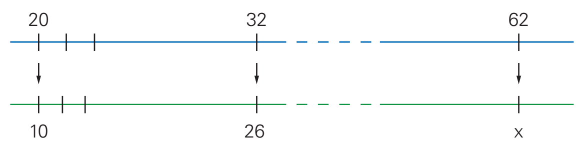



Sendo assim, a soma do numerador com o denominador da fração irredutível que representa x é igual a

**a)** 39
**b)** 40
**c)** 41
**d)** 42
**e)** 43

**20. FGV** C5-H21

Duas escalas lineares graduadas em unidades diferentes foram colocadas lado a lado, como mostra a figura a seguir.




Observando as duas correspondências, o número x da escala de baixo que está associado ao número 62 da escala de cima é

**a)** 68
**b)** 64
**c)** 62
**d)** 66
**e)** 70

# 20 FUNÇÃO MODULAR II

- Função modular

**HABILIDADES**

- Identificar representações algébricas que expressam relação entre grandezas.
- Interpretar gráficos cartesianos que representam relações entre grandezas.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

## Função modular

Já vimos que uma função é a lei ou regra que associa cada elemento de um conjunto A (chamado **domínio da função**) a um único elemento de um conjunto B (denominado **contradomínio**).

Uma função é dita **modular** quando há aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, em que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $|x| \in \mathbb{R}$.

Lembre-se de que:

$|x| = x$, se $x \geq 0$

$|x| = -x$, se $x < 0$

De maneira mais formal, podemos definir função modular como:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = |x|$

Portanto, é possível definirmos a função f(x) como:

$f(x) = x$, se $x \geq 0$ ou

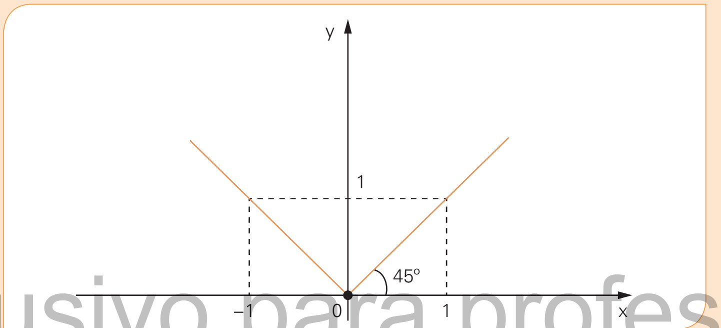
$f(x) = -x$, se $x < 0$

### GRÁFICO DA FUNÇÃO

Vamos construir uma tabela com os valores da função $y = f(x) = |x|$.

| x | y = f(x) = \|x\| |
|---|---|
| −2 | 2 |
| −1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |

Com isso, podemos construir um gráfico constituído de duas semirretas de origem em (0, 0), uma passando pelo ponto (−1, 1), para $x \leq 0$, e outra por (1, 1), quando $x \geq 0$.

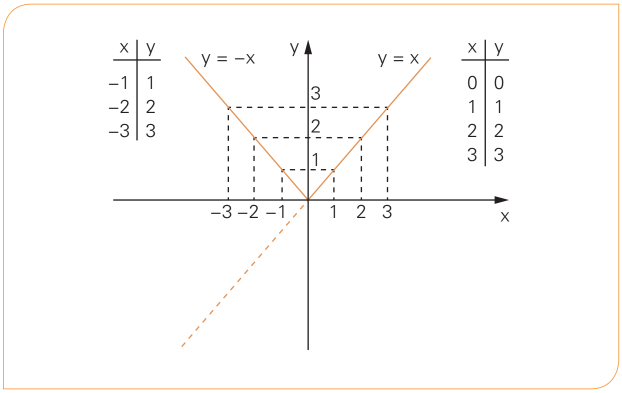



O gráfico da função modular $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = |x|$, é simétrico. O eixo de simetria é representado por **y**.

O domínio e o contradomínio dessa função são os números reais. Já o conjunto imagem dessa função é $Im(f) = \mathbb{R}_+$. Isto é, a função modular somente assume valores reais não negativos.

Vejamos outros exemplos.

1. Considere o gráfico da função $y = f(x) = |x|$.




A função dentro do módulo ($y = x$) foi mantida para valores de **y** positivos (acima do eixo **x**). Para valores negativos de **y** (abaixo do eixo **x**), a função foi rebatida em relação ao eixo **x**. Obtemos uma nova função ($y = -x$) simétrica à anterior em relação ao eixo **x**.

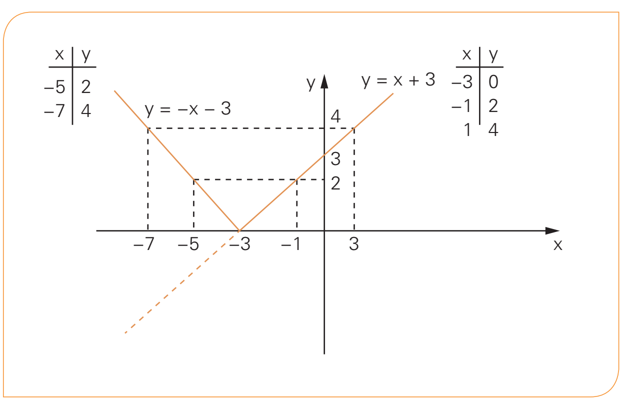
$$D(f) = \mathbb{R}$$
$$Im(f) = \mathbb{R}_+$$

A parte da função que estava abaixo do eixo **x** foi refletida para cima do eixo **x**. Esse conceito pode se estender para todas as funções modulares.

2. Construa o gráfico da função $y = f(x) = |x + 3|$.

Ao aplicarmos a definição, temos:

$$y \begin{cases} x + 3, \text{ se } x \geq 3 \\ -x - 3, \text{ se} < 3 \end{cases}$$



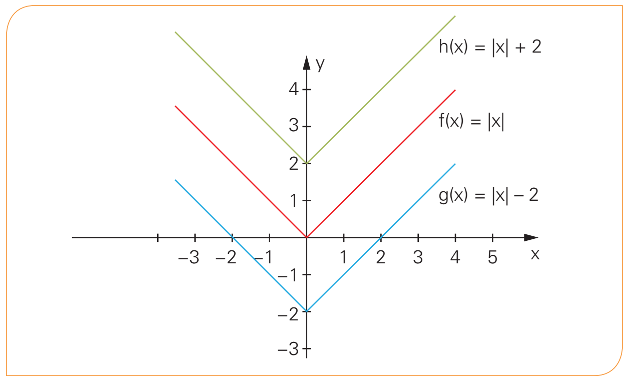

A função que estava dentro do módulo ($y = x + 3$) foi mantida para valores de **x** maiores que −3 (acima do eixo **x**). Para valores menores que −3 (abaixo do eixo x), a função foi rebatida em relação ao eixo **x**. Obtemos, então, uma nova função ($y = -x - 3$) simétrica à anterior em relação ao eixo **x**.

Podemos ver que o gráfico da função $y = |x + 3|$ foi deslocado 3 unidades para a esquerda em relação à função $y = |x|$.

$$D(f) = \mathbb{R}$$
$$Im(f) = \mathbb{R}_+$$

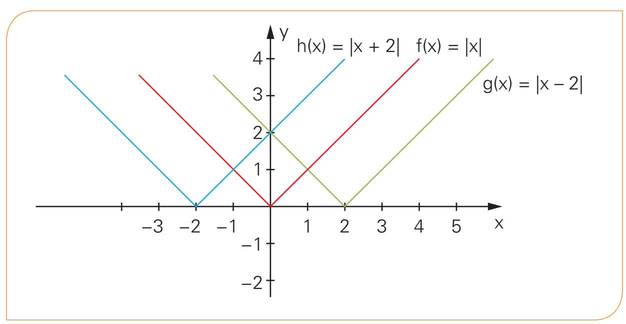
Analogamente, podemos examinar outros gráficos que são variações da função modular $y = f(x) = |x|$ em diversos casos.

**1º caso: deslocamento vertical**



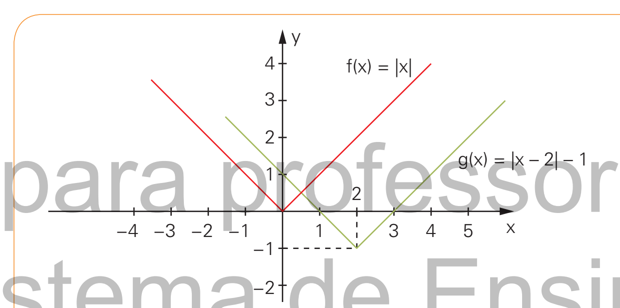

Ao comparar os gráficos das funções **g** e **h** com o da função **f**, é possível afirmarmos que eles são semelhantes. No entanto, houve um deslocamento **vertical** 2 unidades para cima e 2 para baixo.

**2º caso: deslocamento horizontal**




Ao comparar os gráficos das funções **g** e **h** com o da função **f**, é possível afirmarmos que eles são semelhantes. No entanto, houve um deslocamento **horizontal** 2 unidades para a direita e 2 para a esquerda.

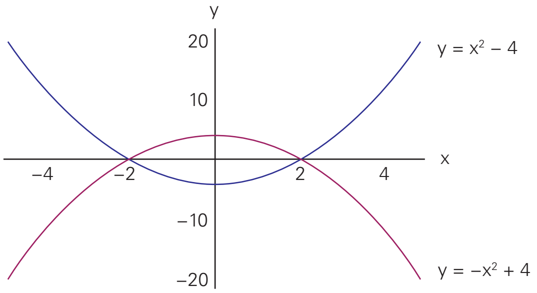
**3º caso: deslocamento vertical e horizontal**



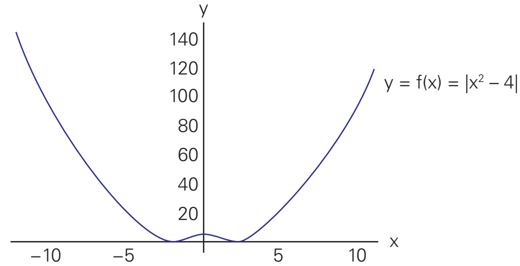
Ao comparar o gráfico da função **g** com o da função **f**, é possível afirmarmos que são semelhantes. No entanto, houve um deslocamento **horizontal** 2 unidades para a direita e um deslocamento **vertical** 1 unidade para baixo.

Vejamos como ficaria o gráfico do módulo de uma função quadrática.

Para construir o gráfico da função $y = f(x) = |x^2 + 4|$, temos:



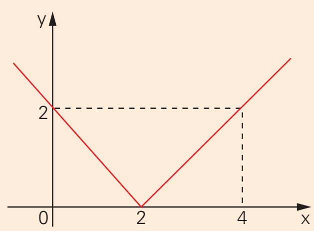

Portanto, o gráfico da função $y = f(x) = |x^2 - 4|$ é dado por:




Observe que as partes da parábola $y = x^2 - 4$ à direita de 2 e à esquerda de $-2$ no eixo **x** foram mantidas, uma vez que tinham **y** não negativo ("acima" ou no próprio eixo **x**). A parte situada entre $-2 < x < 2$ foi rebatida para cima, visto que tinha sinal negativo de **y** ("abaixo" do eixo **x**).

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**1. PUC-BA** – A figura representa o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:




**a)** $f(x) = |x| + 2$

**b)** $f(x) = |x - 2|$

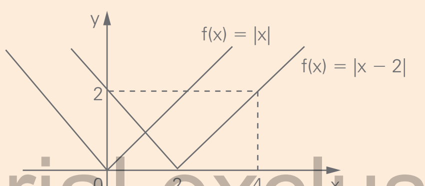
**c)** $f(x) = |x + 2|$

**d)** $f(x) = |x| - 2$

**e)** $f(x) = ||x| + 2|$

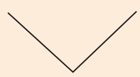
**Resolução:**

É possível perceber, por inspeção direta, que o gráfico representado na questão corresponde a uma translação, para a direita em duas unidades, do gráfico da função $y = f(x) = |x|$. Logo, o gráfico representado será correspondente à função $f(x) = |x - 2|$

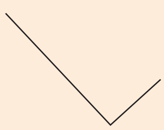



**2. UPE** – Dos gráficos, o que mais se assemelha ao gráfico da função $f(x) = ||x + 2| - 2|$ no intervalo $-5 < x < 5$ é

**a)**

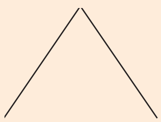


**b)**

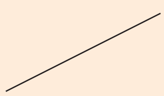


**c)**

**d)**

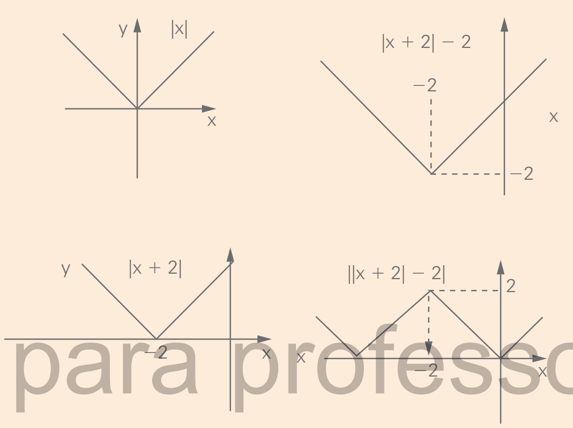


**e)**



**Resolução:**

Veja os gráficos a seguir:




Observando os gráficos e considerando o intervalo $-5 < x < 5$, a alternativa **c** está adequada.

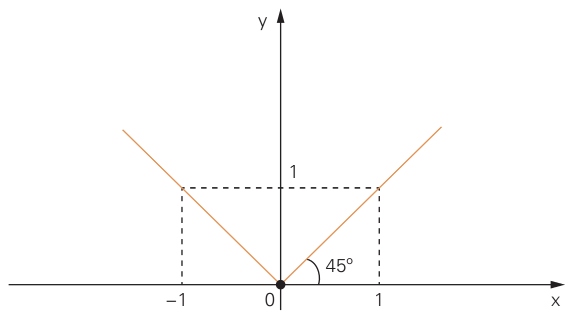
# ROTEIRO DE AULA

## FUNÇÃO MODULAR

Uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$,

então $\begin{cases} f(x) = x, \text{ se } x \geq 0 \\ f(x) = -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

O gráfico é formado pelas bissetrizes do 1º e 2º quadrantes




Domínio: D(f) = $\mathbb{R}$

Contradomínio: CD(f) = $\mathbb{R}$

Imagem: Im(f) = $\mathbb{R}_+^*$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

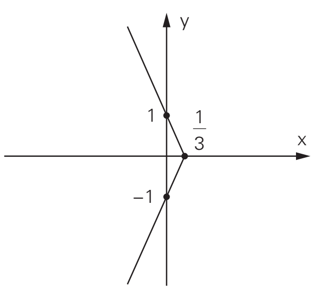
**1. Cefet-MG** – Seja f(x) uma função real. O gráfico gerado pelo módulo dessa função, |f(x)|.

**a)** nunca passará pela origem.
**b)** nunca passará pelo 3º ou 4º quadrante.
**c)** intercepta o eixo x somente se f(x) for do primeiro grau.
**d)** intercepta o eixo y somente se f(x) for do segundo grau.

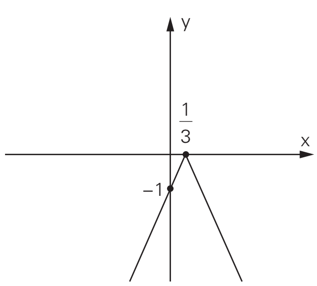
O gráfico gerado pelo módulo da função de f(x) terá sua curva refletida em relação ao eixo **x**. Portanto, não irá existir f(x) < 0. Com isso, podemos concluir que |f(x)| nunca vai passar pelo 3º ou 4º quadrantes.

**2. PUC-Rio** – Qual dos gráficos abaixo representa a função real f(x) = |3x − 1|?

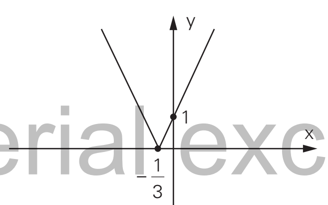
**a)**



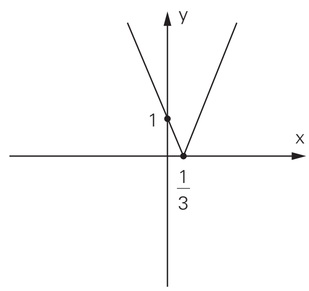

**b)**



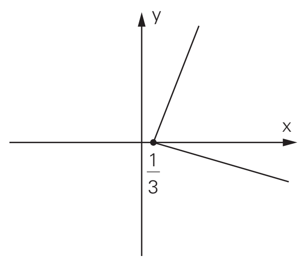

**c)**




**d)**



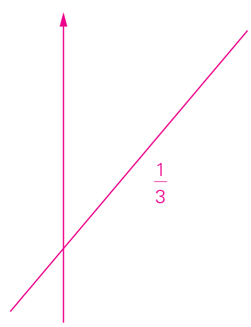

**e)**



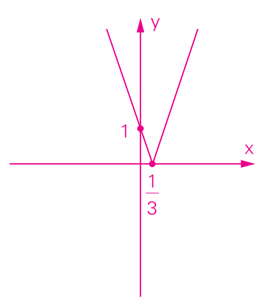

Temos que f(x) = |3x − 1|.
Se f(x) = 0 → |3x − 1| = 0.

Como 3x − 1 = 0 → x = $\frac{1}{3}$, então a curva intercepta o eixo x no ponto $\frac{1}{3}$.

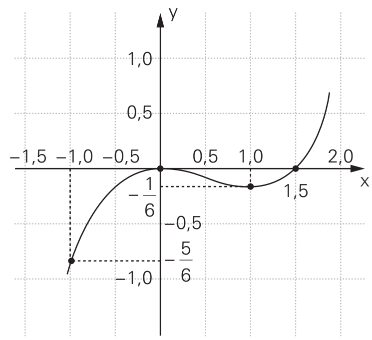
Como o gráfico da função g(x) = 3x − 1 é




Portanto, f(x) = |3x − 1| é o gráfico de g(x), com a reflexão da curva em relação ao eixo **y**. Ou seja:



**3. PUC-Rio (adaptado)** – Considere a função real $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ cujo gráfico está exibido abaixo:

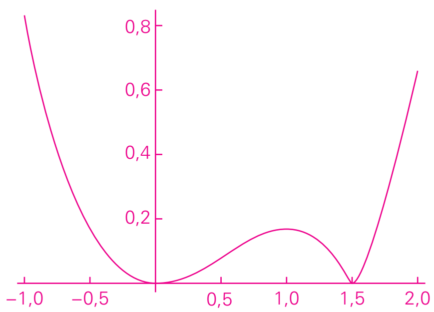



**a)** Determine as raízes de f(x) = 0.

**b)** Esboce o gráfico de $g(x) = \left|\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right|$.

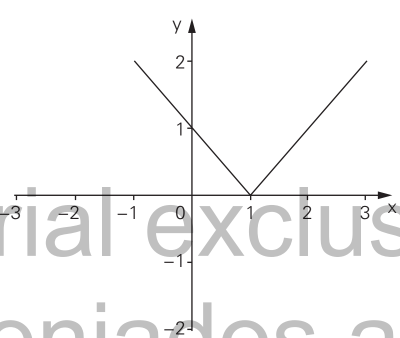
a) Podemos observar no gráfico que f(x) = 0 nos pontos x = 0 e x = 1,5.

b) O gráfico de $g(x) = \left|\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right|$ é a reflexão da curva do gráfico de f(x) em relação ao eixo **y**. Assim:

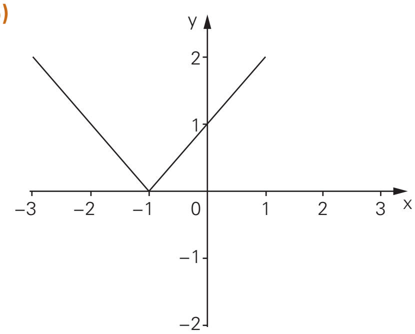



**4. PUC-Rio** – Considere a função real f(x) = |–x + 1|. O gráfico que representa a função é:

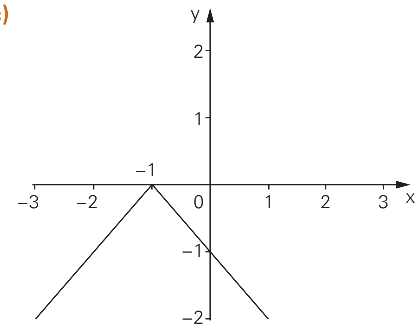
**a)**



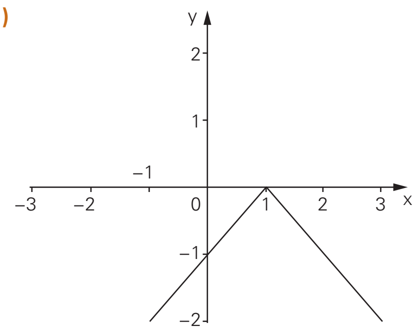

**b)**



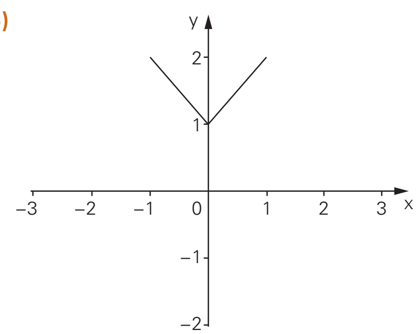

**c)**




**d)**




**e)**




Temos a função f(x) = |– x + 1|.
Então, para x > – 1, f(x) = – x + 1.
Para x < – 1, f(x) = x – 1.

**5. UEM-PR** – Sejam f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções. Assinale o que for correto.

**01)** Se $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x$, então $f(x) > g(x)$ para todo número real x.

**02)** Se f e g são funções modulares definidas por $f(x) = |x + 1|$ e $g(x) = |x - 1|$, então seus gráficos não têm intersecção.

**04)** Se f é a função modular definida por $f(x) = |2x|$ e g é a função constante definida por $g(x) = 10$, então $f(x) < g(x)$ quando $-5 < x < 5$; e $f(x) > g(x)$ se $x > 5$ ou $x < -5$.

**08)** Se $f(x) = 5 - |x + 1|$, então podemos calcular $\sqrt{f(x)}$ para todo $x > 0$.

**16)** Se f é a função modular definida por $f(x) = |x + 1|$, então o conjunto imagem de f é $Im(f) = [1, +\infty)$.

01) Se $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x$, então $f(x) > g(x)$ para todo número real x.

Verdadeiro. Temos que $x^2 > x$. Portanto, como $x^2 > 0$ para todo número real x, $x^2 + 1 > x^2 > x$. Ou seja, $x^2 + 1 > x$.

02) Se **f** e **g** são funções modulares definidas por $f(x) = |x + 1|$ e $g(x) = |x - 1|$, então seus gráficos não têm intersecção.

Falso. Suponha que $f(x) = g(x)$, ou seja, $|x + 1| = |x - 1|$.

Para $-1 < x < 1$, temos que $x + 1 = 1 - x \to x = 0$. Logo, seus gráficos se interceptam no ponto $x = 0$.

04) Se **f** é a função modular definida por $f(x) = |2x|$ e **g** é a função constante definida por $g(x) = 10$, então $f(x) < g(x)$ quando $-5 < x < 5$. Além disso: $f(x) > g(x)$ se $x > 5$ ou $x < -5$.

Verdadeiro. No caso $f(x) < g(x)$, temos que $|2x| < 10$.

Assim, para $2x > 0$, temos $2x > 10 \to x > 5$.

Para $2x < 0$, temos $-2x > 10 \to x < -5$.

Ou seja, $-5 < x < 5$.

No caso $f(x) > g(x)$, temos que $|2x| > 10$.

Assim, para $2x > 0$, temos $2x > 10 \to x > 5$.

Para $2x < 0$, temos $-2x > 10 \to x < -5$.

08) Se $f(x) = 5 - |x + 1|$, então podemos calcular $\sqrt{f(x)}$ para todo $x > 0$.

Falso. Não, pois, quando $f(x) = 5 - |x + 1| < 0$, não podemos calcular sua raiz no conjunto dos números reais.

16) Se **f** é a função modular definida por $f(x) = |x + 1|$, então o conjunto imagem de **f** é $Im(f) = [1, +\infty)$.

Falso. Temos que $|x + 1| > 0$. Então, para $x > -1$, temos $|x + 1| > 0$, e o conjunto imagem é dado por $Im(f) = [0, +\infty)$.

Soma: 01 + 04 = 05

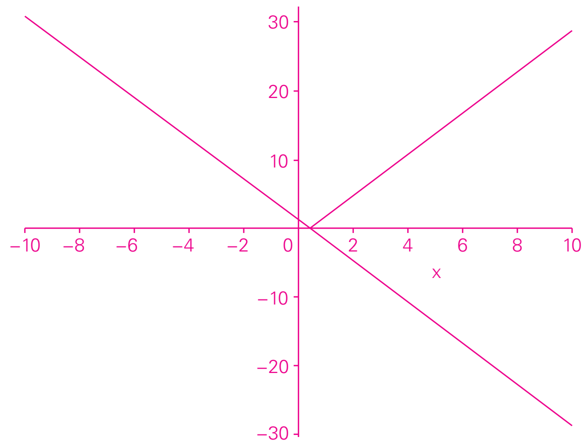
**6. PUC-Rio** – Sejam f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f(x) = |3x - 1|$ e $g(x) = 1 - 3x$.

**a)** Esboce os gráficos de f e g no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

**b)** Para quais valores de x, temos $f(x) - g(x) < 28$? Justifique sua resposta.

**c)** Determine a área do triângulo ABC, onde A = (0, f(0)), B = (3, g(3)) e C = (3, f(3)), justificando sua resposta.

a) Esboçando o gráfico, temos:




b) Temos que $f(x) - g(x) = 6x - 2$, se $x > \frac{1}{3}$ e 0 se $x < \frac{1}{3}$.

Logo, para $x > \frac{1}{3}$, temos: $f(x) - g(x) < 28 \to 6x - 2 < 28 \to x < 5$

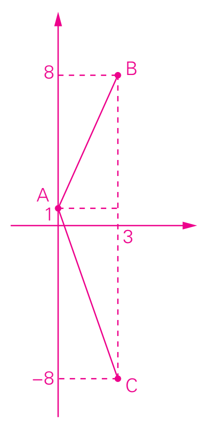
Para $x < \frac{1}{3}$:

$0 < 28$, para qualquer x real tal que $x < \frac{1}{3}$.

Então, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{3} \le x \le 5\right\}$.

c) Colocando esses pontos no plano cartesiano, temos:

Observando a figura, temos $A = \frac{16 \cdot 3}{2} = 24$ u.a.



## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. UEM-PR** – Sobre as funções f e g definidas por $f(x) = 3^{-x}$ e $g(x) = |x - x^2|$, assinale o que for **correto**.

**01)** $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

**02)** $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

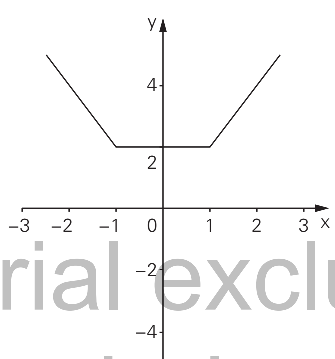
**04)** f é sobrejetora.

**08)** $g(f(0)) = f((g(0))$.

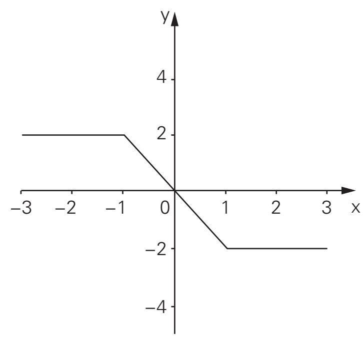
**16)** O gráfico da função g é uma parábola.

**8. PUC-Rio** – Considere a função real $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$. O gráfico que representa a função é:

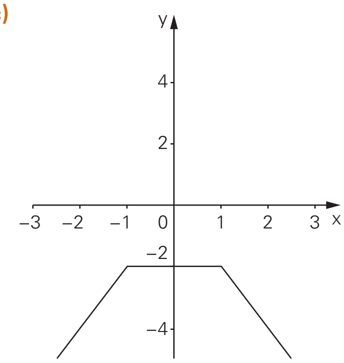
**a)**



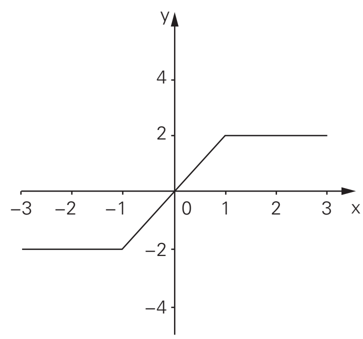

**b)**



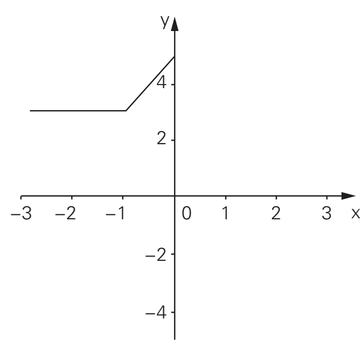

**c)**




**d)**




**e)**



**9. FGV-SP** – O conjunto dos valores assumidos pela expressão algébrica $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} - \frac{|ab|}{ab}$, sendo a e b dois números reais diferentes de zero, é:

**a)** $\{-3, -1, 1, 3\}$
**b)** $\{-1, 1\}$
**c)** $\{-1, 3\}$
**d)** $\{-3, 1\}$
**e)** $\{-3, 3\}$

**10. Unicamp-SP (adaptado)** – Considere a função $f(x) = |2x - 4| + x - 5$, definida para todo número real x.

Esboce o gráfico de $y = f(x)$ no plano cartesiano para $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

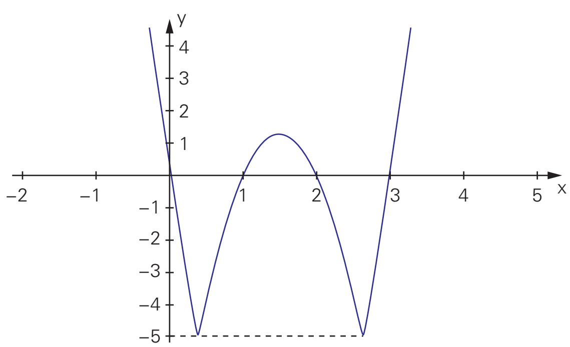
**11. Ufrgs-RS** – A interseção dos gráficos das funções f e g, definidas por $f(x) = |x|$ e $g(x) = 1 - |x|$, os quais são desenhados no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, determina um polígono. A área desse polígono é

**a)** 0,125
**b)** 0,25
**c)** 0,5
**d)** 1
**e)** 2

**12. EsPCex** – Os gráficos de $f(x) = 2$ e $g(x) = x^2 - |x|$ têm dois pontos em comum. O valor da soma das abscissas dos pontos em comum é igual a

**a)** 0
**b)** 4
**c)** 8
**d)** 10
**e)** 15

**13. Cefet-MG** – Sabe-se que o gráfico de $y = f(g(x))$ abaixo está fora de escala, e que esta função, com raízes 0, 1 e 3, foi obtida compondo-se as funções $f(x) = |x| - 5$ e $g(x) = ax^2 + bx + c$.




O valor de $|a \cdot b \cdot c|$ é igual a

**a)** $2^3 \cdot 5$
**b)** $2 \cdot 3^3$
**c)** $2 \cdot 5^3$
**d)** $3 \cdot 5^3$
**e)** $3^3 \cdot 5$

**14. PUC-Rio** – Seja $f(x) = \left|\dfrac{x^2}{2} - 2\right|$.

**a)** Para quais valores reais de x temos $f(x) = 1$?
**b)** Para quais valores reais de x temos $f(x) \leq 1$?

**15. UEM-PR** – Considerando o módulo de números reais e as funções envolvendo módulo, assinale a(s) alternativa(s) correta(s).

**01)** $|x| \neq -x, \forall x \in \mathbb{R}$

**02)** Se f e g estão definidas no mesmo domínio e no mesmo contradomínio, então o gráfico de $f(x) = |x + 2| - 2$ é igual ao gráfico de $g(x) = |x|$, mas deslocado em duas unidades para a esquerda no eixo x e duas unidades para baixo no eixo y.

**04)** A função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = |x|$, é injetora e sobrejetora.

**08)** A solução da equação $\left|\cos(x+4) - \text{sen}(x-1) + \sqrt{x+2-1}\right| + 5 = 0$ é $k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}^+$.

**16)** A equação $|x + 1| - |x - 1|$ não possui solução real.

**16. FGV-SP** – Seja k um número real tal que os gráficos das funções reais dadas por $y = |x|$ e $y = -|x| + k$ delimitem um polígono de área 16. Nas condições dadas, k é igual a

**a)** $4\sqrt{2}$

**b)** $6\sqrt{2}$

**c)** 8

**d)** $7\sqrt{2}$

**e)** 10

**17. ITA** – Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \left|2^{-|x|} - \frac{1}{2}\right|.$$

**18. PUC-Goiás (adaptado)** C5-H21

Lhe concordo, doutor: sou eu que invento minhas doenças. Mas eu, velho e sozinho, o que posso fazer? Estar doente é minha única maneira de provar que estou vivo. É por isso que frequento o hospital, vezes e vezes, a exibir minhas maleitas. Só nesses momentos, doutor, eu sou atendido. Mal atendido, quase sempre. Mas nessa infinita fila de espera, me vem a ilusão de me vizinhar do mundo. Os doentes são a minha família, o hospital é meu tecto e o senhor é o meu pai, pai de todos meus pais. Desta feita, porém, é diferente. Pois eu, de nome posto de Sexta-Feira, me apresento hoje com séria e verídica queixa. Venho para aqui todo desclaviculado, uma pancada quase me desombrou. Aconteceu quando assistia ao jogo do Mundial de Futebol. Desde há um tempo, ando a espreitar na montra do Dubai Shopping, ali na esquina da Avenida Direita. É uma loja de tevês, deixam aquilo ligado na montra para os pagantes contraírem ganas de comprar. Sento-me no passeio, tenho meu lugar cativo lá. Junto comigo se sentam esses mendigos que todas sextas-feiras invadem a cidade à cata de esmola dos muçulmanos. Lembra? Foi assim que ganhei meu nome de dia da semana. Veja bem: eu, que sempre fui inútil, acabei adquirindo nome de dia útil.

[...]

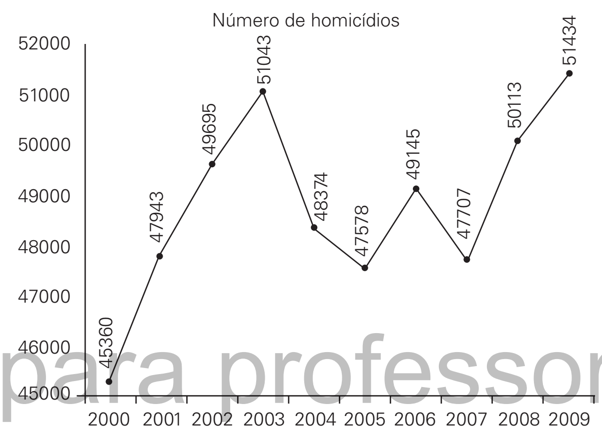
COUTO, Mia. *O fio das missangas.* São Paulo: Companhia das Letras, 2009. p. 81-82.

No Texto, diz-se: "infinita fila de espera", para se dizer que a fila é imensa. Na Matemática, podemos dizer que o infinito tem uma descrição precisa e, por vezes, pode até mesmo ser caracterizado. Por exemplo, podemos mostrar que o intervalo $]-1, 1[$ tem a mesma quantidade de elementos que a reta real ($\mathbb{R}$), isto é, que esses dois conjuntos possuem o mesmo tipo de infinito. Para tanto, estabelecemos a função $f: \mathbb{R} \to ]-1, 1[$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Analise as seguintes afirmativas sobre a função f:

**a)** f é sobrejetora, injetora e bijetora.
**b)** f é injetora e decrescente.
**c)** f é bijetora e estritamente crescente.
**d)** f é estritamente decrescente.
**e)** f é sobrejetora e estritamente decrescente.

**19. Enem** C5-H22

Ano após ano, muitos brasileiros são vítimas de homicídio no Brasil. O gráfico apresenta a quantidade de homicídios registrados no Brasil, entre os anos 2000 e 2009.




WAISELFISZ, J. J. **Mapa da violência 2012:** os novos padrões da violência homicida no Brasil. São Paulo: Instituto Sangari. 2011 (adaptado).

Se o maior crescimento anual absoluto observado nessa série se repetisse de 2009 para 2010, então o número de homicídios no Brasil ao final desse período seria igual a

**a)** 48 839
**b)** 52 755
**c)** 53 840
**d)** 54 017
**e)** 54 103

**20. EBMSP-BA** C5-H22

Os valores cobrados por um cinema pela entrada "inteira" e pela "meia" entrada correspondem, em reais, aos valores absolutos das raízes do polinômio $P(x) = x^2 + 10x - 144$. Com fins beneficentes, foi estipulado que a todos os espectadores que comparecessem a uma determinada sessão fosse cobrado o valor da entrada "inteira", razão pela qual um grupo de dez pessoas que foram juntas à referida sessão, pagou R$ 40,00 a mais do que pagaria em uma sessão normal. Com base nessas informações, pode-se afirmar que o número de pessoas, desse grupo, que normalmente pagaria "meia" entrada é igual a

**a)** 7
**b)** 6
**c)** 5
**d)** 4
**e)** 3

# 21 EQUAÇÕES MODULARES

- Módulo de um número
- Equação modular

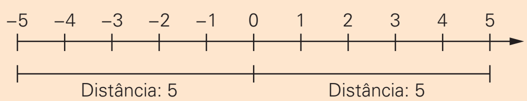
**HABILIDADES**

- Resolver equações e situações-problema que envolvam módulo.
- Identificar representações algébricas que expressam relação entre grandezas.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

## Módulo de um número

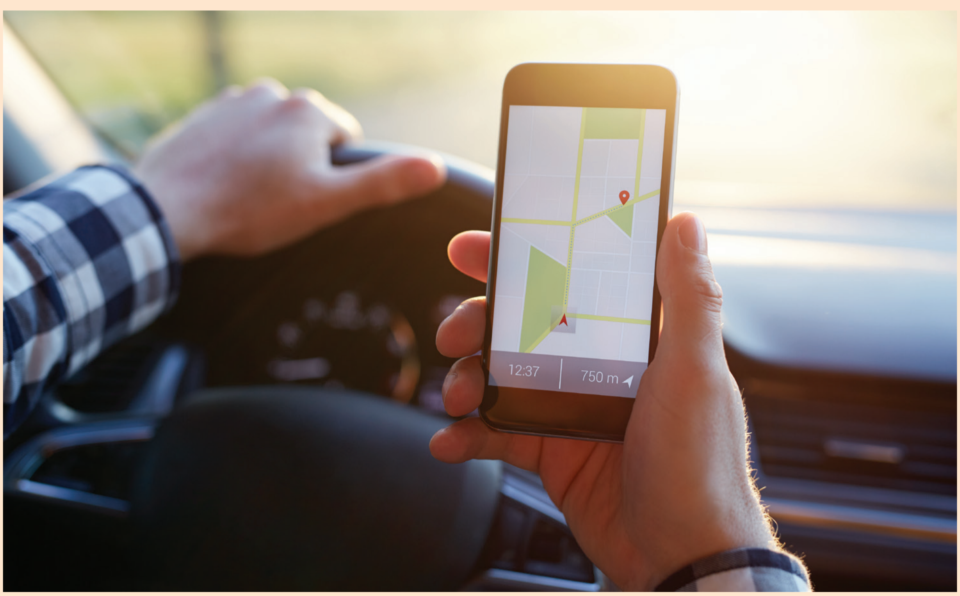
### INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

O módulo de um número real é a “distância” do ponto que representa esse número no eixo real até a origem desse eixo. Observe:




Na reta, $|-5| = 5$, assim como $|5| = 5$.

O conceito de módulo ou valor absoluto de um número real está ligado à ideia de distância de um ponto da reta até sua origem. Portanto, podemos observar que, em situações-problema envolvendo o conceito de distância, sempre teremos um número não negativo como resposta.




ROSTISLAV_SEDLACEK/ISTOCKPHOTO

### Propriedades

Tomando como base o conceito geométrico de módulo de um número, podemos definir que: $|x| \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$

As principais propriedades relacionadas ao módulo de um número real são:

**I.** $|x| \geq 0$, para qualquer $\mathbf{x}$ real e $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$.

**II.** $|x| = a \rightarrow x = a$ ou $x = -a$, com $a \geq 0$.

**III.** $|x| = |y| \rightarrow x = y$ ou $x = -y$.

**IV.** $|x| > a \rightarrow x > a$ ou $x < -a$, com $a \geq 0$.

**V.** $|x| < a \rightarrow -a < x < a$, com $a \geq 0$.
**VI.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |x|$.
**VII.** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, com $y \neq 0$.
**VIII.** $\sqrt{x^2} = |x|$
**IX.** $|x|^{2n} = |x^{2n}| = x^{2n}$

# Equação modular

Uma equação é dita modular quando há pelo menos uma incógnita no módulo. O tipo mais simples de equação modular tem a forma $|x| = a$.

## RESOLUÇÃO

Considere a equação $|x| = a$. Pela definição de módulo, temos:

$x \geq 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow x = a$
$x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow -x = a \rightarrow x = -a$
Podemos afirmar então que:
$|x| = a \leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$

**Exemplo 1**:
Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $|x| = 64$.
Pela definição, podemos afirmar que:
$x = 64$ ou $x = -64$
$S = \{-64; 64\}$

É possível utilizarmos esse método toda vez que, na equação, podemos estabelecer a igualdade entre um símbolo de módulo contendo a variável e um número real.

**Exemplo 2**:
Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $|x - 40| = 50$.
Ao aplicarmos a definição, temos:
$x - 40 = -50$ ou $x - 40 = 50$
$x = -10$ ou $x = 90$
$S = \{-10; 90\}$

No caso em que $a < 0$, a equação $|x| = a$ não tem solução, pois um módulo sempre representa valor positivo.

**Exemplo 3**:
Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $|x| = -64$.
Não existe **x** que verifique a igualdade. Portanto, a solução é conjunto **vazio**:
$S = \varnothing$ ou $S = \{\}$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**1. UFJF-MG** – O número de soluções negativas da equação $|5x - 6| = x^2$ é
**a)** 0
**b)** 1
**c)** 2
**d)** 3
**e)** 4

Pela definição de equação modular, temos:

$5x - 6 = x^2$ ou $5x - 6 = -x^2$

Então:

$x^2 - 5x + 6 = 0$ ou $x^2 + 5x - 6 = 0$

Da primeira equação, vem:

$x = 3$ ou $x = 2$

Da segunda equação, temos:

$x = 1$ ou $x = -6$

Portanto, essa equação tem apenas 1 solução negativa.

# ROTEIRO DE AULA

## Equação modular

Definição:

$$|x|\begin{cases} x \text{ se } \underline{\quad x \geq 0 \quad} \\ -x \text{ se } \underline{\quad x < 0 \quad} \end{cases}$$

A principal meta na resolução é substituir as barras de módulo pelo estudo do sinal da expressão matemática.

$|x| = a \leftrightarrow \underline{\quad x = a \quad}$ ou $\underline{\quad x = -a \quad}$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. FGV** – Para certos valores reais de k, o polinômio $P(x) = x^2 - 6x + |2k - 7|$ é divisível por $x - 1$. A soma de todos esses valores é igual.

**a)** 8 **c)** 5 **e)** −5
**b)** 7 **d)** −1

Se P é divisível por x − 1, então:
$P(1) = 0 \to 1^2 - 6 \cdot 1 + |2k - 7| = 0 \to |2k - 7| = 5 = 2k - 7 = \pm 5 \to k = 1$ ou $k = 6$
Portanto, a soma é 1 + 6 = 7.

**2. Unicamp** – No plano cartesiano, a equação $|x - y| = |x + y|$ representa

**a)** um ponto.
**b)** uma reta.
**c)** um par de retas paralelas.
**d)** um par de retas concorrentes.

Temos que $x - y = x + y \to y = 0$ ou $x - y = -x - y \to x = 0$.
No plano cartesiano, as retas x = 0 e y = 0 são concorrentes, pois representam os eixos coordenados.

**3. Unitau-SP** – O conjunto imagem, Im(f), da função $f(x) = 2 - |x| \cdot |2x - 4|$, é:

**a)** Im( f ) = [2; + ∞[
**b)** Im( f ) = ]− ∞; 2]
**c)** Im( f ) = [0; 2]
**d)** Im( f ) = $[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$
**e)** Im( f ) = [1; 2]

Se $2x - 4 \geq 0 \to x \geq 2$:
$f(x) = 2 - x \cdot (2x - 4)$
Se $0 \leq x \leq 2$:
$f(x) = 2 + x \cdot (2x - 4)$
$f(0) = 2$, $f(2) = 0$
Se $x < 0$:
$f(x) = 2 - x \cdot (2x - 4)$
Logo, a imagem de **f** será dada por ]− ∞; 2].

**4. Sistema Dom Bosco** – Determine, no conjunto dos reais, o conjunto solução da equação $x^2 - 2|x| + 1 = 0$.

Temos que, se $x \geq 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x - 1)^2 = 0$
$x = 1$
Se $x < 0$, $x^2 + 2x + 1 = 0$
$(x + 1)^2 = 0$
$x = -1$
S = {−1, 1}.

**5. Udesc** – A soma das raízes distintas da equação $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|$ é:

**a)** 10 **c)** 0 **e)** 4
**b)** 7 **d)** 3

Temos que, se $x - 3 \geq 0$:
$x^2 - 5x + 6 = x - 3$
$x^2 - 6x + 9 = 0$
$(x - 3)^2 = 0$
x = 3, (não há raízes distintas)
Se $x - 3 < 0$:
$x^2 - 5x + 6 = -x + 3$
$x^2 - 4x + 3 = 0$
A soma das raízes é dada por $S = \frac{-b}{a} = 4$.

**6. PUC-Rio** – Três números proporcionais a 5, 8 e 9 são tais que a diferença do maior para o menor supera o módulo da diferença entre os dois menores em 5 unidades.

**a)** 45 **c)** 63 **e)** 81
**b)** 54 **d)** 72

De acordo o enunciado, os números $5x$, $8x$ e $9x > 0$.
Então, $9x - 5x - 5 = |8x - 5x| \rightarrow 4x - 5 = |3x|$.
Como $x > 0$, então:
$4x - 5 = 3x \rightarrow x = 5$
Logo, os números são 25, 40 e 45.
Portanto, o maior dos números é 45.

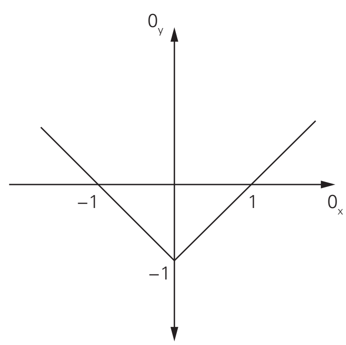
## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. Cesgranrio** – O número de raízes reais da equação $|2x - 1| = |1 - x|$ é igual a:

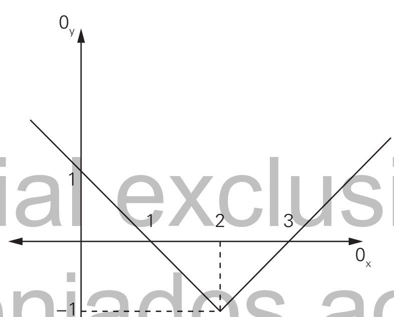
**a)** 0 **c)** 3 **e)** 6
**b)** 2 **d)** 4

**8. UFRN** – Dentre os gráficos abaixo, assinale o que representa corretamente a função modular $f(x) = |x - 2| - 1$.

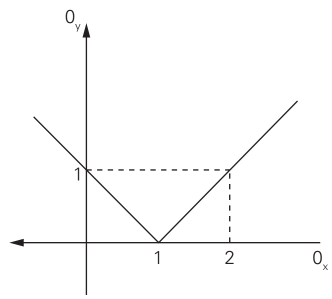
**a)**



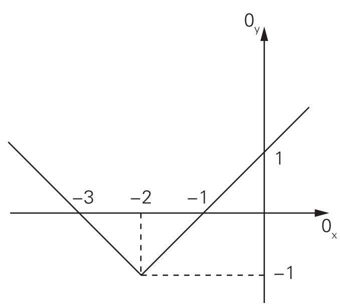

**b)**




**c)**




**d)**

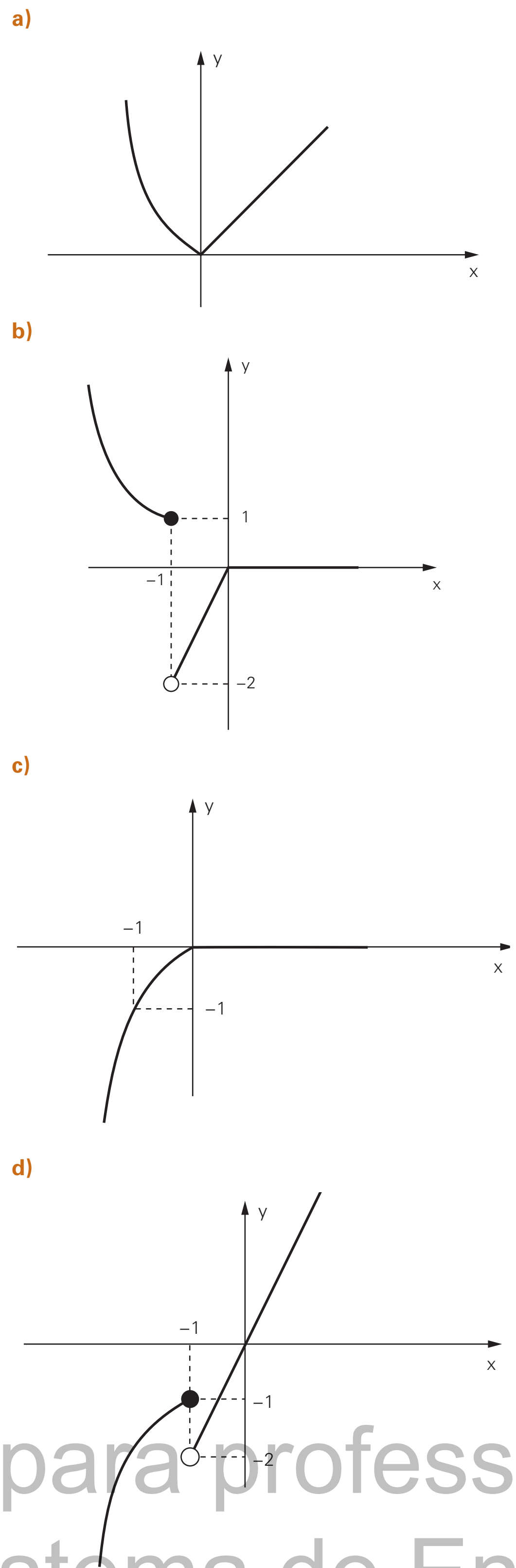


**9. Ufal-AL** – Determine, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $\left|x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}\right| = \frac{1}{4}$.

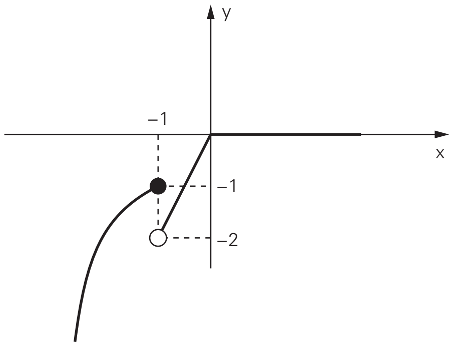
**10. EsPECEx (Aman)** – O número de soluções da equação $\frac{1}{2}|x| \cdot |x - 3| = 2 \cdot \left|x - \frac{3}{2}\right|$, no conjunto $\mathbb{R}$, é:

**a)** 1
**b)** 2
**c)** 3
**d)** 4
**e)** 5

**11. Escola Naval-RJ** – O gráfico que melhor representa a função real f, definida por $f(x) \begin{cases} -\frac{|x+1||x|}{x+1} + x, \text{ se } x > -1 \\ x|x|, \text{ se } x \leq -1 \end{cases}$ é



e)




**12. Escola Naval-RJ** – A soma das raízes reais distintas da equação $||x - 2| - 2| = 2$ é igual a:

**a)** 0
**b)** 2
**c)** 4
**d)** 6
**e)** 8

**13. UECE-CE** – Se as raízes da equação $x^2 - 5|x| - 6 = 0$ são também raízes de $x^2 - ax - b = 0$, então os valores dos números reais a e b são, respectivamente,

**a)** −1 e 6
**b)** 5 e 6
**c)** 0 e 36
**d)** 5 e 36

**14. UEPB** – A soma das raízes da equação modular $||x - 2| - 7| = 6$ é:

**a)** 15
**b)** 30
**c)** 4
**d)** 2
**e)** 8

**15. ITA** – Considere as funções $f_1$, $f_2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f_1(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$, $f_2(x) = \frac{3}{2}|x + 1|$ e $f(x)$ igual ao maior valor entre $f_1(x)$ e $f_2(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Determine:

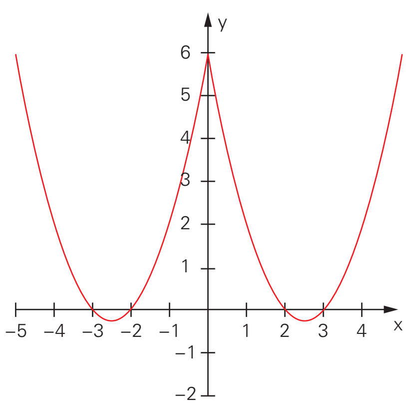
**a)** Todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $f_1(x) = f_2(x)$.

**b)** O menor valor assumido pela função f.

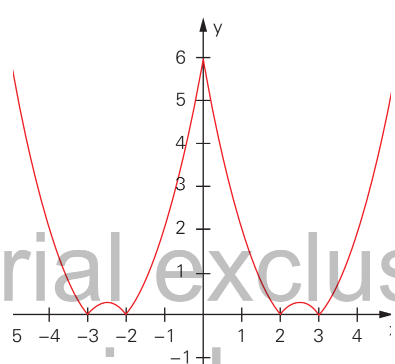
**c)** Todas as soluções da equação $f(x) = 5$.

**16. Insper-SP** – O gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 - 5|x| + 6$, é mais bem representado por

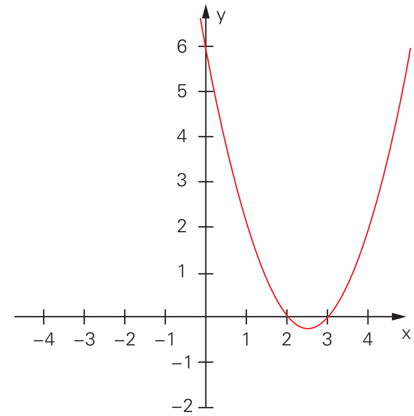
**a)**



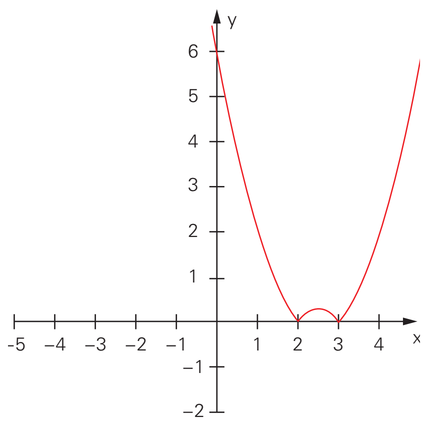

**b)**



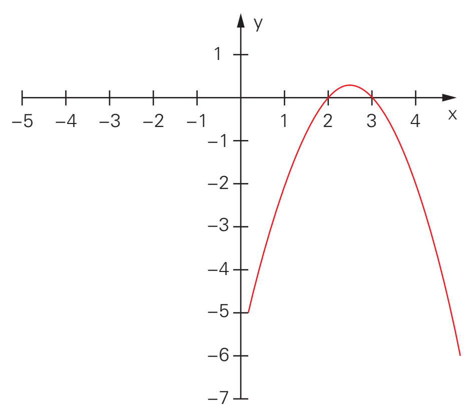

**c)**




**d)**




**e)**



**17. ITA** – Sabendo que as soluções da equação $|x|^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, podemos afirmar que:

**a)** $a = 1$ e $b = 6$

**b)** $a = 0$ e $b = -6$

**c)** $a = 1$ e $b = -6$

**d)** $a = 0$ e $b = -9$

**e)** não existem a e b tais que $x^2 - ax + b = 0$ contenha todas as raízes da equação dada.

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. UFSCar-SP (adaptado)** C5-H22

Um reservatório contém 3 600 litros de água e precisa ser esvaziado para reparos. A água será retirada de acordo com a função $y = |3\,600 - 45x|$, sendo x o tempo, em minutos, e y o número de litros de água restantes. O tempo necessário para que o reservatório fique totalmente vazio é

**a)** 1 hora.

**b)** 1 hora e 5 minutos.

**c)** 1 hora e 10 minutos.

**d)** 1 hora e 15 minutos.

**e)** 1 hora e 20 minutos.

**19. UFSCar-SP (adaptado)** C5-H21

O valor mensal recebido por um vendedor de uma loja de aparelhos de telefone celular obedece à função $y = 1\,000 + 11\,|x|$, sendo x o número de aparelhos de telefone celular vendidos e y o valor recebido. O número de aparelhos de telefone celular que esse vendedor precisa vender para receber R$ 2.650,00 é

**a)** 160

**b)** 150

**c)** 140

**d)** 130

**e)** 120

**20. AFA-SP** C5-H21

Durante 16 horas, desde a abertura de uma certa confeitaria, observou-se que a quantidade q de unidades (t) vendidas do doce "amor em pedaço", entre os instantes $(t - 1)$ e t, é dada pela lei $q(t) = \left||t - 8| + t - 14\right|$, em que t representa o tempo, em horas, e $t \in \{3, 2, 1, \ldots, 16\}$. É correto afirmar que

**a)** entre todos os instantes foi vendida, pelo menos, uma unidade de "amor em pedaço".

**b)** a menor quantidade vendida em qualquer instante corresponde a 6 unidades.

**c)** em nenhum momento vendem-se exatamente 2 unidades.

**d)** o máximo de unidades vendidas entre todos os instantes foi 10.

# 22 INEQUAÇÕES MODULARES

- Inequação modular

**HABILIDADES**

- Resolver inequações e situações-problema que envolvam módulo.
- Identificar representações algébricas que expressem relação entre grandezas.
- Resolver situações--problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.


LILJAM/DREAMSTIME.COM

Cesta de pães.

## Introdução

Medidas como distância e peso estão estritamente ligadas a funções modulares. Quando queremos que o valor representado por essas medidas esteja compreendido entre dois outros ou que esse valor seja superior ou inferior a outros dois, então podemos utilizar o conceito de inequação modular.

Por exemplo, o peso ideal de um pão francês deve ser de 50 g. Imagine que, em uma fornada, nem todos os pães tenham esse peso após assados. Então, como garantir que eles estejam em um intervalo ideal de peso, de forma a não prejudicar o consumidor?

Neste módulo vamos estudar as inequações modulares e entender como podemos utilizar e calcular valores que estejam entre um intervalo [a, b] ou fora dele.

### INEQUAÇÃO MODULAR

Uma inequação modular é uma desigualdade entre dois termos, sendo que pelo menos um deles tem uma incógnita entre as barras, as quais denotam o símbolo do módulo.

As mais simples inequações modulares são:

- $|x| \geq a$
- $|x| \leq a$
- $|x| > a$
- $|x| < a$

## DEMONSTRAÇÃO DAS PROPRIEDADES

Em inequações modulares, trabalhamos de modo semelhante ao aplicado às equações. Isto é, devemos eliminar as barras do módulo por meio do estudo do sinal da expressão matemática que esteja contida entre elas.

Acompanhe a seguir os casos específicos.

1) Caso $|x| \leq a$, **a** não negativo

Para $x \geq 0$:

$|x| = x \to x \leq a$ **(I)**

Para $x < 0$:

$|x| = -x \to -x \leq a \to x \geq -a$ **(II)**

Analisando (I) e (II), concluímos que a solução de inequações do tipo $|x| \leq a$ é $-a \leq x \leq a$.

**Exemplo**:

Vamos resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $|x| \leq 42$.

Temos então que:

$|x| \leq 42 \leftrightarrow -42 \leq x \leq 42$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -42 \leq x \leq 42\}$.

2) Caso $|x| \geq a$, a não negativo

Para $x \geq 0$:

$|x| = x \to x \geq a$ **(III)**

Para $x < 0$:

$|x| = -x \to -x \geq a \to x \leq -a$ **(IV)**

Analisando (III) e (IV), concluímos que a solução de inequações do tipo $|x| \geq a$ é $x \geq a$ ou $x \leq -a$.

**Exemplo**:

Vamos resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $|x| \geq 42$.

Temos então que:

$|x| \geq 42 \leftrightarrow x \leq -42$ ou $x \geq 42$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -42$ ou $x \geq 42\}$.

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**1. PUC-RS** – A expressão $|x - a| < 16$ também pode ser representada por:

**a)** $x - a < 16$
**b)** $x + a > 16$
**c)** $-a - 16 < x < a + 16$
**d)** $-16 + a < x < a + 16$
**e)** $-a < -16$ ou $x - a > 0$

Temos que:

$|x - a| < 16$

$-16 < x - a < 16$

$a - 16 < x < a + 16$.

**2. EsPECex** – O conjunto da inequação $||x - 4| + 1| \leq 2$ é um intervalo do tipo [a, b]. O valor de a + b é igual a

**a)** −8
**b)** −2
**c)** 0
**d)** 2
**e)** 8

**Resolução:**

Por meio da teoria, temos:

$||x - 4| + 1| \leq 2$

$-2 \leq |x - 4| + 1 \leq 2$

$-3 \leq |x - 4| \leq 1$

Primeiro, vamos separar a equação em dois casos e aplicarmos novamente a teoria:

(I) $-3 \leq |x - 4| \to -3 \leq x - 4 \leq 3 \to 1 \leq x \leq 7$

(II) $|x - 4| \leq 1 \to -1 \leq x - 4 \leq 1 \to 3 \leq x - 4 \leq 5$

Portanto, a solução deve comportar tanto a solução de I quanto de II. Podemos utilizar a "técnica do varal" para ter o conjunto intersecção de I com II. Logo: S = [3, 5].

Portanto, o valor de a + b = 3 + 5 = 8.

# ROTEIRO DE AULA

## INEQUAÇÃO MODULAR

A meta na resolução é substituir as barras do módulo pelo estudo do sinal da expressão matemática.

$|x| \geqslant a \leftrightarrow x$ ___$\geqslant$___ $a$ ou $x$ ___$\leqslant$___ $-a$

$|x| < a \leftrightarrow -a$ ___$<$___ $x$ ___$<$___ $a$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Sistema Dom Bosco** – Encontre a solução de $|4 - 3x| > -2$, dado que $x \in \mathbb{R}$.

Temos que, se $4 - 3x \geq 0$:

$4 - 3x > -2$

$-3x > -6$

$-x > -2$

$x < 2$

Se $4 - 3x < 0$:

$-4 + 3x > -2$

$3x > 2$

$x > \frac{2}{3}$

Portanto, $\frac{2}{3} < x < 2$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < x < 2\right\}$.

**2. Unesp** – No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o conjunto solução S da inequação modular $|x| \cdot |x - 5| \geq 6$ é:

**a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 6\}$

**b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$

**c)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \text{ ou } x \geq 6\}$

**d)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$

**e)** $S = \mathbb{R}$

Temos que, se $x \geq 5$:

$x \cdot (x - 5) \geq 6$

$x^2 - 5x - 6 \geq 0$

Então, $(x + 1)(x - 6) \geq 0$.

Logo, $x \leq -1$ ou $x \geq 6$.

Se $0 \leq x < 5$:

$x \cdot (5 - x) \geq 6$

$5x - x^2 \geq 6$

$x^2 - 5x + 6 \leq 0$

Então, $(x - 2)(x - 3) \leq 0$.

Logo, $2 \leq x \leq 3$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \text{ ou } x \geq 6\}$.

**3. PUC-Minas** C5-H21

Os pesos aceitáveis do pãozinho de 50 g verificam a desigualdade $|x - 50| \leq 2$, em que x é medido em gramas. Então, assinale o peso mínimo aceitável de uma fornada de 100 pãezinhos, em quilogramas.

**a)** 4,5

**b)** 4,8

**c)** 5,2

**d)** 5,5

**e)** 5,8

O peso mínimo pode ser obtido por meio da desigualdade $|x - 50| \leq 2$. Resolvendo, teremos:

$|x - 50| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x - 50 \leq 2 \rightarrow 48 \leq x \leq 52$

Portanto, o peso mínimo é 48 g = 0,048 kg.

Utilizando o método da regra de três, podemos calcular o peso mínimo para 100 pães. Logo:

1 pão ------------ 0,048 kg

100 pães -------- y

$y = 0{,}048 \cdot 100 = 4{,}8$ kg

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**4. Sistema Dom Bosco** – Sejam as funções reais f e g definidas como $f(x) = \sqrt{x-8}$ e $g(x) = |3x - 3|$.

Resolva as inequações:

**a)** $f(x) \leq 4$

**b)** $g(x) \leq 18$

a) Temos que:

$\sqrt{x-8} \leq 4$

$(\sqrt{x-8})^2 \leq 16$

$|x - 8| \leq 16$

Se $x - 8 \geq 0$:

$x - 8 \leq 16$

$x \leq 24$

Se $x - 8 < 0$:

$-x + 8 \leq 16$

$-x \leq 8$

$x \geq -8$

Então, $-8 \leq x \leq 24$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 24\}$

b) Temos $|3x - 3| \leq 18$.

Se $3x - 3 \geq 0$:

$3x - 3 \leq 18$

$3x \leq 21$

$x \leq 7$

Se $3x - 3 < 0$:

$-3x + 3 \leq 18$

$-3x \leq 15$

$x \geq -5$

Então, $-5 \leq x \leq 7$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 7\}$.

**5. Sistema Dom Bosco** – O conjunto de todas as soluções reais que satisfazem a inequação $|2x - 1| \leqslant 4x + 1$ é:

**a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
**b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$
**c)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$
**d)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$

Temos que, se $2x - 1 \geqslant 0$:
$2x - 1 \leqslant 4x + 1$
$-2x \leqslant -2$
$x \geqslant 1$
Se $2x - 1 < 0$:
$-2x + 1 \leqslant 4x + 1$
$-6x \leqslant 0$
$x \geqslant 0$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$.

**6. Una-MG** – A desigualdade $1 < |x - 2| < 2$ verifica-se para todos os números reais x, tais que:

**a)** $1 < x < 3$
**b)** $x < 3$ ou $x > 4$
**c)** $0 < x < 4$
**d)** $0 < x < 1$ ou $3 < x < 4$
**e)** $x < 1$ ou $x > 3$

Temos que, se $x - 2 \geqslant 0$:
$1 < x - 2 < 2$
$3 < x < 4$
Se $x - 2 < 0$:
$1 < -x + 2 < 2$
$-1 < -x < 0$
$0 < x < 1$

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. Sistema Dom Bosco** – O conjunto solução da inequação $|x^2 - 2| \leqslant 2$ é:

**a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 0\}$
**b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$
**c)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$
**d)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 0 \text{ ou } 0 < x \leqslant 2\}$
**e)** $S = \mathbb{R}$

**8. UFPI** – O conjunto solução da inequação $|x^2 - 4x + 3| < 3$ é:

**a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$
**b)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$
**c)** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$
**d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$
**e)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$

**9. FURG-RS** – O conjunto de todos os números reais x que satisfazem a inequação $|x^2 - 2| < 1$:

**a)** $\left(-1, \sqrt{3}\right)$

**b)** $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

**c)** $(-1, 1)$

**d)** $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$

**e)** $\left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup \left(1, \sqrt{3}\right)$

**10. Fuvest-SP** – Determine para quais valores reais de x é verdadeira a desigualdade $|x^2 - 10x + 21| \leq |3x - 15|$.

**11. Udesc** – O conjunto solução da inequação $|\text{sen}(x) - 1| \leq \frac{1}{2}$, com $x \in [0, 2\pi]$ é:

**a)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\right\}$

**b)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}\right\}$

**c)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\pi\}$

**d)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi\right\}$

**e)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\right\}$

**12. EsPCex** – Se $Y = \{y \in \mathbb{R}$ tal que $|6y - 1| \geq 5y - 10\}$, então:

**a)** $Y = \left]-\infty, \frac{1}{6}\right]$

**b)** $Y = \{-1\}$

**c)** $Y = \mathbb{R}$

**d)** $Y = \varnothing$

**e)** $Y = \left]\frac{1}{6}, +\infty\right[$

**13. Facisa-MG** – O conjunto-solução da inequação $|x^2 - 4x| \leq 3$ é dado por:

**a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - \sqrt{7} \leq x \leq 1$ ou $3 \leq x \leq 2 + \sqrt{7}\}$

**b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 - \sqrt{7}$ ou $x \geq 2 + \sqrt{7}\}$

**c)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 - \sqrt{7}$ e $x \geq 2 + \sqrt{7}\}$

**d)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - \sqrt{7} < x \leq 1$ ou $3 \leq x \leq 2 + \sqrt{7}\}$

**e)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - \sqrt{7} \leq x \leq 1$ e $3 \leq x \leq 2 + \sqrt{7}\}$

**14. Sistema Dom Bosco** – Seja a função modular $f(x) = |x^2 - 6x - 8|$, $x \in \mathbb{R}$. Determine os valores de x que satisfazem a inequação $f(x) < 1$.

**15. UFF-RJ** – Com relação aos conjuntos $P = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leqslant \sqrt{7}\}$ e $Q = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leqslant 0{,}333...\}$, afirma-se:

**I.** $P \cup Q = P$
**II.** $Q - P = \{0\}$
**III.** $P \subset Q$
**IV.** $P \cap Q = Q$

Somente são verdadeiras as afirmativas:

**a)** I e III.
**b)** I e IV.
**c)** II e III.
**d)** II e IV.
**e)** III e IV.

**16. PUC-Rio** – Sejam $g_0$, $g_1$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as seguintes funções:

$$g_0(x) = \frac{|x+2|-|x-2|}{2}$$

$$g_1(x) = \frac{g_0(4x+6) + g_0(4x-6)}{2}$$

**a)** Faça o esboço do gráfico de $g_0$.
**b)** Faça o esboço do gráfico de $g_1$.
**c)** Resolva a inequação $g_1(x) \leqslant \frac{x}{2}$.

**17. FGV-SP** – Considere o sistema de inequações dado por:

$$\begin{cases} y \le |x-12| \\ y \ge |2x-12| \\ y \ge |6x-12| \end{cases}$$

A região do plano cartesiano que corresponde à solução desse sistema é um

**a)** triângulo de vértices (3, 6), (8, 4) e (6, 0).
**b)** triângulo de vértices (3, 6), (0, 12) e $\left(\frac{24}{7}, \frac{60}{7}\right)$.
**c)** triângulo de vértices (3, 6), (8, 4) e $\left(\frac{24}{7}, \frac{60}{7}\right)$.
**d)** quadrilátero de vértices (3, 6), (8, 4), (6, 0) e (12, 0).
**e)** quadrilátero de vértices (3, 6), (8, 4), (6, 0) e $\left(\frac{24}{7}, \frac{60}{7}\right)$.

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Sistema Dom Bosco** C5-H21

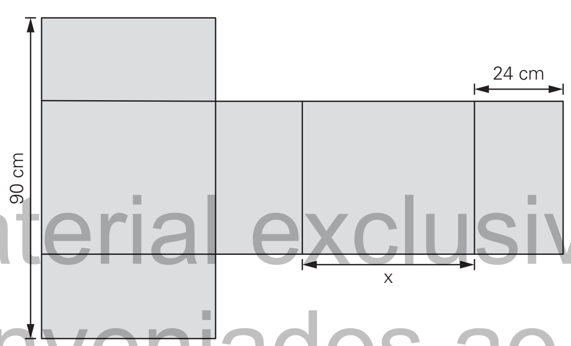
Uma empresa tem n empregados, em que n é um número inteiro positivo e $|-n^2 + 14n - 30| \geqslant 15$, contando o dono, dois seguranças e três dos filhos do dono que já trabalham na empresa. Portanto, conclui-se que nessa empresa trabalham:

**a)** 9 ou mais empregados
**b)** Entre 5 e 9 empregados
**c)** 3 empregados
**d)** 1 empregado
**e)** Nenhum empregado

**19. Enem** C5-H21

Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.

A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.




O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac, é:

**a)** 25
**b)** 33
**c)** 42
**d)** 45
**e)** 49

**20. Sistema Dom Bosco** C5-H21

As alturas das mulheres adultas de determinado país satisfazem a desigualdade $\left|\frac{(h-160)}{20}\right| \leqslant 1$, dada a altura h em centímetros.

Então, a altura mínima de uma mulher desse país, em metros, é igual a:

**a)** 1,60 m
**b)** 1,55 m
**c)** 1,50 m
**d)** 1,45 m
**e)** 1,40 m

# 23 EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

- Introdução
- Equações exponenciais
- Propriedades da potência

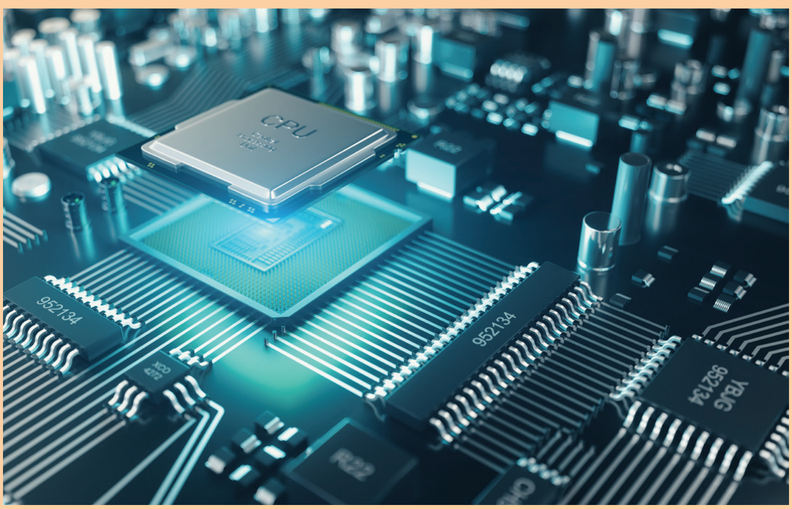
**HABILIDADES**

- Identificar fenômenos que crescem ou decrescem exponencialmente.
- Identificar representações algébricas que expressem relação entre grandezas.
- Interpretar gráficos cartesianos que representem relações entre grandezas.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

## Introdução

Na Matemática, existem funções que têm crescimento exponencial (ou geométrico). Ou seja, são funções cujo crescimento de um valor não depende de uma constante exponencial fixa previamente dada em uma função (como nas funções polinomiais onde a variável se encontra como base de uma constante exponencial fixa), mas sim de uma variável exponencial, que determinará a taxa de crescimento da função.

Segundo a lei de Moore, o número de transistores de um *chip* de processamento seria dobrado a cada período equivalente a um ano e meio (18 meses) – portanto, crescendo exponencialmente. Essa lei possibilita estimar o custo para fabricação de unidades de processamento (CPUs e *chips* em geral) pelo menos até 2021.




ROST-9D/ISTOCKPHOTO

Placa de computador e seus transistores.

## PROPRIEDADES DA POTÊNCIA

### Definições

Considerando **b** um número real e **n** e **k**, números naturais, temos:

- $b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ vezes}}$, para $n > 1$

Em que:

$b$ = base

$n$ = expoente

$b^n$ = potência

- $b^1 = b$
- $b^0 = 1$, com $b \neq 0$
- $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$, com $b \neq 0$
- $b^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{b^n}$, com $b^n > 0$ e $k \neq 0$

## Propriedades

Considerando **a** e **b** números reais diferentes de zero e **n** e **m**, números inteiros, temos:

- $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$
- $\dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$
- $(b^n)^m = b^{n \cdot m}$
- $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$

### Propriedade especial

Para **b** número real, positivo e diferente de 1, temos: $b^q = b^k \rightarrow q = k$

**Demonstração**: $b^q = b^k$

Como $b \neq 0$, dividimos ambos os lados por $b^k$:

$$\frac{b^q}{b^k} = \frac{b^k}{b^k}$$

$$b^{q-k} = 1$$

Como $b \neq 1$, por definição a única possibilidade de a potência resultar no valor 1 é o expoente zero.

Então:

$$b^{q-k} = b^0$$
$$q - k = 0$$
$$q = k$$

Portanto, $b^q = b^k \leftrightarrow q = k$.

## EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Equações que têm potências com incógnita no expoente são chamadas **equações exponenciais**. A possibilidade de compararmos potências com a mesma base facilita o trabalho de encontrar solução para equação exponencial. No caso de bases distintas, precisamos utilizar logaritmos.

### Resolução de equações exponenciais

Para resolvermos uma equação exponencial, procuramos um modo de obter igualdade de potências na mesma base, por meio de passagens matemáticas. Conseguindo uma igualdade do tipo $b^{f(x)} = b^{g(x)}$ (com **b** real, positivo e diferente de 1), basta aplicarmos a propriedade anterior e resolver a nova equação:

$$f(x) = g(x)$$

### EXERCÍCIO RESOLVIDO

**1. UFRGS-RS** – Sabendo-se que $6^{x+2} = 72$, tem-se que $6^{-x}$ vale

a) –4
b) –2
c) 0
d) $\frac{1}{2}$
e) e) 2

**Resolução:**

Temos que:

$6^{(x+2)} = 72 \rightarrow 6^x \cdot 6^2 \rightarrow 6^x = \dfrac{72}{36} \rightarrow 6^x = 2$

$6^{-x} = \dfrac{1}{6^x} = \dfrac{1}{2}$

**2. UFS** – Determine o conjunto verdade da equação $2^{x+\frac{3}{2}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$.

**Resolução:**

Temos que:

$2^{x+\frac{3}{2}} = 2^3 \rightarrow x + \dfrac{3}{2} = 3 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Portanto, $x = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

**3. UESPI** – O conjunto solução da equação é

a) {0}
b) {1, 0}
c) {0, 1}
d) {1}
e) {–1}

**Resolução:**

Temos que:

$2^{2x} = 3 \cdot 2^x - 2 \rightarrow (2^x)^2 = 3 \cdot 2^x - 2$

Chamando $2^x = y$

$y^2 = 3 \cdot y - 2 \rightarrow y^2 - 3 \cdot y + 2 = 0$

$$\begin{matrix} s = 2 \\ P = 2 \end{matrix} \begin{cases} y = 1 \\ \text{ou} \\ y = 2 \end{cases}$$

$2^x = 1$ ou $2^x = 2$

$2^x = 2^0$ ou $2^x = 2^1$

$x = 0$ ou $x = 1$

$S = \{0; 1\}$

## EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

**Propriedades da potência**

As principais propriedades de potência são:

$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$

$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$

$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

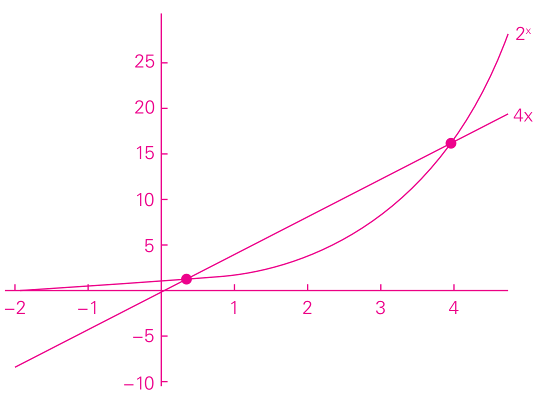
**1. Sistema Dom Bosco** – Dado que $2^x = 64$, calcule o valor de $3^{x-1}$.

Temos que: $2^x = 64 = 2^6$. Logo, $x = 6$.
Então, $3^{x-1} = 3^{6-1} = 3^5 = 243$.

**2. UEG-GO** – Dada a função $y = x - 2^x + 2$, verifica-se que ela

**a)** não possui raiz real.
**b)** possui uma raiz real.
**c)** possui duas raízes reais.
**d)** possui três raízes reais.

Temos que:
$x - 2^x + 2 = 0$
$2^x = x + 2$
Fazendo $a = x + 2$:
$2^a \cdot 2^{-2} = a$
$2^a = 4a$
Analisando os gráficos de $2^a$ e $4^a$:




Podemos identificar duas soluções reais para a equação.

**3. UNP-RN** C5-H21

Um grupo de pesquisa de nossa Universidade Potiguar vem realizando uma pesquisa e constatou que em uma colônia de bactérias do tipo XX, uma bactéria divide-se em duas a cada hora. Com essa afirmação constatada, o número de bactérias originadas de uma só bactéria dessa colônia depois de 15 horas é de:

**a)** 34 256
**b)** 43 765
**c)** 15 634
**d)** 32 768
**e)** 27 648

O número de bactérias (y) é igual a uma potência na base 2.
Logo, $y = y(x) = 2^x$ (em que x é o número de horas decorridas).
Então, em 15 horas, $y(15) = 2^{15} = 32\,768$ bactérias.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**4. Unoesc-SC** – Resolva a expressão que representa uma equação exponencial. Neste caso, um ponto representa uma multiplicação. Qual o valor da variável X?

$$3 \cdot 2^x = 3072$$

**a)** $x = 10$
**b)** $x = 8$
**c)** $x = 20$
**d)** $x = 11$

Temos que:
$3 \cdot 2^X = 3\,072$

$$2^X = \frac{3\,072}{3} = 1\,024 = 2^{10}$$

$X = 10$.

**5. PUC-Rio** – Quanto vale $\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}}$?

**a)** $\sqrt[3]{3}$
**b)** $\sqrt[3]{9}$
**c)** $1 + .\sqrt[3]{3}$.
**d)** $1 + \sqrt[3]{9}$
**e)** $2\sqrt[3]{3}$

$$\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}\left(1+3^{\frac{1}{3}}\right)}{3^{\frac{1}{3}}} = 1 + 3^{\frac{1}{3}} =$$
$$= 1 + \sqrt[3]{3}.$$

**6. UFPR (adaptado)** – A análise de uma aplicação financeira ao longo do tempo mostrou que a expressão $V(t) = 1\,000 \cdot 2^{0,0625 \cdot t}$ fornece uma boa aproximação do valor V (em reais) em função do tempo t (em anos), desde o início da aplicação. Depois de quantos anos o valor inicialmente investido dobrará?

No início da aplicação, $t = 0$. Logo, $V(0) = 1\,000$.
Então, para que $V(t) = 2\,000$, temos:
$2\,000 = 1\,000 \cdot 2^{0,0625 \cdot t}$
$2^1 = 2^{0,0625 \cdot t}$
$0,0625 \cdot t = 1$
$t = 16$ anos.

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. EsPCex** – As raízes inteiras da equação $2^{3x} - 7 \cdot 2^x + 6 = 0$ são

**a)** 0 e 1
**b)** −3 e 1
**c)** −3, 1 e 2
**d)** −3, 0 e 1
**e)** 0, 1 e 2

**8. UniCEUB-DF** – O dobro da soma das raízes da equação

$$2\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = -3 \text{ é}$$

**a)** 0
**b)** 1
**c)** 2
**d)** 3
**e)** 4

**9. FGV** – Se $\frac{m}{n}$ é a fração irredutível que é solução da equação exponencial $9^x - 9^{x-1} = 1\,944$, então $m - n$ é igual a

**a)** 2
**b)** 3
**c)** 4
**d)** 5
**e)** 6

**10. Sistema Dom Bosco** – Resolva a equação $25^x + 625 = 130 \cdot 5^x$ no conjunto dos reais.

**11. UNP-RN** – Um professor de educação física, com auxílio de um colega matemático, criou uma fórmula matemática para calcular aproximadamente a área, em metros quadrados ($m^2$), da superfície corporal de uma criança (Sc), em função da massa da criança (m) em quilograma, definida por: $SC = \frac{11}{100} m^{\frac{2}{3}}$.

Pegando como experiência uma criança de 8 kg e considerando $\left(2^{\frac{1}{2}} = 1{,}4\right)$, qual a massa que a criança terá quando a área de sua superfície corporal duplicar?

**a)** 32 kg
**b)** 16,7 kg
**c)** 18,92 kg
**d)** 22,4 kg

**12. UEA-AM**

O pirarucu, espécie que só existe na Amazônia, é um dos maiores peixes de água doce do Brasil. Apesar de ameaçado de extinção, pesquisas recentes permitiram o desenvolvimento de sua reprodução em laboratório.

*Revista Turismo*, junho e julho de 2014. (Adaptado)

Para iniciar-se a criação de pirarucu em um cativeiro, estudos indicam que a massa P, em gramas, de cada peixe, decorridos m meses, é dada pela fórmula $P = 5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 \cdot 10^{0{,}1m}$

Desse modo, é correto afirmar que cada peixe terá aproximadamente 10 kg para m igual a

**a)** 9
**b)** 12
**c)** 8
**d)** 6
**e)** 10

**13. Unicamp-SP** – Considere as funções

$f(x) = 3^x$ e $g(x) = x^3$, definidas para todo número real x. O número de soluções da equação $f(g(x)) = g(f(x))$ é igual a

**a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4

**14. Sistema Dom Bosco** – Resolva a equação $2^{x+1} + 2^{x-2} + 2^{x+3} = 328$ no conjunto dos reais.

**15. Unit-SE** – Para analisar o efeito de um remédio no extermínio de determinada bactéria, cientistas fizeram experimentos expondo uma população desse micro-organismo ao remédio e verificando o tempo necessário para que fosse exterminada. Ao final, verificou-se que a população da bactéria d dias, após a exposição ao remédio, poderia ser estimada por meio da função $P(d) = P_0 \cdot (0{,}25)^d$, na qual $P_0$ é a população inicial de bactérias. Sabe-se ainda que dois dias após a exposição ao remédio a população de bactéria reduziu-se a 3 750 indivíduos. Escrevendo-se $P_0$ em notação científica, tem-se $P_0 = \alpha \cdot 10^n$.

Nessas condições, o valor do produto $\alpha \cdot n$, é igual a

**a)** 12
**b)** 18
**c)** 24
**d)** 30
**e)** 36

**16. UESPI** – Quantos números reais satisfazem a equação $(x^2 - 5x + 7)^{x+1} = 1$?

**17. ITA** – A soma de todos os números reais x que satisfazem a equação $8^{\sqrt{x+1}} + 44 \cdot \left(2^{\sqrt{x+1}}\right) + 64 = 19\left(4^{\sqrt{x+1}}\right)$ é igual a

**a)** 8
**b)** 12
**c)** 16
**d)** 18
**e)** 20

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. UFSM-RS** C5-H22

Para tornar o conhecimento científico mais prático, uma escola resolveu montar um laboratório. A ideia surgiu depois da divulgação da pesquisa sobre o letramento científico no Brasil realizada pela primeira vez em 2014 pelo Instituto Abramundo, a qual aponta que apenas 5% das pessoas pesquisadas têm letramento científico proficiente. Para realizar a compra dos equipamentos, a direção da escola teve de recorrer a uma instituição financeira. O valor de cada parcela do financiamento foi de R$ 2.600,00. Em um dado mês, a direção atrasou o pagamento, o que acarretou uma multa de 2% sobre o valor da parcela e mais uma taxa de juro composto de 0,033% sobre o valor inicial da parcela por dia de atraso. A expressão que descreve o valor do juro pago pela escola em função do tempo t de atraso em dias é

**a)** $2\,600\,[(1{,}00033)^t - 0{,}98]$
**b)** $2\,600\,[(1{,}0033)^t - 0{,}98]$
**c)** $2\,600\,[(1{,}00033)^t + 0{,}02]$
**d)** $2\,600\,[(1{,}0033)^t + 0{,}02]$
**e)** $2\,600\,[(1{,}00033)^t - 0{,}8]$

**19. EBMSP-BA** C5-H21

Um novo tipo de circuito eletrônico que se dissolve em contato com líquidos, após cumprir sua função, acaba de ser desenvolvido por uma equipe internacional de cientistas. O circuito eletrônico biodegradável é um chip que apresenta componentes que se dissolvem em água ou em fluidos corporais porque têm dimensões nanométricas. Quem controla a dissolução do conjunto é seu envoltório, feito de seda, especialmente produzida pelo bicho-da-seda. Para garantir a característica semicondutora dos elementos ativos do chip e permitir o seu funcionamento, usou-se o silício, o material mais apropriado para essa função. Um circuito eletrônico, além dos elementos ativos, contém vários elementos passivos, como resistores, capacitores e indutores, nesse caso, fabricados com nanofios de magnésio e óxido de magnésio, que têm dissolução quase imediata quando entram em contato com o meio aquoso. Essa nova classe de dispositivos biodegradáveis tem grande aplicação na medicina porque apresenta biocompatibilidade e quantidades de substâncias muito menores do que aquelas usadas em procedimentos médicos corriqueiros, como cirurgias intravasculares, encapsulamento de medicamentos e suturas.

SANTOS, TIRABOSCHI, 2012.

Admitindo-se hipoteticamente que o percentual de funcionalidade do chip decresça em t dias de acordo com o modelo exponencial $f(t) = Ca^{-kt} - 150$, em que C, a e k são constantes reais, $a > 0$ e $a \neq 1$, e considerando-se que o circuito biodegradável é totalmente funcional no dia 0 e tem a metade de sua funcionalidade no dia 20, pode-se estimar corretamente que a queda de funcionalidade nos 40 primeiros dias é de

**a)** 94%
**b)** 90%
**c)** 86%
**d)** 82%
**e)** 78%

**20. Unifor-CE** C5-H19

A curva de aprendizagem é o gráfico de uma função frequentemente utilizada para relacionar a eficiência de trabalho de uma pessoa em função de sua experiência. Suponha que, após t meses de experiência, um operário consiga montar p peças por hora. Essas variáveis se relacionam matematicamente pela expressão $p = 30 - 20 \cdot e^{-0,4t}$. A quantidade máxima de peças que conseguirá montar por hora é de

**a)** 10
**b)** 20
**c)** 30
**d)** 40
**e)** 50

# 24 FUNÇÕES EXPONENCIAIS

- Funções exponenciais
- Inequações exponenciais

### HABILIDADES

- Identificar fenômenos que crescem ou decrescem exponencialmente.
- Identificar representações algébricas que expressam relação entre grandezas.
- Interpretar gráficos cartesianos que representem relações entre grandezas.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

## Funções exponenciais

As funções exponenciais estão presentes em diversos contextos: no crescimento populacional, na radioatividade, em financiamentos, em curvas de aprendizado, entre outros. A análise de gráficos de funções exponenciais é essencial para a tomada de decisões em várias situações do cotidiano.


KTASIMAR/ SHUTTERSTOCK

Curva do gráfico de uma função exponencial.

### DEFINIÇÃO

**Função exponencial** é aquela com domínio e contradomínio no conjunto dos reais. É expressa por $f(x) = b^x$, com

$b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ e $b \neq 1$ e com $\text{Im} = \mathbb{R}^*_+$.

Algumas substâncias se decompõem segundo um padrão de função exponencial. Essa decomposição, chamada **meia-vida de uma substância**, é o tempo necessário para que ela reduza sua massa pela metade.

Um elemento muito comum para determinar a idade de fósseis é o **carbono-14**, cuja meia-vida é de 5 730 anos. Ou seja, esse é o tempo necessário para determinada massa desse isótopo instável decair para a metade da massa anterior.

BUDIMIR JEVTIC/ SHUTTERSTOCK

Fósseis da era pré-histórica.

## GRÁFICO

Com auxílio de tabelas, veremos como construir um gráfico de função exponencial.

Nas tabelas a seguir, a primeira coluna apresenta números inteiros quaisquer. A segunda refere-se às potências cujos expoentes são os respectivos elementos da primeira coluna. Organizando os dados em pares ordenados, podemos apresentar cada informação na forma de par ordenado por $(x; b^x)$, em que **b** é um número real maior que zero e diferente de 1.

Vamos considerar as funções $y = 2x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

**Tabela I**

| x | $2^x$ |
|---|---|
| –2 | $\frac{1}{4}$ |
| –1 | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |

Ao representarmos os pares ordenados $(x, 2^x)$ no plano cartesiano, temos:

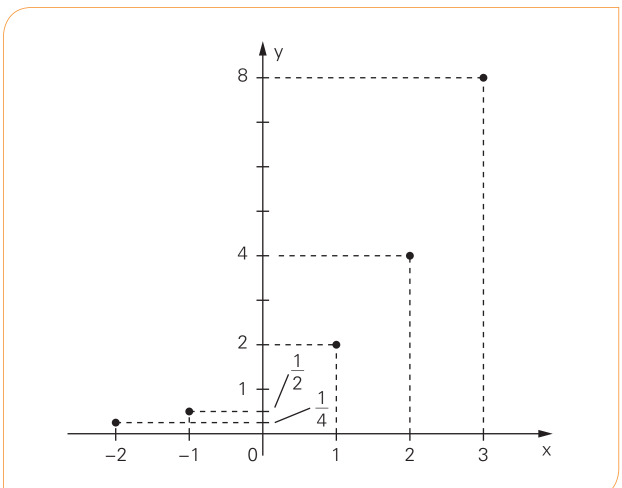
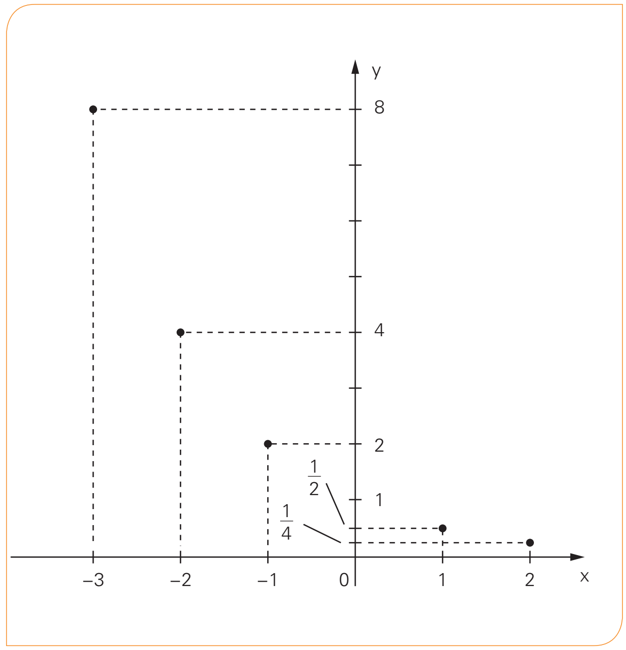



**Tabela II**

| x | $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ |
|---|---|
| –3 | 8 |
| –2 | 4 |
| –1 | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{4}$ |

Ao representarmos os pares ordenados $\left(x, \left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$ no plano cartesiano, temos:




Considerando a possibilidade de usarmos todo o conjunto dos números reais, em vez de apenas alguns valores inteiros de **x**, podemos pensar nesses pares ordenados, representados no plano cartesiano, formando o gráfico da função exponencial.

Gráfico da função $f(x) = 2^x$

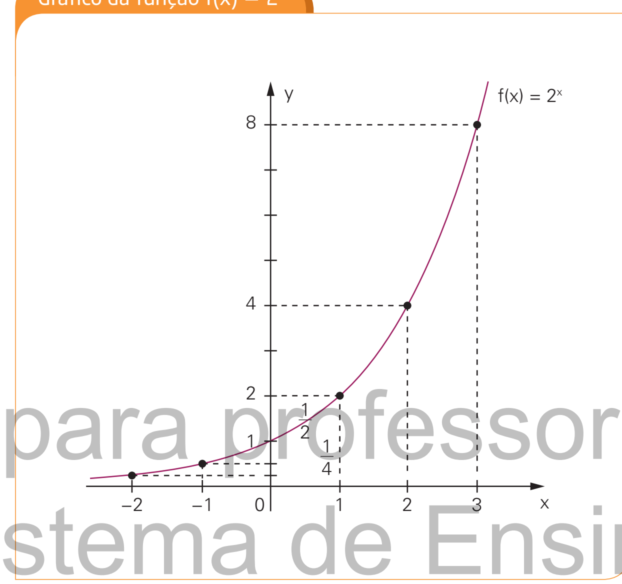
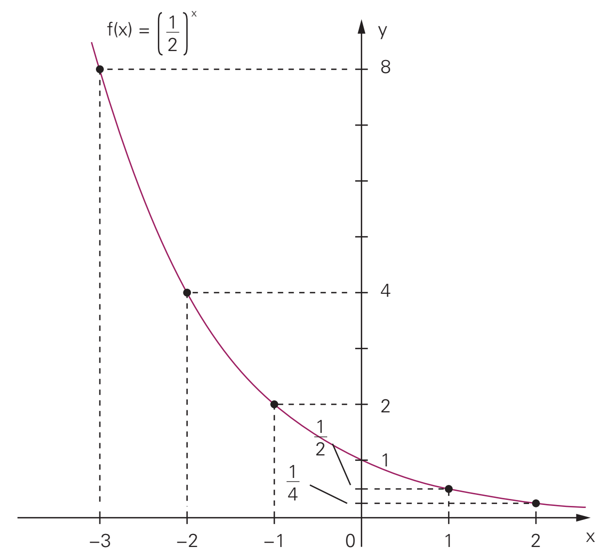


Gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$




**Domínio:** D = $\mathbb{R}$

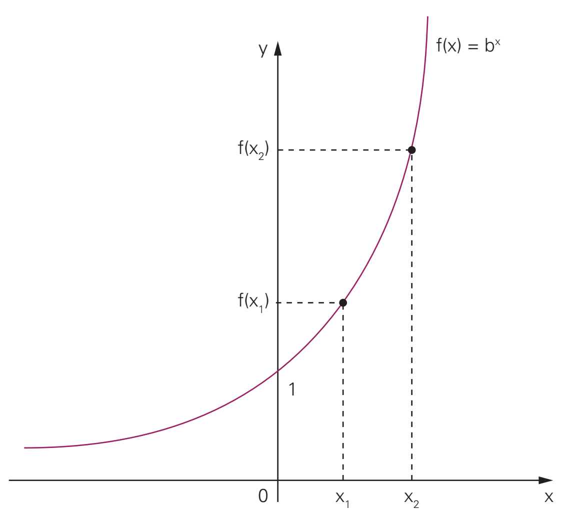
**Contradomínio**: CD = $\mathbb{R}$

**Conjunto imagem:** Im = $\mathbb{R}_+^*$

Assim, a função exponencial é **crescente** quando a base da potência é um número real maior que 1 e **decrescente** quando a base da potência apresenta valor real entre 0 e 1.

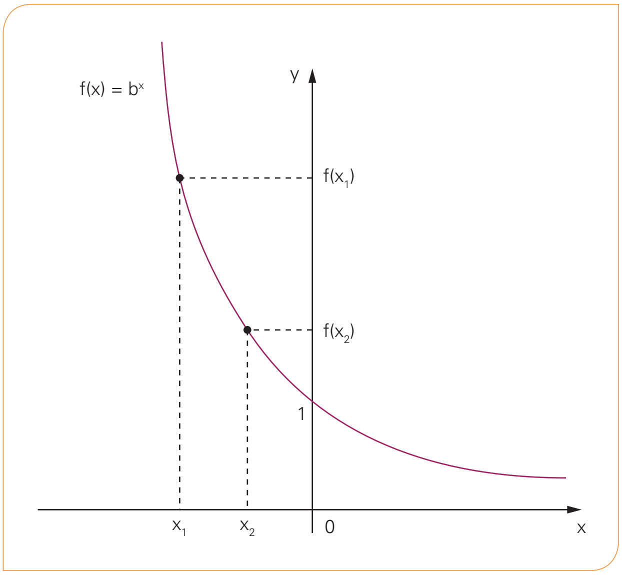
Ao analisarmos os gráficos, podemos fazer as seguintes considerações:

- Se b > 1, a função é crescente.



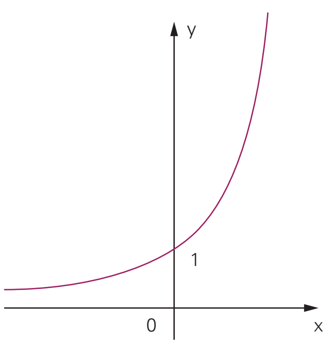
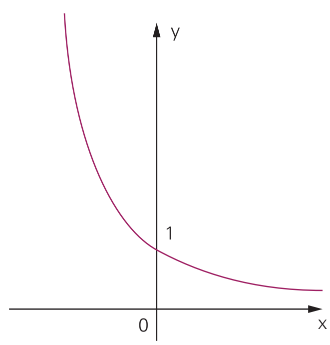

$x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- Se $0 < b < 1$, a função é decrescente.




$x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

**Resumo**

| $f(x) = b^x$ com $b > 0, b \neq 1$ | |
|---|---|
| $b > 1$ | $0 < b < 1$ |
|  |  |
| Crescente | Decrescente |
| $x_1 < x_2 \leftrightarrow b^{x_1} < b^{x_2}$ | $x_1 < x_2 \leftrightarrow b^{x_1} > b^{x_2}$ |
| $x_1 > x_2 \leftrightarrow b^{x_1} > b^{x_2}$ | $x_1 > x_2 \leftrightarrow b^{x_1} < b^{x_2}$ |

## Inequações exponenciais

**Inequação exponencial** é toda inequação que apresenta a variável no expoente, sendo as bases iguais ou não. Ela pode ser reduzida a uma destas formas:

$b^{f(x)} > b^{g(x)}$

$b^{f(x)} \geqslant b^{g(x)}$

$b^{f(x)} < b^{g(x)}$

$b^{f(x)} \leqslant b^{g(x)}$

$b^{f(x)} \neq b^{g(x)}$

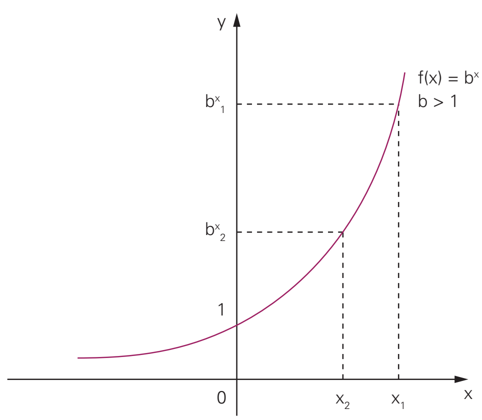
Lembre-se de que **b** representa um número real positivo e diferente de 1.

## RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

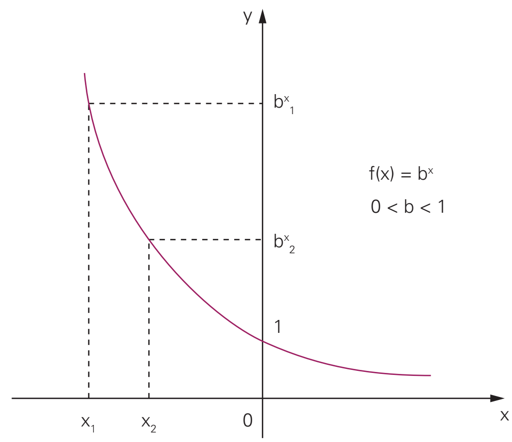
Para resolvermos as inequações exponenciais de bases iguais, vale lembrar que a função exponencial é **sempre** crescente ou decrescente, conforme a base seja um número real maior que 1 ou varie entre 0 e 1.

Então, quando a base é um número real maior que 1, a função é crescente, considerando que, quanto maior a potência, maior é seu expoente. Logo, o sentido da desigualdade entre as potências é o mesmo da desigualdade entre os respectivos expoentes.

Assim, para $b \in \mathbb{R}$ e $b > 1$, segue $x_1 < x_2 \leftrightarrow$ $\leftrightarrow b^{x_1} < b^{x_2}$ e $x_1 > x_2 \leftrightarrow b^{x_1} > b^{x_2}$. Isso pode ser visto no gráfico a seguir.




Por outro lado, quando a base é um número real entre 0 e 1, a função é decrescente, considerando que, quanto maior a potência, menor é seu expoente. Então, o sentido da desigualdade entre as potências deve ser invertido em relação à desigualdade entre os respectivos expoentes.




Assim, para e $b \in \mathbb{R}$ e $0 < b < 1$, segue que $x_1 <$ $< x_2 \leftrightarrow b^{x_1} > b^{x_2}$ e $x_1 > x_2 \leftrightarrow b^{x_1} < b^{x_2}$.

**Resumo**

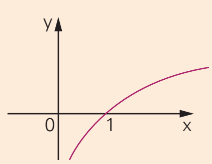
- $b^{f(x)} > b^{g(x)}$ e $b > 1$
  Nesse caso, a função exponencial envolvida é crescente, e os expoentes são comparados, respectivamente, usando a desigualdade **no mesmo sentido** ao das potências, isto é, $f(x) > g(x)$.
- $b^{f(x)} > b^{g(x)}$ e $0 < b < 1$
  Nesse caso, a função exponencial é decrescente, e os expoentes são comparados, respectivamente, usando a desigualdade **no sentido contrário** ao das potências, isto é, $f(x) < g(x)$.

**Observação:** É possível que as potências nas desigualdades não tenham a mesma base. Torna-se necessário, então, recorrermos aos logaritmos.

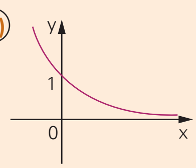
### EXERCÍCIO RESOLVIDO

**1. Unifor-CE** – Uma possível representação gráfica da função definida por $f(x) = 10^{-x}$ é

**a)**

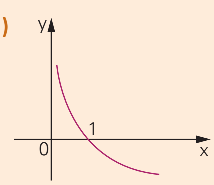



**b)**

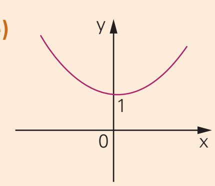



**c)**


**d)**




**e)**




**Resolução:**

Temos que:

$$f(x) = 10^{-x} = (10^{-1})^x = \left(\frac{1}{10}\right)^x$$

A função é decrescente, logo o item b representa uma possível representação gráfica da função $f(x) = 10^{-x}$.

# ROTEIRO DE AULA

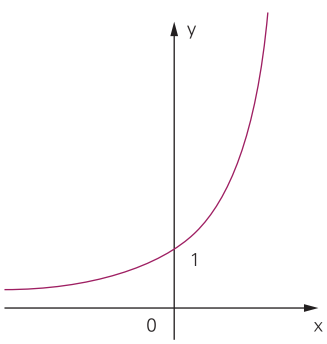
## FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Definição: A função exponencial tem domínio no conjunto dos reais. É expressa pela equação $f(x) = b^x$, com $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ e $b \neq 1$ e $Im = \mathbb{R}_+^*$.

### Gráfico

$f(x) = b^x$ com $b > 0$, $b \neq 1$

$b > 1$

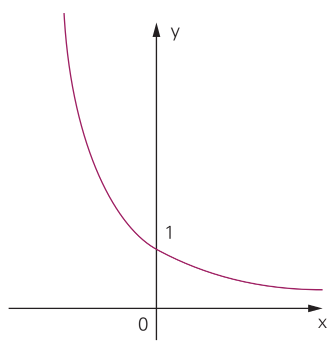



Crescente

$x_1 < x_2 \leftrightarrow$ $b^{x_1}$ $<$ $b^{x_2}$

$x_1 > x_2 \leftrightarrow$ $b^{x_1}$ $>$ $b^{x_2}$

$0 < b < 1$




Decrescente

$x_1 < x_2 \leftrightarrow$ $b^{x_1}$ $>$ $b^{x_2}$

$x_1 > x_2 \leftrightarrow$ $b^{x_1}$ $<$ $b^{x_2}$

### Inequações exponenciais

Inequações que apresentam a variável no expoente, sendo as bases iguais ou não. Podem ser escritas das seguintes formas:

$b^{f(x)}$ $>$ $b^{g(x)}$

$b^{f(x)}$ $\geq$ $b^{g(x)}$

$b^{f(x)}$ $<$ $b^{g(x)}$

$b^{f(x)}$ $\leq$ $b^{g(x)}$

$b^{f(x)}$ $\neq$ $b^{g(x)}$

- No caso $b^{f(x)} > b^{g(x)}$ e $b > 1$, a função exponencial é crescente.
- No caso $b^{f(x)} > b^{g(x)}$ e $0 < b < 1$, a função exponencial é decrescente.

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Unesp** C6-H25

A revista *Pesquisa Fapesp*, na edição de novembro de 2012, publicou o artigo intitulado Conhecimento Livre, que trata dos repositórios de artigos científicos disponibilizados gratuitamente aos interessados, por meio eletrônico. Nesse artigo, há um gráfico que mostra o crescimento do número dos repositórios institucionais no mundo, entre os anos de 1991 e 2011.


Observando o gráfico, pode-se afirmar que, no período analisado, o crescimento do número de repositórios institucionais no mundo foi, aproximadamente,

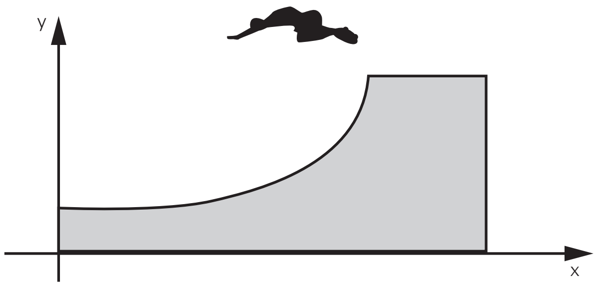
**a)** exponencial.
**b)** linear.
**c)** logarítmico.
**d)** senoidal.
**e)** nulo.

O gráfico do problema descreve uma curva do tipo $y = b^x$, que é uma função exponencial.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

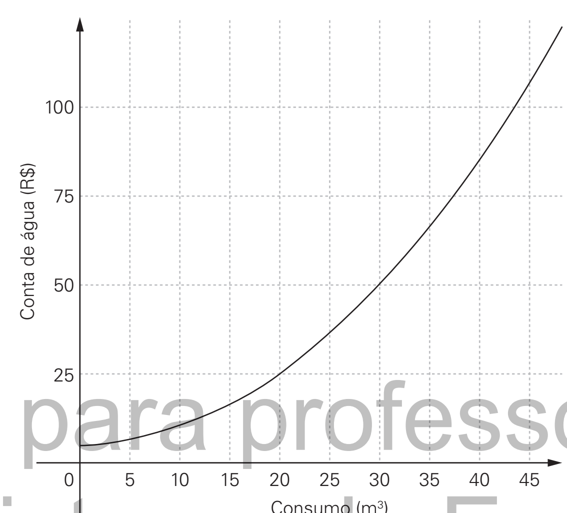
**2. PUC-RS** – Observe, na figura abaixo, uma parte da rampa em uma pista de skate. Sua forma é semelhante à representação gráfica de uma função em que $y = f(x)$ é dada por




**a)** $y = ax + b,\ a \neq 0$
**b)** $y = |ax|,\ a \neq 0$
**c)** $y = \sqrt{ax},\ a \neq 0$
**d)** $y = \log_a(x),\ a > 1$
**e)** $y = a^x,\ a > 1$

Podemos observar que a forma da pista se assemelha à curva de uma função exponencial, ou seja, $y = a^x$, com $a > 1$.

**3. Fatec-PR (adaptado)** – Suponha que, em determinada cidade, o valor da conta de água residencial em função do seu consumo seja dado pelo gráfico.

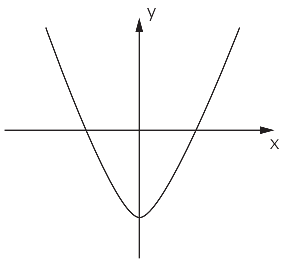


Em uma residência, o valor da conta de água no mês de junho foi de R$ 50,00. Diante dos gastos, os moradores resolveram economizar e reduzir o valor da conta à metade. Para tanto, a redução de consumo deve ser, em metros cúbicos, de

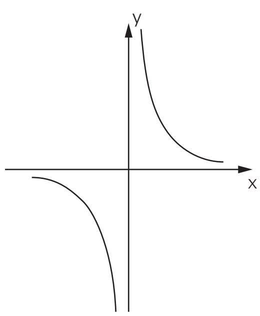
Segundo o gráfico, para diminuirmos o valor da conta pela metade (nesse caso, R$ 25,00), devemos consumir 20 $m^3$. Ou seja, precisamos reduzir 10 $m^3$ do consumo.

**4. PUC-Rio** – Assinale o gráfico que melhor representa a curva de equação $y = \frac{1}{x^2}$.

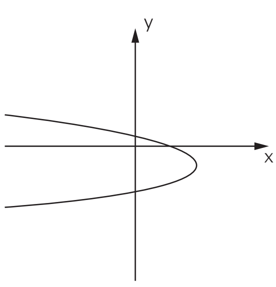
**a)**



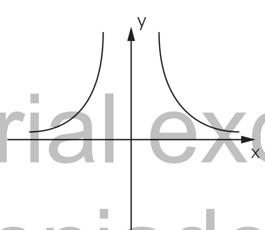

**b)**



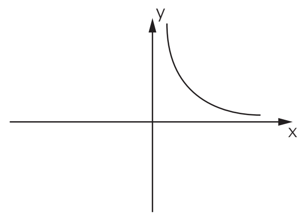

**c)**




**d)**




**e)**




Podemos observar que, para $x > 0$, $y > 0$. Para $x < 0$, $y > 0$. Quando $x \to 0$, $y \to \infty$

**5. Univag-MT** – Um grupo de ambientalistas alocou, no início de 1990, uma pequena população de 270 indivíduos de uma espécie animal em extinção em uma área de proteção ambiental. Devido ao ambiente propício para o desenvolvimento e procriação da espécie, os ambientalistas projetaram que o número N(t) de indivíduos dessa população cresceria exponencialmente ao longo dos primeiros 30 anos, segundo a função $N(t) = 270 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{k \cdot t}$, sendo t o número de anos transcorridos após 1990.

Se após 20 anos o número de indivíduos dessa população passou a ser 480, confirmando a projeção feita pelos ambientalistas, então no início do ano 2020, quando serão completados os primeiros 30 anos, é esperado que o número de indivíduos dessa população seja igual a

**a)** 640
**b)** 690
**c)** 725
**d)** 585
**e)** 860

Temos que $N(20) = 270 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{k \cdot 20} = 480$.

Logo $\left(\frac{4}{3}\right)^{k \cdot 20} = \frac{16}{9} \to \left(\frac{4}{3}\right)^{k \cdot 20} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$.

$20k = 2$
$k = 0{,}1$

Portanto, $N(30) = 270 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{0{,}1 \cdot 30} = 270 \cdot \frac{64}{27} = 640$.

**6. UFPA (adaptado)** – Uma substância ingerida pelo organismo é excluída pelo sistema excretor segundo uma função exponencial. A vida média é o tempo que metade de uma quantidade ingerida leva para decair à metade, que, para a substância em questão, é de 12 horas. Calcule a quantidade da substância, em miligramas, a ser ingerida de modo que, ao final de 36 horas, a quantidade restante seja de 10 mg.

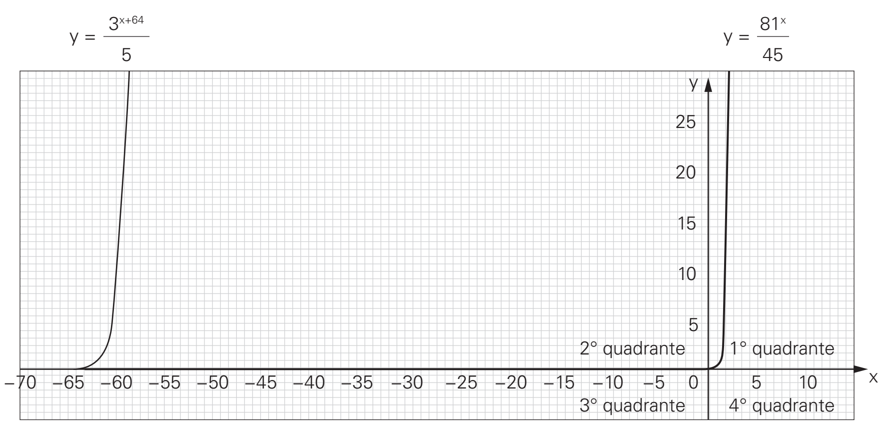
O tempo de meia-vida da substância é de 12h.

Então, em 36 horas teríamos a quantidade reduzida em $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ vezes.

Como a quantidade restante é de 10 mg, a quantidade inicial é de $\frac{10}{\frac{1}{8}} = 80$ mg.

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. Unesp** – Observe, no plano cartesiano de eixos ortogonais, o gráfico de duas funções exponenciais de




A intersecção desses gráficos ocorrerá em

**a)** infinitos pontos, localizados no 2º quadrante.
**b)** um único ponto, localizado no 2º quadrante.
**c)** um único ponto, localizado no 3º quadrante.
**d)** um único ponto, localizado no 1º quadrante.
**e)** um único ponto, localizado no 4º quadrante.

**8. SLMANDIC-PR** – A concentração de um fármaco no sangue é dada pela função $y = 100\,(0,9)^t$, com y em mg e t, em horas. A dose inicial e a quantidade deste fármaco no sangue de um paciente, após 3 horas da aplicação, são dadas, respectivamente, por:

**a)** 27 mg e 84,3 mg
**b)** 90 mg e 27 mg
**c)** 90 mg e 68,4 mg
**d)** 100 mg e 72,9 mg
**e)** 100 mg e 81 mg

**9. Univag-MT** – O crescimento de uma colônia de bactérias obedece à função $f(x) = 5\,000 \cdot 2^{x+1}$, sendo f(x) o número de bactérias e x o número de dias, com $1 \leqslant x \leqslant 12$. O número de bactérias atingirá o quádruplo do valor do 4º dia no

**a)** 6º dia
**b)** 5º dia
**c)** 8º dia
**d)** 7º dia
**e)** 9º dia

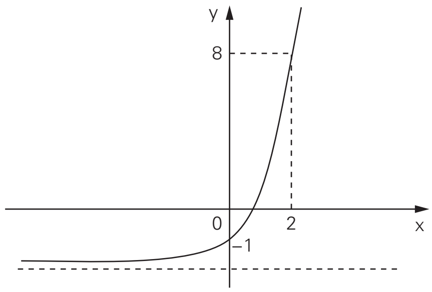
**10. Unifenas (adaptado)** – Segundo estudos, sabe-se que a produção de alimentos cresce linearmente com o tempo. Já a população mundial de humanos cresce exponencialmente. Estima-se que em 2050 a totalidade de alimentos disponível não seja suficiente para suprir a humanidade. Considere $y = 2^x$ como sendo a função exponencial e $y = ax$ como sendo a função linear. Calcule quantas vezes estas funções se interceptam para $0 < a < 1$.

**11. Facisa** – Dada a função $f(x) = 10^x$, o valor da expressão

$$\frac{f(n+3) + 10f(n)}{f(n-1)} + f(1) \text{ é igual a}$$

**a)** 10 100
**b)** 10 120
**c)** 10 110
**d)** 10 010
**e)** 10 020

**12. AFA** – A função real f definida por $f(x) = 3 \cdot a^x + b$, sendo a e b constantes reais, está graficamente representada abaixo.



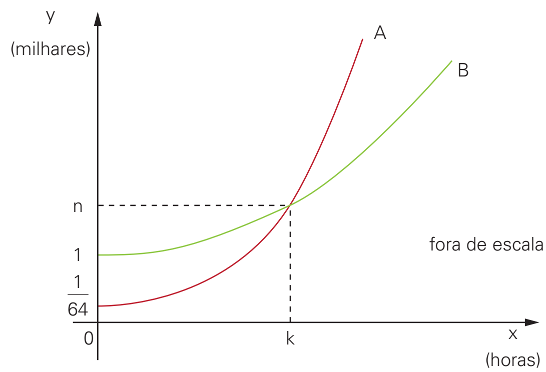

Pode-se afirmar que o produto $(a \cdot b)$ pertence ao intervalo real

**a)** $[-4, -1[$
**b)** $[-2, 1[$
**c)** $[5, 2[$
**d)** $[8, 5]$

**13. Mackenzie-SP** – Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas por $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$ e $g(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$. Então, podemos afirmar que

**a)** f é crescente e g é decrescente
**b)** f e g se interceptam em $x = 0$
**c)** $f(0) = -g(0)$
**d)** $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$
**e)** $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

**14. Unicid-SP (adaptado)** – O gráfico representa o crescimento de duas colônias de bactérias, A e B, que podem ser representadas, respectivamente, pelas funções $A(x) = a^{-x+2}$ e $B(x) = (4)^{\frac{x}{2}}$, sendo x o tempo em horas e A(x) e B(x) o número de bactérias (em milhares) das colônias A e B, respectivamente.




Sabendo que no momento k as duas colônias tinham o mesmo número n de bactérias (em milhares), calcule o valor de $k + n$.

**15. Fuvest-SP** – Quando se divide o Produto Interno Bruto (PIB) de um país pela sua população, obtém-se a renda per capita desse país. Suponha que a população de um país cresça à taxa constante de 2% ao ano. Para que sua renda per capita dobre em 20 anos, o PIB deve crescer anualmente à taxa constante de, aproximadamente,

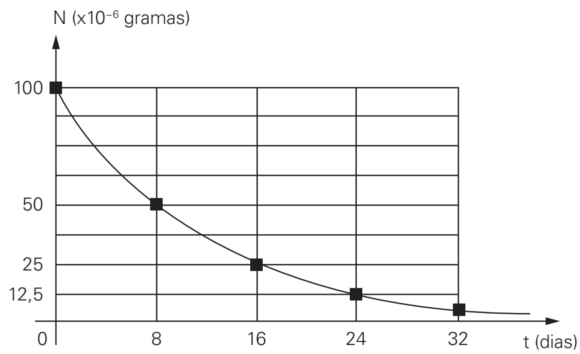
| |
|---|
| Dado $\sqrt[20]{2} \cong 1{,}035$. |

**a)** 4,2%
**b)** 5,6%
**c)** 6,4%
**d)** 7,5%
**e)** 8,9%

**16. Udesc** – O conjunto solução da inequação $\left(\dfrac{1}{7^x}\right)^{x^3-4} - 7\left(7^{x^2+1}\right)^{2x+1} \geqslant 0$ é

**a)** [–2, –1]
**b)** [0,1]
**c)** ] – ∞, –2] ∪ [–1,0] ∪ [1, + ∞]
**d)** [0, + ∞[
**e)** [–2, –1] ∪ [0,1]

**17. PUC-RS (adaptado)** – Em hospitais de grande porte das principais cidades do país são realizados tratamentos que utilizam radioisótopos emissores de radiações alfa, beta e gama. O iodo 131, por exemplo, é um radioisótopo utilizado no tratamento de hipertireoidismo. O gráfico a seguir representa a massa residual de iodo 131 (n) presente em uma amostra em função do tempo (t).




A função que melhor descreve a massa residual de iodo 131 presente na amostra, em função do tempo, é $N(t) = N_0e^{kt}$, onde

**a)** $N_0 > 0$ e $k > 0$
**b)** $N_0 < 0$ e $k > 0$
**c)** $N_0 > 0$ e $k < 0$
**d)** $N_0 < 0$ e $k < 0$

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Enem** C5-H21

O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população: $p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$, em que t é o tempo, em hora, e p(t) é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

**a)** reduzida a um terço.
**b)** reduzida à metade.
**c)** reduzida a dois terços.
**d)** duplicada.
**e)** triplicada.

**19. Enem** C5-H22

Em um experimento, uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida.

Neste experimento, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo

**a)** afim.
**b)** seno.
**c)** cosseno.
**d)** logarítmica crescente.
**e)** exponencial.

**20. PUC-PR** C5-H21

As leis governamentais dos Estados Unidos exigem que, antes que o querosene possa ser usado como combustível de jatos, deve haver a remoção dos poluentes do querosene com uso de argila. A argila fica no interior de um tubo e cada metro do tubo remove 20% dos poluentes que entram nele. Seja $P_0$ a quantidade inicial de poluentes e $P = f(n)$ a quantidade de poluentes que ainda permanecem após n metros da tubulação, a função $P = f(n)$ que melhor representa a quantidade de poluentes retidos no tubo é

**a)** $P = P_0(1,8)n^2$
**b)** $P = P_0(0,8)^n$
**c)** $P = P_0(0,2)^n$
**d)** $P = P_0(1,2)^n$
**e)** $P = P_0(0,8)n$

# TIPOS DE FUNÇÃO

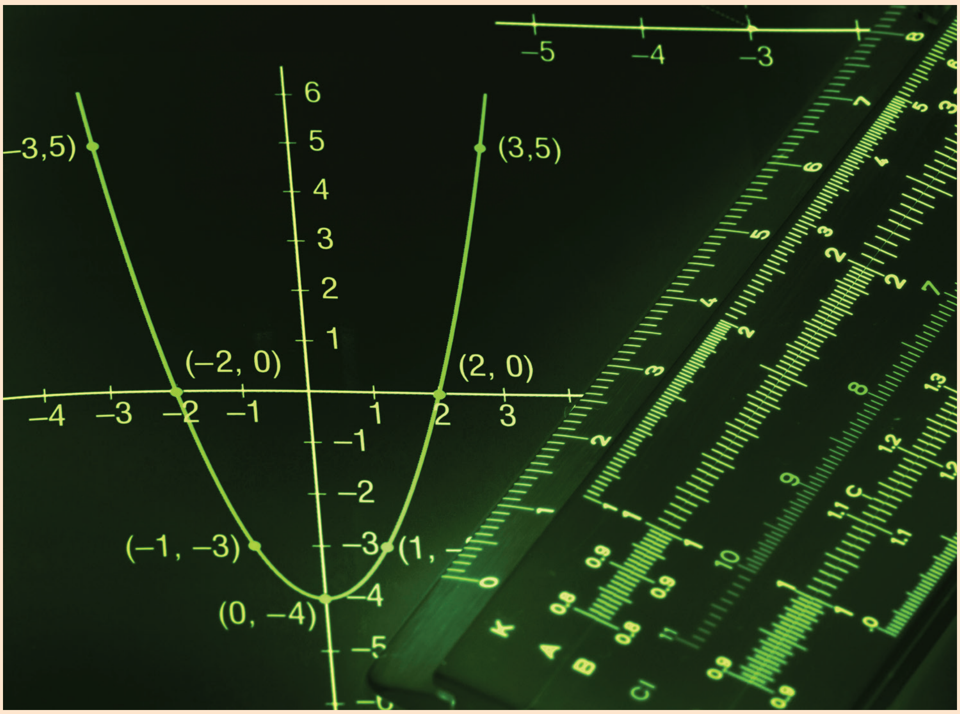
- Introdução
- Função injetora
- Função sobrejetora
- Função bijetora

**HABILIDADES**

- Identificar representações algébricas que expressem relação entre grandezas.
- Interpretar gráficos cartesianos que representem relações entre grandezas.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

## Introdução

BUDIMIR JEVTIC/SHUTTERSTOCK




As funções apresentam algumas propriedades que as caracterizam. Entre elas, podemos destacar: função injetora, função sobrejetora e função bijetora.

Na sequência, veremos em detalhes cada uma delas.

## Função injetora

Uma função f: A → B é **injetora** (ou **injetiva**) quando elementos distintos do domínio apresentam imagens também distintas no contradomínio. Isso significa que, para cada valor de **x** que pertence ao domínio **A**, existe um único valor **y** (ou f(x)) que pertence ao contradomínio **B**.

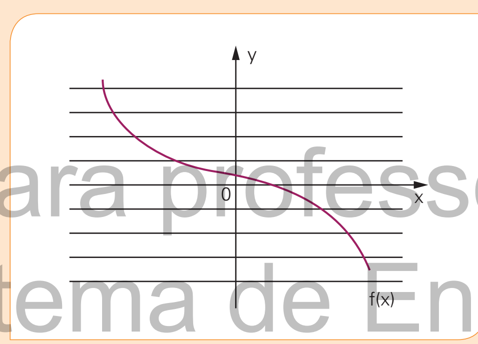
Então $\forall x_1, x_2 \in A$, temos $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

### MÉTODO PRÁTICO DE RECONHECIMENTO

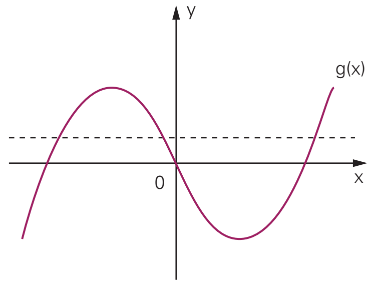
Graficamente se reconhece a função injetora quando uma reta horizontal qualquer intercepta o gráfico da função **uma única vez**.

**1º caso**:

Portanto, **f(x)** é injetora, pois uma reta qualquer horizontal intercepta o gráfico da função em um único ponto.



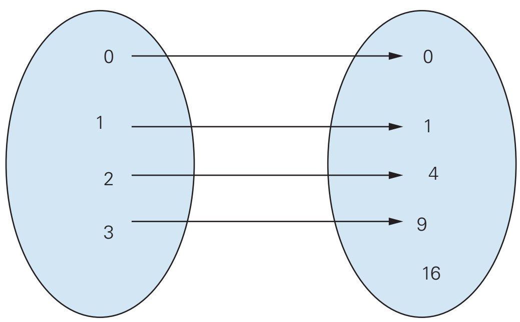
**2º caso**:




Portanto, **g(x)** não é injetora, pois a reta horizontal intercepta o gráfico da função em mais de um ponto.

**Exemplo 1**

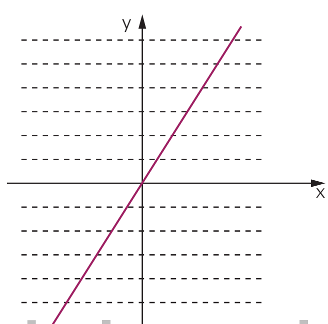
Verifique se a função **f** de A = {0, 1, 2, 3} em B = {0, 1, 4, 9, 16}, definida pela lei $f(x) = x^2$ é injetora.




Note que, se tomarmos dois elementos distintos de **A**, teremos como imagem dois elementos distintos de **B**. Como não existem dois elementos de **A** convergindo para um mesmo elemento de **B**, podemos afirmar que a função é **injetora.**

**Exemplo 2**

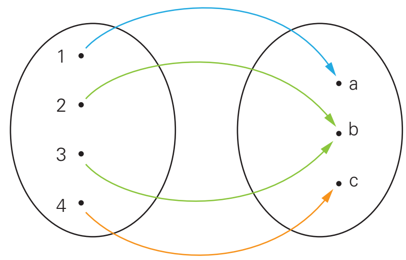
Verifique se a função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pela lei f(x) = 3x, é injetora. Note que, para quaisquer que sejam $x_1$ e $x_2$ de $\mathbb{R}$, se $x_1 \neq x_2$, tem-se $4x_1 \neq 4x_2$, ou seja, $f(x_2) \neq f(x_2)$.




Portanto, para todo elemento **y** de **R**, a paralela ao eixo das abscissas intercepta o gráfico de **f** uma única vez. Assim, podemos concluir que a função **f** é **injetora.**

# Função sobrejetora

Uma função f: A → B é **sobrejetora** (ou **sobrejetiva**) quando, para todo **y** pertencente ao contradomínio **B**, existe pelo menos um **x** pertencente a **A**, tal que f(x) = y. Ou seja, $\forall y, y \in B \to \exists x \in A : f(x) = y$.

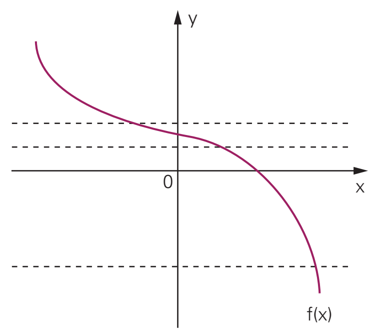



Quando f: A → B é sobrejetora, Im (f) = B

## MÉTODO PRÁTICO DE RECONHECIMENTO

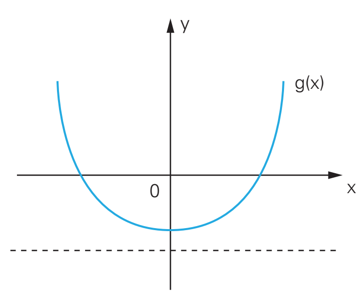
Graficamente se reconhece a função sobrejetora quando a reta horizontal que intercepta o eixo no contradomínio intercepta também o gráfico da função **pelo menos uma vez**.

**1º caso:**




Assim, **f(x)** é sobrejetora, pois há uma reta horizontal que intercepta o gráfico da função em pelo menos um ponto.

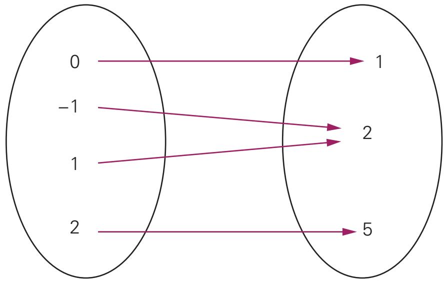
**2º caso:**




Nesse caso, **g(x)** não é sobrejetora, pois há uma reta horizontal que não intercepta o gráfico da função **f**.

**Exemplo 1**

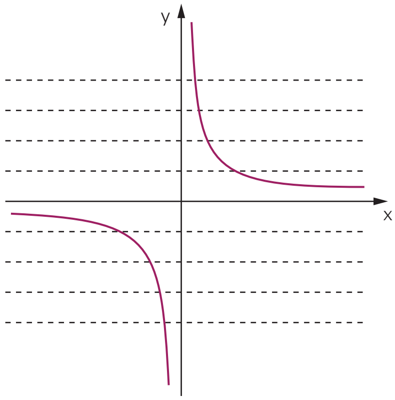
Verifique se a função f de A = {−1, 0, 1, 2} em B= {1,2,5}, definida pela lei $f(x) = x^2 + 1$, é sobrejetora.




Observe que, para todo elemento **y** de **B**, existe um elemento **x** de **A**, tal que $y = x^2 + 1$. Portanto, podemos afirmar que a função **f** é sobrejetora.

**Exemplo 2**

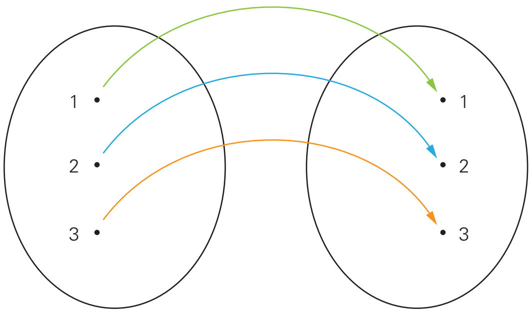
Dada a função **f** de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}^*$, definida pela lei $f(x) = \frac{1}{x}$, verifique se a função é sobrejetora. Note que, para todo elemento **y** de $\mathbb{R}^*$, existe um elemento **x** de $\mathbb{R}^*$, tal que $y = \frac{1}{x}$.




Assim, para todo elemento **y** de $\mathbb{R}^*$, há uma reta paralela ao eixo das abscissas que intercepta o gráfico de **f**. Portanto, podemos concluir que a função **f** é sobrejetora.

## Função bijetora

Uma função f: A → B é bijetora (ou bijetiva) quando apresenta as características de função **injetora e sobrejetora** simultaneamente. Ou seja, seus elementos distintos têm sempre imagens distintas, e todos os elementos do contradomínio são imagens de **pelo menos um elemento do domínio**.




**Observação:** Uma função bijetora apresenta o que se chama de relação biunívoca: para cada elemento, há uma única imagem e vice-versa. Uma função que não é nem injetora nem sobrejetora não apresenta uma classificação especial.

# ROTEIRO DE AULA

## TIPOS DE FUNÇÃO

### Injetora

Uma função f: A → B é injetora quando elementos distintos do domínio apresentam imagens também distintas no contradomínio

$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

### Bijetora

Uma função f: A → B é bijetora quando apresenta características de função injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

### Sobrejetora

Uma função f: A → B é sobrejetora quando para todo **y** pertencente ao contradomínio **B** existir um x pertencente a **A**, tal que f(x) = y.

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

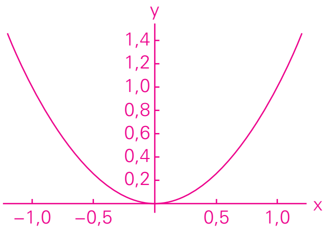
**1. Sistema Dom Bosco** – Verifique se as seguintes funções são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras:

**a)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, com $f(x) = x^2$

**b)** $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N}$, com $f(x) = 3x$

**c)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x + 4$

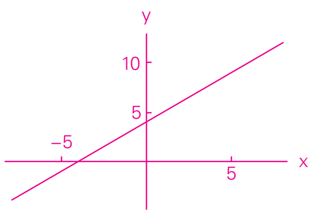
a) Analisando o gráfico de $f(x) = x^2$, temos:




Ao traçarmos retas horizontais, podemos ver que cada reta intercepta o gráfico mais de uma vez. Assim, **f** não é injetora. Como todas as retas horizontais, em $\mathbb{R}^+$, interceptam o gráfico, f é sobrejetora.

b) Temos que $f(x) = \{3, 6, 9, 12\}$.
Como cada elemento do domínio tem um único elemento correspondente no contradomínio de f, a função é injetora.
Como cada elemento do contradomínio de f não tem pelo menos um elemento correspondente em seu domínio, f não é sobrejetora.

c) Analisando o gráfico de $f(x) = x + 4$, temos:




Assim, traçando diversas retas horizontais, as retas interceptam o gráfico uma única vez, e não existe nenhuma reta que não intercepta o gráfico. Dessa forma, f é injetora e sobrejetora. Portanto, é bijetora.

**2. Udesc (adaptado)** – Considere a função f cujo gráfico está representado na figura a seguir.

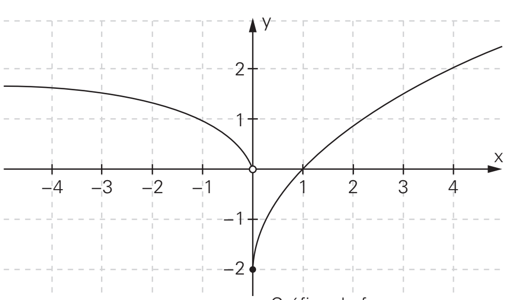



Gráfico de f

É correto afirmar que:

**a)** $f: [-1, 4] \to [-2, 2]$ é injetora, mas não é sobrejetora.

**b)** $f: [-1, 4] \to [-2, 2]$ é bijetora.

**c)** $f: [-1, 1] \to [-2, 1]$ é injetora, mas não é sobrejetora.

**d)** $f: [-1, 1] \to [-2, 1]$ é bijetora.

**e)** $f: [-1, 1] \to [-2, 2]$ é sobrejetora, mas não é injetora.

Se traçarmos retas horizontais no gráfico, podemos ver que, em $f: [-1, 1] \to [-2, 1]$, a reta intercepta o gráfico em todos os pontos apenas uma vez. Logo, **f** é injetora. É possível observarmos também que não existe uma reta nesse intervalo que não intercepta algum ponto do gráfico. Assim, **f** é sobrejetora. Como **f** é injetora e sobrejetora, **f** é bijetora.

**3. UEM-PR** – Considerando as propriedades de funções, assinale o que for correto.

**01)** O gráfico de uma função afim, cujos domínio e contradomínio são $\mathbb{R}$, é uma reta.

**02)** Sejam A um conjunto formado por 10 crianças e B um conjunto formado por 20 adultos, sendo os adultos as 10 mães e os 10 pais destas crianças. Então, a lei que associa cada criança a seu casal de pais é uma função de A em B.

**04)** Se f e g são funções reais, sendo f crescente e g decrescente, então $f - g$ é uma função constante.

**08)** Quaisquer que sejam os conjuntos distintos A e B, e funções $f: A \to B$ e $g: A \to B$ é possível definir a função $g \circ f: A \to B$.

**16)** Uma função $f: A \to B$ é injetora se todo elemento de $y \in B$ possui um correspondente $x \in A$ de tal forma que $f(x) = y$.

01) O gráfico de uma função afim, cujos domínio e contradomínio são $\mathbb{R}$, é uma reta.
Verdadeiro. Uma função afim é da forma $f(x) = a \cdot x + b$, em que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,. É uma reta.

02) Sejam A um conjunto formado por 10 crianças e B um conjunto formado por 20 adultos, sendo os adultos as 10 mães e os 10 pais dessas crianças. Então, a lei que associa cada criança a seu casal de pais é uma função de A em B.
Falso. Como cada elemento de A tem dois elementos correspondentes em B, f não descreve uma função.

04) Se f e g são funções reais, sendo f crescente e g decrescente, então $f - g$ é uma função constante.
Falso. Como não conhecemos as funções f e g, nada podemos afirmar sobre a função $f - g$.

08) Quaisquer que sejam os conjuntos distintos A e B, e funções $f: A \to B$ e $g: A \to B$, é possível definir a função $g \circ f: A \to B$.
Falso. Podemos definir a função composta $g \circ f: A \to B$ se o domínio de g contiver a imagem de f.

16) Uma função $f: A \to B$ é injetora se todo elemento de $y \tau B$ tem um correspondente $x \in A$ de tal forma que $f(x) = y$.
Falso. Essa é a definição de função sobrejetora.

Soma: 01

**4. Ufal** – Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, no conjunto dos números naturais e $f: A \to \mathbb{N}$ e $g: B \to \mathbb{N}$ funções injetoras. Se L é o número de elementos do conjunto $f(A) \cup g(B)$, então

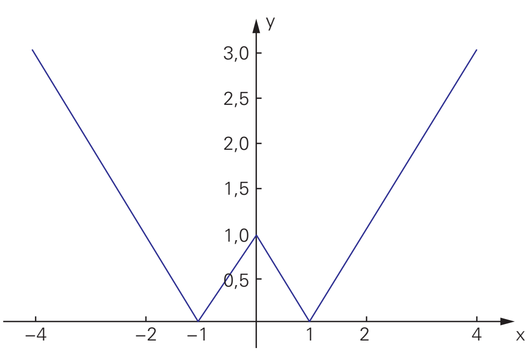
**a)** $0 \leqslant L \leqslant 3$
**b)** $3 < L < 5$
**c)** $5 \leqslant L \leqslant 8$
**d)** $8 < L < 10$
**e)** $10 \leqslant L \leqslant 15$

Se ambas as funções são injetoras, o número de elementos em f(A) e f(B) são 3 e 5, respectivamente. Podemos ter os 3 elementos de f(A) contidos em f(B), o que resultaria em 5 elementos diferentes em $f(A) \cup f(B)$. Assim, podemos ter os 3 elementos de f(A) diferentes de cada elemento em f(B), o que resultaria em 8 elementos diferentes em $f(A) \cup f(B)$.

Como L é o número de elementos do conjunto $f(A) \cup f(B)$, temos que $5 \leqslant L \leqslant 8$.

**5. PUC-PR** – Considere os seguintes dados.

Pode-se dizer que quando duas variáveis x e y são tais que a cada valor de x corresponde um único valor de y, segundo uma lei matemática, diz-se que y é função de x. Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ que é representada pelo gráfico ao lado.




Analisando o gráfico, julgue as proposições a seguir.

**I.** f é ímpar.
**II.** f é injetora.
**III.** A lei matemática de f é $f(x) = \big||x| - 1\big|$.
**IV.** f é crescente se, e só se, $x > 1$.
**V.** $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.

**a)** Somente II é correta.
**b)** Somente I é correta.
**c)** Somente III e V são corretas.
**d)** Todas as proposições são corretas.
**e)** Todas as proposições são falsas.

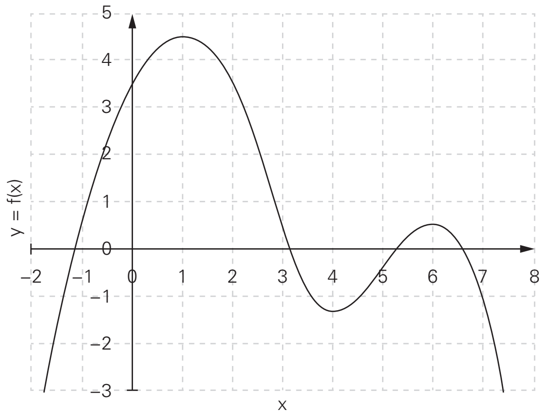
I. f é ímpar.
Falso. – Como $f(x) = f(-x)$, f é par.
II. f é injetora.
Falso. Se traçarmos uma reta horizontal no gráfico, ela o intercepta em mais de um ponto. Logo, f não é injetora.
III. A lei matemática de f é $f(x) = \big||x| - 1\big|$.
Verdadeiro. Para $x > 0$, temos $f(x) = |x - 1|$.
Se $x \geqslant 1$, temos que $f(x) = x - 1$.
Se $x < 1$, temos que $f(x) = 1 - x$.
Para $x < 0$, temos $f(x) = |-x - 1|$.
Se $x \leqslant -1$, temos que $f(x) = -x - 1$.
Se $x > -1$, temos que $f(x) = x + 1$
Portanto, o gráfico de f é igual ao da questão.
IV. f é crescente se, e só se, $x > 1$.
Falso. A função é crescente no intervalo $-1 < x < 0$.
V. $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.
Verdadeiro, pois $f(f(-1)) = f(0) = 1$ $f(f(1)) = f(0) = 1$.
Logo, $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.

**6. Sistema Dom Bosco** – Verifique se a função real definida por $f(x) = x^5 + 4$ é injetora.

Para quaisquer que sejam $x_1$ e $x_2$ de $\mathbb{R}$, se $x_1 \neq x_2$, temos $x_1^5 \neq x_2^5$. Logo, $x_1^5 + 4 \neq x_2^5 + 4$, ou seja, $f(x_2) \neq f(x_1)$.
Portanto, **f** é injetora.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. UFPR** – A respeito da função representada no gráfico ao lado, considere as seguintes afirmativas:




**1)** A função é crescente no intervalo aberto (4, 6).

**2)** A função tem um ponto de máximo em $x = 1$.

**3)** Esse gráfico representa uma função injetora.

**4)** Esse gráfico representa uma função polinomial de terceiro grau.

Assinale a alternativa correta.

**a)** Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.

**b)** Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

**c)** Somente as afirmativas 3 e 4 são verdadeiras.

**d)** Somente as afirmativas 1, 2 e 4 são verdadeiras.

**e)** Somente as afirmativas 2, 3 e 4 são verdadeiras.

**8. Udesc** – A função f definida por $f(x) = 1 + x^2$ é uma função bijetora, se os conjuntos que representam o domínio (D(f)) e a imagem (Im(f)) são:

**a)** $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [1, +\infty[$

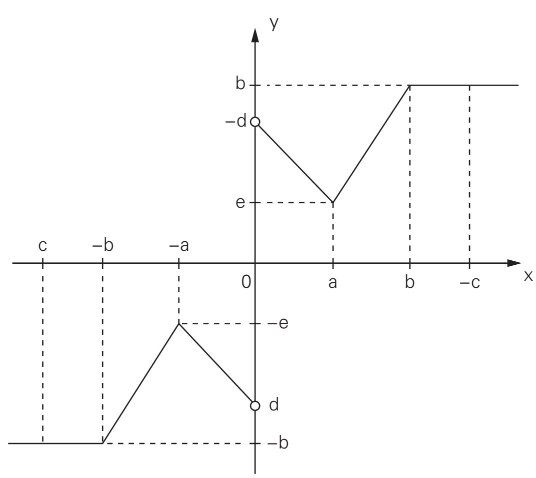
**b)** $D(f) = ]-\infty, 0]$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

**c)** $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

**d)** $D(f) = [0, +\infty[$ e $Im(f) = [0, +\infty[$

**e)** $D(f) = [0, +\infty[$ e $Im(f) = [1, +\infty[$

**9. AFA** – O gráfico abaixo descreve uma função $f: A \to B$.




Analise as proposições que seguem.

**I.** $A = \mathbb{R}^*$

**II.** f é sobrejetora se $B = \mathbb{R} - [-e, e]$

**III.** Para infinitos valores de $A \in X$, tem-se $f(x) = -b$

**IV.** $f(-c) - f(c) + f(-b) = 2b$

**V.** f é função par.

**VI.** $\nexists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -d$

São verdadeiras apenas as proposições

a) I, III e IV
b) I, II e VI
c) III, IV e V
d) I, II e IV

**10. EsPCex (adaptado)** – Sabendo que "c" e "d" são números reais, calcule o maior valor de "d" para que a função

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x + c, \text{ para } x \geq d \\ x^2 - 4x + 3, \text{ para } x < d \end{cases}$$ seja injetora.

**11. Urca** – Assinale a alternativa que contém uma função que é sempre injetora.

a) A função que associa a cada morador de uma cidade, a sua idade.
b) A função que associa a cada país que possui um presidente, seu presidente.
c) A função que associa a cada aluno de uma escola, sua mãe.
d) A função que associa a cada música que possui um único compositor, seu compositor.
e) A função que associa a cada time que possua um único patrocinador, seu patrocinador.

**12. Unitau-SP** – Considere A um conjunto com 3n − 3 elementos; B um conjunto com 2n + 1 elementos; f: A → B uma função.

Se f é injetora, é CORRETO afirmar:

a) $1 < n \leq 4$
b) $5 < n \leq 7$
c) $7 < n \leq 10$
d) $10 < n \leq 11$
e) $11 < n \leq 12$

**13. IFSC** – Analise as afirmações a seguir e assinale no cartão-resposta a soma da(s) proposição(ões) CORRETA(S).

**01)** A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 10 - 2^x$, é decrescente e sobrejetiva.

**02)** A área da região plana fechada, pertencente ao 1º quadrante e limitada pela função $f(x) = 12 - 2x$, é igual a 72 u.a.

**04)** A imagem da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 20$, é dada pelo conjunto $Im = [16, +\infty[$.

**08)** Se $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = 2x - 11$, então $g(2x + 3) = 4x - 5$.

**16)** Se a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + bx + 10$ e com $b \in \mathbb{R}$, tem valor mínimo igual a 1, então o único valor possível para b é 6.

**32)** A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ||x - 2| - 1|$, possui três raízes reais distintas.

**14. Sistema Dom Bosco** – Determine se a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x - 2$, se $x \leqslant 0$ e $f(x) = x + 2$, se $x > 0$, é injetora, sobrejetora, bijetora ou sem classificação.

**15. ITA (adaptado)** – Sejam X e Y dois conjuntos finitos com $X \subset Y$ e $X \neq Y$. Considere as seguintes afirmações:

**I.** Existe uma bijeção $f: X \to Y$.

**II.** Existe uma função injetora $g: Y \to X$.

É (são) verdadeira(s)

**a)** nenhuma delas.

**b)** apenas I.

**c)** apenas II.

**d)** todas.

**16. ITA (adaptado)** – Considere funções f, g, f + g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das afirmações:

**I.** Se f e g são injetoras, f + g é injetora;

**II.** Se f e g são injetoras, f + g é injetora;

é (são) verdadeira(s)

**a)** nenhuma.

**b)** apenas I.

**c)** apenas II.

**d)** todas.

**17. Sistema Dom Bosco** – Considere a função f: A → B, definida por $f(x) = x^2 + 5x - 6$.

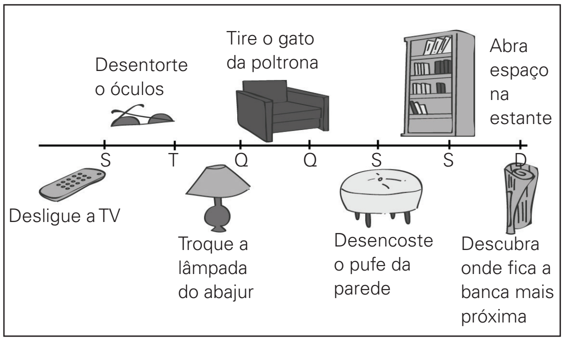
**a)** Sendo $A = \mathbb{R}$, determine B para que f seja sobrejetora.

**b)** Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$ e B o conjunto determinado no item anterior, obtenha o menor valor de A para que f seja bijetora.

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. UEL-PR (adaptado)** C5-H23

Observe a imagem a seguir, utilizada como peça publicitária em uma campanha para venda associada de jornais e livros de literatura, e responda à questão.




Peça publicitária veiculada pelo jornal *Folha de S.Paulo*, em 18 maio de 2003, p. A 21.

Na disposição dos elementos que integram a peça publicitária, considere: A = conjunto formado pelos dias da semana. B = conjunto formado pelas ações associadas aos dias da semana. Sobre esses conjuntos, é correto afirmar:

**a)** Existe uma função f: A → B bijetora.

**b)** Existe uma função f: A → B injetora e não sobrejetora.

**c)** Existe uma função f: B → A sobrejetora e não injetora.

**d)** Existe uma função f: B → A injetora e não sobrejetora.

**e)** Existe uma relação $\mathbb{R}$: A → B que não é uma função.

**19. Unimontes-MG (adaptado)** C5-H22

As tabelas a seguir representam algumas conjugações do verbo estar.

**Tabela 1**

| A | B |
|---|---|
| eu | estou |
| tu | estás |
| ele | está |
| nós | estamos |
| vós | estais |
| eles | estão |

**Tabela 2**

| A | B |
|---|---|
| eu | estava |
| tu | estavas |
| ele | estava |
| nós | estávamos |
| vós | estáveis |
| eles | estavam |

**Tabela 3**

| A | B |
|---|---|
| eu | estivesse |
| tu | estivesses |
| ele | estivesse |
| nós | estivéssemos |
| vós | estivésseis |
| eles | estivessem |

**Tabela 4**

| A | B |
|---|---|
| eu | estaria |
| tu | estarias |
| ele | estaria |
| nós | estaríamos |
| vós | estaríeis |
| eles | estariam |

Das tabelas anteriores, as tabelas que representam uma bijeção de A em B são:

**a)** tabela 1.
**b)** tabelas 1 e 2.
**c)** tabela 3.
**d)** tabela 4.
**e)** tabelas 2, 3 e 4.

**20. Enem** C5-H22

No primeiro ano do ensino médio de uma escola, é hábito os alunos dançarem quadrilha na festa junina. Neste ano, há 12 meninas e 13 meninos na turma, e para a quadrilha foram formados 12 pares distintos, compostos por uma menina e um menino. Considere que as meninas sejam os elementos que compõem o conjunto A e os meninos, o conjunto B, de modo que os pares formados representem uma função f de A em B. Com base nessas informações, a classificação do tipo de função que está presente nessa relação é

**a)** f é injetora, pois para cada menina pertencente ao conjunto A está associado um menino diferente pertencente ao conjunto B.
**b)** f é sobrejetora, pois cada par é formado por uma menina pertencente ao conjunto A e um menino pertencente ao conjunto B, sobrando um menino sem formar par.
**c)** f é injetora, pois duas meninas quaisquer pertencentes ao conjunto A formam par com um mesmo menino pertencente ao conjunto B, para envolver a totalidade de alunos da turma.
**d)** f é bijetora, pois dois meninos quaisquer pertencentes ao conjunto B formam par com uma mesma menina pertencente ao conjunto A.
**e)** f é sobrejetora, pois basta que uma menina do conjunto A forme par com dois meninos pertencentes ao conjunto B, assim nenhum menino ficará sem par.

# 26 FUNÇÃO INVERSA

- Função inversa

**HABILIDADES**

- Identificar representações algébricas que expressem relação entre grandezas.
- Interpretar gráficos cartesianos que representem relações entre grandezas.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.


ANDREY POPOV/DREAMSTIME.COM

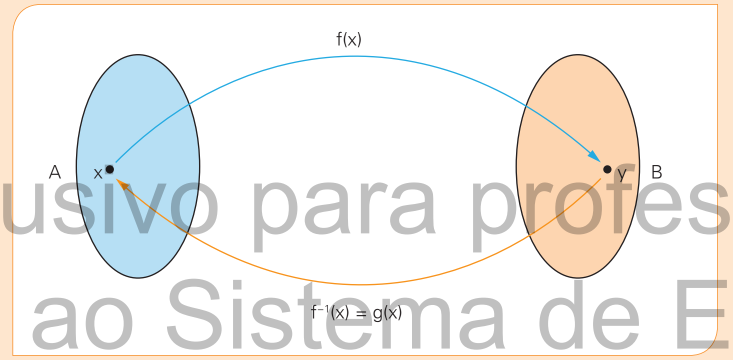
## Função inversa

### CONCEITO

Seja **f** uma função que converte a temperatura de graus Celsius (°C) para graus Fahrenheit (°F), então $F = f(C) = \frac{9}{5}(F - 32)$.

Portanto, precisamos utilizar certos métodos se quisermos encontrar uma função que converta graus Fahrenheit para Celsius. Essa nova função é chamada **função inversa**, representada por $f^{-1}$.

Vamos considerar uma função **f** com domínio **A** e contradomínio **B**, para a qual cada elemento **x** pertencente ao conjunto **A** apresenta imagem y = f(x) pertencente ao conjunto **B**. Podemos pensar na existência de uma função que, com base na imagem **y**, determine o elemento **x**, ou seja, uma função **g** tal que g(y) = x. Essa função **g**, que faz o caminho inverso da função **f**, é a função inversa de f($f^{-1}$).

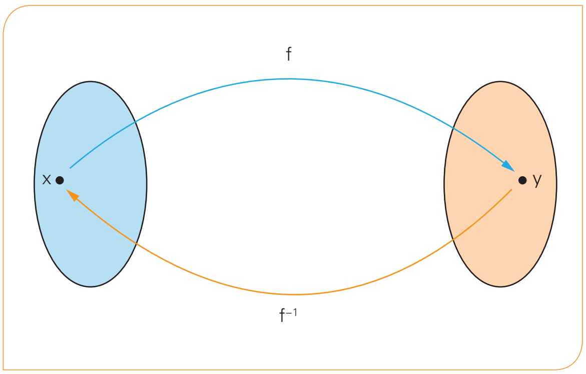


## Condição de existência

Para existir a função inversa, é necessário que todos os elementos do contradomínio da função **f** sejam imagens de algum elemento do domínio, e mais, de um único elemento. Dessa forma, concluímos que só pode existir inversa da função **f** se a função **f** for bijetora. Assim, podemos perceber que:

- o domínio da função **f** é o contradomínio de $f^{-1}$;
- o contradomínio de **f** é o domínio de $f^{-1}$.

Logo, $D(f) = CD(f^{-1}) = Im(f^{-1})$.




$CD(f) = D(f^{-1}) = Im(f)$

## DETERMINAÇÃO DA INVERSA

Enquanto a função **f** toma o elemento **x** e, por meio de **f**, apresenta o valor de sua imagem **y**, a função inversa $f^{-1}$ toma a imagem **y** e, por meio de $f^{-1}$, apresenta o elemento **x**. Observe a aplicação dessa ideia no exemplo a seguir.

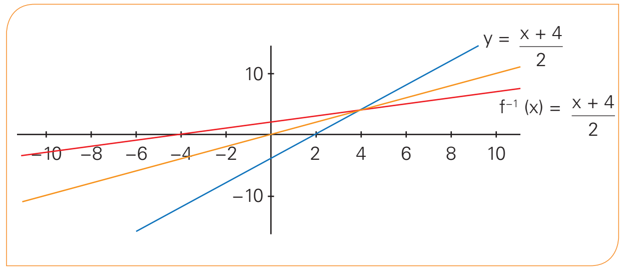
Determine a função inversa da função $f(x) = 2x - 4$.

1º Substituímos a notação de imagem de f(x) por **y**. Assim: $y = 2x - 4$.

2º Para determinar a inversa, isolamos o **x**. Logo: $2x = y + 4 \rightarrow x = \dfrac{y+4}{2}$.

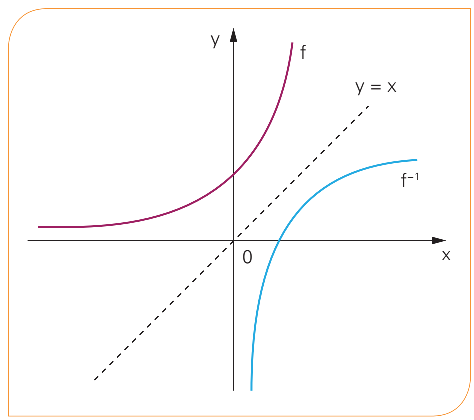
3º Podemos dizer que encontramos a sentença que representa a inversa de f, pois, para cada imagem y dada, é possível obtermos o elemento **x** para o qual **y** serve de imagem. Para efeito de notação, porém, é comum permutarmos as letras x e y, obtendo, então, $y = \dfrac{x+4}{2}$.

4º Retornando à notação inicialmente usada para a função, substituímos **y** por $f^{-1}(x)$. Finalmente: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2}$.




## PROPRIEDADES

Evidentemente, se o par (a, b) pertence à função **f**, o par (b, a) pertence à função $f^{-1}$. No plano cartesiano, isso proporciona simetria dos pontos representados pelos pares (a, b) e (b, a) em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares). Se fizermos esse procedimento para todos os pares ordenados de cada uma das funções, garantimos que o gráfico de certa função e o de sua inversa sejam simétricos em relação à reta $y = x$ (função identidade).




Considerando que a função leva o elemento à imagem, e a inversa traz a imagem ao elemento, de modo a compor a função com a inversa, retorna-se sempre ao elemento do qual se partiu.

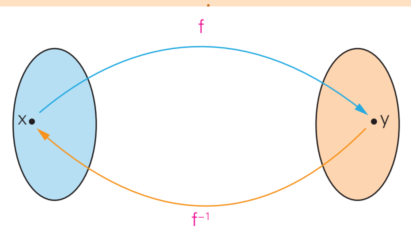
Assim: $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$.

Por analogia à propriedade anterior, podemos provar que $f^{-1}(f^{-1}(x)) = f(x)$. Da mesma forma, podemos concluir que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

# ROTEIRO DE AULA

## FUNÇÃO INVERSA

Uma função ___bijetora___ f: A → B, a função ___inversa___ de f é $f^{-1}$; B → A, tal que (x, y) ∈ f ↔ (y, x) ∈ ___$f^{-1}$___.




Para existir a inversa, é necessário que a função seja ___bijetora___.

1. Na expressão y = f(x), troca-se **x** por **y**, obtendo x = f(y).
2. Isola-se **y**, obtendo-se a ___inversa___ da função dada.

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Unit-SE** – Se f(x) é uma função do 1º grau cujo gráfico intercepta o eixo das abscissas em $x = 6$ e o eixo das ordenadas em $y = -3$, então sua função inversa é

**a)** $f^{-1}(x) = -\frac{x}{2} + 3$

**b)** $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + 3$

**c)** $f^{-1}(x) = \frac{2}{x-6}$

**d)** $f^{-1}(x) = 2x - 3$

**e)** $f^{-1}(x) = 2x + 6$

Temos que $f(6) = 0$ e $f(0) = -3$.

Portanto, como **f** é uma função do 1º grau, $f(x) = a \cdot x + b$.

$f(6) = 6^a + b = 0$

$F(0) = b = -3$

$6a - 3 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$

Assim, como $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ :

$y = \frac{1}{2}x - 3$

Invertendo **x** e **y**, temos:

$x = \frac{1}{2}y - 3$

$2x = y - 6$

$y = 2x + 6$

Ou seja, $f^{-1}(x) = 2x + 6$.

**2. UECE (adaptado)** – A função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ é invertível. Se $f^{-1}$ é sua inversa, então, calcule o valor de $[f(0) + f^{-1}(0) + f^{-1}(-1)]^2$.

Temos então que:

$y = \frac{x+2}{x-2}$

Invertendo **x** e **y**:

$x = \frac{y+2}{y-2}$

$(y - 2)x = y + 2$

$xy - 2x = y + 2$

$xy - y = 2x + 2$

$y(x - 1) = 2x + 2$

$y = \frac{2x+2}{x-1}$

$f^{-1}(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

Assim, temos que:

$f(0) = \frac{2}{-2} = -1$

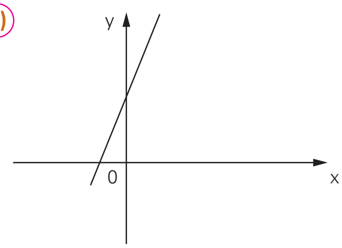
$f^{-1}(0) = \frac{2}{-1} = -2$

$f^{-1}(-1) = \frac{-2+2}{-2} = 0$

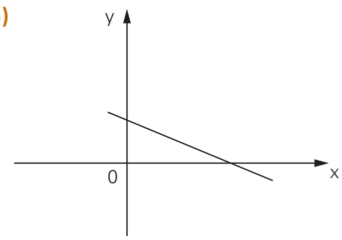
Portanto, $[f(0) + f^{-1}(0) + f^{-1}(-1)]^2 = (-1 - 2 + 0)^2 = (-3)^2 = 9$.

**3. UERN** – Se o gráfico da função inversa de uma função f(x) do 1º grau tem como raiz $x = 6$ e o coeficiente angular de f(x) é igual a 2, então o gráfico que melhor representa f(x) é

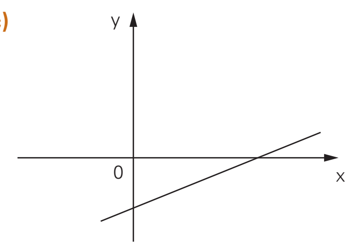
**a)**



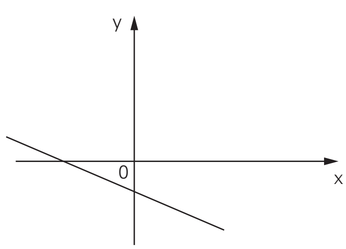

**b)**




**c)**




**d)**




Temos que $f^{-1}(x) = ax + b$.

$F^{-1}(6) = 0$ e $a = 2$

Logo, $f^{-1}(6) = 2 \cdot 6 + b = 0 \rightarrow b = -12$.

Então, $f^{-1}(x) = 2x - 12$.

$y = 2x - 12$

Invertendo **x** e **y**, temos:

$x = 2y - 12$

$y = \frac{1}{2}x + 12$

$f(x) = \frac{1}{2}x + 12$ .

**4. Cefet-MG** – Sejam f e g duas funções reais, tais que g $= f^{-1}$. Nessas condições,

**a)** o domínio de f e de g são iguais.
**b)** se f é injetora, então g é sobrejetora.
**c)** $f(g(x)) = g(f(x)) = x,\ \forall\ x \in Df,\ \forall\ x \in Dg$.
**d)** o contradomínio de f será o conjunto imagem de g.

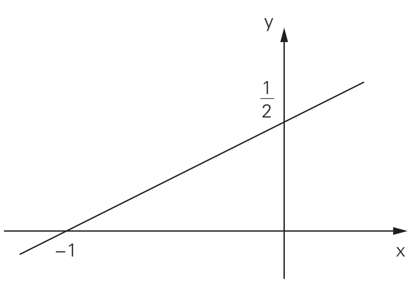
a) O domínio de **f** e de **g** são iguais. Falso.
O domínio de **f** é igual ao contradomínio de **g**.

b) Se **f** é injetora, então **g** é sobrejetora. Falso.
Para que exista a inversa de **f**, **f** deve ser bijetora. Porém, **f** injetora não implica **g** sobrejetora.

c) $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, v; $x \in Df$, $\forall\ x \in Dg$. Verdadeiro.
$f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.

d) O contradomínio de **f** será o conjunto imagem de **g**. Falso.
O contradomínio de **f** é o domínio de **g**.

**5. UERN (adaptado)** – O gráfico da função inversa de f(x) é representado a seguir. Logo, determine a função f(x).




Temos que $f^{-1}(x) = ax + b$.

Então, $f^{-1}(-1) = 0$ e $f^{-1}(0) = \frac{1}{2}$.

Assim, $b = \frac{1}{2}$ e $-a + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Logo, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Invertendo **x** e **y**:

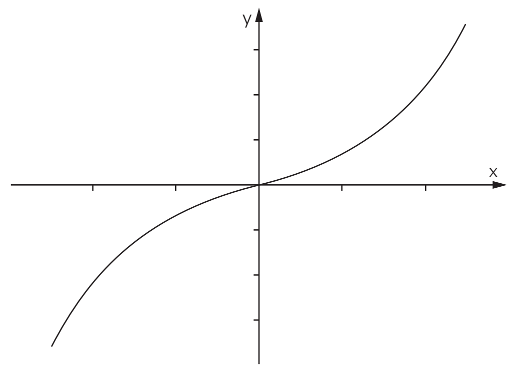
$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$

$2x = y + 1$

$y = 2x - 1$

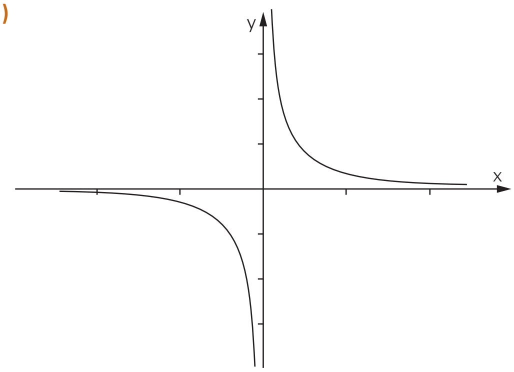
$f(x) = 2x - 1$.

**6. Unicamp** – Considere o gráfico da função y = f(x) exibido na figura a seguir.

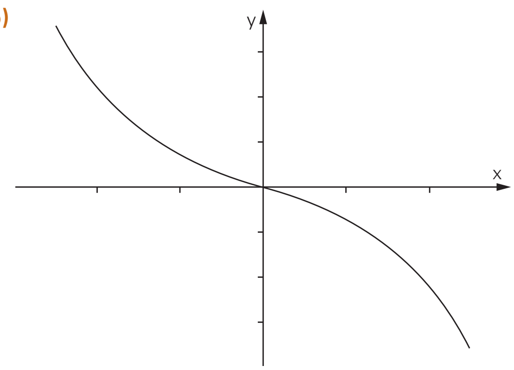



O gráfico da função inversa $y = f^{-1}(x)$ é dado por

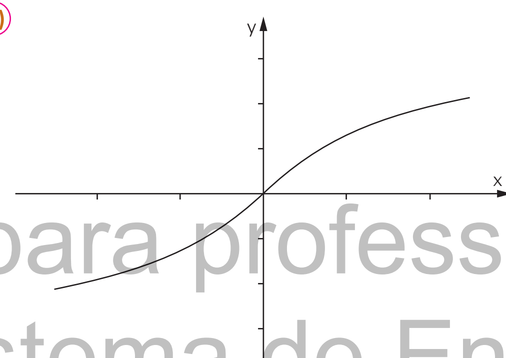
**a)**



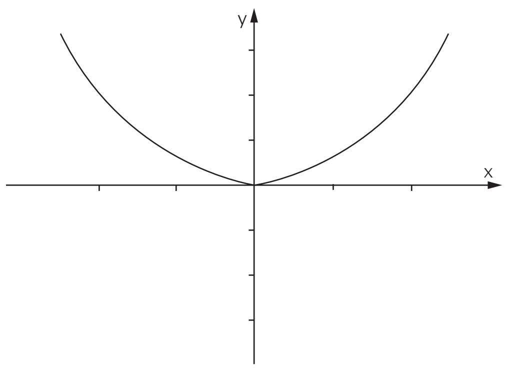

**b)**

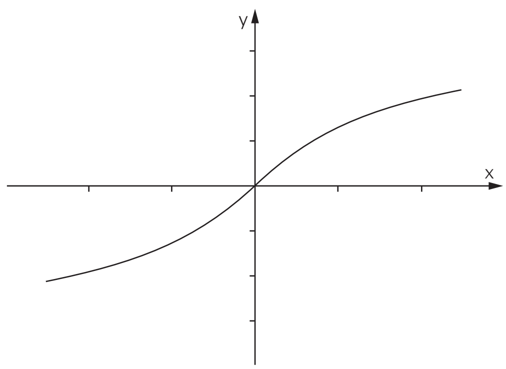



**c)**



d)




Traçamos no gráfico a reta y = x. Como as funções f e $f^{-1}$ são simétricas entre si em relação a y = x, a função $f^{-1}$ é dada por:

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. Cefet-MG** – Sobre a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$, é correto afirmar que

**a)** a função f(x) é ímpar.

**b)** a função $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$ é a inversa de f(x).

**c)** o ponto de máximo da função f(x) é P(0, −1).

**d)** a função f(x) é crescente para o intervalo [−1, + ∞[.

**e)** a equação f(f(x)) = 0 possui três raízes reais distintas

**8. Unit-AL (adaptado)** – Se o gráfico da função inversa $f(x) = 2^{c-4x}$ de intercepta o eixo das abscissas no valor $\sqrt{2}$, então calcule o valor da constante c.

**9. Unioeste-PR** – Sejam f e g duas funções, ambas com domínio A e imagem B, subconjuntos de R, e que admitem inversa. Seja $f^{-1}$ a função inversa de f e $g^{-1}$ a função inversa de g . Suponha ainda que $f(g^{-1}(x)) = g(f^{-1}(x))$ para todo x no domínio das inversas. É correto afirmar que

**a)** $(f^{-1} \circ g)(x) = (g^{-1} \circ f)(x)$, para todo $x \in A$.

**b)** $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, para todo $x \in A$.

**c)** $(f \circ f)(x) = (g \circ g)(x)$, para todo $x \in A$.

**d)** $(f \circ f^{-1})(x) = (g \circ g^{-1})(x)$, para todo $x \in A$.

**e)** $f^{-1}(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

**10. UEM-PR** – Sejam os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4}, B = {0, 2, 4, 6, 8} e C = {1, 5, 9, 13, 17}, bem como as funções f tal que $f_1$: A → B tal que $f_1(x) = 2x$; $f_2$: B → A, tal que $f_2(x)=\frac{x}{2}$; $f_3$: A → C, tal que $f_3(x) = 4x + 1$ e $f_4$: C → A ∪ B, tal que $f_4(x)=\frac{x-1}{2}$. Considerando esses dados, assinale o que for **correto**.

**01)** As funções $f_1$ e $f_2$ são bijetoras.
**02)** O contradomínio da função $f_3$ é o conjunto C.
**04)** A função $f_1$ é a inversa de $f_2$.
**08)** A função composta $g = f_4 \circ f_3 : A \to A \cup B$ é tal que $g(x) = 2x$.
**16)** A imagem da função $f_4$ é o conjunto A ∪ B.

**11. UEM-PR** – Considerando as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = -x^2 + 20x - 16$ e $g(x) = -5x + 10$, para todo x real, assinale o que for **correto**.

**01)** Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 84$.
**02)** $(f + g)(1) = 8$.
**04)** Os gráficos de f e g não se interceptam.
**08)** O gráfico da função g é uma parábola com concavidade voltada para cima.
**16)** A função f não possui inversa e $g^{-1}(x) = -\frac{x}{5}+2$, para todo x real.

**12. Unit-SE** – Se f(x) é uma função do 1º grau que intercepta os eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente, em x = 4 e y = 2, é correto afirmar sobre sua função inversa $f^{-1}(x)$ que

**a)** $f^{-1}(x)=\frac{2}{4-x}$.
**b)** ela é crescente.
**c)** seu coeficiente linear é $\frac{1}{2}$.
**d)** seu coeficiente angular é −2.
**e)** ela não intercepta o eixo das abscissas.

**13. AFA** – Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x)\begin{cases} x-3 \text{ se } x \leq 2 \\ \frac{x^2}{2}-x \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

Analise as proposições a seguir e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).

( ) A função f é injetora.
( ) $\forall x \in \mathbb{R}$, a função f é crescente.

( ) A função $f^{-1}$, inversa de f, é dada por $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

tal que $f(x)^{-1} \begin{cases} x+3, \text{ se } x \leq -1 \\ \sqrt{4x+4}, \text{ se } x > -1 \end{cases}$

A sequência correta é

**a)** F – V – V
**b)** V – V – V
**c)** F – V – F
**d)** V – F – V

**14. Fuvest** – Considere as funções $f: \left[\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]\right]$ e $g: [0, \pi] \to [-1, 1]$ definidas por $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$. Sendo f e g bijetoras, existem funções $f^{-1}$ e $g^{-1}$, tais que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id$ e $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = id$, em que id é a função identidade.

**a)** Para $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, mostre que $(g \circ f^{-1})(\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2}$.

**b)** Mostre que $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + g^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

**15. ITA** – Das afirmações:

**I.** Se $x, y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então $x + y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$;
**II.** Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$;
**III.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a < b < c$. Se $f: [a, c] \to [a, b]$ é sobrejetora, então f não é injetora, é (são) verdadeira(s)

**a)** apenas I e II.
**b)** apenas I e III.
**c)** apenas II e III.
**d)** apenas III.
**e)** nenhuma.

**16. EsPCex (adaptado)** – Considere a função bijetora $f: [1, +\infty) \to (-\infty, 3]$, definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ e seja (a,b) o ponto de intersecção de f com sua inversa. Calcule o valor numérico da expressão a + b.

**17. ITA** – Considere as funções f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com a, b, c, d $\in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Se $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, então uma relação entre as constantes a, b, c e d é dada por

**a)** $b + ad = d + bc$

**b)** $d + ba = c + db$

**c)** $a + db = b + cd$

**d)** $b + ac = d + ba$

**e)** $c + da = b + cd$

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Uenp-PR** C6-H25

A criptografia, conhecida como a arte de esconder mensagens, está associada ao uso da matemática para o envio de informações, geralmente, confidenciais. Um método simples de criptografar mensagens consiste na substituição das letras do alfabeto por números; outro mais conhecido é chamado de Código de César, em que se substitui cada letra da mensagem original pela terceira letra que a precedia no alfabeto. Considere a relação de letras e números a seguir.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A – 1 | B – 2 | C – 3 | D – 4 | E – 5 | F – 6 | G – 7 |
| H – 8 | I – 9 | J – 10 | K – 11 | L – 12 | M – 13 | N – 14 |
| O – 15 | P – 16 | Q – 17 | R – 18 | S – 19 | T – 20 | U – 21 |
| V – 22 | W – 23 | X – 24 | Y – 25 | Z – 26 | | |

Considere a função $G(x) = 2x + 1$ que recebe o valor da letra que se quer e gere um valor por meio de G(x), resultando na mensagem 27 3 41 11 27 3 41 19 7 3. A seguir, desvende a mensagem contida e encontre a função inversa de G(x) que traduz a mensagem para o leitor.

**a)** Comunidade; $G^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

**b)** Comunidade; $G^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

**c)** Informação; $G^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

**d)** Matemática; $G^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

**e)** Matemática; $G^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

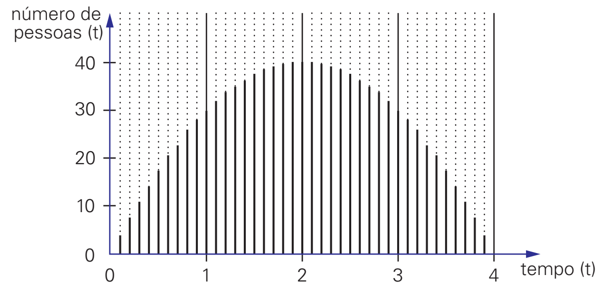
**19. Insper-SP (adaptado)** C5-H21

No período de vendas simultâneas nas bilheterias e pela internet, a função v(t) é dada por: $v(t) = -0{,}1t^2 + 4t - 10$. O tempo necessário (em dias) para que a quantidade de ingressos vendidos (em milhões) seja de 10 milhões é de

**a)** 5
**b)** 10
**c)** 15
**d)** 20
**e)** 25

**20. Insper-SP (adaptado)** C6-H25

O número n de pessoas presentes em uma festa, nas primeiras duas horas, varia ao longo do tempo t de duração da festa, em horas, conforme mostra o gráfico a seguir.




Das opções abaixo, aquela que melhor descreve a função $n^{-1}(t)$ é

**a)** $n^{-1}(t) = \sqrt{4-t} + 2$

**b)** $n^{-1}(t) = \sqrt{4 + \frac{1}{10}t}$

**c)** $n^{-1}(t) = \sqrt{4 - \frac{1}{10}t}$

**d)** $n^{-1}(t) = \sqrt{4 - \frac{1}{10}t} + 2$

**e)** $n^{-1}(t) = \sqrt{4 - \frac{1}{10}t} - 2$

27

# LOGARITMOS I

- Introdução
- Definição
- Condição de existência
- Consequências importantes da definição

**HABILIDADES**

- Compreender a definição de logaritmo.
- Calcular o logaritmo de um número real positivo.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas.
- Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações de operações e números (naturais, inteiros, racionais ou reais).
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

## Introdução

BERNARD BARROSO/SHUTTERSTOCK

No período das navegações, na Idade Moderna, os logaritmos eram utilizados para simplificar os cálculos que envolviam localização.

Logaritmos estão presentes em muitas situações do dia a dia. Após estudarmos o conceito e a aplicação dos tipos de função e de funções inversas, veremos o conceito de logaritmo e função logarítmica, a qual nada mais é do que a função inversa da função exponencial, ou seja, um expoente.

O conceito de logaritmo foi introduzido pelo matemático escocês **John Napier** (1550-1617). Rapidamente foi adotado para facilitar os cálculos de navegadores, cientistas, engenheiros e outros profissionais. Para o cálculo de logaritmos, utilizavam-se réguas de cálculo e tabelas logarítmicas.

EVERETT - ART/SHUTTERSTOCK

Além de matemático, o escocês Jonh Napier foi físico, astrônomo e teólogo.

## Definição

A linguagem do logaritmo é apresentada de forma reduzida pelo símbolo $\log_b a$, que pode ser lido como logaritmo de a na base b.

Define-se $\log_b a$ como o valor real x que satisfaz $\log_b a = x \leftrightarrow b^x = a$.

$$\log_{b} a = \boxed{x} \leftrightarrow b^{x} = a$$

**Notação:**

- **b** é a base;
- **a** é o logaritmando ou antilogaritmo;
- **x** é o logaritmo.

**Exemplos:**

- $\log_{10} 10\,000 = 4$ pois $10^4 = 10\,000$
- $\log_7 49 = 2$, pois $7^2 = 49$
- $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 3$
- $\log_5 1 = 0$, pois $(5)^0 = 1$
- $\log_2(-4)$ não existe, pois $2^\alpha$ é positivo para qualquer valor de $\alpha$
- $\log_{(-2)} 4$ não existe, pois não existe $\alpha$ tal que $(-2)^\alpha = 4$
- $\log_1 4$ não existe, pois $1^\alpha = 4$ para qualquer valor de $\alpha$

**Tábua de logaritmos**

A tábua de logaritmos consiste em uma tabela com duas colunas. Na primeira, há uma lista de números inteiros ordenados; na segunda, os respectivos logaritmos em determinada base. Em geral, de **base** e ou **base 10**.


ANGELO GILARDELLI/ SHUTTERSTOCK

Tábua de logaritmos.

## Condição de existência

O logaritmo descreve uma potência na igualdade $b^x = a$. De acordo com o estudo das equações exponenciais, $b > 0$ e $b \neq 1$. Assim, o resultado $b^x$ é sempre positivo, pois a base é um número positivo. Com base nisso, chega-se à condição de existência do logaritmo $\log_b a$: $0 < b \neq 1$ e $a > 0$.

**Exemplo:**

A sentença $\log_b a = x$ é definida para $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$.

Para quais valores de x existe $\log_{10}(100 - x)$?

$100 - x > 0$

$100 > x$

$x < 100$

## Propriedades operatórias

As propriedades operatórias apresentadas a seguir facilitam os cálculos envolvendo logaritmos em muitas situações.

Considere **b**, **p** e **q** números reais positivos, $b \neq 1$, **p** e **k** números inteiros e positivos.

### LOGARITMO DO PRODUTO

O logaritmo do produto de dois números é igual à soma dos logaritmos desses números, conservando-se a base:

$\log_b(p \cdot q) = \log_b p + \log_b q$

**Demonstração:**

Considerando $\log_b(p \cdot q) = \alpha$ ; $\log_b p = \beta$; $\log_b q = \gamma$; $b^\alpha = p \cdot q$; $b^\beta = p$; $b^\gamma = q$

Então:

$b^\alpha = b^\beta \cdot b^\gamma$

$b^\alpha = b^{\beta+\gamma}$

Portanto, como $\alpha = \beta + \gamma$:

$\log_b(p \cdot q) = \log_b p + \log_b q$.

### LOGARITMO DO QUOCIENTE

O logaritmo do quociente de dois números é igual à diferença dos logaritmos desses números, conservando-se a base.

$$\log_b\left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$$

**Demonstração:**

Considerando $\log_b\left(\frac{p}{q}\right) = \alpha$; $\log_b p = \beta$ ; $\log_b q = \gamma$

$b^\alpha = \frac{p}{q}$; $b^\beta = p$; $b^\gamma = q$

Então:

$$b^\alpha = \frac{b^\beta}{b^\gamma}$$

$b^\alpha = b^{\beta-\gamma}$

Portanto, como $\alpha = \beta - \gamma$

Assim, $\log_b\left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$.

### LOGARITMO DA POTÊNCIA

O logaritmo de potência de base positiva é igual ao produto do expoente da potência pelo logaritmo da base da potência, conservando-se a base do logaritmo:

$\log_b(p^k) = k \cdot \log_b p$

**Demonstração:**

Considerando $\log_b(p^k) = \alpha$; $\log_b p = \beta$:

$b^\alpha = p^k$; $b^\beta = p$

Então:

$b^\alpha = (b^\alpha)^k$ $b^\alpha = b^{\beta\cdot k}$. Portanto, como $\alpha = \beta \cdot k$ ou $\alpha = k \cdot \beta$:

$\log_b(p^k) = k \cdot \log_b p$.

## MUDANÇA DE BASE

A base de um logaritmo qualquer pode ser alterada para facilitar os cálculos. Para transformar um logaritmo de base **b** para base **c**, usamos a relação $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$, em que **c** é real, positivo e diferente de 1.

**Demonstração:**

Considerando $\log_b a = \alpha$; $\log_c a = \beta$; $\log_c b = \gamma$:

$b^\alpha = a$; $c^\beta = a$; $c^\gamma = b$

Então:

$b^\alpha = c^\beta$ e $c^\gamma = b$

$(c^\gamma)^\beta = c^\beta$

$c^{\gamma\cdot\alpha} = c^\beta$

Portanto, como $\gamma \cdot \alpha = \beta$ e $\alpha = \dfrac{\beta}{\gamma}$:

$\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$.

**Cologaritmo**

Dados os números reais positivos **a** e **b**, com $b \neq 1$, definimos:

$\text{colog}_b a = -\log_b a$

**Antilogaritmo**

Dados os números reais positivos **a** e **b**, com $b \neq 1$, definimos:

$\text{antilog}_b \alpha = a \leftrightarrow \log_b a = \alpha$

### EXERCÍCIO RESOLVIDO

**1. FGV** – Entre as sentenças, assinale a verdadeira.

a) $2^{\log_2 3} = 3$

b) $\log\left(\dfrac{125}{3}\right) = \dfrac{\log 125}{\log 3}$

c) o logaritmo decimal de 1 trilhão é 15.

d) $\log 200 = 2 \log 2$

e) $\log \dfrac{1}{\sqrt{100000}} = -3$

**Resolução:**

A alternativa a representa um consequência direta da definição.

$a^x = b \leftrightarrow x = \log_a b$, com $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

De fato, aplicando a definição na sentença obtém-se a igualdade verdadeira.

$$2^{\log_2 3} = 3 \leftrightarrow \log_2 3 = \log_2 3$$

**2. IFSC** – O valor **correto** da expressão

$E = \log_2 8 + \dfrac{0{,}001}{10000} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$ é

a) 10 000

b) 11,0000001

c) $11 \cdot 10^{-7}$

d) 11

e) –1

**Resolução:**

Resolvendo a expressão, temos:

$E = \log_2 8 + \dfrac{0{,}001}{10000} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

$E = 3 + \dfrac{10^{-3}}{10^4} + 2^3$

$E = 11 + 10^{-7}$

$E = 11 + 0{,}0000001$

$E = 11{,}0000001$

# ROTEIRO DE AULA

**LOGARITMO**

**Definição**

$\log_b a = x \rightarrow \begin{cases} a \rightarrow \text{logaritimando} \\ b \rightarrow \text{base} \\ x \rightarrow \text{logaritmo} \end{cases}$

**Condição de existência**

$\begin{cases} \log_b 1 = 0 \\ \log_b b = 1 \\ \log_b (b^n) = n \\ b^{\log_b a} = a \end{cases}$

**Propriedades**

$\begin{cases} \log_b (p \cdot q) = \log_b p + \log_b p \\ \log_b (p^k) = k \cdot \log_b p \\ \log_b \left(\dfrac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q \\ \log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b} \end{cases}$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. PUC-Goiás (adaptado)** C5-H19

Vivenciamos em nosso planeta não só o problema do derretimento das camadas de gelo, como também o problema dos abalos sísmicos (tremores de terra). No Brasil, algumas regiões, nas quais há pouco tempo só se ouvia falar desse fenômeno por meio de jornais, começam a passar por tal experiência, como, por exemplo, a região norte de Minas Gerais. No dia 19 de maio de 2012, um tremor de terra foi sentido em Montes Claros. De acordo com o chefe do Observatório Sismológico da Universidade de Brasília (UnB), Lucas Barros, a intensidade foi de aproximadamente 4 graus na escala Richter. A escala Richter é definida pela seguinte equação $M = 0{,}67 \cdot \log_{10}(E) - 7{,}9$ em que E representa a energia libertada, medida em ergs, e M a correspondente magnitude na escala de Richter. Com base na equação acima, calcule a energia aproximada liberada pelo tremor em Montes Claros.

**a)** $10^{33}$ ergs
**b)** $10^{40}$ ergs
**c)** $10^{18}$ ergs
**d)** $10^{7,9}$ ergs
**e)** $10^{66}$ ergs

O tremor foi de 4 graus na escala Richter. Logo:
$4 = 0{,}67 \cdot \log_{10}(E) - 7{,}9$
$11{,}9 = 0{,}67 \cdot \log_{10}(E)$
$17{,}76 \simeq \log_{10}(E)$
$E = 10^{17{,}76} \approx 10^{18}$ ergs.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

**2. PUC-Rio** – Seja $x = \log_2 3 + \log_2 9 + \log_2 27$.
Então, é correto afirmar que:

**a)** $6 \leqslant x < 7$
**b)** $7 \leqslant x < 8$
**c)** $8 \leqslant x < 9$
**d)** $9 \leqslant x < 10$
**e)** $x \geqslant 10$

Temos que:
$X = \log_2 3 + \log_2 9 + \log_2 27 = \log_2 3^6 = \log_2 729$
$2^9 < 729 < 2^{10}$
$9 < x < 10$
Portanto,
$9 \leqslant x < 10$.

**3. UEM-PR** – Assinale o que for correto.

**01)** $-\frac{3}{4} - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{12}$

**02)** $\log_3\left(\frac{20}{3}\right) = \log_3(20) - 1$

**04)** $\sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{7} + \sqrt{7}$

**08)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{1}$

**16)** $\dfrac{18}{\left(\frac{6}{70}\right)} = \frac{3}{7}$

01) $-\frac{3}{4} - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{12}$

Verdadeiro, pois $-\frac{3}{4} - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{4} - \left(\frac{-4}{3}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{16-9}{12} = \frac{7}{12}$.

02) $\log_3\left(\frac{20}{3}\right) = \log_3(20) - 1$

Verdadeiro, porque $\log_3\left(\frac{20}{3}\right) = \log_3 20 - \log_3 3 = \log_3 20 - 1$.

04) $\sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{7} + \sqrt{7}$

Verdadeiro, pois $\sqrt{4 \cdot 7} = 2\sqrt{7} = \sqrt{7} + \sqrt{7}$.

08) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{1}$

Falso, porque $\frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{5}$.

16) $\dfrac{18}{\left(\frac{6}{70}\right)} = \frac{3}{7}$

Falso, pois $\dfrac{18}{\left(\frac{6}{70}\right)} = \frac{18}{6} \cdot 70 = 3 \cdot 70 = 210$.

Soma: 01 + 02 + 04 = 07

**4. Udesc** – Se $\log_3(x-y) = 5$ e $\log_5(x+y) = 3$, então $\log_2(3x-8y)$ é igual a:

**a)** 9
**b)** $4 + \log_2 5$
**c)** 8
**d)** $2 + \log_2 10$
**e)** 10

Temos que, se $\log_3(x-y)=5$:

$x - y = 3^5 = 243$

$\log_5 (x + y) = 3$

$x + y = 5^3 = 125$

Somando as equações temos:

$x = \frac{368}{2} = 184.$

Se $x = 184$:

$x + y = 125$

$y = -59$

Logo,

$\log_2(3x - 8y) = \log_2 (552 + 472) =$

$= \log_2(1024) = \log_2 2^{10} = 10 \cdot \log_2 2 = 10$

**5. PUC-Rio** – Se $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$, então $\sqrt[3]{x} + x^2$ vale:

**a)** $\frac{3}{4}$

**b)** 6

**c)** 28

**d)** 50

**e)** 66

Temos que $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8 \rightarrow \sqrt[3]{8} + 8^2 = 2 + 64 = 66.$

**6. FGV-RJ** – Em uma experiência de Física, para cada valor da variável contínua x, obteve-se, no laboratório, um resultado y. A tabela a seguir mostra os resultados de cinco medidas realizadas para valores inteiros de x:

| x | y |
|---|---|
| 1 | 2,97 |
| 2 | 9,05 |
| 3 | 26,8 |
| 4 | 81,6 |
| 5 | 241 |

Os resultados sugeriram que, para os valores de x do intervalo [1, 5], uma função adequada para modelar essa experiência é exponencial, ou seja, da forma $y = a^x$. De fato, para certo valor inteiro de a, os valores encontrados na experiência e os valores dados por essa função diferem muito pouco. Usando essa função, determine, aproximadamente, para que valor de x encontra-se y = 100.

Utilize o que for necessário:

$\log_2 = 0{,}301$

$\log_3 = 0{,}477$

$\log_5 = 0{,}699$

Para a = 3, os valores de y são próximos a $3^x$.

Assim, devemos encontrar o valor de x tal que $3^x = 100$.

Calculando os logaritmos decimais: $x \cdot \log 3 = \log 100 = 2$

Portanto, $x = \frac{2}{0{,}477} \simeq 4{,}2.$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. Cefet-MG** – O conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}$ para que $\log_{(1-2x)}(2-x-x^2)$ exista como número real é

**a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 1\}$

**b)** $\left\{x \in \mathbb{R}^* \mid -2 < x < \frac{1}{2}\right\}$

**c)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\right\}$

**d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$

**e)** $\left\{x \in \mathbb{R}^* \mid x < \frac{1}{2}\right\}$

**8. Facisa** – Ao simplificarmos a expressão

$$\frac{2}{\log_2 x}+\frac{2}{\log_3 x}+\frac{2}{\log_4 x}$$ considerando válidas as condições de existência dos logaritmos, obtemos por resultado:

**a)** $\log_x 900$
**b)** $\log_x 576$
**c)** $\log_x 144$
**d)** $\log_x 225$
**e)** $\log_x 120$

**9. Fuvest-SP (adaptado)** – Use as propriedades do logaritmo para simplificar a expressão e calcular o valor de S.

$$S=\frac{1}{2\cdot\log_2 2016}+\frac{1}{5\cdot\log_3 2016}+\frac{1}{10\cdot\log_7 2016}$$

**10. Insper-SP** – Uma pessoa irá escolher dois números reais positivos A e B. Para a maioria das possíveis escolhas, o logaritmo decimal da soma dos dois números escolhidos não será igual à soma de seus logaritmos decimais. Porém, se forem escolhidos os valores $A = 4$ e $B = r$, tal igualdade se verificará. Com essas informações, pode-se concluir que o número r pertence ao intervalo

**a)** [1,0; 1,1]
**b)** ]1,1; 1,2]
**c)** ]1,2; 1,3]
**d)** ]1,3; 1,4]
**e)** ]1,4; 1,5]

**11. FGV-SP (adaptado)** – Sendo p e q números reais, com $p > q$ e $p + q > 0$, definiremos a operação # entre p e q da seguinte forma: $p \# q = p^2 - q^2 + \log(p + q)$, com $\log(p + q)$ sendo o logaritmo na base 10 de $(p + q)$. Utilizando-se essa definição, calcule o valor de $10\#(-5)$

**12. UEM-PR** – Se log 2 = a e log 3 = b, então é correto afirmar que

**01)** log360 = 6 (a + b) + 1.

**02)** $\log_{0,04} 18 = \dfrac{a+2b}{a-1}$.

**04)** $\log_x 40 = 2$ tem solução $x = \sqrt{10^{2a+1}}$ .

**08)** $\log 8^x - \log 6^{2x} - x^2$ tem duas soluções, sendo uma delas x = a − 2b.

**16)** $\log\sqrt{250} = \dfrac{3}{2} - a$ .

**13. Udesc** – Considere $\log x = \dfrac{5}{2}$, $\log y = \dfrac{13}{5}$, log (y − x) = 1,913 e log (x + y) = 2,854. Com base nestes dados, analise as proposições.

**I.** $xy = 10^{\frac{51}{10}}$

**II.** $\log (y^2 - x^2) = 0,2$

**III.** $\log\left(\dfrac{x}{y} + 2 + \dfrac{y}{x}\right) = 0,608$

Assinale a alternativa **correta.**

**a)** Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.

**b)** Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

**c)** Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

**d)** Somente a afirmativa I é verdadeira.

**e)** Todas as afirmativas são verdadeiras.

**14. ITA** – Se $\log_2 \pi = a$ e $\log_5 \pi = b$, então:

**a)** $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \le \dfrac{1}{2}$

**b)** $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \le 1$

**c)** $1 < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \le \dfrac{3}{2}$

**d)** $\dfrac{3}{2} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \le 2$

**e)** $2 < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

**15. AFA** – Considere os números A, B e C a seguir.

$$A = \log_{25} 27 \cdot \log_4 5 \cdot \log_{\sqrt{3}} \sqrt{2}$$

$$B = \log_n \left( \log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} \right) \text{ (n é natural maior que 2)}$$

$$C = \left(\frac{a}{b}\right)^{\log c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log b}, \{a,\ b,\ c\} \subset \mathbb{R}_+^*$$

A correta relação de ordem entre os números A, B e C é

**a)** $A < B < C$
**b)** $B < A < C$
**c)** $B < C < A$
**d)** $C < A < B$

**16. ITA (adaptado)** – Calcule o valor da soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \frac{\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[n]{32}}{\log_{\frac{1}{2}} 8^{n+2}}$.

**17. ITA** – Sejam a, b, c, d números reais positivos e diferentes de 1. Das afirmações:

**I.** $a^{(\log_c b)} = b^{(\log_d b)}$;

**II.** $\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1.$

**III.** $\log_{ab}(bc) = \log_a c$.

é (são) verdadeira(s)

**a)** apenas I.
**b)** apenas II.
**c)** apenas I e II.
**d)** apenas II e III.
**e)** todas.

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Insper-SP** C5-H21

Analisando o comportamento das vendas de determinado produto em diferentes cidades, durante um ano, um economista estimou que a quantidade vendida desse produto em um mês (Q), em milhares de unidades, depende do seu preço (P), em reais, de acordo com a relação $Q = 1 + 4 \cdot (0{,}8)^{2P}$. No entanto, em Economia, é mais usual, nesse tipo de relação, escrever o preço P em função da quantidade Q. Dessa forma, isolando a variável P na relação fornecida acima, o economista obteve

**a)** $P = \log_{0,8}\sqrt{\dfrac{Q-1}{4}}$

**b)** $P = \log_{0,8}\left(\dfrac{Q-1}{8}\right)$

**c)** $P = 0,5 \cdot \sqrt[0,8]{\dfrac{Q-1}{4}}$

**d)** $P = \sqrt[0,8]{\dfrac{Q-1}{8}}$

**e)** $P = 0,5 \cdot \log_{0,8}\left(\dfrac{Q}{4}-1\right)$

**19. Enem** C5-H21

Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa. Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10}2$. Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

**a)** 27
**b)** 36
**c)** 50
**d)** 54
**e)** 100

**20. Unifor-CE** C5-H19

Desde tempos imemoriais, o ser humano vem buscando formas de medir e quantificar fenômenos naturais. Nesse processo, desenvolveu ferramentas físicas e abstratas para auxiliá-lo. Uma dessas ferramentas desenvolvidas foi o logaritmo na base 10, representado aqui por log. A medida da magnitude R de um terremoto, medido pela escala Richter, é $R = \log\dfrac{a}{T} + B$, em que a é a amplitude (em micrômetros) do movimento vertical do solo, que é informado em um sismógrafo; T é o período do abalo sísmico em segundos; e B é a amplitude do abalo sísmico, com distância crescente partindo do centro do terremoto. Em 16 de setembro de 2015, um terremoto de magnitude 8,3 atingiu o Chile, próximo à região de Valparaíso, deixando várias vítimas. Em 8 de setembro de 2017, um terremoto de magnitude 5,3 atingiu a região norte do Japão. Sabendo que os dois terremotos acima tiveram a mesma amplitude B e período T, podemos afirmar que o terremoto no Chile foi

**a)** 2 vezes mais forte que o do Japão.
**b)** 3 vezes mais forte que o do Japão.
**c)** 10 vezes mais forte que o do Japão.
**d)** 100 vezes mais forte que o do Japão.
**e)** 1 000 vezes mais forte que o do Japão.

# 28 LOGARITMOS II

- Logaritmo com representação especial
- Consequências da definição de logaritmo
- Consequências das propriedades dos logaritmos

**HABILIDADES**

- Calcular o logaritmo de um número real positivo.
- Compreender a definição de logaritmo.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas significativos.
- Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações de operações e números (naturais, inteiros, racionais ou reais).
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.


MIDSUMMERDAY/ SHUTTERSTOCK

O número **e** é a base para o logaritmo natural, criado por John Napier (1550-1617) por volta de 1614.

## Logaritmo com representação especial

No estudo dos logaritmos, dois sistemas são mais usados em Matemática: o **logaritmo neperiano** e o **logaritmo decimal.**

### LOGARITMO NEPERIANO

O sistema de logaritmo neperiano é o de base **e**. Esse nome foi atribuído em homenagem a seu criador **John Napier.** Indica-se com $\log_e a$ ou simplesmente e= 2,71828182... – um número irracional também conhecido por **número de Euler**.

O número de Euler pode ser calculado por meio de uma série de somas de frações, dada por:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}}}}}}}$$

Por volta de 1614, Napier constatou que todo número poderia ser escrito em forma de potência. O estudo de Napier possibilitou a criação de um logaritmo com base diferente, chamado **logaritmo natural**. A base desse logaritmo é o número irracional, determinado pela expressão $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

A notação do logaritmo natural é lnx, que representa $\log_e x$.

### LOGARITMO DECIMAL

O sistema de logaritmos decimais é aquele em que a base do logaritmo é 10. Esse sistema foi desenvolvido por Henry Biggs (1561-1630), o primeiro a destacar as vantagens do uso dos logaritmos na base 10 como instrumento auxiliar no cálculo numérico. Ele é indicado com $\log_{10} a$ ou simplesmente log a.

Nas calculadoras científicas, as teclas **log** e **ln** representam o logaritmo decimal e o logaritmo natural, respectivamente, desde que o número inserido seja um número real positivo.


YURY ZAP/ SHUTTERSTOCK

Se inserirmos um número real positivo e acionarmos os botões de **log** e **ln**, calcularemos imediatamente o valor de seus logaritmos decimal e natural, respectivamente.

## Consequências importantes da definição

Das definições de logaritmo, podemos apontar algumas consequências importantes quanto às suas propriedades.

Seja **b** um número real positivo e diferente de 1; **a**, um número real positivo; e **k**, um número real qualquer, temos as seguintes consequências:

1º O logaritmo de 1 em qualquer base **b** é igual a zero: $\log_b 1 = 0$, pois $b^0 = 1$.

2º O logaritmo da base **b**, qualquer que seja ela, é igual a 1: $\log_b b = 1$, pois $b^1 = b$.

3º O logaritmo de uma potência, em qualquer base real e positiva, é igual ao produto de seu expoente pelo logaritmo da base da potência: $\log_b b^k = k$, pois $\log_b b = 1$ e $\log_b b^k = k \cdot \log_b b = k$.

A potência de base **b** e expoente $\log_b a$ é igual a **a**.

**Demonstração:**

Seja $\log_b a = \alpha$:

$\log_b a = \alpha \rightarrow b^\alpha = a$

$b^{\log_b a} = b^\alpha = a$

Logo, $b^{\log_b a} = a$

## Consequências das propriedades do logaritmo

Das propriedades do logaritmo, podemos ressaltar algumas consequências de suas propriedades operatórias.

Logo:

1º $\log_b\left(\frac{1}{p}\right) = -\log_b(p)$

**Demonstração:**

$$\log_b\left(\frac{1}{p}\right) = \log_b p^{-1} = (-1)\cdot\log_b p = -\log_b p = \text{colog}_b p\,.$$

2º $\log_b\left(\sqrt[n]{p}\right) = \frac{1}{n}\cdot\log_b p\,.$

**Demonstração:**

$$\log_b\left(\sqrt[n]{p}\right) = \log_b p^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\cdot\log_b p\,.$$

3º $\log_{b^n} p = \frac{1}{n}\cdot\log_b p$

**Demonstração:**

$$\log_{b^n} p = \frac{\log_b p}{\log_b b^n} = \frac{\log_b p}{n} = \frac{1}{n}\cdot\log_b p$$

4º $\log_b p = \frac{1}{\log_p b}$, com $p \neq 1$

**Demonstração:**

$$\log_b p = \frac{\log_p p}{\log_p b} = \frac{1}{\log_p b}\,.$$

# ROTEIRO DE AULA

## LOGARITMO

**Representações especiais**

Logaritmo decimal:

$Log_{10}\ 10 =$ log a

Logaritmo neperiano:

$\log_e a =$ ln a com e = 2,7...

**Condição de existência**

$\log_b 1 =$ 0

$\log_b b =$ 1

$\log_b (b^n) =$ n

$b^{\log_b a} =$ a

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. UVA-RJ (adaptado)** – Calcule o valor de $2^{\log_2 5}$.

Como, $b^{\log_b a} = a$, temos que $2^{\log_2 5} = 5$

**2. Unitau-SP** – Sabendo-se que $A = \log_{\sqrt[3]{7}} 7 + \log 0{,}001$, é CORRETO afirmar que

**a)** A = 7
**b)** A = 3
**c)** A = 1
**d)** A = 0
**e)** A = −1

Temos que $A = \log_{7^{\frac{1}{3}}} 7 + \log_{10} 10^{-3} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} \log_7 7 = 3 - 3 = 0$

**3. Unit-SE** C5-H21

Para uma campanha de vacinação em um determinado município, são disponibilizadas x doses de vacina. Se o planejado é que o número de doses a serem disponibilizadas dobre a cada ano, então, considerando-se log 2 = 0,3, esse número passará a ser 10 vezes o número inicial, após

**a)** 3 anos.
**b)** 3 anos e 4 meses.
**c)** 3 anos e 6 meses.
**d)** 3 anos e 8 meses.
**e)** 3 anos e 10 meses.

O número de doses disponibilizadas no mês **n** é de $N = 2^n N_0$, em que $N_0$ é o número de doses iniciais.
Assim, quando $N = 10N_0$, temos:

$10 = 2^n$

$\log 10 = \log 2^n$

$n \cdot \log 2 = 1$

$n = \dfrac{1}{0{,}3} = 3{,}333... = 3 \text{ anos e } \dfrac{1}{3} \text{ ano} = 3 \text{ anos e } 4 \text{ meses}$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**4. UFSCar-SP** – Uma garota recebeu de presente de aniversário R$ 400,00 e decidiu gastá-lo da seguinte forma: no 1º dia, gastou R$ 200,00; no 2º dia, gastou R$ 100,00; e, assim, a cada dia gastava apenas a metade do que havia gasto no dia anterior. Procedendo dessa forma, e sabendo que log 2 = 0,30, pode-se concluir que o número de dias necessários para que ela tenha menos de R$ 1,00 para gastar será

**a)** 8
**b)** 9
**c)** 10
**d)** 11
**e)** 12

Como a garota sempre gasta metade de seu dinheiro, em **n** dias, ela gasta $200\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 200 \cdot 2^{1-n}$.

Para que ela tenha menos de R$ 1,00, temos que $1 = 200 \cdot 2^{1-n}$.

$\log 1 = \log\left(200 \cdot 2^{1-n}\right) \rightarrow 0 = \log 200 + \log 2^{1-n} =$

$= \log 2 + \log 100 + (1-n)\log 2 = 0{,}3 + 2 + 0{,}3 - n \cdot 0{,}3$

$n = \dfrac{2{,}6}{0{,}3} = 8{,}666...$

Ou seja, serão necessários pelo menos 9 dias para que ela tenha menos de R$ 1,00.

**5. Unitau-SP** – O produto $(\log_2 7) \cdot (\log_7 5) \cdot (\log_5 4)$ é igual a

**a)** 1
**b)** 2
**c)** 3
**d)** 4
**e)** 5

Calculando, temos:

$(\log_2 7) \cdot (\log_7 5) \cdot (\log_5 4) = \dfrac{\log 7}{\log 2} \cdot \dfrac{\log 5}{\log 7} \cdot \dfrac{2 \cdot \log 2}{\log 5} = 2$

**6. PUC-RS (adaptado)** – Considere a função $f(x) = \log_b x$, em que b é uma constante real positiva e diferente de um.

Se $f(1) + f(9) = -2$, então calcule o valor de **b**.

Temos que:

$f(1)+f(9)=\log_b(1)+\log_b(9)=-2$

$\log_b(1\cdot 9)=-2$

$\log_b 9=-2$

$b^{-2}=9$

$b^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

Então, $b=\frac{1}{3}$.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. Fameaço-MG** – Calcule $\log\left(10^3\cdot 100^{\frac{1}{3}}\right)$ e assinale a alternativa **CORRETA**.

**a)** 1 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{11}{3}$

**8. Unitau-SP** – O valor de $\left(2^{\log_2\sqrt{2}}\right)^2$ é

**a)** 1 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 6 **e)** 8

**9. Unicamp** – Considere a função $f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x}$, definida para todo número real x.

**a)** Mostre que $f\left(\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$ é um número inteiro.

**b)** Sabendo que $\log_2 \approx 0{,}3$, encontre os valores de x para os quais $f(x) = 52$.

**10. Udesc** – Sabendo que os números reais x, y e z são tais que $\log_y x = 5$ e $\log_y z = 7$, então $\log_x\left(\dfrac{x^2y^3}{z^4}\right)$ é igual a:

**a)** $-5$ **b)** $-3$ **c)** $-2$ **d)** $\dfrac{57}{5}$ **e)** $\dfrac{41}{5}$

**11. AFA** – Pesquisas realizadas verificaram que, no planeta Terra, no início do ano de 2013, a população de pássaros da espécie A era 12 vezes a população de pássaros da espécie B. Sabe-se que a população de pássaros da espécie A cresce a uma taxa de 5% ao ano, enquanto a população de pássaros da espécie B cresce a uma taxa de 20% ao ano. Com base nesses dados, é correto afirmar que essas duas populações de pássaros serão iguais (Considere: $\log_7 = 0{,}85$; $\log 6 = 0{,}78$; $\log 2 = 0{,}3$)

**a)** no 1º semestre do ano de 2034.
**b)** no 2º semestre do ano de 2034.
**c)** no 1º semestre do ano de 2035.
**d)** no 2º semestre do ano de 2035.

**12. FGV-SP** – Certa empresa teve seu faturamento anual aumentado de R$ 80.000,00 para R$ 400.000,00 em três anos. Se o faturamento cresceu a uma mesma taxa anual nesse período, essa taxa foi igual a

**a)** $(100 \cdot \log\sqrt[3]{5})\%$
**b)** $(100 \cdot \log\sqrt[3]{4})\%$
**c)** $(100\sqrt[3]{5} - 100)\%$
**d)** $\left(\dfrac{200}{3}\right)\%$
**e)** $\left(\dfrac{100}{3}\right)\%$

**13. PUC-SP** – Considere as seguintes afirmações:

**IV.** Para todo número real n, tem-se: $\dfrac{7^{n-2}+7^{n-1}}{7^{n-2}-7^{n-3}} < 8$.

**V.** Se $N = \left(27^{\frac{1}{3}} - 0{,}777...\right) \div \dfrac{5}{18}$, então $\log_4 N = 1{,}5$.

**VI.** Efetuando-se $\left(\sqrt[4]{8+4\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt[4]{8-4\sqrt{3}}\right)$ obtém-se um número primo.

Relativamente a essas afirmações, é correto afirmar que:

**a)** I, II e III são verdadeiras.
**b)** apenas II e III são verdadeiras.
**c)** apenas I e II são verdadeiras.
**d)** apenas uma é verdadeira.
**e)** I, II e III são falsas.

**14. Unitau-SP (adaptado)** – Dados $\log_b 2 = X$ e $\log_b 3 = Y$, onde $b > 0$ e $b \neq 1$, então calcule o valor de $\log_b \frac{32}{8.1} - \log_b 20$ em função de X e Y.

**15. Unitau-SP** – Sabendo-se que

$B = \log\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a}}}$, $\log_b a = \frac{k}{m}$, $\log b = m$ e a, b, k e m são constantes reais maiores que zero e diferentes de um, é CORRETO afirmar que

**a)** $B = -60k$

**b)** $B = 60m$

**c)** $B = -\frac{k}{60}$

**d)** $B = \frac{m}{60}$

**e)** $B = \frac{k}{60m}$

**16. AFA (adaptado)** – Nas expressões x e z, considere a simbologia:

- log é o logaritmo decimal;
- sen é o seno de um arco; e
- n! é o fatorial de n.

Se $x = \frac{3\log(100!)}{\log 1 + \log 8 + \log 27 + \ldots + \log 100^3}$ e $y = \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,(\alpha + 2\pi) + \ldots + \text{sen}\,(\alpha + 99\pi)$, então calcule o valor de $x + y$.

**17. ITA (adaptado)** – Considere as seguintes afirmações sobre números reais:

**I.** Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é um número racional.

**II.** $\ln\sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)(\log_4 9)$ é um número racional.

É (são) verdadeira(s):

**a)** nenhuma.

**b)** apenas I.

**c)** apenas II.

**d)** todas.

**18. Enem** C5-H22

Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3 000 °C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min. Use 0,477 como aproximação para $\log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10}(11)$. O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de

**a)** 22
**b)** 50
**c)** 100
**d)** 200
**e)** 400

**19. Udesc (adaptado)** C6-H26

No século XVII, os logaritmos foram desenvolvidos com o objetivo de facilitar alguns cálculos matemáticos. Com o uso dos logaritmos e com tabelas previamente elaboradas era possível, por exemplo, transformar multiplicações em somas e divisões em subtrações. Com o auxílio dos logaritmos era possível também realizar, de forma muito mais rápida, as operações de radiciação. A Tabela 2 é um pequeno exemplo do que era uma tabela de logaritmos.

| Tabela de logaritmos | |
|---|---|
| log 1,50 | 0,176 |
| log 1,52 | 0,181 |
| log 1,54 | 0,187 |
| log 1,56 | 0,193 |
| log 1,58 | 0,198 |
| log 2 | 0,301 |
| log 3 | 0,477 |
| log 4 | 0,602 |
| log 5 | 0,699 |
| log 6 | 0,778 |
| log 7 | 0,845 |
| log 8 | 0,903 |
| logo 9 | 0,954 |

Com base nas informações da Tabela 2, pode-se concluir que o valor aproximado para $\sqrt[8]{35}$ é:

**a)** 1,50
**b)** 1,56
**c)** 1,52
**d)** 1,54
**e)** 1,58

**20. IFPE** C5-H21

Os alunos do curso de Meio Ambiente do campus de Santo Agostinho observaram que o número de flores em uma árvore X segue o modelo matemático $F(h) = 16 - \log_2 (3h+1)$, onde F(h) é a quantidade de flores após h horas de observação. Após quanto tempo de observação esta árvore estará com apenas 10 flores:

**a)** 6 horas
**b)** 25 horas
**c)** 20 horas
**d)** 21horas
**e)** 64 horas

# 29 EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS I

- Introdução
- Definição de equação logarítmica
- Propriedades operatórias
- Resolução de equação logarítmica

**HABILIDADES**

- Calcular o logaritmo de um número real positivo.
- Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas significativos.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para construir argumentos.
- Resolver situações--problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

## Introdução

Vimos anteriormente o conceito, as condições de existência e as propriedades dos logaritmos, além de estudarmos como utilizá-los em situações práticas.

Agora abordaremos o conceito, as propriedades e as formas de resolução de equações logarítmicas.

ROBERATEN/ SHUTTERSTOCK

A espiral logarítmica pode ser encontrada no formato da concha de um náutilo *(Nautilus)*, uma espécie de molusco.

A espiral logarítmica foi estudada primeiro por **Jacob Bernoulli** (1654-1705). Essa figura é uma curva que forma um ângulo constante com todas as retas de seu plano, passando por um ponto fixo desse plano. Esse nome tem origem em sua expressão analítica, que pode ser escrita na forma:

$$r = ae^{b\theta}$$

$$\theta = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

Na expressão, **a** e **b** são constantes reais positivas, **e** é o número de Euler, e **r** é a distância da origem até um ponto da curva.

NORTH WIND PICTURE ARCHIVES/ALAMY STOCK PHOTO

Retrato do suíço Jacob Bernoulli, considerado o "pai" do cálculo exponencial.

# Definição de equação logarítmica

Chamamos de **equação logarítmica** uma expressão matemática que contenha o sinal de igualdade (=) e uma incógnita dentro do logaritmo (log). A principal tarefa é fazer o logaritmo ficar igual a uma constante, para, em seguida, aplicar a definição. Contudo, há diversas situações em que ocorre igualdade entre dois logaritmos de mesma base, nas quais a propriedade operatória é bastante útil, o que facilita a resolução das equações.

# Resolução de equação logarítmica

Podemos dividir as equações logarítmicas em alguns casos específicos, a fim de facilitar sua compreensão.

## EQUAÇÕES REDUTÍVEIS A UMA IGUALDADE ENTRE DOIS LOGARITMOS

Vamos considerar que o logaritmo de base 2, do número $(x^2 - x)$, é igual a 1. Ou seja, $\log_2 (x^2 - x) = 1$. Assim, pela condição de existência dos logaritmos, temos $x^2 - x > 0$.

Então:

$\log_2 (x^2 - x) = 1 \rightarrow x^2 - x = 2^1$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = -1$ ou $x = 2$

Como $(-1)^2 - (-1) = 2 > 0$ e $(2)^2 - 2 = 2 > 0$, ambos os valores de **x** satisfazem à equação logarítmica. Portanto, $S = \{-1, 2\}$.

## EQUAÇÕES QUE ENVOLVEM USO DE PROPRIEDADES

Muitas vezes precisamos aplicar as propriedades operatórias, a fim de reduzir a equação a um dos dois casos anteriores.

Para resolvermos uma equação logarítmica em $\mathbb{R}$ como $\log_3 (3x + 6) - \log_3 (x + 2) = 1$, as condições de existência são dadas por:

$3x + 6 > 0$ e $x + 2 > 0$

$x > -2$

Assim:

$\log_3 (3x + 6) - \log_3 (x + 2) = 1$

$$\log_3\left(\frac{3x + 6}{x + 2}\right) = 1$$

$$3^1 = \frac{3x + 6}{x + 2}$$

$3(x + 2) = 3x + 6$

$3x + 6 = 3x + 6$

Portanto, a igualdade é válida para qualquer valor de **x** em $\mathbb{R}$ que satisfaça à condição de existência.

Então, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$.

## EQUAÇÕES QUE ENVOLVEM MUDANÇA DE VARIÁVEL

Para determinarmos o conjunto solução da equação $(\log x)^2 + \log x = 2$, em $\mathbb{R}$, a condição de existência é dada por $x > 0$.

Chamamos $\log x = y$. Então:

$y^2 + y = 2$

$y^2 + y - 2 = 0$

$y = -2$ ou $y = 1$

Assim, para $y = -2$:

$$\log x = -2 \rightarrow x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

Para $x = 1$:

$\log x = 1 \rightarrow x = 10^1 = 10$

Ao verificarmos, temos:

$$x = \frac{1}{100} > 0$$

$x = 10 > 0$

Portanto, $x = \frac{1}{100}$ ou $x = 10$, $S = \left\{\frac{1}{100}, 10\right\}$.

## EQUAÇÕES QUE ENVOLVEM MUDANÇA DE BASE

Às vezes, os logaritmos envolvidos na equação são expressos em bases diferentes. A mudança de base é essencial para facilitar a resolução.

Como na equação $\log_4 x + \log_x 4 = 2$, pelas condições de existência, $x > 0$ e $x \neq 1$.

Ao mudarmos de base, temos $\log_x 4 = \frac{1}{\log_4 x}$.

Substituindo na equação $\log_4 x + \frac{1}{\log_4 x} = 2$.

Chamamos $\log_4 x = y$.

Logo:

$$y + \frac{1}{y} = 2$$

$y^2 + 1 = 2y$

$y^2 - 2y + 1 = 0$

$(y - 1)^2 = 0$

$y = 1$

Assim, $\log_4 x = 1 \Rightarrow x = 4$.

Portanto, a solução da equação logarítmica é $S = \{4\}$.

# ROTEIRO DE AULA

## EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

São resolvidas usando-se: a definição de logaritmo, suas consequências e propriedades operatórias, a mudança de base e as condições de existência dos logaritmos.

### Resolução de equações logarítmicas

$\log_b a = x \rightarrow b^x = a$; $(a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1)$

$\log_b x = \log_b 2 \leftrightarrow x = 2$

$\log_b 1 = 0$

$\log_b b = 1$

$\log_b b^a = a$

$\log_b (p \cdot q) = \log_b p + \log_b q$

$\log_b \left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Unit-SE** – Se o tamanho de um tumor diminuir 10% a cada sessão de terapia, pode-se calcular, usando $\log_{10}3 \cong 0{,}477$, que o número mínimo de sessões necessárias para reduzi-lo a menos do que 30% do seu tamanho inicial é

**a)** 8
**b)** 9
**c)** 10
**d)** 11
**e)** 12

Como o tumor diminui 10% a cada sessão, seu tamanho fica com 90% do inicial. Logo, em **n** sessões: $(90\%)^n = (0{,}9)^n$.

Assim:

$(0{,}9)^n = 0{,}3$

$\log (0{,}9)^n = \log (0{,}3)$

$n \cdot \log 0{,}9 = \log 0{,}3$

$n \cdot \log \frac{9}{10} = \log \frac{3}{10}$

$$n = \frac{\log \frac{3}{10}}{\log \frac{9}{10}} = \frac{\log 3 - \log 10}{\log 9 - \log 10} = \frac{\log 3 - 1}{2 \cdot \log 3 - 1} = \frac{0{,}477 - 1}{2 \cdot 0{,}477 - 1} \simeq 11{,}36.$$

Portanto, serão necessárias pelo menos 12 sessões.

**2. Unicamp** – A solução da equação na variável real x, $\log_x (x + 6) = 2$, é um número

**a)** primo
**b)** par
**c)** negativo
**d)** irracional

Pelas condições de existência:

$x + 6 > 0$

$x > 0$ e $x \neq 1$

Assim:

$\log_x (x + 6) = 2 \rightarrow x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$x = 3$ ou $x = -2$

Como $x = -2$ não convém, $x = 3$, (o qual é um número primo).

**3. Insper-SP** C5-H21

Psicólogos educacionais podem utilizar modelos matemáticos para investigar questões relacionadas à memória e retenção da informação. Suponha que um indivíduo tenha feito um teste e que, depois de t meses e sem rever o assunto do teste, ele tenha feito um novo teste, equivalente ao que havia feito anteriormente. O modelo matemático que descreve situação de normalidade na memória do indivíduo é dado por $y = 82 - 12 \log (t + 1)$, sendo y a quantidade de pontos feitos por ele no instante t.

Após t meses da aplicação do teste inicial, a pontuação de um indivíduo no novo teste caiu para 70 pontos. Assim, é correto concluir que esse novo texto ocorreu t meses após o primeiro teste, com t igual a

**a)** 11
**b)** 8
**c)** 15
**d)** 12
**e)** 9

Temos:

$70 = 82 - 12 \cdot \log(t + 1)$

$12 \cdot \log(t + 1) = 12$

$\log(t + 1) = 1$

$t + 1 = 10^1$

$t = 9$

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**4. FGV-SP** – Obtenha os valores de x e y que satisfazem o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ \log_4 x + \log_4 y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Temos que:

$\log_4 x - \log_4 y = \log_4 \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{y} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

$x = 2y$

Como $x + y = 15$:

$2y + y = 15$

$3y = 15$

$y = 5$

Então, $x = 10$.

Portanto, $S = \{(10, 5)\}$.

**5. Insper-SP (adaptado)** – Calcule o número de soluções reais distintas da equação $x^4 \log_7 x - 16\log_7 x = 0$.

Temos $x^4 \log_7 x - 16\log_7 x = \log_7 x \cdot (x^4 - 16) = 0$.

Logo, $\log_7 x = 0 \rightarrow x = 1$.

Ou $x^4 - 16 = 0 \rightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

Pela condição de existência do logaritmo, $x > 0$.

As soluções possíveis são $x = 1$ ou $x = 2$.

Portanto, há 2 soluções.

**6. Insper-SP** C5-H21

Psicólogos educacionais podem utilizar modelos matemáticos para investigar questões relacionadas à memória e retenção da informação. Suponha que um indivíduo tenha feito um teste e que, depois de t meses e sem rever o assunto do teste, ele tenha feito um novo teste, equivalente ao que havia feito anteriormente. O modelo matemático que descreve situação de normalidade na memória do indivíduo é dado por $y = 82 - 12 \log (t + 1)$, sendo y a quantidade de pontos feitos por ele no instante t.

Considere agora que, após t meses da aplicação do teste inicial, a pontuação do indivíduo tenha caído 18 pontos na nova aplicação do teste. Adotando $\sqrt{10} = 3{,}16$, t é igual a

**a)** 25,1
**b)** 30,6
**c)** 32,3
**d)** 32,4
**e)** 28,8

Temos 82 − 18 = 64 pontos.

Logo:

$64 = 82 - 12 \cdot \log (t + 1)$

$12 \cdot \log (t + 1) = 18$

$\log (t + 1) = \frac{3}{2}$

$t + 1 = 10^{\frac{3}{2}}$

$t + 1 = 10 \cdot \sqrt{10}$

$t + 1 = 31{,}6$

$t = 30{,}6$

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. PUC-PR (adaptado)** – Luiz pretende descobrir quanto tempo deve esperar até que seu capital triplique se aplicado a uma taxa de juros de 10% ao ano. Para estimar o tempo de espera desconsiderou, em seus cálculos, qualquer tipo de taxa ou imposto, consultou uma tábua de logaritmos decimais e usou os seguintes valores aproximados:

$\log (11) = 1{,}04$ e $\log (3) = 0{,}48$

Calcule o tempo encontrado por Luiz.

**8. Unit-AL** – A concentração de um vírus no sangue de um paciente está aumentando em função do tempo t (em horas), de acordo com $C(t) = C_0 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$, em que $C_0$ é a concentração inicial.

Usando, se preciso, $\log_2 3 \cong 1{,}6$, é correto concluir que a concentração deve aumentar, aproximadamente, 50% a cada

**a)** 1h
**b)** 2h
**c)** 3h
**d)** 4h
**e)** 5h

**9. Unit-SE** – Considere-se que o nível de álcool no sangue de uma pessoa decresce de acordo com a lei $N(t) = 2(0,5)^t$, em que N é dado em gramas por litro e t é o tempo medido em horas a partir do momento em que o nível de álcool foi constatado. Sabe-se que o limite permitido de álcool no sangue, para dirigir com segurança, é de 0,8 gramas por litro. Considerando-se que $\log 2 = 0,3$ e que t minutos é o tempo necessário para que um motorista espere até alcançar o nível permitido para dirigir com segurança, pode-se afirmar que o valor de t é

**a)** 80
**b)** 75
**c)** 70
**d)** 65
**e)** 60

**10. Udesc** – O valor de $x \cdot y$ com $x, y \in \mathbb{R}$, sabendo que $\log_2(x) + \log_4(y) = 2$ e $2^{x+y} = 32$, é igual a:

**a)** 4
**b)** 8
**c)** 2
**d)** 6
**e)** 10

**11. EsPCex** – Resolvendo a equação $\log_3(x^2 - 2x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) = \log_3(x + 1)$, obtém-se

**a)** $S = \{-1\}$
**b)** $S = \{4,5\}$
**c)** $S = \{6\}$
**d)** $S = \varnothing$
**e)** $S = \{4\}$

**12. Unisc-RS** – Assinale a única sentença verdadeira sobre o conjunto solução da equação $\dfrac{100^{\log(x)} + 3}{10^{\log(x)}} = 4$.

**a)** Possui dois elementos cujo módulo da diferença é 2.
**b)** Possui dois elementos cuja soma é $-2$.
**c)** Possui dois elementos cuja soma é $\frac{3}{4}$.
**d)** Possui um elemento porque a raiz é dupla.
**e)** É um conjunto vazio.

**13. EsPCex** – Uma epidemia ocorre, quando uma doença se desenvolve num local, de forma rápida, fazendo várias vítimas, num curto intervalo de tempo. Segundo uma pesquisa, após t meses da constatação da existência de uma epidemia, o número de pessoas por ela atingida é $N(t) = \dfrac{20\,000}{2 + 15 \cdot 4^{-2t}}$. Considerando que o mês tenha 30 dias, $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$, 2 000 pessoas serão atingidas por essa epidemia, aproximadamente, em

**a)** 7 dias
**b)** 19 dias
**c)** 3 meses
**d)** 7 meses
**e)** 1 ano

**14. Unicamp-SP** – Considere a função $f(x) = |2x - 4| + x - 5$, definida para todo número real x.

**a)** Esboce o gráfico de $y = f(x)$ no plano cartesiano para $-4 \leqslant x \leqslant 4$.
**b)** Determine os valores dos números reais a e b para os quais a equação $\log_a (x + b) = f(x)$ admite como soluções $x_1 = -1$ e $x_2 = 6$.

**15. FGV-SP** – A solução da equação $\log 1 + 2\log 2 + 3\log 3 + 4\log 4 + \ldots + 10\log 10 = \log x$ é

**a)** $\dfrac{1}{2!\ 3!\ 4!\ \ldots\ 9!}$
**b)** $\dfrac{10}{2!\ 3!\ 4!\ \ldots\ 9!}$
**c)** $\dfrac{10!}{2!\ 3!\ 4!\ \ldots\ 9!}$
**d)** $\dfrac{(10!)^{10}}{2!\ 3!\ 4!\ \ldots\ 9!}$
**e)** $\dfrac{(10!)^{11}}{2!\ 3!\ 4!\ \ldots\ 9!}$

**16. UECE** – Pode-se afirmar corretamente que a equação $\log_2 (1 + x^4 + x^2) + \log_2 (1 + 2x^2) = 0$

**a)** não admite raízes reais.
**b)** admite exatamente uma raiz real.
**c)** admite exatamente duas raízes reais, as quais são iguais.
**d)** admite exatamente quatro raízes reais.

**17. ITA** – Determine as soluções reais da equação em x,

$$(\log_4 x)^3 - \log_4 (x^4) - 3\,\frac{\log_{10} 16x}{\log_{100} 16} = 0.$$

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. PUC-PR** C5-H21

O número de organismos de uma colônia pode ser calculado e é aproximadamente dado pela função $N(t) = N_0 \cdot 3^t$, em que $N_0$ é o número inicial de organismos e t é o tempo, em dias. Após quantos dias o número de indivíduos é 3 000 vezes maior que o número inicial de organismos? (log 3 = 0,48)

**a)** 7,90 dias.
**b)** 7,25 dias.
**c)** 6,35 dias.
**d)** 8,15 dias.
**e)** 6,15 dias

**19. PUC-RS** C5-H22

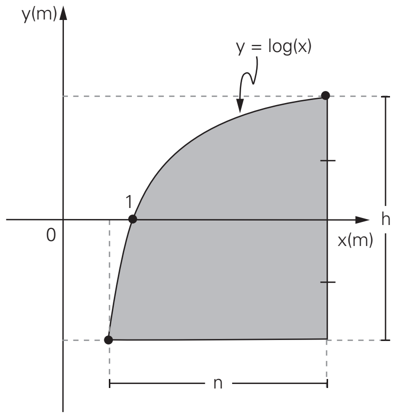
Uma turma de uma escola central de Porto Alegre recebeu a seguinte questão em sua primeira prova no Ensino Médio:

Um dos valores de x que soluciona a equação $\log_2 (-x^2 + 32) = 4$ é igual ao número de centros culturais localizados nas proximidades do centro da cidade. Esse número é

**a)** 3
**b)** 4
**c)** 5
**d)** 6
**e)** 7

**20. Enem** C6-H25

Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação y = log (x), conforme a figura.




A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura h do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura h do vidro em função da medida n de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

**a)** $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) - \log\left(\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

**b)** $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) - \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

**c)** $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) + \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

**d)** $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

**e)** $2\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

# EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS II

- Propriedade operatória
- Aplicações

**HABILIDADES**

- Calcular o logaritmo de um número real positivo.
- Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas significativos.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para construir argumentos.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

As equações logarítmicas têm diversas aplicações na modelagem de problemas reais na Matemática e em diversas outras áreas do conhecimento. Para resolver esses problemas e modelá-los corretamente, devemos ter um conhecimento pleno de suas propriedades e de casos específicos.

NAZZU/ SHUTTERSTOCK

Nos romanescos, os fractais são exemplos de escalas logarítmicas encontradas na natureza.

## Propriedade operatória

Considerando **b**, **a** e **β** números reais positivos, com **b** ≠ **1**, temos equivalência entre os termos.

$$\log_b \alpha = \log_a \beta \leftrightarrow \alpha = \beta$$

**Demonstração:**

$(\Rightarrow)$:

Como $\log_b \alpha = \log_a \beta$, temos que:

$\log_b \alpha = \log_b \beta = \gamma$

Aplicando a definição de logaritmo:

$\alpha = b^\gamma$ e $\beta = b^\gamma$

Logo, $\alpha = \beta$.

A demonstração $(\Leftarrow)$ é imediata.

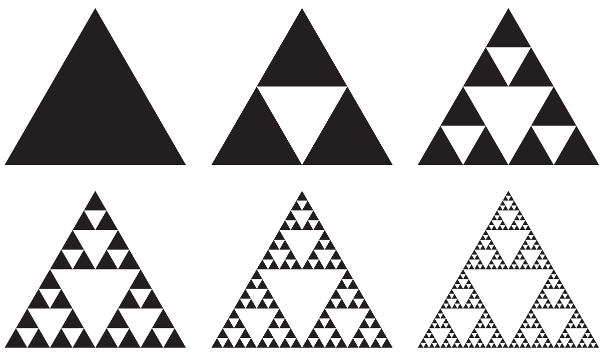
Portanto, $\log_b \alpha = \log_b \beta \leftrightarrow \alpha = \beta$.

Com essa propriedade e sempre obedecendo às condições de existência dos logaritmos, se ocorre uma igualdade de dois logaritmos na mesma base, imediatamente podemos $(\Rightarrow)$ igualar os logaritmandos e resolver a nova equação.

# Aplicações

## FRACTAIS

Fractais são objetos geométricos cujas partes se repetem em, aparentemente, toda sua estrutura global. E os logaritmos têm aplicação nas definições das dimensões de fractais. O triângulo de Sierpinski (figura a seguir) é construído com três cópias dele mesmo. Cada pedaço do triângulo tem metade de sua **dimensão** anterior. Observe.

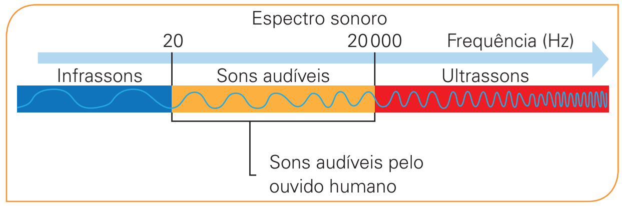

ALEJO MIRANDA/ SHUTTERSTOCK

Triângulo de Sierpinski.

Em razão de suas formas geométricas, os fractais não são classificados segundo a Geometria euclidiana. Eles obedecem a uma dimensão chamada **dimensão de Hausdorff**, dada por $d = \dfrac{\log N}{\log \frac{L}{n}}$, em que **L** é o comprimento da linha, **n** é o número de partes em que a linha pode ser dividida e **N** é o novo comprimento da linha em determinada interação. Portanto, no triângulo de Sierpinski, essa dimensão é $\dfrac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}58$.

## INTENSIDADE SONORA

Uma pessoa com audição normal é capaz de ouvir grande faixa de sons de intensidades bem diferentes. Isso depende da frequência e da intensidade sonora, que são características físicas da onda.




O som classifica-se em fraco ou forte em relação à intensidade, representada por I.

Existe um valor mínimo de intensidade de som, abaixo do qual é impossível, para um humano, ouvir algo. A essa intensidade damos o nome de **limiar de audibilidade**, que vale, aproximadamente, $I_0 = 10^{-12}\,W/m^2$. Com base nos valores de intensidade de som, podemos definir o nível de intensidade (β) medido em decibel (**dB**).

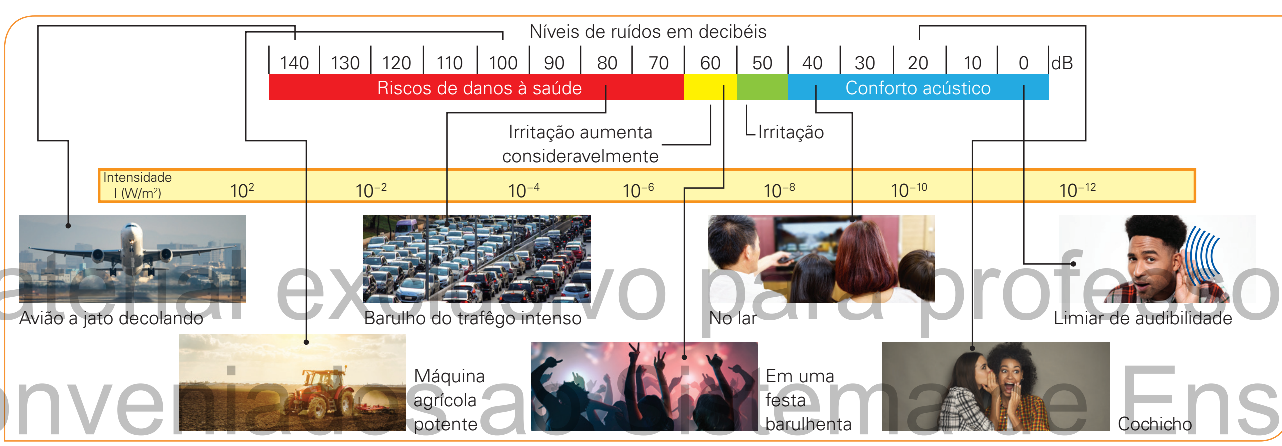
$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Com essa fórmula, podemos calcular, por exemplo, a intensidade correspondente ao nível de 140 dB medidos próximos a um avião a jato.


BYCHYKHIN OLEXANDR/ SHUTTERSTOCK

Um avião a jato pode emitir ruídos de intensidade de 140 dB.

O gráfico a seguir mostra a relação entre a intensidade sonora e o nível sonoro para algumas situações comuns do dia a dia.




MOTIVE56/SHUTTERSTOCK; OTICKI/DREAMSTIME.COM; ALFFOTO/ISTOCKPHOTO; VCHALUP/DREAMSTIME.COM; INTMPHOTO/ISTOCKPHOTO; MILKOS/DREAMSTIME.COM; VADYMVDROBOT/DREAMSTIME.COM

# ROTEIRO DE AULA

## EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

**Propriedade operatória**

$\log_b \alpha = \log_b \beta \leftrightarrow \underline{\alpha} = \underline{\beta}$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. ESPM-SP** – Se $\log x + \log x^2 + \log x^3 + \log x^4 = -20$, o valor de x é

**a)** 10
**b)** 0,1
**c)** 100
**d)** 0,01
**e)** 1

Temos que:
$\log x + \log x^2 + \log x^3 + \log x^4 = \log x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$
$= \log x^{10} = 10 \log x = -20$
$\log x = -2$
$x = 10^{-2} = 0,01$

**2. Insper-SP (adaptado)** – Calcule o número de soluções reais da equação $\log_x(x+3) + \log_x(x-2) = 2$.

Temos que:
$\log_x(x+3) + \log_x(x-2) = \log_x(x+3)(x-2) = 2$
$x^2 = (x+3)(x-2)$
$x^2 = x^2 + 3x - 2x - 6$
$x = 6$.
Logo, a equação tem uma única solução.

**3. Unitau-SP** C5-H21

Um biólogo está realizando um experimento com duas culturas de bactérias. Ele constatou que a primeira, denominada B1, cresce à taxa de 20% por hora, e a segunda, denominada B2, cresce à taxa de 8% por hora. Considere que as quantidades iniciais de bactérias são 1 230 e 2 460, respectivamente, e adote log2 = 0,30 e log3 = 0,48. Dentre as alternativas abaixo, qual apresenta a melhor aproximação referente ao tempo necessário para que as duas culturas tenham o mesmo número de bactérias?

**a)** 3 horas e 15 minutos.
**b)** 2 horas e 30 minutos.
**c)** 7 horas e 30 minutos.
**d)** 1 hora e 30 minutos.
**e)** 9 horas e 45 minutos.

Temos que:
$1\,230 \cdot (1 + 20\%)^n = 2\,460 \cdot (1 + 8\%)^n$
$(1,2)^n = 2 \cdot (1,08)^n$
Logo, $\log (1,2)^n = \log 2 \cdot (1,08)^n$.
Então:
$n \cdot \log 1,2 = \log 2 + n \cdot \log 1,08$
$n \cdot (\log 1,2 - \log 1,08) = \log 2$
$n \cdot \log \dfrac{1,2}{1,08} = n \cdot \log \dfrac{10}{9} = n \cdot (\log 10 - \log 3^2) = n \cdot (1 - 2 \cdot 0,48) = 0,3$
$n = \dfrac{0,3}{0,04} = 7,5$ h = 7 horas e 30 minutos

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
**Habilidade**: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**4. Unitau-SP** – O conjunto solução da equação $e^{2x} - (e - 1)e^x - e = 0$, onde **x** é um número real e é a base dos logaritmos naturais, é

**a)** S = { }
**b)** S = {x = 1}
**c)** S = {x = 0}
**d)** S = {x = –1}
**e)** S = {x = e}

Temos que $y = e^x$.
Logo:
$y^2 - (e-1)y - e = 0$
$y = \dfrac{e - 1 \pm \sqrt{e^2 - 2e + 1 + 4e}}{2} = \dfrac{e - 1 \pm (e+1)}{2}$
y = – 1 ou y = e
Se y = – 1 temos $e^x = -1$, (absurdo)
Se y = e, temos $e^x = e$.
Logo, x = 1.

S = {x = 1}

**5. Unit-SE** – Sabe-se que, em uma competição entre fazendeiros das cidades do sertão sergipano de Porto das Folhas e de Monte Alegre, a relação entre as produções, p e q, é expressa por $\log_2 p = 7 + 6 \log_4 q$.

Nessas condições, é correto afirmar que, se o valor de q for dobrado, p terá o seu valor

**a)** duplicado.
**b)** triplicado.
**c)** elevado ao cubo.
**d)** multiplicado por 8.
**e)** aumentado de $6\log_4 2$.

Temos que $\log_2 p = 7 + 6\log_4 q$.
Logo:
$\log_2 p = 7 + 6 \cdot \dfrac{\log_2 q}{\log_2 4}$
$\log_2 p = 7 + 3 \cdot \log_2 q$
$\log_2 p = 7 + \log_2 q^3$
$\log_2 p - \log_2 q^3 = 7$
$\log_2 \dfrac{p}{q^3} = 7$
$\dfrac{p}{q^3} = 2^7$
$p = 2^7 \cdot q^3$
Se o valor de **q** for dobrado, $p' = 2^7 \cdot 2^3 \cdot q^3 = 8p$.

**6. Fatec-PR (adaptado)** – Um consumidor deseja adquirir um apartamento e recorre a um banco para financiar esse imóvel. Após a análise das formas de crédito e a realização dos cálculos, o comprador opta por um financiamento no qual, ao término do prazo, o valor total pago será igual ao dobro do valor inicial financiado.

Sabendo-se que o banco aplicou uma taxa de juros de 8% ao ano, a juros compostos, calcule o prazo (em anos) em que esse comprador pagará seu apartamento.

$\log 1{,}08 = 0{,}03$
$\log 2 = 0{,}3$
$M = C \cdot (1+i)^n$

Temos que $M = 2C$.
Logo:
$2C = C \cdot (1+8\%)^n$
$2 = (1{,}08)^n$
$\log(1{,}08)^n = \log 2$
$n \cdot \log 1{,}08 = \log 2$
$n = \dfrac{0{,}3}{0{,}03} = 10$
Ele pagará seu apartamento em 10 anos.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. Unitau-SP** – Considerando-se x um número real,
$\log 2 = 0{,}30$; $\log 3 = 0{,}48$; $\log 5 = 0{,}70$ e $\log 7 = 0{,}85$,
é CORRETO afirmar que a solução da equação

$$1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2^x - 1}} = -1$$ pertence ao intervalo

**a)** [–4; –2[
**b)** ]3; 4]
**c)** [–2; 0[
**d)** ]4; 7]
**e)** ]0; 3]

**8. Insper-SP (adaptado)** – Calcule o número de soluções reais da equação:
$$[\log_2(x^2 + 1)]^2 - 34\log_2(x^2 + 1) + 64 = 0$$

**9. UECE** – Se $x = p$ é a solução da equação
$2 - \log_x 2 - \log_2 x = 0$, então

**a)** $\dfrac{1}{2} < p < \dfrac{3}{2}$
**b)** $\dfrac{3}{2} < p < \dfrac{5}{2}$
**c)** $\dfrac{5}{2} < p < \dfrac{7}{2}$
**d)** $\dfrac{7}{2} < p < \dfrac{9}{2}$

**10. FGV-SP** – A, B e C são inteiros positivos, tais que $A \cdot \log_{200} 5 + B \cdot \log_{200} 2 = C$

Em tais condições, A + B + C é igual a:

**a)** 0
**b)** C
**c)** 2C
**d)** 4C
**e)** 6C

**11. Unit-AL** – Sobre funções, marque V nas afirmativas verdadeiras e F, nas falsas.

( ) A função polinomial $f(x) = 3x^2 - 4x$ satisfaz à equação $f(xm) = m^2 f(x)$ para todo $m \in \mathbb{R}$.

( ) Se $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 8 - x$ e $y^3 - 7 = (y - 1)^3$, então $|y - x| = 7$.

( ) O gráfico de uma função f(x), de domínio $\mathbb{R}$, intercepta o eixo Ox em apenas dois pontos de abscissas positivas, e o gráfico de $f(|x|)$ intercepta esse mesmo eixo em exatamente quatro pontos.

( ) Seja $f(x) = \log_a x$. Se $f(a) = d$ e $f(2a) = d + 1$, então $d - a = 1$.

( ) $\log(x^2) = 2\log(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$

A alternativa que indica a sequência correta, de cima para baixo, é a

**a)** F – V – F – V – V
**b)** V – F – V – V – F
**c)** F – F – F – V – V
**d)** V – V – V – F – F
**e)** F – F – V – F – V

**12. Udesc** – Sejam a, b e c valores que satisfazem simultaneamente as equações

$$\begin{cases} \log_2(a+b+c) = 0 \\ \log(a+2b) = 1 \\ \dfrac{2^a \cdot 4^b}{8^c} = 2 \end{cases}$$

Analise as proposições em relação a a, b e c.

**I.** Um dos valores é um número primo.
**II.** Todos os valores são números reais não negativos.
**III.** Dois dos valores são números naturais.
**IV.** Todos os valores são números racionais não inteiros.

Assinale a alternativa correta.

**a)** Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
**b)** Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
**c)** Somente as afirmativas II e IV são verdadeiras.
**d)** Somente as afirmativas III e IV são verdadeiras.
**e)** Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

**13. FGV-SP** – O valor de x que satisfaz a equação $\log(2x + 7) = \log(2x) + \log 7$ é um número

**a)** menor que $\frac{1}{2}$.
**b)** entre $\frac{1}{2}$ e 1.
**c)** entre 1 e $\frac{3}{2}$.
**d)** entre $\frac{3}{2}$ e 2.
**e)** maior que 2.

**14. FGV-SP** – Um investidor aplicou certa quantia, em reais, à taxa de juro composto de 1% ao mês. Neste problema, desprezando qualquer tipo de correção monetária devida à inflação, responda às perguntas a seguir.

**a)** Neste investimento, após 2 meses, seria possível resgatar o valor aplicado com lucro de R$ 4.020,00. Calcule o valor inicialmente aplicado.

**b)** No investimento indicado, é possível resgatar um montante de 4 vezes o capital inicialmente aplicado em 139,3 meses. Caso o cálculo fosse feito adotando-se $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 202 = 2{,}305$, que são logaritmos com apenas 3 casas decimais de aproximação, seria obtido um valor aproximado de t anos. Chamando de $E = t - 139{,}3$ ao erro cometido no cálculo devido ao uso de apenas 3 casas decimais de aproximação nos logaritmos indicados, calcule E.

**15. Unicamp-SP** – Uma barra cilíndrica é aquecida a uma temperatura de 740 °C. Em seguida, é exposta a uma corrente de ar a 40 °C. Sabe-se que a temperatura no centro do cilindro varia de acordo com a função $T(t) = (T_0 - T_{AR})\,10^{-\frac{t}{12}} + T_{AR}$, sendo t o tempo em minutos, $T_0$ a temperatura inicial e $T_{AR}$ a temperatura do ar. Com essa função, concluímos que o tempo requerido para que a temperatura no centro atinja 140° C é dado pela seguinte expressão, com o log na base 10:

**a)** 12[log (7) – 1] minutos.

**b)** 12[1 – log (7)] minutos.

**c)** 12 log (7) minutos.

**d)** $\dfrac{[1 - \log(7)]}{12}$ minutos.

**16. Unicamp-SP** – Sendo c um número real, considere a função afim f(x) = 2x + c definida para todo número real x.

**a)** Encontre todas as soluções da equação $[f(x)]^3 = f(x^3)$, para c = 1.

**b)** Determine todos os valores de c para os quais a função $g(x) = \log(xf(x) + c)$ esteja definida para todo número real x.

**17. IME-RJ** – O valor de y real positivo na equação $(5y)^{\log_x 5} - (7y)^{\log_x 7} = 0$, em que x é um número real maior do que 1, é:

**a)** 70

**b)** 35

**c)** 1

**d)** $\dfrac{1}{35}$

**e)** $\dfrac{1}{70}$

**18. PUC-PR** C5-H21

Suponha que a vazão de água de um caminhão de bombeiros se dá pela expressão $V(t) = V_0 \cdot 2^{-t}$, em que $V_0$ é o volume inicial de água contido no caminhão e t é o tempo de escoamento em horas. Qual é, aproximadamente, utilizando uma casa decimal, o tempo de escoamento necessário para que o volume de água escoado seja 10% do volume inicial contido no caminhão? (utilize: $\log 2 \cong 0{,}3$)

**a)** 3h e 30 min.
**b)** 3h e 12 min.
**c)** 3h e 18 min.
**d)** 2h e 15 min.
**e)** 2h e 12 min.

**19. Enem** C5-H22

Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador tsunami no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por $M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e $E_0$ uma constante real positiva. Considere que $E_1$ e $E_2$ representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: <www.terra.com.br.>. Acesso em: 15 ago. 2013. (Adaptado)

Qual a relação entre $E_1$ e $E_2$?

**a)** $E_1 = E_2 + 2$
**b)** $E_1 = 10^2 \cdot E_2$
**c)** $E_1 = 10^3 \cdot E_2$
**d)** $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$
**e)** $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

**20. Enem** C5-H22

Em 2011, a costa nordeste do Japão foi sacudida por um terremoto com magnitude de 8,9 graus na escala Richter. A energia liberada por esse terremoto, em kWh, pode ser calculada por $R = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, sendo $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh e R a magnitude desse terremoto na escala Richter. Considere 0,84 como aproximação para log 7.

Disponível em: <http://oglobo.globo.com>. Acesso em: 2 ago. 2012.

A energia liberada pelo terremoto que atingiu a costa nordeste do Japão em 2011, em kWh, foi de

**a)** $10^{10,83}$
**b)** $10^{11,19}$
**c)** $10^{14,19}$
**d)** $10^{15,51}$
**e)** $10^{17,19}$

# 31 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

- Introdução
- Função logarítmica

**HABILIDADES**

- Encontrar domínio, imagem e zeros das funções logarítmicas.
- Resolver equações e problemas que envolvam funções logarítmicas.
- Analisar gráficos de funções logarítmicas.
- Identificar representações algébricas que expressem relação entre grandezas.
- Interpretar gráficos cartesianos que representem relações entre grandezas.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

## Introdução

Assim como as funções exponenciais, as funções logarítmicas têm aplicação em diversas áreas. Na Química, por exemplo, no cálculo do pH (grau de acidez ou basicidade) de uma solução aquosa, são usados o logaritmo e a seguinte expressão:

$$pH = -\log[H^+]$$

Em que $[H^+$: ] é a concentração de íons de hidrogênio em mol/L.

Dessa forma, classifica-se a solução como ácida ($pH < 7{,}0$), neutra ($pH = 7{,}0$) ou básica ($pH > 7{,}0$).


RABBITMINDPHOTO/ SHUTTERSTOCK

Soluções aquosas e os respectivos valores de pH.

## Função logarítmica

### DEFINIÇÃO

Considerando um número real **b** ($b > 0$ e $b \neq 1$), chamamos **função logarítmica** de base **b** a função **f** de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = \log_b x$.

A função logarítmica tem domínio no conjunto dos reais positivos, e contradomínio e imagem em $\mathbb{R}$. Ela associa cada número real positivo a seu logaritmo de base **b**.

### GRÁFICO

Para a função $f(x) = \log_2 x$, podemos construir uma tabela com os valores do par ordenado $(x, f(x))$.

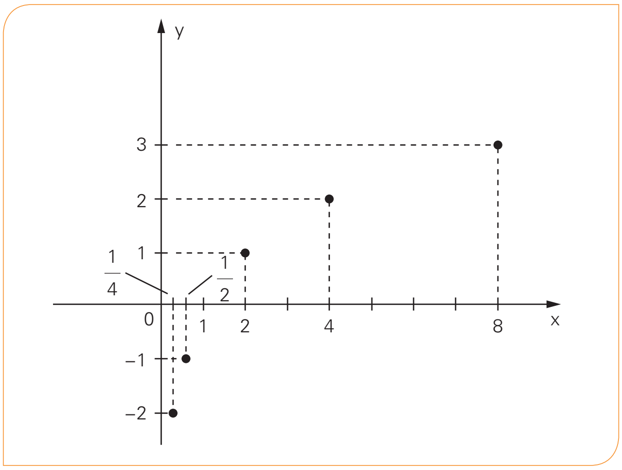
Organizando os dados da tabela em pares ordenados, é possível apresentarmos cada informação na forma de par ordenado, genericamente representado por $(x; \log_b x)$, em que **b** é um número real maior que zero e diferente de 1.

A seguir, podemos analisar duas tabelas para dois casos diferentes com a representação dos pares ordenados $(x;\ \log_2 x)$ e $\left(x; \log_{\frac{1}{2}} x\right)$ no plano cartesiano, incluindo os respectivos gráficos.

1º caso: $b > 1$:

**Tabela 1**

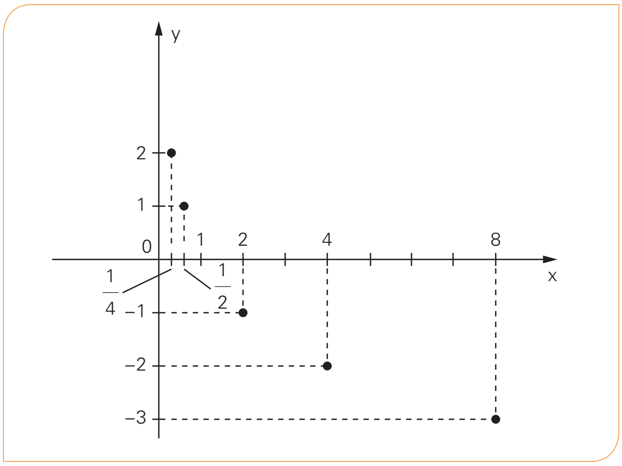
| x | $\log_2 x$ |
|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | $-2$ |
| $\frac{1}{2}$ | $-1$ |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 8 | 3 |




2º caso: $0 < b < 1$:

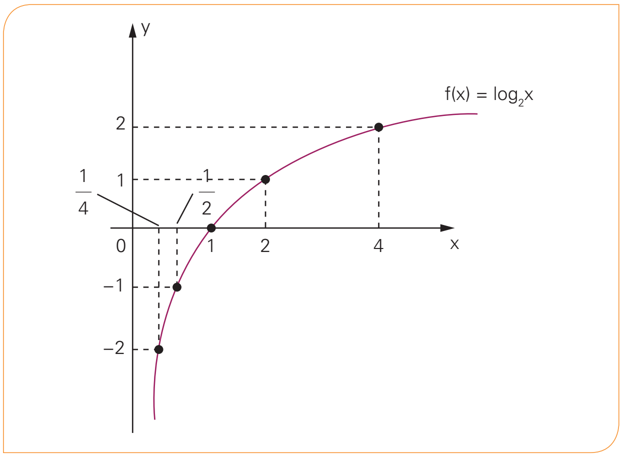
**Tabela 2**

| x | $\log_{\frac{1}{2}} x$ |
|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | 2 |
| $\frac{1}{2}$ | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | $-1$ |
| 4 | $-2$ |
| 8 | $-3$ |

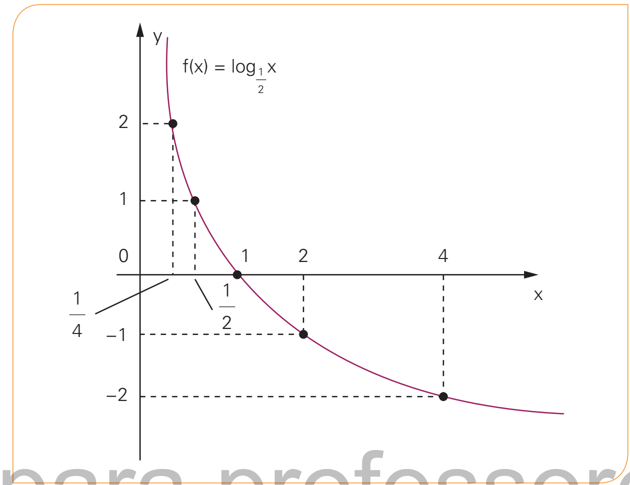



Se pensarmos na possibilidade de usar todo o conjunto dos números reais, podemos representar esses pares ordenados no plano cartesiano, formando o gráfico da **função logarítmica.**

No gráfico da função $f(x) = \log_2 x$:




No gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$:



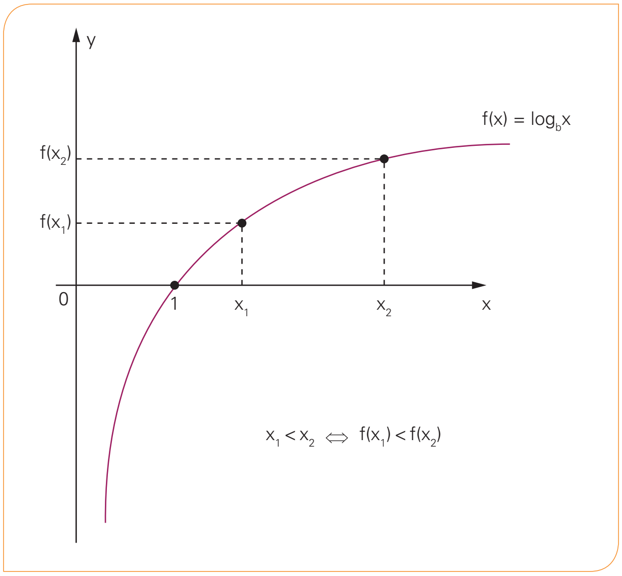

**Observações:**

- Domínio: $D = \mathbb{R}_+^*$
- Contradomínio: $CD = \mathbb{R}$
- Conjunto imagem: $Im = \mathbb{R}$

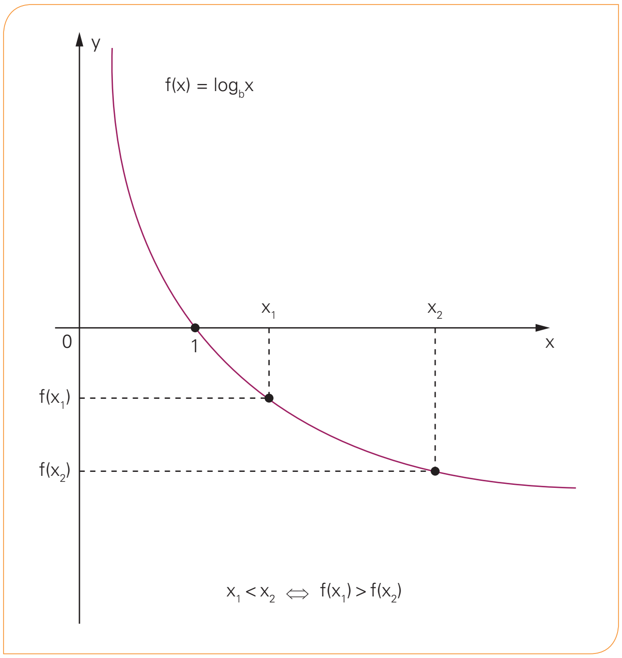
## ANÁLISE DO GRÁFICO

A função logarítmica é crescente quando tem como base do logaritmo um número real maior que 1. A função é decrescente quando a base do logaritmo apresenta valor real entre 0 e 1.

- Se $b > 1$, a função é crescente.




- Se $0 < b < 1$, a função é decrescente.



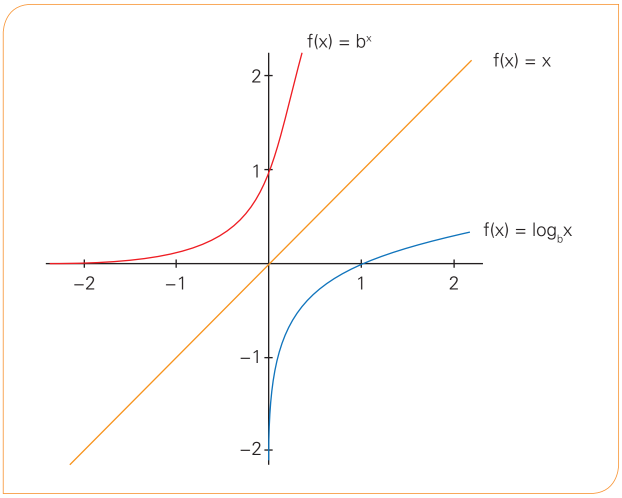

Podemos observar que a função logarítmica é uma função injetora, mas não sobrejetora.

## FUNÇÃO LOGARÍTMICA E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Ao analisar as funções logarítmica e exponencial, podemos notar que o gráfico da primeira é simétrico ao gráfico da segunda em relação à reta de equação $y = x$. Isso ocorre porque a função logarítmica é a inversa da exponencial, para domínio e contradomínio convenientemente definidos e vice-versa, como vimos em módulos anteriores.

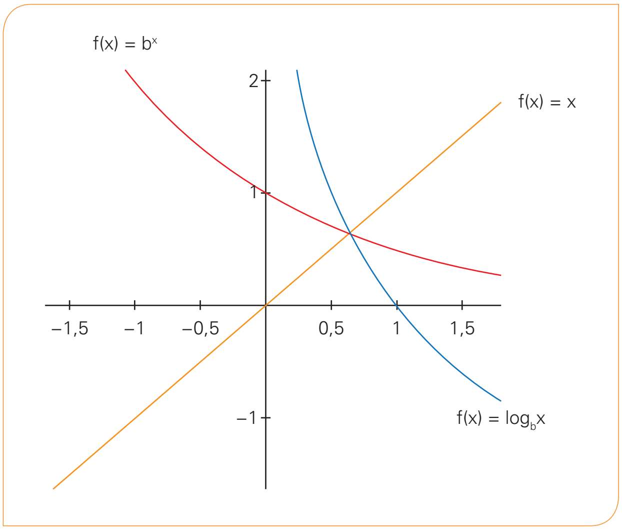
**1º caso:** $b > 1$

Considerando as funções **f** e **g** dadas por $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$, temos os seguintes gráficos:




**2º caso:** $0 < b < 1$

Considerando as funções **f** e **g** dadas por $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$, temos os seguintes gráficos.



# ROTEIRO DE AULA

## FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

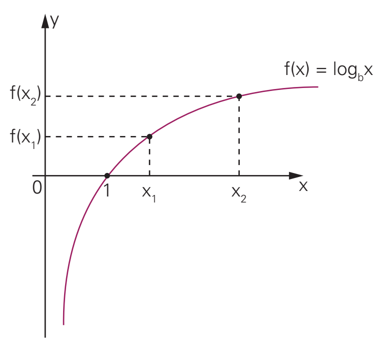
### Gráfico

Sentença: $f(x) = \log_b x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$

Domínio: $\mathbb{R}_+^*$ (reais positivos)

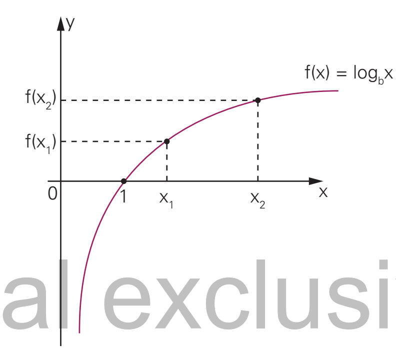
Contradomínio e conjunto imagem: $\mathbb{R}$

Se $b > 1$, a função é decrescente.




$x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1)$ > $(fx_2)$

Se $b > 1$, a função é crescente




$x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1)$ < $(fx_2)$

### Simetria

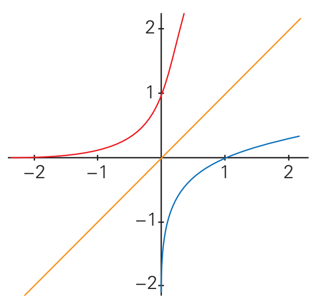
Ao analisar as funções logarítmica e exponencial, notamos que o gráfico da primeira é simétrico ao da segunda em relação à função identidade.

Considerando as funções $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$, com $b >$ 1, temos:

$f(x) = b^x$

$f(x) = \log_b x$

$f(x) = x$




Considerando as funções $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$, com 0 $< b <$ 1, temos:

$f(x) = b^x$

$f(x) = x$


$f(x) = \log_b x$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. EsPCex** – O número N de bactérias de uma cultura é dado em função do tempo t (em minutos), pela fórmula $N(t) = (2{,}5)^{1{,}2t}$. Considere $\log_{10} 2 = 0{,}3$, o tempo (em minutos) necessário para que a cultura tenha $10^{84}$ bactérias é

**a)** 120 **b)** 150 **c)** 175 **d)** 185 **e)** 205

Quando $N = 10^{84}$, temos:

$10^{84} = (2{,}5)^{1{,}2t}$

$\log 10^{84} = \log (2{,}5)^{1{,}2t}$

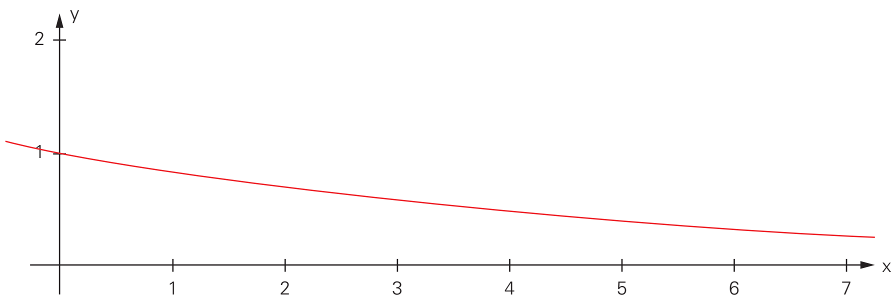
$\log 10^{84} = 1{,}2t \cdot \log 2{,}5$

$1{,}2t = \dfrac{\log 10^{84}}{\log 2{,}5}$

$1{,}2t = \dfrac{84}{\log \frac{10}{4}} = \dfrac{70}{\log 10 - 2 \cdot \log 2} = \dfrac{70}{1 - 0{,}6} = \dfrac{70}{0{,}4}$

$t = 175$

**2. Insper-SP** – A figura mostra o gráfico da função $f(x) = (1{,}2)^{-x}$.




Com base nessas informações, dos valores a seguir, aquele que mais se aproxima do valor de

$\log_2 (5) - \log_2 (3)$ é

**a)** 0,50 **b)** 0,75 **c)** 1,00 **d)** 1,25 **e)** 1,50

Temos:

$f(x) = y = (1{,}2)^{-x}$

$y\left(\dfrac{1}{1{,}2}\right)^x = \left(\dfrac{5}{6}\right)^x$

$A = \log_2 5 - \log_2 3 = -(\log_2 3 - \log_2 5)$

$A = \dfrac{-\log_{\frac{5}{6}}(0{,}6)}{\log_{\frac{5}{6}} 2} = \dfrac{\log_{\frac{5}{6}}(0{,}6)}{\log_{\frac{5}{6}}(0{,}5)}$

Pelo gráfico:

$\log_{\frac{5}{6}} 0{,}6 = a \rightarrow \left(\dfrac{5}{6}\right)^a = 0{,}6 \rightarrow a = 2{,}8$

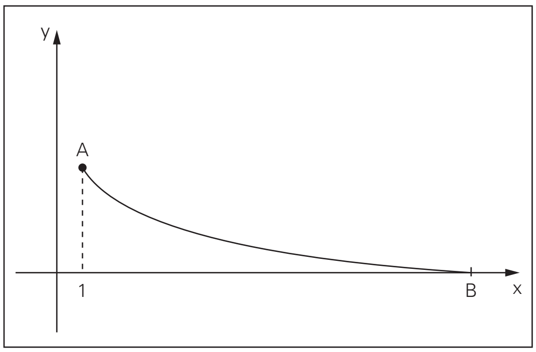
$\log_{\frac{5}{6}} 0{,}5 = b \rightarrow \left(\dfrac{5}{6}\right)^b = 0{,}5 \rightarrow b = 3{,}7$

Então, $A = \dfrac{2{,}8}{3{,}7} \simeq 0{,}75$.

**3. Fuvest-SP (adaptado)** C5-H21

Um corpo de massa M desliza sem atrito, sujeito a uma força gravitacional vertical uniforme, sobre um "escorregador logarítmico": suas coordenadas (x, y) no plano cartesiano, que representam distâncias medidas em metros, pertencem ao gráfico da função

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 4$




O corpo começa sua trajetória, em repouso, no ponto A, de abcissa x = 1, e atinge o chão no ponto B, de ordenada y = 0, conforme a figura ao lado.

Qual é o valor da abscissa no ponto B.

**a)** 13
**b)** 14
**c)** 15
**d)** 16
**e)** 17

O ponto B, de ordenada y = 0, é dado quando:

$y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 4 = 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x = -4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = x$

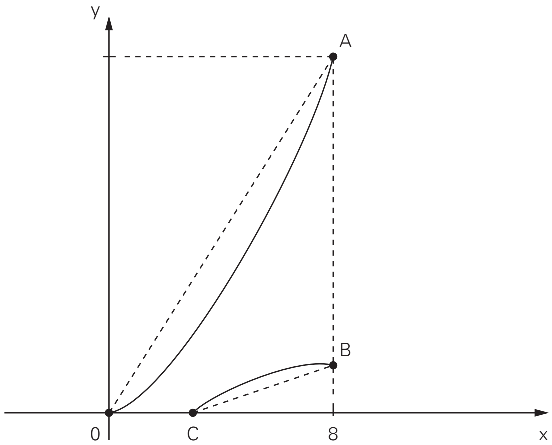
$x = 2^4$

$x = 16.$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**4. Cefet-MG** – Na figura abaixo estão representadas as funções $f(x) = 2^x - 1$ e $g(x) = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)$.




Sabendo-se que o ponto A tem abscissa 8, a área do quadrilátero OABC é

**a)** 53
**b)** 56
**c)** 1 014
**d)** 1 814

Para x = 8:

$f(8) = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$

$g(8) = \log_2\left(\frac{8}{2}\right) = \log_2 4 = 2$

Para g(x) = 0:

$\log_2 \frac{x}{2} = 0$

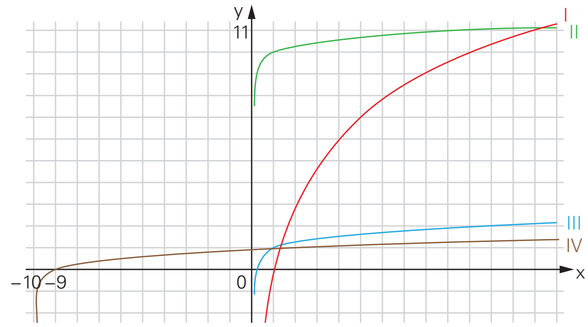
$2^0 = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2$

Assim, a área do triângulo menor é de $A_1 = \frac{1}{2}\, 2 \cdot (8 - 2) = 6$.

A área do triângulo maior é de $A_2 = \frac{1}{2}\, 8 \cdot 255 = 1\,020$.

Então, a área do quadrilátero OABC é 1 020 − 6 = 1 014.

**5. FGV-SP** – As funções logarítmicas f, g, h, p são dadas por $f(x) = 10 + \log x$, $g(x) = 10 \cdot \log x$, $h(x) = \log(10x)$ e $p(x) = \log(x + 10)$. Observe os gráficos a seguir:




Os gráficos I, II, III e IV correspondem, respectivamente, às funções

**a)** h, f, g, p.
**b)** g, h, f, p.
**c)** g, f, h, p.
**d)** g, f, p, h.
**e)** p, f, h, g.

O gráfico de **f** é o gráfico da função logarítmica deslocado em 10 unidades para cima. Logo, é a curva II.
O gráfico de **g** é o gráfico da função logarítmica com a amplitude aumentada em 10 vezes. Logo, é a curva I.
O gráfico de **h** é o gráfico da função logarítmica com a abscissa distorcida. Logo, é a curva III.
O gráfico de **p** é o gráfico da função logarítmica com a abscissa deslocada em 10 unidades. Logo, é a curva IV.

**6. FGV-SP** – As bases de um contrato de trabalho estabelecem que Rafael, funcionário recém-contratado de uma empresa, irá receber salário anual de R$ 100.000,00, com reajustes anuais de 4% sobre o salário total recebido no ano anterior.

**Adote:** log 104 = 2,017 nos cálculos dos dois itens a seguir.

**a)** No 11º ano de trabalho de Rafael nessa empresa, seu salário anual será igual a $10^x$ reais. Calcule x.

**b)** A tabela a seguir indica aproximações de $10^x$ para alguns valores de x. Usando essa tabela, calcule o montante total de dinheiro recebido por Rafael em 11 anos de trabalho nessa empresa, considerando que o salário anual do 1º ano é de R$ 100.000,00.

| **x** | 0,02 | 0,08 | 0,15 | 0,17 | 1,02 | 1,08 | 1,15 | 1,17 | 1,20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$10^x$** | 1,05 | 1,20 | 1,41 | 1,48 | 10,47 | 12,02 | 14,13 | 14,79 | 15,85 |

a) Calculando, temos:

$\log 104 = \log 100 \cdot 1{,}04 = 2 + \log 1{,}04$

$\log 1{,}04 = 2{,}017 - 2 = 0{,}017$

$m = 100\,000 \cdot 1{,}04^{10}$

$\log m = \log 10^5 + 10 \cdot \log 1{,}04$

$\log m = 5 + 0{,}17$

$m = 10^{5{,}17} \rightarrow x = 5{,}17$

b) Calculando, temos:

$M = 100\,000 \cdot \left(\frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}\right) \log 1{,}04 = 0{,}017 \rightarrow 10^{0{,}017} = 1{,}04$

$1{,}04^{10} = (10^{0{,}017})^{10} = 10^{0{,}17}$

$M = 100\,000 \cdot \left(\frac{1{,}48 - 1}{1{,}04 - 1}\right) = 12\,000\,000.$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. Cefet-MG** – Sejam f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e g: $(-8, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções tais que $f(x) = 2^{(x^2-6)} - 8$ e $g(x) = \log_2 (x + 8)$, é correto afirmar que

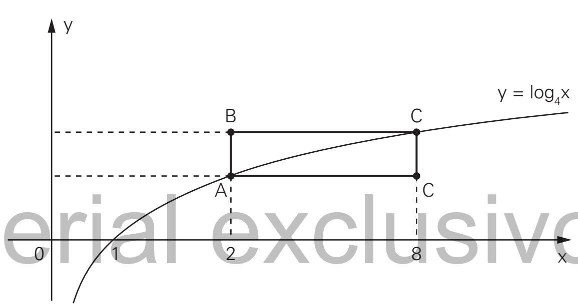
**a)** $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

**b)** $f(g(x)) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

**c)** $(g \circ f)(x) > 3$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

**d)** Imf $= \mathbb{R}$ onde Imf representa o conjunto imagem da função f.

**8. EsPCex** – A curva do gráfico abaixo representa a função $y = \log_4 x$




Desenho Ilustrativo Fora de Escala

A área do retângulo ABCD é

**a)** 12

**b)** 6

**c)** 3

**d)** $6\log_4 \frac{3}{2}$

**e)** $\log_4 6$

**9. PUC-SP** – As funções $f(x) = \frac{3}{2} + \log_{10} (x - 1)$ e $g(x) = k \cdot 2^{(-x+1)}$, com k um número real, se intersectam no ponto $P = \left(2, \frac{3}{2}\right)$. O valor de g(f(11)) é

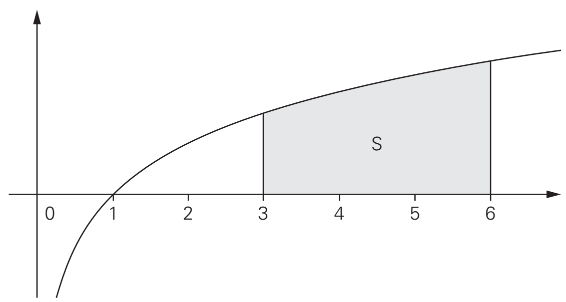
**a)** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

**b)** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

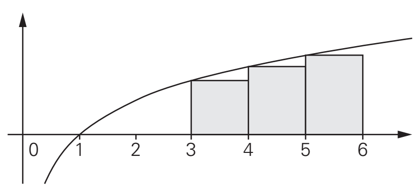
**c)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

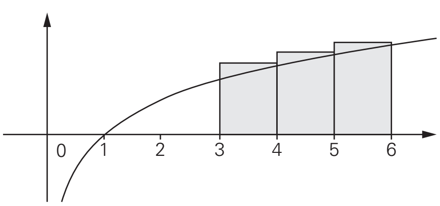
**d)** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

**10. FGV-RJ** – Um aluno precisava estimar a área S da região sob o gráfico da função $y = \log x$ (logaritmo decimal de x) entre as abscissas $x = 3$ e $x = 6$ que se vê na figura a seguir.




Para obter um valor aproximado de S, o aluno pensou na estratégia que as figuras abaixo mostram. Ele calculou a área $S_1$ dos três retângulos da figura da esquerda, e calculou a área $S_2$ dos três retângulos da figura da direita.




Ele imaginou que uma boa aproximação para a área que deseja obter é $S = \dfrac{S_1 + S_2}{2}$.

Dados $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, obtenha um valor para S, usando a estratégia descrita acima.

**11. AFA-SP** – No plano cartesiano, seja P(a, b) o ponto de interseção entre as curvas dadas pelas funções reais f e g definidas por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

É correto afirmar que

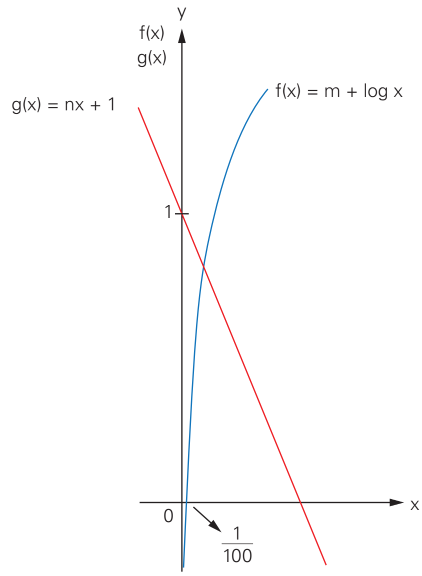
**a)** $a = \log_2 \left( \dfrac{1}{\log_2\left(\frac{1}{a}\right)} \right)$

**b)** $a = \log_2 (\log_2 a)$

**c)** $a = \log_{\frac{1}{2}} \left( \log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{a} \right) \right)$

**d)** $a = \log_2 \left( \log_{\frac{1}{2}} a \right)$

**12. FGV-SP** – Com m e n reais, os gráficos representam uma função logarítmica, e seu intersecto com o eixo x, e uma função afim, e seu intersecto com o eixo y.




Se $f\left(g\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)\right) = \frac{5}{2}$, então $m^n$ é igual a

**a)** $\frac{1}{8}$

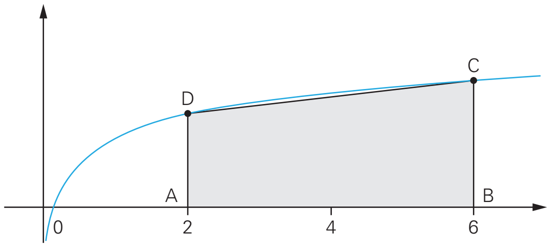
**b)** $\frac{1}{4}$

**c)** $\frac{1}{2}$

**d)** 4

**e)** 8

**13. FGV-RJ** – No trapézio ABCD da figura abaixo, os ângulos em A e B são retos e os vértices C e D estão sobre o gráfico da função y = 1 + log x.




Utilizando log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, a área do trapézio ABCD é

**a)** 5,857

**b)** 5,556

**c)** 5,732

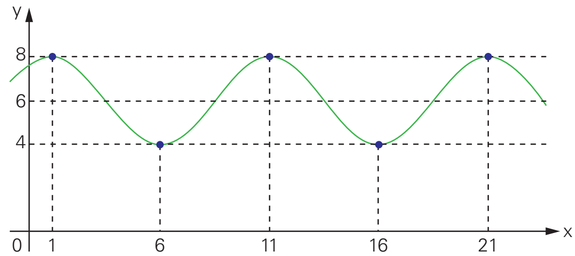
**d)** 4,823

**e)** 6,158

**14. FGV-SP** – Uma fórmula que mede a magnitude M de um terremoto pode ser escrita como M = 0,67 · log E – – 3,25, sendo E a energia mecânica liberada pelo abalo, medida em Joules.

**a)** Calcule, por meio da fórmula dada, a energia mecânica liberada por um terremoto de magnitude 2,11.

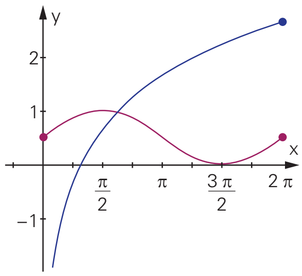
**b)** A figura a seguir mostra um modelo trigonométrico que, por meio da função cosseno y = A + B · · cos (mx + n), ajuda a prever a magnitude de terremotos em uma ilha do Pacífico. Nesse modelo, y indica a magnitude do terremoto, e x indica o ano de ocorrência, sendo x = 1 correspondente ao ano 1980, x = 6 correspondente ao ano 1990, x = 11 correspondente ao ano 2000, e assim sucessivamente.



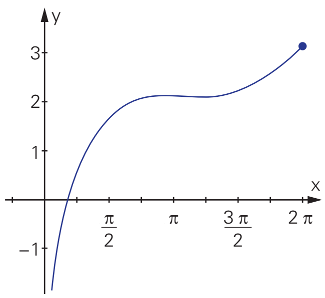

Determine domínio, imagem e período da função cujo gráfico está indicado na figura. Em seguida, determine os valores dos parâmetros A, B, m e n da lei dessa função.

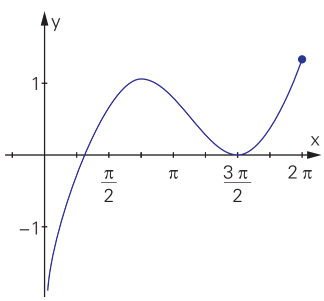
**15. Insper-SP** – A figura ao lado exibe os gráficos das funções f e g ambas de domínio $]0,2\pi]$, cujas leis são, respectivamente:

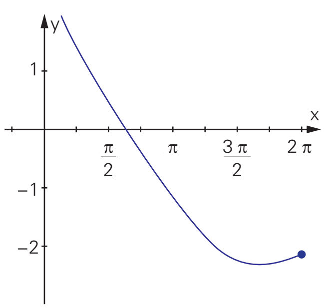
$f(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ sen x e $g(x) = \log_2 x$

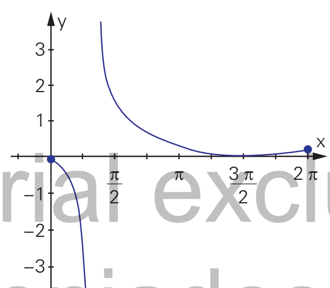


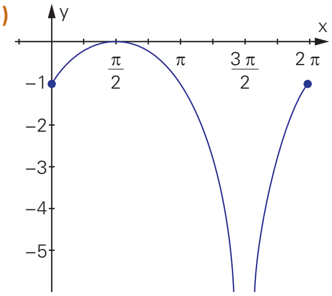

A figura que melhor representa o gráfico da função cuja lei é h(x) = g(f(x)), é

**a)**



**b)**



**c)**



**d)**



**e)**



**16. ITA** – Considere as seguintes afirmações:

**I.** A função $f(x) = \log_{10}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ é estritamente crescente no intervalo $]1, +\infty[$.

**II.** A equação $2^{x+2} = 3^{x-1}$ possui uma única solução real.

**III.** A equação $(x + 1)^x = x$ admite pelo menos uma solução real positiva.

É (são) verdadeira(s)

**a)** apenas I

**b)** apenas I e II

**c)** apenas II e III

**d)** I, II e III

**e)** apenas III

**17. ITA** – Seja f a função definida por $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$. Determine:

**a)** O domínio $D_f$ da função f.

**b)** O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 2$.

**c)** O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) > 1$.

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Enem** C5-H22

Em um experimento, uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida. Neste experimento, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo

**a)** afim.

**b)** seno.

**c)** cosseno.

**d)** logarítmica crescente.

**e)** exponencial.

**19. Fatec-PR** C5-H21

As "áreas de coberturas" a serem atendidas por um serviço de telefonia móvel são divididas em células, que são iluminadas por estações-rádio base localizadas no centro das células. As células em uma mesma área de cobertura possuem diferentes frequências, a fim de que uma célula não interfira na outra. Porém, é possível reutilizar a frequência de uma célula em outra célula relativamente distante, desde que a segunda não interfira na primeira.

*Cluster* é o nome dado ao conjunto de células vizinhas, o qual utiliza todo o espectro disponível. Uma configuração muito utilizada está exemplificada na Figura 1, que representa um modelo matemático simplificado da cobertura de rádio para cada estação-base.

O formato hexagonal das células é o mais prático, pois permite maior abrangência de cobertura, sem lacunas e sem sobreposições.

A Figura 2 ilustra o conceito de reutilização de frequência por *cluster*, em que as células com mesmo número utilizam a mesma frequência.

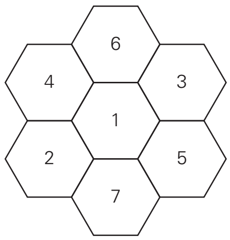



Figura 1: cluster de sete células

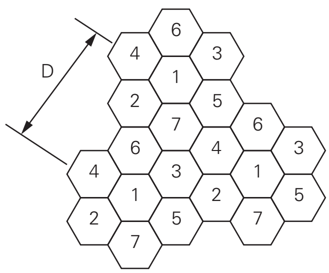



Figura 2: reúso de frequência

Disponível em: < (www.teleco.com.br/tutoriais/tutorialatalaia/pagina_2.asp ewww.teleco.com.br/tutoriais/tutorialsmsloc/pagina_3.asp>. Acesso em: 05.10.2012. (Adaptado)

Um modelo da perda (L) de propagação de sinais entre a antena transmissora e a receptora em espaço livre de obstáculos é, em decibel (dB), expresso por $L = 32{,}44 + 20 \cdot \log_{10} f + 20 \cdot \log_{10} d$ em que f é a frequência de transmissão em mega-hertz (MHz) e d é a distância entre as antenas de transmissão e recepção em quilômetros (km).

Considerando que um sinal de radiofrequência de 600 MHz é enviado de uma estação-base para uma antena receptora que está a 20 km de distância, em espaço livre, então o valor da perda de propagação desse sinal é, em dB, aproximadamente,

> Adote:
> $\log_{10} 2 = 0{,}30$
> $\log_{10} 3 = 0{,}48$

**a)** 106
**b)** 114
**c)** 126
**d)** 140
**e)** 158

**20. Insper-SP** C5-H21

Um vendedor de carros usados estima que o preço de um automóvel de determinada marca desvalorizasse 19% ao ano. De acordo com essa estimativa, o preço desse carro será igual a um terço do preço que ele tinha na época em que foi fabricado depois de

> Observação: considere a aproximação
> $\log_3 10 \approx 2{,}1$.

**a)** 3 anos e meio
**b)** 4 anos e meio
**c)** 5 anos
**d)** 6 anos
**e)** 7 anos e meio

# 32 INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

- Inequação logarítmica

**HABILIDADES**
- Resolver inequações e problemas que envolvam funções logarítmicas.
- Identificar representações algébricas que expressem relação entre grandezas.
- Interpretar gráficos cartesianos que representem relações entre grandezas.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.


SOLOLOS/ISTOCKPHOTO

Estrelas em céu aberto.

## Introdução

O logaritmo e as escalas logarítmicas são usados diariamente em cálculos cotidianos, como o montante de taxa de aplicação de um valor em um determinado banco, como em cálculos que servem para medir a magnitude de um terremoto, a idade de um fóssil ou elemento químico, bem como para calcular a magnitude aparente de uma estrela.

O intervalo da magnitude aparente de uma estrela define se é possível ou não enxergá-la sem o uso de aparelhos tecnológicos. Para enxergar uma estrela no céu podemos pegar como exemplo o intervalo em que −27 é a magnitude aparente do sol até 6, o limite típico da luz visível a olho nu. E pode ser calculada pela fórmula $m_1 - m_2 = -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$, que relaciona magnitudes e intensidade (brilho) entre estrelas.

### INEQUAÇÃO LOGARÍTMICA

Inequações são sentenças matemáticas, com uma ou mais incógnitas, expressas por uma desigualdade. **Inequações logarítmicas** são as inequações que apresentam variáveis, em geral nos logaritmandos dos logaritmos. São as inequações que podem ser reduzidas a uma das seguintes formas:

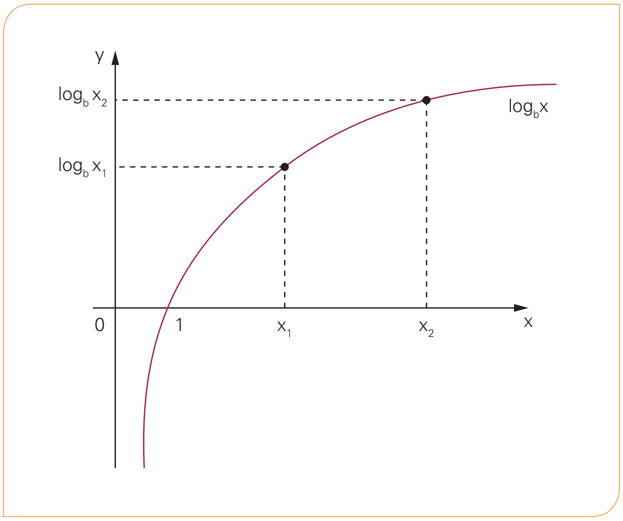
- $\log_b f(x) > \log_b g(x)$, $\log_b f(x) \leq \log_b g(x)$
- $\log_b f(x) < \log_b g(x)$, $\log_b f(x) \geq \log_b g(x)$
- $\log_b f(x) \neq \log_b g(x)$

É importante nos lembrarmos das condições de existência: $b \neq 1$, $b > 0$ e com logaritmando positivo.

## RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÃO LOGARÍTMICA

A resolução da inequação logarítmica é semelhante à da inequação exponencial. Precisamos verificar se a função logarítmica envolvida é crescente ou decrescente. E a verificação fica também diretamente associada ao valor da base.

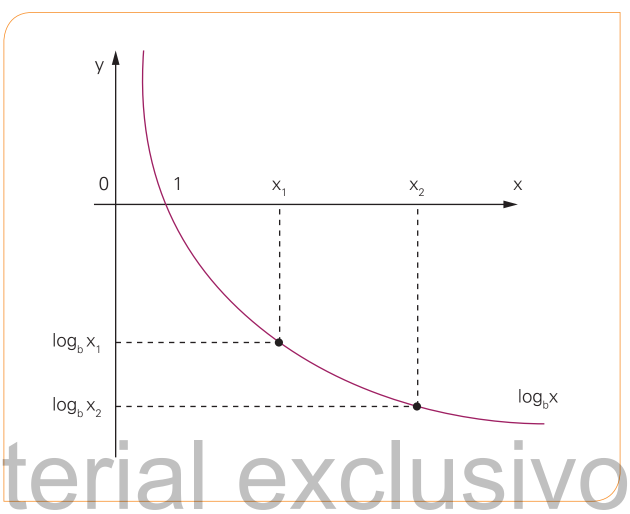
Assim, o sentido da desigualdade entre os logaritmos é o mesmo da desigualdade entre os respectivos logaritmandos.




Portanto, para $b \in \mathbb{R}$ e $b > 1$:

- $x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 < \log_b x_2$ e
- $x_1 > x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 > \log_b x_2$

Por outro lado, quando a base é um número real entre 0 e 1, a função é decrescente. Ou seja, quanto maior o logaritmo, menor o logaritmando. Então o sentido da desigualdade entre os logaritmos deve ser invertido para a desigualdade entre os respectivos logaritmandos.




Portanto, para $b \in \mathbb{R}$ e $0 < b < 1$:

- $x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 > \log_b x_2$
- $x_1 > x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 < \log_b x_2$

- $\log_b f(x) > \log_b g(x)$, $b > 1$, $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$

A função logarítmica envolvida é crescente. Os logaritmandos se comparam, respectivamente, por meio da desigualdade no mesmo sentido dos logaritmos, isto é, $f(x) > g(x)$.

- $\log_b f(x) > \log_b g(x)$, $0 < b < 1$, $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$

A função logarítmica envolvida é decrescente. Os logaritmandos se comparam, respectivamente, por meio da desigualdade em sentido contrário ao dos logaritmos, isto é, $f(x) < g(x)$.

Vamos analisar os seguintes exemplos:

**1. Comparação de logaritmo com número real**

Determine o conjunto solução da inequação $\log_2 (x - 3) < 3$.

Condição de existência: $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$.

$\log_2 (x - 2) < \log_2 2^3 \rightarrow x - 2 < 8 \rightarrow x < 10$

$\therefore S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 10\}$

**2. Comparação de logaritmos de mesma base**

Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação logarítmica $\log (2x - 4) < \log (x + 7)$.

Condição de existência:

$(2x - 4 > 0 \text{ e } x + 7 > 0) \rightarrow x > 2$.

$2x - 4 < x + 7 \rightarrow x < 11$

$\therefore S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 11\}$

**3. Uso das propriedades de logaritmos**

Determine as soluções reais da inequação

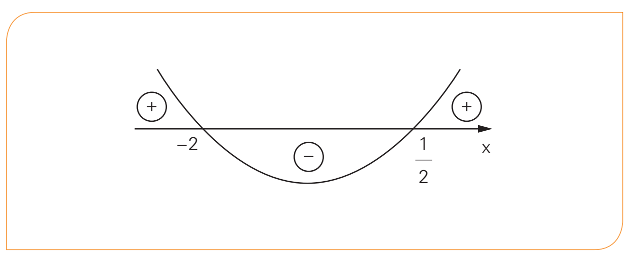
$3 \cdot \log x + \log (2x +)^3 \leqslant 3 \cdot \log 2$.

Condições de existência:

$x > 0$ e $2x + 3 > 0 \rightarrow x > 0$.

$\log x + \log (2x + 3) \leqslant \log 2$

$\log [x \cdot (2x + 3)] \leqslant \log 2 \rightarrow x \cdot (2x + 3) \leqslant 2 \rightarrow 2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$




$$-2 < x < \frac{1}{2}$$

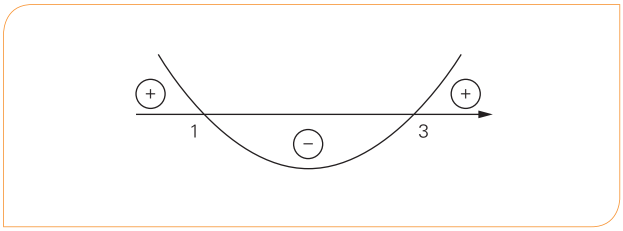
$$\therefore S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$$

**4. Mudança de variável**

Determine o conjunto solução da inequação $(\log_3 x)^2 - 4 \cdot \log_3 x + 3 > 0$.

Condição de existência: $x > 0$.

$\log_3 x = z \rightarrow z^2 - 4z + 3 > 0$




Então:

$z < 1$ ou $z > 3$

$\log_3 x < 1 \rightarrow \log_3 x < \log_3 3 \rightarrow x < 3$

Ou também:

$\log_3 x > 3 \rightarrow \log_3 x > \log_3 3^3 \rightarrow x > 27$

Verificação da condição de existência:

$0 < x < 3$ ou $x > 27$.

$\therefore S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3 \text{ ou } x > 27\}$

**5. Variável na base**

Resolva a inequação $\log_{(x-1)} 7 < \log_{(x-1)} 5$.

Condições de existência:

$x - 1 > 0$, $x - 1 \neq 1$, $x > 1$ e $x \neq 2$.

Então a base $x - 1$ é um número real entre 0 e 1, isto é, $x - 1$ pertence ao intervalo real $]0, 1[$.

$0 < x - 1 < 1$

$1 < x < 2$

$\therefore S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**1. Insper-SP** – Se N é o menor número natural para o qual $(2^N)^N$ tem pelo menos 30 dígitos, então N é (utilize a aproximação: lof 2 = 0,30)

**a)** 7
**b)** 8
**c)** 9
**d)** 10
**e)** 11

**Resolução:**

Se $(2^N)^N$ tem pelo menos 30 dígitos, então:

$(2^N)^N > +10^{29} \rightarrow \log 2^{N^2} > \log 10^{29}$

$\rightarrow N^2 \cdot \log 2 > 29 \cdot \log 10$

$\rightarrow 0{,}3 \cdot N^2 > 29$

$\rightarrow N^2 > 96{,}\overline{7}$

$\rightarrow N \geqslant 10$

Portanto, o menor valor de N é 10.

**2. Sistema Dom Bosco** – O conjunto solução da inequação $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) > 0$ é

**a)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$
**b)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > o\}$
**c)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
**d)** $\{x \in \mathbb{R}\ 0 < x < 1|\}$
**e)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

**Resolução:**

Temos:

$\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) > 0$

Condição de existência: $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$, com $x > 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x > 0 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x > 1 \rightarrow x < 1$

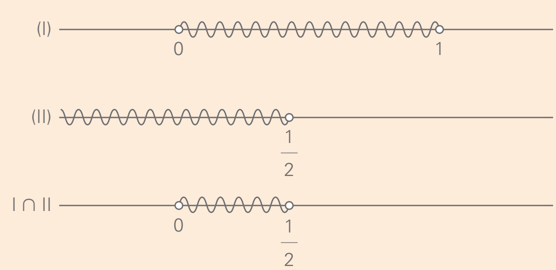
$x > 0$ e $x < 1$

Portanto, condição de existência: $0 < x < 1$ (I)

$0 = \log \frac{1}{2}$

$\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) > \log \frac{1}{2} \rightarrow \log \frac{1}{2} \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x > 1$

$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ (II)




Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$

# ROTEIRO DE AULA

## INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Garantias e condições de existência dos logaritmos: $b \in$ ___ℝ___, b___>___ 0 e b___≠___ 1.

1º caso: $b > 1$: $\begin{cases} x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 \underline{\ <\ } \log_b x_2 \\ x_1 > x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 \underline{\ >\ } \log_b x_2 \end{cases}$

O sentido da desigualdade é ___mantido___.

2º caso: $0 < b < 1$: $\begin{cases} x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 \underline{\ >\ } \log_b x_2 \\ x_1 > x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 \underline{\ <\ } \log_b x_2 \end{cases}$

O sentido da desigualdade é ___invertido___.

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Ufam** – Resolvendo em $\mathbb{R}$ a inequação $\log_{25}(x^2 - x) >$ $> \log_{25}(2x + 10)$ deve-se obter como solução (S):

**a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -2 \text{ ou } x > 5\}$
**b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$
**c)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 5\}$
**d)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 5\}$
**e)** $S = \varnothing$

Temos que:
$x^2 - x > 2x + 10$
$x^2 - x > 2x + 10$
$x^2 - 3x - 10 > 0$
Para $x^2 - 3x - 10 = 0$:
$x = 5$ ou $x = -2$
Verificando, temos que:
$5^2 - 5 = 20 > 0$
$2 \cdot 5 + 10 = 20 > 0$
$(-2)^2 + 2 = 6 > 0$
$2 \cdot (-2) + 10 = 6 > 0$
Então, $x < -2$ ou $x > 5$.
Pelas condições de existência, $x^2 - x > 0$.
$x < 0$ ou $x > 1$
E também $2x + 10 > 0$.
$x > -5$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -2 \text{ ou } x > 5\}$

**2. UFMS** – O conjunto solução da inequação $(\log_5 x)^2 -$ $- \log_5 x - 2 \leq 0$ no universo real é

**a)** $\left(x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} \leq x \leq 25\right)$
**b)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$
**c)** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$
**d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 25\}$
**e)** $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 25\}$

Chamamos:
$\log_5 x = y$
$y^2 - y - 2 \leq 0$
As soluções da equação $y^2 - y - 2 = 0$ são $y = -1$ e $y = 2$.

Ou seja, $\log_5 x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{5}$.

$\log_5 x = 2 \rightarrow x = 25$

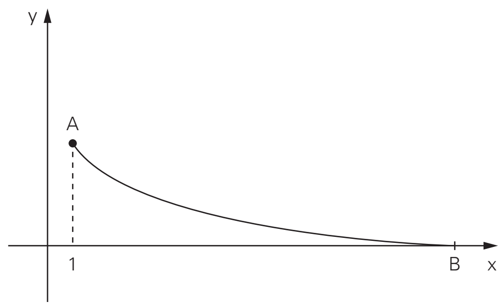
Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} \leq x \leq 25\right\}$.

**3. Fuvest-SP (adaptado)** C5-H21

Um corpo de massa M desliza sem atrito, sujeito a uma força gravitacional vertical uniforme, sobre um "escorregador logarítmico": suas coordenadas (x, y) no plano cartesiano, que representam distâncias medidas em metros, pertencem ao gráfico da função

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 4.$

O corpo começa sua trajetória, em repouso, no ponto A, de abscissa x = 1, e atinge o chão no ponto B, de ordenada y = 0, conforme figura abaixo.




Qual é o valor da abscissa no ponto B?

**a)** 14
**b)** 15
**c)** 16
**d)** 17
**e)** 18

Quando $x = x_B \rightarrow y_B = 0$.

Assim, $f(x) = 0 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x + 4 = 0 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = -4 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = x \rightarrow x^4 = 16.$

Logo, o valor da abscissa no ponto B é 16.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**4. Fuvest-SP** – Considere as funções f e g definidas por

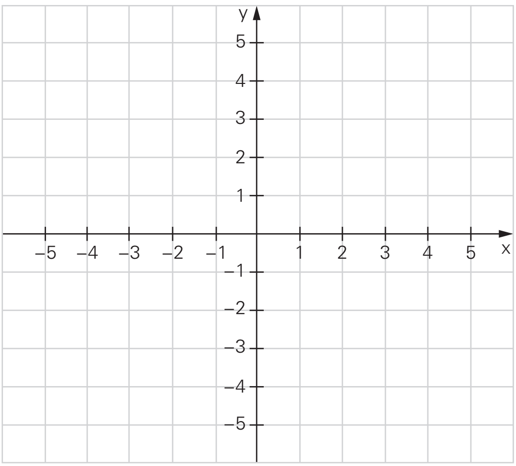
$f(x) = 2 \cdot \log_2 (x - 1)$, se $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$, $g(x) = \log_2 \left(1 - \dfrac{x}{4}\right)$,

se $x \in \mathbb{R}$, $x < 4$

**a)** Calcule $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, f(2), f(3), g(−4), g(0) e g(2).

**b)** Encontre x, $1 < x < 4$, tal que $f(x) = g(x)$.

**c)** Levando em conta os resultados dos itens a e b, esboce os gráficos de f e de g no sistema cartesiano a seguir.




a) Calculando, temos:

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2 \cdot \log_2\left(\dfrac{3}{2} - 1\right) = 2 \cdot \log_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot (-1) = -2$

$f(2) = 2 \cdot \log_2 (2 - 1) = 2 \cdot \log_2 1 = 0$

$f(3) = 2 \cdot \log_2 (3 - 1) = 2 \cdot \log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$

$g(-4) = \log_2\left(1 - \dfrac{-4}{4}\right) = \log_2 1 = 0$

$g(0) = \log_2\left(1 - \dfrac{0}{4}\right) = \log_2 1 = 0$

$g(2) = \log_2\left(1 - \dfrac{2}{4}\right) = \log_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1.$

b) Para $1 < x < 4$, temos:

$f(x) = g(x) \rightarrow 2 \cdot \log_2 (x - 1) = \log_2\left(1 - \dfrac{x}{4}\right)$

$\log_2 (x - 1)^2 = \log_2\left(1 - \dfrac{x}{4}\right)$

$(x - 1)^2 = 1 - \dfrac{x}{4}$

$x^2 - 2x + 1 = 1 - \dfrac{x}{4}$

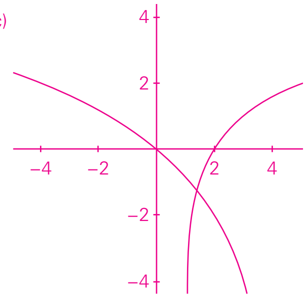
$x^2 - \dfrac{7}{4}x = 0$

$x\left(x - \dfrac{7}{4}\right) = 0$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{7}{4}$

Logo, $x = \dfrac{7}{4}$, pois $1 < x < 4$.

c)




**5. Udesc** – Sendo $|x - 2| \leq 1$, analise as proposições, e assinale (V) para verdadeira e (F) para falsa.

( ) $|\log_3 x| \leq 1$
( ) $2 \leq 2^x \leq 8$
( ) $1 \leq x^2 - 2x + 2 \leq 5$

Analise a alternativa correta, de cima para baixo.

**a)** F – V – V
**b)** F – F – F
**c)** V – V – F
**d)** V – F – V
**e)** V – V – V

(V) $|\log_3 x| \leq 1$
Temos que:
$-1 \leq x - 2 \leq 1$
$1 \leq x \leq 3$
$\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 3$
$0 \leq \log_3 x \leq 1$
$|\log_3 x| \leq 1.$
(V) $2 \leq 2^x \leq 8$
$\log_2 2 \leq \log_2 2^x \leq \log_2 2^3$
$1 \leq x \leq 3$
$-1 \leq x - 2 \leq 1$
$|x - 2| \leq 1$
(V) $1 \leq x^2 - 2x + 2 \leq 5$
$1 - 1 \leq x^2 - 2x + 2 - 1 \leq 5 - 1$
$0 \leq x^2 - 2x + 4 \leq 4$
$0 \leq (x - 1)^2 \leq 4$
$0 \leq x - 1 \leq 2$
$-1 \leq x - 2 \leq 1$
$|x - 2| \leq 1.$

**6. Udesc** – Considere a função $f(x) = 3^{x^2+5x}$. Os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a inequação $\log_{\frac{1}{9}} f(x) \geq -12$ pertencem ao conjunto:

**a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 8\}$
**b)** $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 3\}$
**c)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -8 \text{ ou } x \geq 3\}$
**d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 8\}$
**e)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -8 \text{ ou } x > -3\}$

Temos que:

$$\log_{\frac{1}{9}} f(x) = \log_{3^{-2}} f(x) = \frac{\log_3 f(x)}{\log_3 3^{-2}} = \frac{-1}{2}\log_3 f(x)$$

$$= \frac{-1}{2}\log_3 3^{x^2+5x} = \frac{-1}{2}(x^2 + 5x) \geq -12$$

$x^2 + 5x \geq 24$
$x^2 + 5x - 24 \geq 0$
Para $x^2 + 5x - 24 = 0$:
$x = -8$ e $x = 3$
Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 3\}$.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. PUC-Minas** – Certo estudante do Ensino Médio, após fazer um curso sobre inequações, escreveu as três afirmativas a seguir:

**IV.** A solução da desigualdade $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ é o conjunto $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.
**V.** Se $|x + 2| < 1$, então $x \in ]-3, -1[$.
**VI.** Se $\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) < 1$, então $-1 < x < -\frac{2}{3}$.

O número de afirmativas CORRETAS é:

**a)** 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

**8. EsPCex** – Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos(x)} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$ no intervalo $[0,2\pi)$ é igual a

**a)** $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$
**b)** $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$
**c)** $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$
**d)** $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$
**e)** $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

**9. Fuvest** – O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação $\log_2(2x + 5) - \log_2(3x - 1) > 1$ é o intervalo:

**a)** $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$

**b)** $\left]-\frac{7}{4}, \infty\right[$

**c)** $\left]-\frac{5}{2}, 0\right[$

**d)** $\left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$

**e)** $\left]0, \frac{1}{3}\right[$

**10. FGV-RJ** – Dois municípios A e B são vizinhos e ambos produzem soja. No ano de 2013, o município A produziu 120 mil toneladas de soja, enquanto o município B produziu 60 mil toneladas. Entretanto, a produção de A cresce 4% ao ano enquanto que a de B cresce 12% ao ano. Se essas taxas permanecerem as mesmas por longo tempo, em que ano a produção de soja do município B será, pela primeira vez, maior que a produção do município A?

Use o que for necessário das informações a seguir.

**I.** $\log 2 = 0{,}301$
**II.** $\log 3 = 0{,}477$
**III.** $\log 7 = 0{,}845$
**IV.** $\log 13 = 1{,}114$

**11. Udesc** – Analise as proposições acerca de funções reais, e assinale (V) para verdadeira e (F) para falsa.

( ) A função quadrática $f(x) = 2(x - 2)^2$ apresenta valor mínimo no ponto $(-2{,}5)$.

( ) Se $f(x) = |x + 5| \cdot \sqrt{x+5} \cdot (-x^2 + 2x - 2)$, então para todo $x \geq -5$ tem-se $f(x) \leqslant 0$.

( ) O domínio da função $f(x) = \log_{\sqrt{x}} \sqrt{x+1}$ é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

A alternativa correta, de cima para baixo, é:

**a)** V – F – V
**b)** F – V – V
**c)** F – V – F
**d)** V – V – F
**e)** F – F – F

**12. Udesc** – Considere a função $f(x) = \log_8 (x + 3)^3$. A quantidade de números inteiros que pertencem ao conjunto solução da inequação $4^{f(x)} \leqslant 2x + 105$ é igual a:

**a)** 8

**b)** 12

**c)** 21

**d)** 19

**e)** 11

**13. Udesc** – O conjunto solução da inequação $|\log_3 (3x)| \leqslant 1$ é

**a)** $S = \left[\frac{1}{3,3}\right] < \frac{1}{3}$

**b)** $S = [1,3]$

**c)** $S = \left[\frac{1}{9,1}\right] < \frac{1}{9}$

**d)** $S = \left[0,\frac{1}{9}\right]$

**e)** $S = [0,1]$

**14. UFPR** – Para determinar a rapidez com que se esquece de uma informação, foi efetuado um teste em que listas de palavras eram lidas a um grupo de pessoas e, num momento posterior, verificam-se quantas dessas palavras eram lembradas. Uma análise mostrou que, de maneira aproximada, o percentual S de palavras lembradas, em função do tempo t, em minutos, após o teste ter sido aplicado, era dado pela expressão $S = -18 \cdot \log (t + 1) + 86$.

**a)** Após 9 minutos, que percentual da informação inicial era lembrado?

**b)** Depois de quanto tempo o percentual S alcançou 50%?

**15. Facisa-PB** – O conjunto solução da inequação $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 4x + 3) > \log_{\frac{1}{3}} 8$ é dado por

**a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } 3 < x < 5\}$

**b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 1 \text{ ou } 3 \leqslant x < 5\}$

**c)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 3 \leqslant x \leqslant 5\}$

**d)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ e } 3 < x < 5\}$

**e)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$

**16. Cefet-MG** – O conjunto solução da inequação $2^{2\log x} - 11 \cdot e^{\log x} + 28 < 0$ é o intervalo

**a)** ]4, 7[

**b)** $]10^4, 10^7[$

**c)** ]log 4, log 7[

**d)** $]10^{\ln 4}, 10^{\ln 7}[$

**e)** $]e^{\log 4}, e^{\log 7}[$

**17. ITA** – Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{x\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}(4 \cdot \operatorname{sen}x \cdot \cos x - 1)$.

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Unit-SE (adaptado)** C5-H21

No primeiro mês de uma epidemia, foram registrados 50 casos, e o número de novos casos aumentou, cerca de 25%, a cada mês. Usando-se $\log_2 5 = 2{,}32$, se preciso, é correto estimar que o número de casos mensal ultrapassou 500 registros no

**a)** décimo primeiro mês da epidemia.

**b)** décimo segundo mês da epidemia.

**c)** décimo terceiro mês da epidemia.

**d)** décimo quarto mês da epidemia.

**e)** décimo quinto mês da epidemia.

**19. UERJ** C5-H22

Admita que a ordem de grandeza de uma medida x é uma potência de base 10, com expoente n inteiro, para $10^{n-\frac{1}{2}} \leqslant x < 10^{n+\frac{1}{2}}$. Considere que um terremoto tenha liberado uma energia E, em joules, cujo valor numérico é tal que $\log_{10} E = 15{,}3$. A ordem de grandeza de E, em joules, equivale a:

**a)** $10^{14}$
**b)** $10^{15}$
**c)** $10^{16}$
**d)** $10^{17}$

**20. Fatec-PR** C5-H21

Suponha um aumento exato de 10% no número de pessoas deslocadas no ano de 2015 em relação a 2014, e que esse crescimento ocorrerá a essa mesma taxa anualmente.O número de pessoas deslocadas, em relação a 2014, dobrará no ano

Adote:

$\log 2 = 0{,}30$

$\log 1{,}1 = 0{,}04$

**a)** 2018
**b)** 2020
**c)** 2022
**d)** 2024
**e)** 2026

ELIZABETH SCOFIDIO/SHUTTERSTOCK

# MATEMÁTICA 2

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

# 17 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO I

- Teorema de Pitágoras
- Diagonal de um quadrado
- Altura de um triângulo equilátero

**HABILIDADES**

- Reconhecer triângulos retângulos semelhantes.
- Resolver problemas aplicando as relações métricas e o teorema de Pitágoras.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.

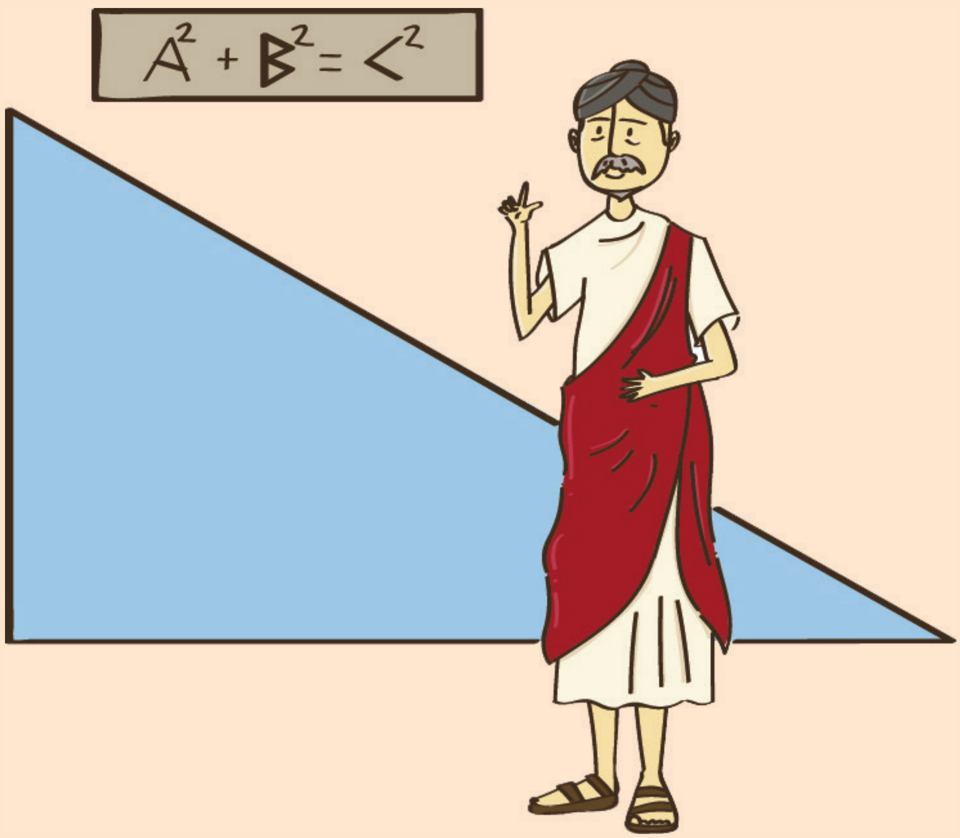



Ilustração do Pitágoras e da fórmula matemática do teorema que carrega o seu nome.

## Introdução

Matemático, músico, filósofo e astrônomo, Pitágoras de Samos (570-495 a.C.) foi uma pessoa de dons únicos. Suas contribuições são estudadas até hoje. Fundador, em Samos, da escola de filosofia chamada Semicírculo, ele observou a harmonia perfeita entre os números e a música.

Por notarem a harmonia em um pentagrama e a relação indireta dele com a proporção áurea, os pitagóricos adotaram essa forma geométrica como símbolo da escola da qual faziam parte.

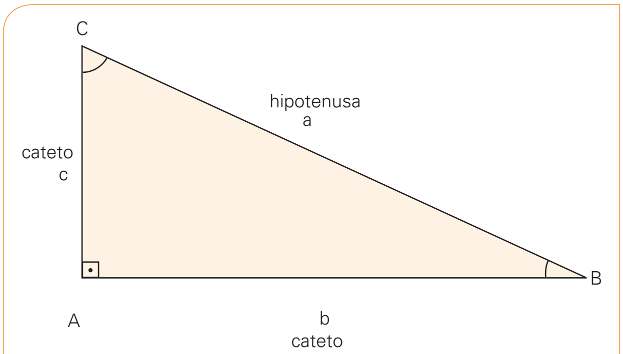
Neste capítulo vamos conhecer, deduzir e aplicar um dos teoremas mais importantes da Matemática, o teorema de Pitágoras.

### TEOREMA DE PITÁGORAS

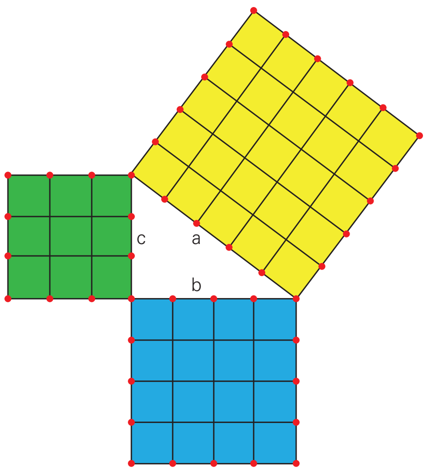
Considerado uma das principais descobertas da Matemática, o teorema de Pitágoras descreve a relação entre os lados menores e o lado maior de um triângulo retângulo.

Ele postula o seguinte:

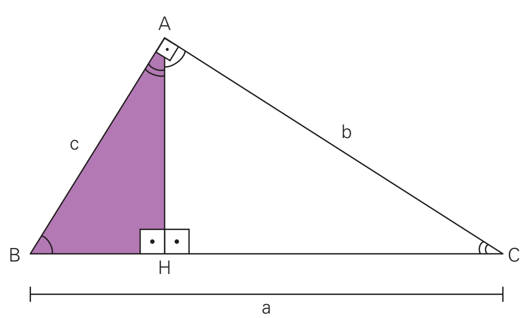
O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.




$a^2 = b^2 + c^2$




Observe uma demonstração do teorema.




O $\Delta ABC$ e o $\Delta HBA$ são semelhantes pelo primeiro critério de semelhança de triângulos ângulo-ângulo (AA).

$$\frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA} \rightarrow HB \cdot BC = (AB)^2 \text{ (Eq. 1)}$$

O $\Delta ABC$ e o $\Delta HAC$ também são semelhantes pelo primeiro critério de semelhança de triângulos AA.

$$\frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \rightarrow HC \cdot BC = (AC)^2 \text{ (Eq. 2)}$$

Ao somarmos as equações 1 e 2, obtemos:

$HB \cdot BC + HC \cdot BC = (AB)^2 + (AC)^2$

$BC \cdot (HB + HC) = (AB)^2 + (AC)^2$

$BC \cdot (BC) = (AB)^2 + (AC)^2$

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

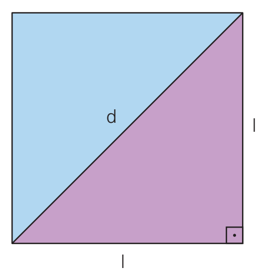
Como $BC = a$, $AB = b$ e $AC = c$, temos:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

$a^2 = b^2 + c^2$

## DIAGONAL DE UM QUADRADO

A diagonal de um quadrado o divide em dois triângulos retângulos congruentes. Compreendendo o teorema de Pitágoras, podemos deduzir uma equação para calcular a medida da diagonal do quadrado em função da medida de seu lado.




Como $a = d$; $b = l$; e $c = l$, temos:

$a^2 = b^2 + c^2$

$d^2 = l^2 + l^2$

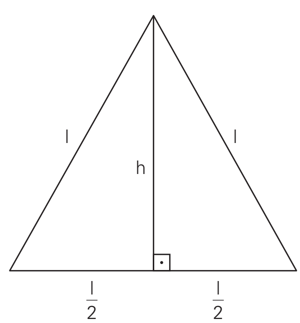
$d^2 = 2l^2$

$d = l\sqrt{2}$

$$\boxed{d = l\sqrt{2}}$$

## ALTURA DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Como o triângulo equilátero apresenta os três lados de mesma medida (l), podemos obter uma equação para sua altura (h) em função do lado (l).




A altura (h) do triângulo equilátero divide o segmento BC em dois segmentos congruentes: $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$. Com isso, o $\Delta ABM$ é semelhante ao $\Delta ACM$ pelo critério de semelhança LLL.

$$BM = CM = \frac{l}{2}.$$

Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras, temos:

$a = l$; $b = h$; e $c = \dfrac{l}{2}$

$a^2 = b^2 + c^2$

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4} \rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \rightarrow h^2$$

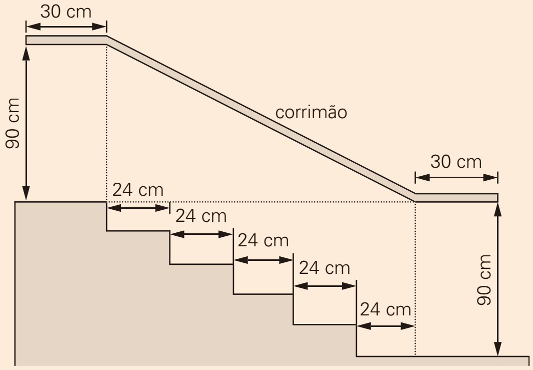
$$= \frac{4l^2 - l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

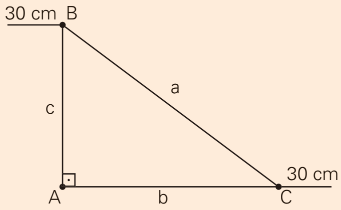
**1. Enem** C1-H2

Na figura abaixo, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a




**a)** 1,8 m.
**b)** 1,9m.
**c)** 2,0 m.
**d)** 2,1 m.
**e)** 2,2 m.

**Resolução**




L = comprimento total do corrimão

O segmento BC = a.

O segmento AB = c = 90 cm

O segmento AC = b = 5 · 24 = 120 cm

Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras, obtemos:

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 120^2 + 90^2 \rightarrow a^2 = 14\,400 + 8\,100 \rightarrow$
$a^2 = 22\,500 \rightarrow a = \sqrt{22500} \rightarrow a = 150$

Logo, a = 150 cm. Então, L = 30 + 150 + 30 = 210.

Portanto, L = 210 cm, ou seja, L = 2,1 m.

**Competência:** Construir significados para os números naturais, inteiros e reais.

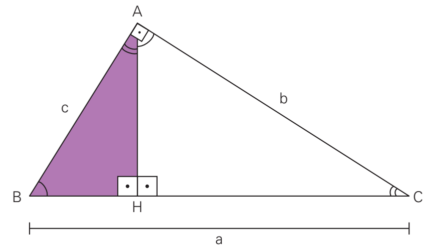
**Habilidade:** Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

# ROTEIRO DE AULA

## RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

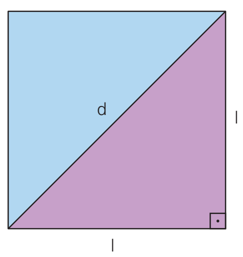
### TEOREMA DE PITÁGORAS

$a^2 = b^2 + c^2$



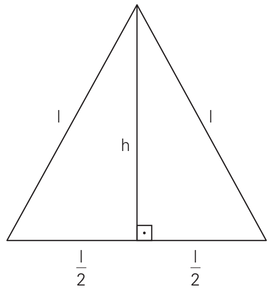

### DIAGONAL DE UM QUADRADO

$d = l\sqrt{2}$




### ALTURA DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

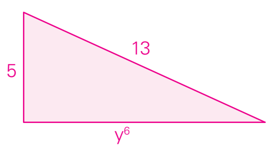


## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Ifal** – A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 13 cm. Determine o valor da medida do cateto maior sabendo que o cateto menor mede 5 cm.

**a)** 6 cm.
**b)** 8 cm.
**c)** 10 cm.
**d)** 11 cm.
**e)** 12 cm.

Dado:




Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras, temos:

a = 13, b = 5 e c = y

$a^2 = b^2 + c^2$

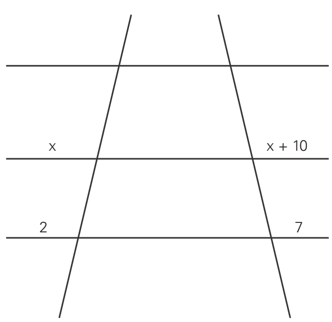
$13^2 = 5^2 + y^2$

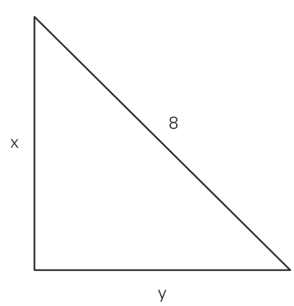
$y^2 = 169 - 25 = 144$

$y = \sqrt{144} = 12$

Logo, y = 12 cm.

**2. IFBA (adaptado)** – Abaixo estão duas retas paralelas cortadas por duas transversais e um triângulo retângulo. Então, qual o valor do lado y do triângulo retângulo?




Ao aplicarmos o teorema de Tales na primeira situação, temos:

$\frac{x}{2} = \frac{x + 10}{7}$

$7x = 2x + 20$

$7x - 2x = 20$

$5x = 20$

$x = \frac{20}{5}$

$x = 4$

Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, temos:

$8^2 = 4^2 + y^2$

$64 = 16 + y^2$

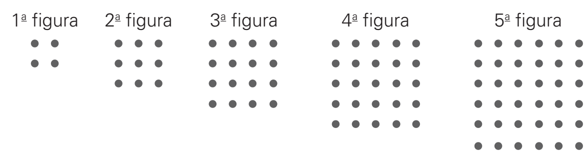
$y^2 = 64 - 16$

$y = \sqrt{48}$

$y = 4\sqrt{3}$

**3. Uerj** C2-H6

Segundo historiadores da matemática, a análise de padrões como os ilustrados a seguir possibilitou a descoberta das triplas pitagóricas.




Observe que os números inteiros $3^2$, $4^2$ e $5^2$, representados respectivamente pelas 2ª, 3ª e 4ª figuras, satisfazem ao teorema de Pitágoras. Dessa forma, (3, 4, 5) é uma tripla pitagórica.

Os quadrados representados pelas 4ª, 11ª e nª figuras determinam outra tripla pitagórica, sendo o valor de n igual a:

**a)** 10
**b)** 12
**c)** 14
**d)** 16
**e)** 17

Desde que o número representado pela 4ª figura seja 52 e o representado pela 11ª figura seja 122, podemos concluir pelo teorema de Pitágoras que o valor de n para a próxima tripla ordenada será:

$(n + 1)^2 = 5^2 + 12^2$

$(n + 1)^2 = 25 + 144$

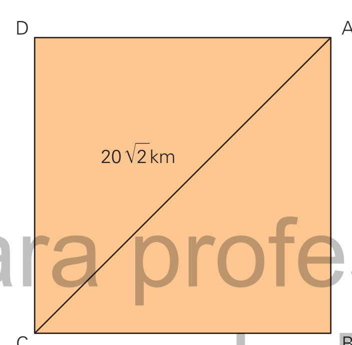
$(n + 1)^2 = 169$

n = 12.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

**4. Sistema Dom Bosco** – Observe o esquema abaixo.



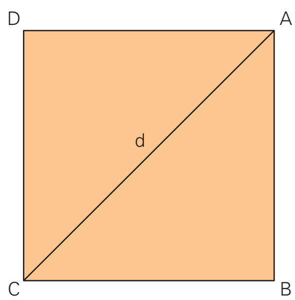
Helena está no ponto A, que representa a rodoviária da cidade, e pretende ir até o ponto C, onde fica sua residência.

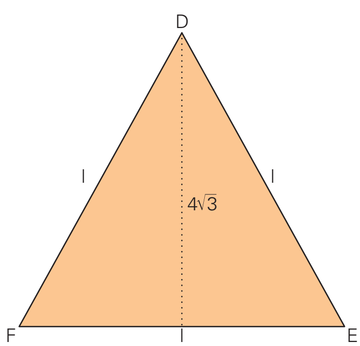
Sabendo que a representação dessas vias forma um quadrado ABCD, quantos quilômetros Helena terá de percorrer para chegar até a sua casa, se para isso ela passar pelo ponto B?

**a)** $20\sqrt{2}$ **c)** 20 **e)** 60
**b)** $20\sqrt{2}$ **d)** 40

Sabe-se que o segmento AB = BC = l.
E temos que a fórmula da diagonal $d = l\sqrt{2}$.
Como $d = 20\sqrt{2}$, pelo enunciado, teremos: $20\sqrt{2} = l\sqrt{2} \rightarrow l = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 20$
Portanto, Helena irá percorrer 20 km + 20 km = 40 km.

**5. Sistema Dom Bosco** – Sabendo que o perímetro do quadrado ABCD é metade do perímetro do triângulo equilátero EFG, determine a medida da diagonal do quadrado.




Sendo a fórmula da altura do triângulo $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, podemos então descobrir o valor de seu lado. Logo: $4\sqrt{3} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow l = 8$.

Portanto, o perímetro do triângulo será: $P_\Delta = 8 + 8 + 8 = 24$.

Como o perímetro do quadrado é metade do perímetro do triângulo,

temos: $P_\square = \frac{P_\Delta}{2} = \frac{24}{2} = 12 \rightarrow P_\square = 12$

Tomando x como o valor do lado do quadrado, podemos calcular sua medida por $\frac{12}{4} = 3 \rightarrow x = 3$

Assim, a medida de sua diagonal será:

$d = x\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} \rightarrow d = 3 \cdot \sqrt{2}$

$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow 4\sqrt{3} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow l = 8$

Logo, o perímetro do triângulo será: $P_\Delta = 8 + 8 + 8 = 24$.
Como o perímetro do quadrado é metade do perímetro do triângulo,

temos: $P_\square = \frac{P_\Delta}{2} = \frac{24}{2} = 12 \rightarrow P_\square = 12$

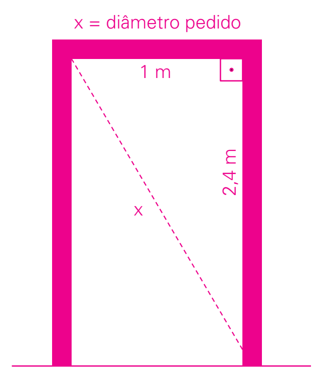
Assim, o lado do quadrado mede $\frac{12}{4} = 3 \rightarrow x = 3$ e com isso calculamos a medida da diagonal do quadrado.
$d = x\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} \rightarrow d = 3 \cdot \sqrt{2}$

**6. IFPE** – Um famoso rei, de um reino bem, bem distante, decide colocar um tampo circular para servir de mesa no salão de reunião. A porta de entrada do salão tem 1 metro de largura por 2,4 metros de altura.

Qual o maior diâmetro que pode ter o tampo circular da mesa para passar pela porta do salão? (Dica: o círculo pode passar inclinado.)

**a)** 2,5 m. **c)** 3,0 m. **e)** e) 2,4 m.
**b)** 2,8 m. **d)** 2,6 m.

Basta considerar que o diâmetro do tampo é também diagonal da porta.




Logo:
$x^2 = 1^2 + 2{,}4^2$
$x^2 = 1 + 5{,}76$
$x^2 = 6{,}76$
$x = \sqrt{6{,}76} = 2{,}6$
Portanto, x = 2,6 m.

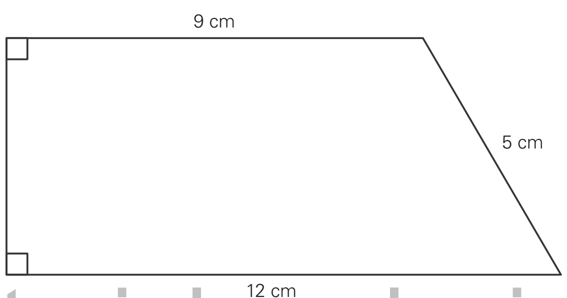
## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. Sistema Dom Bosco** – A altura de um triângulo equilátero de lado de medida igual a 6 cm é equivalente à medida da diagonal de um quadrado. Qual a medida da diagonal do quadrado?

**8. Unifor** – Cada pneu traseiro de um trator tem raio 0,8 m e cada pneu dianteiro tem raio 0,3 m. Sabendo-se que a distância entre os pontos A e B, onde esses pneus tocam o solo plano, é de 2,5 m, a distância x entre os centros dos pneus é de:

**a)** $\sqrt{6,2}$ m
**b)** $\sqrt{6,3}$ m
**c)** $\sqrt{6,4}$ m
**d)** $\sqrt{6,5}$ m
**e)** $\sqrt{6,6}$ m

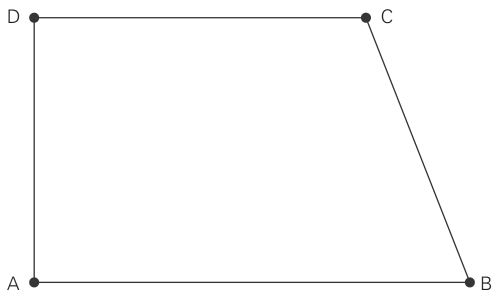
**9. Unisinos** – Na figura abaixo, temos um trapézio retângulo cujas bases medem 9 cm e 12 cm e cujo lado não perpendicular às bases mede 5 cm.




Qual o perímetro, em cm, desse trapézio?

**a)** 26.
**b)** 29.
**c)** 30.
**d)** 31.
**e)** 48.

**10. CPS** – O trapézio retângulo ABCD da figura representa a superfície de um reservatório de água. Na figura, tem-se que:




$\overline{AB} = 20$ m;

$\overline{CD} = 15$ m;

$\overline{AD} = 12$ m;

O ângulo DÂB é reto.

Se, por uma questão de segurança, o reservatório precisa ser cercado, então o comprimento dessa cerca será, em metros, de

**a)** 60
**b)** 59
**c)** 58
**d)** 57
**e)** 56

**11. EEAR** – Sabe-se que a hipotenusa de um triângulo retângulo tem $5\sqrt{5}$ cm de comprimento e a soma dos catetos é igual a 15 cm.

As medidas, em cm, dos catetos são

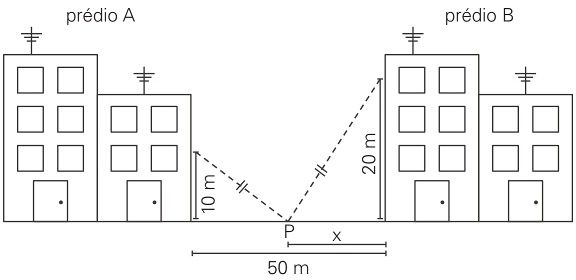
**a)** 6 e 9 **b)** 2 e 13 **c)** 3 e 12 **d)** 5 e 10

**12. PUC-Rio (adaptado)** – Uma bicicleta saiu de um ponto que estava a 8 metros a leste de um hidrante, andou 6 metros na direção norte e parou.

Assim, qual a nova distância entre a bicicleta e o hidrante?

**13. CFTMG (adaptado)** – Duas crianças, cada uma em um prédio diferente, brincam com canetas lasers nas janelas de seus apartamentos, apontando para um ponto na quadra situada entre os prédios. A criança do prédio A está a uma altura de 10 m, e a do prédio B, a uma altura de 20 m do chão. A distância entre os prédios é de 50 m.

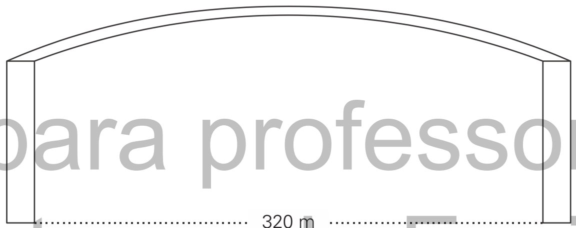
Em um determinado momento, os lasers das crianças atingem, simultaneamente, um ponto P do pátio equidistante das crianças, tal como na ilustração abaixo:




A distância X, em metros, desse ponto até o prédio B é

**a)** 22. **b)** 23. **c)** 25. **d)** 28.

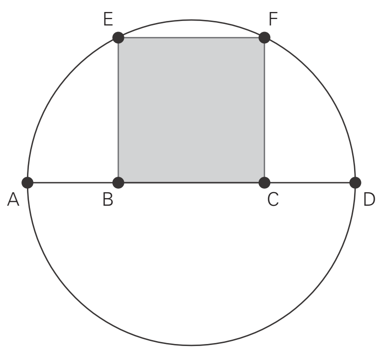
**14. UFPA** – A ponte estaiada sobre o rio Guamá, na estrada Alça Viária próxima a Belém/PA, tem um vão livre de 320 m. A forma do piso da ponte sobre o vão é circular, com raio de 4 000 m.



Com o formato circular, a altura máxima do vão em relação às extremidades aumenta, em metros:

**a)** 3,00.
**b)** 3,10.
**c)** 3,20.
**d)** 3,30.
**e)** 30,0.

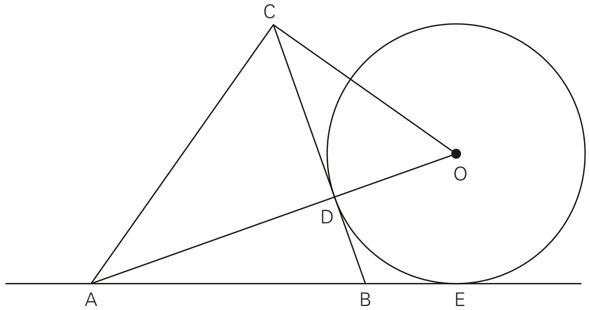
**15. Insper** – Na figura, $\overline{AD}$ é um diâmetro da circunferência que contém o lado $\overline{BC}$ do quadrado sombreado, cujos vértices E e F pertencem à circunferência.




Se a é a medida do segmento $\overline{AB}$ e l é a medida do lado do quadrado, então $\frac{l}{a}$ é igual a:

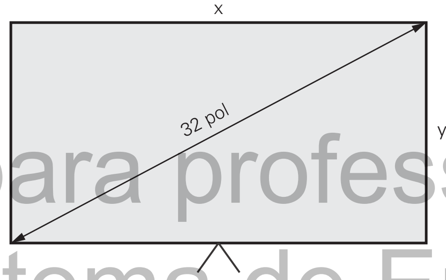
**a)** $\sqrt{5} - 2$.
**b)** $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.
**c)** $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.
**d)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
**e)** $\sqrt{5} + 2$.

**16. Fuvest** – Na figura abaixo, a circunferência de centro em O e raio r tangencia o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC no ponto D e tangencia a reta $\overleftrightarrow{AB}$ no ponto E. Os pontos A, D e O são colineares, AD = 2r e o ângulo ACO é reto. Determine, em função de r,




**a)** a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC;
**b)** a medida do segmento $\overline{CO}$.

**17. PUC-RS** – Considere a figura e o texto abaixo.



As medidas de comprimento e largura da tela de uma televisão, em geral, obedecem à proporção 16 : 9, sendo que o número de polegadas (1 pol = 2,5 cm) desse aparelho indica a medida da diagonal de sua tela.

Considerando essas informações, as medidas do comprimento e da largura, em centímetros, de uma TV de 32 polegadas, como mostra a figura, podem ser obtidas com a resolução do sistema:

**a)** $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{16} \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 1\,024 \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{16} \\ x^2 + y^2 = 6\,400 \end{cases}$

**e)** $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 6\,400 \end{cases}$

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. PUC-Rio** C2-H6

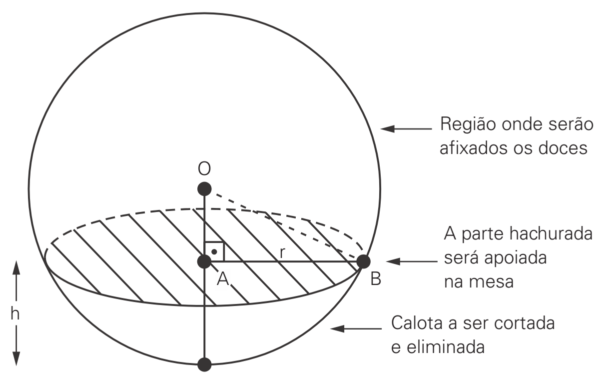
Ao meio-dia, a formiga A está 3 km a oeste da formiga B. A formiga A está se movendo para o oeste a 3 km/h e a formiga B está se movendo para o norte com a mesma velocidade.

Qual a distância entre as duas formigas às 14 h?

**a)** $\sqrt{17}$ km
**b)** 17 km
**c)** $\sqrt{51}$ km
**d)** $\sqrt{117}$ km
**e)** 117 km

**19. Enem** C2-H8

Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.

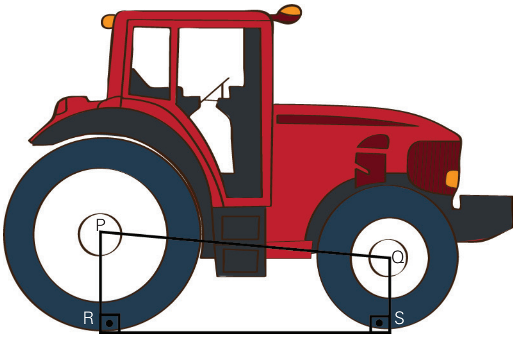



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetros, igual a

**a)** $5 - \dfrac{\sqrt{91}}{2}$
**b)** $10 - \sqrt{91}$
**c)** 1
**d)** 4
**e)** 5

**20. CFTMG (adaptado)** C2-H7

No trator da figura, o raio $\overline{PS}$ da maior circunferência determinada pelo pneu traseiro é 80 cm, o raio $\overline{QR}$ da maior circunferência determinada pelo pneu dianteiro é 56 cm e as distâncias entre os centros P e Q dessas circunferências é de 240 cm.




Considerando $\pi = 3$, a distância entre os pontos S e R, em que os pneus tocam o solo plano, é

**a)** igual ao comprimento da circunferência de raio $\overline{PS}$.

**b)** maior que o comprimento da circunferência de raio $\overline{PS}$.

**c)** um valor entre as medidas dos comprimentos das circunferências de raios $\overline{PS}$ e $\overline{QR}$.

**d)** maior que o módulo da diferença entre os comprimentos das circunferências de raios $\overline{PS}$ e $\overline{QR}$.

**e)** igual ao quíntuplo do comprimento da circunferência de raio $\overline{PS}$.

# 18 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO II

- Triângulos retângulos semelhantes
- Relações métricas

**HABILIDADES**

- Reconhecer triângulos retângulos semelhantes.
- Aplicar as relações métricas e o teorema de Pitágoras na resolução de problemas.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.

BANKRX/ISTOCKPHOTO

O tangram é um quebra-cabeça geométrico chinês formado por sete peças.

## Introdução

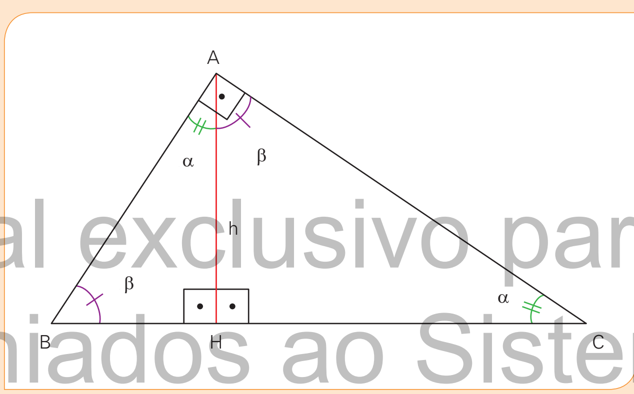
Além do teorema de Pitágoras, o triângulo retângulo apresenta outras relações métricas, frutos da projeção dos catetos sobre a hipotenusa.

Com os conceitos já estudados de semelhanças de triângulos, poderemos conhecer um pouco mais sobre as outras relações métricas do triângulo retângulo.

### TRIÂNGULOS RETÂNGULOS SEMELHANTES

Em todo triângulo retângulo, a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90°. A altura relativa à hipotenusa determina dois triângulos retângulos semelhantes ao triângulo maior e semelhantes entre si.

Considere um triângulo retângulo **ABC** de hipotenusa $\overline{BC}$ e altura $\overline{AH}$.



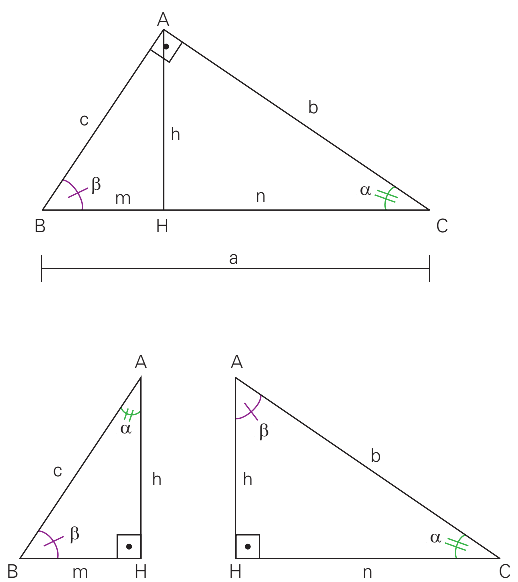
Primeiramente, $\hat{B}$ é o ângulo comum e $A\hat{H}B \cong B\hat{A}C \overset{AA}{\rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta HBA$.

Por outro lado, $\hat{C}$ é o ângulo comum e $A\hat{H}C \cong B\hat{A}C \overset{AA}{\rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta HAC$.

Portanto, $\Delta ABC \sim \Delta HBA \sim \Delta HAC$.

## RELAÇÕES MÉTRICAS

Considere um triângulo retângulo ABC de hipotenusa $\overline{BC}$ e altura $\overline{AH}$.




Dados:

$\overline{BC}$ = a (hipotenusa)
$\overline{AB}$ = c (cateto)
$\overline{AC}$ = b (cateto)
$\overline{AH}$ = h (altura)
$\overline{BH}$ = m (projeção do cateto c sobre a hipotenusa)
$\overline{CH}$ = n (projeção do cateto b sobre a hipotenusa)

Por meio das projeções dos catetos sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, é possível obter as seguintes relações métricas:

I. $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$

Demonstrações:

Como $\Delta HAC \sim \Delta ABC$, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \rightarrow b^2 = a \cdot n$$

Como $\Delta HBA \sim \Delta ABC$, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \rightarrow c^2 = a \cdot m$$

II. $h^2 = m \cdot n$

Demonstração:

Como $\Delta HBA \sim \Delta HBC$, temos:

$$\frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} \rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \rightarrow h^2 = m \cdot n$$

III. $a \cdot h = b \cdot c$

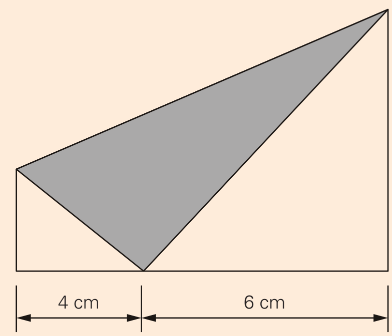
Demonstração:

Como $\Delta HAC \sim \Delta ABC$, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC} \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \rightarrow a \cdot h = b \cdot c$$

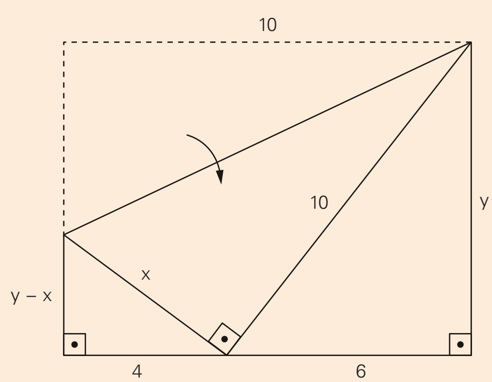
**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

**ESPM** – Uma folha de papel retangular foi dobrada como mostra a figura abaixo. De acordo com as medidas fornecidas, a região sombreada, que é a parte visível do verso da folha, tem área igual a:




**a)** 24 cm²
**b)** 25 cm²
**c)** 28 cm²
**d)** 35 cm²
**e)** 36 cm²

**Resolução**




$y^2 + 6^2 = 10^2 \leftrightarrow y = 8$

$x^2 = (8 - x)^2 + 4^2 \leftrightarrow x = 5$

$A = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow A = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$

Portanto, A = 25 cm².

# ROTEIRO DE AULA

## RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO II

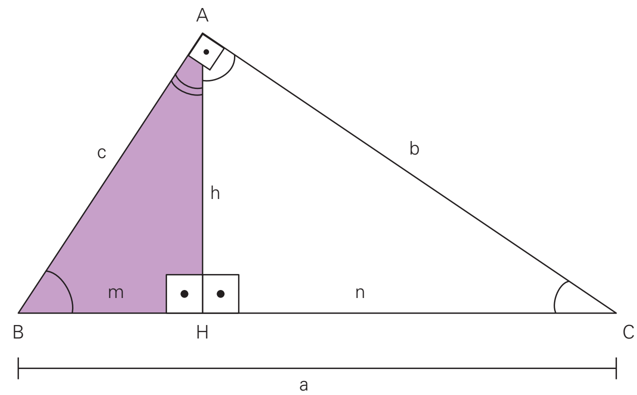
**Relações métricas**

$b^2 = $ a · n

$c^2 = $ a · m

$h^2 = $ m · n

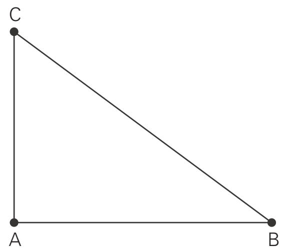
$a \cdot h = $ b · c



## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. CP2** – Observe o esquema a seguir, que representa certo trecho do oceano Atlântico na costa brasileira. Um navio de pesquisas, situado inicialmente no ponto B, deve seguir rumo ao ponto C, em linha reta. Sabe-se que a distância BC é igual a 10 km. No ponto A encontra-se uma ilha, e o navio deve parar, na sua trajetória, em um ponto o mais próximo possível dessa ilha, para que uma equipe de biólogos siga em um barco auxiliar a fim de coletar algumas espécies de plantas nativas para análise.

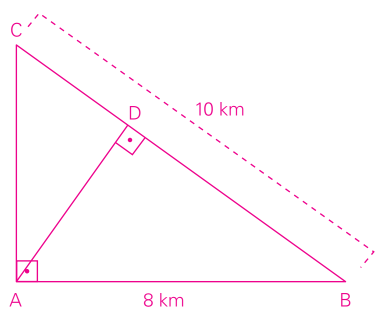
Considere que a região limitada por $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ seja plana e que o ângulo $B\hat{A}C$ meça 90°.




Se a distância do navio à ilha, ao iniciar sua trajetória em B, era de 8 km, podemos afirmar que, nesse percurso, a menor distância do navio à ilha será igual a

**a)** 5,2 km.
**b)** 5,0 km.
**c)** 4,8 km.
**d)** 3,6 km.

Admitindo que o ponto D, pertencente à hipotenusa, é o ponto mais próximo da ilha, situada no ponto A, temos a seguinte situação:




$\overline{AC}^2 + 8^2 = 10^2$
$\overline{AC}^2 = 10^2 - 8^2$
$AC = \sqrt{100 - 64}$
$AC = \sqrt{36}$
$AC = 6$

Calculando agora a medida AD, temos:

$10 \cdot AD = 6 \cdot 8$
$AD = 4,8$

Logo, a menor distância do navio até a ilha, no lado dos extremos B e C, será dada por AD = 4,8 km.

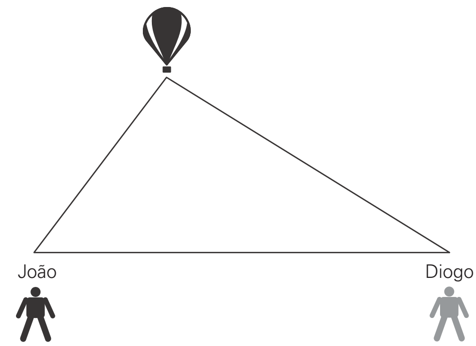
**2. CP2 (adaptado)** C5-H21

Diferente dos balões comuns, os balões meteorológicos são produzidos com borracha natural usando um processo de rotomoldagem. Isso quer dizer que toda a superfície do balão apresenta a mesma espessura, evitando estouros prematuros.

Fonte: <http://www.mundoclima.com.br/baloes-meteorologicos/balao-meteorologico-de-grande-altitude-600g/>. Acesso em: 15 maio 2016.

Dois jovens pesquisadores, João e Diogo, decidiram lançar um único balão meteorológico para fazer um estudo. Após o lançamento, em um dado momento, João estava a 8 km do balão e Diogo, a 15 km. Sabe-se que o balão subiu verticalmente durante todo o percurso e que a distância entre os pesquisadores naquele momento era de 17 km.

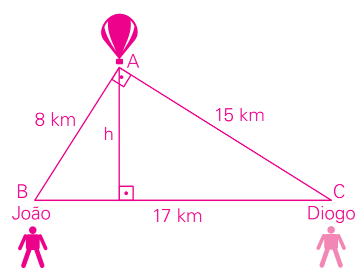
Observe a figura abaixo, representativa da situação:




Desconsiderando a curvatura da Terra, pode-se afirmar que a altura aproximada desse balão era de

**a)** 6 km.
**b)** 6,5 km.
**c)** 7 km.
**d)** 7,5 km.
**e)** 8,5 km.

Como $17^2 = 8^2 + 15^2$, concluímos que o ângulo do triângulo com vértice no balão é reto.




Portanto, desprezando-se a altura dos pesquisadores, a altura h do balão será dada por:

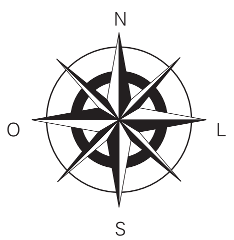
$17 \cdot h = 8 \cdot 15$
$17 \cdot h = 120$
$h \cong 7$ km

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

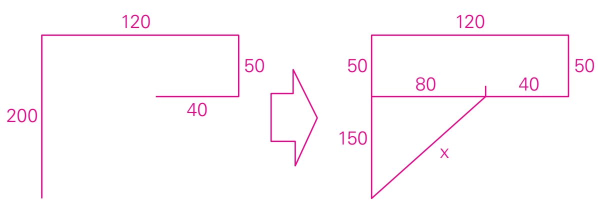
**3. IFPE (adaptado)** – Francisco decidiu fazer uma brincadeira com seus filhos. Montou um mapa do tesouro com algumas instruções e disse-lhes que, ao chegar ao ponto final, encontrariam um belo prêmio. As instruções foram:

1. ande 200 metros na direção NORTE;
2. ande 120 metros na direção LESTE;
3. ande 50 metros na direção SUL;
4. ande 40 metros na direção OESTE.




Luiz, um de seus filhos, decidiu colocar em prática o que acabara de aprender na escola. Em alguns minutos, ele descobriu qual seria a menor distância entre o ponto de partida e o ponto de chegada mostrado no mapa. Assim sendo, qual a distância calculada por Luiz?

Considere o esquema a seguir:




Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 150^2 + 80^2$

$x^2 = 22\,500 + 6\,400$

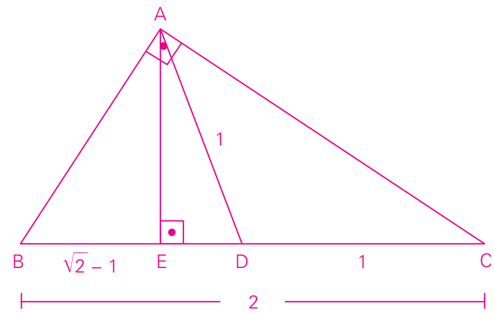
$x = \sqrt{28\,900}$

$x = 170$ m

**4. ITA** – Considere o triângulo ABC retângulo em A. Sejam $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ a altura e a mediana relativa à hipotenusa $\overline{BC}$, respectivamente. Se a medida de $\overline{BE}$ é $(\sqrt{2} - 1)$ cm e a medida de $\overline{AD}$ é 1 cm, então $\overline{AC}$ mede, em cm,

**a)** $4\sqrt{2} - 5$ cm.
**b)** $3 - \sqrt{2}$ cm.
**c)** $\sqrt{6 - 2\sqrt{2}}$ cm.
**d)** $3(\sqrt{2} - 1)$ cm.
**e)** $3\sqrt{4\sqrt{2} - 5}$ cm.

Considere a figura a seguir.




No triângulo ABC, temos a seguinte relação entre os segmentos:

$AD = BD = CD = 1$

$AB^2 = 2(\sqrt{2} - 1)$

e

$AC^2 + AB^2 = 2^2$

$AC = \sqrt{4 - 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)}$

$AC = \sqrt{6 - 2 \cdot \sqrt{2}}$

Portanto, $AC = \sqrt{6 - 2 \cdot \sqrt{2}}$ cm.

**5. UCS** – Uma escada está apoiada em uma parede a uma altura de 16 m do solo plano. A distância do pé da escada até a parede é igual a 12 m. O centro de gravidade da escada está a um terço do comprimento dela, medido a partir de seu apoio no chão. Nessa situação, o comprimento da escada e a altura aproximada de seu centro de gravidade até o chão são, respectivamente, iguais a:

**a)** 20 m e 5,3 m
**b)** 20 m e 6,6 m.
**c)** 28 m e 9,3 m.
**d)** $\sqrt{56}$ m e 5,3 m.
**e)** $\sqrt{56}$ m e 2,6 m.

Sendo x o comprimento da escada e y a altura aproximada de seu centro de gravidade, pode-se escrever, utilizando o teorema de Pitágoras e a semelhança de triângulos:

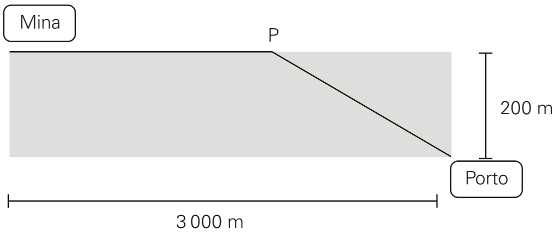
$x^2 = 16^2 + 12^2$

$x = 20$ metros

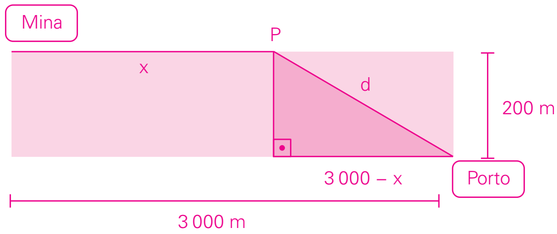
$$\frac{y}{16} = \frac{\frac{20}{3}}{20}$$

$y = 5{,}33$ metros

**6. PUC-PR (adaptado)** – Um mineroduto é uma extensa tubulação para levar minério de ferro extraído de uma mina até o terminal de minério para beneficiamento. Suponha que se pretenda instalar um mineroduto em uma mina que está à margem de um rio com 200 metros de largura até um porto situado do outro lado do rio, 3 000 metros abaixo. O custo para instalar a tubulação no rio é R$ 10,00 o metro e o custo para instalar a tubulação em terra é R$ 6,00 o metro. Estudos mostram que, nesse caso, o custo será minimizado se parte do duto for instalada por terra e parte pelo rio. Determine o custo de instalação do duto em função de x, em que x é a distância da mina até o ponto P, como mostra a figura.




Considere a figura a seguir:



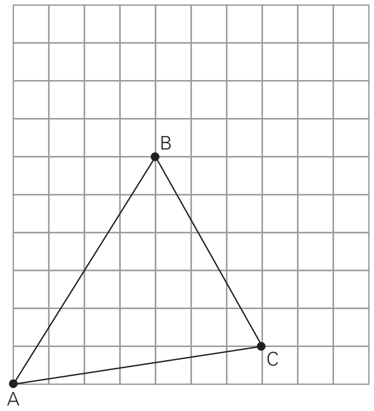

O custo total será dado por: $C(x) = 6 \cdot x + 10 \cdot d$.

E $d = \sqrt{(3\,000 - x)^2 + 200^2}$.

Então, temos: $C(x) = 6 \cdot x + 10 \cdot \sqrt{(3\,000 - x)^2 + 200^2}$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. Uern** – Matheus marcou, em uma folha quadriculada de 1 × 1 cm, três pontos e ligou-os formando o seguinte triângulo:



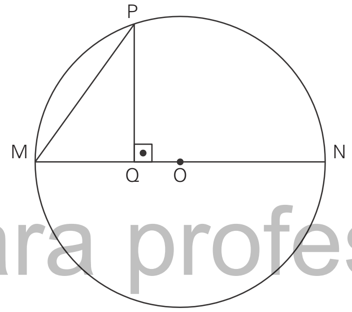

É correto afirmar que o produto dos lados do triângulo é:

**a)** $10\sqrt{13}$.
**b)** $20\sqrt{17}$.
**c)** $10\sqrt{221}$.
**d)** $20\sqrt{221}$.

**8. UEPG** – Um observador situado a 12 metros de um prédio avista o seu topo sob certo ângulo. Afastando-se em linha reta mais 20 metros, percebe que o ângulo de visualização é a metade do anterior. Sendo H, em metros, a altura do prédio, assinale o que for correto.

**01)** H é um múltiplo de 6.
**02)** $H < 12$.
**04)** H é um número par.
**08)** $H > 15$.

**9. EsPCEx (adaptado)** – Na figura, o raio da circunferência de centro O é $\frac{25}{2}$ cm e a corda MP mede 10 cm.

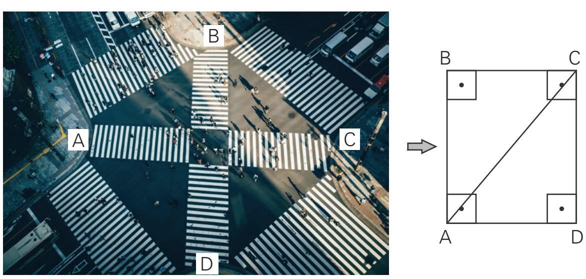



desenho ilustrativo – fora de escala

Qual é a medida, em centímetros, do segmento PQ?

**10. Unesp (adaptado)** – Em 2014, a Companhia de Engenharia de Tráfego (CET) implantou duas faixas para pedestres na diagonal de um cruzamento de ruas perpendiculares do centro de São Paulo. Juntas, as faixas formam um "x", como indicado na imagem. Segundo a CET, o objetivo das faixas foi o de encurtar o tempo e a distância da travessia.

ONEINCHPUNCH/ISTOCKPHOTO




Antes da implantação das novas faixas, o tempo necessário para o pedestre ir do ponto A até o ponto C era de 90 segundos e distribuía-se do seguinte modo: 40 segundos para atravessar $\overline{AB}$, com velocidade média V; 20 segundos esperando o sinal verde de pedestres para iniciar a travessia $\overline{BC}$; e 30 segundos para atravessar $\overline{BC}$, também com velocidade média V. Na nova configuração das faixas, com a mesma velocidade média V, a economia de tempo para ir de A até C, por meio da faixa $\overline{AC}$, em segundos, será igual a:

**a)** 20.
**b)** 30.
**c)** 50.
**d)** 10.
**e)** 40.

**11. Ifal** – Determine a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos medem 6 cm e 8 cm.

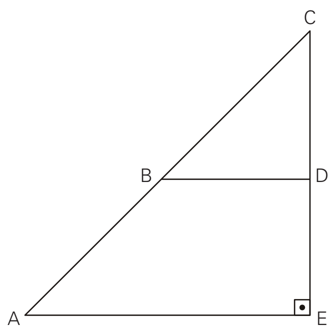
**a)** 3,6 cm.
**b)** 4,8 cm.
**c)** 6,0 cm.
**d)** 6,4 cm.
**e)** 8,0 cm.

**12. Cefet-MG** – A figura abaixo tem as seguintes características:

o ângulo $\hat{E}$ é reto;

o segmento de reta $\overline{AE}$ é paralelo ao segmento $\overline{BD}$;

os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DE}$, medem, respectivamente, 5, 4 e 3.




O segmento $\overline{AC}$, em unidades de comprimento, mede

**a)** 8.

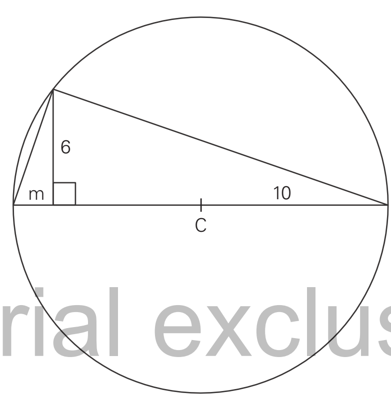
**b)** 12.

**c)** 13.

**d)** $\sqrt{61}$.

**e)** $5\sqrt{10}$.

**13. Ifal (adaptado)** – Calcule o valor de m na figura:




Onde C é o centro do círculo de raio 10.

**14. Uece** – No quadrado MNPQ, R é o ponto médio do lado PQ e S é um ponto do segmento NR, tal que os segmentos MS e NR são perpendiculares. Se a medida do segmento MS é 3 cm, então a medida do lado do quadrado é

**a)** $\sqrt{5}$ cm.

**b)** $1{,}5\sqrt{5}$ cm.

**c)** $2{,}0\sqrt{5}$ cm.

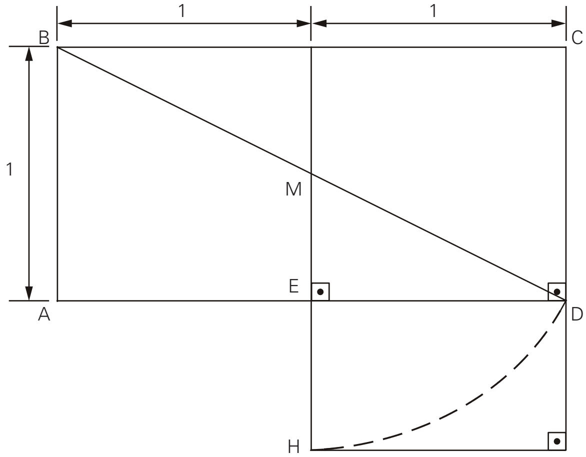
**d)** $2{,}5\sqrt{5}$ cm.

**15. CP2 (adaptado)** – No famoso jogo para celular Pokémon Go, três pokémons, $P_1$, $P_2$ e $P_3$, estão posicionados, respectivamente, nos vértices de um triângulo, retângulo em $P_1$.

Sabe-se que $\overline{P_1P_2} = 12\sqrt{3}$ m e que a distância $\overline{P_2P_3}$ mede o dobro desse valor. Nesse momento do jogo, o treinador T está posicionado em um ponto do lado $\overline{P_1P_3}$, de forma que ele equidista de $P_2$ e $P_3$.

Considerando que o Pokémon $P_3$ permanecerá imóvel, qual a menor distância que o treinador deverá percorrer para alcançá-lo?

**16. Cefet-MG** – Nesta figura, ABCD é um retângulo e DH é um arco de circunferência cujo centro é o ponto M.




O segmento EH, em unidades de comprimento, mede

**a)** $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

**b)** $\frac{2 + \sqrt{5}}{2}$.

**c)** $\frac{1}{3}$.

**d)** $\frac{1}{2}$.

**e)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

**17. PUC-Campinas** – Quando a dimensão da tela de uma TV é indicada em polegadas, tal valor se refere à medida da diagonal do retângulo que representa a tela. Considere uma TV retangular de 16 polegadas e outra de 21 polegadas. Se as telas das duas TVs são retângulos semelhantes, então, a área da maior tela supera a da menor em, aproximadamente,

**a)** 36%.

**b)** 31%.

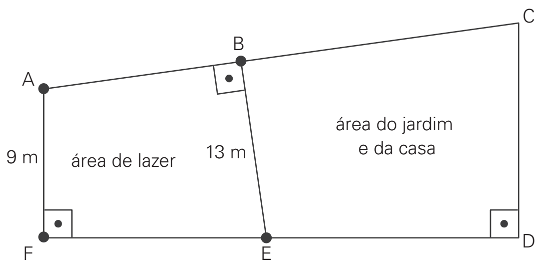
**c)** 72%.

**d)** 76%.

**e)** 24%.

**18. Unesp (adaptado)** C5-H21

A figura, fora de escala, representa o terreno plano onde foi construída uma casa.




Sabe-se do quadrilátero ABEF que:

- seus ângulos $A\hat{B}E$ e $A\hat{F}E$ são retos.
- $\overline{AF}$ mede 9 m e $\overline{BE}$ mede 13 m.
- o lado $\overline{EF}$ é 2 m maior que o lado $\overline{AB}$.

Nessas condições, quais são as medidas, em metros, dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$?

**a)** $\overline{AB} = 21$ m e $\overline{EF} = 23$ m
**b)** $\overline{AB} = 21$ m e $\overline{EF} = 21$ m
**c)** $\overline{AB} = 21$ m e $\overline{EF} = 24$ m
**d)** $\overline{AB} = 23$ m e $\overline{EF} = 23$ m
**e)** $\overline{AB} = 23$ m e $\overline{EF} = 21$ m

**19. IFPE** C5-H21

A turma de Eletrônica está se formando e resolveu construir um projetor para utilizar na aula da saudade. Sofia conseguiu um lençol branco, cuja largura é equivalente a 8/15 do próprio comprimento, para servir de tela, semelhante a uma televisão de 85 polegadas (medida da diagonal da tela).

Sobre as dimensões deste lençol, é CORRETO afirmar que

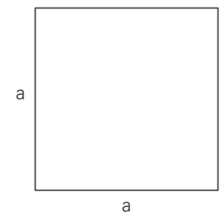
**a)** o comprimento é 36 polegadas maior que a largura.
**b)** o comprimento é 30 polegadas maior que a largura.
**c)** a largura é 45 polegadas menor que o comprimento.
**d)** a largura é 32 polegadas maior que o comprimento.
**e)** o comprimento é 35 polegadas maior que a largura.

**20. UPF** C2-H8

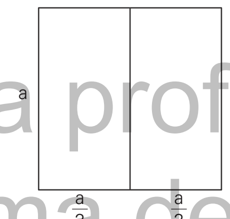
Um quadrilátero áureo apresenta um valor especial para a razão entre as suas medidas da base (lado maior) e da altura (lado menor).

Os passos para a construção de um quadrilátero áureo são:

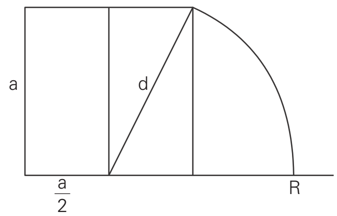
1. Construir um quadrado de lado a.



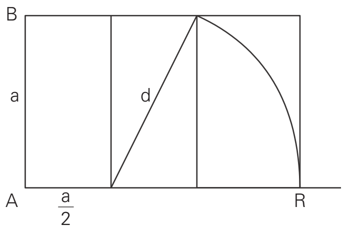

2. Dividir esse quadrado em dois retângulos iguais.



3. Traçar a diagonal do segundo retângulo e, com o compasso, marcar o ponto R sobre a horizontal.




4. Dessa forma, ficam definidas as medidas da base, $\overline{AR} = \frac{a}{2} + d$, e da altura, $\overline{AB} = a$, desse retângulo.




Sendo assim, a razão entre a medida da base e da altura do quadrilátero áureo é:

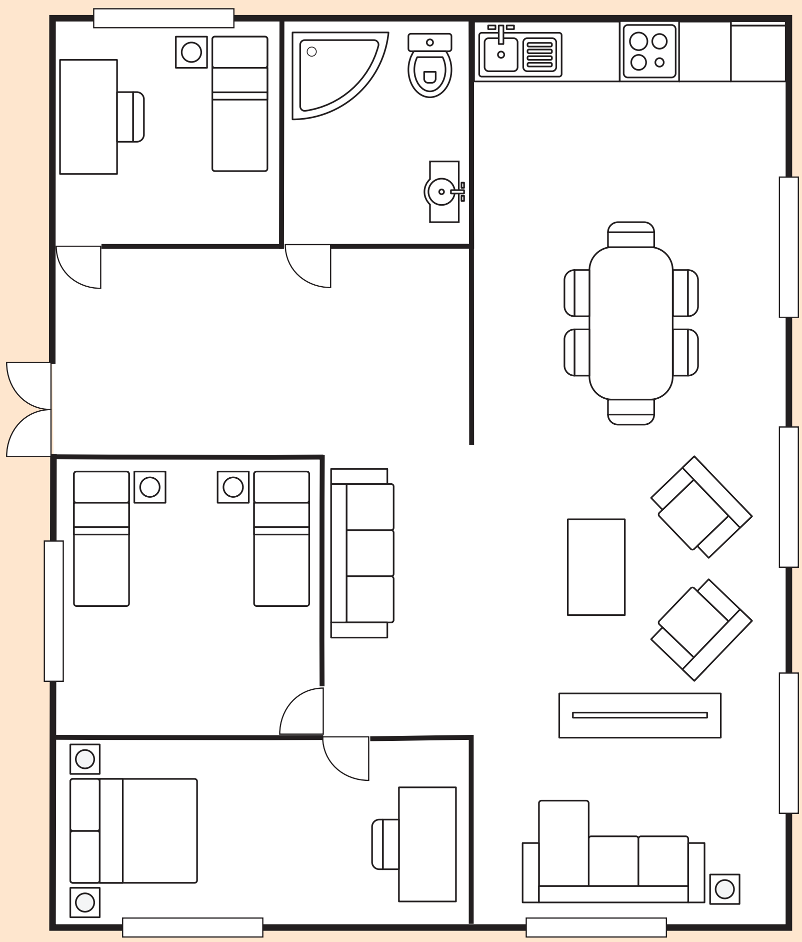
**a)** $1 + \sqrt{5}$
**b)** $1 + \sqrt{2}$
**c)** $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$
**d)** $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
**e)** $\frac{a\left(1 + \sqrt{5}\right)}{2}$

# 19 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS I

- Retângulo
- Quadrado

## HABILIDADES

- Identificar os elementos do paralelogramo, do retângulo e do quadrado.
- Aplicar as expressões referentes ao cálculo de áreas na resolução de situações-problema.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.


BAGIRA22/ISTOCKPHOTO

Planta baixa de um imóvel.

## Introdução

A Geometria plana é utilizada com frequência em nosso cotidiano para calcular a medida de superfícies de pisos e paredes e elaborar plantas baixas. Em todos os casos, é necessário conhecer áreas de retângulos, conceito a ser trabalhado neste módulo.

### ÁREA DE RETÂNGULOS

Área é a medida de extensão de uma superfície, sendo expressa em uma unidade preestabelecida ($m^2$, $cm^2$, $mm^2$...).

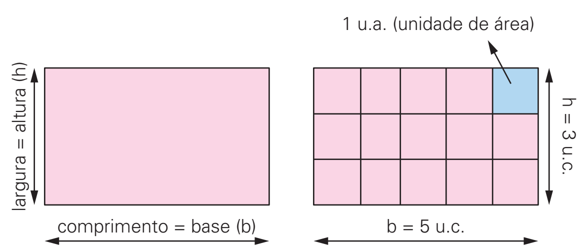
A área de um retângulo é igual ao produto da medida de seu comprimento (base) pela medida de sua largura (altura).

$$A = b \cdot h$$

O retângulo da figura a seguir tem um lado medindo 5 u.c. (unidade de comprimento) e outro lado de 3 u.c. Assim, esse retângulo pode ser dividido em 5 partes iguais em seu comprimento e 3 em sua altura. Cada parte tem lados medindo 1 unidade de comprimento (1 u.c.). Ou seja, esse retângulo tem 15 pequenos quadradinhos. Isso significa que sua área é de 15 u.a. (unidade de área). Neste caso:

$$A = (5 \text{ u.c.}) \cdot (3 \text{ u.c.}) = 15 \text{ u.a.}$$

Observe as figuras:



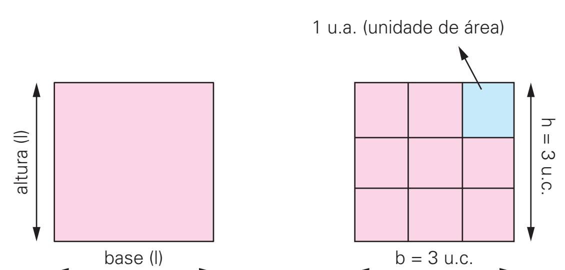

## ÁREA DE QUADRADOS

Como vimos no estudo sobre quadriláteros notáveis, todo quadrado é um retângulo que tem comprimento (base) e largura (altura) de mesmas dimensões. Concluímos que o processo de cálculo da área do quadrado ou do retângulo é o mesmo.

A área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado, já que ele tem lados com medidas iguais.

Ou seja, a fórmula geral para calcular a área de um quadrado é $A = l^2$. Perceba que aqui a letra l (referente a lado) não confere com o símbolo usado nas figuras abaixo.

Tendo esses dados em mente, observe as figuras:




Podemos afirmar que esse quadrado tem lado medindo 3 u.c. Logo:

$$A = (3 \text{ u.c.}) \cdot (3 \text{ u.c.}) = (3 \text{ u.c.})^2 = 9 \text{ u.a.}$$

**O cálculo da área e a relação com os imóveis**

O Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU) é um tributo cobrado a cada ano. Seu valor dependente diretamente da área do terreno ocupada pelo imóvel e da área dessa construção.

A área de quadriláteros é bastante usada na construção civil.

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**1. Udesc** – Para divulgar seus cursos de graduação, uma universidade deseja confeccionar alguns panfletos. Sabe-se que as dimensões de cada panfleto são 12 cm × 18 cm e que as margens superior, inferior, direita e esquerda devem ser iguais a x cm. Se a maior área de impressão em cada panfleto é 187 cm², então x é igual a:

**a)** 0,5 cm
**b)** 1 cm
**c)** 14,5 cm
**d)** 0,25 cm
**e)** 2 cm

**Resolução**

Analisando as informações, a área de impressão será (12 – 2x) cm e (18 – 2x) cm.

Como a maior área de impressão em cada panfleto é 187 cm², temos:

$(12 - 2x) \cdot (18 - 2x) = 187$

$4x^2 - 60x + 29 = 0$

$a = 4$

$b = -60$

$c = 29$

$\Delta = (-60)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 29 = 3\,136$

$x = \dfrac{-(-60) \pm \sqrt{3\,136}}{2 \cdot 4}$

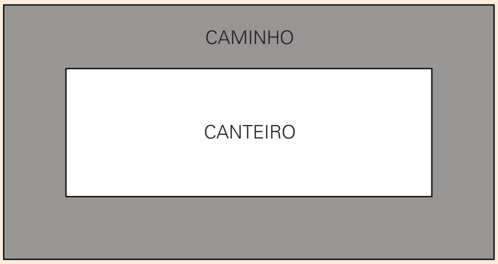
$x = \dfrac{60 \pm 56}{8}$

$x_I = \dfrac{60 + 56}{8} = \dfrac{116}{8} = 14{,}5$

$x_{II} = \dfrac{60 - 56}{8} = \dfrac{4}{8} = 0{,}5$

Logo, x = 0,5 cm

**2. UFSJ** – Deseja-se construir um caminho cimentado de largura constante em torno de um canteiro retangular de 20 metros de comprimento por 12 metros de largura, como se pode ver na figura a seguir.




O material disponível para o serviço só é suficiente para cimentar uma área de 68 metros quadrados. A respeito da medida da largura máxima desse caminho, utilizando-se todo o material disponível para isso, é CORRETO afirmar que ela é

**a)** maior que 1 metro e menor que 2 metros.
**b)** menor que 1 metro.
**c)** exatamente igual a 1 metro.
**d)** exatamente igual a 2 metros.

**Resolução**

Sendo x a largura do caminho, a área a ser cimentada será de:

$$(20 + 2x) \cdot (12 + 2x) - 20 \cdot 12 = 68$$

$$x^2 = 16x - 17 = 0$$

$$\Delta = (16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-17) = 324$$

$$x = \frac{-(16) \pm \sqrt{324}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-16 \pm 18}{2}$$

$$x_I = \frac{-16 + 18}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_{II} = \frac{-16 - 18}{2} = \frac{-34}{2} = -17$$

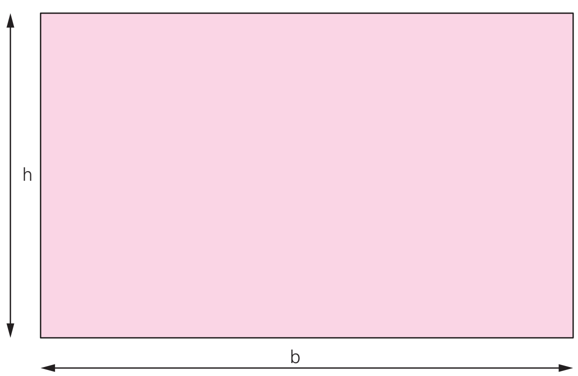
Logo, a medida máxima da largura do caminho será de 1 metro.

# ROTEIRO DE AULA

## ÁREAS DE FIGURAS PLANAS I

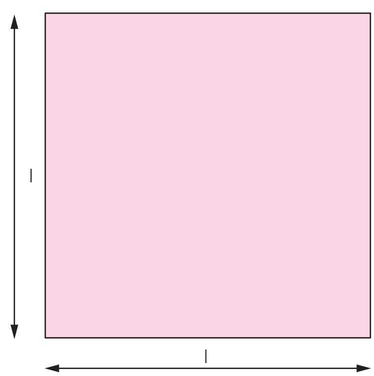
**Retângulo**

A = $b \cdot h$




**Quadrado**

A = $l^2$



## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Ifal** – Um cliente deseja revestir o piso de sua sala retangular de dimensões 6 m por 4 m com uma cerâmica de sua escolha, com cada pedra da cerâmica no formato quadrado com lado 45 cm, cada pedra da cerâmica. Sabendo que cada caixa da cerâmica em questão possui 10 pedras, o profissional que irá realizar o serviço deve solicitar a seu cliente a compra de, no mínimo, quantas caixas?

**a)** 2.
**b)** 6.
**c)** 11.
**d)** 12.
**e)** 65.

Inicialmente devemos calcular a área total da sala e a área de cada cerâmica. Assim, teremos:

$A_{sala} = 6\text{ m} \cdot 4\text{ m}$

$A_{sala} = 24\text{ m}$

$A_{cerâmica} = 0{,}45\text{ m} \cdot 0{,}45\text{ m}$

$A_{cerâmica} = 0{,}2025\text{ m}$

Dessa forma, a caixa de cerâmica terá capacidade de cobrir uma área de: $0{,}2025 \cdot 10 = 2{,}025\text{ m}$

Logo, se dividirmos o tamanho da área pela capacidade de cobrir a área, temos:

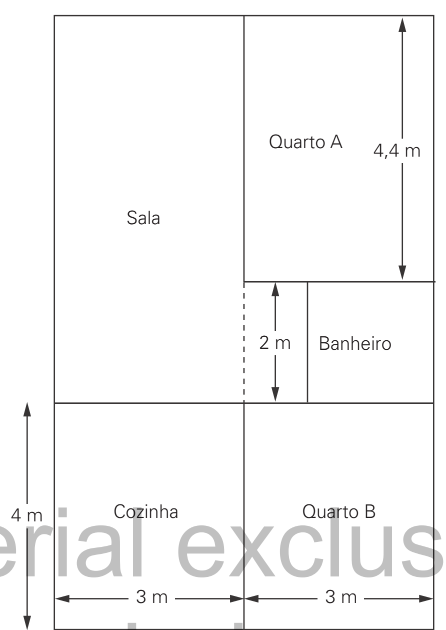
$\text{caixas} = \dfrac{24}{2{,}025}$

$\text{caixas} = 11{,}85.$

Portanto, o profissional que vai realizar o serviço deverá solicitar pelo menos 12 caixas.

**2. Enem** C2-H8

A figura traz o esboço da planta baixa de uma residência. Algumas medidas internas dos cômodos estão indicadas. A espessura de cada parede externa da casa é 0,20 m, e a das paredes internas, 0,10 m.




Sabe-se que, na localidade onde se encontra esse imóvel, o Imposto Predial Territorial Urbano (IPTU) é calculado conforme a área construída da residência. Nesse cálculo, são cobrados R$ 4,00 por cada metro quadrado de área construída.

O valor do IPTU desse imóvel, em real, é

**a)** 250,00.
**b)** 250,80.
**c)** 258,64.
**d)** 276,48.
**e)** 286,00.

As dimensões da casa são:

$6 + (2 \cdot 0{,}2) + 0{,}1 = 6{,}5\text{ m}$

$10{,}4 + (2 \cdot 0{,}2) + 0{,}1 = 11\text{ m}$

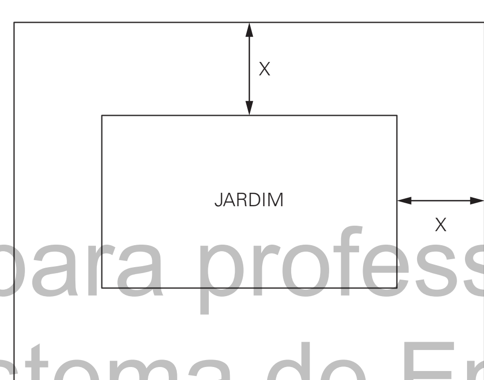
Logo, concluímos que encontramos o valor de $4 \cdot 6{,}5 \cdot 11 = 286$.

Portanto, o preço a ser pago será de R$ 286,00.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

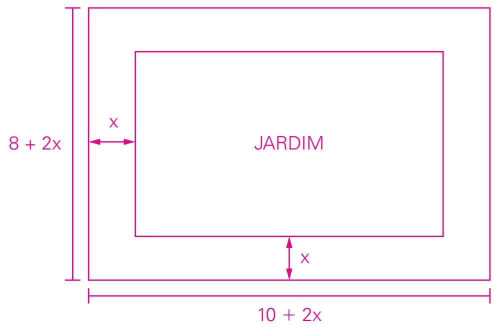
**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**3. PUC-Rio (adaptado)** – Um terreno de 120 m² contém um jardim central de 8 m × 10 m. Em volta do jardim, existe uma calçada de largura X, conforme a figura abaixo:



Qual é o valor de X, em metros?

Dimensões do terreno: 8 + 2x e 10 + 2x. Sendo assim, a área será dada por:




$(8 + 2x) \cdot (10 + 2x) = 120$

$80 + 16x + 20x + 4x^2 - 120 = 0$

$4x^2 + 36x - 40 = 0$

$a = 4;\ b = 36;\ c = -40$

$\Delta = (36)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-40) = 1\,936$

$x = \dfrac{-36 \pm \sqrt{1936}}{2 \cdot 4}$

$x = \dfrac{-36 \pm 44}{8}$

$x_I = \dfrac{-36 + 44}{8} = \dfrac{8}{8} = 1$

$x_{II} = \dfrac{-36 - 44}{8} = \dfrac{-80}{8} = -10$

Como não é possível ter medida negativa, x = 1 metro.

**4. Uema** – Gabrielle e sua família mudaram-se para uma casa nova. Ao saber que teria seu próprio quarto, Gabrielle tratou de decorar, com papel de parede, o lado em que fica a janela. Pesquisou, na planta, as dimensões do quarto e observou que essa parede possui 2,50 m × 2,80 m.

Sabendo-se que a janela mede 1 m × 1,20 m, a quantidade de papel de parede, em metros quadrados, a ser utilizada para a decoração é de

**a)** 5,5
**b)** 5,8
**c)** 6,3
**d)** 7,0
**e)** 8,2

Áreas:

Parede: $2{,}5 \cdot 2{,}8 = 7\ m^2$

Janela: $1 \cdot 1{,}20 = 1{,}20\ m^2$

Sendo assim, a quantidade de papel de parede utilizado para a decoração será de $7 - 1{,}20 = 5{,}8\ m^2$.

**5. Fac. Albert Einstein** – Em uma aula de Geometria, o professor passou a seguinte instrução:

Desenhe um retângulo de lados 8 cm por 14 cm. Nomeie os vértices desse retângulo de A, B, C e D, e AB deve ser um dos menores lados. Determine o ponto médio do lado AB e nomeie esse ponto pela letra M. A partir do ponto M trace um segmento paralelo aos lados maiores e que tenha 3 cm de comprimento. Nomeie esse segmento de MN. Determine a área do triângulo NCD.

Natália e Mariana seguiram as instruções dadas, porém chegaram a resultados diferentes. Se o professor considerou corretas as duas resoluções, a diferença, em $cm^2$, entre as áreas obtidas por Natália e Mariana foi

**a)** 16
**b)** 20
**c)** 24
**d)** 28

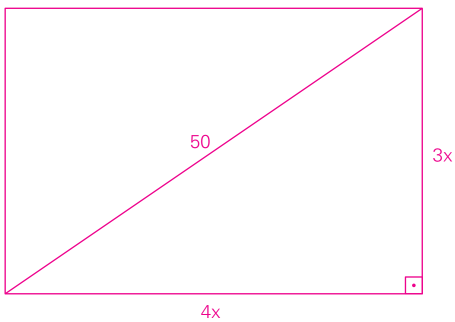
O ponto N pode ser interno ou externo ao retângulo ABCD.

Assim: $\frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 = 24\ cm^2$.

**6. PUC-Campinas (adaptado)** – A medida anunciada da tela de monitor retangular é a medida de sua diagonal, normalmente expressa em polegadas. A proporção entre a largura e a altura de uma dessas telas de 50 polegadas é 4:3. Qual a área dessa tela, em unidade polegadas quadradas?

As dimensões da tela são 4x e 3x, sabendo-se que a razão entre elas é de 4:3.

A figura abaixo representa a tela:




Utilizando o teorema de Pitágoras: $(3x)^2 + (4x)^2 = 50^2 \rightarrow 25x^2 = 2\,500 \rightarrow \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = 10$.

$(3x)^2 + (4x)^2 = 50^2$

$9x^2 + 16x^2 = 2\,500$

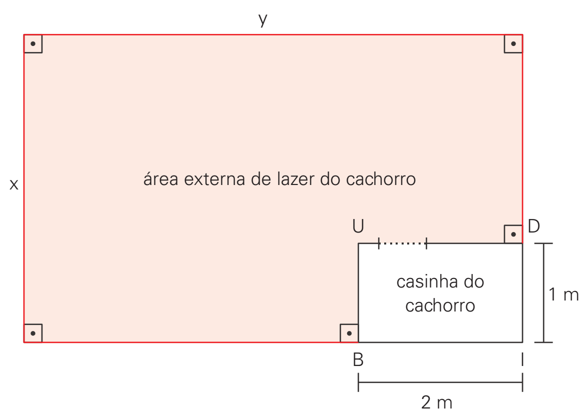
$25x^2 - 2\,500 = 0$

$x = 10$

Logo, as dimensões do retângulo são 40 e 30 polegadas. A área, em polegadas quadradas, será dada por: $A = 30 \cdot 40 = 1\,200$.

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. Unesp** – A figura representa, em vista superior, a casinha de um cachorro (retângulo BIDU) e a área externa de lazer do cachorro, cercada com 35 metros de tela vermelha totalmente esticada.




Calcule a área externa de lazer do cachorro quando $x = 6$ m. Determine, algebricamente, as medidas de x e y que maximizam essa área, mantidos os ângulos retos indicados na figura e as dimensões da casinha.

**8. UEPG** – Uma festa reuniu um público de 1 500 pessoas num pátio retangular de largura x m e comprimento x +≈10 m. Se a concentração de público nessa festa foi de 4 pessoas por metro quadrado, assinale o que for correto.

**01)** A largura do pátio é menor que 12 m.

**02)** Se o público fosse de 2 400 pessoas, a concentração seria superior a 6 pessoas por metro quadrado.

**04)** A área do pátio é maior que 350 m².

**08)** O comprimento do pátio é maior que 20 m.

**9. UEPG** – Um terreno tem a forma de um triângulo retângulo. Se seu perímetro mede 40 m e o menor lado mede 8 m, assinale o que for correto.

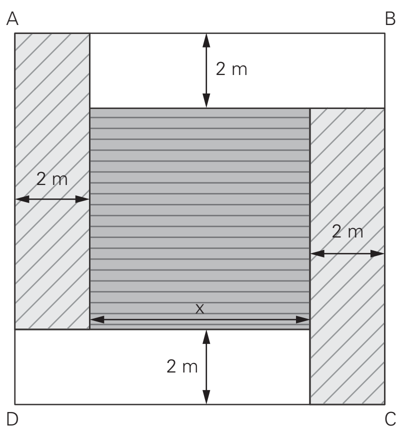
**01)** A área desse terreno é maior que 50 m².

**02)** O maior lado desse terreno mede 17 m.

**04)** Esse terreno tem a mesma área de um terreno retangular com 10 m de comprimento e 6 m de largura.

**08)** A soma dos dois menores lados desse terreno é menor que 30 m.

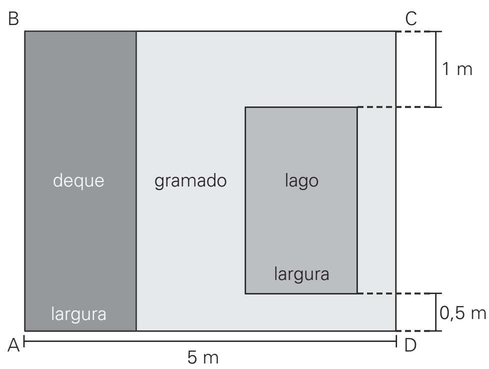
**10. Unesp** – Renata pretende decorar parte de uma parede quadrada ABCD com dois tipos de papel, um com linhas diagonais e outro com riscos horizontais. O projeto prevê que a parede seja dividida em um quadrado central, de lado x, e quatro retângulos laterais, conforme mostra a figura.




Se o total da área decorada com cada um dos dois tipos de papel é a mesma, então x, em metros, é igual a

**a)** $1 + 2\sqrt{3}$
**b)** $2 + 2\sqrt{3}$
**c)** $2 + \sqrt{3}$
**d)** $1 + \sqrt{3}$
**e)** $4 + \sqrt{3}$

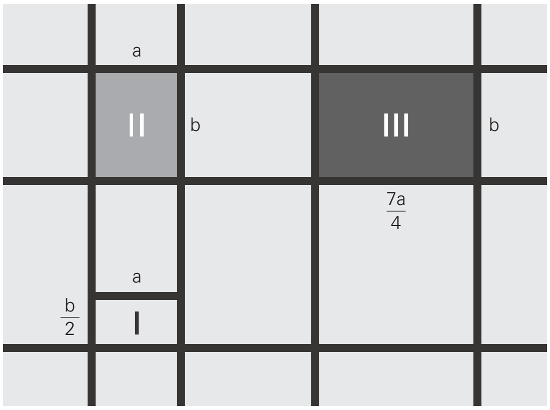
**11. Unesp** – Em um terreno retangular ABCD, de 20 $m^2$, serão construídos um deque e um lago, ambos de superfícies retangulares de mesma largura, com as medidas indicadas na figura. O projeto de construção ainda prevê o plantio de grama na área restante, que corresponde a 48% do terreno.




No projeto descrito, a área da superfície do lago, em $m^2$, será igual a

**a)** 4,1.
**b)** 4,2.
**c)** 3,9.
**d)** 4,0.
**e)** 3,8.

**12. PUC-Campinas** – A figura abaixo é a reprodução de uma obra de Mondrian.




Junto a alguns lados dos retângulos estão marcadas referências às medidas de seus lados. A soma das áreas dos retângulos I e II corresponde, da área do retângulo III, aproximadamente, a

**a)** 78%.
**b)** 86%.
**c)** 81%.
**d)** 92%.
**e)** 74%.

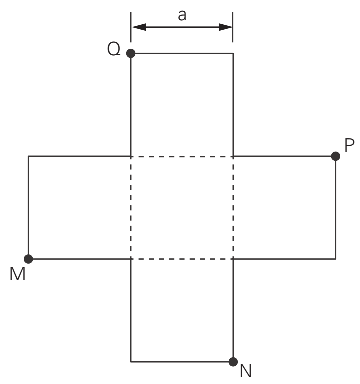
**13. PUC-Rio (adaptado)** – Um retângulo de lados 3 cm e 4 cm está inscrito em um círculo C.

Quanto vale, em $cm^2$, a área desse círculo?

**14. UEPG** – Em um terreno de forma retangular, se o comprimento for reduzido em 5 metros e a largura reduzida em 6 metros, a sua área ficará diminuída de 290 $m^2$. Se o comprimento for aumentado em 5 metros e a largura aumentada em 2 metros, haverá um acréscimo de 210 $m^2$ em sua área. Considerando as dimensões originais desse terreno, assinale o que for correto.

**01)** Sua largura é inferior a 30 metros.
**02)** Seu perímetro é maior que 120 metros.
**04)** Seu comprimento é 30 metros.
**08)** Sua área é de 840 $m^2$.

**15. Mackenzie**



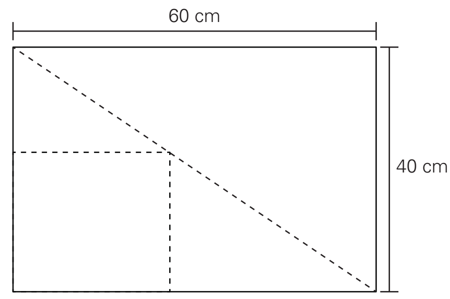

A figura acima é formada por quadrados de lados a.

A área do quadrilátero convexo de vértices M, N, P e Q é

**a)** $6a^2$
**b)** $5a^2$
**c)** $4a^2$
**d)** $4\sqrt{3}a^2$
**e)** $4\sqrt{5}a^2$

**16. UPE-SSA (adaptado)** – Em torno de um canteiro retangular de 12 m de comprimento por 8 m de largura, pretende-se construir uma calçada. Qual deve ser a largura máxima dessa calçada, se o material disponível só é suficiente para cimentar uma área de 69 m$^2$?

**17. UFTM** – Uma placa retangular, de 60 cm por 40 cm, será inicialmente recortada ao longo de uma de suas diagonais e, em seguida, ao longo de duas direções paralelas a seus lados, de modo a se obter um quadrado, conforme indicado na figura.




A razão entre as medidas da área do quadrado recortado e da área total da placa, nessa ordem, é de

**a)** $\frac{6}{25}$.
**b)** $\frac{8}{25}$.
**c)** $\frac{9}{25}$.
**d)** $\frac{2}{5}$.
**e)** $\frac{3}{5}$.

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Enem** C2-H8

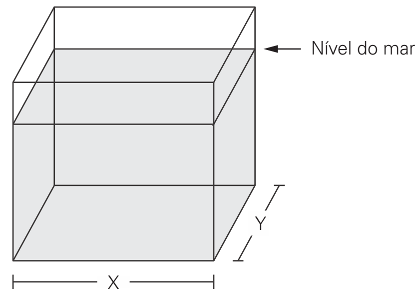
Uma empresa de manutenção de jardins foi contratada para plantar grama em um campo de futebol retangular cujas dimensões são 70 m × 100 m. A grama que será utilizada é vendida em tapetes retangulares de dimensões 40 cm × 125 cm.

Quantos tapetes de grama, no mínimo, serão necessários para cobrir todo o campo de futebol?

**a)** 103
**b)** 140
**c)** 7 000
**d)** 10 303
**e)** 14 000

**19. Enem** C2-H8

Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.




Quais devem ser os valores de X e de Y em metros, para que a área da base do viveiro seja máxima?

**a)** 1 e 49
**b)** 1 e 99
**c)** 10 e 10
**d)** 25 e 25
**e)** 50 e 50

**20. Enem** C2-H8

O banheiro de uma escola pública, com paredes e piso em formato retangular, medindo 5 metros de largura, 4 metros de comprimento e 3 metros de altura, precisa de revestimento no piso e nas paredes internas, excluindo a área da porta, que mede 1 metro de largura por 2 metros de altura. Após uma tomada de preços com cinco fornecedores, foram verificadas as seguintes combinações de azulejos para as paredes e de lajotas para o piso, com os preços dados em reais por metro quadrado, conforme a tabela.

| Fornecedor | Azulejo (R$/m²) | Lajota (R$/m²) |
|---|---|---|
| A | 31,00 | 31,00 |
| B | 33,00 | 30,00 |
| C | 29,00 | 39,00 |
| D | 30,00 | 33,00 |
| E | 40,00 | 29,00 |

Desejando-se efetuar a menor despesa total, deverá ser escolhido o fornecedor

**a)** A.
**b)** B.
**c)** C.
**d)** D.
**e)** E.

# 20 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS - PARALELOGRAMOS

- Área do paralelogramo
- Relações entre unidades de medida

### HABILIDADES

- Identificar os elementos dos paralelogramos retângulo e quadrado.
- Aplicar as expressões referentes ao cálculo de áreas na resolução de situações-problema.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

LUCA_DAVIDDI/ISTOCKPHOTO

Piso em forma de paralelogramos e triângulos.

## Introdução

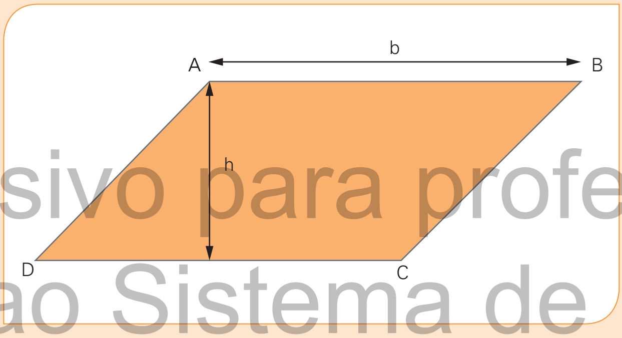
Pela sua facilidade de alinhamento e encaixe, na construção civil é comum o uso de pisos cerâmicos com o formato de quadriláteros diversos. Esse é só um exemplo da aplicação dos paralelogramos em nosso cotidiano.

Neste módulo continuaremos a estudar as áreas dos quadriláteros.

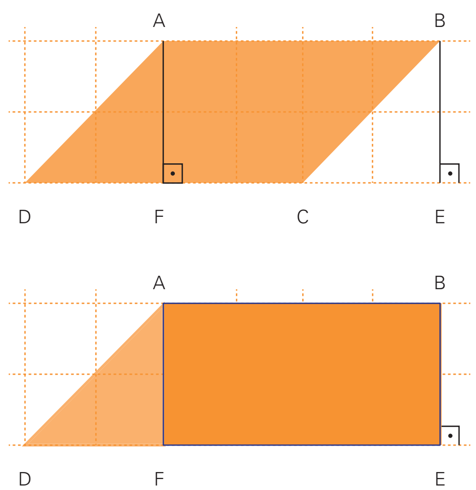
### ÁREA DO PARALELOGRAMO

A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida de sua base pela medida da altura relativa.

Considere o paralelogramo **ABCD** de base **b** e altura relativa **h**, conforme a figura.



Traçando a altura, os triângulos **ADF** e **BCE** são congruentes. Assim, o retângulo **ABEF** é equivalente ao paralelogramo **ABCD**.




$$A_{ABCD} = A_{ABEF} = b \cdot h$$

## RELAÇÕES ENTRE UNIDADES DE MEDIDA

No Sistema Internacional de Unidades (SI), as unidades básicas de medidas do comprimento, área e volume são respectivamente o metro (**m**), o metro quadrado (**m²**) e o metro cúbico (**m³**).

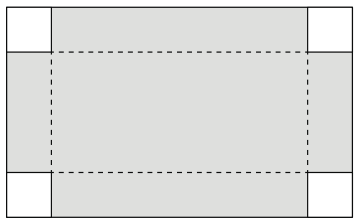
O metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz, no vácuo, durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 de segundo.

Estabelecendo as relações entre metros (m) e centímetros (cm) e entre metros e decímetros (dm), temos:

| Comprimento | Área |
|---|---|
| 1 m = 100 cm | $1\ m \cdot 1\ m = 100\ cm \cdot 100\ cm = 10\,000\ cm^2 \therefore 1\ m^2 = 10^4\ cm^2$ |
| 1 m = 10 dm | $1\ m \cdot 1\ m = 10\ dm \cdot 10\ dm = 100\ dm^2 \therefore 1\ m^2 = 10^2\ dm^2$ |

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**1. PUC-Rio** – De uma folha de papelão de lados de medidas 23 e 14 foram retirados, dos quatro cantos, quadrados de lado de medida 3 para construir uma caixa (sem tampa) dobrando o papelão nas linhas pontilhadas.



**a)** Determine o perímetro da folha de papelão após a retirada dos quatro cantos.

**b)** Determine a área da folha de papelão após a retirada dos quatro cantos.

**c)** Determine o volume da caixa formada.

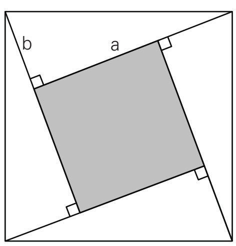
**Resolução**

a) O perímetro da folha após a retirada dos quatro cantos é $2 \cdot [(23 - 6) = (14 - 6)] + 8 \cdot 3 = 74$ u.c.

b) A área da folha de papelão após a retirada dos quatro cantos é dada por $23 \cdot 14 - 4 \cdot 3^2 = 322 - 36 = 286$ u.a.

c) A caixa formada tem dimensões $17 \cdot 8 \cdot 3$. Logo, seu volume é igual a $17 \cdot 8 \cdot 3 = 408$ u.v.

**2. UFRGS** – Na figura abaixo, os triângulos retângulos são congruentes e possuem catetos com medidas a e b.




A área da região sombreada é

**a)** 2ab.
**b)** $a^2 + b^2$.
**c)** $a^2 + 2ab + b^2$.
**d)** $a^2 - 2ab + b^2$.
**e)** $a^2 - b^2$.

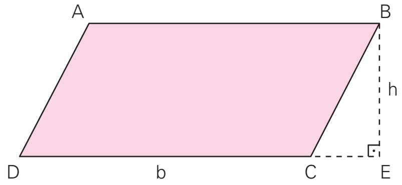
**Resolução**

A área da região sombreada corresponde à área do quadrado de lado a – b. Ou seja: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

# ROTEIRO DE AULA

## ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – PARALELOGRAMOS

$A =$ $b \cdot h$

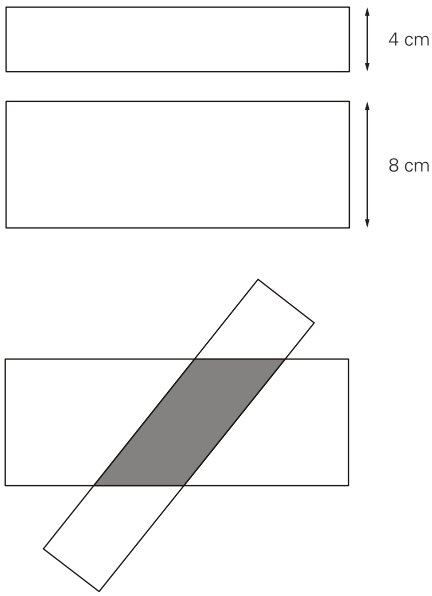



$1\ m^2 =$ $10^4$ $cm^2$

$1\ m^2 =$ $10^2$ $dm^2$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

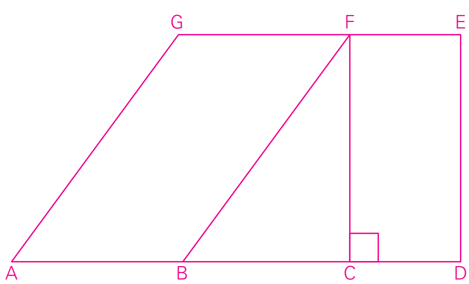
**1. UPE** – Dois retângulos foram superpostos, e a intersecção formou um paralelogramo, como mostra a figura abaixo:




Sabendo-se que um dos lados do paralelogramo mede 4,5 cm, quanto mede a área desse paralelogramo?

**a)** 12 cm²
**b)** 16 cm²
**c)** 24 cm²
**d)** 32 cm²
**e)** 36 cm²

Analisando a figura, os segmentos CF = DE = 8 cm.




BF é hipotenusa do triângulo retângulo BCF. Logo, temos que $\overline{BF} > \overline{CF} = 8$ cm. Então, $\overline{AB} = 4,5$ cm. A área será dada por: $\overline{AB} \cdot \overline{CF} = 4,5 \cdot 8 = 36$ cm².

**2. ESPM (adaptado)** – Durante uma manifestação, os participantes ocuparam uma avenida de 18 m de largura em uma extensão de 1,5 km. Considere uma média de ocupação de 1,5 pessoas por m². Qual o número de participantes dessa manifestação, aproximadamente?

Para saber o número aproximado de participantes, devemos fazer o produto da área da avenida pela média de ocupação.

$1\,500 \cdot 18 \cdot 1,5 = 40\,500 \approx 40\,000$

Logo, havia 40 000 participantes, aproximadamente.

**3. Enem** C2-H6

O prefeito de uma cidade deseja promover uma festa popular no parque municipal para comemorar o aniversário de fundação do município. Sabe-se que esse parque possui formato retangular, com 120 m de comprimento por 150 m de largura. Além disso, para segurança das pessoas presentes no local, a polícia recomenda que a densidade média, num evento dessa natureza, não supere quatro pessoas por metro quadrado.

Seguindo as recomendações de segurança estabelecidas pela polícia, qual é o número máximo de pessoas que poderão estar presentes na festa?

**a)** 1 000
**b)** 4 500
**c)** 18 000
**d)** 72 000
**e)** 120 000

Com os dados, temos: $\text{Área}_{\text{parque}} = 120 \cdot 150 = 18\,000$ m².
Quantidade de pessoas por m² = 4 pessoas.
Sendo assim, o público total é igual a $18\,000 \cdot 4 = 72\,000$ pessoas.

**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade:** Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

**4. IFPE** – Deseja-se cobrir o piso de um quarto retangular de 3 metros de largura por 5 metros de comprimento com cerâmicas quadradas de 40 cm de lado. Sem levar em conta a largura do rejunte e comprando uma quantidade que forneça uma área pelo menos 10% maior (para as quinas e possíveis quebras), quantas caixas dessa cerâmica temos que comprar, sabendo que em cada caixa temos 8 cerâmicas?

**a)** 13
**b)** 12

**c)** 10
**d)** 15
**e)** 11

Área da sala: acrescentando mais 10%, temos:
$A = 1,1 \cdot 3 \cdot 5 = 16,5 \text{ m}^2$.
Área de cada cerâmica: $C = (0,4)^2 = 0,16 \text{ m}^2$.
Para saber o número necessário de cerâmicas, calculamos:
$n = \dfrac{16,5}{0,16}$
$n \approx 104$
Sabemos que em cada caixa há 8 cerâmicas. Logo:
$N = \dfrac{104}{8} = 13$ caixas.

**5. Unisc** – O Principado de Mônaco é um microestado situado no sul da França. Possui, aproximadamente, uma área de 2 km², sendo o segundo menor Estado do mundo, atrás apenas do Vaticano. Se o território do Principado de Mônaco tivesse a forma de um quadrado, então a medida de seus lados estaria entre

**a)** 440 m e 450 m.
**b)** 1 140 m e 1 150 m.
**c)** 1 410 m e 1 420 m.
**d)** 4 470 m e 4 480 m.
**e)** 14 140 m e 14 150 m.

L é o lado do quadrado cuja área equivale à área do Principado de Mônaco. Sendo assim: $2 \text{ km}^2 = 2 \cdot 10^6 \text{ m}^2$.
Utilizando $\sqrt{2} \cong 1,414$, temos:
$L^2 = 2 \cdot 10^6$
$L = \sqrt{2} \cdot 10^3$
$L = 1\,414$ m
Logo: $1\,410 \text{ m} < L < 1\,420 \text{ m}$.

**6. CP2 (adaptado)** – O tangram é um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças com as quais podemos formar várias figuras, utilizando todas as peças e sem sobrepô-las.

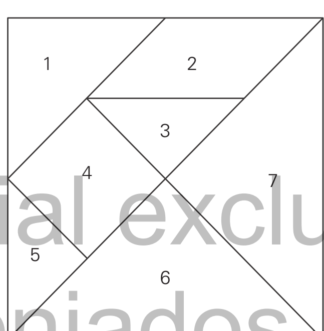
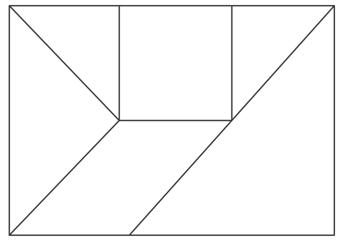



**Fig. 1** – Triângulo retângulo isósceles médio
**Fig. 2** – Paralelogramo
**Fig. 3 e 5** – Triângulos retângulos isósceles congruentes
**Fig. 4** – Quadrado
**Fig. 6 e 7** – Triângulos retângulos isósceles congruentes

O retângulo a seguir foi formado por seis dessas sete peças.



Qual a razão entre a área desse retângulo e a área do quadrado inicial?

Podemos notar que, para formar o retângulo, não precisamos utilizar o triângulo 7, que está representando $\frac{1}{4}$ da área do quadrado.
É possível considerarmos a área do quadrado como A e encontrar a razão pedida da seguinte maneira:

Figura 1

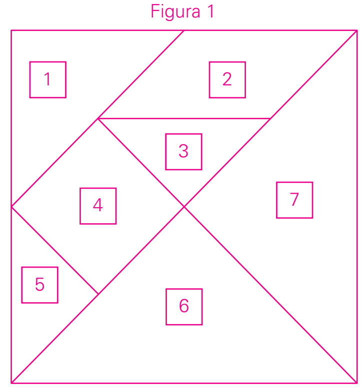
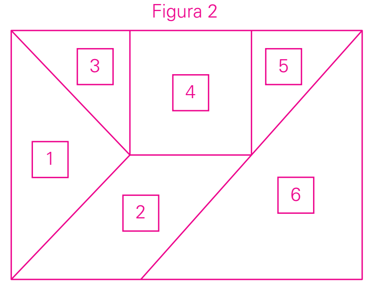



Figura 2




$$\frac{\text{área do retângulo}}{\text{área do quadrado}} = \frac{A - \frac{A}{4}}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. PM-DF (adaptado)** – Deseja-se realizar uma festa popular no gramado da Esplanada dos Ministérios e, para isso, foi cercada uma área retangular de dimensões iguais a 300 m e 500 m. Por questões de segurança, nesse tipo de atividade, a densidade média não pode ser maior que 5 pessoas por metro quadrado.

Com base nessa situação hipotética, é correto afirmar que o número máximo de pessoas que poderá participar do evento é

**a)** 60 000
**b)** 30 000
**c)** 600 000
**d)** 300 000
**e)** 750 000

**8. PUC-RS (adaptado)** – A área ocupada pela arena do Grêmio, no bairro Humaitá, em Porto Alegre, é de 200 000 $m^2$, e o gramado do campo de futebol propriamente dito tem dimensões de 105 m por 68 m. Qual a área aproximada do terreno que excede à do campo?

**9. Fatec**

Leia o texto publicado em maio de 2013 para responder à questão a seguir.

**Os Estados Unidos se preparam para uma invasão de insetos após 17 anos**

Elas vivem a pelo menos 20 centímetros sob o solo há 17 anos. E, neste segundo trimestre, bilhões de cigarras (*Magicicada septendecim*) emergirão para invadir partes da Costa Leste, enchendo os céus e as árvores, e fazendo muito barulho.

Há mais de 170 espécies de cigarras na América do Norte, e mais de 2 mil espécies ao redor do mundo. A maioria aparece todos os anos, mas alguns tipos surgem a cada 13 ou 17 anos. Os visitantes deste ano, conhecidos como *Brood II* (Ninhada II, em tradução livre) foram vistos pela última vez em 1996. Os moradores da Carolina do Norte e de Connecticut talvez tenham de usar rastelos e pás para retirá-las do caminho, já que as estimativas do número de insetos são de 30 bilhões a 1 trilhão.

Um estudo brasileiro descobriu que intervalos baseados em números primos ofereciam a melhor estratégia de sobrevivência para as cigarras.

Disponível em: <http://tinyurl.com/zh8daj6>. Acesso em: 30 ago. 2016. (Adaptado)

O texto afirma que os habitantes das áreas próximas às da população de cigarras da Ninhada II talvez tenham que retirá-las do caminho. Imagine que 30 bilhões dessas cigarras ocupem totalmente uma estrada em formato retangular, com 10 metros de largura. Nesse cenário hipotético, as cigarras estariam posicionadas lado a lado, sem sobreposição de indivíduos.

Considerando que a área ocupada por uma cigarra dessa espécie é igual a $7 \times 10^{-4}$ metros quadrados, então N quilômetros dessa estrada ficarão ocupados por essa população.

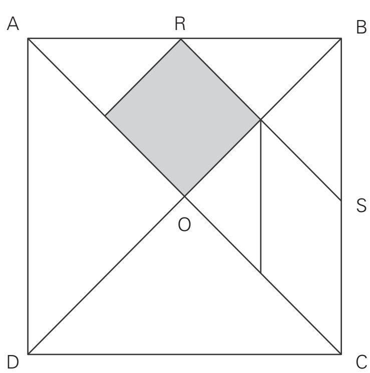
O menor valor de N será igual a

**a)** 2,1
**b)** 21
**c)** 210
**d)** 2 100
**e)** 21 000

**10. Ifal** – A partir de um quadrado de lado x, obtém-se um retângulo aumentando 3 em uma dimensão e diminuindo 3 na outra dimensão. A expressão que melhor representa a área desse retângulo é:

**a)** $2^x$.
**b)** $x^2 - 9$.
**c)** $x^2 + 6x + 9$.
**d)** $x^2 - 6x + 9$.
**e)** $x^2 + 9$.

**11. UPF** – No quadrado ABCD de lado x, representado na figura a seguir, os pontos R e S são pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente, e O é o encontro das duas diagonais. A razão entre a área do quadrado pequeno (pintado) e a área do quadrado ABCD é:




**a)** $\frac{1}{16}$

**b)** $\frac{1}{12}$

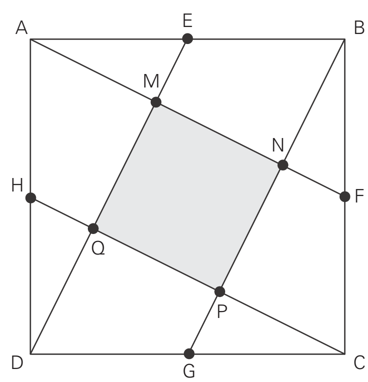
**c)** $\frac{1}{10}$

**d)** $\frac{1}{8}$

**e)** $\frac{1}{4}$

**12. FGV (adaptado)** – Em certa região do litoral paulista, o preço do metro quadrado de terreno é R$ 400,00. O sr. Joaquim possui um terreno retangular com 78 metros de perímetro, e a diferença entre a medida do lado maior e a do menor é 22 metros. Qual o valor do terreno do sr. Joaquim?

**13. Cefet-MG** – Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado 5, e os pontos E, F, G e H são os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente.




A área do quadrilátero MNPQ, em unidades de área, é

**a)** 1,0.

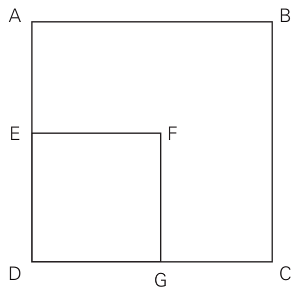
**b)** 2,5.

**c)** 5,0.

**d)** 7,5.

**e)** 10.

**14. Ifal** – Dados os quadrados abaixo, com lados x para o maior e y para o menor, conforme figura:




Qual das expressões abaixo representa a diferença entre as áreas dos quadrados?

**a)** $(x + y)(x - y)$.

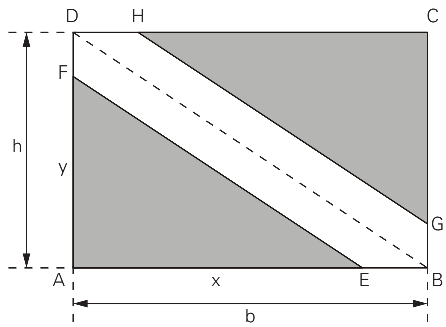
**b)** $(x - y)^2$.

**c)** $(x + y)^2$.

**d)** $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

**e)** $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

**15. Insper (adaptado)** – Considere o retângulo ABCD da figura, de dimensões $\overline{AB} = b$ e $\overline{AD} = h$, que foi dividido em três regiões de áreas iguais pelos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$.




As retas $\overline{EF}$, $\overline{BD}$ e $\overline{GH}$ são paralelas. Dessa forma, sendo $\overline{AE} = x$ e $\overline{AF} = y$, qual a razão $\frac{x}{b}$?

**16. Uece** – Considere o retângulo XYZW, no qual as medidas dos lados XY e YZ são, respectivamente, 5 m e 3 m. Sejam M o ponto médio do lado XY; N o ponto médio do lado ZW; P e Q, respectivamente, a interseção dos segmentos WM e NY com a diagonal XZ. A medida da área do quadrilátero convexo MYPQ, em m², é

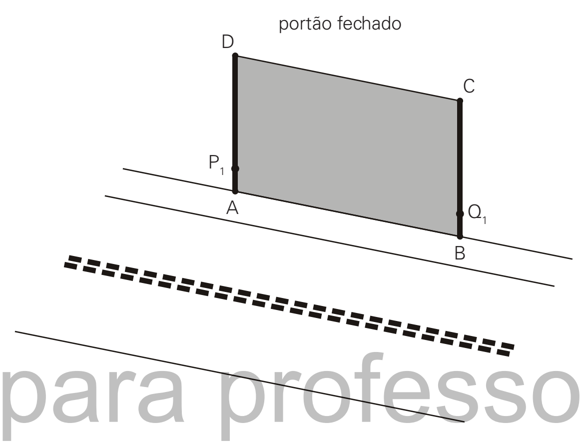
**a)** 4,75.

**b)** 4,50.

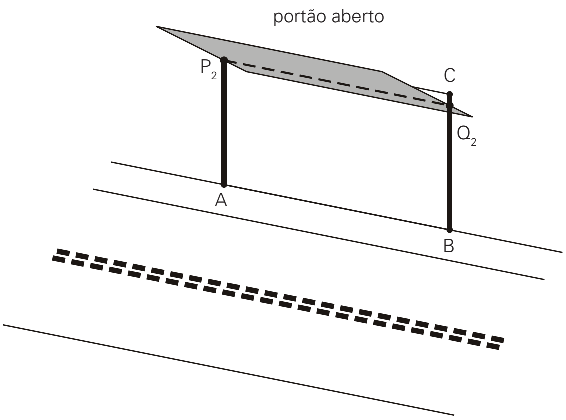
**c)** 4,25.

**d)** 3,75.

**17. Insper** – O acesso à garagem de um edifício é guardado por um portão retangular que fica normalmente fechado. Para abrir a passagem para os veículos que por ali circulam, o portão sobe e se inclina, conforme as figuras abaixo.




Distantes 0,5 m do nível da calçada (pontos A e B), os pontos $P_1$ e $Q_1$ indicam as posições das extremidades de um eixo que sustenta o portão.




O portão, que tem 3 m de altura, sobe e simultaneamente gira 60 graus em torno desse eixo, até ficar totalmente aberto, suspenso nas posições indicadas por $P_2$ e $Q_2$.

O portão é feito soldando-se placas quadradas de 1 m², que não podem ser cortadas e pesam 15 kg cada uma. Se o eixo que movimenta o portão pode sustentar até 250 kg, a maior largura AB que o portão pode ter é

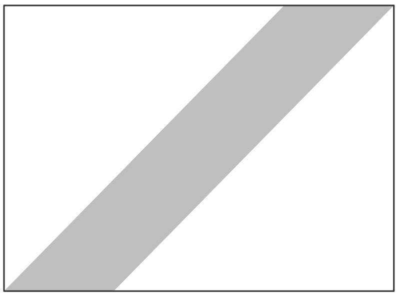
**a)** 3,0 m.
**b)** 3,5 m.
**c)** 4,0 m.
**d)** 4,5 m.
**e)** 5,0 m.

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Enem** C3-H12

Uma família possui um terreno retangular com 18 metros de largura e 24 metros de comprimento. Foi necessário demarcar nesse terreno dois outros iguais, na forma de triângulos isósceles, sendo que um deles será para o filho e o outro para os pais. Além disso, foi demarcada uma área de passeio entre os dois novos terrenos para o livre acesso das pessoas.

Os terrenos e a área de passeio são representados na figura.

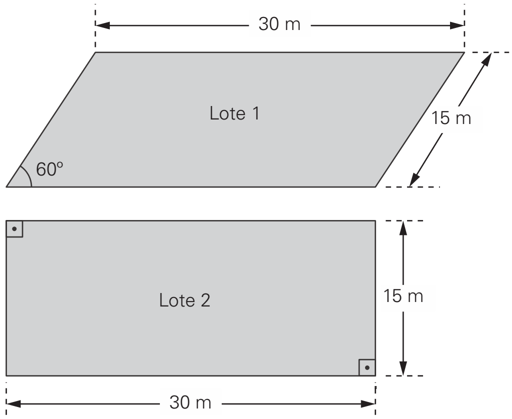


A área de passeio calculada pela família, em metros quadrados, é de

**a)** 108
**b)** 216
**c)** 270
**d)** 288
**e)** 324

**19. Enem** C2-H9

Um casal e seus dois filhos saíram, com um corretor de imóveis, com a intenção de comprar um lote onde futuramente construiriam sua residência. No projeto da casa que esta família tem em mente irão necessitar de uma área de pelo menos 400 m². Após algumas avaliações, ficaram de decidir entre os lotes 1 e 2 da figura, em forma de paralelogramos, cujos preços são R$ 100.000,00 e R$ 150.000,00, respectivamente.




Use $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ e 1,7 como aproximações, respectivamente, para sen 60°, cos 60° e $\sqrt{3}$.

Para colaborarem na decisão, os envolvidos fizeram as seguintes argumentações:

**Pai**: Devemos comprar o Lote 1, pois, como uma de suas diagonais é maior do que as diagonais do Lote 2, o Lote 1 também terá maior área;

**Mãe**: Se desconsiderarmos os preços, poderemos comprar qualquer lote para executar nosso projeto, pois, tendo ambos o mesmo perímetro, terão também a mesma área;

**Filho 1**: Devemos comprar o Lote 2, pois é o único que tem área suficiente para a execução do projeto;

**Filho 2**: Devemos comprar o Lote 1, pois, como os dois lotes possuem lados de mesma medida, terão também a mesma área, porém o Lote 1 é mais barato;

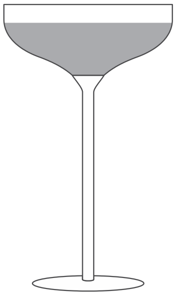
**Corretor**: Vocês devem comprar o Lote 2, pois é o que tem menor custo por metro quadrado.

A pessoa que argumentou corretamente para a compra do terreno foi o(a)

**a)** pai.
**b)** mãe.
**c)** filho 1.
**d)** filho 2.
**e)** corretor.

**20. Enem** C2-H6

Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente.



A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetros quadrados, igual a

**a)** 192.
**b)** 300.
**c)** 304.
**d)** 320.
**e)** 400.

# 21 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS - TRIÂNGULOS

- Área do triângulo
- Área do triângulo em função das medidas de dois lados e do ângulo compreendido entre eles
- Casos particulares de áreas de triângulos

**HABILIDADES**

- Identificar os elementos do triângulo.
- Aplicar as expressões referentes ao cálculo de áreas na resolução de situações-problema.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solução de problemas do cotidiano.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.


LIUZISHAN/ISTOCKPHOTO

Ilustração de homem correndo feita a partir da composição de vários triângulos.

## Introdução

Os triângulos têm diferentes aplicações na vida cotidiana. São usados, por exemplo, como instrumento musical, para fixação estruturante na construção civil, a fim de estabelecer a localização geográfica, em obras de arte...

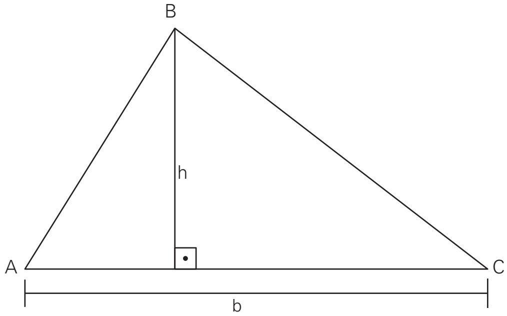
Neste módulo voltaremos a estudar os triângulos, com ênfase aos cálculos de suas áreas.



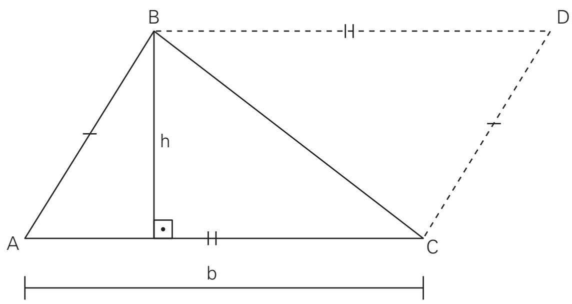
### ÁREA DO TRIÂNGULO

A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura relativa.

Considere um triângulo **ABC**, cuja base $\overline{AC} = b$; a altura relativa a essa base mede **h**, conforme a figura.




Traçando retas paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, iniciadas pelos vértices **B** e **C**, elas se interceptarão no ponto **D**, determinando dois triângulos congruentes **ABC** e **CDB** e o paralelogramo **ABDC**, cujas medidas da base e da altura são **b** e **h**.

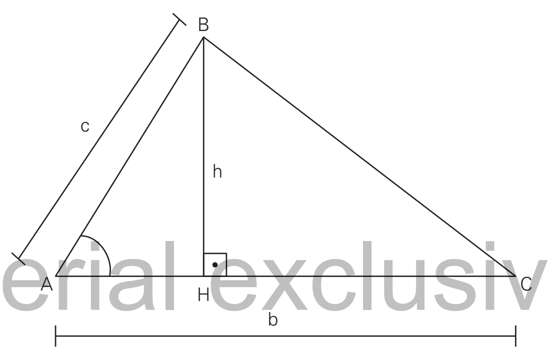



Assim, $A_{ABDC} = 2 \cdot A_{ABC} = b \cdot h$. Logo, $A_{ABC} = \dfrac{b \cdot h}{2}$.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

## ÁREA DO TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DA MEDIDA DE DOIS LADOS E DO ÂNGULO COMPREENDIDO ENTRE ELES

No triângulo **ABC**, o segmento $\overline{BH}$ corresponde à altura **h**. Como já estudamos em módulos anteriores, conhecendo a medida do ângulo Â, é possível calcularmos o valor de **h**.




$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \cdot \text{sen}\,\hat{A}$$

A área do triângulo ABC é: $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$
Assim, temos:

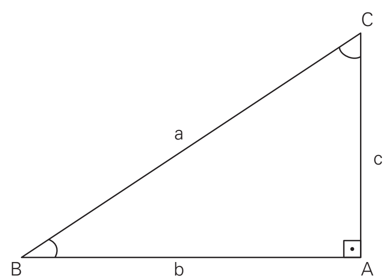
$$A = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2}$$

## CASOS PARTICULARES DE ÁREAS DE TRIÂNGULOS

### TRIÂNGULO RETÂNGULO

Dado um triângulo retângulo **ABC**, em que o ângulo entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é o ângulo de 90°, e sabendo que sen90° = 1, a área do triângulo retângulo é igual a:

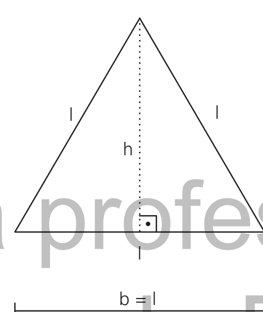
$$A_{\text{Triângulo}} = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}90°}{2} = \frac{b \cdot c}{2}$$




$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

### TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Vimos em módulos anteriores que a altura relativa à base de um triângulo equilátero corresponde a $h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$.



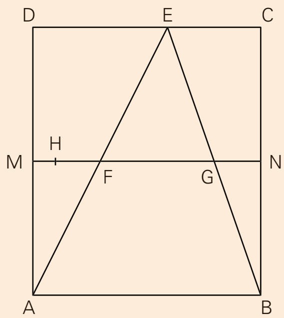
Como a área do triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela sua altura relativa, temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1. UFJF** – No retângulo ABCD mostrado na figura abaixo, E pertence ao segmento $\overline{DC}$, M e N são os pontos médios dos segmentos AD e BC, respectivamente; F e G são os pontos de interseção do segmento $\overline{MN}$ com os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{EB}$, respectivamente.




Sabendo que a área do triângulo EFG mede 5 cm² e que H é um ponto do segmento $\overline{MN}$, qual é a medida da área do triângulo ABH?

**a)** 5 cm²
**b)** $\frac{15}{2}$ cm²
**c)** 10 cm²
**d)** $5\sqrt{5}$ cm²
**e)** 15 cm²

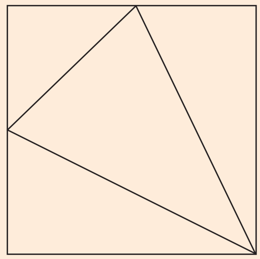
**Resolução**

Sabemos que AD II BC e M e N são os pontos médios dos segmentos AD e BC. Então, $\overline{FG}$ é a base média do triângulo AEB. Logo, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{FG}$ e $\overline{AM} = \overline{DM}$.

Sendo assim, a área do triângulo AHB é dada por:

$$(AHB) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AM}}{2} = \frac{2 \cdot \overline{FG}\,\overline{DM}}{2} = 2 \cdot (EFG) = 2 \cdot 5 =$$
$$= 10 \text{ cm}^2.$$

**2. PUC-Minas** – Para fazer um modelo de ladrilho, certo desenhista une um dos vértices de um quadrado aos pontos médios dos lados que não contêm esse vértice, obtendo um triângulo isósceles. A razão entre a medida da área desse triângulo e a medida da área desse quadrado é igual a:



**a)** 0,350
**b)** 0,375
**c)** 0,380
**d)** 0,385

**Resolução**

Área do triângulo:

$$L^2 - 2\frac{\left(\frac{L}{2} \cdot L\right)}{2} - \frac{\frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2}}{2} \rightarrow L^2 - \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{8} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{8L^2 - 4L^2 - L^2}{8} \rightarrow \frac{3L^2}{8}$$

Razão:

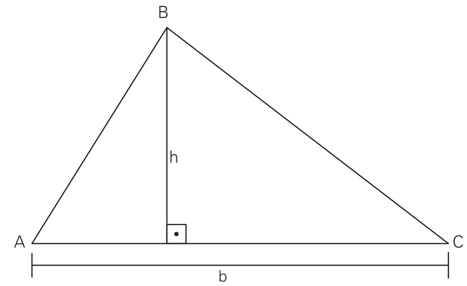
$$\frac{\frac{3L^2}{8}}{L^2} \rightarrow \frac{3}{8} = 0{,}375$$

# ROTEIRO DE AULA

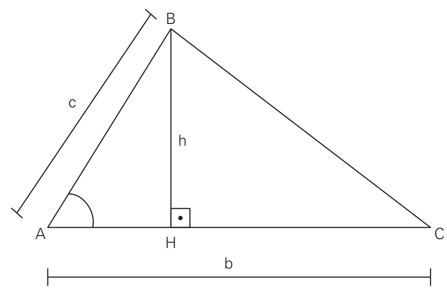
## ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – TRIÂNGULOS

### TRIÂNGULOS

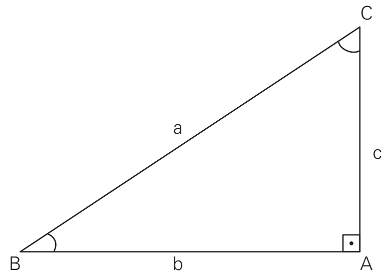
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



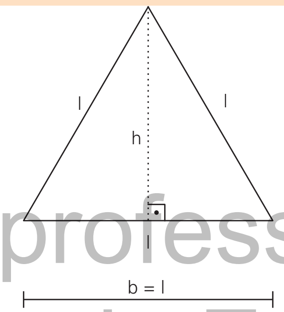

$$A = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2}$$




$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$




$$A = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{4}$$



## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

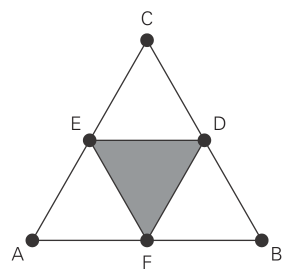
**1. UFPR** – Em um triângulo retângulo, o maior e o menor lado medem, respectivamente, 12 cm e 4 cm. Qual é a área desse triângulo?

**a)** $4\sqrt{2}$ cm².
**b)** 16 cm².
**c)** $8\sqrt{2}$ cm².
**d)** $16\sqrt{2}$ cm².
**e)** 24 cm².

Seja b a medida do outro cateto; pelo teorema de Pitágoras, temos:
$b^2 = 12^2 - 4^2$
$b^2 = 144 - 16$
$b^2 = 128$
$b = 8\sqrt{2}$
Sendo assim: $\dfrac{4 \cdot 8\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2}$ cm²

**2. Enem** C2-H7

Um artista deseja pintar em um quadro uma figura na forma de triângulo equilátero ABC de lado 1 metro. Com o objetivo de dar um efeito diferente em sua obra, o artista traça segmentos que unem os pontos médios D, E e F dos lados BC, AC e AB, respectivamente, colorindo um dos quatro triângulos menores, como mostra a figura.




Qual é a medida da área pintada, em metros quadrados, do triângulo DEF?

**a)** $\dfrac{1}{16}$
**b)** $\dfrac{\sqrt{3}}{16}$
**c)** $\dfrac{1}{8}$
**d)** $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$
**e)** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Analisando a imagem acima, podemos perceber que os quatro triângulos menores são equiláteros de lado $\dfrac{1}{2}$ m. Logo, temos que:

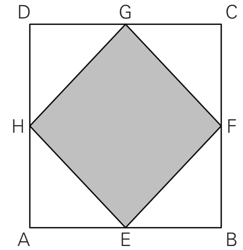
$(DEF) = \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{16}$ m²

**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
**Habilidade:** Identificar características de figuras planas ou espaciais.

**3. FGV (adaptado)** – Um triângulo ABC é retângulo em A. Sabendo que $\overline{BC} = 5$ e $A\hat{B}C = 30°$, qual é a área do triângulo ABC?

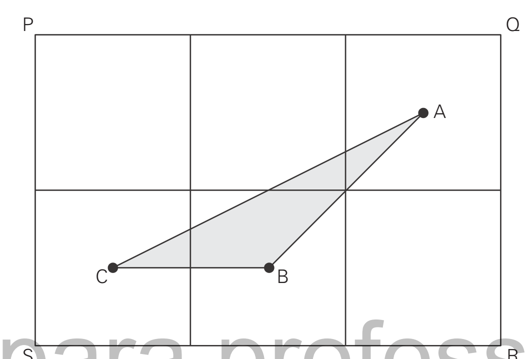
Temos que:
$\cos A\hat{B}C = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$
$\overline{AB} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$
Logo, podemos dizer que a área do triângulo ABC é:
$(ABC) = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \operatorname{sen} A\hat{B}C$
$(ABC) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{2}$
$(ABC) = 3{,}125\sqrt{3}$ u.a.

**4. FGV-RJ** – O quadrilátero ABCD é um quadrado e E, F, G e H são os pontos médios dos seus lados. Qual superfície tem maior área: a branca ou a hachurada?




Sabemos que a área da superfície branca é dada por:
$4 \cdot \dfrac{\overline{AH} \cdot \overline{AE}}{2} = 2 \cdot \overline{AH}^2$
EFGH é um quadrado de lado $\sqrt{2}$AH. Então, a área da superfície hachurada é igual a $(\sqrt{2}AH)^2 = 2AH^2$.
Portanto, as áreas são iguais.

**5. Uerj** – O retângulo PQRS é formado por seis quadrados cujos lados medem 2 cm. O triângulo ABC, em seu interior, possui os vértices definidos pela interseção das diagonais de três desses quadrados, conforme ilustra a figura.

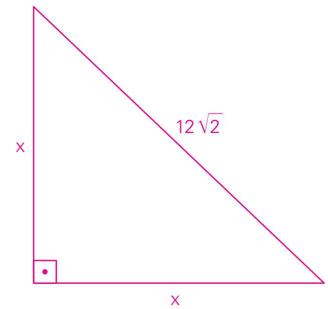



Determine a área do triângulo ABC tomando como unidade a área de um quadrado de lado igual a 2 cm.

$S = \dfrac{b \cdot h}{2} \rightarrow S = \dfrac{2 \cdot 2}{2} \rightarrow S = 2$ cm²

**6. UTFPR** – Num triângulo retângulo, os lados perpendiculares têm o mesmo comprimento e o lado oposto ao ângulo reto mede $12\sqrt{2}$ cm. Qual é a área desse triângulo?

**a)** 12 $cm^2$.
**b)** 24 $cm^2$.
**c)** 72 $cm^2$.
**d)** 144 $cm^2$.
**e)** $(12\sqrt{2})$ $cm^2$.



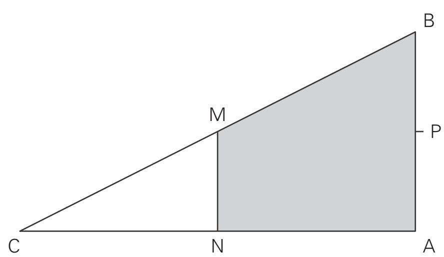

$x^2 + x^2 = (12\sqrt{2})^2$
$2x^2 = 144 \cdot 2$
$x^2 = 144$

Logo, a área do triângulo será:

$A = \frac{x^2}{2}$
$A = \frac{144}{2}$
$A = 72$

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. PUC-Rio**



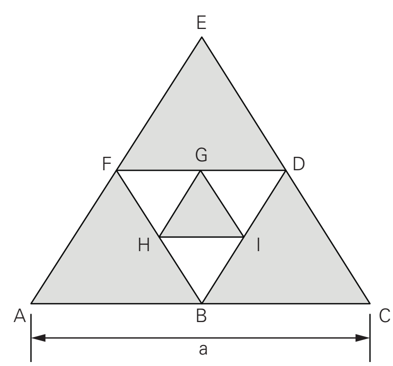

Na figura, temos que:

- O triângulo ABC é retângulo em A.
- M é o ponto médio do lado BC.
- N é o ponto médio do lado AC.
- P é o ponto médio do lado AB.

Nessas condições, a área do quadrilátero MBAN é:

**a)** a mesma área do triângulo AMC.
**b)** a metade da área do triângulo ABC.
**c)** a quinta parte da área do triângulo MNC.
**d)** o dobro da área do triângulo AMC.
**e)** o triplo da área do triângulo MNC.

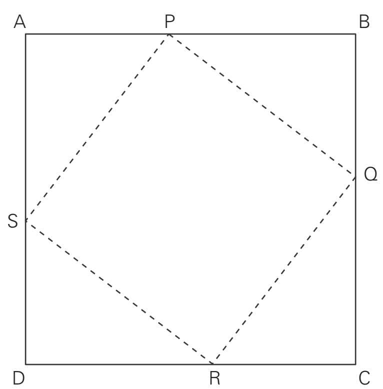
**8. CFTMG** – Na figura abaixo, todos os triângulos são equiláteros.




A soma das áreas sombreadas é

**a)** $\frac{7\sqrt{3}}{16}a^2$.
**b)** $\frac{13\sqrt{3}}{16}a^2$.
**c)** $\frac{7\sqrt{3}}{32}a^2$.
**d)** $\frac{13\sqrt{3}}{64}a^2$.

**9. PUC-Rio** – Considere um quadrado ABCD, de cartolina e de lado 70 cm (conforme figura abaixo).

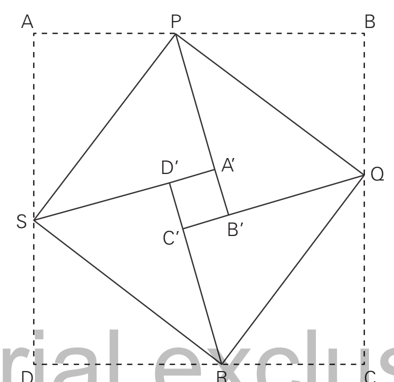



Temos que P, Q, R e S pertencem aos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, e que os segmentos AP, BQ, CR e DS medem 30 cm cada um.

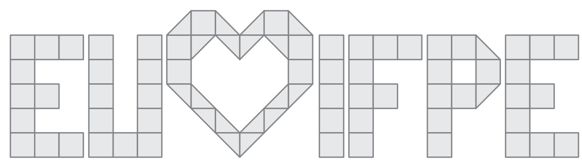
**a)** Calcule a área do triângulo APS.

**b)** Calcule a área do quadrado PQRS.

**c)** Dobramos a folha ao longo de PQ, QR, RS e SP, de tal forma que os triângulos BPQ, CQR, DRS e ASP venham a ocupar o interior do quadrado PQRS, conforme figura abaixo. Sejam A′, B′, C′ e D′ as novas posições dos vértices destes triângulos. Calcule a medida do lado do quadrado A′B′C′D′.



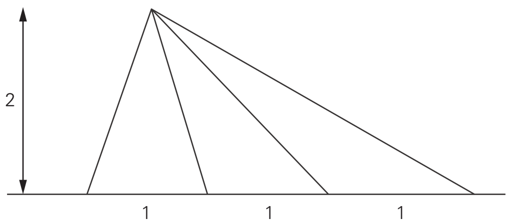

**10. IFPE** – Os estudantes do curso de Saneamento do campus Recife estão construindo um ladrilho em homenagem ao IFPE, baseado no esboço abaixo.



As cerâmicas escolhidas são quadradas, com 20 cm de lado, e, para formar os triângulos do esboço, realizaram um corte em uma das diagonais da cerâmica, sem perda de material. Se o preço da cerâmica escolhida é de R$ 12,50 por metro quadrado, qual o custo com cerâmica dessa obra?

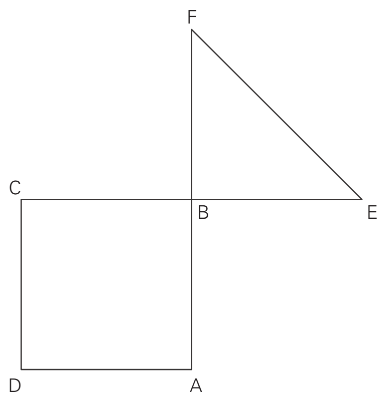
**a)** R$ 34,00
**b)** R$ 32,00
**c)** R$ 33,00
**d)** R$ 35,00
**e)** R$ 36,50

**11. Ifal** – A soma das áreas de todos os triângulos que podemos formar na figura a seguir é igual a




**a)** 3 **b)** 4 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 10

**12. USF** – Na figura a seguir, ABCD é um quadrado, BEF é um triângulo e $\overline{AF} \perp \overline{CE}$. Sabendo que a medida do segmento $\overline{AF}$ é 12 cm e que $\overline{AB} = \overline{BE}$, calcule a medida do segmento $\overline{EF}$, de modo que a área do triângulo seja a metade da área do quadrado.



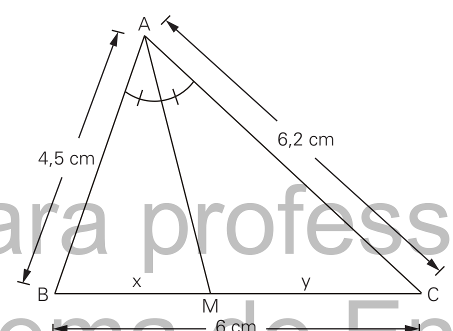

**13. Uece** – Os pontos médios dos lados de um triângulo equilátero cuja medida da área é $9\sqrt{3}$ m² são ligados dividindo-se o triângulo em quatro outros triângulos equiláteros congruentes. A medida da altura de cada um destes triângulos menores é

**a)** $\sqrt{6,75}$ m.
**b)** $\sqrt{6,25}$ m.
**c)** $\sqrt{6,95}$ m.
**d)** $\sqrt{6,45}$ m.

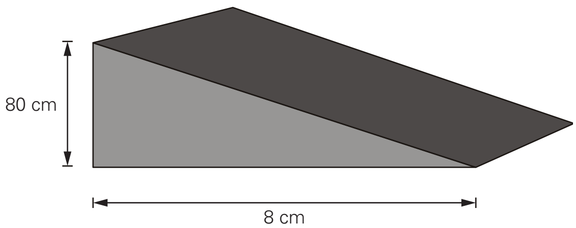
**14. UFSC** – Assinale a(s) proposição(ões) correta(s):

**01)** Os vários órgãos de defesa do consumidor, assim como o Inmetro, têm denunciado irregularidades como, por exemplo, o peso real do produto ser inferior ao indicado na embalagem. Se a diferença entre o peso real e o peso anunciado na embalagem de uma determinada marca de feijão é de 13,60 g por cada quilograma e o preço do kg ao consumidor é de R$ 3,25, então o ganho indevido por tonelada é de R$ 442,00.

**02)** O valor numérico de x na figura abaixo é x = 2,52 cm.



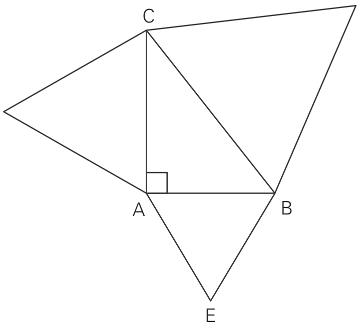
**04)** As políticas de inclusão para deficientes, especificamente para os cadeirantes, destacam a necessidade de rampas para o acesso do usuário de cadeira de rodas e que as mesmas, segundo as normas técnicas, devem ter uma inclinação de, no máximo, 8,33%, ou seja, para cada metro horizontal subir 8,33 cm na vertical. A rampa da figura abaixo cumpre a norma especificada acima.




**08)** Pode-se definir divisão áurea como sendo a divisão de um segmento de reta em duas partes, de tal maneira que a razão entre a parte maior e a parte menor seja aproximadamente igual a 1,6. Um retângulo se diz dourado quando possui seus lados na razão áurea, isto é, seus lados medem l e 1,6l. Assim, se o lado menor de um retângulo dourado for 3 unidades de comprimento, então a área desse retângulo será igual a 14,4 unidades de área.

**16)** A soma dos coeficientes do binômio $(2a - 3b)^5$ é 1.

**15. Udesc** – Em um triângulo retângulo ABC são construídos três triângulos equiláteros, conforme a figura.




Com base na informação e na figura, analise as proposições.

I. A soma das áreas dos triângulos ACD e ABE é igual à área do triângulo CBF.

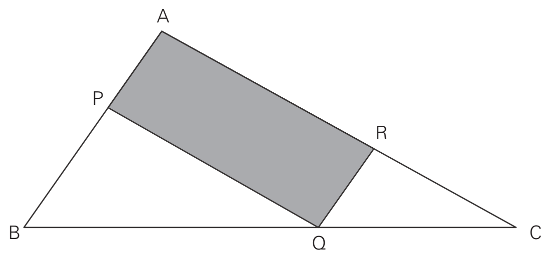
II. Se a área do triângulo ABC é 6 $cm^2$ e a altura do triângulo CBF é $\sqrt{30}$ cm, então o perímetro do triângulo ABC é $2 \cdot \left(4+\sqrt{10}\right)$ cm.

III. Se o triângulo ABC for isósceles, então a soma dos comprimentos dos segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{BF}$ é igual ao comprimento do segmento $\overline{DE}$.

Assinale a alternativa **correta**.

**a)** Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
**b)** Somente a afirmativa I é verdadeira.
**c)** Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
**d)** Somente a afirmativa II é verdadeira.
**e)** Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.

**16. Epcar (adaptado)** – Considere, no triângulo ABC abaixo, os pontos $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{BC}$, $R \in \overline{AC}$, e os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ paralelos, respectivamente, a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.




Sabendo que $\overline{BQ} = 3$ cm, $\overline{QC} = 1$ cm e que a área do triângulo ABC é 8 cm$^2$, então qual a área do paralelogramo hachurado, em cm$^2$?

**17. Fuvest** – O triângulo AOB é isósceles, com $\overline{OA} = \overline{OB}$, e ABCD é um quadrado. Sendo $\theta$ a medida do ângulo $A\hat{O}B$, pode-se garantir que a área do quadrado é maior do que a área do triângulo se

Dados os valores aproximados:

$tg14° \cong 0{,}2493$, $tg15° \cong 0{,}2679$

$tg20° \cong 0{,}3640$, $tg28° \cong 0{,}5317$

**a)** $14° < \theta < 28°$
**b)** $15° < \theta < 60°$
**c)** $20° < \theta < 90°$
**d)** $25° < \theta < 120°$
**e)** $30° < \theta < 150°$

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Epcar** C2-H8

Samuel possui 12 palitos iguais e resolveu formar um único triângulo por vez, usando os 12 palitos sem parti-los.

Ele verificou que é possível formar x triângulos retângulos, y triângulos isósceles, z triângulos equiláteros e w triângulos escalenos.

A soma $x + y + z + w$ é igual a

**a)** 7 **b)** 6 **c)** 5 **d)** 4 **e)** 8

**19. Enem** C2-H8

Uma fábrica de fórmicas produz placas quadradas de lados de medida igual a y centímetros. Essas placas são vendidas em caixa com N unidades e, na caixa, é especificada a área máxima S que pode ser coberta pelas N placas.

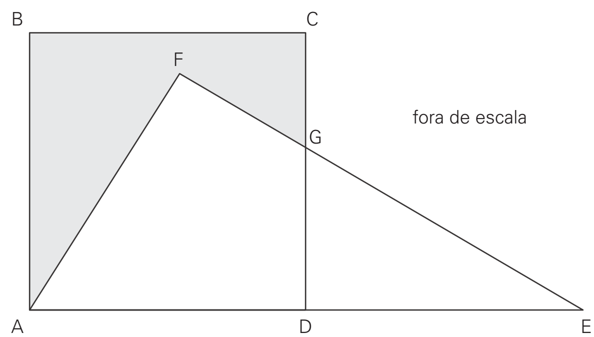
Por conta de uma demanda do mercado por placas maiores, a fábrica triplicou a medida dos lados de suas placas e conseguiu reuni-las em uma nova caixa, de tal forma que a área coberta S não fosse alterada.

A quantidade X de placas do novo modelo, em cada nova caixa, será igual a:

**a)** $\frac{N}{9}$ **b)** $\frac{N}{6}$ **c)** $\frac{N}{3}$ **d)** 3N **e)** 9N

**20. Famema** C2-H7

Na figura, ABCD é um quadrado de lado 6 cm e AFE é um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{AE}$. Considere que $\overline{AD} = \overline{AF}$ e $\overline{DE} = 4$ cm.




Sabendo que os pontos A, D e E estão alinhados, o valor da área destacada, em cm², é

**a)** 24.
**b)** 18.
**c)** 22.
**d)** 20.
**e)** 16.

22

# ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – TRIÂNGULOS II

- Fórmula de Heron
- Área de um triângulo em função da circunferência inscrita
- Fórmula da área em função do raio da circunferência circunscrita
- Áreas dos triângulos

**HABILIDADES**

- Identificar os elementos do triângulo.
- Aplicar as expressões referentes ao cálculo de áreas na resolução de situações-problema.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solução de problemas do cotidiano.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.

Heron de Alexandria e a eolípila.

## Introdução

Heron de Alexandria, sábio matemático e engenheiro grego no século I, não é só conhecido pela fórmula que leva seu nome, a qual se aplica no cálculo da área de um triângulo qualquer. Ele foi o primeiro a inventar um mecanismo que comprovou a influência da pressão do ar sobre corpos: a eolípila – o primeiro motor a vapor. Contudo, neste módulo, vamos nos ater aos estudos das áreas dos triângulos.

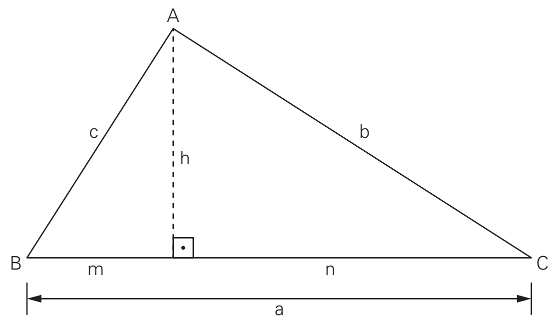
### FÓRMULA DE HERON

O semiperímetro (p) de um triângulo corresponde à metade de seu perímetro.

Então: $p = \dfrac{a + b + c}{2}$.

Heron de Alexandria demonstrou matematicamente que a área **A** de um triângulo de lados **a**, **b** e **c** e semiperímetro **p** equivale a:

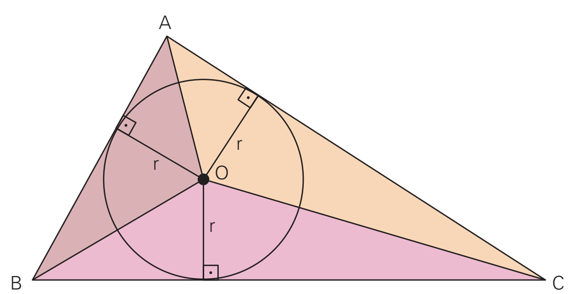
$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$




## ÁREA DE UM TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA

Pode-se demonstrar que a área de um triângulo **ABC** de semiperímetro **p** circunscrito em uma circunferência de raio **r** e centro **O** é dada por:

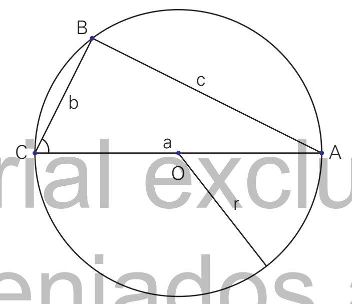
$$A = p \cdot r$$




## ÁREA DE UM TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DO RAIO DA CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA

A área de um triângulo **ABC** de lados **a**, **b** e **c**, inscrito em uma circunferência de raio **r**, é dada por:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r}$$




Vamos analisar uma demonstração.

Considere um triângulo **ABC** inscrito em uma circunferência de raio **r** e centro **O**.

Estudamos anteriormente que a área do triângulo **ABC** pode ser calculada por: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\hat{C}$ (Eq. 1)

Usando a lei dos senos, podemos escrever: $\frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2r \rightarrow \text{sen}\hat{C} = \frac{c}{2r}$ (Eq. 2)

Substituindo a Eq. 2 na Eq. 1, temos: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{c}{2r} = \frac{1}{2 \cdot 2r} \cdot a \cdot b \cdot c \therefore A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r}$

## ÁREA DOS TRIÂNGULOS

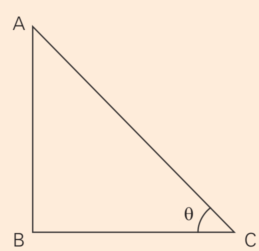
Em módulos anteriores, vimos as seguintes formas de calcular a área do triângulo:

- $A = \frac{b \cdot h}{2}$ (triângulo qualquer)
- $A = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2}$ (triângulo qualquer)
- $A = \frac{b \cdot c}{2}$ (triângulo retângulo)
- $A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ (triângulo equilátero)

Assim, com o cálculo das áreas dos triângulos inscritos e circunscritos em uma circunferência e o uso da fórmula de Heron, completamos os estudos dos cálculos das áreas dos triângulos.

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**1. Acafe** – O triângulo ABC da figura abaixo é retângulo. As medidas, em metros, de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são $(x + 8)$ e $3x$, respectivamente. Se $\text{sen}\theta - 3\cos\theta = 0$, então a área do triângulo retângulo ABC, em metros quadrados, é um número compreendido entre:




**a)** 12 e 13.
**b)** 13 e 14.
**c)** 14 e 15.
**d)** 11 e 12.

**Resolução**

Desenvolvendo a equação trigonométrica dada, temos:

$\text{sen}\theta = 3\cos\theta$

$$\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = 3$$

$$\text{tg}\theta = 3$$

$$\frac{x+8}{3x} = 3$$

$$x + 8 = 9x$$

$$x = 1$$

Substituindo o valor de x na fórmula da área do triângulo, obtemos:

$$S = \frac{3x \cdot (x+8)}{2} = \frac{3 \cdot 9}{2}$$

$$S = 13{,}5$$

**2. Sistema Dom Bosco** – Calcule a área de um triângulo com lados medindo 12, 15 e 21. Nesses casos, a fórmula de Heron auxilia os cálculos de área do triângulo.

**Resolução**

$$p = \frac{12+15+21}{2} = 24$$

$$A = \sqrt{24 \cdot (24-12) \cdot (24-15) \cdot (24-21)}$$

$$A = \sqrt{24 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 3}$$

$$A = \sqrt{7\,776}$$

$$A \cong 88{,}18$$

A área do triângulo é de aproximadamente 88,18 m².

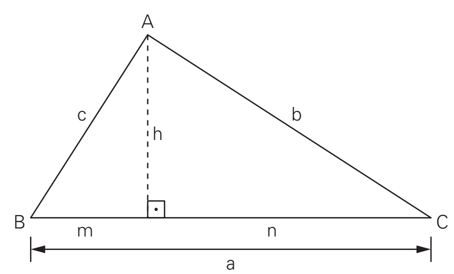
# ROTEIRO DE AULA

## ÁREAS DE FIGURAS PLANAS - TRIÂNGULOS II

### FÓRMULA DE HERON

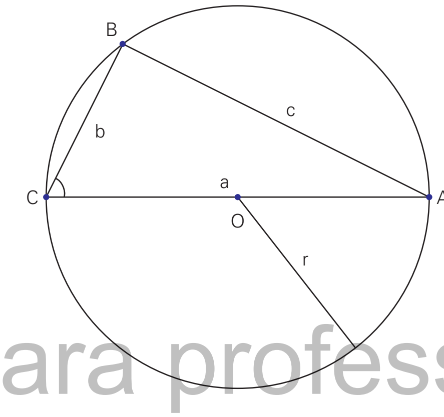
$p = \dfrac{a + b + c}{2}$

$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$



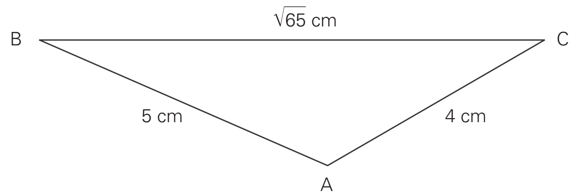

$A = p \cdot r$

$A = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r}$



## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. FGV (adaptado)** – O triângulo ABC possui medidas conforme indica a figura a seguir.




Qual a área desse triângulo em cm²?

Podemos utilizar a fórmula de Heron:

$$p = \frac{5 + 4 + \sqrt{65}}{2} = \frac{9 + \sqrt{65}}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{9+\sqrt{65}}{2} \cdot \left(\frac{9+\sqrt{65}}{2} - 5\right) \cdot \left(\frac{9+\sqrt{65}}{2} - 4\right) \cdot \left(\frac{9+\sqrt{65}}{2} - \sqrt{65}\right)}$$

$$S = \sqrt{\frac{9+\sqrt{65}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{65}}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{65}}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{9-\sqrt{65}}{2}\right)}$$

$$S = \sqrt{\frac{81 - 65}{4} \cdot \left(\frac{65 - 1}{4}\right)}$$

$$S = \sqrt{\frac{16}{4} \cdot \left(\frac{64}{4}\right)}$$

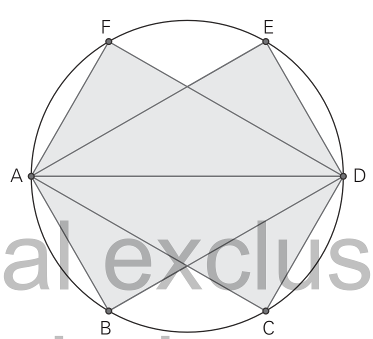
$$S = \sqrt{4 \cdot 16}$$

$$S = \sqrt{64}$$

$S = 8$ cm²

**2. Udesc** C2-H8

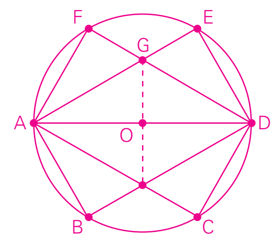
Os pontos A, B, C, D, E e F dividem uma circunferência em seis partes iguais, de tal modo que AD é um diâmetro dessa circunferência com medida de 12 cm, conforme mostra a figura.




Com base na figura, a área da região sombreada, em cm², é de:

**a)** $40\sqrt{3}$
**b)** $72\sqrt{3}$
**c)** $36\sqrt{3}$
**d)** $54\sqrt{3}$
**e)** $48\sqrt{3}$

Podemos considerar a figura, em que O é o centro da circunferência e G é o ponto de interseção de $\overline{AE}$ e $\overline{DF}$.




AFD, DEA, DCA e ABD são triângulos retângulos congruentes. Logo, como GO é perpendicular a $\overline{AD}$, podemos afirmar que a região sombreada é formada por 8 triângulos retângulos congruentes de catetos 6 cm e $2\sqrt{3}$ cm.

Sendo assim, vamos obter:

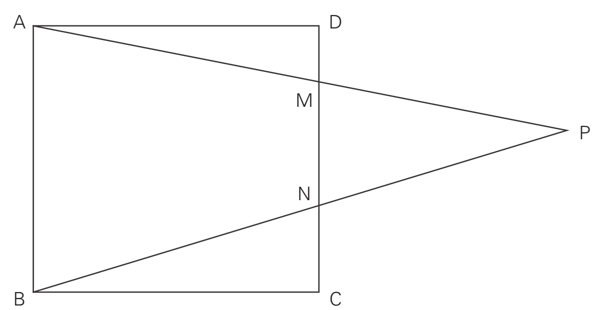
$$8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3}$$

$48\sqrt{3}$ cm²

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

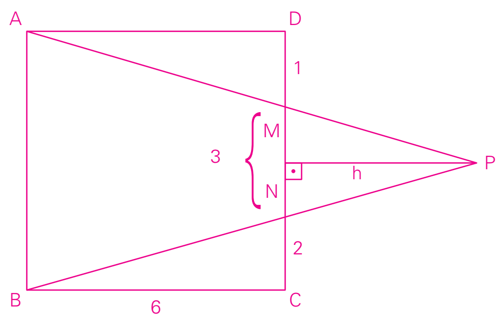
**3. FGV-RJ** – Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado 6, $\overline{CN} = 2$ e $\overline{DM} = 1$.




A área do triângulo PMN é

**a)** 9.
**b)** $\frac{25}{2}$.
**c)** 15.
**d)** 12.
**e)** $\frac{27}{2}$.

Considere a figura a seguir.




$\Delta PMN \sim \Delta PAB$

$\frac{3}{6} = \frac{h}{h+6}$

$6h = 3(h + 6)$

$6h = 3h + 18$

$6h - 3h = 18$

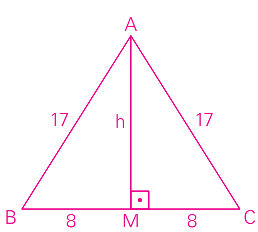
$h = \frac{18}{3}$

$h = 6$

Logo, a área do triângulo PMN será dada por: $A = \frac{3 \cdot 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$.

**4. Col. Naval-RJ** – Um triângulo isósceles ABC tem base BC = 16 cm e lados congruentes AB = AC = 17 cm. Qual o raio do círculo inscrito ao triângulo ABC em cm?

Inicialmente podemos calcular a altura e a área do triângulo ABC.




No triângulo AMC, temos:

$h^2 + 8^2 = 17^2$

$h^2 = 289 - 64$

$h^2 = 225$

$h = \sqrt{225}$

$h = 15$ cm

Sendo assim, a área do triângulo **AMC** será dada por:

$A = \frac{16 \cdot 15}{2}$

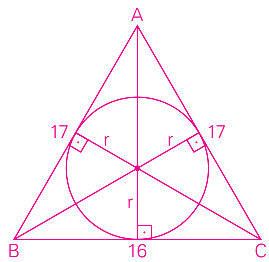
$A = \frac{240}{2}$

$A = 120$ cm².

Podemos considerar a circunferência de raio r inscrita no triângulo **ABC**.

Vamos considerar também três triângulos de bases $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, cujas alturas são os raios dessa circunferência.

A soma das áreas desses triângulos é igual à área do triângulo **ABC**.




$\frac{17 \cdot r}{2} + \frac{17 \cdot r}{2} + \frac{16 \cdot r}{2} = 120$

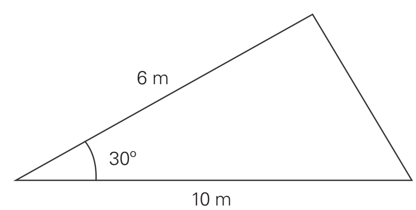
$\frac{50 \cdot r}{2} = 120$

$25 \cdot r = 120$

$r = \frac{120}{5}$

$r = \frac{24}{5}$

**5. EEAR** – Assinale a alternativa que representa, corretamente, a área do triângulo esboçado na figura abaixo.




**a)** 15 m²
**b)** $30\sqrt{2}$ m²
**c)** $15\sqrt{3}$ m²
**d)** $30\sqrt{3}$ m²

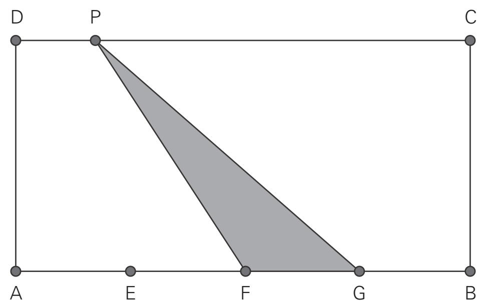
Podemos obter a área do triângulo **ABC** por:

$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \text{sen}30°$

$A = 30 \cdot \frac{1}{2}$

$A = 15$ m²

**6. UFRGS** – No retângulo ABCD a seguir, estão marcados os pontos E, F e G, de forma que o lado AB está dividido em 4 partes iguais e P é um ponto qualquer sobre o lado DC.




A razão entre a área do triângulo PFG e a área do retângulo ABCD é

**a)** $\frac{1}{8}$

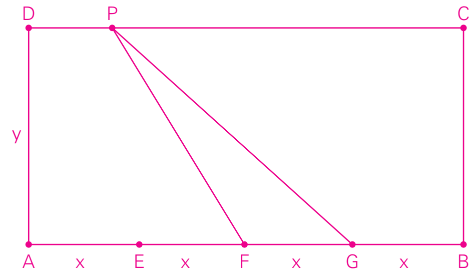
**b)** $\frac{1}{6}$

**c)** $\frac{1}{4}$

**d)** $\frac{1}{2}$

**e)** 1

Considere a figura a seguir.




$S_{PFG}$ = área do triângulo PFG

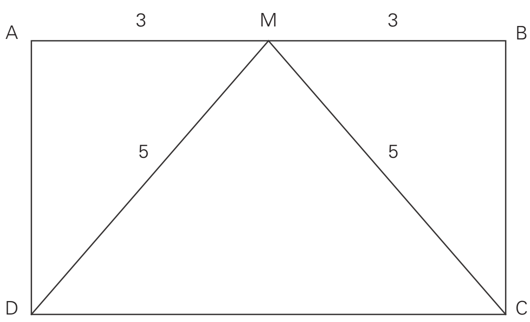
$S_{ABCD}$ = área do triângulo ABCD

$$\frac{S_{PFG}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}xy}{4xy}$$

$$\frac{S_{PFG}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8}$$

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. PUC-Rio** – Considere o retângulo ABCD.




Seja M o ponto médio do lado AB. Sabemos que AM = MB = 3 e que DM = MC = 5. Quanto vale a área do triângulo AMD?

**a)** 4

**b)** 6

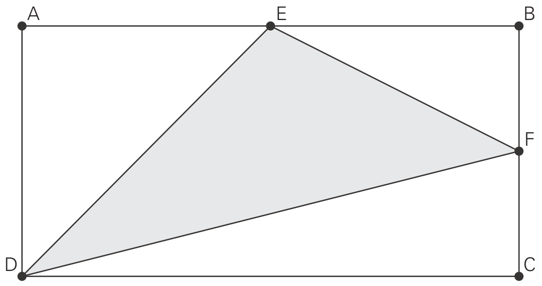
**c)** $\frac{15}{2}$

**d)** 10

**e)** 15

**8. UFPR (adaptado)** – Um triângulo possui lados de comprimento 2 cm e 6 cm e área de 6 cm². Qual é a medida do terceiro lado desse triângulo?

**9. UFJF** – No retângulo ABCD a seguir, tem-se que E e F são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.




A razão entre as áreas do triângulo DEF e do retângulo ABCD é

**a)** $\frac{2}{5}$

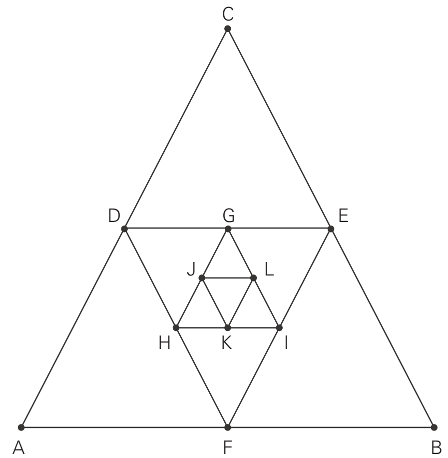
**b)** $\frac{3}{8}$

**c)** $\frac{1}{2}$

**d)** $\frac{5}{8}$

**e)** $\frac{3}{4}$

**10. CFTMG** – Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero de lado igual a 1 cm. Os pontos D, E e F são os respectivos pontos médios dos lados AC, BC e AB; os pontos G, H e I são os respectivos pontos médios dos lados DE, DF e EF; e os pontos J, K e L são os respectivos pontos médios dos lados GH, HI e GI.




A área do triângulo JKL, em cm², é

**a)** $\frac{\sqrt{3}}{256}$.

**b)** $\frac{\sqrt{3}}{512}$.

**c)** $\frac{\sqrt{3}}{768}$.

**d)** $\frac{\sqrt{3}}{1024}$.

**11. PUC-PR** – Um triângulo possui uma circunferência inscrita e outra circunscrita. Um dos lados do triângulo passa pelo centro da circunferência circunscrita e a soma das medidas dos outros lados é igual a s. Qual é a medida da soma dos comprimentos das duas circunferências?

**a)** $\frac{\pi s}{2}$

**b)** $\pi s$

**c)** $\frac{2\pi s}{3}$

**d)** $2\pi s$

**e)** $\frac{3\pi s}{2}$

**12. Col. Naval-RJ** – Seja ABC um triângulo de lados medindo 8, 10 e 12. Sejam M, N e P os pés das alturas traçadas dos vértices sobre os lados desses triângulos. Sendo assim, o raio do círculo circunscrito ao triângulo MNP é

**a)** $\frac{5\sqrt{7}}{7}$

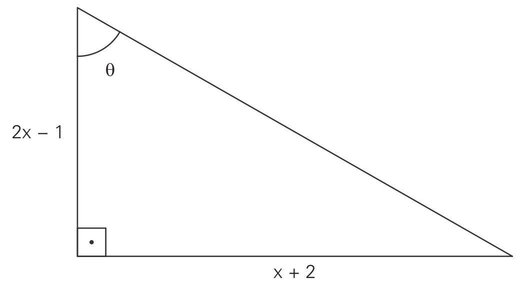
**b)** $\frac{6\sqrt{7}}{7}$

**c)** $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

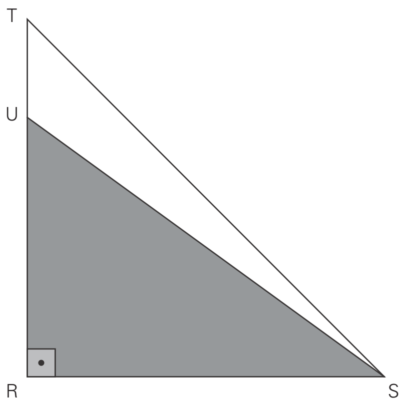
**d)** $\frac{9\sqrt{7}}{7}$

**e)** $\frac{10\sqrt{7}}{7}$

**13. UPE (adaptado)** – A medida da área do triângulo retângulo representado a seguir é de 12,5 $cm^2$. Qual é o valor aproximado do seno do ângulo "$\theta$"? Considere $\sqrt{2} = 1{,}4$.

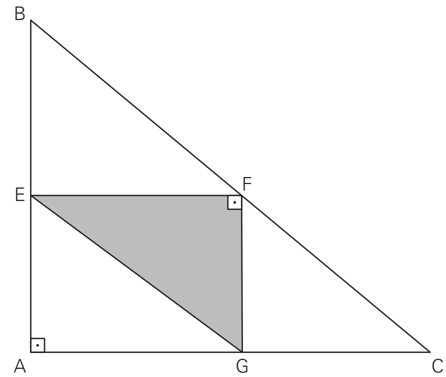


**14. UPE** – No triângulo SRT representado a seguir os lados RT e RS têm medidas iguais. Sabendo que o segmento RU mede 6 cm e o segmento ST mede $8\sqrt{2}$ cm, a área do triângulo SRU é quantos por cento da área do triângulo SRT?




**a)** 60%
**b)** 70%
**c)** 75%
**d)** 80%
**e)** 85%

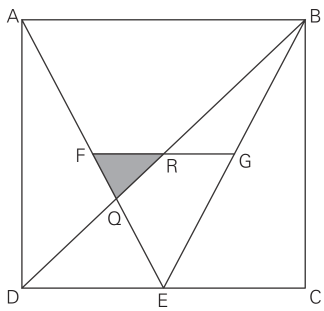
**15. Vunesp** – Unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo retângulo ABC, obtém-se outro triângulo retângulo EFG, conforme mostra a figura.




Sabendo que AB = 12 cm e que BC = 20 cm, é correto afirmar que a área do triângulo EFG é, em cm², igual a

**a)** 40.
**b)** 36.
**c)** 30.
**d)** 28.
**e)** 24.

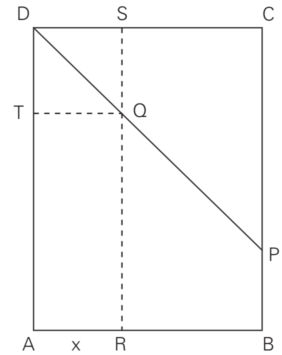
**16. PUC-SP** – A figura mostra um quadrado ABCD de 8 cm de lado, com os pontos E, F e G sendo pontos médios dos segmentos $\overline{DC}$, $\overline{AE}$ e $\overline{BE}$, respectivamente. O ponto R é ponto médio da diagonal $\overline{BD}$ e do segmento $\overline{FG}$, e o ponto Q pertence à intersecção dos segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{AE}$.




Fora de escala

Qual a área do triângulo FQR assinalado na figura?

**17. Fuvest-SP** – O retângulo ABCD representado na figura tem lados de comprimento AB = 3 e BC = 4. O ponto P pertence ao lado $\overline{BC}$ e BP = 1. Os pontos R, S e T pertencem aos lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, respectivamente. O segmento $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{AD}$ e intercepta $\overline{DP}$ no ponto Q. O segmento $\overline{TQ}$ é paralelo a $\overline{AB}$.




Sendo x o comprimento de $\overline{AR}$, o maior valor da soma das áreas do retângulo ARQT, do triângulo CQP e do triângulo DQS, para x variando no intervalo aberto ]0, 3[, é

**a)** $\frac{61}{8}$

**b)** $\frac{33}{4}$

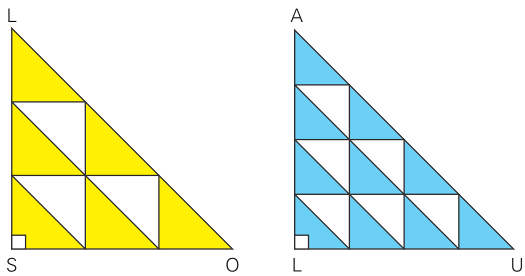
**c)** $\frac{17}{2}$

**d)** $\frac{35}{4}$

**e)** $\frac{73}{8}$

**18. Vunesp** C2-H8

Os polígonos SOL e LUA são triângulos retângulos isósceles congruentes. Os triângulos retângulos brancos no interior de SOL são congruentes, assim como também são congruentes os triângulos retângulos brancos no interior de LUA.

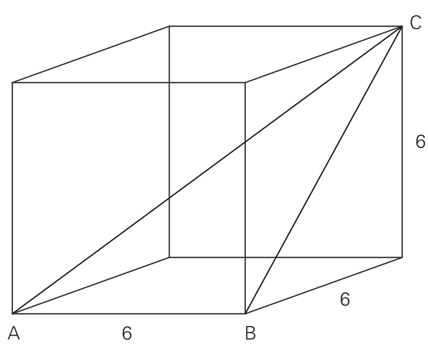



A área da superfície em amarelo e a área da superfície em azul estão na mesma unidade de medida. Se x é o número que, multiplicado pela medida da área da superfície em amarelo, resulta na medida da área da superfície em azul, então x é igual a

**a)** $\frac{16}{15}$
**b)** $\frac{15}{16}$
**c)** $\frac{9}{10}$
**d)** $\frac{24}{25}$
**e)** $\frac{25}{24}$

**19. Ulbra** C2-H7

A figura a seguir representa um cubo de lado medindo 6 cm e um triângulo ABC.

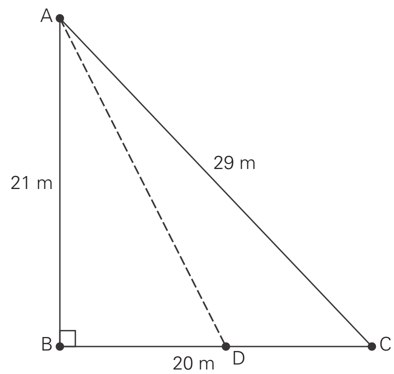



A área desse triângulo mede

**a)** $36\sqrt{2}$ cm².
**b)** $18\sqrt{2}$ cm².
**c)** $24\sqrt{2}$ cm².
**d)** $12\sqrt{2}$ cm².
**e)** $6\sqrt{2}$ cm².

**20. UFU** C2-H7

Dois irmãos herdaram um terreno que, conforme consta no registro de imóvel, pode ser representado pelo triângulo retângulo ABC da figura a seguir.




Os irmãos pretendem murar esse terreno e, ao mesmo tempo, dividi-lo por um muro, representado pelo segmento AD, em dois terrenos triangulares de mesma área. O preço de construção do metro quadrado de muro foi orçado em R$ 90,00, e em toda extensão o muro terá 3 m de altura.

A parte inteira do custo da construção do muro, em milhares de reais, é

**a)** 25
**b)** 23
**c)** 24
**d)** 26
**e)** 22

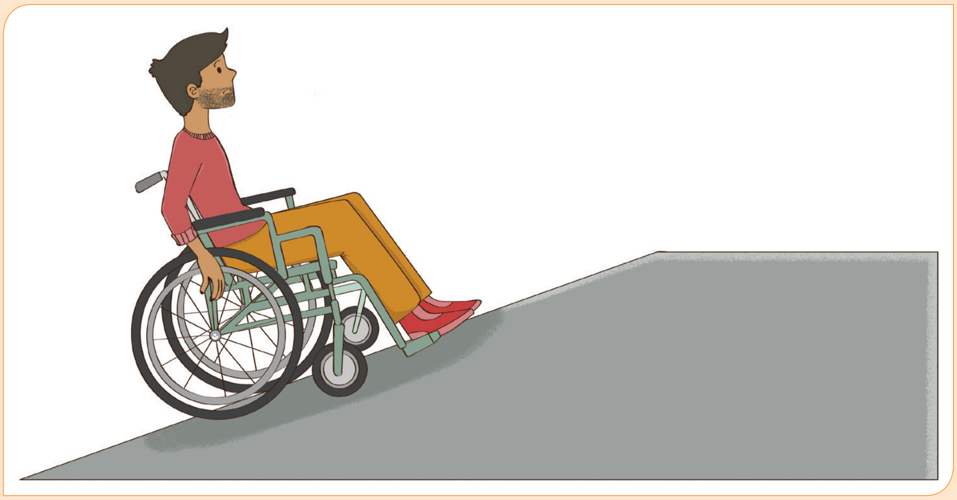
# ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – TRAPÉZIOS E LOSANGOS

23

- Área de um trapézio
- Área de um losango

**HABILIDADES**

- Identificar os elementos do trapézio.
- Identificar os elementos do losango.
- Aplicar as expressões referentes ao cálculo de áreas na resolução de situações-problema.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solução de problemas do cotidiano.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.



Rampa de acessibilidade para pessoas com deficiência e/ou dificuldades de locomoção.

## Introdução

A acessibilidade é um direito, também previsto no Estatuto da Pessoa com Deficiência, que possibilita ao indivíduo viver de forma independente e exercer seus direitos de cidadania e de participação social. Apesar de nos depararmos com rampas de acesso em muitos locais, ainda existe grande quantidade de espaços que não são adaptados para pessoas com deficiência.

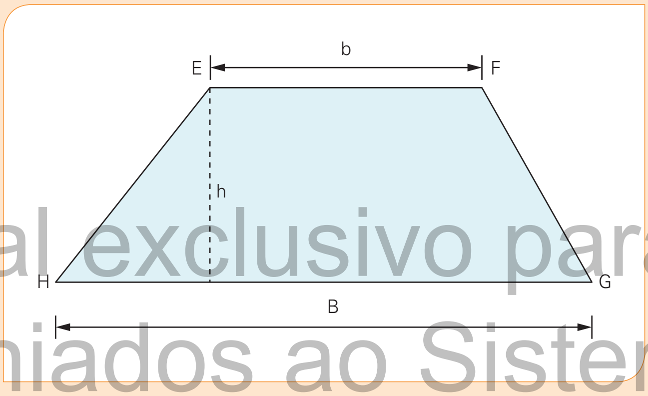
O corte lateral de rampas tem geralmente o formato trapezoidal, sendo os trapézios e losangos o foco deste módulo.

### ÁREA DE UM TRAPÉZIO

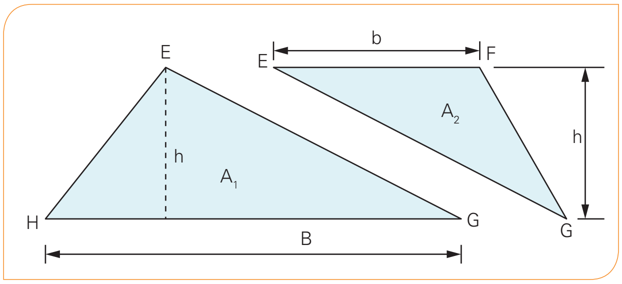
A área de um trapézio é igual ao produto da medida da altura pela média das medidas das bases.

Vamos analisar uma demonstração.

Dado o trapézio **EFGH** de altura que mede **h**, no qual as bases $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ medem **b** e **B**, respectivamente, sua área total mede **A**.



Traçando a diagonal $\overline{FH}$, o trapézio é decomposto em dois triângulos **EGH** e **EFG**, cuja soma das áreas $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$ resulta na área do trapézio.




Logo, temos:

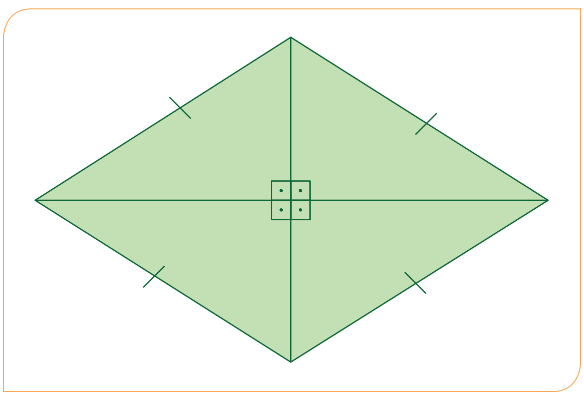
$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{Bh + bh}{2} = \frac{(B + b)}{2} \cdot h$$

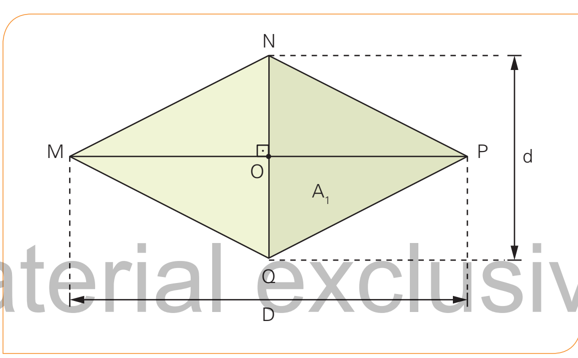
$$\boxed{A = \frac{(B + b)}{2} \cdot h}$$

## ÁREA DE UM LOSANGO

O losango é um paralelogramo que tem os lados de mesma medida. Além disso, suas duas diagonais são perpendiculares entre si.



Contudo, para calcularmos a área do losango, podemos dividi-lo em quatro triângulos retângulos congruentes.




Logo, a área do losango **MNPQ** é igual à soma das áreas dos triângulos retângulos.

$$A = 4 \cdot A_1$$

$$A = 4 \cdot \frac{\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2} = 4 \cdot \frac{D \cdot d}{8} = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**1. CP2** – A figura 1 a seguir tem dois trapézios e um triângulo retângulo que formam o quadrado ABCD, cujo lado mede 30 cm.

Prolongando os segmentos CD e BM, encontramos o ponto G, como mostra a figura 2.

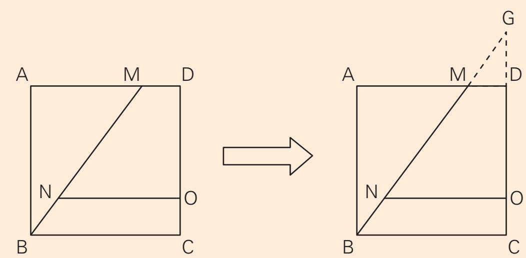



Figura 1 Figura 2

Sabendo-se que $\frac{\overline{DM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{1}{2}$, calcule:

**a)** A medida do segmento OC.
**b)** A medida do segmento GD.
**c)** A área do trapézio MNOD.

**Resolução**

a) DC = 30 cm

Logo, OD = DC – OC = 30 – OC

$$\frac{OC}{OD} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{OC}{30 - OC} = \frac{1}{2} \rightarrow 2OC = 30 - OC$$

$\therefore$ OC = 10 cm

b) MD = OC = 10 cm

$$\frac{MD}{BC} = \frac{GD}{GC} \rightarrow \frac{10}{30} = \frac{GD}{30 + GD} \rightarrow 30 \cdot GD =$$

$$= 300 + GD \rightarrow 20 \cdot GD = 300$$

$\therefore$ GD = 15 cm

c) MD = OC = 10 cm

$$\frac{MD}{NO} = \frac{GD}{GO} \rightarrow \frac{10}{NO} = \frac{15}{20 + 15} \rightarrow 15 \cdot NO = 350 \rightarrow$$

$$\rightarrow NO = \frac{70}{3}$$

Agora, podemos calcular a área do trapézio MNOD.

$$A = \frac{(B + b)}{2} \cdot h = \frac{(NO + MD)}{2} \cdot OD =$$

$$= \frac{\left(\frac{70}{3} + 10\right)}{2} \cdot 20 = \frac{1000}{3}\ cm^2$$

$$A = \frac{1000}{3}\ cm^2$$

**2. Enem** C5-H21

A vazão do rio Tietê, em São Paulo, constitui preocupação constante nos períodos chuvosos. Em alguns trechos, são construídas canaletas para controlar o fluxo de água. Uma dessas canaletas, cujo corte vertical determina a forma de um trapézio isósceles, tem as medidas especificadas na figura I. Neste caso, a vazão da água é de 1 050 $m^3/s$. O cálculo da vazão, Q em $m^3/s$, envolve o produto da área A do setor transversal (por onde passa a água), em $m^2$, pela velocidade da água no local, v, em m/s, ou seja, $Q = Av$.

Planeja-se uma reforma na canaleta, com as dimensões especificadas na figura II, para evitar a ocorrência de enchentes.

Figura I

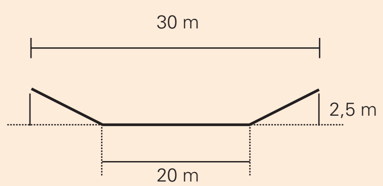
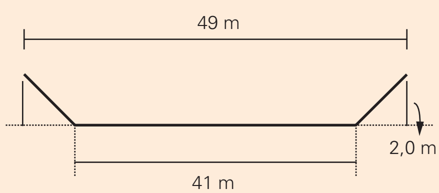



Figura II




Na suposição de que a velocidade da água não se alterará, qual a vazão esperada para depois da reforma na canaleta?

**a)** 90 $m^3/s$.

**b)** 750 $m^3/s$.

**c)** 1 050 $m^3/s$.

**d)** 1 512 $m^3/s$.

**e)** 2 009 $m^3/s$.

**Resolução**

Área da figura I $= \dfrac{(30 + 20) \cdot 2{,}5}{2} = 62{,}5\ m^2$.

Sendo v a velocidade da água, $1\,050 = v \cdot 62{,}5 \rightarrow v = 16{,}8$ m/s.

Área da figura II $= \dfrac{(49 + 41) \cdot 2}{2} = 90\ m^2$.

Logo, a nova vazão será igual a $90 \cdot 16{,}8 = 1512\ m^3/s$.

Então, $v = 1512\ m^3/s$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

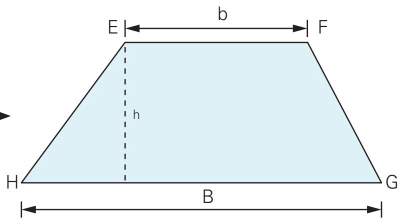
**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

# ROTEIRO DE AULA

## ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – TRAPÉZIOS E LOSANGOS

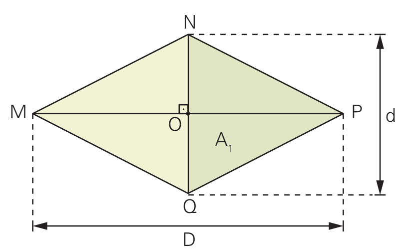
### Trapézio

$$A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h \longrightarrow$$




### Losango

$$A = \left(\frac{D \cdot d}{2}\right) \longrightarrow$$



## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Sistema Dom Bosco** – Qual é a área, em m², de um losango cuja diagonal maior mede 20 cm e cuja diagonal menor mede 10 cm?

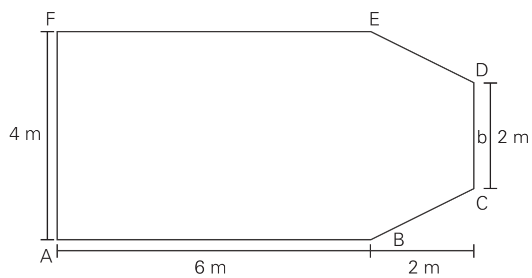
De acordo com o enunciado da questão, temos $D = 20\text{ cm} = 2 \cdot 10^{-1}\text{ m}$ e $d = 10\text{ cm} = 1 \cdot 10^{-1}\text{ m}$. Então é necessário apenas substituir esses valores na expressão da área.

$$A = \frac{2 \cdot 10^{-1} \cdot 1 \cdot 10^{-1}}{2}$$

$$A = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2} = 10^{-2}$$

$$A = 0{,}01\text{ m}^2$$

**2. UFJF** – Marcos comprou a quantidade mínima de piso para colocar em toda a sua sala, que tem o formato abaixo, e pagou R$ 48,00 o metro quadrado.




Quanto ele gastou comprando o piso para essa sala?

**a)** R$ 288,00
**b)** R$ 672,00
**c)** R$ 1.152,00
**d)** R$ 1.440,00
**e)** R$ 2.304,00

Podemos calcular da seguinte maneira:

$$S_{sala} = S_{AFEB} + S_{BEDC}$$

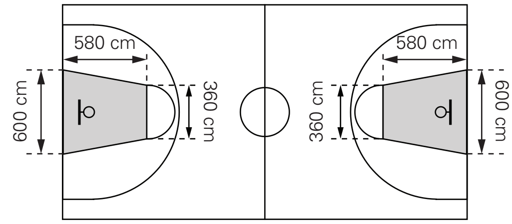
$$S_{sala} = 4 \cdot 6 + \frac{4+2}{2} \cdot 2$$

$$S_{sala} = 30\text{ m}^2$$

Custo $= 30 \cdot 48 = 1.440$ reais.

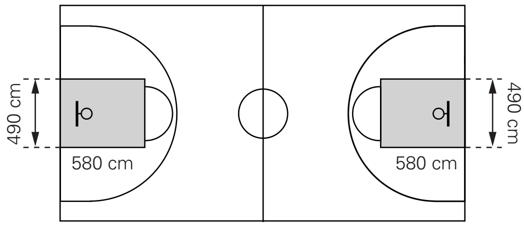
**3. Enem** C2-H9

O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.




Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender às orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.




Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

**a)** aumento de 5 800 cm².
**b)** aumento de 75 400 cm².
**c)** aumento de 214 600 cm².
**d)** diminuição de 63 800 cm².
**e)** diminuição de 272 600 cm².

Antes de ser modificada, a área de cada garrafão era de:

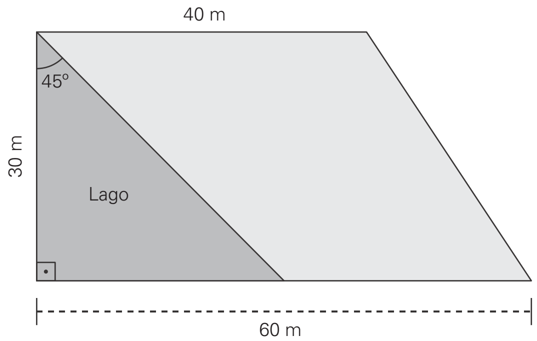
$$\frac{360 + 600}{2} \cdot 580 = 278\,400\text{ cm}^2$$

Depois da modificação, tal área passou a ser de: $490 \cdot 580 = 284\,200\text{ cm}^2$
Sendo assim, houve um aumento de $284\,200 - 278\,400 = 5\,800\text{ cm}^2$.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

**4. Feevale** – Supondo que, na praça representada pela figura a seguir, houve uma manifestação e que, para calcular o número de pessoas presentes, foi utilizado o número de quatro pessoas por metro quadrado ocupado, determine o número de pessoas presentes no ato, considerando que no lago não havia ninguém, mas o restante da praça estava ocupado.




**a)** 640 pessoas.
**b)** 1 240 pessoas.
**c)** 4 200 pessoas.
**d)** 4 800 pessoas.
**e)** 6 000 pessoas.

Vamos calcular da seguinte forma:

$S_{ocupada} = S_{total} - S_{lago}$

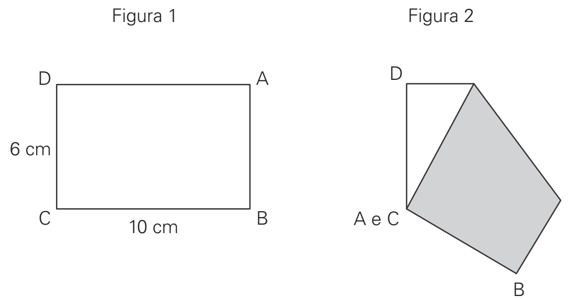
$S_{total} = \frac{40 + 60}{2} \cdot 30 = 1\,500 \text{ m}^2$

$S_{lago} = \frac{30 \cdot 30}{2} = 450 \text{ m}^2$

$S_{ocupada} = 1\,500 - 450 = 1\,050 \text{ m}^2$

Número de pessoas: $1\,050 \cdot 4 = 4\,200$ pessoas.

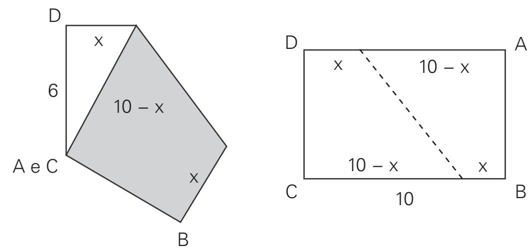
**5. PUC-Campinas** – Os lados de uma folha retangular ABCD de papel medem 10 cm e 6 cm, como indica a figura 1. Essa folha, que é branca de um dos lados e cinza do outro, será dobrada perfeitamente de tal forma que o vértice A irá coincidir com o vértice C, como mostra a Figura 2.




A área do trapézio cinza indicado na Figura 2, em $mc^2$, é igual a

**a)** 23. **b)** 30. **c)** 25. **d)** 40. **e)** 45.

Se abrirmos novamente a folha de papel, teremos:




Sendo assim, pode-se escrever:

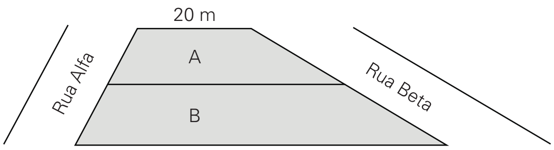
$B_{maior} = 10 - x$

$B_{menor} = x$

$h = 6$

$S = \frac{(10 - x + x) \cdot 6}{2} = \frac{60}{2} = 30$

**6. Uerj** – Dois terrenos, A e B, ambos com a forma de trapézio, têm as frentes de mesmo comprimento voltadas para a Rua Alfa. Os fundos dos dois terrenos estão voltados para a Rua Beta. Observe o esquema:




As áreas de A e B são, respectivamente, proporcionais a 1 e 2, e a lateral menor do terreno A mede 20 m. Calcule o comprimento x, em metros, da lateral maior do terreno B.

Sejam $h_a$ e $h_b$, respectivamente, as alturas dos trapézios A e B.

Sabendo que **A** e **B** são trapézios e que as frentes dos terrenos têm o mesmo comprimento, a lateral maior do terreno A (ou lateral menor do terreno B) é a base média do trapézio maior formado por A e B. Então, $h_A = h_B = h$. Logo:

$$\frac{\dfrac{2+\frac{x+20}{2}\cdot h}{2}}{\dfrac{\frac{x+20}{2}+x}{2}\cdot h} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x+60}{3x+20} = \frac{1}{2}$$

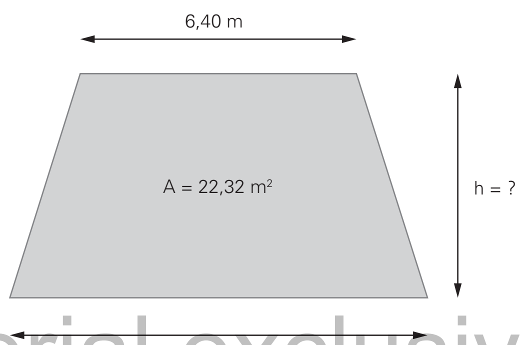
$x = 100$ m

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. Uece** – O palco de um teatro tem a forma de um trapézio isósceles cujas medidas de linhas de frente e de fundo são, respectivamente, 15 m e 9 m. Se a medida de cada uma de suas diagonais é 15 m, então a medida da área do palco, em m², é

**a)** 80.
**b)** 90.
**c)** 108.
**d)** 1182.

**8. IFSP (adaptado)** – Observe a figura abaixo.




Ela representa um painel de propaganda que tem a forma de um trapézio. Sua área é de 22,32 m² e as medidas das bases são 8,00 m e 6,40 m. Logo, qual a altura (h) desse painel?

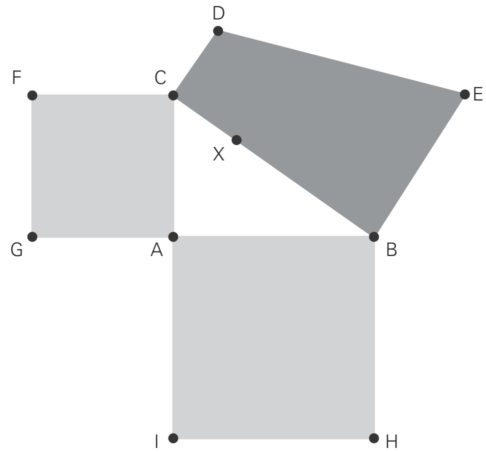
**9. FGV-RJ** – A área de um trapézio mede 1 800 cm². A altura desse trapézio mede 50 cm. Considere o problema de determinar as medidas das bases desse trapézio, sabendo que essas medidas, em centímetros, são números inteiros divisíveis por 8.

O número de soluções desse problema é:

**a)** 3.
**b)** 2.
**c)** 1.
**d)** 4.
**e)** 5.

**10. Uerj** – Considere na imagem abaixo:

- os quadrados ACFG e ABHI, cujas áreas medem, respectivamente, $S_1$ e $S_2$;
- o triângulo retângulo ABC;
- o trapézio retângulo BCDE, construído sobre a hipotenusa BC, que contém o ponto X.




Sabendo que CD = CX e BE = BX, a área do trapézio BCDE é igual a:

**a)** $\dfrac{S_1 + S_2}{2}$

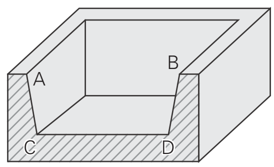
**b)** $\dfrac{S_1 + S_2}{3}$

**c)** $\sqrt{S_1 S_2}$

**d)** $\sqrt{(S_1)^2 + (S_2)^2}$

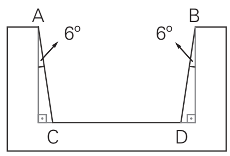
**11. Unesp** – A figura 1 indica o corte transversal em um molde usado para a fabricação de barras de ouro. A figura 2 representa a vista frontal da secção transversal feita no molde, sendo ABCD um trapézio isósceles com AC = BD = 10 cm.

Figura 1




Molde

Figura 2




Vista frontal do corte transversal feito no molde

Adote: sen 6° = 0,104; cos 6° = 0,994.

**a)** Calcule a diferença entre as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

**b)** Admitindo que a área do trapézio ABCD seja igual a 99,4 cm², calcule a soma das medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

**12. Uece** – Seja PQRS um trapézio isósceles cujas bases menor e maior são, respectivamente, os segmentos PQ e SR. Se M e N são, respectivamente, as projeções ortogonais de P e Q sobre SR e se a razão entre as medidas de SR e PQ é igual a três, então pode-se afirmar corretamente que a razão entre a área do trapézio e a área do quadrilátero PQNM é igual a

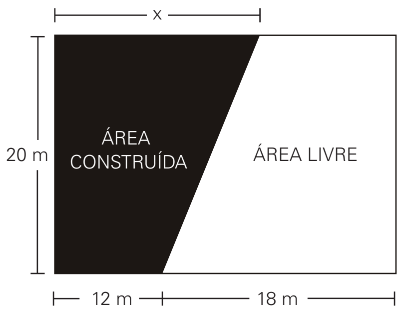
**a)** 3,0.

**b)** 1,5.

**c)** 2,0.

**d)** 2,5.

**13. EsPCEx** – As regras que normatizam as construções em um condomínio definem que a área construída não deve ser inferior a 40% da área do lote nem superior a 60% desta. O proprietário de um lote retangular pretende construir um imóvel de formato trapezoidal, conforme indicado na figura.

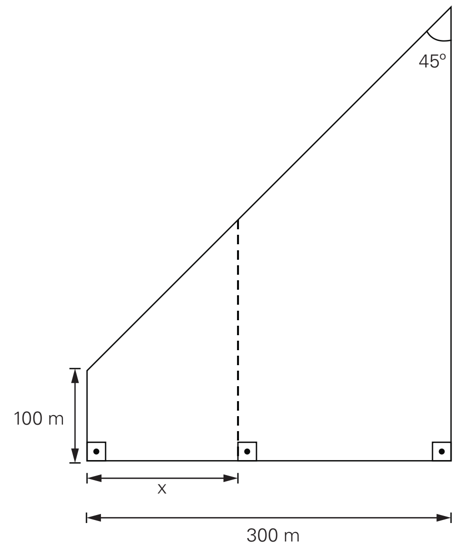



desenho ilustrativo – fora de escala

Para respeitar as normas acima definidas, assinale o intervalo que contém todos os possíveis valores de x.

**a)** [6, 10]
**b)** [8, 14]
**c)** [10, 18]
**d)** [16, 24]
**e)** [12, 24]

**14. UFG** – Um agricultor pretende dividir um terreno em duas partes que possuam a mesma área. A figura a seguir representa o terreno e a divisão deve ser feita ao longo da linha vertical tracejada.




Considerando-se o exposto, determinando o valor de x, com precisão de uma casa decimal, obtemos:

Dado: $\sqrt{34} = 5,83$

**a)** 191,5 m
**b)** 180,5 m
**c)** 117,5 m
**d)** 110,0 m
**e)** 108,2 m

**15. IME** – Seja um trapézio retângulo de bases a e b com diagonais perpendiculares. Determine a área do trapézio.

**a)** $\dfrac{ab}{2}$

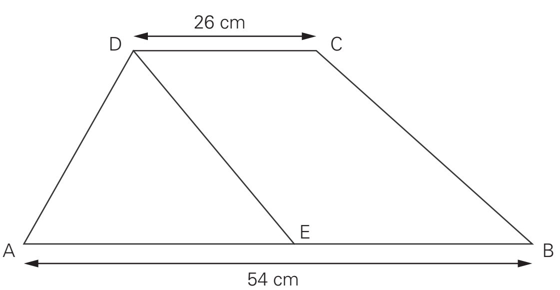
**b)** $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

**c)** $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$

**d)** $\left(\dfrac{2a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$

**e)** $\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)a^2b}$

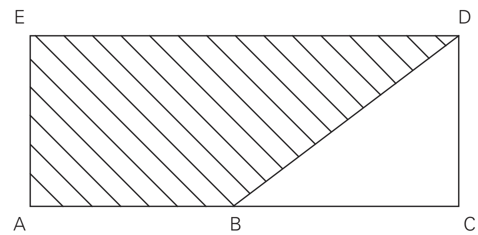
**16. UPE** – Na figura representada a seguir, o segmento DE divide o trapézio ABCD em duas figuras de mesma área.




Nessas condições, quanto mede o segmento AE?

**a)** 13 cm
**b)** 20 cm
**c)** 27 cm
**d)** 27 cm
**e)** 40 cm

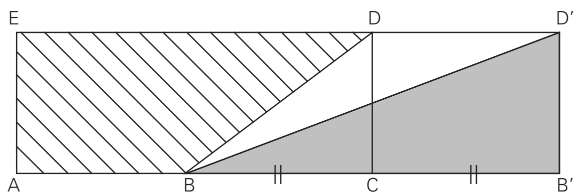
**17. PUC-Rio** – Fabio tem um jardim ACDE com o lado AC medindo 15 m e o lado AE medindo 6 m. A distância entre A e B é 7 m. Fabio quer construir uma cerca do ponto A ao ponto D passando por B. Veja a figura a seguir.




**a)** Se a cerca usada entre os pontos A e B custa 100 reais o metro e a cerca entre os pontos B e D custa 200 reais o metro, qual o custo total da cerca?

**b)** Calcule a área da região hachurada ABDE.

**c)** Considere o triângulo BCD apresentado na figura abaixo. Sabendo-se que o triângulo BB'D' possui cateto BB' = 2BC, calcule a área do triângulo BB'D'.



**18. Enem** C2-H9

Um fabricante recomenda que, para cada $m^2$ do ambiente a ser climatizado, são necessários 800 BTUh, desde que haja até duas pessoas no ambiente. A esse número devem ser acrescentados 600 BTUh para cada pessoa a mais, e também para cada aparelho eletrônico emissor de calor no ambiente. A seguir encontram-se as cinco opções de aparelhos desse fabricante e suas respectivas capacidades térmicas:

Tipo I: 10 500 BTUh

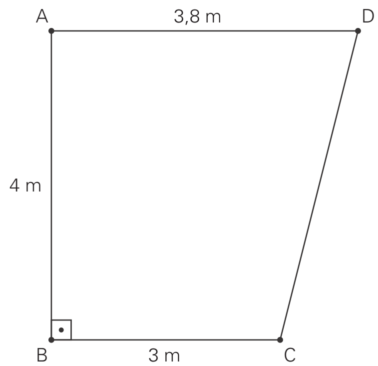
Tipo II: 11 000 BTUh

Tipo III: 11 500 BTUh

Tipo IV: 12 000 BTUh

Tipo V: 12 500 BTUh

O supervisor de um laboratório precisa comprar um aparelho para climatizar o ambiente. Nele ficarão duas pessoas, mais uma centrífuga que emite calor. O laboratório tem forma de trapézio retângulo, com as medidas apresentadas na figura:

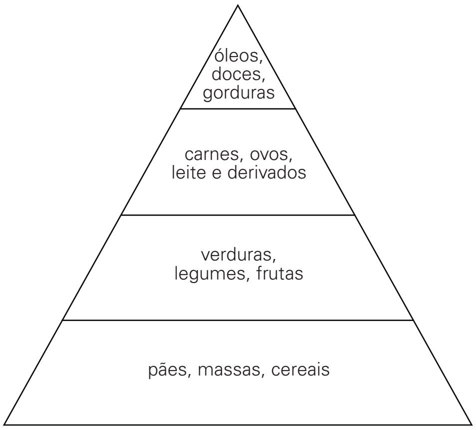



Para economizar energia, o supervisor deverá escolher o aparelho de menor capacidade térmica que atenda às necessidades do laboratório e às recomendações do fabricante.
A escolha do supervisor recairá sobre o aparelho do tipo

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

**19. UFG** C2-H9

Um recurso visual muito utilizado para apresentar as quantidades relativas dos diferentes grupos de alimentos na composição de uma dieta equilibrada é a chamada “pirâmide alimentar”, que usualmente é representada por um triângulo dividido em regiões, como na figura a seguir.

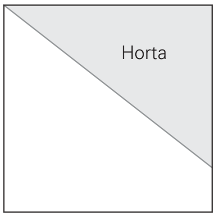


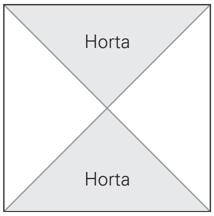

Considere que as regiões da figura dividem a altura do triângulo em partes iguais. No que se refere às áreas das regiões ocupadas por cada grupo de alimentos, o grupo com predominância de carboidratos ocupa

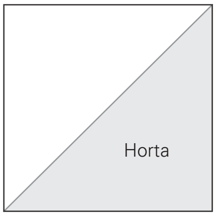
a) sete terços da área do grupo com predominância de proteínas.
b) cinco sétimos da área do grupo com predominância de fibras.
c) um sétimo da área do grupo com predominância de lipídios.
d) o dobro da área do grupo com predominância de proteínas.
e) cinco sétimos da área do grupo com predominância de vitaminas e sais minerais.

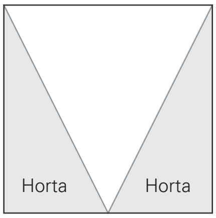
**20. IFPE** C2-H8

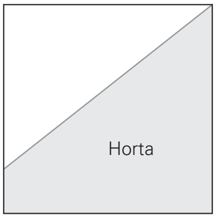
Os alunos do curso de Alimentos do campus Barreiros solicitaram ao diretor geral um terreno para produzir uma horta. O diretor autorizou o uso parcial de um terreno quadrangular à disposição no campus.
Para utilizar a maior área em sua horta, quais das opções abaixo é a melhor escolha?

**a)** 


**b)** 


**c)** 


**d)** 


**e)** 

# ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – CÍRCULOS I

24

- Círculo
- Área do círculo
- Área da coroa circular

**HABILIDADES**

- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos como solução de problemas do cotidiano.


ROMOLO TAVANI/ISTOCKPHOTO

Eclipse solar.

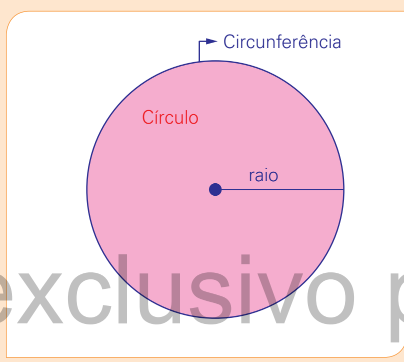
## Introdução

Um eclipse solar ocorre quando a Lua fica entre o Sol e a Terra, ocultando total ou parcialmente a luz solar por determinado tempo e projetando um cone de sombra em uma estreita faixa terrestre. No eclipse total, todo o disco solar é encoberto; no parcial, parte da área solar fica visível.

Neste módulo, vamos conhecer um pouco mais sobre as áreas dos círculos.

### CÍRCULO

Como estudamos em módulos anteriores, a figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo é a circunferência. O **círculo** corresponde à região interna da **circunferência**.

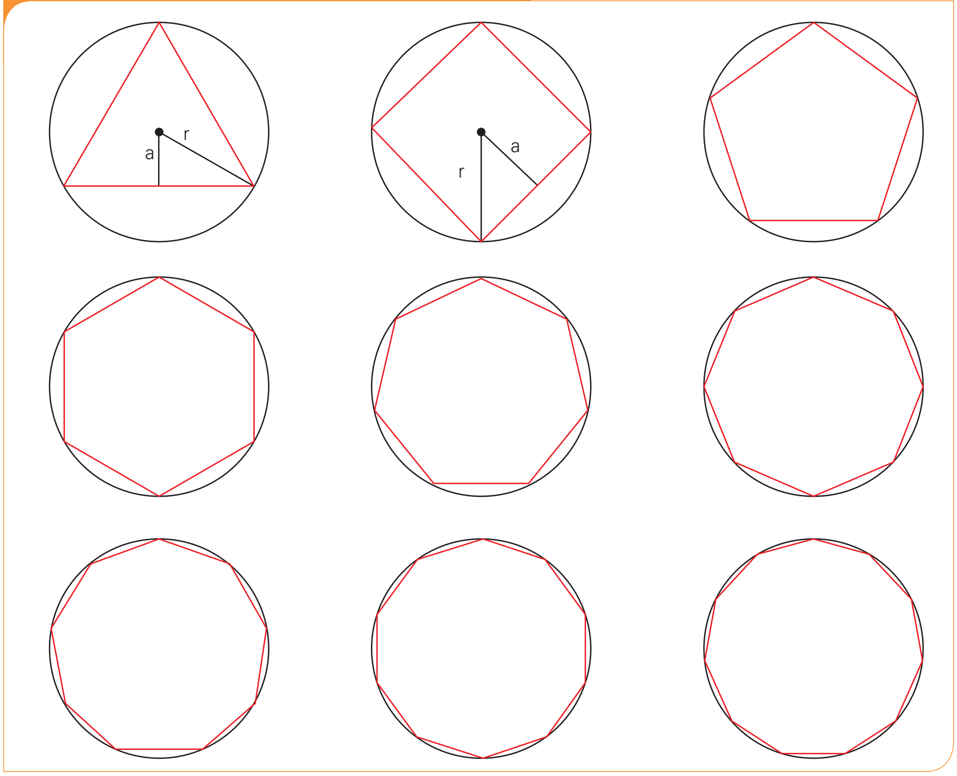



A circunferência e o círculo têm elementos comuns denominados diâmetro e raio, que servem para determinar o comprimento da circunferência e a área do círculo.

## ÁREA DE UM CÍRCULO

Considere uma sucessão de polígonos regulares de **n** lados inscritos em uma circunferência de raio **r**.

Polígonos regulares inscritos em uma circunferência




A área de um polígono regular é dada por: A = p · a, sendo **p** seu semiperímetro e **a** o apótema.

Nota-se que, com o aumento do número **n** de lados do polígono, o comprimento do apótema **a** cresce, tendendo ao valor do comprimento do raio, ao passo que o comprimento do lado desse polígono diminui. Dessa forma, quando o número de lados do polígono tende ao infinito (quantidade muito grande de lados), seu perímetro **2p** se torna aproximadamente igual ao comprimento da circunferência **2πr**.

Assim:

$a = r$

$2p = 2\pi r \rightarrow p = \pi r$

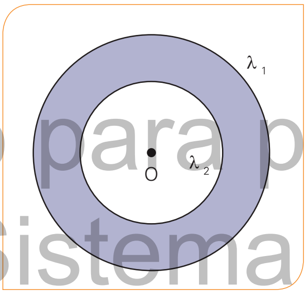
Como a área do polígono regular é dada por $A = p \cdot a$, obtemos:

$A = (\pi r) \cdot r = \pi r^2$

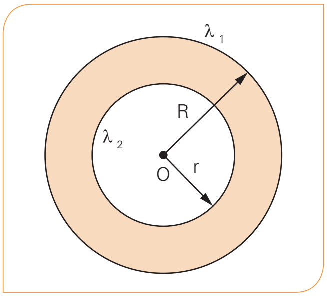
$$\boxed{A = \pi r^2}$$

## ÁREA DA COROA CIRCULAR

O conjunto de pontos que pertencem à região limitada pelas circunferências concêntricas $\lambda_1$ e $\lambda_2$ é denominado **coroa circular**.



A área da coroa circular de raios **R** e **r** é calculada como a diferença entre as áreas delimitadas pelas circunferências maior e menor:



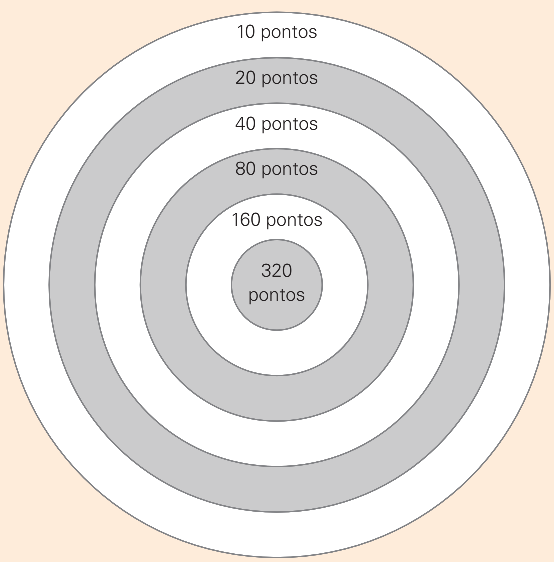

$$A = A_1 - A_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

Desse modo, temos:

$$A = \pi (R^2 - r^2)$$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1. Insper** – Esta figura mostra o alvo de uma academia de arco e flecha. A pontuação que um jogador recebe ao acertar uma flecha em cada uma das faixas circulares está indicada na respectiva faixa. O raio do círculo maior mede 60 cm, o do menor mede 10 cm e a diferença entre os raios de quaisquer dois círculos consecutivos é de 10 cm. Todos os círculos têm o mesmo centro.




A soma das áreas das faixas em cinza na figura é igual a

**a)** $900\pi$ cm²
**b)** $1\,100\pi$ cm²
**c)** $1\,300\pi$ cm²
**d)** $1\,500\pi$ cm²
**e)** $1\,700\pi$ cm²

**Resolução**

A área pedida é dada por:

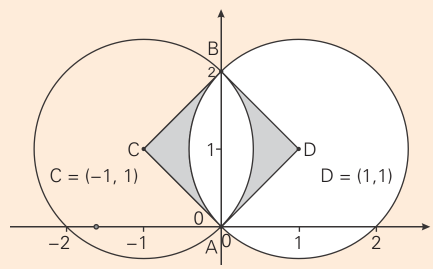
$\pi \cdot (50^2 - 40^2) + \pi (30^2 - 20^2) + \pi \cdot 10^2 =$

$= 900\pi + 500\pi + 100\pi$

$1\,500\pi$ cm²

$\therefore A = 1\,500\pi$ cm²

**2. UEL** – Uma indústria de café desenvolveu uma logomarca inspirada na bandeira do Brasil, como ilustrado no esboço a seguir.




O idealizador fez seu esboço em um plano cartesiano com unidades de medida em centímetros.

A partir das informações presentes nesse esboço, determine a área sombreada da logomarca. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados.

**Resolução**

A medida do raio da circunferência de centro em D é dada por: $r = d(A, D) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ cm

Então, podemos concluir que ABCD é um losango. Além disso, como as diagonais de ABCD são congruentes e perpendiculares, ABCD é um quadrado.

A área pedida corresponde à diferença entre as áreas do quadrado ABCD e o dobro da área do segmento circular determinado pela corda AB. Isto é:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2}{4} - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}\right) = 2 - (\pi - 2)$$

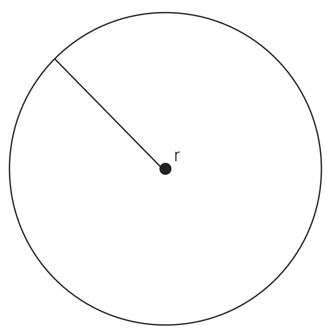
$(4 - \pi)$ cm²

# ROTEIRO DE AULA

## ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – CÍRCULOS I

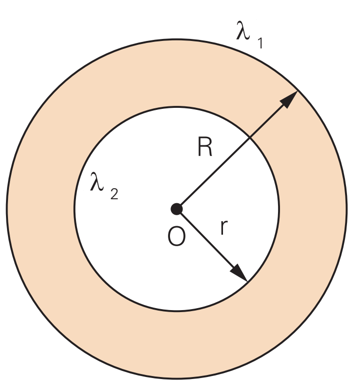
**Círculo**

$A =$ $\pi r^2$




**Coroa circular**

$A = \pi \cdot ($ $R^2 - r^2$ $)$



## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

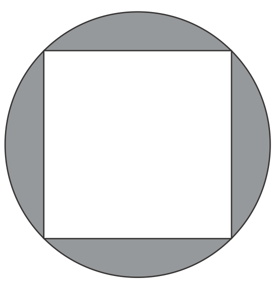
**1. Unisinos** – O quadrado de lado a e o círculo de raio r têm a mesma área. Então, podemos afirmar que

**a)** $a = r\pi^2$
**b)** $a = r\sqrt{\pi}$
**c)** $a = 2\pi r$
**d)** $a = \pi r$
**e)** $a = r$

Como sabemos que a área do quadrado é $a^2$ e que a área do círculo é $\pi r^2$, temos: $a^2 = \pi r^2 \rightarrow \sqrt{\pi r^2} \rightarrow a = r\sqrt{\pi}$.

**2. Enem** C2-H9

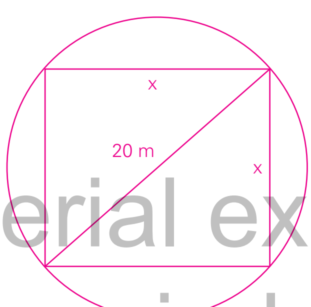
Um arquiteto deseja construir um jardim circular de 20 m de diâmetro. Nesse jardim, uma parte do terreno será reservada para pedras ornamentais. Essa parte terá a forma de um quadrado inscrito na circunferência, como mostrado na figura. Na parte compreendida entre o contorno da circunferência e a parte externa ao quadrado, será colocada terra vegetal. Nessa parte do jardim, serão usados 15 kg de terra para cada m². A terra vegetal é comercializada em sacos com exatos 15 kg cada. Use 3 como valor aproximado para π.



O número mínimo de sacos de terra vegetal necessários para cobrir a parte descrita do jardim é

**a)** 100.
**b)** 140.
**c)** 200.
**d)** 800.
**e)** 1 000.

Calculando, temos:




$S_{circunf} = \pi(10)^2 = 100\pi \approx 300\ m^2$

$x\sqrt{2} = 20 \rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 10\sqrt{2}\ m$

$S_{quadrado} = x^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2 = 200\ m^2$

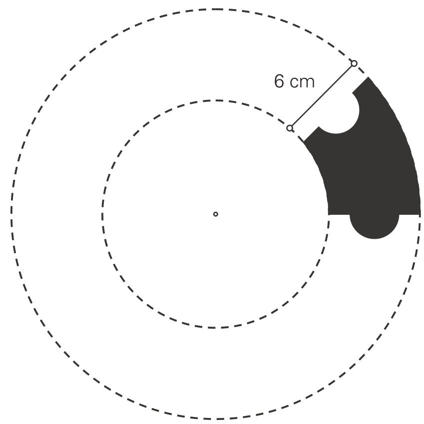
$S_{terra} = 300 - 200 = 100\ m^2$

Como sabemos, é preciso 1 saco (de 15 kg) de terra por metro quadrado. Logo, serão necessários 100 sacos de terra vegetal para cobrir a área.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

**3. Col. Naval -RJ (adaptado)** – Observe a figura a seguir.




A figura acima exibe um total de n peças idênticas de um quebra-cabeça que, resolvido, revela uma coroa circular. Sabe-se que 6 cm é a menor distância entre as circunferências concêntricas pontilhadas da figura e que o raio da menor dessas circunferências é igual a 9 cm.

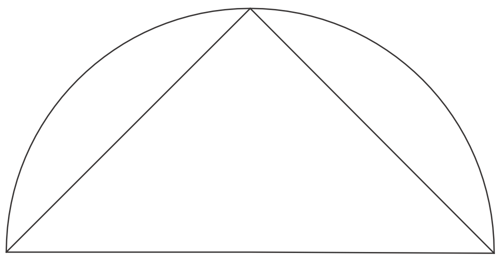
Se a área de cada peça é $(12\pi)\ cm^2$, qual o valor de n?

O raio da circunferência maior será dado por 9 + 6 = 15 cm.

Primeiro vamos calcular a área da coroa circular: $A = \pi \cdot (15^2 - 9^2) = 144\pi\ cm^2$

Sabendo que cada peça tem área de $12\pi\ cm^2$, concluímos que o número n de pessoas utilizadas será dado por: $n = \frac{144\pi}{12\pi} = 12$.

**4. UCS** – A praça central de uma cidade tem forma de semicírculo. Parte da praça, em forma de triângulo isósceles, será pavimentada, como mostrado na figura abaixo.



Sendo a área da parte a ser pavimentada igual a $2k^2$, qual é área total da praça?

**a)** $2\pi k^2$
**b)** $\pi k^2$
**c)** $2\pi k$
**d)** $\pi k$
**e)** $(\pi + 2)k^2$

Sendo r o raio do semicírculo, podemos escrever:

$S_n = \frac{2r \cdot r}{2} = r^2 = 2k^2 \rightarrow r^2 = 2k^2$

$S_{praça} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi 2k^2}{2} \rightarrow S_{praça} = \pi k^2$

**5. IFSul (adaptado)** – Uma plantação de morango que está situada em um terreno retangular com dimensões de 157 metros por 50 metros foi irrigada por um esguicho que tem a capacidade de molhar uma área circular de raio igual a 15 metros.

FABIO COLOMBINI

Supondo que esse esguicho foi fixado em seis pontos distintos, objetivando molhar a maior região possível, que a mesma parte da plantação de morango não foi molhada duas vezes e que os limites desse terreno não foram ultrapassados, qual a área do terreno que ainda necessita ser irrigada, aproximadamente?

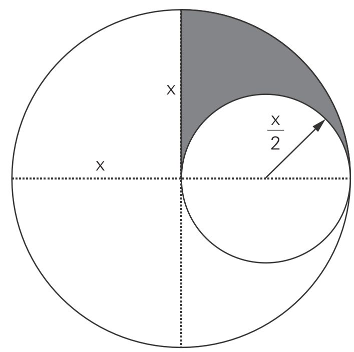
Calculando, temos:

$S_{café} = 157 \cdot 50 = 7\,850$

$s_{esguicho} = 6 \cdot \pi \cdot 15^2 \approx 4\,239$

Logo, a área que necessita ser irrigada é de 7 850 – 4 239 = 3 611 m².

**6. Mackenzie**




O valor da área sombreada na figura acima é

**a)** $\frac{\pi x^2}{4}$

**b)** $\frac{\pi x^2}{2}$

**c)** $\frac{\pi x^2}{8}$

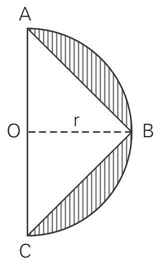
**d)** $\frac{\pi x^2}{12}$

**e)** $\frac{\pi x^2}{6}$

A área pedida é dada por: $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{8}$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. EEAR**




Na figura, O é o centro do semicírculo de raio r = 2 cm. Se A, B e C são pontos do semicírculo e vértices do triângulo isósceles, a área hachurada é ______ $cm^2$. (Use $\pi \cong 3,14$)

**a)** 2,26
**b)** 2,28
**c)** 7,54
**d)** 7,56

**8. Ifal (adaptado)** – No centro de uma praça retangular de dimensões 40 metros e 60 metros, é construída uma fonte circular de raio 8 metros, único lugar da praça em que as pessoas não podem entrar. Qual a área da praça a que as pessoas podem ter acesso? (considere $\pi = 3,14$)

**9. IFPE** – A moeda de 1 real é formada de uma parte prateada (círculo interior onde aparece o valor da moeda e o ano de fabricação) e uma parte dourada (coroa circular).


ASAFTA/ISTOCKPHOTO

Sabendo que a moeda tem 27 mm de diâmetro e que a parte prateada tem 24 mm de diâmetro (usando a aproximação $\pi = 31$), podemos afirmar que a área, em milímetros quadrados, da parte dourada, é

**a)** 79,05.
**b)** 6,975.
**c)** 14,415.
**d)** 367,5825.
**e)** 118,575.

**10. Uece** – Ao aumentarmos em 20% a medida do raio de um círculo, sua área sofrerá um aumento de

**a)** 36%.
**b)** 40%.
**c)** 44%.
**d)** 52%.

**11. PUC-RS** – Em muitas igrejas e casas antigas de Porto Alegre, podemos observar janelas de forma retangular encimadas por um semicírculo, como na figura.

Considerando que a parte retangular da figura possui x cm na base e altura correspondente a uma vez e meia essa medida, a função em que A = f(x) e que determina a área total da janela, em cm$^2$, é

**a)** $1{,}5x^2 + \pi r^2$

**b)** $(1{,}5 + \pi)\, x^2$

**c)** $1{,}5x^2 + \dfrac{\pi}{8}$

**d)** $\left(1{,}5 + \dfrac{\pi}{8}\right) x^2$

**e)** $1{,}5 + \dfrac{\pi}{8}\, x^2$

**12. UEL** – Algumas figuras geométricas são utilizadas em símbolos como a Estrela de David (Figura 1).

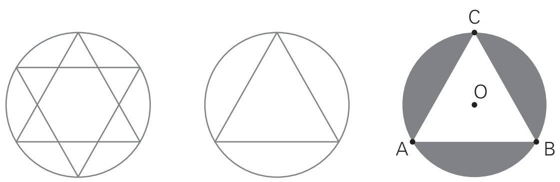


Figura 1 Figura 2 Figura 3

A partir das Figuras 1 e 2, desenhou-se um esquema, representado na Figura 3, que não obedece a uma escala. Sabe-se que, na Figura 3, estão representados uma circunferência de centro no ponto O e um triângulo equilátero (ABC), inscrito nessa circunferência.

Considerando que o raio da circunferência é de $\sqrt{48}$ cm, responda aos itens a seguir.

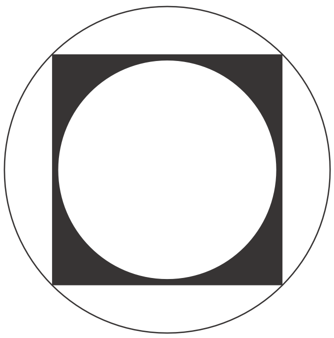
**a)** Determine a medida do lado do triângulo ABC.

Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

**b)** Determine a área representada pela cor cinza na Figura 3.

Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

**13. UEFS**



Na figura, tem-se uma circunferência inscrita em um quadrado, que, por sua vez, está inscrito em outra circunferência.

Considerando-se $\pi \cong 3{,}14$, a área escura compreendida entre o quadrado e a circunferência menor representa, em relação à área interna à circunferência maior, um percentual de, aproximadamente,

**a)** 11,8%

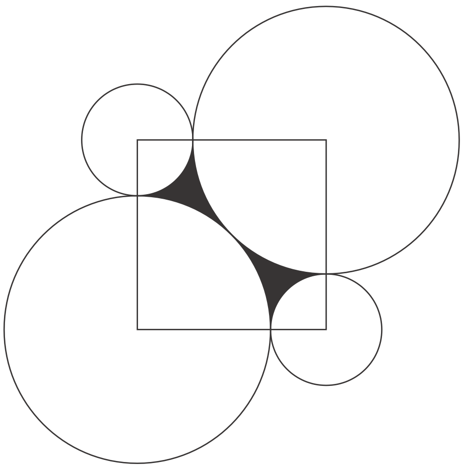
**b)** 13,7%

**c)** 16,4%

**d)** 18,3%

**e)** 21,5%

**14. UFRGS** – Considere um quadrado de lado 1. Foram construídos dois círculos de raio R com centros em dois vértices opostos do quadrado e tangentes entre si; dois outros círculos de raio r com centros nos outros dois vértices do quadrado e tangentes aos círculos de raio R, como ilustra a figura abaixo.



A área da região sombreada é

**a)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\pi$.

**b)** $\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$.

**c)** $1+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\pi$.

**d)** $1+\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$.

**e)** $1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\pi$.

**15. Uece** – No plano, considere duas circunferências cuja medida do raio de cada uma delas é 10 m. Se o centro de uma delas está sobre a outra, a medida da área correspondente à interseção das regiões do plano, limitadas por cada uma dessas circunferências, é igual a:

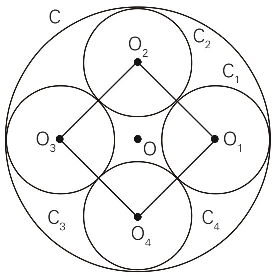
**a)** $\left(\frac{100\pi}{3}-25\sqrt{3}\right)$ $m^2$.

**b)** $\left(\frac{200\pi}{3}-25\sqrt{3}\right)$ $m^2$.

**c)** $\left(\frac{100\pi}{3}-50\sqrt{3}\right)$ $m^2$.

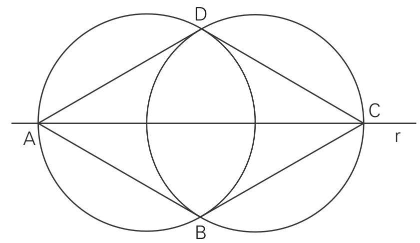
**d)** $\left(\frac{200\pi}{3}-50\sqrt{3}\right)$ $m^2$.

**16. UFG** – Na figura a seguir, as circunferências $C_1$, $C_2$, $C_3$ e $C_4$, de centros $O_1$, $O_2$, $O_3$ e $O_4$, respectivamente, e mesmo raio r, são tangentes entre si e todas são tangentes à circunferência C de centro O e raio R.




Considerando o exposto, calcule, em função de R, a área do losango cujos vértices são os centros $O_1$, $O_2$, $O_3$ e $O_4$.

**17. UFRGS** – As circunferências do desenho abaixo foram construídas de maneira que seus centros estão sobre a reta r e que uma intercepta o centro da outra. Os vértices do quadrilátero ABCD estão na interseção das circunferências com a reta r e nos pontos de interseção das circunferências.




Se o raio de cada circunferência é 2, a área do quadrilátero ABCD é

**a)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

**b)** $3\sqrt{3}$.

**c)** $6\sqrt{3}$.

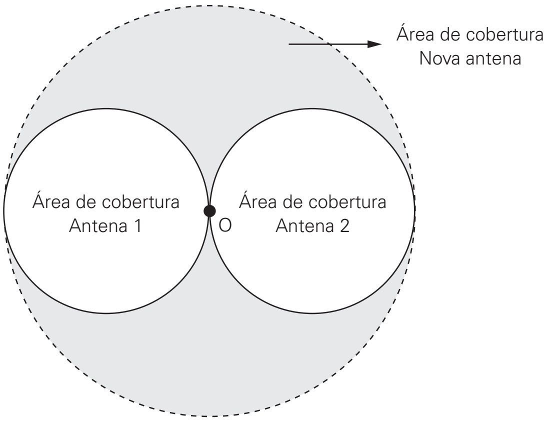
**d)** $8\sqrt{3}$.

**e)** $12\sqrt{3}$.

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Enem** C2-H8

Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio de 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.




O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

**a)** $8\pi$.
**b)** $12\pi$.
**c)** $16\pi$.
**d)** $32\pi$.
**e)** $64\pi$.

**19. UEMG** C2-H9

Num gramado retangular, com dimensões de 15 m por 6 m, é fixado um esguicho que consegue molhar uma área circular com alcance de um raio de 3 m. Fixando-se esse esguicho em mais de um ponto, com a finalidade de molhar a maior região possível, sem se ultrapassar os limites do gramado retangular e sem permitir que a mesma parte da grama seja molhada duas vezes, ficará ainda uma área do gramado sem ser molhada.

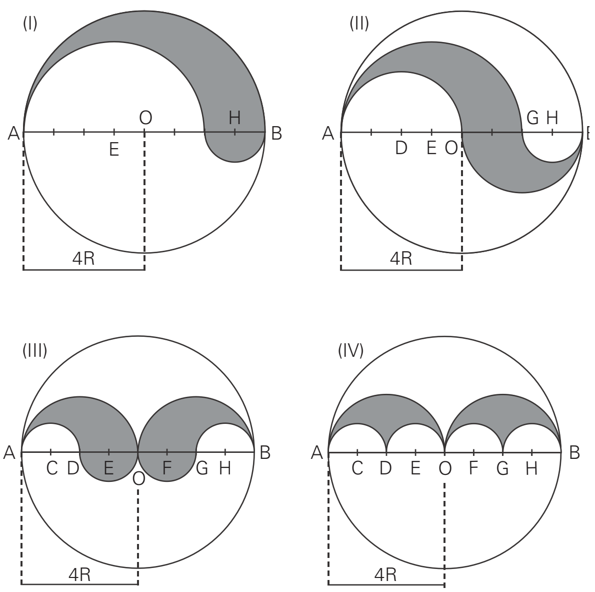
SAMUIBOY/ISTOCKPHOTO

O tamanho aproximado da área que ficará sem ser molhada corresponde a

**a)** 5,22 $m^2$.
**b)** 8,56 $m^2$.
**c)** 33,48 $m^2$.
**d)** 42,70 $m^2$.
**e)** 47,96 $m^2$.

**20. Epcar** C2-H8

Considere os círculos abaixo, de centro O e raio 4R, cujos diâmetros são divididos em oito partes iguais. Sabe-se que todos os arcos traçados nas quatro figuras são arcos de circunferência cujos diâmetros estão contidos no segmento $\overline{AB}$.




Sobre as áreas $S_I$, $S_{II}$, $S_{III}$ e $S_{IV}$ hachuradas nas figuras (I), (II), (III) e (IV), respectivamente, pode-se afirmar que

**a)** $S_I = S_{II} = S_{III} = S_{IV}$
**b)** $S_{III} > S_I$
**c)** $S_{IV} = \frac{1}{2} S_{II}$
**d)** $S_{II} > S_{III}$
**e)** $S_{II} < S_{III}$

# ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – CÍRCULOS II

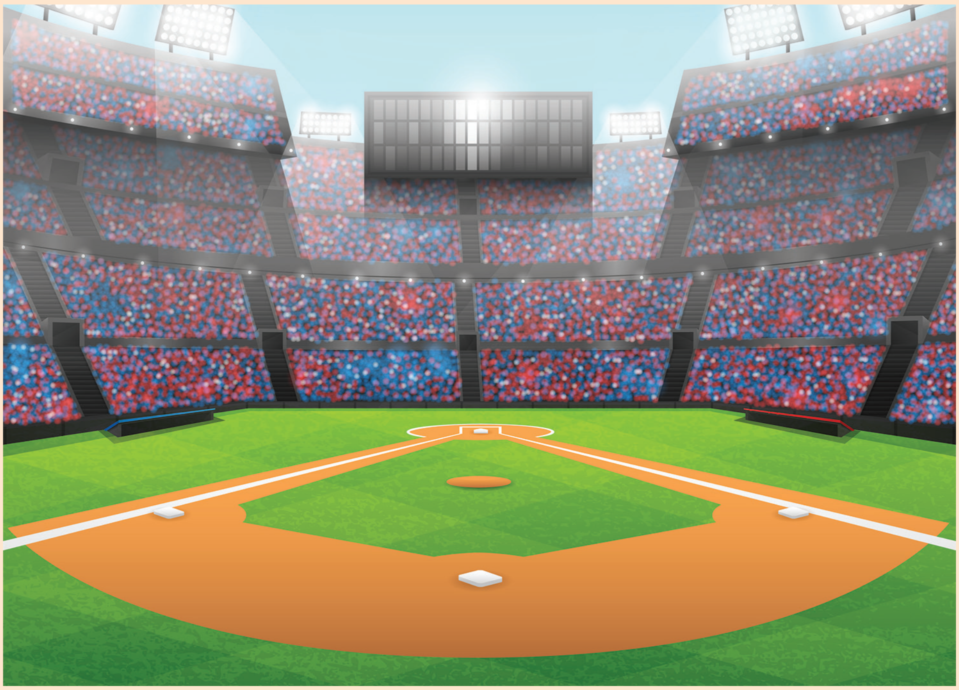
25

- Área do setor circular
- Área do segmento circular

**HABILIDADES**

- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos como solução de problemas do cotidiano.

FILO/ISTOCKPHOTO



Campo de um estádio de beisebol.

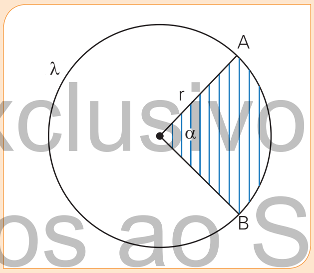
## Introdução

O beisebol atual tem origem na América do Norte, por volta do século XIX, embora versões primitivas desse esporte datem do século XVIII, no Reino Unido. É uma prática esportiva que pode ser realizada por homens e mulheres, em um campo com formato de setor circular, sendo um dos mais populares nos Estados Unidos. Como podemos ver na imagem anterior, a área demarcada pelas duas linhas diagonais nos remete à ideia da área de um círculo.

Neste módulo, continuaremos os estudos sobre as áreas dos círculos e dos setores circulares.

### ÁREA DO SETOR CIRCULAR

A região determinada pela intersecção da circunferência $\lambda$, de centro em **O**, raio **r**, com os lados do ângulo central $\alpha$ é denominada **setor circular**.



Como a área do setor circular é proporcional à medida do arco, sua área pode ser calculada por meio de regra de três simples de duas maneiras. Acompanhe na sequência.

- Arco medido em graus

| Setor | | Arco |
|---|---|---|
| ↓ | | ↓ |
| $\pi R^2$ | ______ | $360°$ |
| A | ______ | $\alpha°$ |

$$\frac{R^2}{A} = \frac{360°}{\alpha°} \rightarrow 360° \cdot A = \alpha° \cdot R^2$$

$$A = \frac{\alpha° \cdot R^2}{360°}$$

- Arco medido em radianos

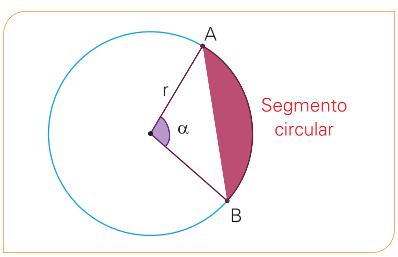
| Setor | | Arco |
|---|---|---|
| ↓ | | ↓ |
| $\pi R^2$ | ______ | $2\pi$ rad |
| A | ______ | $\alpha$ rad |

$$\frac{R^2}{A} = \frac{2 \text{ rad}}{\alpha}$$

$$A = \alpha R$$

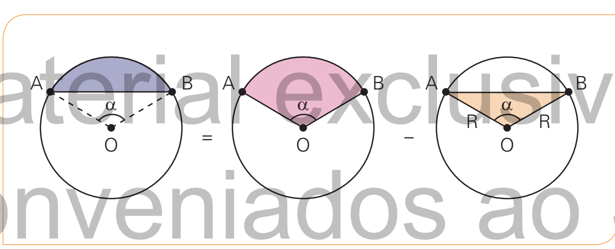
## ÁREA DO SEGMENTO CIRCULAR

A região do círculo limitada pelo arco da circunferência $\overset{\frown}{AB}$ e uma corda cujas extremidades estão localizadas no arco é denominada **segmento circular**.




A área do segmento circular pode ser calculada nos seguintes casos:

### Ângulo central α menor que 180°



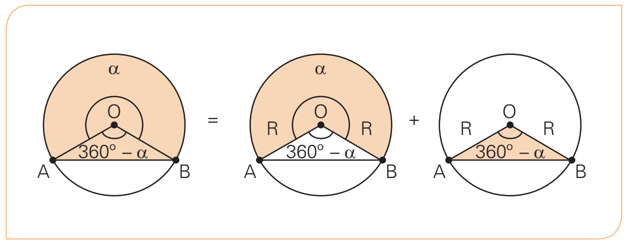

Observe que a área do segmento corresponde à área do setor menos a área do triângulo.

$$A = A_{setor} - A_{triângulo} \rightarrow A = \frac{\alpha° \cdot R^2}{360°} \cdot \frac{R \cdot R \cdot \text{sen}\alpha}{2}$$

Logo:

$$A = R^2 \cdot \left(\frac{\pi\alpha}{360°} - \frac{\text{sen}\alpha}{2}\right), \text{ com medida em graus}$$

### Ângulo central α maior que 180°




Observe que a área do segmento corresponde à área do setor mais a área do triângulo.

$$A = A_{setor} + A_{triângulo} \rightarrow A =$$

$$= \frac{\alpha° \cdot R^2}{360°} \cdot \frac{R \cdot R \cdot \text{sen}(360° - \alpha)}{2}$$

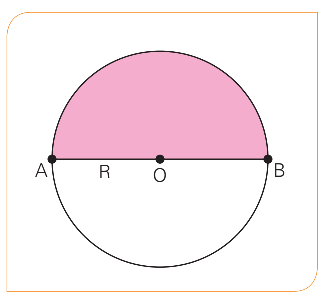
Como $\text{sen}(360° - \alpha) = -\text{sen}\alpha$, temos:

$$A = \frac{\alpha° \cdot R^2}{360°} + \frac{R^2 \cdot (-\text{sen}\alpha)}{2}$$

Logo:

$$A = R^2 \cdot \left(\frac{\pi\alpha}{360°} - \frac{\text{sen}\alpha}{2}\right), \text{ com medida em graus}$$

### Ângulo central igual a 180°

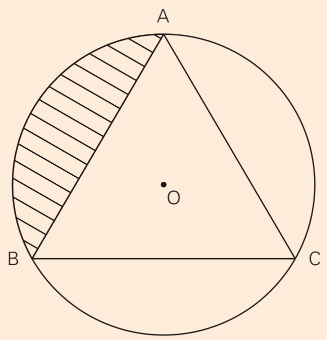



$$A = A_{semicírculo}$$

$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1. PUC-Rio** – Considere o triângulo equilátero ABC inscrito no círculo de raio 1 e centro O, como apresentado na figura abaixo.




**a)** Calcule o ângulo AÔB.
**b)** Calcule a área da região hachurada.
**c)** Calcule a área do triângulo ABC.

**Resolução**

a) Sendo $\Delta$ABC equilátero, os vértices A, B e C dividem a circunferência em três arcos congruentes de medida igual a $\frac{360°}{3} = 120°$.

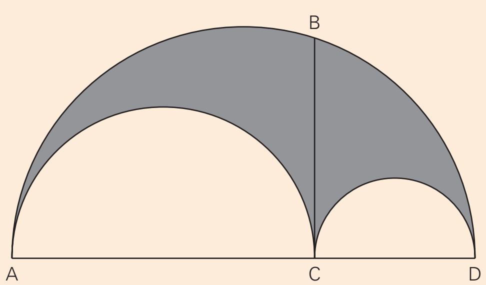
b) Sabendo que o lado l de um triângulo equilátero, inscrito em um círculo de raio r, é dado por $l = r\sqrt{3}$, segue-se que $AB = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$ u.c.

Portanto, a área pedida é igual a:

$$A = \frac{1}{3} \cdot \left( \pi \cdot 1^2 - \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{1}{12} \cdot (4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ u.a.}$$

c) Do item b, temos: $A_{nABC} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ u.a.

**2. UFSCar** – A figura representa três semicírculos, mutuamente tangentes dois a dois, de diâmetro AD, AC e CD.




Sendo CD perpendicular a AD, e sabendo-se que AB = 4 cm e DB = 3 cm, a medida da área da região sombreada na figura, em cm², é igual a

**a)** $1{,}21\pi$
**b)** $1{,}25\pi$
**c)** $1{,}36\pi$
**d)** $1{,}44\pi$
**e)** $1{,}69\pi$

**Resolução**

Sendo $\lambda_1$ e $\lambda_2$ as circunferências inscritas na circunferência $\lambda$, podemos utilizar o teorema de Pitágoras para descobrir as medidas dos triângulos ABD, ACB e CDB, respectivamente.

Do triângulo ABD, temos:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 \text{ a}$$

$$\overline{AD}^2 = 25$$

$$\overline{AD} = 5 \text{ cm}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{BD} = 5\,\overline{BC}$$

$$12 = 5\,\overline{BC}$$

$$\overline{BC} = \frac{12}{5} \text{ cm}$$

Do triângulo ACB, temos:

$$\overline{AC}^2 = 4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2$$

$$\overline{AC}^2 = 16 - \left(\frac{144}{25}\right)$$

$$\overline{AC}^2 = \frac{256}{25}$$

$$\overline{AC} = \frac{16}{5} \text{ cm}$$

Do triângulo CDB, temos:

$$3^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{CD}^2 = 9 - \left(\frac{144}{25}\right)$$

$$\overline{CD}^2 = \frac{81}{25}$$

$$\overline{CD} = \frac{9}{5} \text{ cm}$$

Assim, teremos os raios das semicircunferências $\lambda_1$ e $\lambda_2$: $r_1 = \frac{16}{10}$ e $r_2 = \frac{9}{10}$

Logo, a área desejada será:

$$A = \frac{1}{2} A_\lambda - \frac{1}{2} A_{\lambda_1} - \frac{1}{2} A_{\lambda_2} = \frac{1}{2} (A_\lambda - A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2})$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right) - \left( \pi \cdot \left(\frac{16}{10}\right)^2 \right) - \pi \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{25\pi}{4} - \frac{256\pi}{100} - \frac{81\pi}{25} \right]$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{25\pi}{4} - \frac{337\pi}{100} \right]$$

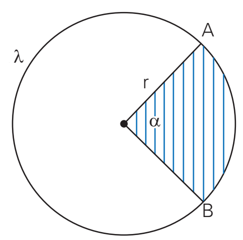
$$A = \left[ \frac{(6{,}25 - 3{,}37)\,\pi}{2} \right]$$

$$A = 1{,}44\,\pi$$

# ROTEIRO DE AULA

## ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – CÍRCULOS II

### Setor circular



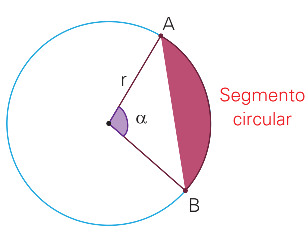

α em graus

$A = \dfrac{\alpha° \cdot \pi R^2}{360°}$

α em radianos

$A = \alpha \cdot R$

### Segmento circular




$\alpha < 180°$

$A = R^2 \cdot \left(\dfrac{\pi \cdot \alpha}{360°} - \dfrac{\text{sen}\alpha}{2}\right)$

$\alpha = 180°$

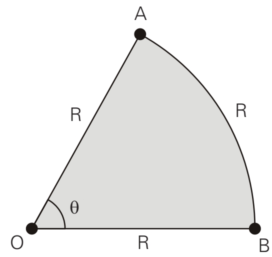
$A = \dfrac{\pi \cdot R^2}{2}$

$\alpha > 180°$

$A = R^2 \cdot \left(\dfrac{\pi \cdot \alpha}{360°} - \dfrac{\text{sen}\alpha}{2}\right)$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Uerj** – Uma chapa de aço com a forma de um setor circular possui raio R e perímetro 3R, conforme ilustra a imagem.




A área do setor equivale a:

**a)** $R^2$

**b)** $\frac{R^2}{4}$

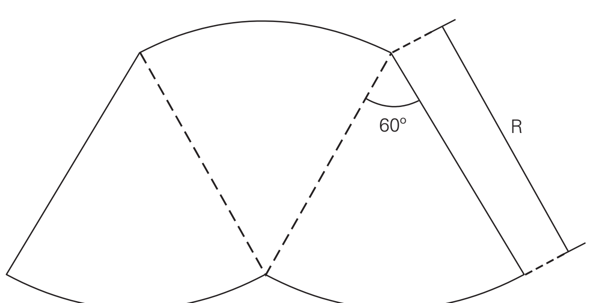
**c)** $\frac{R^2}{2}$

**d)** $\frac{3R^2}{2}$

A área do setor é dada por $\frac{R \cdot \overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{R \cdot R}{2} = \frac{R^2}{2}$

**2. Enem** C2-H6

O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio R deve ser um número natural.




O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m × 24 m.

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3,0 como aproximação para π.

O maior valor possível para R, em metros, deverá ser

**a)** 16.

**b)** 28.

**c)** 29.

**d)** 31.

**e)** 49.

Sendo 3 · 60° = 180°, temos que:

$\frac{1}{2}\pi R^2 < 50 \cdot 24$

$R^2 < 800$

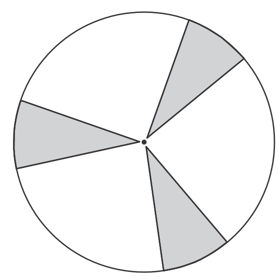
Logo, $0 < R < 28{,}2$ m.

Sendo assim, o maior valor natural de R, em metros, é 28.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

**3. PUC-RS (adaptado)** – Uma pracinha com formato circular ocupa uma área de 100π m². No terreno dessa área, foram colocados 3 canteiros em forma de setor circular, cada um formado por um ângulo central de 30°, como na figura. Qual a área total ocupada pelos canteiros, em m²?

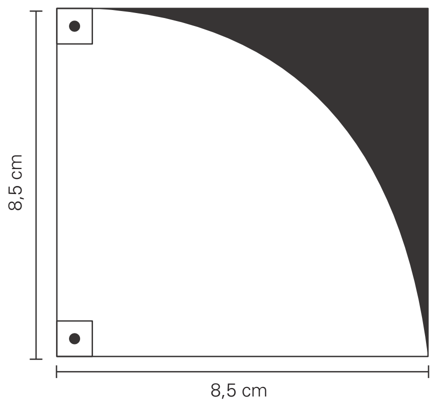


Sabemos que área A pedida será o triplo da área de um setor circular de 30°, o que corresponde à área de um setor circular de 90°. Sendo assim, $\frac{1}{4}$ da circunferência.

Logo: $A = \frac{100\pi}{4} = 25\pi$ m².

**4. UPE** – Brincando de construir circunferências e quadrados, Antônio construiu uma figura semelhante à que está representada abaixo. A área pintada dessa figura corresponde a quantos por cento da área total do quadrado?

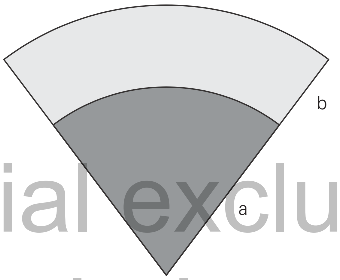
Considere $\pi = 3{,}14$




a) 15,53%
b) 17,00%
c) 21,50%
d) 33,40%
e) 34,00%

$S_{quadrado} = 8{,}5 \cdot 8{,}5$
$S_{quadrado} = 72{,}25$
$S_{hachurada} = S_{quadrado} - S_{setor\ circular}$
$S_{hachurada} = 72{,}25 - \dfrac{\pi \cdot (8{,}5)^2}{4}$
$S_{hachurada} = 15{,}53375$
$\dfrac{S_{hachurada}}{S_{quadrado}} = \dfrac{15{,}53375}{72{,}25} = 0{,}215$
$\dfrac{S_{hachurada}}{S_{quadrado}} = 21{,}5\%$

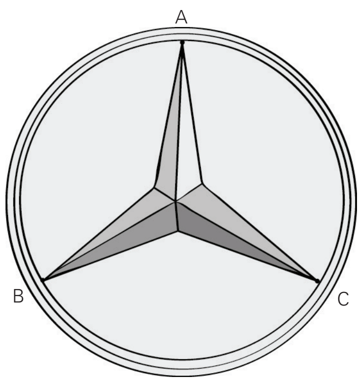
**5. Unicamp** – A figura abaixo exibe um setor circular dividido em duas regiões de mesma área. A razão $\dfrac{a}{b}$ é igual a




a) $\sqrt{3} + 1$.
b) $\sqrt{2} + 1$.
c) $\sqrt{3}$.
d) $\sqrt{2}$.

Se as áreas são iguais e o ângulo central é $\theta$, temos:
$\dfrac{(a+b)^2 \cdot \theta}{2} - \dfrac{a^2 \cdot \theta}{2} = \dfrac{a^2 \cdot \theta}{2}$
$(a + b)^2 - a^2 = a^2$
$(a + b)^2 = 2a^2$
$a + b = \sqrt{2}a$
$b = a \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$
$\dfrac{a}{b} = \sqrt{2} + 1$

**6. UFSC (adaptado)** – No livro *A hora da estrela*, de Clarice Lispector, a personagem Macabéa é atropelada por um veículo cuja logomarca é uma estrela inscrita em uma circunferência, como mostra a figura.

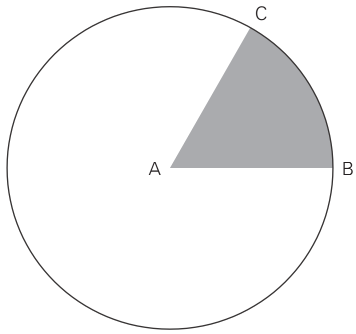



Se os pontos A, B e C dividem a circunferência em arcos de mesmo comprimento e a área do triângulo ABC é igual a $27\sqrt{3}$ cm², determine a medida do raio dessa circunferência em centímetros.

Sabendo que os arcos determinados por A, B e C têm o mesmo comprimento, conclui-se que o triângulo ABC é equilátero.
Sendo a área de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio r dada por $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2$, temos:
$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2 = 27\sqrt{3}$
$r = 6$ cm

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. Unisinos** – Considerando o círculo de raio 4 cm, qual a área, em $cm^2$, do setor circular determinado pelos pontos A, B e C, sabendo-se que $C\hat{A}B = 60°$?

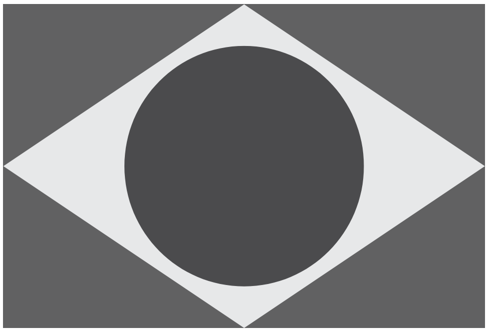



**a)** $4\pi$
**b)** $2\pi$
**c)** $\frac{8\pi}{3}$
**d)** $\frac{4\pi}{3}$
**e)** $\frac{2\pi}{3}$

**8. Col. Naval-RJ** – Suponha que ABC seja um triângulo isósceles com lados AC = BC, e que "L" seja a circunferência de centro "C", raio igual a "3" e tangente ao lado AB. Com relação à área da superfície comum ao triângulo ABC e ao círculo de "L", pode-se afirmar que:

**a)** não possui um valor máximo.
**b)** pode ser igual a $5\pi$.
**c)** não pode ser igual a $4\pi$.
**d)** possui um valor mínimo igual a $2\pi$.
**e)** possui um valor máximo igual a $4{,}5\pi$.

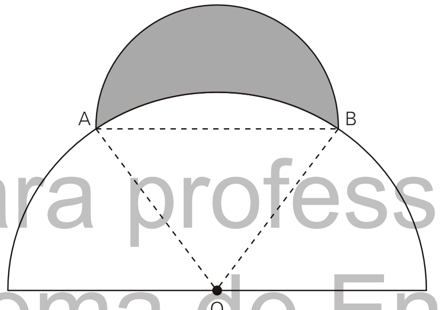
**9. IFSC** – Em ano de Copa do Mundo, a bandeira brasileira se torna famosa. É possível construí-la com várias figuras geométricas. Suponha que você queira pintar a figura abaixo da seguinte maneira: a parte dos triângulos, da cor verde; a parte do losango, de amarelo; e a do círculo, de azul.



O retângulo possui 8 cm de altura e 12 cm de comprimento; já o círculo possui 3 cm de raio. Assinale a alternativa que apresenta a medida da área CORRETA a ser pintada de verde e de azul, respectivamente:

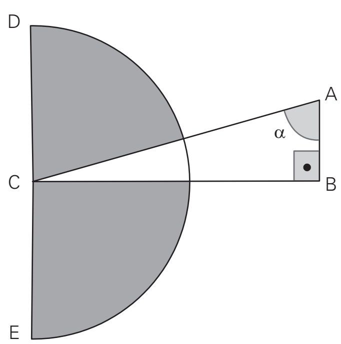
**a)** 24 $cm^2$ e $9\pi$ $cm^2$
**b)** 96 $cm^2$ e $9\pi$ $cm^2$
**c)** 48 $cm^2$ e $3\pi$ $cm^2$
**d)** 24 $cm^2$ e $3\pi$ $cm^2$
**e)** 48 $cm^2$ e $9\pi$ $cm^2$

**10. FGV** – A figura mostra um semicírculo cujo diâmetro AB, de medida R, é uma corda de outro semicírculo de diâmetro 2R e centro O.



**a)** Calcule o perímetro da parte sombreada.
**b)** Calcule a área da parte sombreada.

**11. FGV** – A figura indica um semicírculo de centro C e diâmetro DE = 24 cm, um triângulo retângulo ABC. A área sombreada no semicírculo é igual a $69\pi$ cm$^2$.



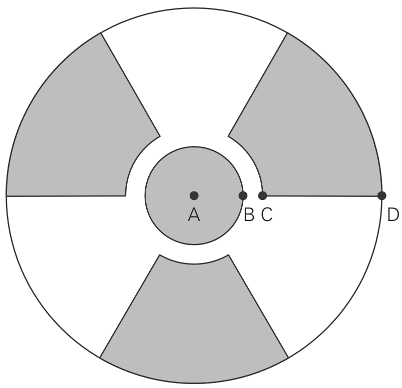

Nas condições descritas, a medida do ângulo, denotado por $\alpha$, é igual a

**a)** 75°.
**b)** 75,5°.
**c)** 82°.
**d)** 82,5°.
**e)** 85°.

**12. FGV-Rio** – A figura abaixo representa o símbolo utilizado para materiais radioativos. Nesse símbolo, aparecem duas circunferências de centro A, estando a externa dividida em seis arcos iguais. Todos os segmentos que aparecem no desenho estão contidos em raios da circunferência externa e os três pequenos arcos possuem, também, centro A.

Na figura, os pontos A, B, C e D são colineares e

AB = 2, BC = 1 e CD = 6.




Considerando as regiões que estão no interior da circunferência externa, a razão entre as áreas das regiões sombreada e não sombreada equivale a

**a)** $\left(\dfrac{41}{40}\right)$

**b)** $\left(\dfrac{40}{41}\right)$

**c)** $\left(\dfrac{20}{21}\right)$

**d)** $\left(\dfrac{21}{20}\right)$

**13. Uece** – Considere a circunferência com centro no ponto O e cuja medida do raio é 2 m. Se AB é um diâmetro desta circunferência e C é um ponto sobre a circunferência tal que a medida do ângulo $C\hat{O}B$ é 60°, então a medida da área da região interior à circunferência, limitada pela corda AC e pelo menor arco determinado por A e C, é

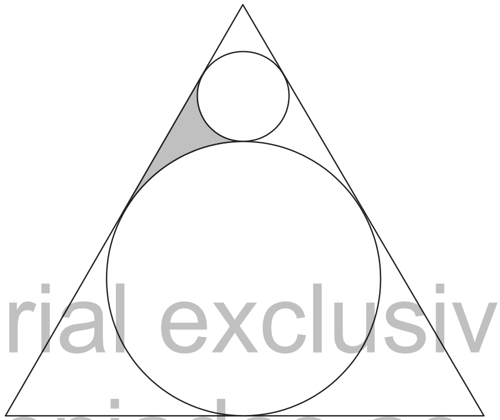
a) $\frac{4\pi}{6} - \sqrt{3}$

b) $\frac{4\pi}{6} + \sqrt{3}$

c) $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$

d) $\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$

**14. PUC-Rio** – A figura mostra um triângulo equilátero de lado 1, um círculo inscrito e um segundo círculo tangente a dois lados do triângulo e tangente exteriormente ao primeiro círculo.

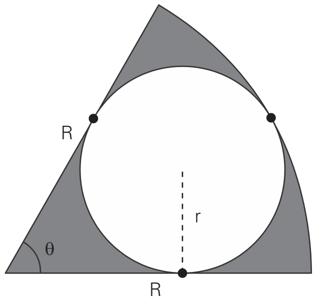


a) Encontre o raio do maior círculo.

b) Encontre o raio do menor círculo.

c) Encontre a área da região sombreada, limitada por um lado do triângulo e pelos dois círculos.

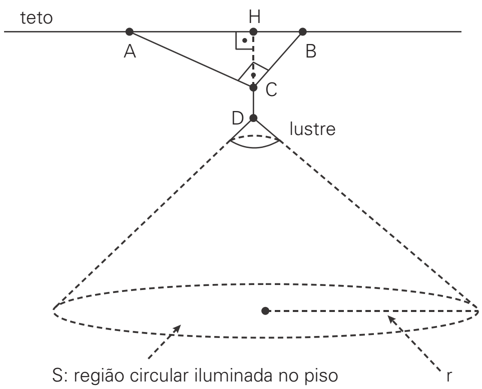
**15. Unicamp-SP** – A figura abaixo exibe um círculo de raio r que tangencia internamente um setor circular de raio R e ângulo central θ.




a) Para $\theta = 60°$, determine a razão entre as áreas do círculo e do setor circular.

b) Determine o valor de $\cos\theta$ no caso em que $R = 4r$.

**16. UFU (adaptado)** – Um lustre no formato cônico foi fixado ao teto por duas cordas linearmente esticadas, AC e BC, conforme indica a figura a seguir.

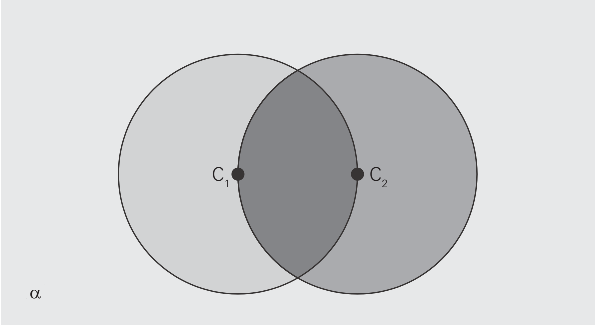



(Figura ilustrativa e sem escalas)

Suponha que o triângulo ABC seja retângulo com altura $h = CH = \frac{3}{13}$ m e $CB = \frac{1}{4}$ m e que, na figura, r é o raio da região circular S, de forma que r é igual ao dobro de AB.

Nessas condições, qual a área de S, em m², em função de $\pi$?

**17. Uerj** – Na figura abaixo, estão representados dois círculos congruentes, de centros $C_1$ e $C_2$, pertencentes ao mesmo plano $\alpha$. O segmento $\overline{C_1C_2}$ mede 6 m.



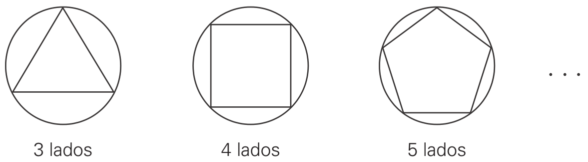

A área da região limitada pelos círculos, em cm², possui valor aproximado de:

**a)** 108
**b)** 162
**c)** 182
**d)** 216

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. UFPR** C2-H7

Considere a seguinte sequência de polígonos regulares inscritos em um círculo de raio 2 cm:




Sabendo que a área A de um polígono regular de n lados dessa sequência pode ser calculada pela fórmula $A = 2n \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, considere as seguintes afirmativas:

1. As áreas do triângulo equilátero e do quadrado nessa sequência são, respectivamente, $3\sqrt{3}$ cm² e 8 cm².

2. O polígono regular de 12 lados, obtido nessa sequência, terá área de 12 cm².

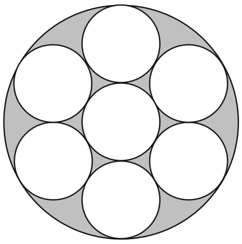
3. À medida que n aumenta, o valor A se aproxima de $4\pi$ cm².

Assinale a alternativa correta.

**a)** Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
**b)** Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
**c)** Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
**d)** Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
**e)** As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

**19. FGV** C2-H7

Cada um dos 7 círculos menores da figura a seguir tem raio 1 cm. Um círculo pequeno é concêntrico com o círculo grande e tangencia os outros 6 círculos pequenos. Cada um desses 6 outros círculos pequenos tangencia o círculo grande e 3 círculos pequenos.

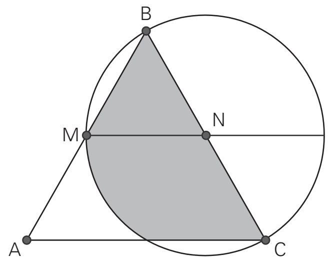


Na situação descrita, a área da região sombreada na figura, em cm², é igual a

**a)** $\pi$
**b)** $\frac{3\pi}{2}$
**c)** $2\pi$
**d)** $\frac{5\pi}{2}$
**e)** $3\pi$

**20. Famerp** C2-H8

As tomografias computadorizadas envolvem sobreposição de imagens e, em algumas situações, é necessário conhecer a área da região de intersecção das imagens sobrepostas. Na figura, um triângulo equilátero ABC se sobrepõe a um círculo de centro N e raio NB = NC = = NM, com M e N sendo pontos médios, respectivamente, de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.




Sendo a área de triângulo equilátero de lado l igual a $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ e a área de círculo de raio r igual a $\pi r^2$, se o lado do triângulo ABC medir 4 cm, então a área de intersecção entre o triângulo e o círculo, em $cm^2$, será igual a

**a)** $\pi + 3\sqrt{3}$

**b)** $\frac{\pi + 3\sqrt{3}}{2}$

**c)** $\pi + \sqrt{3}$

**d)** $\frac{2\pi + 6\sqrt{3}}{3}$

**e)** $\pi + 2\sqrt{3}$

# ÁREAS DE FIGURAS PLANAS - OUTROS POLÍGONOS

26

- Polígonos regulares
- Recordando polígonos

**HABILIDADES**

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.


DMYTRO AKSONOV/ISTOCKPHOTO

Jogo de tênis.

## Introdução

Em uma quadra dividida por alguns quadriláteros, o jogo de tênis é disputado por homens e mulheres, individualmente ou em duplas. Esporte olímpico desde 1986, o tênis pode ser disputado em quadras de saibro, relva ou superfícies sintéticas.

A divisão em quadriláteros muitas vezes determina a área que os atletas devem defender e a área que precisam atacar, de acordo com a estratégia.

Neste módulo, vamos aprofundar os estudos das áreas, com ênfase às áreas de outros tipos de figuras poligonais.

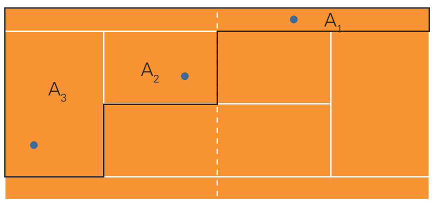
### ÁREA DE OUTROS POLÍGONOS

Há muitas formas de as áreas de figuras planas serem calculadas. Neste módulo, o cálculo de área será obtido com a segmentação da figura em polígonos já conhecidos, para que, enfim, se obtenha a medida da área desejada.

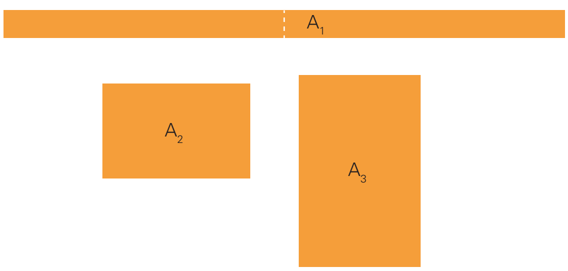
### ÁREA DE UMA FIGURA POLIGONAL

Vamos supor que, em uma partida de tênis, durante uma série de ataques e contra-ataques, a bolinha tocou o solo nos pontos A, B e C.

Qual será a área da figura formada pelas regiões em que a bolinha tocou o solo?




Observe que a quadra de tênis é composta por 2 retângulos de área $A_1$ cada um; 4 retângulos centrais de área $A_2$ cada um; e 2 retângulos no fundo de área $A_3$ cada um.




Logo, para obtermos a área total das regiões nas quais a bolinha tocou o solo, sendo conhecidas as áreas $A_1$, $A_2$ e $A_3$, basta efetuarmos a soma de todas as áreas:

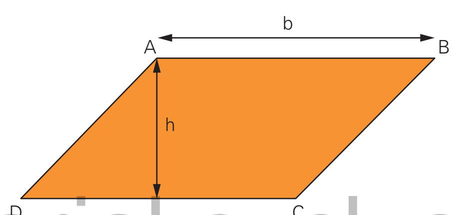
$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

Devemos adotar esse procedimento para calcular figuras poligonais **irregulares**. Portanto, vamos recordar algumas áreas já estudadas.

## RECORDANDO ÁREAS DE ALGUNS POLÍGONOS

### ÁREA DE UM PARALELOGRAMO

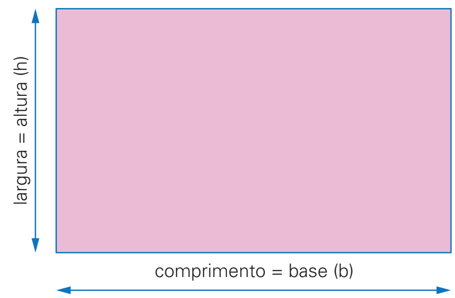
A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida de sua base pela medida da altura relativa.




$$A_{ABCD} = A_{ABEF} = b \cdot h$$

### ÁREA DE UM RETÂNGULO

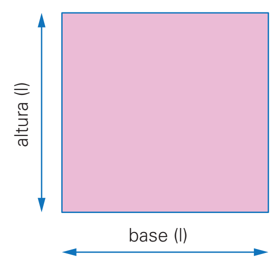
A área de um retângulo é igual ao produto da medida de seu comprimento (base) pela medida de sua largura (altura).




$$A = b \cdot h$$

### ÁREA DE UM QUADRADO

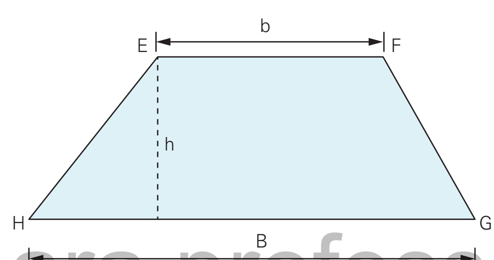
A área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado, já que esse polígono tem lados com medidas iguais.




$$A = l^2$$

### ÁREA DE UM TRAPÉZIO

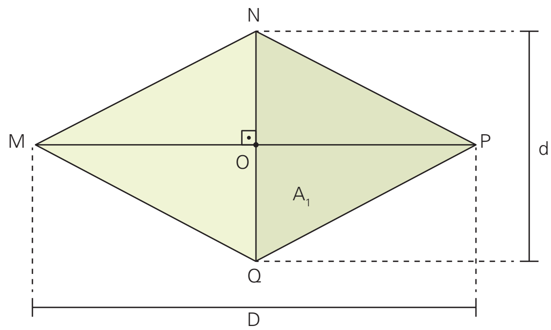
A área de um trapézio é igual à metade do produto de sua altura pela soma de suas bases.




$$A = \frac{(B + b)}{2} \cdot h$$

## ÁREA DE UM LOSANGO

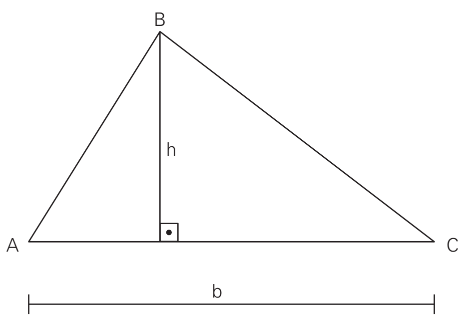
A área de um losango é igual à metade do produto de suas diagonais.




$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

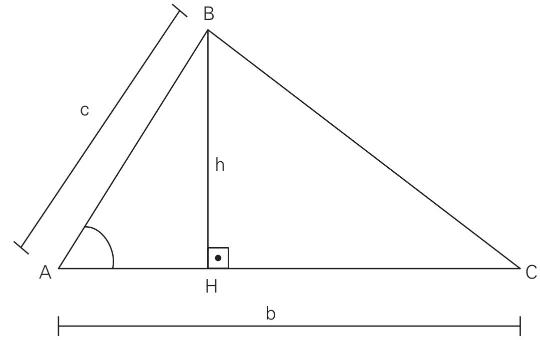
## ÁREA DE UM TRIÂNGULO

A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura relativa.



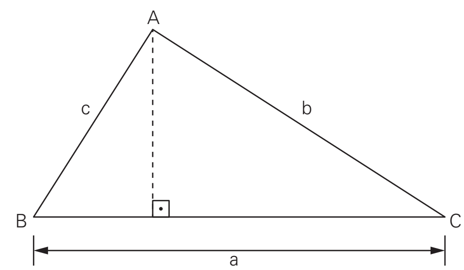

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

**Área de um triângulo em função da medida dos lados e do ângulo compreendido**




$$A = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2}$$

**Área do triângulo por meio da fórmula de Heron**




O semiperímetro (p) de um triângulo corresponde à metade de seu perímetro:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**1. UPE** – Um triângulo UPE é retângulo; as medidas de seus lados são expressas, em centímetros, por números naturais e formam uma progressão aritmética de razão 5. Quanto mede a área do triângulo UPE?

**a)** 15 cm² **c)** 125 cm² **e)** 300 cm²
**b)** 25 cm² **d)** 150 cm²

**Resolução**

Sejam l, l + 5 e l + 10 as medidas dos lados do triângulo UPE.

Logo, pelo teorema de Pitágoras:

$(l + 10)^2 = l^2 + (l + 5)^2$

$l^2 + 20l + 100 = l^2 + l^2 + 10l + 25$

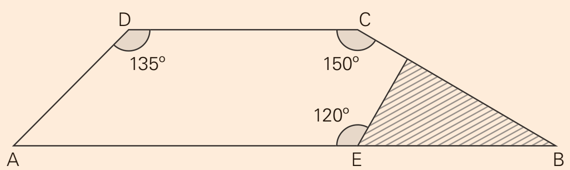
$l^2 - 10l - 75 = 0$

$l = 15$ cm

Sendo assim, o resultado pedido é $\frac{15 \cdot 20}{2} = 150$ cm².

$\therefore A = 150$ cm²

**2. Udesc** – No trapézio ABCD, representado na figura abaixo, temos que AE = 60 cm, DC = 40 cm, e que $\overline{CE}$ é igual à altura do trapézio ABCD.



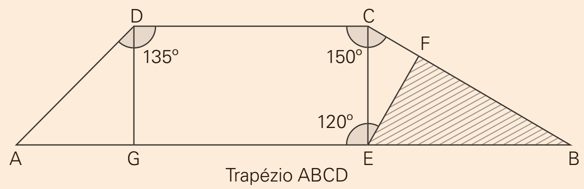
Trapézio ABCD

Com base nas informações, pode-se concluir que a área da região hachurada é igual a:

**a)** $100\sqrt{3}$ **c)** $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ **e)** $50\sqrt{3}$
**b)** $300\sqrt{3}$ **d)** $150\sqrt{3}$

**Resolução**:

Para tornar mais fácil a análise, foram acrescentados na figura os pontos E, F e G e os segmentos $\overline{DG}$ e $\overline{CE}$, perpendiculares a $\overline{AB}$, conforme indicado na figura:



Trapézio ABCD

Nota-se por construção que:

GE = DC = 40 cm
AG = AE – GE = 60 – 40 = 20 cm

Então, $A\hat{D}G = 135° - 90° = 45°$. Como $A\hat{G}D = 90°$, $G\hat{A}D = 45°$ . O triângulo AGD é isósceles, o que significa que h = DG = AG = 20 cm, sendo **h** a altura do trapézio.

Assim, $F\hat{C}E = 150° - 90° = 60°$ e $C\hat{E}F = 120° - 90° = 30°$, o que significa dizer que $C\hat{F}E = 180° - 30° - 60° = 90°$. Consequentemente, $B\hat{F}E = 90°$. Logo, a área do triângulo BFE desejada é igual a $\frac{EF \cdot FB}{2}$.

Do triângulo EFC, $EF = CE \cdot \cos 30° = h \cdot \cos 30° = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ cm.

Então, $B\hat{E}F = 180° - 120° = 60°$, o que implica que $FB = EF \cdot \text{tg } 60° = 10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 30$ cm.

A área desejada é calculada da seguinte forma:

$$\text{Área} = \frac{EF \cdot FB}{2} = \frac{10\sqrt{3} \cdot 30}{2} = 150\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

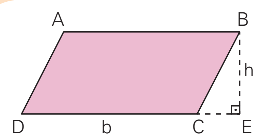
$A = 150\sqrt{3}$ cm²

# ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – OUTROS POLÍGONOS

## QUADRILÁTEROS

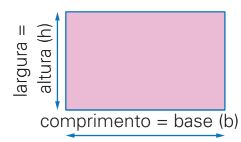
### PARALELOGRAMO

$A = b \cdot h$



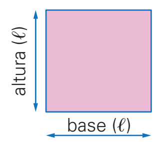

### RETÂNGULO

$A = b \cdot h$



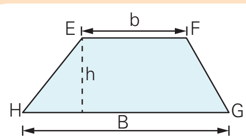

### QUADRADO

A = $A = l^2$



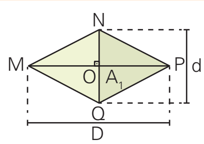

### TRAPÉZIO

$A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$



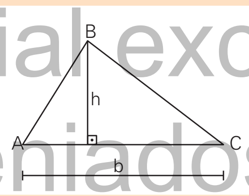

### LOSANGO

$A = \frac{D \cdot d}{2}$

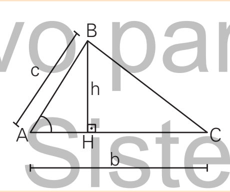



## TRIÂNGULOS

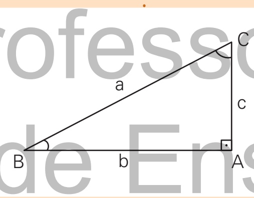
$A = \frac{b \cdot h}{2}$




$A = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2}$

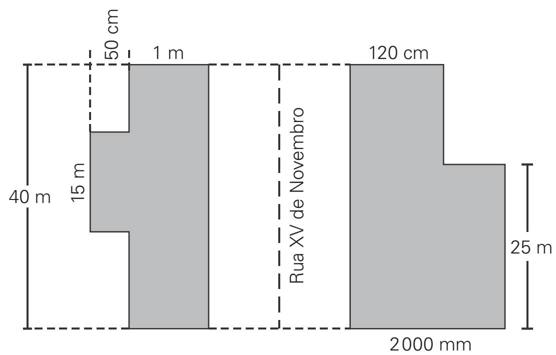



$A = \frac{b \cdot c}{2}$



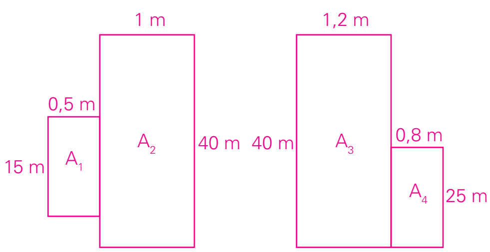
## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. IFSC (adaptado)** – A figura a seguir representa um esboço de parte do trajeto do desfile realizado durante a Oktoberfest, pela Rua XV de Novembro. A área em cinza foi ocupada pelo público que assistia ao desfile. Segundo a Polícia Militar, em média, havia dois espectadores para cada metro quadrado ocupado.




Dessa maneira, qual o público estimado nesse local do desfile?

Primeiro, dividimos em retângulos a área ocupada pelas pessoas em retângulos.




A área **A** ocupada pelas pessoas será a soma das áreas dos retângulos:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$A = 15 \cdot 0{,}5 + 40 \cdot 1 + 40 \cdot 1{,}2 + 0{,}8 \cdot 25$$
$$A = 7{,}5 + 40 + 48 + 20$$
$$A = 115{,}5$$

Como havia duas pessoas por metro quadrado, o número n de pessoas presentes no desfile foi de: $n = 115{,}5 \cdot 2 = 231$.

Havia em torno de 231 pessoas no desfile.

**2. Enem** C2-H9

Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

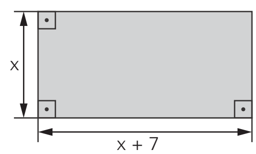


Figura A

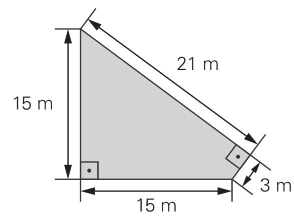


Figura B

Para satisfazer ao filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metros, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

**a)** 7,5 e 14,5
**b)** 9,0 e 16,0
**c)** 9,3 e 16,3
**d)** 10,0 e 17,0
**e)** 13,5 e 20,5

As áreas são iguais. Então:

$$x \cdot (x + 7) = \frac{15 \cdot 15}{2} + \frac{21 \cdot 3}{2}$$

$x^2 + 7x - 144 = 0$

$x_I = 9$

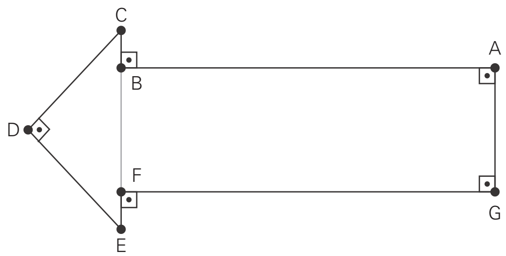
$x_{II} = -16$ (não convém)

Sendo assim, o comprimento e a largura devem medir, respectivamente, 16 m e 9 m.

**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

**3. FGV** – A seta indica um heptágono com AB = GF = = 2AG = 4BC = 4FE = 20 cm.




Sabe-se ainda que CD = ED e que o ângulo $C\hat{D}E$ é reto. Nas condições dadas, a área da região limitada por essa seta, em cm², é

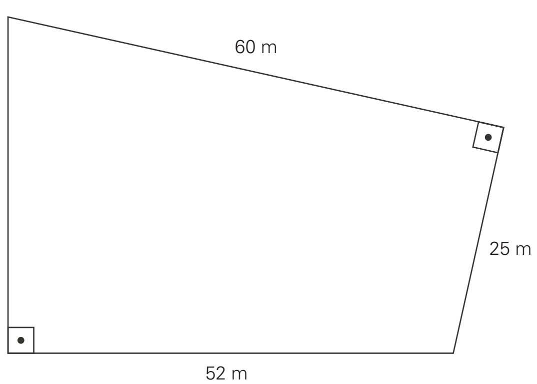
**a)** 250
**b)** 260
**c)** 280
**d)** 300
**e)** 320

A área pedida é dada por:

$\frac{1}{2}CD^2 + AB \cdot AG$

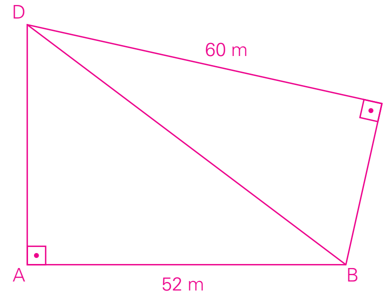
$\frac{1}{2} \cdot (10\sqrt{2})^2 + 20 \cdot 10 = 300\ cm^2$

**4. ESPM-SP** – A área do terreno representado na figura abaixo é igual a:




**a)** 1 896 m²
**b)** 1 764 m²
**c)** 2 016 m²
**d)** 1 592 m²
**e)** 1 948 m²

Considere a figura:




Do triângulo BCD, pelo teorema de Pitágoras:

$BD^2 = BC^2 + CD^2$
$BD^2 = 25^2 + 60^2$
$BD^2 = 5^2 \cdot (5^2 + 12^2)$
$BD^2 = 65^2\ m^2$

Logo, do triângulo ABD, utilizando novamente o teorema de Pitágoras:

$BD^2 = AB^2 + AD^2$
$65^2 = 52^2 + AD^2$
$AD = \sqrt{(65-52) \cdot (65+52)}$
$AD = 39\ m$

A resposta é dada por:

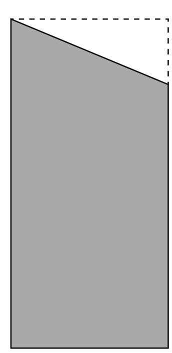
$(ABCD) = (ABD) + (BCD)$

$(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD$

$(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot (52 \cdot 39 + 25 \cdot 60)$

$(ABCD) = 1\,764\ m^2$

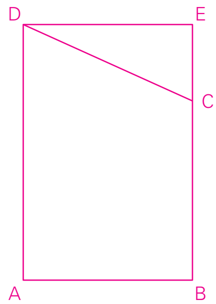
**5. Insper-SP** – A figura abaixo representa uma peça de vidro recortada de um retângulo de dimensões 12 cm por 25 cm. O lado menor do triângulo extraído mede 5 cm.



A área da peça é igual a

**a)** 240 cm²
**b)** 250 cm²
**c)** 260 cm²
**d)** 270 cm²
**e)** 280 cm²

Considere a figura:




Sabendo que BE = 25 cm, DE = 12 cm e CE = 5 cm, obtemos:

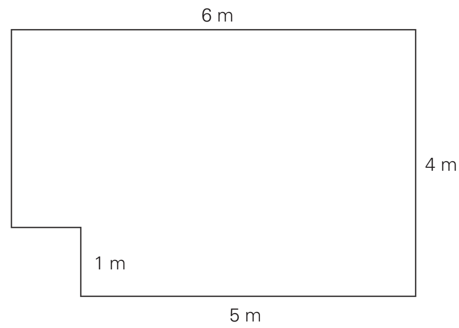
(ABCD) = (ABED) – (CDE)

$(ABCD) = BE \cdot DE - \dfrac{CE \cdot DE}{2}$

$(ABCD) = 25 \cdot 12 - \dfrac{5 \cdot 12}{2}$

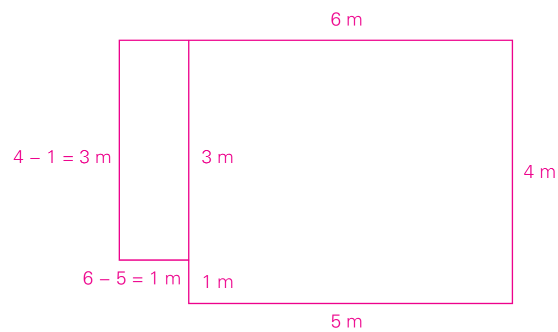
$(ABCD) = 270\ cm^2$

**6. IFSul-RS** – A figura a seguir representa a sala de estar de um apartamento.




Qual a quantidade mínima necessária de piso flutuante, em metros quadrados, para cobrir todo o chão da sala?

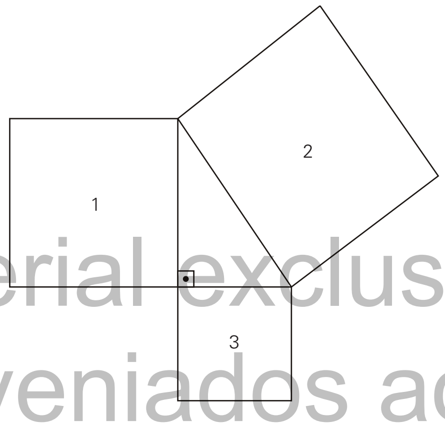
De acordo com a figura:




Assim, basta calcular a área em metros quadrados. A área será dada pela soma dos dois retângulos: $(5 \cdot 4) + (3 \cdot 1) = 20 + 3 = 23\ m^2$.
Serão necessários 23 m² de piso.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. IFSC** – Ao fazer uma figura através da técnica de kirigami (arte tradicional japonesa de recorte com papel, criando representações de determinados seres ou objetos), uma pessoa precisou recortar uma folha A4 no formato da figura a seguir (um triângulo retângulo e três quadrados formados a partir dos lados do triângulo). Sabe-se que a soma das áreas dos três quadrados é 18 cm².




Em relação aos dados, analise as proposições a seguir e assinale a soma da(s) **correta(s)**.

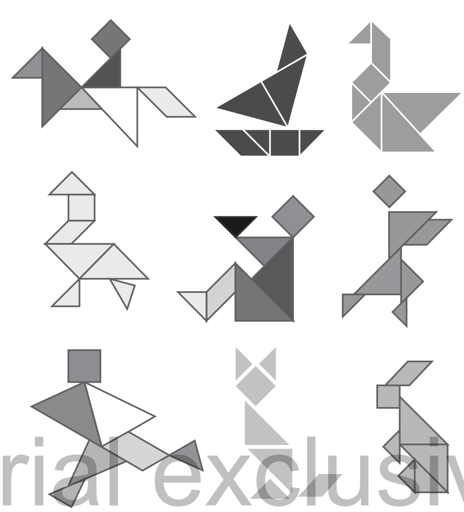
**01)** A área do quadrado 2 é 8 cm².
**02)** Com as informações dadas, podemos determinar os valores dos lados dos quadrados 1 e 3.
**04)** A soma das áreas dos quadrados 1 e 3 é 9 cm².
**08)** O lado do quadrado 2 vale 3 cm.
**16)** Os lados dos três quadrados apresentados estão relacionados pelo teorema de Pitágoras.

**8. CPS-PR (adaptado)**

O tangram é um quebra-cabeça chinês. Há uma lenda sobre esse quebra-cabeça que afirma que um jovem chinês, ao despedir-se de seu mestre, para uma longa viagem pelo mundo, recebeu uma tábua quadrada cortada em 7 peças (um quadrado, um paralelogramo e cinco triângulos).

Assim o discípulo poderia reorganizá-las para registrar todas as belezas da viagem. Lendas e histórias como essa sempre cercam a origem de objetos ou fatos, a respeito da qual temos pouco ou nenhum conhecimento, como é o caso do tangram. Se é ou não uma história verdadeira, pouco importa: o que vale é a magia, própria dos mitos e lendas.

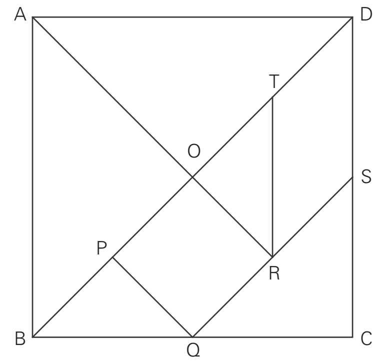
Disponível em: <https://tinyurl.com/htszezr>. Acesso em: 3 mar. 2017. (Adaptado).



BINGOPIXEL/ISTOCKPHOTO

Disponível em:<https://tinyurl.com/gngjyue>. Acesso em: 3 mar. 2017. Original colorido.

Observe o tangram, em uma possível disposição de suas peças.




Na figura, tem-se que:

- $\overline{QS}$ é paralelo a $\overline{BD}$;
- os polígonos ABCD e OPQR são quadrados;
- S é ponto médio de $\overline{CD}$;
- P é ponto médio de $\overline{OB}$;
- O é ponto médio de $\overline{BD}$.

Se a área do triângulo ABO é 16 $cm^2$, a área do quadrado OPQR é, em centímetros quadrados,

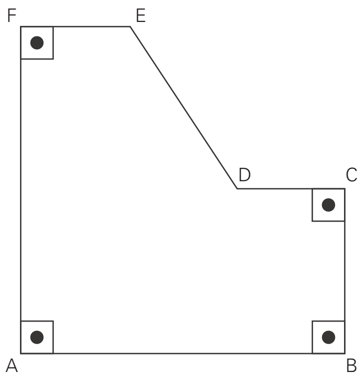
**a)** 2. **b)** 4. **c)** 6. **d)** 8. **e)** 10.

**9. PUC-Rio** – Na figura abaixo, temos que:

$\overline{AB} = \overline{AF} = 6$ cm

$\overline{BC} = 3$ cm

$CD = \overline{EF} = 2$ cm




**a)** Calcule o valor de $\overline{DE}$.

**b)** Calcule a área do polígono ABCDEF.

**10. Unifor-CE**

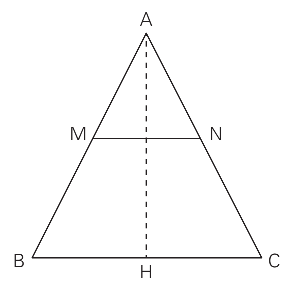
O Centro de Eventos do Ceará (CEC) recebeu 13 eventos durante o mês de outubro passado, com iniciativas ligadas a setores de economia, construção civil, moda e beleza. Um desses grandes eventos foi o Fortaleza Fashion Week, que ocorreu nos dias 12 e 13 de outubro no pavilhão leste do centro de eventos. Segundo a direção do evento, cada expositor recebeu um estande na forma retangular cuja área foi de 21,25 $m^2$ e perímetro de 22 m.

Diário do Nordeste 02/10/13 - adaptado.

Com base nos dados acima, pode-se afirmar que as dimensões do estande de cada expositor é:

**a)** 8,0 m × 3,5 m
**b)** 8,0 m × 2,5 m
**c)** 8,5 m × 3,5 m
**d)** 8,5 m × 2,5 m
**e)** 8,5 m × 3,0 m

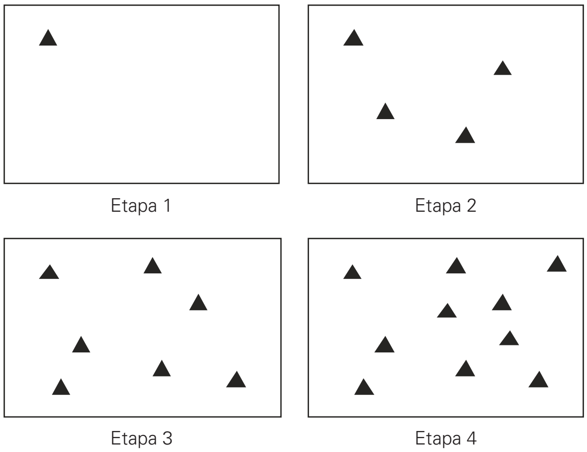
**11. Acafe-SC** – Na figura, AM = 8 cm, BM = 10 cm, BC = 54 cm, AH = $\frac{45}{2}$ cm e $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$.




Em relação (aproximada) entre a área do trapézio BCMN e a área do triângulo AMN, é correto afirmar:

**a)** A área do trapézio é o quádruplo da área do triângulo.
**b)** Diferem entre si em 360 $cm^2$.
**c)** O trapézio é 200% maior que o triângulo.
**d)** A razão entre as áreas é $\frac{13}{5}$.

**12. UFG-GO** – Uma chapa retangular com 170 $cm^2$ de área é perfurada, por etapas, com furos triangulares, equiláteros, com 1 cm de lado, como indica a figura a seguir.

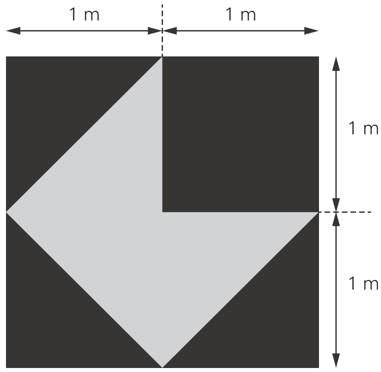



O número de furos acrescentados em cada etapa, a partir da segunda, é sempre o mesmo e não há interseção entre os furos. O porcentual da chapa original que restará na etapa 14 é, aproximadamente,

(Dado: $\sqrt{3} \approx 1,7$)

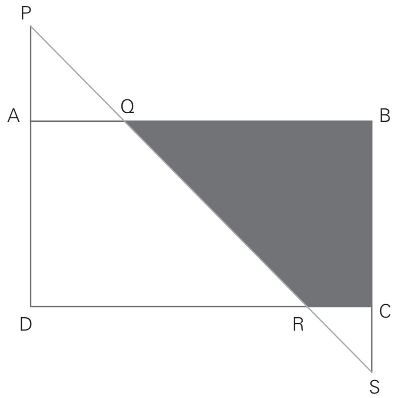
**a)** 10%
**b)** 30%
**c)** 70%
**d)** 80%
**e)** 90%

**13. FGV** – A figura a seguir representa a tela de um quadro pós-moderno, um quadrado cujos lados medem 2 metros. Deseja-se pintar o quadro nas cores cinza e preta, como descrito na figura.




**a)** Qual a área que deverá ser pintada em preto? Expresse a resposta em metros quadrados. Qual é a proporção de cor preta para cor cinza?
**b)** Se a pintura na cor preta custa R$ 100,00 o metro quadrado, e a pintura na cor cinza, R$ 200,00 o metro quadrado, qual será o custo total de pintura do quadro?
**c)** Se as cores forem invertidas (sendo a área cinza pintada de preto e a área preta pintada de cinza), qual será a variação percentual do custo total de pintura do quadro, com relação ao custo total obtido no item B?

**14. PUC-SP** – Considere o retângulo ABCD, com AB = 8 cm, BC = 5 cm e o segmento $\overline{PS}$ que intersecta os prolongamentos dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ nos pontos P e S, respectivamente, conforme mostra a figura.

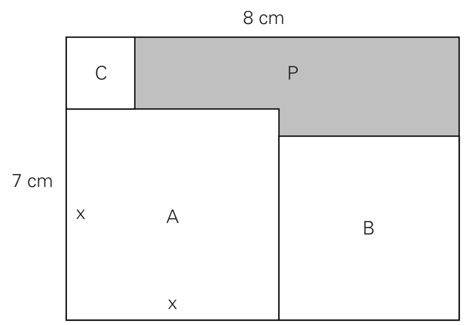



Fora de escala

Sabendo que AP = 3 cm e CS = 2 cm, a área do quadrilátero QBCR é

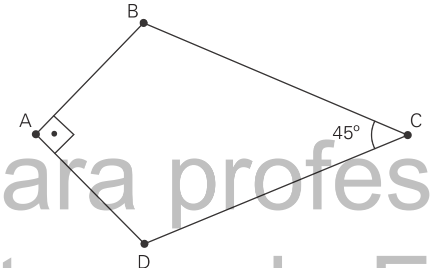
**a)** 18 cm².
**b)** 20 cm².
**c)** 22 cm².
**d)** 24 cm².

**15. ESPM (adaptado)** – A figura a seguir mostra um retângulo de lados 7 cm e 8 cm no qual estão contidos os quadrados A, B e C. A medida x pode variar entre 3,5 cm e 7 cm, fazendo que os lados dos três quadrados se alterem.




Dentro desse intervalo, qual o maior valor que a área do polígono P pode ter?

**16. Unicamp** – A figura abaixo exibe um quadrilátero ABCD, onde $\overline{AB} = \overline{AD}$ e $\overline{BC} = \overline{CD}$ = 2 cm.

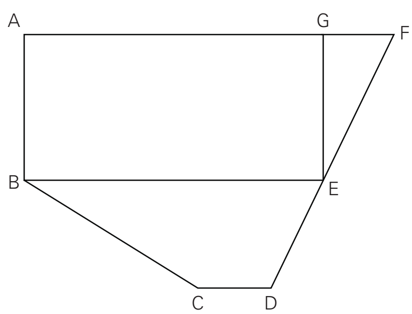


A área do quadrilátero ABCD é igual a

**a)** $\sqrt{2}$ cm².
**b)** 2 cm².
**c)** $2\sqrt{2}$ cm².
**d)** 3 cm².

## ESTUDO PARA O ENEM

**17. Fuvest** – O mapa de uma região utiliza a escala de 1:200 000. A porção desse mapa, contendo uma Área de Preservação Permanente (APP), está representada na figura, na qual $\overline{AF}$ e $\overline{DF}$ são segmentos de reta, o ponto G está no segmento $\overline{AF}$, o ponto E está no segmento $\overline{DF}$, ABEG é um retângulo e BCDE é um trapézio. Se AF = 15, AG = 12, AB = 6, CD = 3 e DF = $5\sqrt{5}$ indicam valores em centímetros no mapa real, então a área da APP é




Obs.: Figura ilustrativa, sem escala.

**a)** 100 km²
**b)** 108 km²
**c)** 210 km²
**d)** 240 km²
**e)** 444 km²

**18. Enem** C2-H8

A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

Disponível em: <www.arq.ufsc.br>. Acesso em: 3 mar. 2012.

Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%.

Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em

**a)** 4%.
**b)** 20%.
**c)** 36%.
**d)** 64%.
**e)** 96%.

**19. Enem** C2-H7

Um construtor precisa revestir o piso de uma sala retangular. Para essa tarefa, ele dispõe de dois tipos de cerâmicas:

**I.** cerâmica em forma de quadrado de lado **20 cm**, que custa **R$ 8,00** por unidade;
**II.** cerâmica em forma de triângulo retângulo isósceles de catetos com **20 cm**, que custa **R$ 6,00** por unidade.

A sala tem largura de **5 m** e comprimento de **6 m**.

O construtor deseja gastar a menor quantia possível com a compra de cerâmica. Sejam **x** o número de peças de cerâmica de forma quadrada e **y** o número de peças de cerâmica de forma triangular.

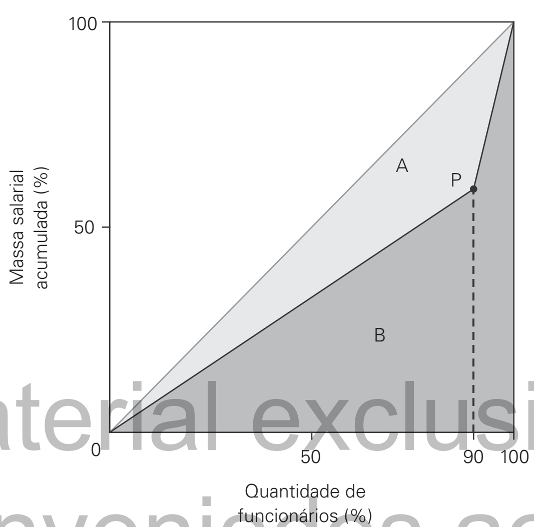
Isso significa, então, encontrar valores para **x** e **y** tais que $0{,}04x + 0{,}02y \geq 30$ e que tomem o menor possível valor de

**a)** $8x + 6y$.
**b)** $6x + 8y$.
**c)** $0{,}32x + 0{,}12y$.
**d)** $0{,}32x + 0{,}02y$.
**e)** $0{,}04x + 0{,}12y$.

**20. Enem** C2-H9

A distribuição de salários pagos em uma empresa pode ser analisada destacando-se a parcela do total da massa salarial que é paga aos 10% que recebem os maiores salários. Isso pode ser representado na forma de um gráfico formado por dois segmentos de reta, unidos em um ponto P, cuja abscissa tem valor igual a 90, como ilustrado na figura.

No eixo horizontal do gráfico tem-se o percentual de funcionários, ordenados de forma crescente pelos valores de seus salários, e no eixo vertical tem-se o percentual do total da massa salarial de todos os funcionários.




O Índice de Gini, que mede o grau de concentração de renda de um determinado grupo, pode ser calculado pela razão $\frac{A}{A + B}$, em que A e B são as medidas das áreas indicadas no gráfico.

A empresa tem como meta tornar seu Índice de Gini igual ao do país, que é 0,3. Para tanto, precisa ajustar os salários de modo a alterar o percentual que representa a parcela recebida pelos 10% dos funcionários de maior salário em relação ao total da massa salarial.

Disponível em: <www.ipea.gov.br>. Acesso em: 4 maio 2016. (Adaptado)

Para atingir a meta desejada, o percentual deve ser

**a)** 40%
**b)** 20%
**c)** 60%
**d)** 30%
**e)** 70%

# ÁREAS DE FIGURAS PLANAS - POLÍGONOS REGULARES

27

- Área do setor circular
- Área do segmento circular
- Apótema de um polígono regular inscrito em uma circunferência

**HABILIDADES**

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.


NATALI_MIS/ISTOCKPHOTO

Abelhas operando uma colmeia.

## Introdução

As abelhas constroem suas colmeias em lugares adequados que as abriguem do clima e de predadores. Podem ser desde buracos em árvores até latas vazias. Assim, é possível proteger essencialmente a rainha, que carrega em seu abdome os ovos tão importantes para gerar outra comunidade de abelhas. Para que a rainha possa colocar seus ovos, elas constroem os favos, que são constituídos de alvéolos no formato hexagonal. Com esse formato, há menor utilização de cera e máximo aproveitamento do espaço da colmeia.

Neste módulo, vamos estudar um pouco mais sobre as áreas de polígonos regulares, como o hexágono.

### POLÍGONOS REGULARES

Os polígonos com todos os lados congruentes e todos os ângulos com a mesma amplitude são denominados **polígonos regulares**. Todos eles podem ser inscritos em uma circunferência.

Vimos em módulos anteriores que o semiperímetro (p) de um polígono regular corresponde à metade do perímetro (2p).

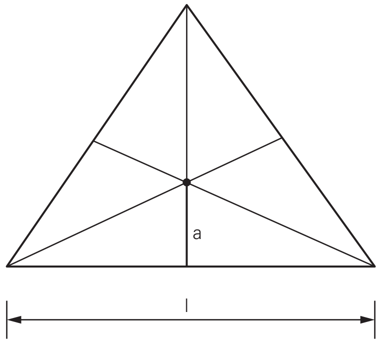
Para a área de um polígono regular de n lados, vamos considerar as seguintes relações:

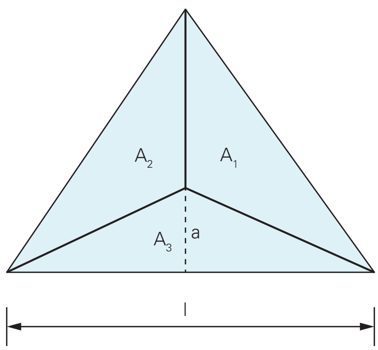
- Perímetro: 2p.
- Medida do lado do polígono: l.
- Medida do apótema: **a** (lembrando que o apótema corresponde ao segmento cujas extremidades são o centro do polígono e o ponto médio de um lado).

Agora, vamos calcular a área de dois polígonos distintos: o **triângulo equilátero** e o **hexágono**.

## TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Este polígono regular tem os três lados congruentes ($n = 3$).




Temos:

$A = A_1 + A_2 + A_3$

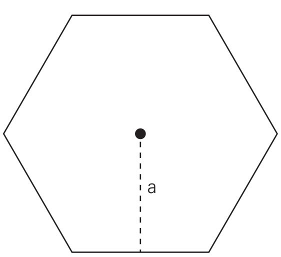
$A = 3 \cdot \left(\frac{l \cdot a}{2}\right) \rightarrow A = 3l \cdot \frac{a}{2}$

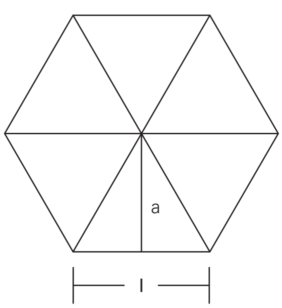
Como o perímetro do triângulo equilátero (2p) corresponde a (3l), obtemos:

$$A = 2p \cdot \frac{a}{2} \rightarrow A = p \cdot a$$

## HEXÁGONO

Este polígono regular tem os seis lados congruentes ($n = 6$).




Temos:

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$

$$A = 6 \cdot \left(\frac{l \cdot a}{2}\right) \rightarrow A = 6l \cdot \frac{a}{2}$$

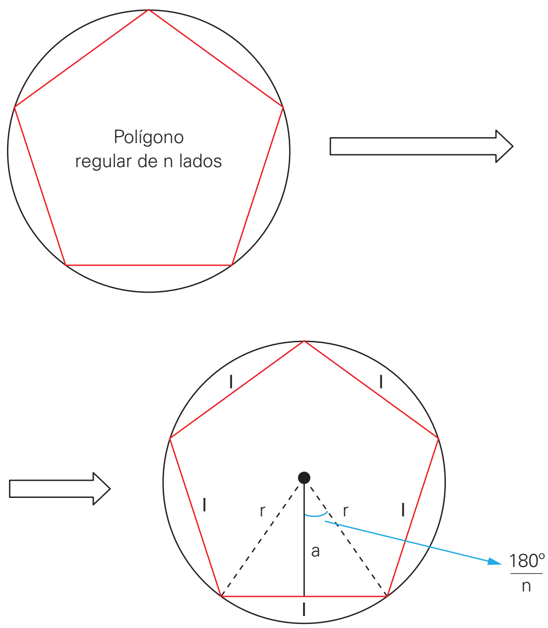
Como o perímetro do hexágono (2p) corresponde a 6l, obtemos:

$$A = 2p \cdot \frac{a}{2} \rightarrow A = p \cdot a$$

Em qualquer polígono regular, a área é igual ao produto do semiperímetro pela medida do apótema. Ou seja, $A = p \cdot a$.

## APÓTEMA DE UM POLÍGONO REGULAR INSCRITO EM UMA CIRCUNFERÊNCIA

Para calcular a área de qualquer polígono regular, basta sabermos o valor do apótema e de seu semiperímetro.




Como qualquer polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência, o cálculo de seu apótema é obtido por meio do número de lados **n** e da medida do raio **r** da circunferência.

$$\text{apótema: } a = r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$$

$$\text{lado: } l = 2 \cdot r \cdot \text{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$$

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1. Sistema Dom Bosco** – Qual a área de um pentágono regular com apótema de 10 cm e 50 cm de perímetro?

**Resolução**

Primeiro calculamos o semiperímetro p.

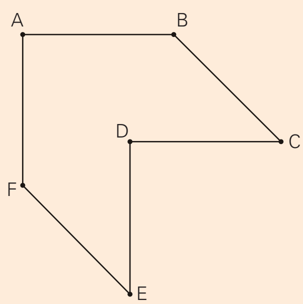
Como o perímetro (2p) = 50 cm: $p = \frac{50}{2} = 25$ cm.

Agora, calculamos a área do pentágono regular:

$A = p \cdot a = 25 \cdot 10$

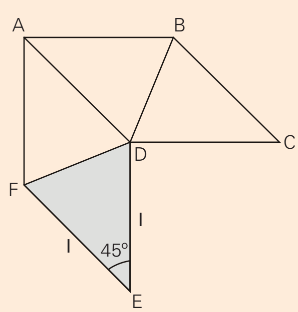
$\therefore A = 250\ \text{cm}^2$.

**2. Unioeste-PR** – Uma empresa de cerâmica desenvolveu uma nova peça (de cerâmica) para revestimento de pisos. A peça tem formato de hexágono não regular na forma do desenho da figura. Na figura, os segmentos AB e DC são paralelos entre si, bem como os segmentos AF e DE e os segmentos BC e EF. Também o ângulo BAF mede 90° e o ângulo DEF mede 45°. A empresa fabrica essa peça com todos os lados de mesma medida l. A área desta peça, em função do lado l, é




a) $2l^2$.
b) $l^2\sqrt{2}$.
c) $6l^2$.
d) $\frac{l^2\sqrt{2}}{2}$.
e) $\frac{l^2}{2}$.

**Resolução**

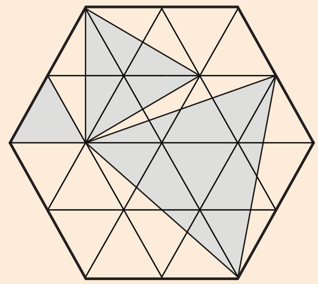



Para calcular a área do polígono, devemos calcular a área de um triângulo isósceles e multiplicá-la por 4.

$A = 4 \cdot A_{(\Delta DEF)} = 4 \cdot \frac{1}{2} l^2 \cdot \text{sen}45° = l^2\sqrt{2}$

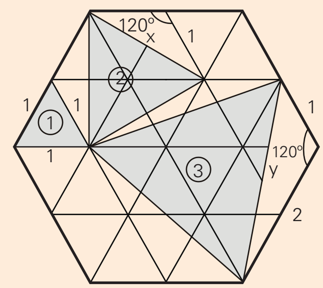
**3. CFTRJ** – A figura a seguir consta de um hexágono formado por 24 triângulos equiláteros de lado 1. A área sombreada é formada por três triângulos equiláteros de tamanhos distintos entre si.

Se S é a área sombreada e B é a área não sombreada do hexágono, o valor de $\frac{B}{S}$ é



a) $\frac{11}{24}$
b) $\frac{15}{24}$
c) $\frac{9}{11}$
d) $\frac{13}{11}$

**Resolução**




Podemos utilizar o teorema dos cossenos. Assim:

$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120°$
$x^2 = 3$
$y^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 120°$
$y^2 = 7$
$A = A_1 + A_2 + A_3$

$$S = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{y^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{7 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{4}$$

$$B = 24 \cdot \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{11 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{13 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

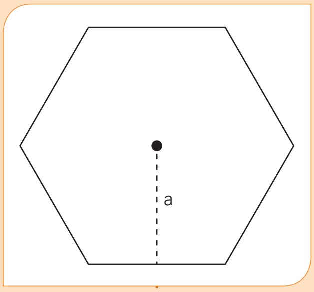
Sendo assim:

$$\frac{B}{S} = \frac{\frac{13 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\frac{11 \cdot \sqrt{3}}{4}} = \frac{13}{11}$$

# ROTEIRO DE AULA

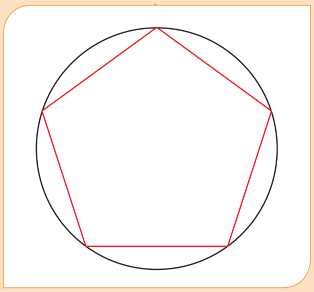
## ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – POLÍGONOS REGULARES

**Polígono regular**




$A = \underline{\quad p \cdot a \quad}$

**Polígono regular inscrito em uma circunferência**



apótema: $a = r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$

lado: $l = \underline{\quad 2 \cdot r \quad} \cdot \text{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Mackenzie** – Um arame de 63 m de comprimento é cortado em duas partes, e com elas constroem-se um triângulo e um hexágono regulares. Se a área do hexágono é 6 vezes maior que a área do triângulo, podemos concluir que o lado desse triângulo mede

**a)** 5 m
**b)** 7 m
**c)** 9 m
**d)** 11 m
**e)** 13 m

Perímetro do triângulo: P = 3x, em que **x** é a medida do lado.

Perímetro do hexágono: 63 – 3x, em que $\left(\frac{21 - x}{2}\right)$ é a medida do lado.

Sabendo que a área do hexágono é seis vezes a área do triângulo, temos a seguinte equação:

$$6 \cdot \left(\frac{21-x}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$441 - 42x + x^2 = 4x^2$

$3x^2 + 42x - 441 = 0$ (simplificar por 3)

$x^2 + 14x - 147 = 0$

$a = 1$, $b = 14$ e $c = -147$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-147)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-14 \pm 28}{2}$$

$$x_I = \frac{-14 + 28}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$x_{II} = \frac{-14 - 28}{2} = \frac{-42}{2} = -21$$

Após solucionar a equação, obtemos x = 7 ou x = –21 (não convém). Logo, concluímos que a área do triângulo é 7 m.

**2. UPE-SSA (adaptado)** C2-H9

Rafael decidiu colocar cerâmicas com a forma de hexágonos regulares no piso da sala de seu escritório. Sabendo que a área do piso do escritório mede 25,5 m² que a cerâmica mede 10 cm de lado, e desconsiderando a área ocupada pelos rejuntes, quantas pedras de cerâmica serão necessárias para cobrir todo o piso dessa sala?

NUNAWWOOFY/ISTOCKPHOTO

Considere $\sqrt{3} = 1,7$.

**a)** 225
**b)** 425
**c)** 765
**d)** 1 000
**e)** 1 250

10 cm = 0,1 m

Área de cada cerâmica em m²:

$$A = 6 \cdot \frac{(0,1)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{(0,1)^2 \cdot 1,7}{4} = 0,0255 \text{ m}^2$$

Número de cerâmicas:

$$\frac{25,5}{0,0255} = 1\,000$$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

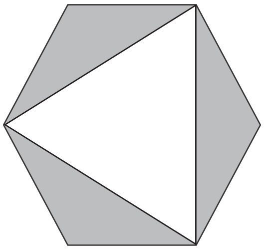
**Habilidade**: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

**3. CP2 (adaptado)**

Um heliponto é um local destinado exclusivamente às operações de aterragem e decolagem de helicópteros. Diferentemente dos heliportos, os helipontos não dispõem de instalações e facilidades complementares, como área de taxiamento, reabastecimento, pátios e hangares para estacionamento e manutenção dos helicópteros.

Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Heliponto>. Acesso em: 22 out. 2016. (Adaptado).

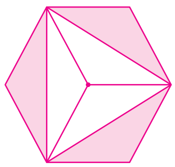
Oscar, arquiteto, foi incumbido de fazer o projeto de um heliponto para a cobertura de um edifício comercial no centro da cidade. Decidiu fazer a pista de pouso no formato de hexágono regular com 12 metros de lado, sendo a chamada "área de toque" um triângulo equilátero inscrito nele.



Dessa forma, por segurança, o helicóptero deveria pousar, sempre, na parte interna do triângulo equilátero. E, para facilitar a visualização da "área de toque", a região interna ao hexágono e externa ao triângulo equilátero seria pintada com tinta amarela fluorescente.

Sendo assim, qual a área a ser pintada com essa tinta amarela?

O hexágono da figura a seguir pode ser separado em 6 triângulos congruentes. Como os triângulos são congruentes, eles têm a mesma área. Logo, podemos concluir que a área pedida corresponde à metade da área do hexágono regular.



Sendo assim:

$$A = \frac{\frac{6 \cdot 12^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}{2} = 108 \cdot \sqrt{3}$$

$\therefore A = 108\sqrt{3}$

**4. Uema (adaptado)** – Analise a situação a seguir: um arquiteto foi contratado para decorar a entrada de um templo religioso, no formato de um triângulo equilátero, com uma porta de madeira cujas dimensões medem 1,05 m por 2,5 m, inserida nesse triângulo. Sabe-se ainda que a altura do triângulo mede 4,25 m e que a área da porta não receberá decoração. Qual a área, em metros quadrados, a ser decorada? (use $\sqrt{3} = 1{,}7$)

Como sabemos, a área **S** de um triângulo equilátero de altura **h** é dada por:

$$S = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$$

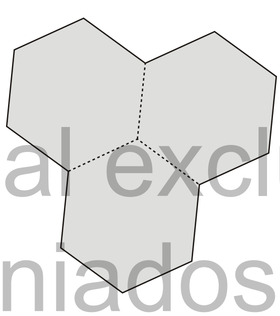
Logo, o resultado pedido é igual a:

$$\frac{(4{,}25)^2 \cdot 1{,}7}{3} - 1{,}05 \cdot 2{,}5$$

$10{,}24 - 2{,}63$

$A = 7{,}61\ m^2$

**5. Fuvest** – Uma das piscinas do Centro de Práticas Esportivas da USP tem o formato de três hexágonos regulares congruentes, justapostos, de modo que cada par de hexágonos tem um lado em comum, conforme representado na figura abaixo. A distância entre lados paralelos de cada hexágono é de 25 metros.



Assinale a alternativa que mais se aproxima da área da piscina.

**a)** 1 600 m²
**b)** 1 800 m²
**c)** 2 000 m²
**d)** 2 200 m²
**e)** 2 400 m²

Seja l a medida, em metros, dos lados dos hexágonos que constituem a piscina.

Uma vez que a distância entre os lados paralelos de um hexágono regular é igual ao dobro do apótema do hexágono, obtemos:

$$l = 25 \cdot tg30° = \frac{25\sqrt{3}}{3}\ m$$

Sendo assim, a área da piscina é dada por:

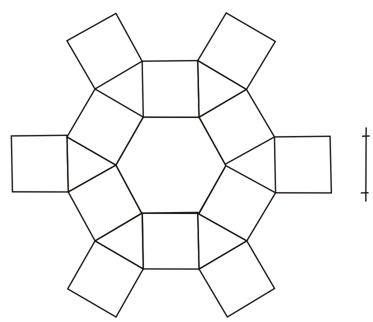
$$3 \cdot \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{25\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{1\,875}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$\cong 1\,623{,}8\ m^2$

Portanto, 1 600 m² é o valor que mais se aproxima da área da piscina.

**6. UFSJ-MG** – A seguinte figura é composta por polígonos regulares, cada um deles tendo todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes.




A medida do lado de cada um desses polígonos é igual a b unidades de comprimento. Com relação a essa figura, é incorreto afirmar que

**a)** a área total ocupada pelo hexágono é $\frac{3}{2}\sqrt{3}\ b^2$ unidades de área.
**b)** a área total da figura é $(12 + 6\sqrt{3})\ b^2$ unidades de área.
**c)** a área total ocupada pelos triângulos é $\frac{3}{2}\sqrt{3}\ b^2$ unidades de área.
**d)** a área total ocupada pelos quadrados é $12b^2$ unidades de área.

Soma das áreas dos quadrados: $12b^2$.

Soma das áreas dos triângulos:

$$6 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3b^2\sqrt{3}}{2}$$

Área do hexágono:

$6 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3b^2\sqrt{3}}{2}$

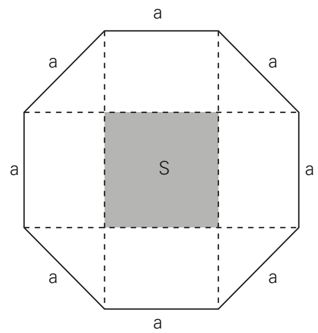
Área total da figura:

$12b^2 + 3b^2\sqrt{3}$

Logo, a afirmação incorreta é a da alternativa B.

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. Insper-SP** – As disputas de MMA (*mixed martial arts*) ocorrem em ringues com a forma de octógonos regulares com lados medindo um pouco menos de 4 metros, conhecidos como "Octógonos". Medindo o comprimento exato de seus lados, pode-se calcular a área de um Octógono decompondo-o, como mostra a figura a seguir, em um quadrado, quatro retângulos e quatro triângulos retângulos e isósceles.




A medida do lado do quadrado destacado no centro da figura é igual à medida a do lado do "Octógono". Se a área desse quadrado é S, então a área do "Octógono" vale

**a)** $S(2\sqrt{2} + 1)$.
**b)** $S(\sqrt{2} + 2)$.
**c)** $2S(\sqrt{2} + 1)$.
**d)** $2S(\sqrt{2} + 2)$.
**e)** $4S(\sqrt{2} + 1)$.

**8. Uece (adaptado)** – Qual a medida da área, em m², de um hexágono regular inscrito em uma circunferência com raio que mede $\sqrt{2}$ m?

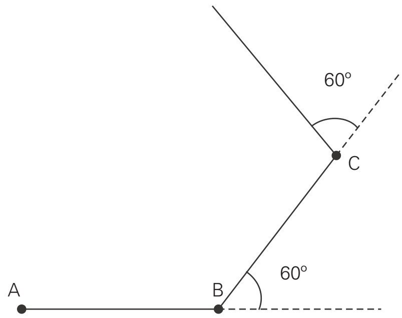
**a)** $3\sqrt{3}$.

**b)** $3\sqrt{2}$.

**c)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

**d)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

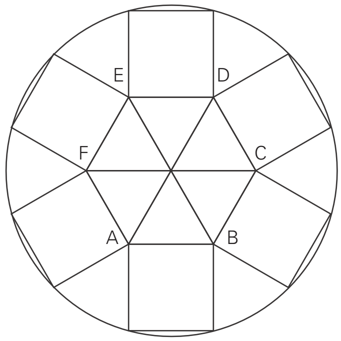
**9. Fac. Pequeno Príncipe** – A figura a seguir descreve o movimento executado por uma máquina para o corte de uma placa metálica:




Partindo de A, ela sistematicamente avança 6 cm e gira 60° para a esquerda, até retornar ao ponto A. A área da superfície recortada é:

**a)** $18\sqrt{3}$ cm².
**b)** $36\sqrt{3}$ cm².
**c)** $54\sqrt{3}$ cm².
**d)** $64\sqrt{3}$ cm².
**e)** $120\sqrt{3}$ cm².

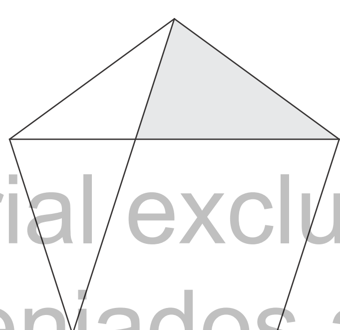
**10. UFRGS** – Na figura abaixo, encontram-se representados o hexágono regular ABCDEF, seis quadrados com um de seus lados coincidindo com um lado do hexágono e um círculo que passa por vértices dos quadrados.




Se o lado do hexágono é 1, então a área do círculo é

**a)** $\pi + \sqrt{3}$.
**b)** $\pi\sqrt{3}$.
**c)** $\pi(2 + \sqrt{3})$.
**d)** $2\pi\sqrt{3}$.
**e)** $\pi(1 + \sqrt{3})$.

**11. UFRGS** – Considere o pentágono regular de lado 1 e duas de suas diagonais, conforme representado na figura abaixo.



A área do polígono sombreado é

**a)** $\frac{\text{sen}36°}{2}$.
**b)** $\frac{\text{sen}72°}{2}$.
**c)** $\frac{\text{sen}72°}{3}$.
**d)** sen36°.
**e)** sen72°.

**12. Escola Naval-RJ (adaptado)** – Seja ABCD um quadrado de lado l, em que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são suas diagonais. Seja O o ponto de encontro dessas diagonais e sejam P e Q os pontos médios dos segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, respectivamente. Qual a área do quadrilátero que tem vértices nos pontos A, B, Q e P?

**a)** $\frac{3l^2}{16}$
**b)** $\frac{l^2}{16}$
**c)** $\frac{3l^2}{8}$
**d)** $\frac{l^2}{l}$
**e)** $\frac{3l^2}{24}$

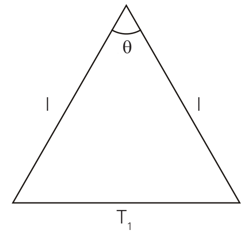
**13. Unicamp** – O perímetro de um triângulo retângulo é igual a 6,0 m e as medidas dos lados estão em progressão aritmética (PA). A área desse triângulo é igual a

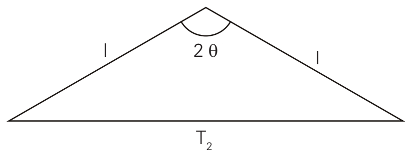
**a)** 3,0 $m^2$.
**b)** 2,0 $m^2$.
**c)** 1,5 $m^2$.
**d)** 3,5 $m^2$.

**14. UEM-PR** – Considere um triângulo ABC retângulo em A a circunferência $\lambda$ que passa pelos pontos A, B e C e considere D o ponto de BC de modo que AD é uma altura do triângulo ABC. Sendo o ponto O o centro de $\lambda$, assinale o que for correto.

**01)** A mediana relativa ao lado BC mede metade do comprimento do lado BC.
**02)** O comprimento do lado BC é igual à soma dos comprimentos dos lados AB e AC.
**04)** Os triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes.
**08)** O segmento BC é um diâmetro da circunferência $\lambda$.
**16)** Se o triângulo ABC é isósceles, sua área corresponde a mais de um terço da área do círculo delimitado por $\lambda$.

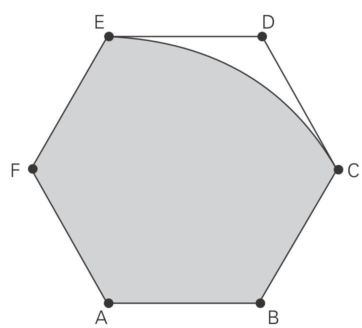
**15. Insper-SP (adaptado)** – Movendo as hastes de um compasso, ambas de comprimento l, é possível determinar diferentes triângulos, como os dois representados a seguir, fora de escala.




Se a área do triângulo $T_1$ é o triplo da área do triângulo $T_2$, então qual o valor de $\cos\theta$?

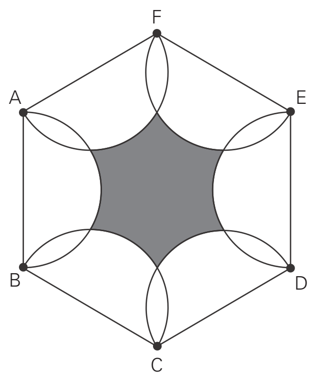
**16. Insper-SP** – Na figura, o hexágono regular ABCDEF tem lado medindo 2 cm, e o arco de circunferência CE tem centro no vértice A.




A área da região sombreada, em $cm^2$, é igual a

**a)** $2\pi + 2\sqrt{3}$
**b)** $\pi + 2\sqrt{3}$
**c)** $\pi + \sqrt{3}$
**d)** $2\pi + \sqrt{3}$
**e)** $3\pi + \sqrt{3}$

**17. UFRGS** – A partir de um hexágono regular de lado unitário, constroem-se semicírculos de diâmetros também unitários, conforme indicados na figura abaixo.




A medida da área sombreada é

**a)** $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{4}$.

**b)** $\frac{\pi}{4}$.

**c)** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

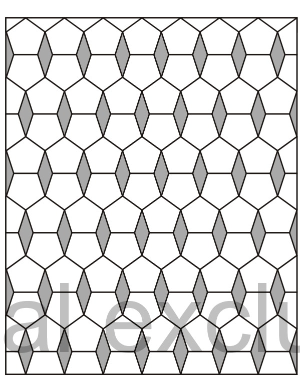
**d)** $\frac{3\sqrt{3} + \pi}{4}$.

**e)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Insper-SP** C2-H8

O mosaico da figura é formado por losangos congruentes entre si e por pentágonos regulares.



A razão entre as áreas de um pentágono e um losango, nessa ordem, é igual a R.

A razão entre a área da região clara e a área da região escura da figura, nessa ordem, é aproximadamente igual a

**a)** 3R.

**b)** 2R.

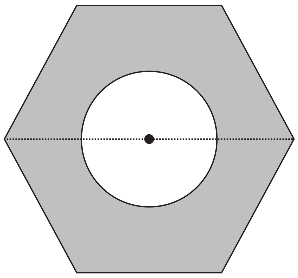
**c)** R.

**d)** $\frac{R}{2}$.

**e)** $\frac{R}{3}$.

**19. UPE** C2-H7

A figura a seguir representa um hexágono regular de lado medindo 2 cm e um círculo cujo centro coincide com o centro do hexágono, e cujo diâmetro tem medida igual à medida do lado do hexágono.



Considere: $\pi \cong 3$ e $\sqrt{3} \cong 1{,}7$

Nessas condições, quanto mede a área da superfície pintada?

**a)** 2,0 $cm^2$
**b)** 3,0 $cm^2$
**c)** 7,2 $cm^2$
**d)** 8,0 $cm^2$
**e)** 10,2 $cm^2$

**20. Enem** C2-H9

Em uma casa, há um espaço retangular medindo 4 m por 6 m, onde se pretende colocar um piso de cerâmica resistente e de bom preço. Em uma loja especializada, há cinco possibilidades de pisos que atendem às especificações desejadas, apresentadas no quadro:

| Tipo do piso | Forma | Preço do piso (em reais) |
|---|---|---|
| I | Quadrado de lado medindo 20 cm | 15,00 |
| II | Retângulo medindo 30 cm por 20 cm | 20,00 |
| III | Quadrado de lado medindo 25 cm | 25,00 |
| IV | Retângulo medindo 16 cm por 25 cm | 20,00 |
| V | Quadrado de lado medindo 40 cm | 60,00 |

Levando-se em consideração que não há perda de material, dentre os pisos apresentados, aquele que implicará o menor custo para a colocação no referido espaço é o

**a)** I.
**b)** II.
**c)** III.
**d)** IV.
**e)** V.

# 28 ÁREAS DE FIGURAS CURVILÍNEAS I

- Área de figura curvilínea
- Área de círculo e coroa circular

**HABILIDADES**

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.


SYKONO/ISTOCKPHOTO

Jogo em quadra de basquete, na qual podem ser observadas formas retas e curvilíneas.

## Introdução

O basquetebol 3 × 3 se tornará um esporte olímpico nos jogos de verão de Tóquio, em 2020. Segundo a Federação Internacional de Basquete (Fiba), essa modalidade é uma das mais praticadas no meio urbano ao redor do mundo. Nessa variante do basquete tradicional, as equipes têm 4 jogadores, sendo 3 titulares e 1 reserva. A bola é menor que a tradicional, porém com mesmo peso. Os jogos são disputados em apenas meia quadra, com partidas de dez minutos, que podem ser encerradas antes se uma das equipes marcar 21 pontos.

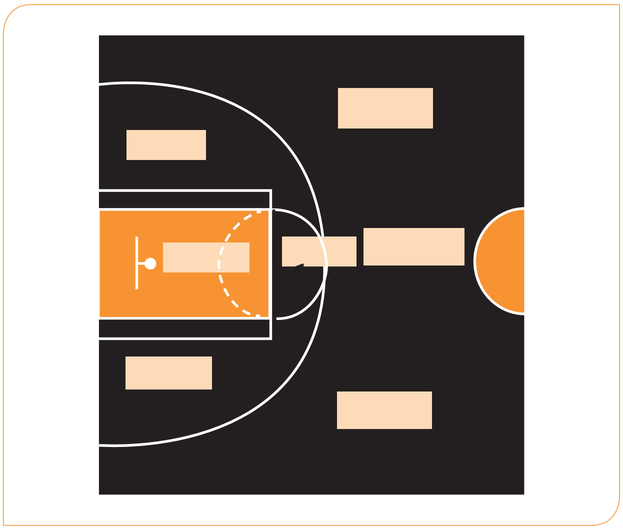
A quadra de basquete 3 × 3 é um bom exemplo no qual podemos encontrar algumas figuras geométricas planas.

### FIGURAS CURVILÍNEAS

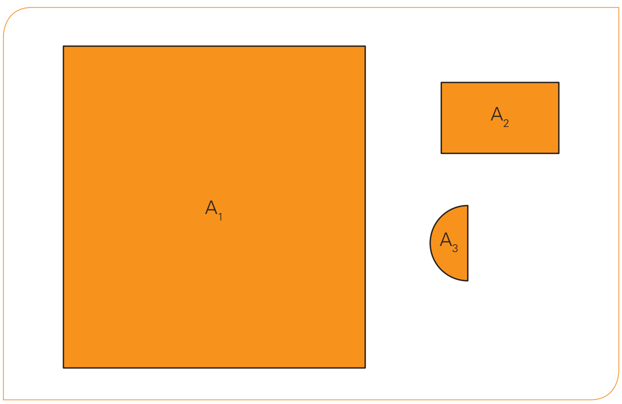
Há muitas formas de calcularmos áreas de figuras curvilíneas. Neste módulo, ao nos depararmos com curvas diversas, o cálculo de sua área será obtido com a segmentação dessa figura em áreas já conhecidas, para, enfim, encontrarmos a medida desejada.

### ÁREA DE UMA FIGURA CURVILÍNEA

Vamos supor que pretendemos pintar uma quadra de basquete, com exceção do semicírculo e do retângulo dos dois pontos. Como devemos proceder?



Nesse caso, primeiro calculamos a área total da quadra $A_1$ (retangular), depois subtraímos as áreas $A_2$ (retangular) e $A_3$ (semicírculo). Assim obtemos a área A desejada.



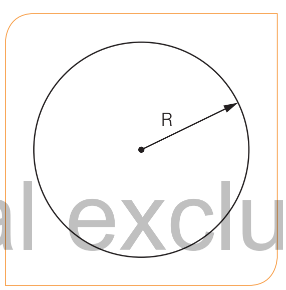

$$A = A_1 - A_2 - A_3$$

O procedimento adotado para o cálculo da área de figuras curvilíneas requer o uso de algumas áreas já conhecidas. Portanto, vamos recordá-las a seguir.

## ÁREAS DE CÍRCULOS E COROA CIRCULAR

### ÁREA DE UM CÍRCULO

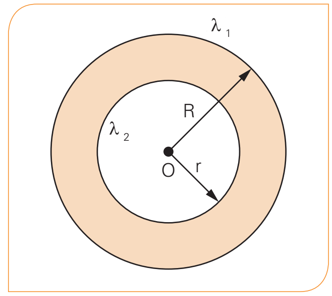
A área de um círculo é igual ao produto do quadrado do raio pelo número $\pi$.




$$A = \pi r^2$$

### ÁREA DE UMA COROA CIRCULAR

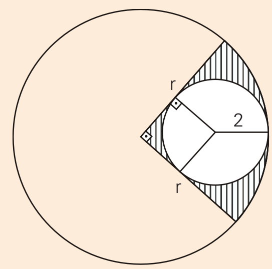
A área de uma coroa circular de raios **R** e **r** é calculada da seguinte maneira:




$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

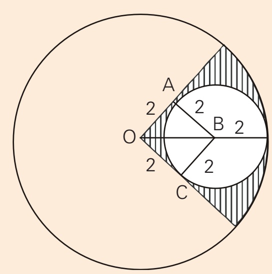
**1. CFTMG** – Uma circunferência de raio 2 tangencia outra circunferência e dois de seus raios, conforme a figura seguinte.




O valor da área hachurada é

**a)** $2\pi\sqrt{2}$
**b)** $3\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$
**c)** $2\pi\left(\sqrt{2}-3\right)$
**d)** $\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)$

**Resolução**




$OB = 2\sqrt{2}$ (diagonal do quadrado)

Logo, o raio do setor será $2\sqrt{2} + 2$.

Calculando a área assinalada:

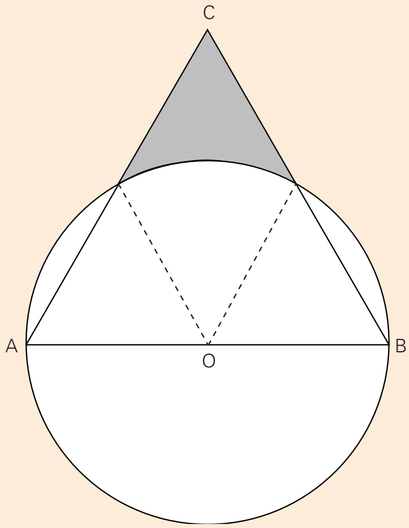
$$A = \pi \cdot \frac{\left(2\sqrt{2} + 2\right)}{4} - \pi \cdot 2^2$$

$$A = \pi \cdot ((\sqrt{2} + 1)^2 - 1)$$

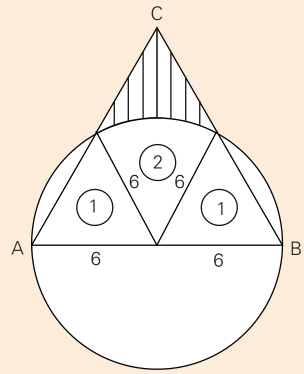
$$A = \pi \cdot (2 + 2\sqrt{2} - 1)$$

$$A = \pi \cdot (2 \cdot \sqrt{2} - 1)$$

**2. UFPE** – Na ilustração a seguir, ABC é um triângulo equilátero, e o lado AB contém o centro O da circunferência. Se a circunferência tem raio 6, qual o inteiro mais próximo da área da região sombreada (interior ao triângulo e exterior à circunferência)?




**Resolução**:




Lado do triângulo equilátero = 12 cm. Então:

$A = A_{ABC} - 2 \cdot A_1 - A_2$

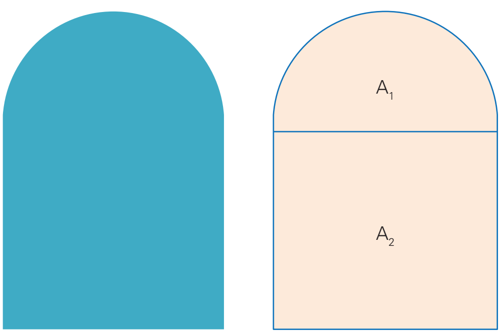
$A = \dfrac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \dfrac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi \cdot 6^2}{6}$

$A = 36 \cdot 1{,}7 - 2 \cdot 9 \cdot 1{,}7 - 18{,}84$

$A = 11{,}76$

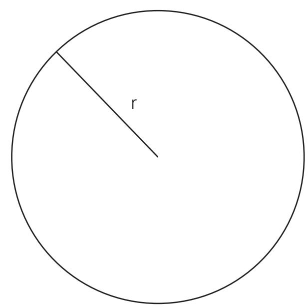
# ÁREAS DE FIGURAS CURVILÍNEAS I

## Figura curvilínea




Segmentar a figura em áreas conhecidas.

## Círculo




$A = \pi r^2$.

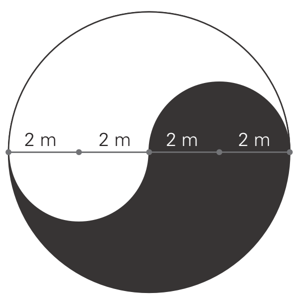
## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. IFSC**

O fenômeno conhecido como Agroglifo, figuras geométricas ou grandes círculos, se repetiu em 2013 na cidade de Ipuaçu, no Oeste do Estado de Santa Catarina. Moradores avistaram dois desenhos em formatos diferentes e maiores que os do ano passado. Segundo os moradores, o fenômeno acontece na cidade desde 2008, sempre nesta época do ano e atrai curiosos e especialistas.

Texto disponível em: <http://dc.clicrbs.com.br/sc/noticias/noticia/2013/11/figuras-geometricas-e-circulos-surgem-novamente-na-cidade-de-ipuacu-oeste-do-estado-4321378.html>. Acesso em: 10 ago. 2014. Adaptado.

Suponha que uma das figuras encontradas na cidade de Ipuaçu seja a figura abaixo, formada por um círculo maior e dois semicírculos menores, cujas dimensões estão indicadas na figura. Sendo assim, qual a área da região destacada em preto?



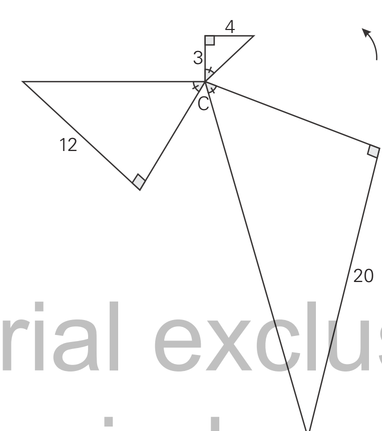

(Use $\pi = 3{,}14$)

A área destacada equivale à área de um semicírculo de raio 4 m.

$A = \frac{\pi \cdot 4}{2} = 3{,}14 \cdot 8 = 25{,}12 \text{ m}^2$

**2. UFJF-PISM** C2-H8

Conforme a figura a seguir, um ventilador com design moderno possui 3 pás em formato de triângulos retângulos. Ao ligar o ventilador, as pás giram no sentido anti-horário, e o ponto C é o centro da rotação do ventilador.




A área máxima da região determinada por essa rotação, em unidades de área, é:

a) $9\pi$
b) $15\pi$
c) $25\pi$
d) $225\pi$
e) $625\pi$

De acordo com as informações, os três triângulos são semelhantes por AA.

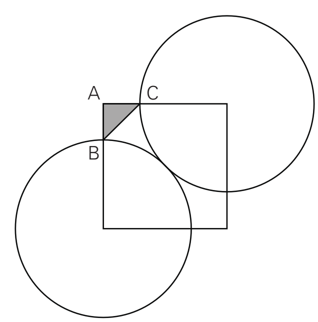
Logo, sendo 5 a medida da hipotenusa do maior, a hipotenusa do maior é 25.

Sendo assim, a área pedida corresponde à área do círculo com centro em C e raio 25, isto é, $625\pi$ u.a.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**3. UFRGS** – Dois círculos tangentes e de mesmo raio têm seus respectivos centros em vértices opostos de um quadrado, como mostra a figura abaixo.




Se a medida do lado do quadrado é 2, então a área do triângulo ABC mede

a) $3 - 2\sqrt{2}$.
b) $6 - 4\sqrt{2}$.
c) $12 - 4\sqrt{2}$.
d) $\pi \cdot (3 - 2\sqrt{2})$.
e) $\pi \cdot (6 - 4\sqrt{2})$.

A diagonal do quadrado é igual ao diâmetro dos círculos. Sendo assim, se r é a medida do raio dos círculos, então $2r = 2\sqrt{2} \leftrightarrow r = \sqrt{2}$.

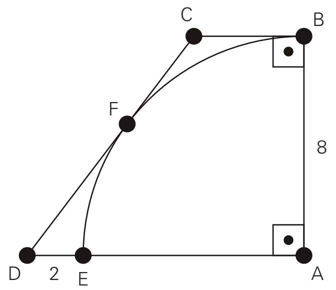
Dessa forma, $AB = AC = 2 - \sqrt{2}$. Portanto:

$(ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2}$

$(ABC) = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2}$

$(ABC) = 3 - 2\sqrt{2}$

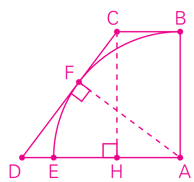
**4. ESPM** – A figura abaixo mostra um trapézio retângulo ABCD e um quadrante de círculo de centro A, tangente ao lado CD em F.




Se AB = 8 cm e DE = 2 cm, a área desse trapézio é igual a:

**a)** 48 cm²
**b)** 72 cm²
**c)** 56 cm²
**d)** 64 cm²
**e)** 80 cm²

Vamos considerar a figura, em que **H** é o pé da perpendicular baixada de **C** sobre $\overline{AD}$.




Sabendo que $\overline{CD}$ é tangente ao quadrante no ponto **F**, o triângulo AFD é retângulo em **F**.

Além do mais, CH = AB = 8 cm e $A\hat{D}F \equiv H\hat{D}C$ implicam em CD = = AD = 10 cm (os triângulos AFD e CHD são congruentes).

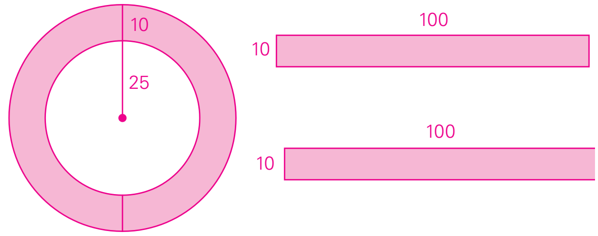
Sendo assim, é imediato que DH = 6 cm. Portanto BC = 4 cm.

A área do trapézio ABCD é igual a: $\left(\frac{AD+BC}{2}\right) \cdot AB = \left(\frac{10+4}{2}\right) \cdot 8 = 56$ cm²

**5. UFPB (adaptado)** – Para estimular a prática de atletismo entre os jovens, a prefeitura de uma cidade lançou um projeto de construção de ambientes destinados a esse fim. O projeto contempla a construção de uma pista de atletismo com 10 m de largura em torno de um campo de futebol retangular medindo 100 m x 50 m. A construção será feita da seguinte maneira: duas partes da pista serão paralelas às laterais do campo; as outras duas partes estarão, cada uma, entre duas semicircunferências, conforme a figura a seguir.

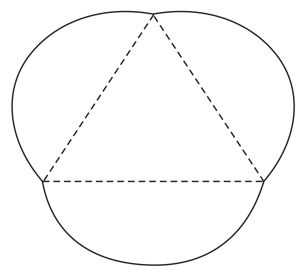

A partir desses dados, qual a área da pista de atletismo?

Segmentando a figura e calculando cada área individualmente, temos:




$A_{coroa} = \pi \cdot (35^2 - 25^2)$
$A_{coroa} = 3{,}14 \cdot (35^2 - 25^2)$
$A_{coroa} = 3{,}14 \cdot (600)$
$A_{coroa} = 1\,884$ m²
$A_{retângulos} = 2 \cdot 100 \cdot 10$
$A_{retângulos} = 2\,000$ m²
$A = A_{coroa} + A_{retângulos}$
$A = 1\,884 + 2\,000$
$A = 3\,884$ m²

**6. Unifor-CE** – A prefeitura do município de Jaguaribe, no interior cearense, projeta fazer uma reforma na praça ao lado da igreja no distrito de Feiticeiro. A nova praça terá a forma de um triângulo equilátero de 40 m de lado, sobre cujos lados serão construídas semicircunferências, que serão usadas na construção de boxes para a exploração comercial. A figura abaixo mostra um desenho da nova praça.



Com base nos dados acima, qual é aproximadamente a área da nova praça em m²?

Obs.: use $\sqrt{3} \cong 1{,}7$ e $\pi \cong 3{,}1$

**a)** 2 430
**b)** 2 480
**c)** 2 540
**d)** 2 600
**e)** 2 780

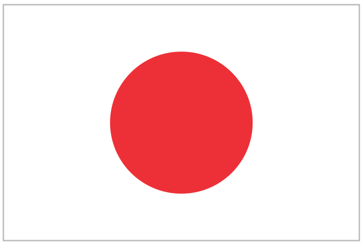
De acordo com as informações, o resultado pedido é dado por:

$3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{40}{2}\right)^2 + \frac{40^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{3{,}1}{2} \cdot 400 + \frac{1600 \cdot 1{,}7}{4} =$

$= 1\,860 + 680 = 2\,540$ m².

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. IFPE (adaptado)** – A imagem abaixo reproduz a bandeira de uma das nações mais desenvolvidas em todo o mundo, o Japão.



Disponível em: <http://www.br.emb-japan.go.jp/cultura/bandeira.html.> Acesso em: 06 out. 2017.

Sabendo que a bandeira tem formato retangular de dimensões 8 cm e 12 cm e um círculo central de 2 cm e raio, usando $\pi = 3$, qual a área da bandeira pintada de branco, em centímetros quadrados?

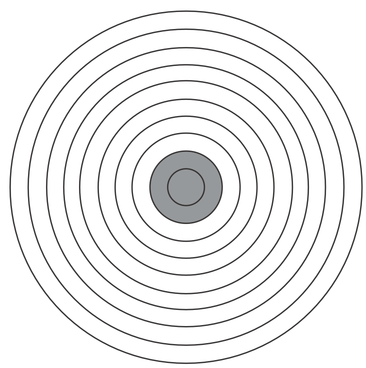
**8. UPE-SSA** – A Pizzaria Italiana vende pizzas inteiras ou em porções (fatias). A tabela abaixo apresenta o número de fatias e o diâmetro de acordo com o tipo da pizza.

| Tipo da Pizza | Número de Fatias | Diâmetro (cm) |
|---|---|---|
| Broto | 6 | 30 |
| Grande | 8 | 35 |
| Gigante | 10 | 40 |

Se uma pizza broto inteira custa R$ 27,00, qual deve ser o preço de cada fatia da pizza gigante?

**a)** R$ 6,50
**b)** R$ 4,80
**c)** R$ 4,50
**d)** R$ 3,90
**e)** R$ 3,50

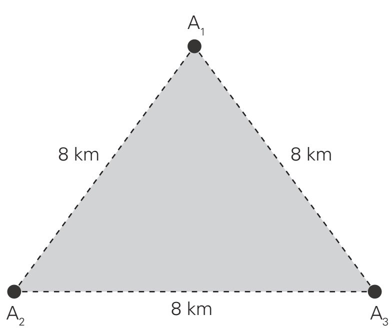
**9. Fatec** – Nas competições olímpicas de tiro com arco, o alvo possui 1,22 m de diâmetro. Ele é formado por dez circunferências concêntricas pintadas sobre um mesmo plano e a uma distância constante de 6,1 cm entre si, como vemos no esquema.



Podemos afirmar corretamente que a razão entre a área da região cinza e a área total do alvo, nessa ordem, é igual a

**a)** $\frac{3}{10}$.
**b)** $\frac{2}{15}$.
**c)** $\frac{1}{25}$.
**d)** $\frac{10}{61}$.
**e)** $\frac{5}{21}$.

**10. Uepa** – Um dos problemas enfrentados pelas empresas de telefonia celular é disponibilizar sinal de qualidade seus usuários, fato que nos últimos tempos tem gerado uma série de reclamações segundo o Procon. Visando solucionar os problemas de infraestrutura e cobrir uma região com sinal de qualidade, uma operadora instalou 3 antenas ($A_1$, $A_2$ e $A_3$) situadas nos vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 8 km, conforme indicado na figura abaixo. Nessas condições e considerando que cada uma das antenas cobre uma área circular equivalente a $16\pi$ km$^2$ com sinal de qualidade, é correto afirmar que o usuário dessa operadora que se encontrar:




**a)** Num dos lados do triângulo não terá sinal de qualidade.

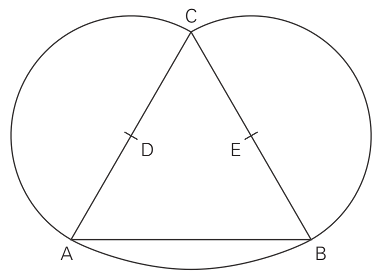
**b)** Dentro da área delimitada pelo triângulo sempre terá um sinal de qualidade.

**c)** No centro do triângulo não terá sinal de qualidade.

**d)** A 4 km de um dos vértices do triângulo não terá um sinal de qualidade.

**e)** Num dos vértices do triângulo não terá sinal de qualidade.

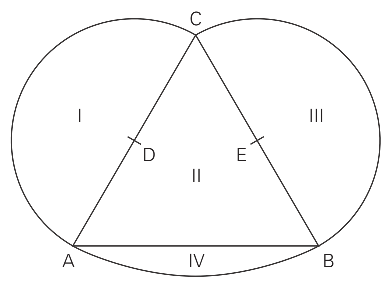
**11. PUC-Rio** – Seja ABC um triângulo equilátero de lado 16. Com centro em C, temos um arco de círculo entre A e B, como na figura. Sejam D e E os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Com centros em D e E, temos semicírculos de A a C e de B a C, como na figura.



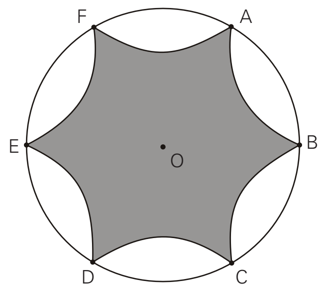

**a)** Determine os raios dos círculos na figura, de centros C, D e E, respectivamente.

**b)** Calcule o comprimento dos arcos AC, CB e BA.

**c)** Calcule as áreas das quatro regiões indicadas na figura abaixo.



**12. UFG** – Uma medalha, apresentada na figura a seguir, é fabricada retirando-se de um círculo de metal a área que compreende a região sombreada (cinza-escuro). Na figura, os pontos A, B, C, D, E e F são os vértices de um hexágono regular inscrito na circunferência de centro O e raio 1 cm. Os arcos AF, FE, ED, DC, CB e BA são arcos de outras circunferências com raio igual a 1 cm.




Nessas condições, calcule a área da região sombreada (cinza-escuro) vale:

**a)** $(3\sqrt{3} - \pi)$ cm²
**b)** $(2\sqrt{3} - \pi)$ cm²
**c)** $(3 - \pi)$ cm²
**d)** $(2 - \pi)$ cm²
**e)** $(3\sqrt{2} - \pi)$ cm²

**13. UEM-PR** – Seja ABC um triângulo cujos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 2 cm e cujo ângulo interno BÂC mede $\frac{\pi}{6}$. Suponha que a altura relativa ao vértice C é o segmento $\overline{CD}$, sendo D um ponto sobre o prolongamento de $\overline{AB}$, de modo que B está entre A e D.

Assinale o que for correto.

**01)** O ângulo externo do triângulo ABC no vértice B mede $\frac{\pi}{6}$.
**02)** O triângulo BCD é retângulo e seus catetos medem 1 e $\sqrt{3}$.
**04)** Os triângulos ACD e BCD são semelhantes, com razão de semelhança igual a 3.
**08)** A altura do triângulo ACD relativa ao vértice D mede 1,5 cm.
**16)** A área entre a circunferência, de centro C e raio 2 cm, e o triângulo ABC é menor que 1 cm².

**14. Uece** – Um triângulo equilátero está inscrito em uma circunferência cuja medida do raio é igual a 2 cm. A área das regiões que são internas à circunferência e externas ao triângulo, em cm², é igual a

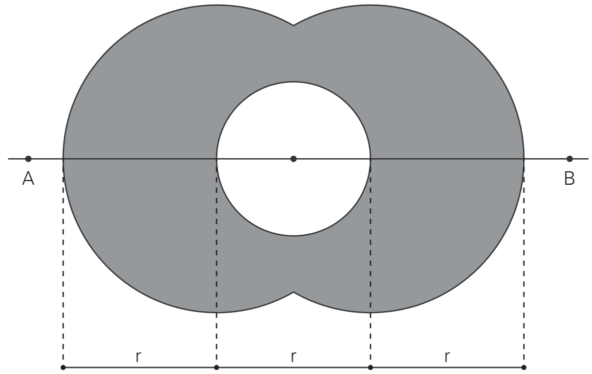
**a)** $2\pi - 3\sqrt{3}$.
**b)** $4\pi - 2\sqrt{3}$.
**c)** $4\pi - 3\sqrt{3}$.
**d)** $3\pi - 4\sqrt{3}$.

**15. ITA** – Um hexágono convexo regular H e um triângulo equilátero T estão inscritos em circunferências de raios $R_H$ e $R_T$, respectivamente. Sabendo-se que H e T têm mesma área, determine a razão $\frac{R_H}{R_T}$.

**16. UFRGS** – Considere um triângulo equilátero circunscrito a um círculo. Se a distância de cada vértice do triângulo ao centro do círculo é 2 cm, a área da região do triângulo não ocupada pelo círculo, em cm², é

**a)** $4\sqrt{3} - 2\pi$.
**b)** $3\sqrt{3} - \pi$.
**c)** $\sqrt{3} + \pi$.
**d)** $\pi$.
**e)** $3\sqrt{2}$.

**17. Epcar-MG** – Na figura abaixo, os três círculos têm centro sobre a reta AB e os dois de maior raio têm centro sobre a circunferência de menor raio.




A expressão que fornece o valor da área sombreada é

**a)** $\frac{17\pi - 6\sqrt{3}}{9}\ r^2$
**b)** $\frac{11\pi + 9\sqrt{3}}{12}\ r^2$
**c)** $\frac{15\pi - 4\sqrt{3}}{9}\ r^2$
**d)** $\frac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12}\ r^2$

**18. Efomm** C2-H8

Qual é a área de uma circunferência inscrita em um triângulo equilátero, sabendo-se que esse triângulo está inscrito em uma circunferência de comprimento igual a $10\pi$ cm?

**a)** $\frac{75\pi}{4}$

**b)** $\frac{25\pi}{4}$

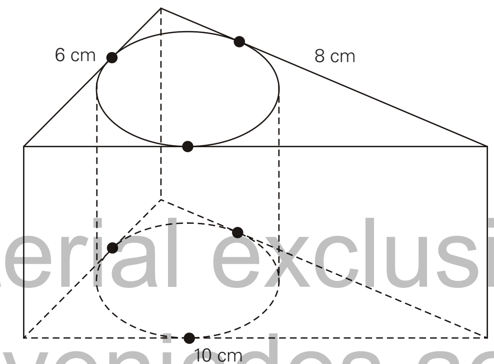
**c)** $\frac{5\pi}{2}$

**d)** $\frac{25\pi}{16}$

**e)** $\frac{5\pi}{4}$

**19. Enem** C2-H8

Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm, e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.




O raio da perfuração da peça é igual a

**a)** 1 cm.

**b)** 2 cm.

**c)** 3 cm.

**d)** 4 cm.

**e)** 5 cm.

**20. Enem** C2-H8

Em uma plataforma de exploração de petróleo localizada no mar, ocorreu um vazamento. A equipe técnica de operação dessa plataforma percebeu que a mancha de óleo espalhado na superfície do mar tinha formato circular e estimou, visualmente, que a área atingida era de aproximadamente 100 km$^2$.

Utilize 3 como aproximação para $\pi$.

O valor inteiro mais próximo do raio da mancha de óleo formada, em km, é

**a)** 4.

**b)** 6.

**c)** 10.

**d)** 17.

**e)** 33.

# ÁREAS DE FIGURAS CURVILÍNEAS II

29

- Figuras com formatos curvilíneos
- Área de setor circular e segmento circular

**HABILIDADES**

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

HADEL PRODUCTIONS/ISTOCKPHOTO

Material derretido em fundição.

## INTRODUÇÃO

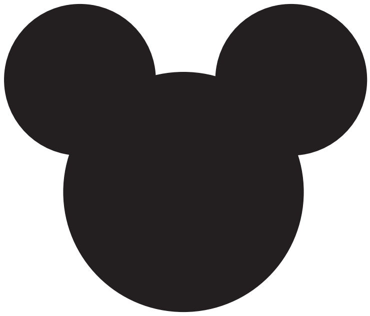
A produção de peças complexas exige, além de conhecimentos geométricos, o uso de um processo de fabricação denominado **fundição**. Para a produção em massa, os materiais são fundidos (derretidos) e espalhados em moldes, nos quais permanecem até se solidificar. Esse é um modo rápido e econômico de produzir enorme variedade de peças com formatos curvilíneos, desde uma simples moeda até uma grande e complexa peça de usina hidrelétrica.

### FIGURAS COM FORMATOS CURVILÍNEOS

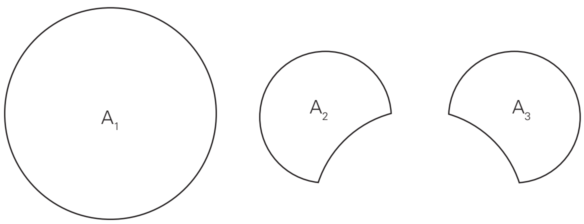
Neste módulo, daremos prosseguimento ao cálculo de áreas mais complexas. Elas apresentam diferentes formatos, mas, ao serem segmentadas, resultam em formas já conhecidas. Assim como no módulo anterior, poderemos dividir as figuras e calcular as áreas separadamente, para, enfim, compormos o todo.

### ÁREA DE UMA FIGURA CURVILÍNEA

Para trabalharmos o cálculo de áreas mais complexas, vamos imaginar a seguinte situação: uma fábrica decide produzir chaveiros cujo formato é semelhante a um personagem de desenho animado. Por se tratar da fabricação de muitos chaveiros, o ideal será fundir (derreter) o material e colocá-lo em moldes, como vimos na introdução. Porém, antes de iniciar a produção, é necessário saber qual será a área ocupada. Posteriormente, calcula-se o volume de material a ser utilizado.



Neste caso, notamos que a figura é formada por um círculo maior e dois setores circulares.



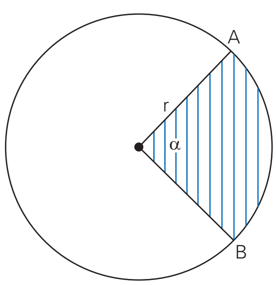

Portanto, a área procurada será calculada da seguinte forma: $A = A_1 + A_2 + A_3$.

O procedimento adotado para o cálculo de figuras curvilíneas requer o uso de algumas áreas já conhecidas. A seguir, vamos recordá-las.

## ÁREAS DE SETOR CIRCULAR E SEGMENTO CIRCULAR

### ÁREA DE SETOR CIRCULAR

A área de setor circular é proporcional à medida do arco. Podemos calculá-la de duas maneiras:




Quando a medida do ângulo central α estiver em graus:

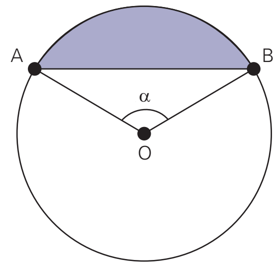
$$A = \frac{\alpha° \cdot \pi R}{360°}$$

Quando a medida do ângulo central α estiver em radianos:

$$A = \alpha \cdot R^2$$

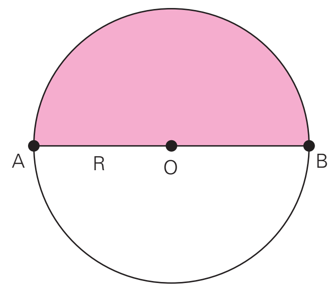
### ÁREA DE SEGMENTO CIRCULAR

Podemos calcular a área do segmento circular da seguinte maneira:




$$A = R^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{360°} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)$$, com α medido em graus.

Observe que, para α = 180° (semicírculo), temos:

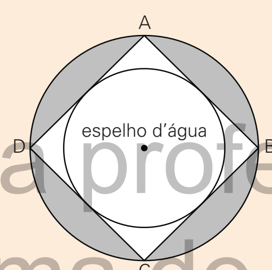



$$A = R^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 180°}{360°} - \frac{\operatorname{sen}180°}{2}\right) = R^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{0}{2}\right) \therefore$$

$$\therefore A = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1. UFTM-MG** – A figura mostra o projeto de um paisagista para um jardim em um terreno plano. Sabe-se que os círculos são concêntricos e que a área do quadrado ABCD é igual a 100 m². No círculo inscrito no quadrado haverá um espelho d'água, e na região sombreada do círculo circunscrito ao quadrado serão plantadas flores de várias espécies.



Usando $\pi \approx 3{,}1$, determine a área aproximada

a) ocupada pelo espelho d'água.

b) da região onde serão plantadas flores.

**Resolução**

a) Seja l o lado do quadrado ABCD. Como a área do quadrado é igual a 100 m²:

$l^2 = 100$

$l = \sqrt{100}$

$l = 10$ m

Como o raio r do círculo inscrito mede a metade do lado do quadrado:

$r = \frac{10}{2} = 5$ m

Logo, a área ocupada pelo espelho d'água é dada por:

$\pi \cdot r^2 \cong 3{,}1 \cdot 5^2 = 77{,}5$ m²

b) Como o raio **R**, do círculo circunscrito ao quadrado ABCD, mede a metade da diagonal do quadrado:

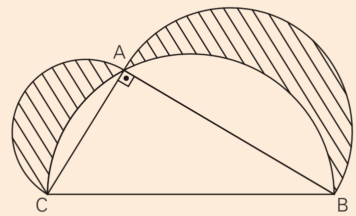
$R = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \cong 5 \cdot 1{,}4 = 9{,}8$ m

Portanto, a área onde serão plantadas flores é:

$A = \pi \cdot R^2 - 100 \cong 3{,}1 \cdot 9{,}8^2 - 100 \cong 197{,}7$ m²

$\therefore A \cong 197{,}7$ m²

**2. IME-RJ** – Seja o triângulo retângulo ABC com os catetos medindo 3 cm e 4 cm. Os diâmetros dos três semicírculos, traçados na figura a seguir, coincidem com os lados do triângulo ABC. A soma das áreas hachuradas, em cm², é:




a) 6
b) 8
c) 10
d) 12
e) 14

**Resolução**

$BC^2 = 3^2 + 4^2$

$BC^2 = 25$

$BC = \sqrt{25}$

$BC = 5$

$A_1 + A_2$ é a área da região que obtemos ao subtrair a área do triângulo ABC da área do semicírculo de diâmetro BC.

$A_3$ é a área do semicírculo de diâmetro 3 cm.

$A_4$ é a área do semicírculo de diâmetro 4 cm.

$A = A_3 + A_4 - (A_1 + A_2)$, que é a área pedida.

Logo: $A = \dfrac{\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} + \dfrac{\pi\left(\frac{4}{2}\right)^2}{2} - \left(\dfrac{\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2} - \dfrac{4 \cdot 3}{2}\right) = 6 \therefore$

$\therefore A = 6$ cm²

# ROTEIRO DE AULA

## ÁREAS DE FIGURAS CURVILÍNEAS II

Para calcular a área de figuras curvilíneas, deve-se dividi-las em áreas menores já conhecidas.

**Área do setor circular**

$A = \frac{\alpha^\circ \cdot R^2}{360^\circ}$

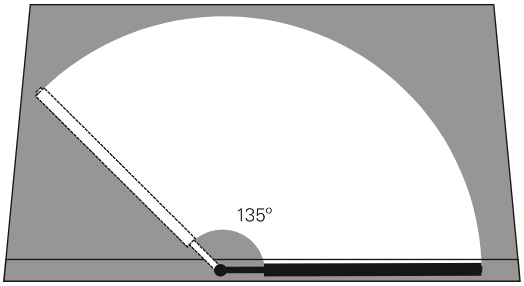
$A = \alpha \cdot R^2$

**Área do segmento circular**

$A = R^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{360^\circ} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. UFG-GO** – O limpador traseiro de um carro percorre um ângulo máximo de 135°, como ilustra a figura a seguir.




Sabendo-se que a haste do limpador mede 50 cm, dos quais 40 cm correspondem à palheta de borracha, determine a área da região varrida por essa palheta.

Dado: $\pi \cong 3{,}14$

$$A = \frac{135°\ \pi\left(50^2 - (50-40)^2\right)}{360°}$$

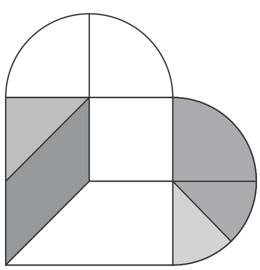
$A = 900\pi$

$A = 900 \cdot 3{,}14$

$A = 2\,826\ \text{cm}^2$

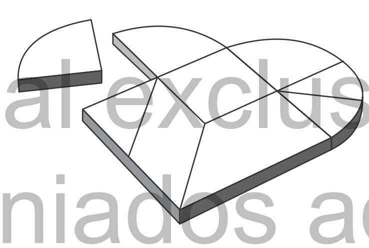
**2. CP2-RJ** C2-H8

Marcos, apaixonado por Matemática, resolveu pedir sua namorada em casamento de uma forma original. Comprou um tangram (quebra-cabeça) no formato de coração, constituído por nove peças: cinco setores circulares de mesmo raio, um quadrado, um trapézio retângulo, um paralelogramo e um triângulo retângulo, como mostra a figura:



Três dos setores têm abertura de 90°, e os outros dois, de 45°.

Antes de presenteá-la, no entanto, retirou um dos setores circulares de abertura 90°, como mostra a figura.



Sabe-se que esse setor seria recolocado na hora do pedido.

Usando $\pi = 3$, podemos afirmar que a razão entre a área do setor retirado e a área do quebra-cabeça completo é igual a

a) $\frac{1}{28}$.

b) $\frac{3}{28}$.

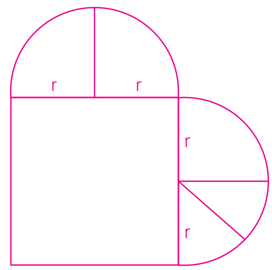
c) $\frac{3}{7}$.

d) $\frac{3}{4}$.

e) $\frac{1}{4}$.

Podemos considerar o coração constituído por um quadrado e dois semicírculos, pois o raio de cada semicírculo é **r**.

A figura a seguir ilustra essa consideração.



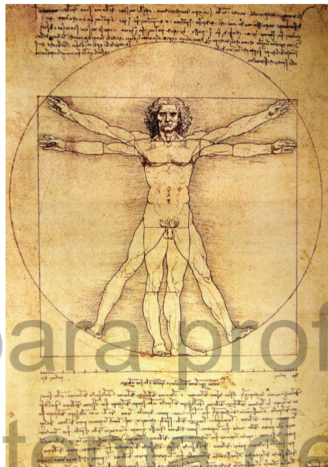

Logo, a razão entre a área retirada e a área total será dada por:

$$\frac{\frac{\pi \cdot r^2}{4}}{(2r)^2 + \frac{\pi \cdot r^2}{2} \cdot 2} = \frac{\frac{3 \cdot r^2}{4}}{4r^2 + 3r^2} = \frac{\frac{3 \cdot r^2}{4}}{7r^2} = \frac{3}{28}$$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

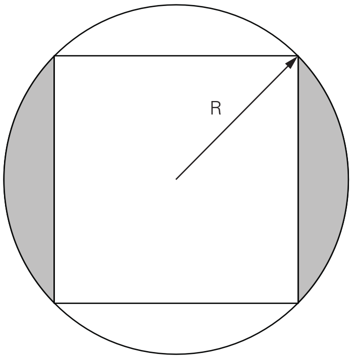
**3. UEL-PR (adaptado)**



JANAKA DHARMASENA/SHUTTERSTOCK

Estudo *Homem Vitruviano*, de Leonardo da Vinci, 1490.

Observe a simetria do corpo humano na figura anterior e considere um quadrado inscrito em um círculo de raio R, conforme a figura a seguir.




Quadrado inscrito em um círculo

A área da região sombreada é dada por:

**a)** $A = R^2(\pi - \sqrt{2})$

**b)** $A = \dfrac{R^2(\pi - 2)}{2}$

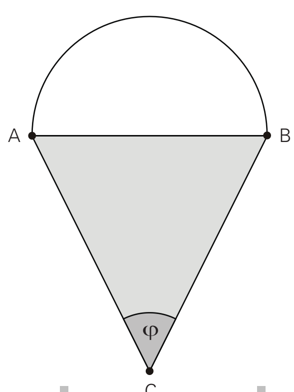
**c)** $A = \dfrac{R^2(\pi^2 - 4)}{2}$

**d)** $A = \dfrac{R^2\left(\pi - \sqrt{2}\right)}{4}$

**e)** $A = \dfrac{R^2\left(\pi^2 - \sqrt{2}\right)}{4}$

Sabemos que o lado do quadrado é igual a $R\sqrt{2}$. Então, a área da região sombreada é dada por: $\frac{1}{2}[\pi R^2 - (R\sqrt{2})^2] = \frac{R^2(\pi - 2)}{2}$

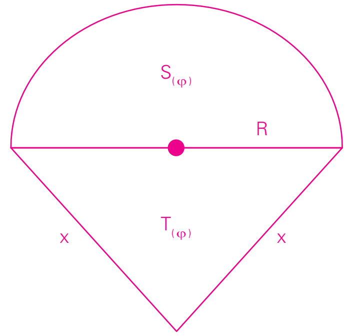
**4. Unicamp** – O segmento AB é o diâmetro de um semicírculo e a base de um triângulo isósceles ABC, conforme a figura abaixo.




Denotando as áreas das regiões semicircular e triangular, respectivamente, por $S(\varphi)$ e $T(\varphi)$, podemos afirmar que a razão $\dfrac{S(\varphi)}{T(\varphi)}$, quando $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ radianos, é

**a)** $\dfrac{\pi}{2}$.  **b)** $2\pi$.  **c)** $\pi$.  **d)** $\dfrac{\pi}{4}$.

Vamos considerar a figura a seguir.



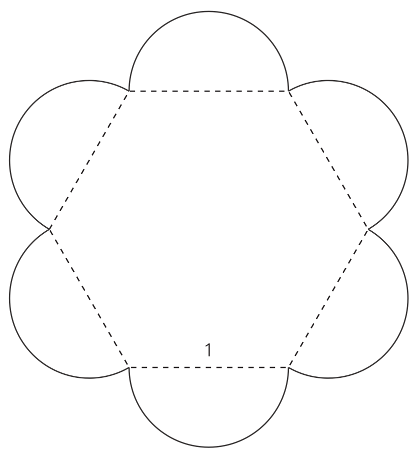

Sejam $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$; **R** igual ao raio do semicírculo; e **x** igual ao lado do triângulo isósceles:

$x^2 + x^2 = (2R)^2$

$x^2 = (2R)^2$

$$\frac{S_{(\varphi)}}{T_{(\varphi)}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R}{\frac{1}{2} \cdot x \cdot x} = \frac{\pi \cdot R^2}{x} = \frac{\pi \cdot R^2}{2R^2} = \frac{\pi}{2}$$

**5. UFRGS (adaptado)** – Uma pessoa desenhou uma flor construindo semicírculos sobre os lados de um hexágono regular de lado 1, como na figura abaixo.



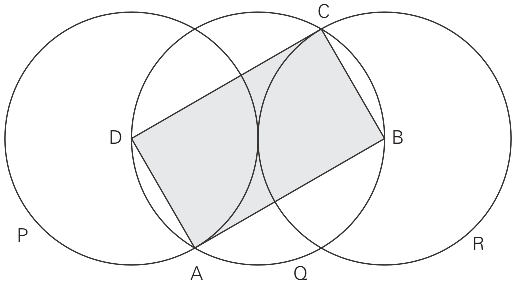

Qual a área dessa flor?

A área A da figura é igual à soma das áreas de um hexágono de lado 1 com 3 círculos de raio $\frac{1}{2}$.

$A = 6 \cdot \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$A = \frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}\right)$

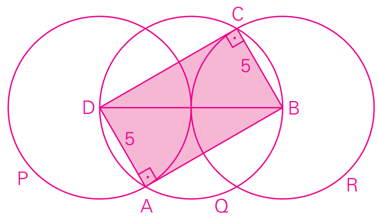
**6. UFRGS** – Na figura abaixo, três discos P, Q e R, de mesmo raio, são construídos de maneira que P e R são tangentes entre si e o centro de Q é ponto de tangência entre P e R. O quadrilátero sombreado ABCD tem vértices nos centros dos discos P e R e em dois pontos de interseção de Q com P e R.




Se o raio do disco P é 5, a área do quadrilátero ABCD é

**a)** $5\sqrt{3}$.
**b)** 25.
**c)** 50.
**d)** $25\sqrt{3}$.
**e)** 75.

Vamos considerar a figura a seguir.




DA = BC = 5 (raios)

Sabemos que BD é o diâmetro da circunferência A.

Sendo assim, $D\hat{A}B = D\hat{C}B = 90°$ e $BC = 5 + 5 = 10$.

Os triângulos DAB e BDC são congruentes pelo caso H.C. (hipotenusa e cateto).

Podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo BDC:

$10^2 = 5^2 + CD^2$

$CD = 5\sqrt{3}$

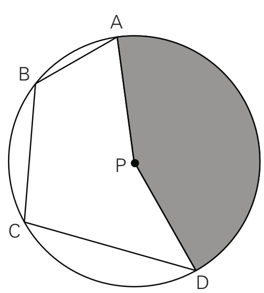
Logo, a área do triângulo BDC será dada por: $A_{BDC} = \dfrac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = \dfrac{25 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Portanto, a área do quadrilátero ABCD será dada por:

$A = 2 \cdot \dfrac{25\sqrt{3}}{2} = 25 \cdot \sqrt{3}$.

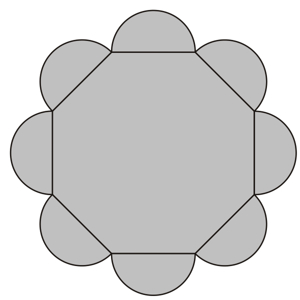
## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. UFTM-MG (adaptado)** – Na figura, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são lados, respectivamente, de um octógono regular, um hexágono regular e um quadrilátero regular inscritos em uma circunferência de centro P e raio 6 cm.




Qual a área do setor circular preenchido na figura, em cm²?

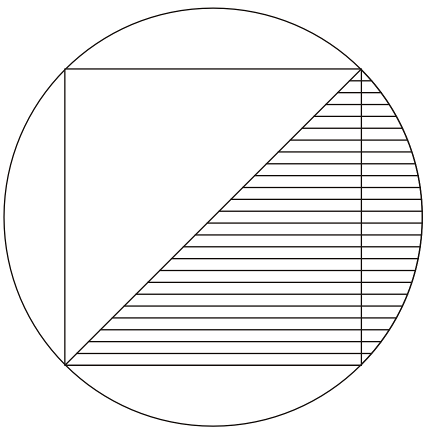
**8. UFRGS** – A figura abaixo é formada por oito semicircunferências, cada uma com centro nos pontos médios dos lados de um octógono regular de lado 2.



A área da região sombreada é

**a)** $4\pi + 8 + 8\sqrt{2}$.
**b)** $4\pi + 8 + 4\sqrt{2}$.
**c)** $4\pi + 4 + 8\sqrt{2}$.
**d)** $4\pi + 4 + 4\sqrt{2}$.
**e)** $4\pi + 2 + 8\sqrt{2}$.

**9. Acafe-SC** – Na figura abaixo, o quadrado está inscrito na circunferência. Sabendo que a medida do lado do quadrado é 8 cm, então, a área da parte hachurada, em cm², é igual a:



**a)** $4(\pi + 2)$.
**b)** $8(\pi + 4)$.
**c)** $8(\pi + 2)$.
**d)** $4(\pi + 4)$.

**10. FGV-RJ** – A razão entre a área do quadrado inscrito em um semicírculo de raio R e a área do quadrado inscrito em um círculo de raio R é:

**a)** $\frac{1}{2}$

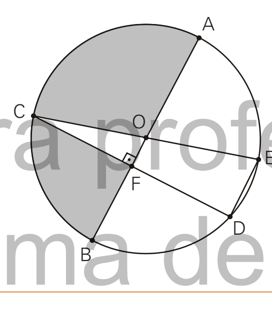
**b)** $\frac{1}{3}$

**c)** $\frac{3}{4}$

**d)** $\frac{2}{5}$

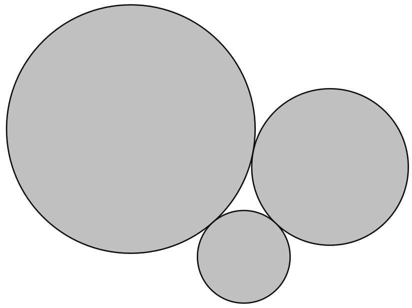
**e)** $\frac{1}{4}$

**11. UFG-GO** – Na figura a seguir, o círculo de centro O representa um terreno, o triângulo CDE, uma piscina e a região sombreada, um gramado.



Sabendo que AB e CE são diâmetros do círculo, que a medida do segmento DE é igual a 6 metros, que o ângulo DCE mede 30 graus e que AB é perpendicular ao segmento CD, calcule a área da região correspondente ao gramado.

**12. UFG-GO** – Alguns agricultores relataram que, inexplicavelmente, suas plantações apareceram parcialmente queimadas e a região consumida pelo fogo tinha o padrão indicado na figura a seguir, correspondendo às regiões internas de três círculos, mutuamente tangentes, cujos centros são os vértices de um triângulo com lados medindo 30, 40 e 50 metros.



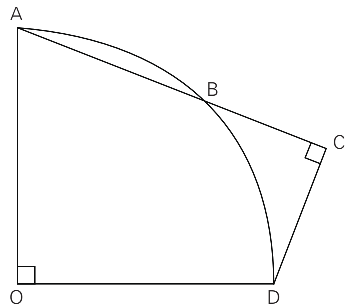
Nas condições apresentadas, a área da região queimada, em metros quadrados, é igual a:

**a)** 1 100π
**b)** 1 200π
**c)** 1 300π
**d)** 1 400π
**e)** 1 550π

**13. EsPCex** – Em um treinamento de arma de artilharia, existem 3 canhões, A, B e C. Cada canhão, de acordo com seu modelo, tem um raio de alcance diferente, e os três têm capacidade de giro horizontal de 360°. Sabendo que as distâncias entre A e B é de 9 km, entre B e C é de 8 km e entre A e C é de 6 km, determine, em km², a área total que está protegida por esses 3 canhões, admitindo que os círculos são tangentes entre si.

**a)** $\frac{23}{2}\pi$
**b)** $\frac{23}{4}\pi$
**c)** $\frac{385}{8}\pi$
**d)** $\frac{195}{4}\pi$
**e)** $\frac{529}{4}\pi$

**14. Cefet-MG** – Na figura seguinte, representou-se um quarto de circunferência de centro O e raio igual a $\sqrt{2}$.




Se a medida do arco AB é 30°, então, a área do triângulo ACD, em unidades de área, é

**a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

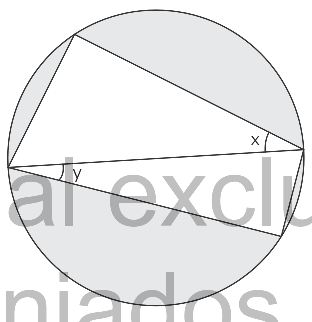
**b)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

**c)** $\sqrt{2}$.

**d)** $\sqrt{3}$.

**e)** $\sqrt{6}$.

**15. Fuvest** – O quadrilátero da figura está inscrito em uma circunferência de raio 1. A diagonal desenhada é um diâmetro dessa circunferência.




Sendo x e y as medidas dos ângulos indicados na figura, a área da região cinza, em função de x e y, é:

**a)** $\pi + \text{sen}(2x) + \text{sen}(2y)$

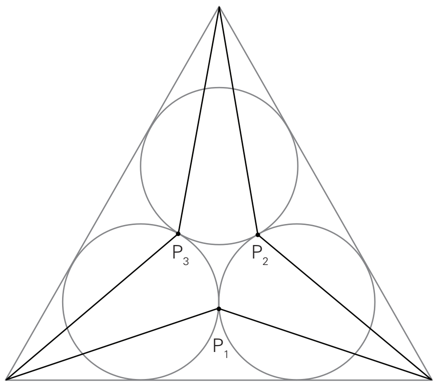
**b)** $\pi - \text{sen}(2x) - \text{sen}(2y)$

**c)** $\pi - \cos(2x) - \cos(2y)$

**d)** $\pi - \frac{\cos(2x) + \cos(2y)}{2}$

**e)** $\pi - \frac{\text{sen}(2x) + \text{sen}(2y)}{2}$

**16. Fuvest** – São dadas três circunferências de raio r, duas a duas tangentes. Os pontos de tangência são $P_1$, $P_2$ e $P_3$.




Calcule, em função de r,

**a)** o comprimento do lado do triângulo equilátero T determinado pelas três retas que são definidas pela seguinte exigência: cada uma delas é tangente a duas das circunferências e não intersecta a terceira;

**b)** a área do hexágono não convexo cujos lados são os segmentos ligando cada ponto $P_1$, $P_2$ e $P_3$ aos dois vértices do triângulo T mais próximos a ele.

**17. ITA** – Em um triângulo de vértices A, B e C são dados $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$, $\hat{C} = \frac{\pi}{3}$ e o lado BC = 1 cm. Se o lado $\overline{AB}$ é o diâmetro de uma circunferência, então a área da parte do triângulo ABC externa à circunferência, em $cm^2$, é

**a)** $\frac{\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

**b)** $\frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}$.

**c)** $\frac{5\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

**d)** $\frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{8}$.

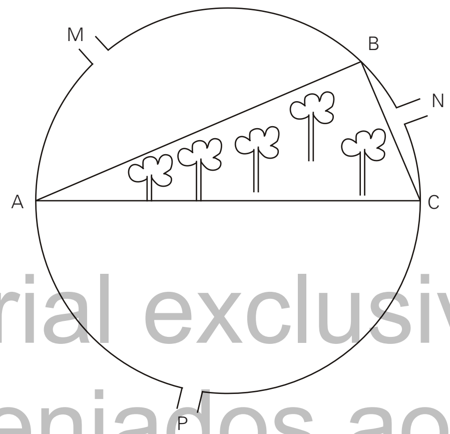
**e)** $\frac{5\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. CFTMG** C2-H6

Um parque ecológico com formato circular, cujo diâmetro AC mede 500 metros, tem 3 entradas, M, N e P, que dão acesso ao espaço triangular ABC, reservado ao plantio de árvores, conforme figura abaixo.

Considere $\pi = 3$




Se o lado BC do triângulo mede 300 m, então, a área do parque, externa ao espaço plantado, em $m^2$, é igual a

**a)** 93 700

**b)** 127 500

**c)** 147 500

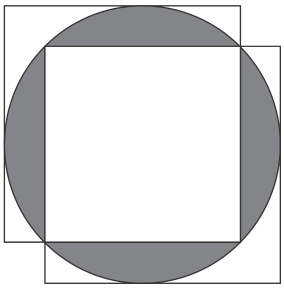
**d)** 153 750

**e)** 197 250

**19. IFSul-RS** C2-H9

Segundo historiadores, o cálculo de áreas é uma prática muito antiga. Os primeiros desses cálculos foram realizados no Egito, muitos anos atrás. Naquela época, os agricultores se deparavam com o problema de dividir as terras que não estavam inundadas pelas cheias do rio Nilo, bem como com problemas de demarcação de divisas, em virtude das altas taxas de impostos. Os registros desses cálculos estão no papiro de Rhind, documento muito antigo que mostra os problemas práticos de Matemática do Egito Antigo.

Na figura abaixo, temos dois quadrados de mesmo tamanho sobrepostos a um círculo de raio 3 cm.



Qual é a área da parte sombreada?

**a)** $8(\pi - 1)$ cm$^2$

**b)** $6(2\pi - 1)$ cm$^2$

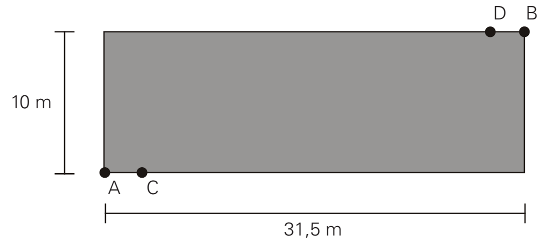
**c)** $9\pi - 25$ cm$^2$

**d)** $9(\pi - 2)$ cm$^2$

**e)** $6(\pi - 1)$ cm$^2$

**20. Enem** C2-H8

O proprietário de um terreno retangular medindo 10 m por 31,5 m deseja instalar lâmpadas nos pontos C e D, conforme ilustrado na figura:




Cada lâmpada ilumina uma região circular de 5 m de raio. Os segmentos AC e BD medem 2,5 m. O valor em m$^2$ mais aproximado da área do terreno iluminada pelas lâmpadas é

(Aproxime $\sqrt{3}$ para 1,7 e $\pi$ para 3.)

**a)** 30.

**b)** 34.

**c)** 50.

**d)** 61.

**e)** 69.

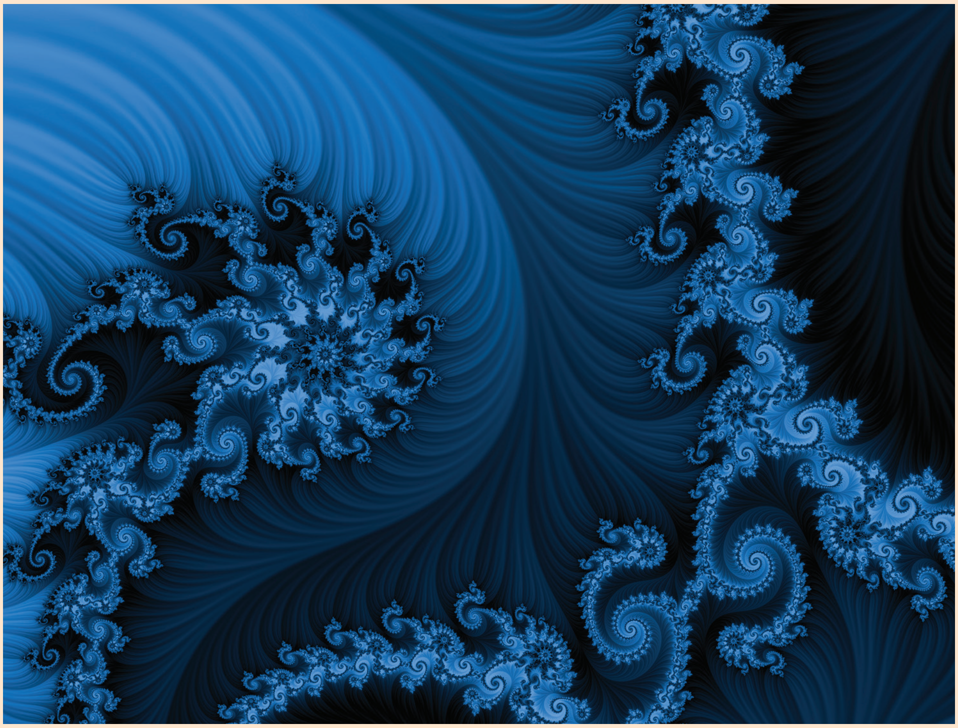
# 30 ÁREAS DE FIGURAS ESPECIAIS

- Área de figuras especiais

**HABILIDADES**

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

INSTANTS/ISTOCKPHOTO



Exemplo de fractal. Em geral, as propriedades dessas estruturas geométricas se repetem em qualquer escala.

## Introdução

Euclides de Alexandria, nascido aproximadamente em 330 a.C., em sua obra *Os Elementos* (constituída de 13 livros), postula muito da Geometria que conhecemos e estudamos no Ensino Médio. Porém, figuras mais complexas que foram desvendadas com o tempo e graças às novas tecnologias não podem ser representadas pela Geometria euclidiana. Em contrapartida, a Geometria fractal esclarece alguns dos emaranhados geométricos observados, desde flocos de neve até complexas ligações alveolares dos pulmões.

### FIGURAS ESPECIAIS

Não somos capazes de mensurar as áreas de todas as superfícies que conhecemos por meio da Geometria clássica. Por conta disso, nos últimos módulos nos atentamos ao cálculo de figuras muito comuns no cotidiano: retângulo, losango, quadrado, paralelogramo, trapézio, triângulo, círculo, setor circular e segmento circular. Elas formam a base das figuras planas das quais é possível obtermos a área usando a Geometria euclidiana. Porém, como vimos na introdução, algumas figuras, denominadas **fractais**, precisam de desenvolvimento computacional para serem representadas.

NYS444/ISTOCKPHOTO

Representação da estrutura de flocos de neve.

Na Medicina, na Arte, na Computação Gráfica, na Geografia e na Economia, um fractal, cuja principal característica é a autossimilaridade, é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes semelhantes umas às outras. Esse tipo de figura é cada vez mais utilizado para a interpretação de certos conceitos, o que não seria possível por meio da Geometria euclidiana.

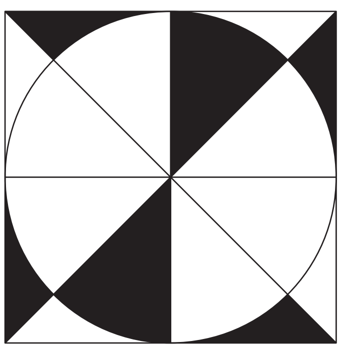
Os fractais estão ligados a áreas da Física e da Matemática relacionadas a **sistemas dinâmicos** e **teoria do caos**, porque suas equações são usadas para descrever fenômenos que, apesar de parecerem aleatórios, obedecem a certas regras, como a formação da neve, o fluxo dos rios e o deslocamento da fumaça.

No entanto, não aprofundaremos nossos estudos sobre fractais, pois isso requer uma matemática mais avançada. Assim, são citados aqui apenas como curiosidade. Neste módulo, finalizaremos os estudos de áreas.

## ÁREA DE FIGURAS ESPECIAIS

Observe a situação a seguir.

Esta figura será pintada de preto em um grande painel.



Sabendo que o raio da circunferência medirá 2 m, qual será a área pintada de preto? (adote: $\pi = 3,1$)

**I. Área do setor circular**

Primeiro, calculamos a área do círculo.

$A = \pi R^2 = 3,1 \cdot 2^2 = 12,4 \text{ m}^2$

$\therefore A_{\text{círculo}} = 12,4 \text{ m}^2$

Observe que o círculo foi dividido em oito partes iguais e que serão pintadas duas delas. Logo:

$$A_{\text{setor pintada}} = 2 \cdot \frac{12,4}{8}. = 3,1\text{m}^2 \therefore A_{\text{setor pintada}} = = 3,1 \text{ m}^2$$

**II. Área do setor quadrado**

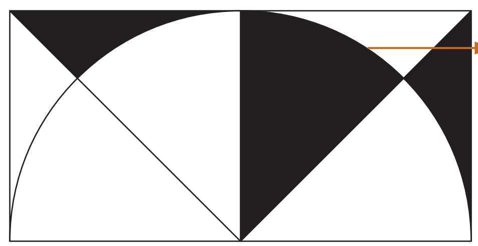
Como a circunferência está inscrita no quadrado, o diâmetro dela (4 m) corresponde ao lado do quadrado (l). Assim:

$A_{\text{quadrado}} = l^2 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ m}^2$

$A_{\text{quadrado}} = 16 \text{ m}^2$

**III. Área da região curvilínea**

Subtraindo a área do círculo do quadrado, obtemos a área da região curvilínea que foi dividida em oito partes iguais. Apenas quatro dessas partes foram pintadas de preto.




$A_{\text{região}} = A_{\text{quadrado}} - A_{\text{círculo}}$

$A_{\text{região}} = 16 - 12,4 = 3,6 \text{ m}^2$

Como apenas quatro partes das oito da região curvilínea foram pintadas:

$$A_{\text{curvilínea pintada}} = 4 \cdot \frac{3,6}{8} = 1,8 \text{ m}^2$$

**IV. Área total pintada**

Por fim, obtemos a área pintada somando as áreas já calculadas:

$A_{\text{pintada}} = A_{\text{setor pintada}} + A_{\text{curvilínea pintada}}$

$A_{\text{pintada}} = 3,1 + 1,8 = 4,9 \therefore A_{\text{pintada}} = 4,9 \text{ m}^2$

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**1. UFMG** – Um quadrado Q tem área igual à área de n quadrados de área unitária de 1 cm², mais a área de um quadrado K.

Considerando essas informações, responda às questões abaixo em seus contextos.

**a)** Suponha que n = 19 e que a área do quadrado Q é de 100 cm². Calcule a medida do lado do quadrado K.

**b)** Suponha que o lado do quadrado K mede 8 cm e que n = 57. Calcule a medida do lado do quadrado Q.

**Resolução**

Sejam AQ a área do quadrado Q e AK, a área do quadrado k. Temos: $A_Q = n \cdot 1 + A_K$.

a) Sendo k o lado do quadrado K:

$100 = 19 + k^2$

$k^2 = 81$

$k = 9$ cm

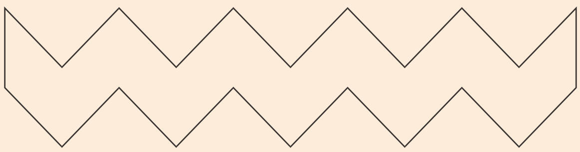
b) Seja q o lado do quadrado Q:

$q^2 = 57 + 82$

$q^2 = 121$

$q = 11$ cm

**2. Insper-SP**

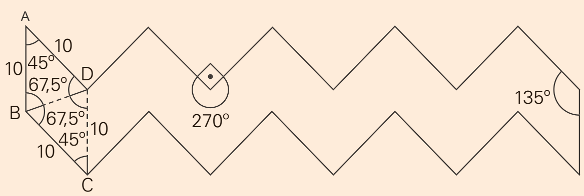


Cada lado do polígono indicado na figura mede 10 cm e seus ângulos internos têm medidas de 45°, 90°, 135° e 270°, como mostra a figura. A área desse polígono, em cm², é igual a

a) $500\sqrt{2}$.
b) $450\sqrt{2}$.
c) $400\sqrt{2}$.
d) $350\sqrt{2}$.
e) $300\sqrt{2}$.

**Resolução**:

Do enunciado, temos a figura:




Como ABD é um triângulo isósceles e $B\hat{A}D = 45°$, $A\hat{B}D = A\hat{D}B = 67{,}5°$.

Como $A\hat{B}C = 135°$ e $A\hat{B}C = A\hat{B}D + C\hat{B}D$, $135° = 67{,}5 + C\hat{B}D$. Ou seja, $C\hat{B}D = 67{,}5°$.

Note que ABD e CDB são congruentes, pelo caso LAL. Logo, ABCD é um losango.

Sendo $A_{polígono}$ a área do polígono citado no enunciado; $A_{ABCD}$, a área do losango ABCD; e $A_{ABD}$, a área do triângulo ABD, temos:

$$A_{polígono} = 10 \cdot A_{ABCD}$$

$$A_{polígono} = 10 \cdot 2 \cdot A_{ABD}$$

$$A_{polígono} = 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \text{sen } 45°$$

$$A_{polígono} = 1000 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{polígono} = 500\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

# ROTEIRO DE AULA

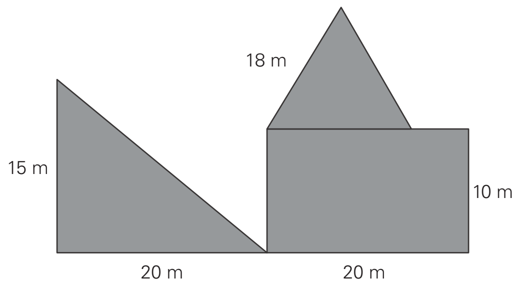
## ÁREAS DE FIGURAS ESPECIAIS

**Para calcular a área de figuras especiais, deve-se** dividi-las **em** áreas **menores já conhecidas.**

- TRIÂNGULOS
- QUADRILÁTEROS
- CÍRCULOS

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. IFSC** – A região representada pela figura abaixo é formada pelos seguintes polígonos: um triângulo equilátero de lados 18 m, um retângulo de lados 10 m de largura por 20 m de comprimento e um triângulo retângulo de catetos 15 m e 20 m.




Com base nessas informações e considerando $\sqrt{3} = 1{,}7$, é correto afirmar que a área e o perímetro dessa região são, respectivamente,

**a)** 437,7 m² e 148 m.
**b)** 457,7 m² e 118 m.
**c)** 437,7 m² e 156 m.
**d)** 487,7 m² e 118 m.
**e)** 487,7 m² e 138 m.

O triângulo retângulo é semelhante ao triângulo pitagórico de catetos 3 e 4 e hipotenusa 5.

Logo, podemos escrever sobre a área e o perímetro da região apresentada:

$S_{total} = S_{\Delta eq} + S_{\Delta ret} + S_{\square}$

$S_{total} = \dfrac{18^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{15 \cdot 20}{2} + 20 \cdot 10$

$S_{total} = 81\sqrt{3} + 350$

$S_{total} \approx 487{,}70 \text{ m}^2$

$P_{total} = (2 \cdot l_{\Delta eq.}) + (P_{\Delta ret.}) + (P_{\square} - 18)$

$P_{total} = (2 \cdot 18) + (15 + 20 + 25) + (2 \cdot 20 + 2 \cdot 10 - 18)$

$P_{total} = 138 \text{ m}$

**2. UEG-GO** C2-H6

Alexander Graham Bell foi o grande inventor da pipa tetraédrica, que pode ser construída com estruturas triangulares em diversos tamanhos, desde que mantidas suas propriedades. Para que a pipa possa subir, ela não pode ser coberta em toda a sua estrutura; em cada uma delas cobre-se apenas dois lados. A Figura 1 mostra o início da construção de uma delas com quatro estruturas. A Figura 2 mostra a pipa já completa. Supondo-se que o triângulo já coberto que compõe cada lado da estrutura possui base igual a 3 cm e altura de 2 cm, a área coberta de uma dessas pipas com 16 estruturas é

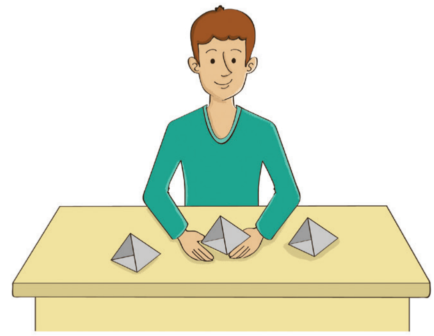


Figura 1

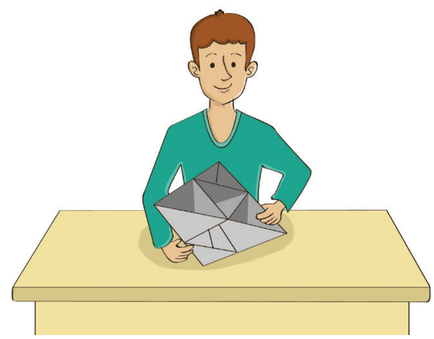


Figura 2

**a)** 96 cm²
**b)** 48 cm²
**c)** 40 cm²
**d)** 32 cm²
**e)** 24 cm²

Calculando a área de cada triângulo, temos:

$A_{\Delta} = \dfrac{3 \cdot 2}{2} = 3$

Cada tetraedro tem dois triângulos cobertos, e a pipa tem 16 tetraedros em sua estrutura.

Sendo assim, a área pedida será dada por: $A = 16 \cdot 2 \cdot A_{\Delta} = 96 \text{ cm}^2$.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

**3. Fuvest** – Uma cerca tem formato de um polígono regular de n lados, cada lado com comprimento l. A égua Estrela pasta amarrada à cerca por uma corda, também de comprimento l, no exterior da região delimitada pelo polígono. Calcule a área disponível para pasto supondo que:

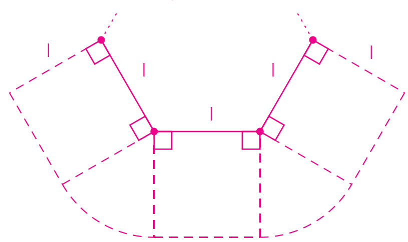
**a)** a extremidade da corda presa à cerca está fixada em um dos vértices do polígono;

**b)** a extremidade da corda pode deslizar livremente ao longo de todo o perímetro da cerca.

a) A área disponível para pasto corresponde à área de um setor circular de raio l, cujo ângulo central é o replemento do ângulo interno do polígono regular.

Logo, a resposta é: $\left(360° - \frac{180°\,(n-2)}{n}\right)\frac{\pi l^2}{360°} = \left(1 - \frac{n-2}{2n}\right)\pi l^2$

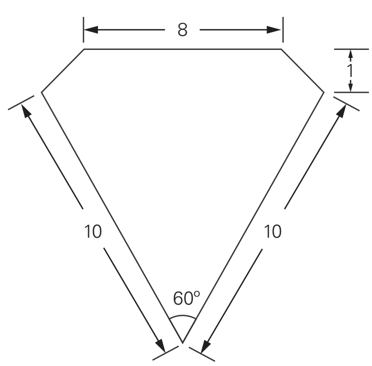
b) Vamos considerar a figura.




Se a extremidade da corda pudesse deslizar livremente ao longo de todo o perímetro da cerca, o resultado seria dado pela soma das áreas de n quadrados congruentes de lado **l** com as áreas de **n** setores circulares de raio l e ângulo central igual a $\frac{360°}{n}$.

Sendo assim, a resposta é replemento: $nl^2 + n\frac{\pi l^2}{n} = l^2\,(n + \pi)$.

**4. UFRGS** – O emblema de um super-herói tem a forma pentagonal, como representado na figura abaixo.




A área do emblema é

**a)** $9 + 5\sqrt{3}$.

**b)** $9 + 10\sqrt{3}$.

**c)** $9 + 25\sqrt{3}$.

**d)** $18 + 5\sqrt{3}$.

**e)** $18 + 25\sqrt{3}$.

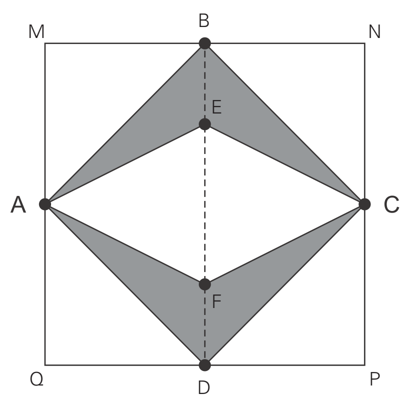
O triângulo ABC é equilátero. Logo, AC = 10.

A área A da figura será a soma da área do triângulo equilátero com a área do trapézio:

$A = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{(10+8)}{2} = 25 \cdot \sqrt{3} + 9$

**5. Fatec-PR** – Na figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado MNPQ de lado de medida l. Os pontos E e F pertencem ao segmento $\overline{BD}$, de modo que $BE = FD = \frac{l}{4}$.

A área do quadrado MNPQ é igual a k vezes a área da superfície destacada em cinza.




Assim sendo, o valor de k é

**a)** 2.

**b)** 4.

**c)** 6.

**d)** 8.

**e)** 10.

Calculando, temos:

$\Delta_{ADF} = \Delta_{CDF} = \Delta_{CBE} = \Delta_{ABE}$

$\Delta_{ADF} = \frac{\frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2}}{2} = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1}{2}$

$\Delta_{ADF} = \frac{l^2}{16}$

$A_{cinza} = 4 \cdot \frac{l^2}{16}$

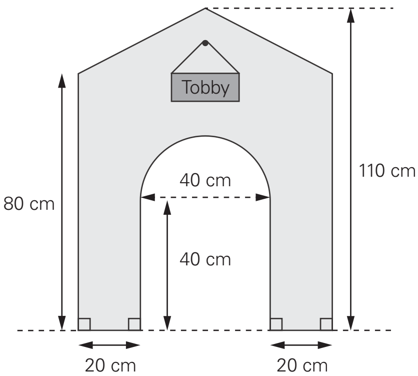
$A_{cinza} = \frac{l^2}{4}$

$A_{MNPQ} = l^2$

$\frac{A_{MNPQ}}{A_{cinza}} = \frac{l^2}{\frac{l^2}{4}} = l^2 \cdot \frac{4}{l^2}$

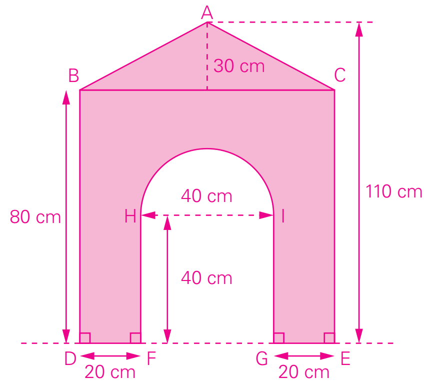
$\frac{A_{MNPQ}}{A_{cinza}} = 4$

**6. IFPE (adaptado)** – Os alunos do curso de Zootecnia do Campus Vitória adotaram um cachorro que sempre passeava próximo ao campus. A figura abaixo representa a vista frontal da casa que estão construindo para o cachorro Tobby.




Sabendo que a casa vai ser toda construída de madeira, qual é a superfície de madeira na parede frontal da casa, de acordo com a figura acima? (Use $\pi = 3,14$).

Analisando a situação:




A área frontal da casinha do cachorro será a área do triângulo ABC, mais a área do retângulo BCDE, menos o semicírculo de diâmetro HI, menos o quadrado HIFG. Sendo assim:

$A_{ABC} = \dfrac{80 \cdot 30}{2} = 1\,200$

$A_{BCDE} = 80 \cdot 80 = 6\,400$

$A_{HI} = \dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{3,14 \cdot 20^2}{2} = 628$

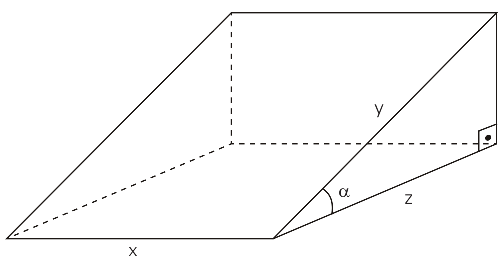
$A_{HIFG} = 40 \cdot 40 = 1600$

Calculando a área, temos:

$A_{procurada} = 1\,200 + 6\,400 - 628 - 1\,600 = 5\,372\ cm^2$

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

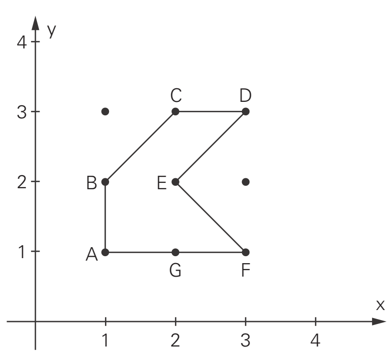
**7. Unifor-CE** – Uma rampa retangular, medindo 10 m², faz um ângulo de 25° em relação ao piso horizontal. Exatamente embaixo dessa rampa, foi delimitada uma área retangular A para um jardim, conforme a figura.




Considerando que $\cos 25° \cong 0,9$, a área A tem aproximadamente:

**a)** 3 m²
**b)** 4 m²
**c)** 6 m²
**d)** 8 m²
**e)** 9 m²

**8. IFSC** – Uma pessoa realiza o desbloqueio de tela de seu telefone celular deslizando um dedo na tela formando um padrão. Suponha que a tela de destrave seja composta no plano cartesiano e que a senha seja o polígono ABCDEFG, conforme a figura.




Senha para desbloqueamento do celular

Com base na situação exposta no enunciado, assinale a soma da(s) proposição(ões) correta(s).

**01)** A área delimitada pelo polígono ABCDEFG é dada por 7,5 unidades de área.

**02)** A reta que contém os pontos E e F tem coeficiente angular igual a –1.

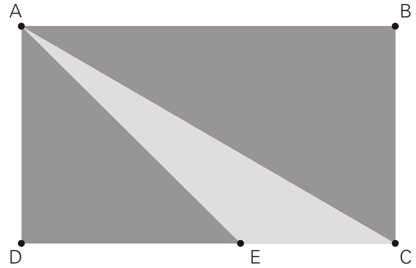
**04)** Se, ao tentar desbloquear a tela do celular, a pessoa erra o ponto E e, no lugar dele, acerta o ponto de coordenadas (3, 2), o polígono formado pela senha errada tem 20% de área a mais que o polígono ABCDEFG.

**08)** A razão de seção $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DA}}$ vale $\sqrt{2}$.

**16)** A distância do ponto C à reta $\overline{AD}$ é 1 unidade de comprimento.

**32)** A distância total percorrida pelo dedo da pessoa sem desviar do caminho traçado na figura, é de $(4 + 3\sqrt{2})$ unidades de comprimento.

**9. Uerj** – Considere uma placa retangular ABCD de acrílico, cuja diagonal AC mede 40 cm. Um estudante, para construir um par de esquadros, fez dois cortes retos nessa placa nas direções AE e AC, de modo que $D\hat{A}E = 45°$ e $B\hat{A}C = 30°$, conforme ilustrado a seguir:

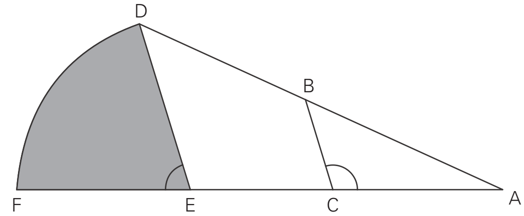



Após isso, o estudante descartou a parte triangular CAE, restando os dois esquadros.

Admitindo que a espessura do acrílico seja desprezível e que $\sqrt{3} = 1,7$, a área, em cm², do triângulo CAE equivale a:

**a)** 80
**b)** 100
**c)** 140
**d)** 180

**10. EPCAR-MG (adaptado)** – Na figura abaixo, tem-se que $\overset{\frown}{DF}$ é um arco de circunferência de centro E e raio DE.




Sabe-se que:

- ADE é um triângulo
- DE é paralelo a BC
- $\overline{BD} = 7$ cm
- $\overline{AC} = 10$ cm
- $\overline{BC} = 6$ cm
- $A\hat{C}B = 120°$
- $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$

Qual a área do setor circular hachurado na figura, em cm²?

**11. UCS-RS** – As medidas dos lados de um terreno A, de 50 m², em forma de retângulo, são dadas, em metros, por $3x - 2$ e $x + 1$.

Pretendendo-se comprar um terreno B com a mesma forma e a mesma relação entre as medidas dos lados, porém com 250 m² de área, em quanto deve ser aumentado, em metros, o valor do parâmetro x?

**a)** 3
**b)** 5
**c)** 8
**d)** 9
**e)** 14

**12. Insper-SP** – As retas $\overline{AQ}$ e $\overline{BP}$ interceptam-se no ponto T do lado $\overline{CD}$ do retângulo ABCD, e os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{AB}$ são paralelos, conforme mostra a figura.

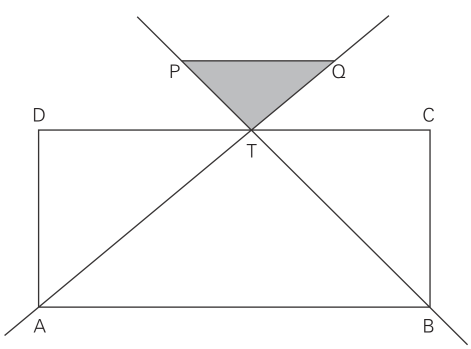
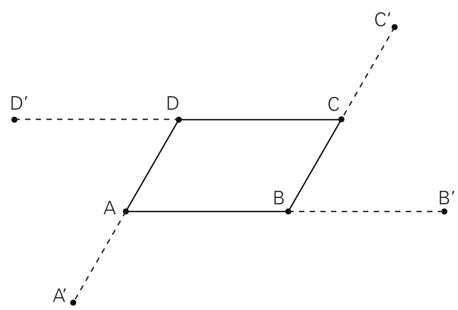



Figura fora de escala

Sabendo que $3QT = 2TA$ e que a área do triângulo PQT é igual a 12 cm², é correto concluir que a área do retângulo ABCD, em cm², é igual a

**a)** 36.
**b)** 42.
**c)** 54.
**d)** 72.
**e)** 108.

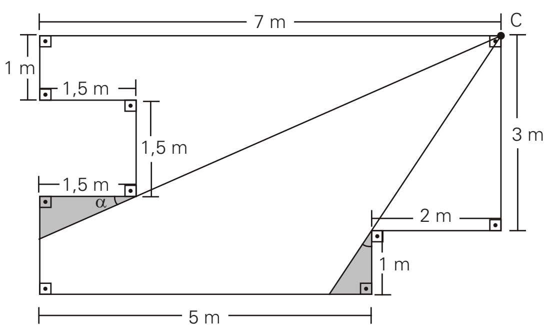
**13. Fuvest**




Percorre-se o paralelogramo ABCD em sentido anti-horário. A partir de cada vértice atingido ao longo do percurso, prolonga-se o lado recém-percorrido, construindo-se um segmento de mesmo comprimento que esse lado. As extremidades dos prolongamentos são denotadas por A', B', C' e D', de modo que os novos segmentos sejam, então, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$. Dado que $AB = 4$ e que a distância de D à reta determinada por A e B é 3, calcule a área do

**a)** paralelogramo ABCD;
**b)** triângulo BB'C';
**c)** quadrilátero A'B'C'D'.

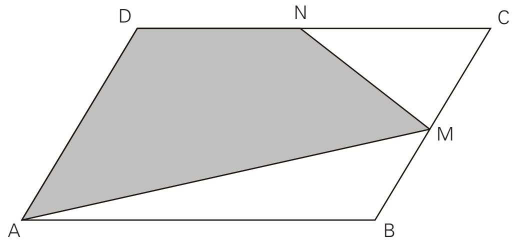
**14. UFG-GO (adaptado)** – Com o objetivo de prevenir assaltos, o dono de uma loja irá instalar uma câmera de segurança. A figura a seguir representa uma planta baixa da loja; a câmera será instalada no ponto C e as áreas hachuradas representam os locais não cobertos por essa câmera.




De acordo com essas informações, a área a ser coberta pela câmera representa, aproximadamente,

**a)** 90,90% da área total da loja.
**b)** 91,54% da área total da loja.
**c)** 96,46% da área total da loja.
**d)** 96,14% da área total da loja.
**e)** 97,22% da área total da loja.

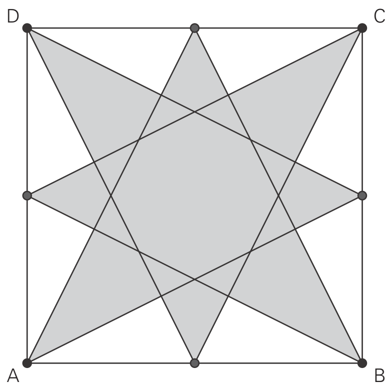
**15. ESPM** – Na figura abaixo, ABCD é um paralelogramo de área 24 cm². M e N são pontos médios de BC e CD, respectivamente.




A área do polígono AMND é igual a:

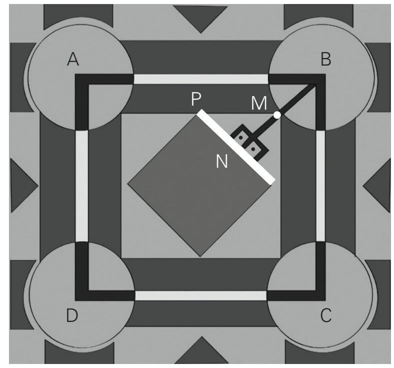
**a)** 20 cm²
**b)** 16 cm²
**c)** 12 cm²
**d)** 15 cm²
**e)** 18 cm²

**16. FGV-RJ** – A figura abaixo mostra um quadrado ABCD e os pontos médios de cada um dos lados. Traçando os segmentos que unem cada ponto médio aos dois vértices do lado oposto do quadrado, forma-se a estrela que está sombreada na figura a seguir.




A área da estrela representa que porcentagem da área do quadrado?

**17. Insper-SP** – A pavimentação indicada na fotografia possui simetria rotacional de 90° e é formada por quadrados, círculos e figuras com a forma . Em relação ao desenho feito sobre a fotografia, sabe-se que A, B, C e D são centros dos círculos, e que BM = MN = 1 m.




Em um plano totalmente recoberto por reproduções completas do quadrado ABCD indicado na figura, a razão entre a área preenchida com ladrilhos pretos e a área preenchida com ladrilhos brancos é igual a

**a)** $\dfrac{10 - \pi}{4 + \pi}$.

**b)** $\dfrac{14 - \pi}{4 + \pi}$.

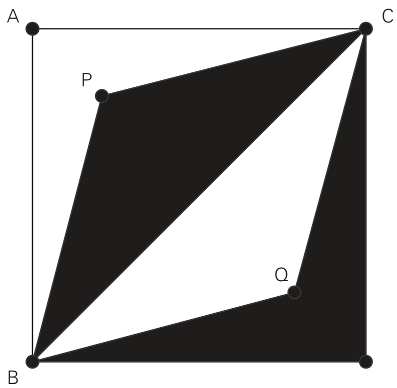
**c)** $\dfrac{10 + \pi}{4 - \pi}$.

**d)** $\dfrac{14 + \pi}{4 - \pi}$.

**e)** $\dfrac{10 - \pi}{4 - \pi}$.

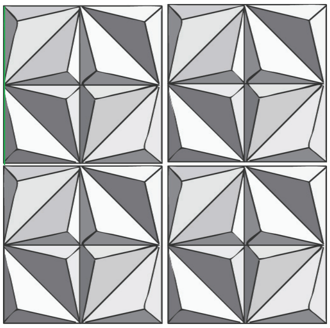
**18. Insper-SP** C2-H7

Uma artista plástica está criando uma nova obra, que será um quadro com alto relevo de formas geométricas. Para iniciar o projeto, ela desenhou o quadrado-base da obra, mostrada abaixo.




Esse quadrado tem 40 cm de lado, e o ponto P foi posicionado 8 cm para a direita e 8 cm para baixo do ponto A.
Traçando a diagonal do quadrado e tomando o ponto P como vértice, ela construiu o triângulo em preto e, usando a simetria em relação à diagonal, ela construiu o triângulo em branco, com vértice no ponto Q.

Em seguida, reproduzindo esse quadrado-base 16 vezes, ela construiu o quadro em relevo mostrado abaixo, elevando 2 tetraedros sobre cada quadrado-base, cada um com altura de 6 cm em relação ao plano do quadrado-base, conforme ilustra a figura a seguir.



A área do triângulo PBC do quadrado-base é igual a

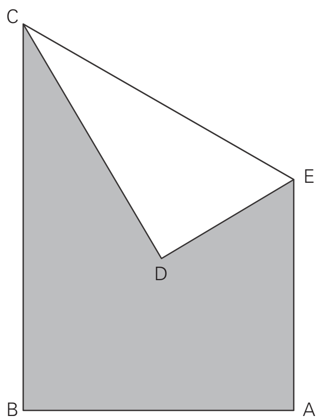
**a)** 320 cm².
**b)** 480 cm².
**c)** 640 cm².
**d)** 800 cm².
**e)** 960 cm².

**19. UPF-RS** C2-H7

Considere a área de uma folha de papel A4, com 297 mm de comprimento e 210 mm de largura. Dobrando ao meio a folha de papel por sucessivas vezes, são formados retângulos cada vez menores. A tabela a seguir relaciona as medidas e a área dos retângulos obtidos a cada dobragem.

| Nº de dobragens | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Largura (mm) | 148,5 | 105 | 74,25 | 52,5 |
| Comprimento (mm) | 210 | 148,5 | 105 | 74,25 |
| Área (mm²) | 31185 | 15592,5 | 7796,25 | 3898,125 |

A folha de papel A4 foi dobrada como mostra a figura a seguir. Se o comprimento do segmento AE é 177 mm, a medida do segmento CE e a área do polígono ABCDE são, respectivamente:




**a)** $30\sqrt{65}$ mm e 37 170 mm².
**b)** $30\sqrt{65}$ mm e 49 770 mm².
**c)** $3\sqrt{13}$ mm e 49 770 mm².
**d)** $20\sqrt{10}$ mm e 37 170 mm².
**e)** $3\sqrt{10}$ mm e 35 070 mm².

**20. FGV** C2-H9

Três irmãos receberam de herança um terreno plano com a forma de quadrilátero convexo de vértices A, B, C e D, em sentido horário. Ligando os vértices B e D por um segmento de reta, o terreno fica dividido em duas partes cujas áreas estão na razão 2:1, com a parte maior demarcada por meio do triângulo ABD. Para dividir o terreno em áreas iguais entre os três irmãos, uma estratégia que funciona, independentemente das medidas dos ângulos internos do polígono ABCD, é fazer os traçados de $\overline{BD}$ e $\overline{DM}$, sendo

**a)** M o ponto médio de $\overline{AB}$.

**b)** M o ponto que divide $\overline{AB}$ na razão 2:1.

**c)** M a projeção ortogonal de D sobre $\overline{AB}$.

**d)** $\overrightarrow{DM}$ a bissetriz de $A\hat{D}B$.

**e)** $\overline{DM}$ a mediatriz de $\overline{AB}$.

# 31 RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA I

- Teoremas das cordas

**HABILIDADES**

- Compreender os teoremas das cordas na resolução de problemas que envolvam esses segmentos na circunferência.
- Resolver problemas que envolvam as propriedades de tangência de uma circunferência.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

JGROUP/ISTOCKPHOTO

Diferentes tipos de roda em linha histórica que demonstram a evolução dessa tecnologia ao longo do tempo.

## Introdução

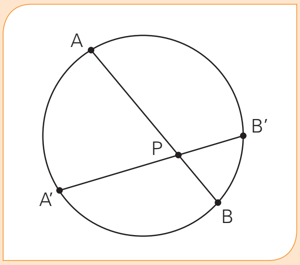
Não se sabe ao certo quando o homem inventou a roda, pois, a depender da civilização antiga estudada, há evidências de uso em momentos distintos. Enquanto egípcios e sumérios já utilizavam a roda para facilitar o transporte de cargas pesadas desde cerca de 1700 a.C, nesse mesmo período, os povos habitantes da Oceania desconheciam as utilidades dessa tecnologia. Independentemente dos mistérios que permeiam sua criação, a invenção da roda e sua evolução até a atualidade são a base para as diferentes revoluções tecnológicas pelas quais passamos. As rodas são aplicadas desde em uma simples engrenagem em um relógio até em turbinas de avião.

### TEOREMAS DAS CORDAS

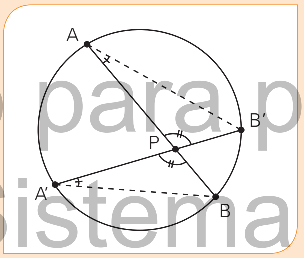
Segmentos, pontos e cordas de uma circunferência se relacionam de algumas formas. Veremos adiante as principais relações entre eles.

### TEOREMA 1 – RELAÇÃO ENTRE CORDAS

Observe que as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ da figura a seguir se intersectam no ponto P.




Traçando outras duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, obtemos:



$\hat{A} \cong A$ (ângulos inscritos no mesmo arco).
$A\hat{P}B' \cong A'\hat{P}B$ (ângulos opostos pelo vértice).
Pelo caso de semelhança de triângulos AAA, temos: $\Delta APB' \sim \Delta A'PB$.

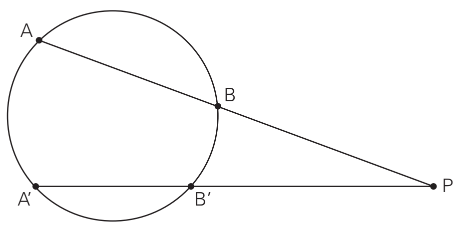
Logo, $\dfrac{PA}{PA'} = \dfrac{PB'}{PB} \rightarrow PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$.

Se duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ da circunferência se intersectam em um ponto P de seu interior, então

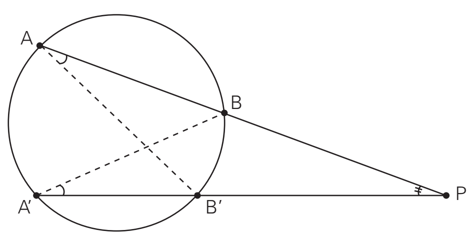
$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

## TEOREMA 2 – RELAÇÃO ENTRE SECANTES

Observe as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ e note que elas se cruzam em um ponto P exterior à circunferência.




Traçando outras duas cordas $\overline{AB'}$ e $\overline{A'B}$, obtemos:




De acordo com a figura:
$\hat{A} \cong A$ (ângulos inscritos no mesmo arco).
$\hat{P}$ é o ângulo comum.
Logo, $\Delta APB' \sim \Delta A'PB$.

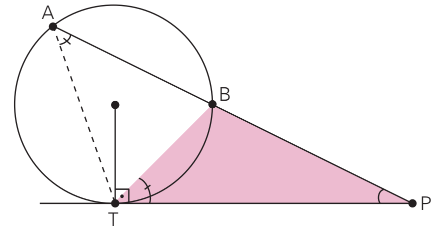
Então, $\dfrac{PA}{PA'} = \dfrac{PB'}{PB} \rightarrow PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$.

Se duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ da circunferência se intersectam em um ponto P externo a ela, então

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'.$$

## TEOREMA 3 – RELAÇÃO ENTRE TANGENTE E SECANTE

Observe que o segmento PA é secante à circunferência, enquanto o segmento PT é tangente a ela. O ponto P é comum aos dois segmentos.



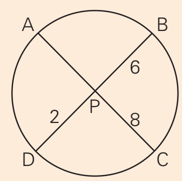

Nesse caso, temos:
$P\hat{A}T \sim P\hat{T}B$, pois determinam o mesmo arco $\overset{\frown}{TB}$.
$\hat{P}$ é o ângulo comum.
Logo, $\Delta PBT' \sim \Delta PTA$.

Então, $\dfrac{PA}{PT} = \dfrac{PT}{PB} \rightarrow PA \cdot PB = (PT)^2$.

Se a reta suporte da corda $\overline{AB}$ da circunferência concorre com uma reta tangente a essa circunferência em um ponto P, sendo T o ponto de tangência, então $PA \cdot PB = (PT)^2$.

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

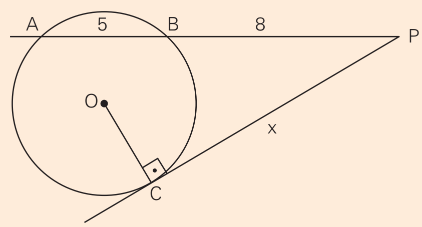
**1. Sistema Dom Bosco** – As cordas da circunferência a seguir se intersectam no ponto P. Utilizando a relação entre cordas, calcule o valor do segmento $\overline{PA}$.




**Resolução**

Pela relação entre cordas, temos: $PA \cdot PC =$
$= PB \cdot PD \rightarrow PA \cdot 8 = 6 \cdot 2 \rightarrow PA = \dfrac{12}{8} = 4 \therefore \overline{PA} = 4$

**2. Sistema Dom Bosco** – Na figura a seguir, o segmento PC é tangente à circunferência, enquanto o segmento PA é secante. Utilize a relação entre secante e tangente em uma circunferência para calcular o valor de x.




**Resolução**:

Pela relação entre tangente e secante, temos:
$PA \cdot PB = (PC)^2 \rightarrow (4 + 8) \cdot 8 = x^2 \rightarrow x^2 = 104 \rightarrow$
$\rightarrow x = \pm\sqrt{104}$
A medida negativa é descartada. Passamos, então, a ter $x = 2\sqrt{26}$

# ROTEIRO DE AULA

## RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

**Teorema das cordas**

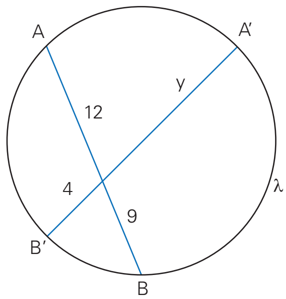
**Teorema 1**
Relação entre cordas
$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

**Teorema 2**
Relação entre secantes
$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

**Teorema 3**
Relação entre tangente e secante
$PA \cdot PB = (PT)^2$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

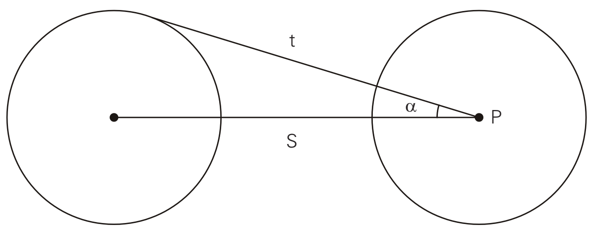
**1. Sistema Dom Bosco** – As cordas AB e A′B′ se intersectam internamente à circunferência λ. Por meio da relação entre cordas, calcule o valor de **y**.




Pelo teorema 1 das cordas, temos:
$4 \cdot y = 12 \cdot 9 \to 4 \cdot y = 108 \therefore y = 27$

**2. Unifor-CE** C2-H7

Os pneus de uma bicicleta têm raio R e seus centros distam 3R. Além disso, a reta t passa por P e é tangente à circunferência do pneu, formando um ângulo α com a reta s, que liga os dois centros.




Pode-se concluir que cos α

**f)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

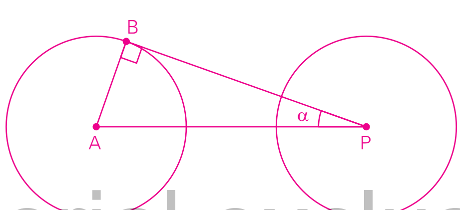
**g)** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

**h)** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

**i)** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

**j)** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Vamos considerar a seguinte figura:




De acordo com a figura: $\overline{AP} = 3R$ e $\overline{AB} = R$
Usando o teorema de Pitágoras, obtemos: $\overline{AP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{PB}^2 \to$
$\to (3R)^2 = R^2 + \overline{PB}^2 \to \overline{PB} = 2\sqrt{2}\,R$.

Em consequência: $\cos \alpha = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{AP}} \to \cos \alpha\ \dfrac{2\sqrt{2}R}{3R} \to \cos \alpha\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

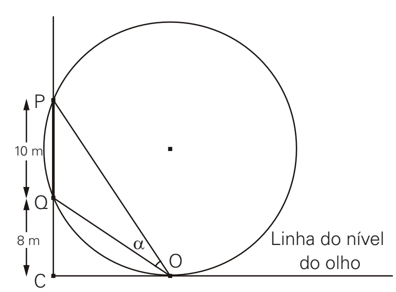
**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
**Habilidade**: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

**3. UTFPR** – Duas cordas cortam-se no interior de um círculo. Os segmentos da primeira são expressos por 6x e 2x + 2, e os da segunda, por 2x e 8x − 2. Com isso podemos determinar que o comprimento da maior corda vale:

**a)** 24
**b)** 30
**c)** 32
**d)** 34
**e)** 38

O cruzamento de duas cordas na circunferência gera segmentos proporcionais. Assim:
$6x \cdot (2x + 2) = 2x \cdot (8x - 2) \to \dfrac{6x}{2x} \cdot (2x + 2) = (8x - 2) \to$
$\to 3 \cdot (2x + 2) = (8x - 2) \to 6x + 6 = 8x - 2 \to 8x - 6x = 6 + 2 \to$
$\to 2x = 8 \to x = 4$
Logo, calculando o comprimento de cada corda:
Corda 1 $\to 6x + 2x + 2 \to 8 \cdot 4 + 2 = 34$
Corda 2 $\to 2x + 8x - 2 \to 10 \cdot 4 - 2 = 38$
Portanto, o comprimento da maior corda vale 38.

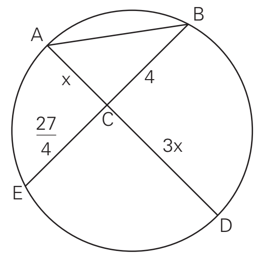
**4. UFSC** – Em um centro de eventos na cidade de Madri, encontra-se um mural de Joan Miró (1893-1983) confeccionado pelo ceramista Artigas. O mural está colocado no alto da parede frontal externa do prédio e tem 60m de comprimento por 10 m de altura. A borda inferior do mural está 8 m acima do nível do olho de uma pessoa. A que distância da parede deve ficar essa pessoa para ter a melhor visão do mural, no sentido de que o ângulo vertical que subtende o mural, a partir de seu olho, seja o maior possível? O matemático Regiomontanus (1436--1476) propôs um problema semelhante em 1471 e o problema foi resolvido da seguinte maneira:




Imagine uma circunferência passando pelo olho O do observador e por dois pontos P e Q, verticalmente dispostos nas bordas superior e inferior do mural. O ângulo α será máximo quando esta circunferência for tangente à linha do nível do olho, que é perpendicular à parede onde se encontra o mural, como mostra a figura. Com estas informações, calcule a que distância OC da parede deve ficar o observador para ter a melhor visão do mural de Joan.

Utilizando o teorema 3 das cordas (relação métrica na circunferência), que relacionada a secante e a tangente, temos:
$(CO)^2 = 8 \cdot 18 = 144 \to CO = 12$

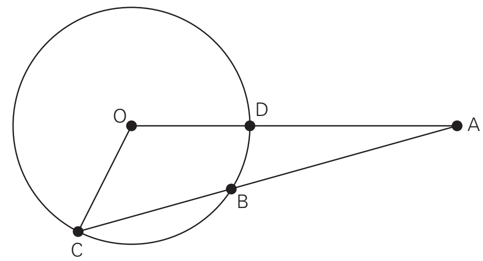
**5. Sistema Dom Bosco** – A corda AB representa a hipotenusa do triângulo retângulo ABC. Os catetos desse triângulo são segmentos de reta que pertencem às cordas AD e BE. Sendo o diâmetro da circunferência desconhecido, pode-se afirmar que o perímetro do triângulo ABC corresponde a:




**a)** 1 cm
**b)** 2 cm
**c)** 3 cm
**d)** 4 cm
**e)** 5 cm

Pelo teorema 1 das cordas, obtemos: $x \cdot 3x = 4 \cdot \frac{27}{4} \rightarrow 3x^2 = 27 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$
Como **x** tem que ser um valor positivo, $x = 3$.
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos: $AB^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow AB^2 =$
$= 9 - 16 = 25 \rightarrow AB = 5$
Assim, obtemos o perímetro do triângulo: $P = 3 + 4 + 5 \rightarrow P = 12$.
Portanto, P = 12 cm.

**6. Sistema Dom Bosco** – Na figura a seguir, AB = 10 cm, BC = 12 cm, AD = 4 cm, e O é o centro da circunferência. O perímetro do triângulo AOC mede, em cm:

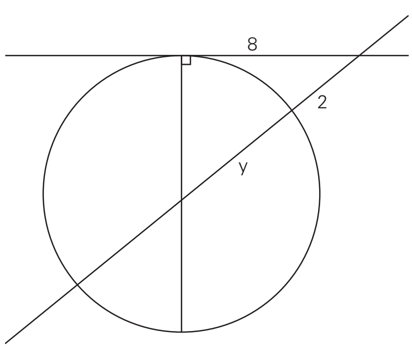



**a)** 22
**b)** 51
**c)** 55
**d)** 120
**e)** 128

$AB \cdot AC = AD \cdot AO$
$10 \cdot (10 + 12) = 4 \cdot (4 + DO)$
$10 \cdot 22 = 16 + 4DO \rightarrow 4DO = 220 - 16 = 204 \rightarrow DO = 51$
AO = 51 + 4 = 55 cm
OC = 51 cm
AC = 10 + 12 = 22 cm
Logo, o perímetro do triângulo AOC corresponde a 55 + 51 + 22 =
= 128 cm.

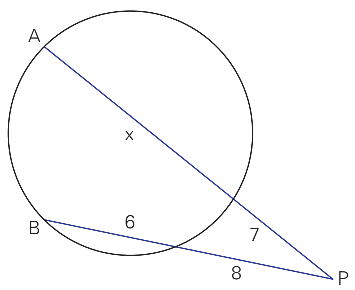
## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. Sistema Dom Bosco** – Utilizando o teorema das cordas, pode-se afirmar que **y**:




**a)** é um número ímpar
**b)** é um múltiplo de 8
**c)** é um número par
**d)** é um número irracional
**e)** é um número primo

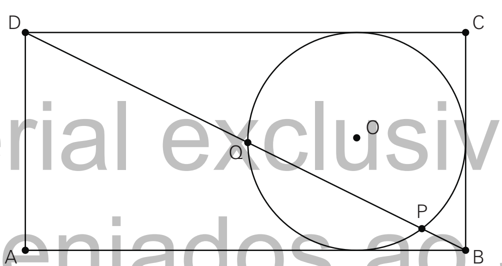
**8. Sistema Dom Bosco** – A circunferência da figura a seguir é segmentada por duas secantes AP e BP, tendo em P o ponto comum entre elas.




Pode-se afirmar que x corresponde a:

**a)** 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 10

**9. UFMG** – Nos séculos XVII e XVIII, foi desenvolvida no Japão uma forma particular de produzir matemática. Um dos hábitos que a população adotou foi o de afixar em templos placas contendo problemas, em geral de geometria. Essas placas, conhecidas como sangaku, apresentavam o problema com ilustrações e a resposta, sem registrar a solução dos autores. O seguinte problema foi adaptado de um desses sangakus: considere ABCD um retângulo com AB = 160 e AD = 80; tome uma circunferência de centro O tangente aos lados AB, BC e CD do retângulo, e seja BD uma de suas diagonais, interceptando a circunferência nos pontos P e Q.

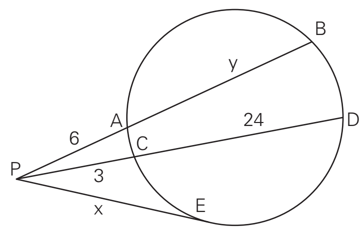



Considerando essas informações,

**a)** Determine o raio QO da circunferência.

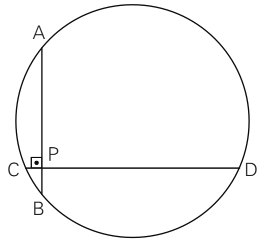
**b)** Determine o comprimento do segmento PQ.

**10. Sistema Dom Bosco** – Dada a figura, pode-se afirmar que a soma de **x** e **y** corresponde a:



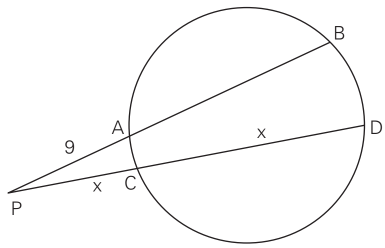

**a)** 16,3 **b)** 16,5 **c)** 23,2 **d)** 23,5 **e)** 30,1

**11. FGV** – As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um círculo são perpendiculares no ponto P, e AP = 6, PB = 4 e CP = 2. O raio desse círculo mede

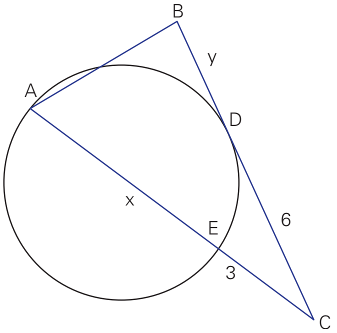



**a)** 5.
**b)** 6.
**c)** $3\sqrt{3}$.
**d)** $4\sqrt{2}$.
**e)** $5\sqrt{2}$.

**12. Sistema Dom Bosco** – Dois segmentos de reta se intersectam no ponto P, externo à circunferência de raio R. Sendo PB = 24 cm, qual a medida de x? Observação: a figura está fora de escala.

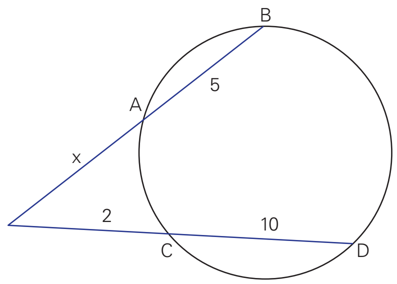



**13. Sistema Dom Bosco** – O segmento AC é secante à circunferência, enquanto o segmento BC a tangencia. O triângulo ABC é isósceles, sendo congruentes os lados AB e BC. Logo, pode-se afirmar que x + y corresponde a:



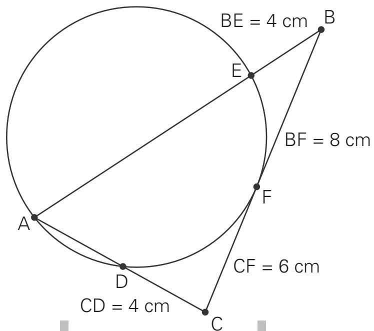

**a)** 12
**b)** 9
**c)** 15
**d)** 21
**e)** 36

**14. Sistema Dom Bosco** – A figura a seguir representa dois segmentos de reta secantes à circunferência. Sendo x um número natural, pode-se afirmar que ele corresponde a:




**a)** 2
**b)** 3
**c)** 4
**d)** 5
**e)** 6

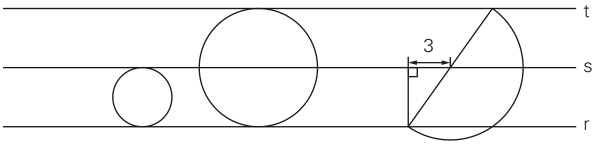
**15. Fac. Albert Einstein** – Uma circunferência tangencia o lado BC de um triângulo ABC no ponto F e intersecta os lados AB e AC desse triângulo, nos pontos E e D, respectivamente, conforme mostra a figura.




Sabendo que essa circunferência passa pelo ponto A, a distância entre os pontos D e E é igual a

**a)** 10,5
**b)** 10,9
**c)** 11,3
**d)** 11,7

**16. CFTMG** – Nas três retas paralelas, a circunferência que tangencia as retas r e s tem raio 2 e o semicírculo possui área 112,5 π.




O comprimento da circunferência que tangencia as retas r e t é

**a)** 19π.
**b)** 22π.
**c)** 24π.
**d)** 27π.

**17. Fuvest** – As circunferências $C_1$ e $C_2$ estão centradas em $O_1$ e $O_2$, têm raios $r_1 = 3$ e $r_2 = 12$, respectivamente, e tangenciam-se externamente. Uma reta t é tangente a $C_1$ no ponto $P_1$, tangente a $C_2$ no ponto $P_2$ e intercepta a reta $O_1O_2$ no ponto Q. Sendo assim, determine

**a)** o comprimento $P_1P_2$;

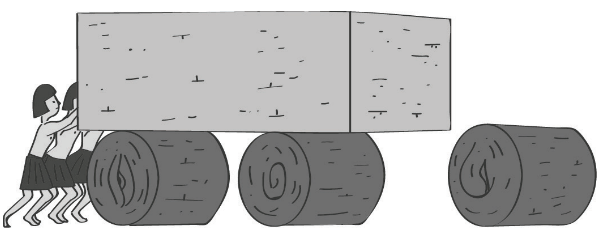
**b)** a área do quadrilátero $O_1O_2\ P_2P_1$;

**c)** a área do triângulo $QO_2P_2$.

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Enem** C2-H6

A ideia de usar rolos circulares para deslocar objetos pesados provavelmente surgiu com os antigos egípcios ao construírem as pirâmides.



Representando por R o raio da base dos rolos cilíndricos, em metros, a expressão do deslocamento horizontal y do bloco de pedra em função de R, após o rolo ter dado uma volta completa sem deslizar, é

**a)** $y = R$.

**b)** $y = 2R$.

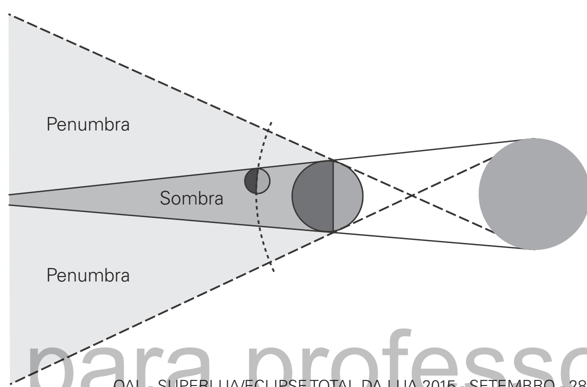
**c)** $y = \pi R$.

**d)** $y = 2\pi R$.

**e)** $y = 4\pi R$.

**19. CP2-RJ** C2-H6

Observe a imagem (Figura 1) produzida pelo Observatório Astronômico de Lisboa (OAL) do eclipse total ocorrido no mês de setembro de 2015. Nela percebe-se a existência de um cone de sombra.




OAL - SUPERLUA/ECLIPSE TOTAL DA LUA 2015 - SETEMBRO - 28

Fonte: www.oal.pt/. Acessado em 12/10/2015

Figura 1

A partir desta imagem, foi construído o esquema matemático apresentado na Figura 2:

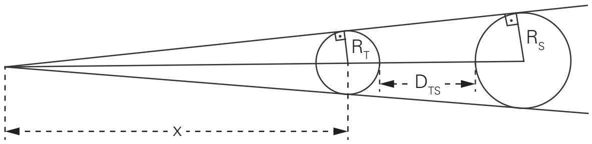


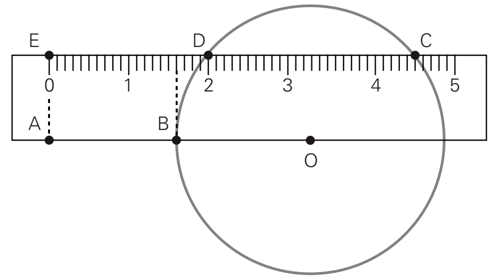

Figura 2

Com base no esquema da Figura 2, e sabendo que os raios da Terra (RT) e do Sol (RS) medem, aproximadamente, 6 000 km e 690 000 km, respectivamente, e que a distância entre a Terra e o Sol (DTS) é de 150 000 000 km, então o comprimento aproximado da altura x desse cone de sombra é de

**a)** 570 000 km.
**b)** 800 000 km.
**c)** 1 300 000 km.
**d)** 1 500 000 km.

**20. Uerj** C2-H7

A figura abaixo representa um círculo de centro O e uma régua retangular, graduada em milímetros. Os pontos A, E e O pertencem à régua e os pontos B, C e D pertencem, simultaneamente, à régua e à circunferência.




Considere os seguintes dados

| Segmentos | Medida (cm) |
|---|---|
| $\overline{AB}$ | 1,6 |
| $\overline{ED}$ | 2,0 |
| $\overline{EC}$ | 4,5 |

O diâmetro do círculo é, em centímetros, igual a:

**a)** 3,1
**b)** 3,3
**c)** 3,5
**d)** 3,6
**e)** 3,9

# 32 RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA II

- Tangência

**HABILIDADES**

- Compreender os teoremas das cordas na resolução de problemas que envolvam esses segmentos na circunferência.
- Resolver problemas que envolvam as propriedades de tangência de uma circunferência.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.


ATYPEEK/ISTOCKPHOTO

Pintura abstrata de Wassily Kandinsky.

## Introdução

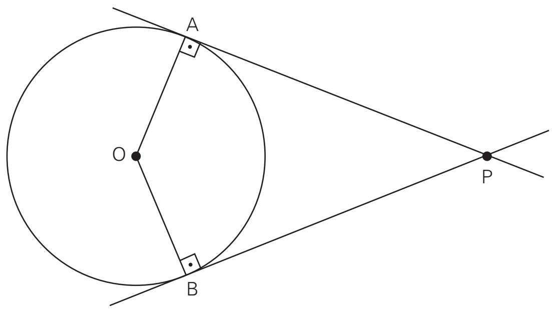
O pintor russo pioneiro do movimento abstracionista Wassily Kandinsky (1866-1944), apesar de sua formação em Direito pela Universidade de Moscou, demonstrou grande interesse pelas Artes Visuais. Em algumas de suas pinturas, deixou transparecer um toque musical. É considerado o primeiro pintor do Ocidente a produzir pinturas abstratas. Entre as muitas formas geométricas utilizadas por Kandinsky, é possível observar grande número de circunferências.

### TANGÊNCIA

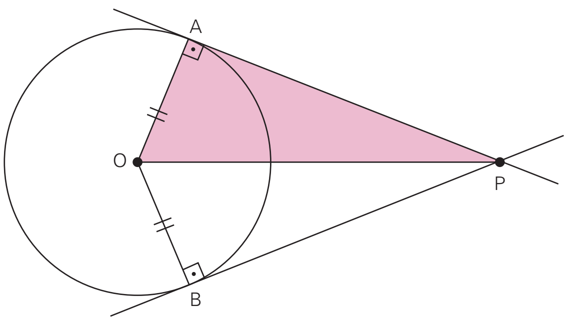
Veremos agora as relações métricas quando há tangência entre uma reta e uma circunferência. Em Geometria, tangência significa "tocar uma curva ou superfície sem cortá-la", havendo, assim, um único ponto comum.

## RETAS TANGENTES POR UM PONTO EXTERNO

Dado um ponto **P** externo à circunferência, existem duas retas distintas que passam pelo ponto P e que são tangentes em dois pontos, **A** e **B**.




Ao unirmos o ponto **P** ao centro da circunferência **O**, obtemos os triângulos semelhantes AOP e BOP.

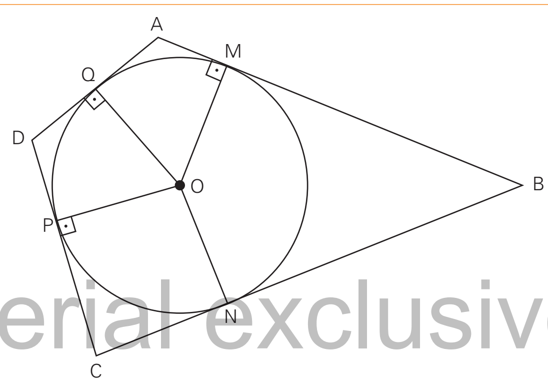



O ângulo entre a reta tangente e a circunferência é sempre reto (ou seja, de 90°), e os segmentos OA e OB são iguais (raio da circunferência). Com isso e sabendo que $\triangle APO \sim \triangle BPO$, concluímos que:

$$\overline{PA} \cong \overline{PB}$$

## QUADRILÁTEROS CIRCUNSCRITÍVEIS

Quando é possível circunscrevermos um quadrilátero na circunferência, dizemos que ele é **circunscritível.**




Se um quadrilátero convexo está circunscrito à circunferência, então a soma das medidas de dois lados opostos é igual à soma das medidas dos outros dois lados.

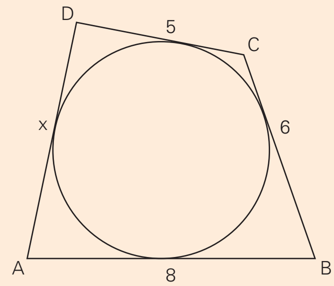
Podemos provar que $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$. Nesse caso, é válido afirmarmos que o contrário também ocorre: em um quadrilátero convexo, se a soma das medidas de dois lados opostos é igual à soma da medida dos outros dois lados, então o quadrilátero é circunscritível.

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

**Sistema Dom Bosco** – Um quadrilátero convexo ABCD tem lados medindo, respectivamente, 8 cm, 6 cm, 5 cm e x cm. Calcule o valor de x para que esse quadrilátero seja circunscritível a uma circunferência.

**Resolução**

O quadrilátero em questão pode ser representado pela figura a seguir.




Ao aplicarmos a regra para quadriláteros circunscritíveis, temos:

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$$

Então:

$8 + 5 = 6 + x \rightarrow 13 - 6 = x \therefore x = 7$

# ROTEIRO DE AULA

## RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA II

### TANGÊNCIA

Retas tangentes por um ponto externo

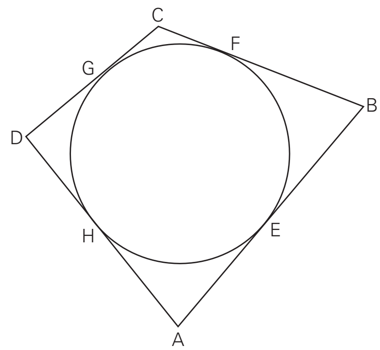
$\overline{PA} \cong \overline{PB}$

Quadriláteros circunscritíveis

$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Sistema Dom Bosco** – O quadrilátero ABCD tangencia a circunferência nos pontos DEFG, conforme figura abaixo. Sabendo que o segmento AB = 10 cm, BC = 8 cm e CD = 9 cm, pode-se afirmar que o segmento AD mede:

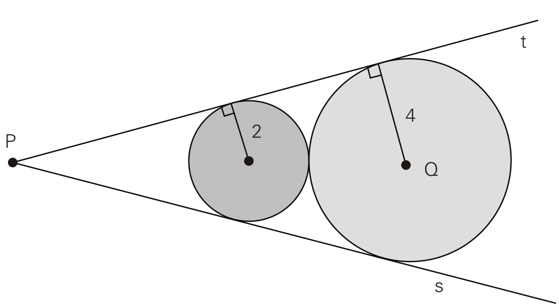



**a)** 10
**b)** 11
**c)** 12
**d)** 13
**e)** 14

$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

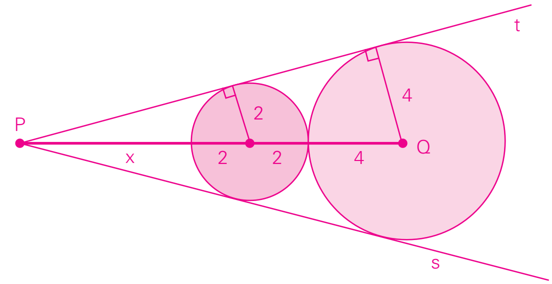
$10 + 9 = 8 + \overline{AD} \rightarrow 19 - 8 = \overline{AD} \therefore x = 11$

**2. UFRGS** – Observe os discos de raios 2 e 4, tangentes entre si e às semirretas s e t, representados na figura abaixo.




A distância entre os pontos P e Q é

**a)** 9.
**b)** 10.
**c)** 11.
**d)** 12.
**e)** 13.




Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{x+2}{x+8} = \frac{2}{4}$$

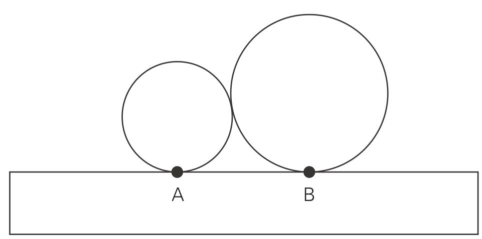
$4x + 8 = 2x + 16$

$x = 4$

Portanto, a distância de P até Q vale 12.

**3. CP2-RJ (adaptado)** C2-H6

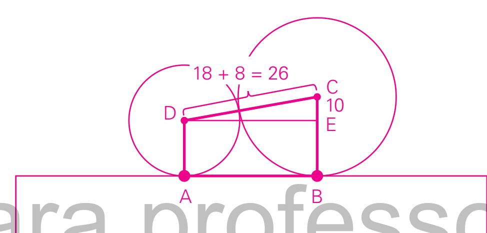
Pedrinho está brincando com duas moedas circulares com tamanhos diferentes e uma régua não graduada. Sabe-se que as moedas possuem raios iguais a 8 e 18 milímetros, respectivamente. Em certo momento ele posicionou as duas moedas tangentes à régua em dois pontos (A e B), e tangentes entre si, simultaneamente, conforme a figura a seguir:




Nessas condições, o comprimento de $\overline{AB}$ seria igual a

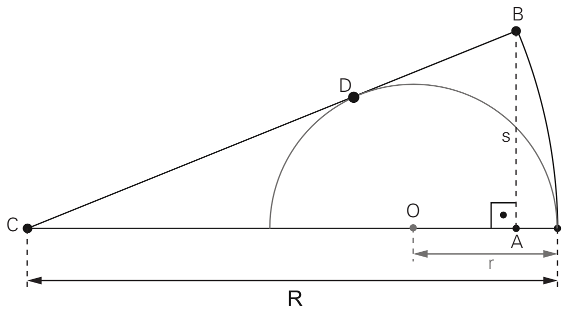
**a)** 26 mm.
**b)** 24 mm.
**c)** 22 mm.
**d)** 20 mm.
**e)** 18 mm.

Vamos considerar a figura.



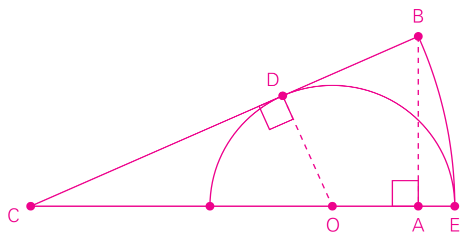

Como as circunferências são tangentes entre si, traçamos os segmentos descritos na figura e aplicamos o teorema de Pitágoras.
Então: $DE^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576 \therefore DE = 24$ mm.

**4. Unesp** – Uma semicircunferência de centro O e raio r está inscrita em um setor circular de centro C e raio R, conforme a figura.




O ponto D é de tangência de $\overline{BC}$ com a semicircunferência. Se $\overline{AB} = s$, demonstre que $R \cdot s = R \cdot r + r \cdot s$.

Vamos considerar a figura.



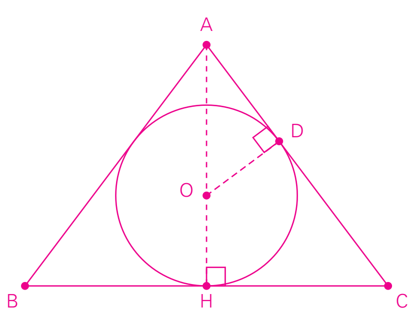

Como o segmento BC tangencia a semicircunferência:
$\triangle ODC \sim \triangle BAC$.
Então:

$\frac{BC}{OC} = \frac{BA}{OD} \rightarrow \frac{R}{R-r} = \frac{s}{r} \rightarrow R \times s - r \times s = R \times r \rightarrow R \times s =$
$= R \times r + r \times s$ (c. q. d.)

**5. Fuvest** – Uma circunferência de raio 3 cm está inscrita no triângulo isósceles ABC, no qual $\overline{AB} = \overline{AC}$. A altura relativa ao lado $\overline{BC}$ mede 8 cm. O comprimento de $\overline{BC}$ é, portanto, igual a

**a)** 24 cm
**b)** 13 cm
**c)** 12 cm
**d)** 9 cm
**e)** 7 cm

Para resolver o problema, consideramos que D é o ponto em que o lado AC tangencia a circunferência, e que o centro em O e H é o ponto em que a altura do triângulo intersecta o lado BC.

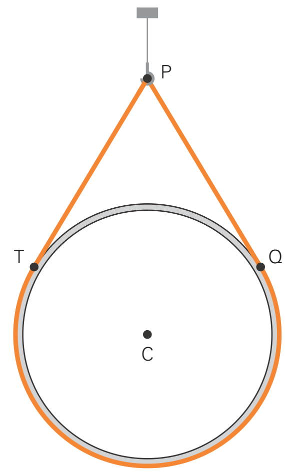



OH = OD = 3 cm e AH = 8 cm. Então, AO = 5 cm. Logo, AD = 4 cm.

Como $\triangle AHC \sim \triangle ADO$, temos: $\frac{AH}{AD} = \frac{HC}{DO} \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{HC}{3} \rightarrow HC = 6$ cm

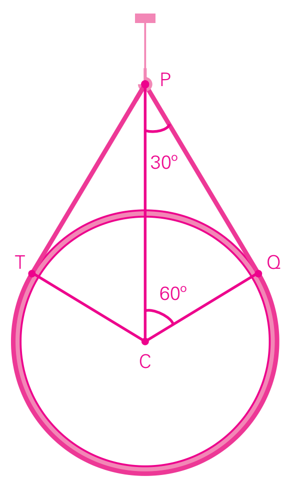
Como H é o ponto médio de BC, o segmento BC mede 12 cm.

**6. Unesp** – Uma peça circular de centro C e raio  está suspensa por uma corda alaranjada, perfeitamente esticada e fixada em P. Os pontos T e Q são de tangência dos segmentos retilíneos da corda com a peça, e a medida do ângulo agudo $T\hat{P}Q$ é 60°.




Desprezando-se as espessuras da corda, da peça circular e do gancho que a sustenta, calcule a distância de P até o centro C da peça. Adotando $\pi = 3{,}1$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$ nas contas finais, calcule o comprimento total da corda.

Vamos considerar a figura.




a) $\text{sen } 30° = \frac{co}{hip} = \frac{QC}{PC} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{12}{PC} \rightarrow PC = 24$ cm

b) $\text{tg } 60° = \frac{co}{ca} = \frac{PQ}{CQ} \rightarrow \frac{PQ}{12} = \sqrt{3} \rightarrow PQ = 12\sqrt{3} \cong 20{,}4$ cm

$PQ = PT \cong 20{,}4$ cm
Já o arco QT mede:

$\text{Arco QT} = \frac{240}{360} \times 2\pi R = \frac{240}{360} \times 24\pi = 16\pi = 49{,}6$ cm

Logo, a corda terá um comprimento igual a:
$C_{corda} = PQ + PT + \text{Arco QT} = 20{,}4 + 20{,}4 + 49{,}6 \cong 90{,}4 \therefore$
$\therefore C_{corda} \cong 90{,}4$ cm.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. Sistema Dom Bosco** – Um quadrilátero convexo ABCD possui lados medindo, respectivamente, 10 cm, 12 cm, 8 cm e x cm. Pode-se afirmar que o valor de x para que esse quadrilátero seja circunscritível a uma circunferência corresponde a:

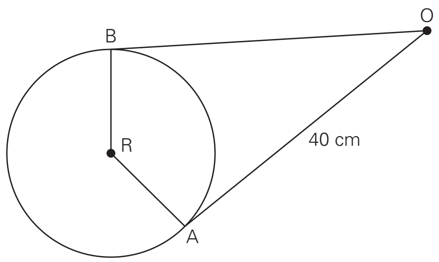
**a)** 2 cm
**b)** 4 cm
**c)** 6 cm
**d)** 8 cm
**e)** 10 cm

**8. UEM-PR** – Um quadrilátero se diz inscritível em um círculo C se todos os seus vértices estão sobre a circunferência que determina C, e neste caso diz-se que o quadrilátero é inscrito em C. Considere um quadrilátero ABDE inscrito em um círculo, que é determinado por uma circunferência C′, e sejam $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{D}$ e $\hat{E}$ seus ângulos internos.

Então é **correto** afirmar que:

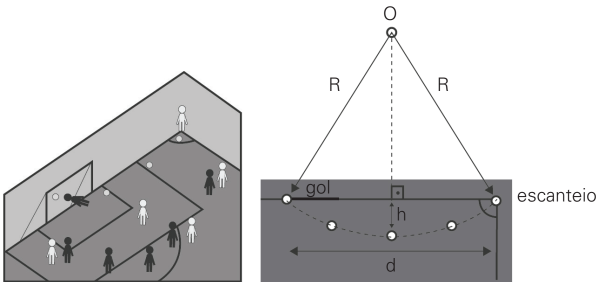
**01)** Os lados do ângulo $\hat{A}$ determinam um arco na circunferência C′, cuja medida é o dobro da medida do ângulo $\hat{A}$.
**02)** As diagonais AD e BE do quadrilátero são perpendiculares.
**04)** As diagonais AD e BE se cortam em seus respectivos pontos médios.
**08)** Pelo menos dois dos ângulos internos opostos devem ser retos.
**16)** Os ângulos $B\hat{A}D$ e $B\hat{E}D$ são congruentes.

**9. Sistema Dom Bosco** – A circunferência λ possui retas tangentes por um ponto externo O. Sabe-se que o seguimento AO mede 40 cm e que o diâmetro da circunferência equivale a 60 cm. Contudo, o perímetro do quadrilátero ABOR formado pelas tangentes e pelo raio da circunferência vale:




**a)** 20 cm
**b)** 80 cm
**c)** 100 cm
**d)** 140 cm
**e)** 200 cm

**10. Unesp (adaptado)** – No futebol, um dos gols mais bonitos e raros de se ver é o chamado gol olímpico, marcado como resultado da cobrança direta de um escanteio.




Fonte: www.nominuto.com

Suponha que nesse tipo de gol:

1. A projeção da trajetória da bola descreva um arco de circunferência no plano do gramado.
2. A distância (d) entre o ponto da cobrança do escanteio e o ponto do campo em que a bola entra no gol seja 40 m.
3. A distância máxima (h) da projeção da trajetória da bola à linha de fundo do campo seja 1 m.

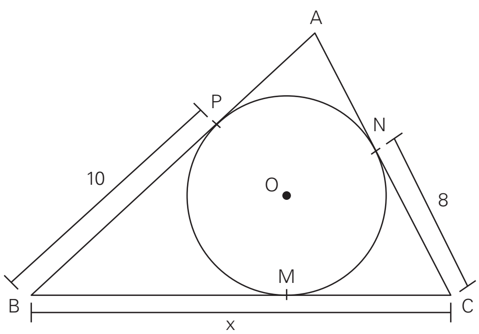
Determinando o raio da circunferência (R), em metros, do arco descrito pela trajetória da bola, com uma casa decimal de aproximação, obtemos:

**a)** 200,5 m
**b)** 120,5 m
**c)** 220,4 m
**d)** 180,4 m
**e)** 120,6 m

**11. Sistema Dom Bosco** – Observando a figura a seguir, determine (em cm):

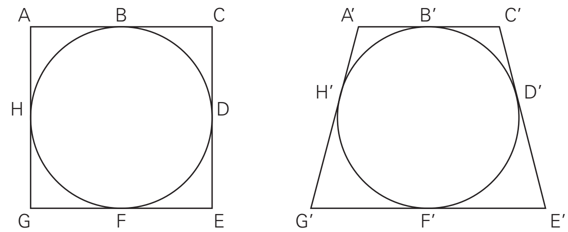
**a)** o valor de x;

**b)** a medida do segmento AN, sabendo que o perímetro do triângulo ABC é 50 cm.




**12. Sistema Dom Bosco** – A figura abaixo representa dois quadriláteros circunscritos em uma circunferência.

Fig. I Fig. II




**III.** Na figura I, o segmento AC é tangente à circunferência.

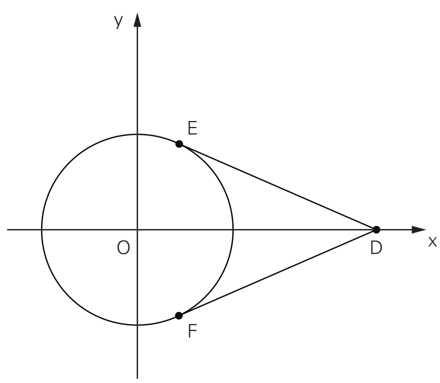
**IV.** A′C′ + G′E′ = A′G′ + C′E′

**V.** A′C′ · A′G′ = C′E′ · E′G′

Dentre as opções, pode-se afirmar que:

**a)** está correta apenas a opção I.
**b)** está correta apenas a opção II.
**c)** está correta apenas a opção III.
**d)** estão corretas as opções I e II.
**e)** estão corretas as opções I e III.

**13. UnB-DF**



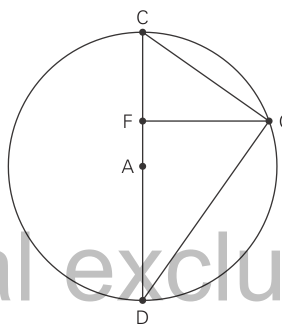

A figura acima ilustra, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, uma circunferência de raio 2 centrada na origem. Os pontos E e F são definidos pela interseção das retas tangentes à referida circunferência partindo do ponto D = (6, 0). Com base nesses dados e considerando o centímetro como a unidade de medida de comprimento, em ambos os eixos, e $\alpha$ como a medida do ângulo DÔE, assinale a opção correta.

**a)** A distância entre os pontos D e E é inferior a 5 cm.
**b)** $\alpha < 60°$.
**c)** Os números complexos correspondentes aos pontos E e F não são conjugados.
**d)** A distância entre os pontos E e F é superior a 3,5 cm.

**14. UFSJ-MG** – Considere uma corda AB, perpendicular ao diâmetro EC de um círculo de centro O. Sendo o ponto D a interseção dos segmentos AB e EC e sabendo que CD = 4 cm e ED = 9 cm, a área do triângulo AED, em $cm^2$, é igual a

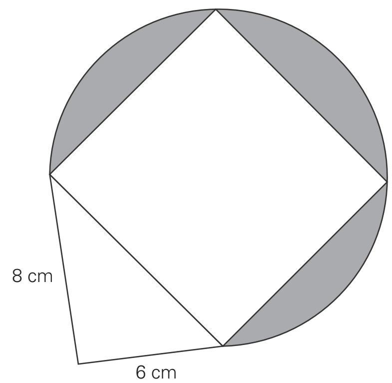
**a)** 27. **b)** 18. **c)** 36. **d)** 78.

**15. CFTMG (adaptado)** – Na figura, A é o centro da circunferência, CD é o diâmetro e GF é a altura do triângulo CDG.




Sendo CG = 3 cm e DG = 4 cm, qual a medida, em cm, do segmento AF?

**16. IFSul-RS (adaptado)** – Considere a figura:




A área da região hachurada, em $cm^2$, é

**a)** $\frac{3}{4}(10\pi - 100)$

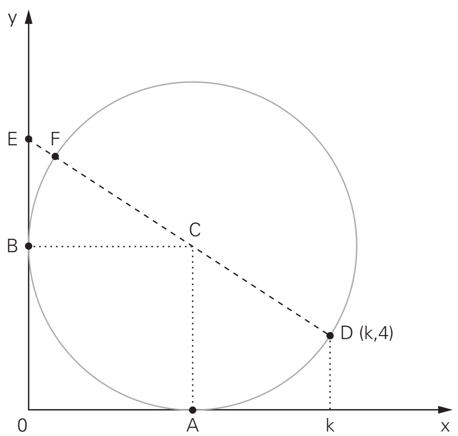
**b)** $\frac{3}{4}(50\pi - 100)$

**c)** $\frac{3}{4}(100\pi - 100)$

**d)** $50\pi - 10$

**e)** $3\pi$

**17. PUC-SP** – Considere uma circunferência tangente aos eixos ortogonais cartesianos nos pontos A e B, com 10 cm de raio, conforme mostra a figura.



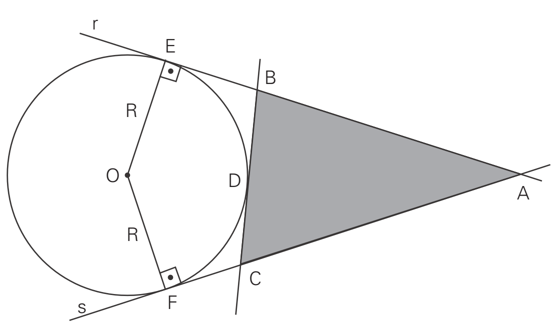

Sabendo que os pontos E, F, C, D (K, 4) estão alinhados, a medida do segmento $\overline{EF}$ é

**a)** 1,0 cm
**b)** 1,5 cm
**c)** 2,0 cm
**d)** 2,5 cm

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. EPCAR-MG (adaptado)** C2-H7

Na figura, E e F são, respectivamente, pontos de tangência das retas r e s com a circunferência de centro O e raio R. D é ponto de tangência de BC com a mesma circunferência e $\overline{AE}$ = 20 cm.

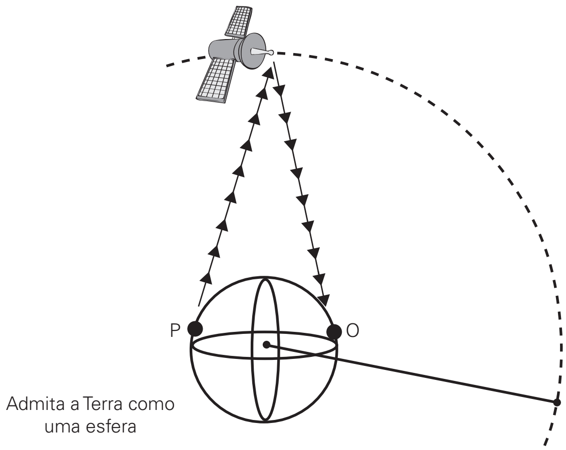



O perímetro do triângulo ABC (hachurado), em centímetros, é igual a

**a)** 20
**b)** 10
**c)** 40
**d)** 15
**e)** 20

**19. UFSCar-SP (adaptado)** C2-H6

Os satélites de comunicação são posicionados em sincronismo com a Terra, o que significa dizer que cada satélite fica sempre sobre o mesmo ponto da superfície do planeta. Considere um satélite cujo raio da órbita seja igual a 7 vezes o raio da Terra. Na figura, P e Q representam duas cidades separadas pela maior distância possível em que um sinal pode ser enviado e recebido, em linha reta, por esse satélite.




Se R é a medida do raio da Terra, para ir de P até Q, passando pelo satélite, o sinal percorrerá, em linha reta, a distância de

**a)** $6(\sqrt{3})R$.

**b)** $7(\sqrt{3})R$.

**c)** $8(\sqrt{3})R$.

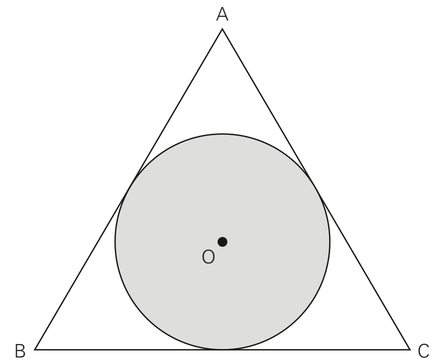
**d)** $10(\sqrt{2})R$.

**e)** $11(\sqrt{2})R$.

**20. Epcar-MG (adaptado)** C2-H7

A figura a seguir representa o logotipo que será estampado em 450 camisetas de uma Olimpíada de Matemática realizada entre os alunos do Colégio Alfa. Essa figura é formada por um círculo de centro O inscrito em um triângulo isósceles cuja base $\overline{BC}$ mede 24 cm. A altura relativa a esse lado mede 16 cm.

O círculo será pintado com tinta cinza e sabe-se que é necessário, exatamente, 1 pote de tinta cinza para pintar 5400 $cm^2$.




Adote $\pi = 3$

Com base nesses dados, é correto afirmar que o número de potes necessários para pintar o círculo em todas as camisetas é igual a

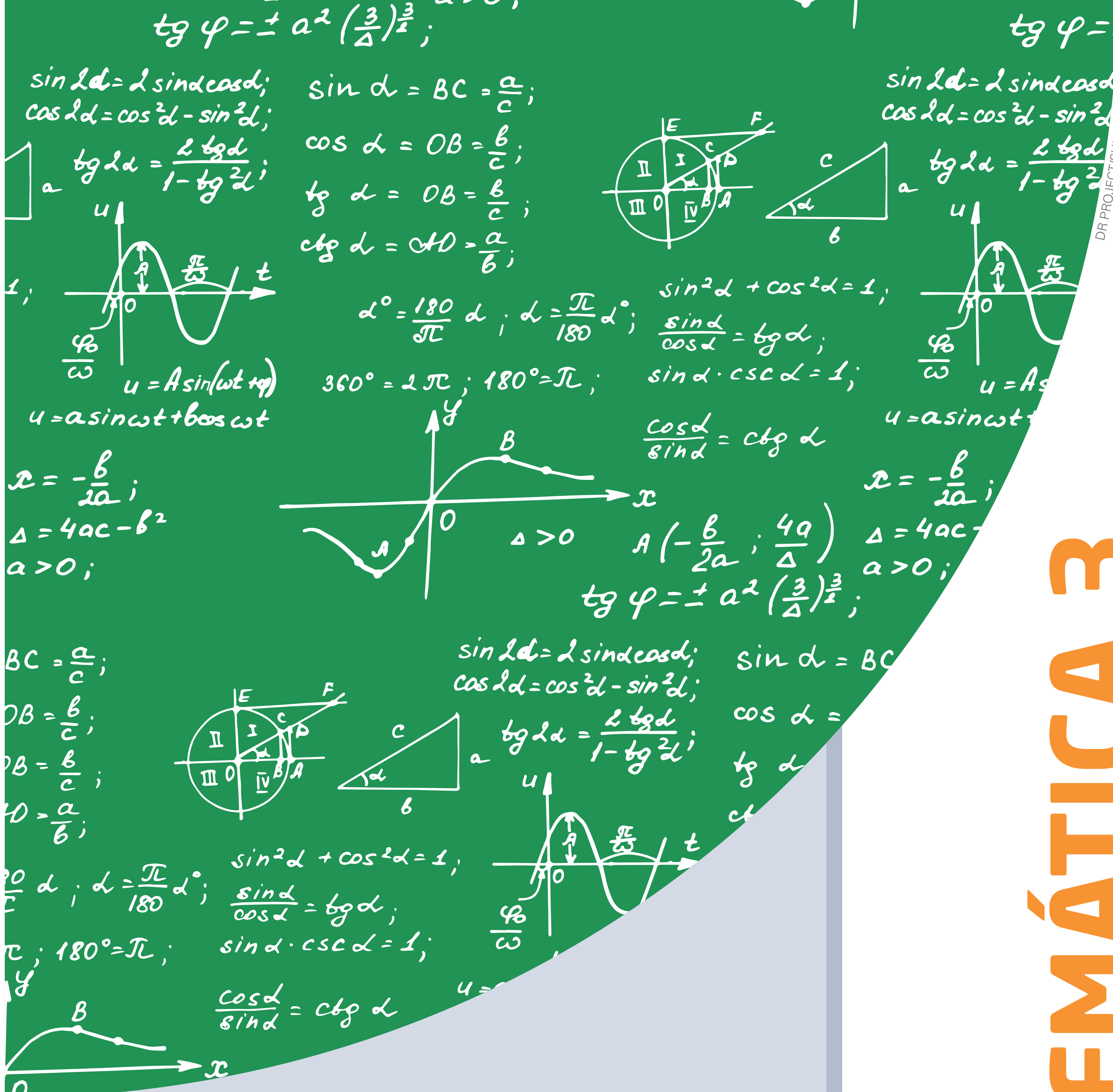
**a)** 9

**b)** 10

**c)** 11

**d)** 12

**e)** 14



DR PROJECT/SHUTTERSTOCK

# MATEMÁTICA 3

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

# 9 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS I

- Introdução às identidades trigonométricas

**HABILIDADES**

- Reconhecer relações entre as razões trigonométricas.
- Simplificar expressões com a utilização das identidades trigonométricas.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

## Introdução às identidades trigonométricas

É comum a necessidade de obter a razão trigonométrica para um ângulo (com base em outra razão cujo valor seja conhecido), ou simplificar expressões extensas envolvendo várias relações trigonométricas para o mesmo ângulo. Nesses casos, as identidades trigonométricas de cuja dedução trata este módulo são ferramentas de grande aplicabilidade.

CONSTANTINOSZ/ISTOCKPHOTO

Régua, transferidor e compasso são ferramentas para criar e medir ângulos.

Antes de demonstrar as identidades trigonométricas, é necessário definir identidade.

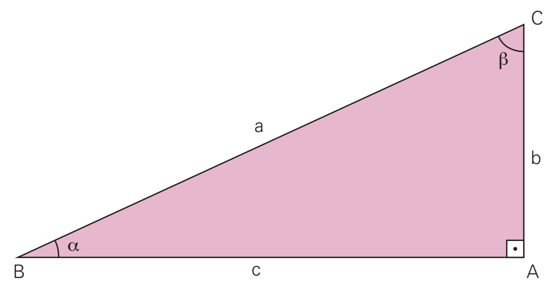
Identidade em uma ou mais variáveis é toda igualdade verdadeira para quaisquer valores a elas atribuídos, desde que verifiquem as condições de existência da expressão.

Exemplo:

A igualdade a seguir é uma identidade em x, pois é verdadeira para todo x real, desde que $x \neq 0$.

$$x + \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 2}{x}$$

Na trigonometria, podemos utilizar o triângulo retângulo ABC para relacionar as medidas de seus lados e ângulos.




Aplicando as medidas de seus lados no teorema de Pitágoras, obtém-se a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$.

Dividindo seus membros por $a^2$, não se altera a igualdade.

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

Sabemos que $\frac{b}{a} = \text{sen}\,\alpha = \cos = \beta$ e $\frac{c}{a} = \text{sen}\,\beta = $ $= \cos = \alpha$.

Portanto, substituindo esses valores na equação anterior para um ângulo x qualquer, temos:

$$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$$

Essa é a **relação fundamental** da trigonometria, cuja importância está no fato de ela possibilitar a determinação do seno do ângulo com base em seu cosseno e vice-versa.

## EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

**1. USF-SP** – Seja k o número real que satisfaz simultaneamente as equações $\text{sen}\,x = (k - 1) \cdot \sqrt{2}$ e $\cos x = \sqrt{2-3k}$. O valor de k é:

**a)** $\frac{1}{2}$
**b)** 3
**c)** 3 ou $\frac{1}{2}$
**d)** $-\frac{1}{2}$
**e)** $\frac{1}{2}$

**Resolução**

Como $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$, vem

$\left[(k-1)\sqrt{2}\right]^2 + \left(\sqrt{2-3k}\right)^2 = 1$

$2 \cdot (k - 1)^2 + (2 - 3k) = 1$

$2 \cdot (k^2 - 2k + 1) + 2 - 3k = 1$

$2k^2 - 4k + 2 + 2 - 3k = 1$

$2k^2 - 7k + 3 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau:

$k = 3$ (não convém) ou $k = \frac{1}{2}$

Logo, $k = \frac{1}{2}$.

**2. UCSal-BA** – Qualquer seja o número real x, a expressão $\cos^4 x - \text{sen}^4 x$ é equivalente a

**a)** $\text{sen}^2x - 1$
**b)** $2 \cdot \text{sen}x \cdot \cos x$
**c)** $2 \cdot \cos^2 x - 1$
**d)** $2 - \cos^2x$
**e)** $(\text{sen}x + \cos x) \cdot \cos x$

**Resolução**

$\cos^4x - \text{sen}^4 x = (\cos^2x - \text{sen}^2 x) \cdot (\cos^2x + \text{sen}^2 x)$

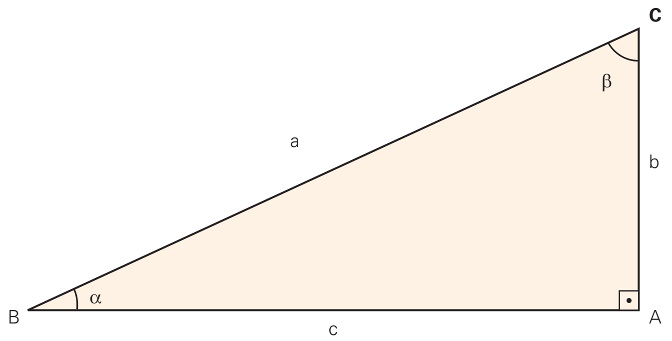
Como $\text{sen}^2 x + \cos^2x = 1$, vem $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

Substituindo:

$[\cos^2x - (1 - \cos^2x) \cdot 1 = 2 \cdot \cos^2x - 1]$

# ROTEIRO DE AULA

## IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS




**Dado um ângulo α qualquer**

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Sistema Dom Bosco** C5-H21

Conhecemos a importância do estudo da trigonometria no nosso cotidiano. Usar a trigonometria para calcular medidas como distância das margens de um rio ou a altura de um prédio faz com que o seu cálculo seja facilmente realizado através das funções de seno e cosseno. Nessas condições, dado que $\cos\alpha = 0{,}6$, calcule o valor de $\text{sen}\,\alpha$, dado que $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

**a)** 0,4
**b)** 0,8
**c)** 0,3
**d)** 0,6
**e)** 0,5

Temos que $\text{sen}^2\alpha + (0{,}6)^2 = 1$.
Logo, $\text{sen}^2\alpha = 1 - 0{,}36$.
$\text{sen}^2\alpha = 0{,}64$
$\text{sen}\,\alpha = 0{,}8$

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**2. PUC-Rio** – Se $\text{tg}\,\theta = 1$ e $\theta$ pertencem ao primeiro quadrante, então $\cos\theta$ é igual a:

**a)** 0
**b)** $\frac{1}{2}$
**c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$
**d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$
**e)** 1

Como $\theta$ pertence ao primeiro quadrante:

$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = 1 \rightarrow \text{sen}\,\theta = \cos\theta \rightarrow \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta \rightarrow$

$\rightarrow 1 - \cos^2\theta = \cos^2\theta \rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**3. Unioeste** – Com respeito às afirmações abaixo, é correto afirmar que somente

**I.** $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, para todo número real positivo a.

**II.** $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, para todo número real x.

**III.** $\frac{\text{sen}\,x}{\text{csc}\,x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$, para todo número real $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2};\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

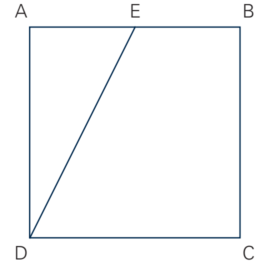
**a)** a afirmação I está correta.
**b)** a afirmação II está correta.
**c)** a afirmação III está correta.
**d)** as afirmações I e II estão corretas.
**e)** as afirmações I e III estão corretas.

Verdadeiro, pois $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$

Falso, porque $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\,\text{sen}\,x$

Verdadeiro, pois $\frac{\text{sen}\,x}{\text{csc}\,x} + \frac{\cos x}{\sec x} = \frac{\text{sen}\,x}{\frac{1}{\text{sen}\,x}} + \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}} = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$

**4. PUC-Rio** – Considere o quadrado ABCD como na Figura.




Sabendo que E é o ponto médio do lado AB, assinale o valor de $\cos(\widehat{CDE})$.

**a)** $\frac{1}{2}$
**b)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$
**c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$
**d)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
**e)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Sendo x o lado do quadrado, temos que E é ponto médio do lado $\overline{AB}$.

Então, $\overline{AE} = \frac{x}{2}$ e $\overline{AD} = x$.

Com isso, $\overline{DE} = x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{5x^2}{4} \rightarrow \overline{DE} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$.

Assim, $\cos(C\hat{D}E) = \dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

**5. Sistema Dom Bosco** – Calcule o valor de $\dfrac{\cos x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x \cdot \sec x}$, dado que $\cos x = \frac{3}{5}$ e $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Temos $\dfrac{\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cos x}} = \dfrac{\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \left(\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \cdot \operatorname{sen} x$

Se $\cos x = \frac{3}{5}$, então: $\operatorname{sen}^2 x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow$

$\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4}{5}$

Logo: $\left(\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \cdot \operatorname{sen} x = \left(\frac{3}{5} + \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}\right) \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} =$

$= \left(\frac{9 + 20}{15}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{29}{15} \cdot \frac{4}{5} = \frac{116}{75}$

**6. PUC-RS** – Na equação $\tan(x) = \cot(x)$ em $\mathbb{R}$, onde $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o valor de x é

**a)** $-1$

**b)** $1$

**c)** $\frac{\pi}{3}$

**d)** $\frac{\pi}{4}$

**e)** $\frac{\pi}{6}$

Temos que $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, $2\operatorname{sen}^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. UEM** – Usando conhecimentos sobre trigonometria, assinale o que for correto.

**01)** Num triângulo isósceles, a base mede 10 e os ângulos da base medem, cada um deles, $\frac{\pi}{4}$. Portanto, o perímetro desse triângulo é $10 + 10\sqrt{2}$.

**02)** Vale a igualdade $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**04)** Se $y = \dfrac{\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{2} + \operatorname{cossec}\frac{3\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}$ e $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, então $y = 1$.

**08)** Se $\operatorname{tg} x = a$ e $\operatorname{cotg} x = b$, então $a \cdot b = 1$.

**16)** Supondo que $\operatorname{sen} x = \frac{3}{4}$ e $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, então $\sec x = \frac{1}{4}$.

**8. Unicamp-SP** – Seja x um número real tal que $\operatorname{sen} x + \cos x = 0{,}2$. Logo, $|\operatorname{sen} x - \cos x|$ é igual a

**a)** 0,5
**b)** 0,8
**c)** 1,1
**d)** 1,4

**9. FGV-RJ** – A função trigonométrica equivalente a $\dfrac{\sec x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x + \cos x}$ é

**a)** sen x
**b)** cotg x
**c)** sec x
**d)** cossec x
**e)** tg x

**10. Sistema Dom Bosco** – Calcule o intervalo da expressão real $\dfrac{\cos^2 x}{1 - \operatorname{sen} x}$ com $\operatorname{sen} x \neq 1$ e $\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$.

**11. Sistema Dom Bosco** – Sabendo que $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{3}$, é correto afirmar que sec x é:

**a)** $\dfrac{1}{2}$
**b)** $\dfrac{-3\sqrt{2}}{4}$
**c)** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$
**d)** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
**e)** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

**12. ITA-SP** – Os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $2\operatorname{sen} x - \cos x = 1$ são

**a)** $\arccos \frac{3}{5}$ e $\pi$

**b)** $\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e $\pi$

**c)** $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)$ e $\pi$

**d)** $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ e $\pi$

**e)** $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ e $\pi$

**13. Unicamp-SP** – Seja x real tal que $\cos x = \operatorname{tg} x$. O valor de sen x é

**a)** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

**b)** $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

**c)** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

**d)** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

**14. Cefet-MG** – Em um triângulo retângulo ABC, reto em $\hat{A}$, tem-se que $\operatorname{tg}\hat{B} + \operatorname{tg}\hat{C} = \frac{25}{12}$. Calcule o valor de $\operatorname{sen}\hat{B} + \operatorname{sen}\hat{C}$.

**15. ITA-SP** – Sejam $\alpha$ e $\beta$ números reais tais que $\alpha$, $\beta$, $\alpha + \beta \in \,]0, 2\pi[$ e satisfazem as equações $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}\cos^4\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5}$ e $\cos^2\frac{\beta}{3} = \frac{4}{7}\cos^4\frac{\beta}{3} + \frac{3}{7}$. Então, o menor valor de $\cos(\alpha + \beta)$ é igual a

**a)** $-1$

**b)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**c)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

**d)** $-\frac{1}{2}$

**e)** $0$

**17. Escola Naval-RJ** – Considerando que a função $f(x) = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, é inversível, o valor de $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arccos}\frac{2}{5}\right)$ é

**a)** $-\frac{\sqrt{21}}{5}$

**b)** $-\frac{4}{25}$

**c)** $-\frac{\sqrt{21}}{2}$

**d)** $\frac{\sqrt{21}}{25}$

**e)** $\frac{\sqrt{21}}{2}$

**16. FGV-SP**

**a)** Num triângulo isósceles ABC, em que AB = AC, o ângulo Â mede o dobro da soma dos outros dois. O lado BC mede 10 cm. Obtenha o perímetro desse triângulo.

**b)** Considerando que $\operatorname{sen} x + \cos x = k$, calcule, em função de k, o valor da expressão $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.

**18. Uncisal** C5-H22

As funções trigonométricas $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg } x$, $y = \text{cotg } x$, $y = \sec x$ e $y = \text{cosec } x$ modelam fenômenos cíclicos e, por essa razão, têm muitas aplicações em campos do conhecimento como Física e a Medicina. As definições dessas funções no círculo trigonométrico geram relações entre elas, sendo a igualdade $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$ a mais conhecida. Essa igualdade é evidente quando $\text{sen } x = 0$ ou $\cos x = 0$. Nos outros casos, ela é justificada pelo fato de que, no círculo trigonométrico, dado um número real x, sen x e cos x são

**a)** a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo, respectivamente.
**b)** um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo, respectivamente.
**c)** pontos de uma circunferência de raio 1.
**d)** arcos de uma circunferência de raio 1.
**e)** os catetos de um triângulo retângulo.

**19. CFTMG (adaptado)** C5-H21

Na astronomia, um dos métodos mais usados para medir distâncias é a triangulação, levando em conta que não se é possível calcular as distâncias de forma direta. Em um triângulo retângulo, a tangente de um de seus ângulos agudos é 2. Sabendo-se que a hipotenusa desse triângulo é 5, o valor do seno desse mesmo ângulo é:

**a)** $\frac{4}{5}$
**b)** $\frac{\sqrt{5}}{4}$
**c)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$
**d)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
**e)** $\frac{2}{5}$

**20. Unicamp (adaptado)** C5-H21

Por serem periódicas, as funções trigonométricas são usadas em muitas aplicações que possuam periodicidade, por exemplo, nas ondas estacionárias e no movimento das cordas de um instrumento musical, como o violão. Seja x um número real, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tal que a sequência (tan x, sec x, 2) é uma progressão aritmética (PA). Então, a razão dessa PA é igual a

**a)** 1
**b)** $\frac{5}{4}$
**c)** $\frac{4}{3}$
**d)** $\frac{1}{3}$
**e)** $\frac{5}{3}$

# IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS II

10

- Identidades trigonométricas
- Outras identidades trigonométricas

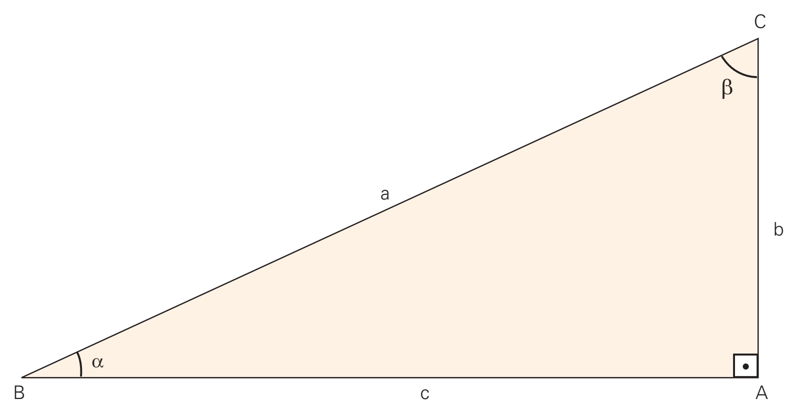
**HABILIDADES**

- Reconhecer relações entre as razões trigonométricas.
- Simplificar expressões com a utilização das identidades trigonométricas.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

## Identidades trigonométricas

Como vimos no módulo anterior, podemos encontrar em um triângulo retângulo qualquer as seguintes relações:

$$\text{sen } \alpha = \cos \beta = \frac{b}{a} \rightarrow \cos \alpha = \text{sen } \beta = \frac{c}{a}$$




Assim, podemos concluir que:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\text{sen}\beta} = \text{cotg } \beta \rightarrow \text{tg } \beta = \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \text{cotg } \alpha$$

$$\sec \alpha = \text{cossec } \beta \rightarrow \sec \beta = \text{cossec } \alpha$$

Façamos agora outro desenvolvimento. Considerando um dos ângulos agudos do triângulo retângulo ABC como o **a**, dividimos sen α por cos α:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \text{tg } \alpha$$

O resultado é o mesmo se considerarmos o ângulo β. Portanto, para um ângulo x, tal que cos x ≠ 0:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Podemos observar também que a razão $\frac{b}{c}$, que representa tg α, caso seja invertida $\left(\text{tornando-se } \frac{c}{b}\right)$, constitui cotg α. Em virtude disso e considerando a identidade enunciada, para todo ângulo x de seno não nulo:

- $\text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x} = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

Tais inversões também ocorrem nas relações seno, cosseno, secante e cossecante. Assim:

- $\text{sen } \alpha = \dfrac{b}{a} \rightarrow \text{cossec } \alpha = \dfrac{a}{b}$
- $\cos \alpha = \dfrac{c}{a} \rightarrow \sec \alpha = \dfrac{a}{c}$

De modo análogo, encontraríamos inversões semelhantes se considerássemos o ângulo β. Assim, para dado ângulo x:

- $\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$
- $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

**Observação**: Desde que seja respeitada a condição de os denominadores dos segundos membros dessas identidades não serem nulos.

**Curiosidade**

O prefixo **co**, que inicia o nome das relações cosseno, cotangente e cossecante, foi introduzido por Edmund Gunter (1581 -1626), em 1620. A intenção foi indicar a razão trigonométrica do complemento de um ângulo. Por exemplo, cosseno de 22° tem valor idêntico ao seno de 68° (complementar de 22°). Assim, as relações cosseno, cotangente e cossecante de um ângulo indicam, respectivamente, seno, tangente e secante do complemento desse ângulo. Logo, indicando seno, tangente e secante simplesmente pelo nome de razão, pode-se dizer que corrazão x = razão (90° − x).

## OUTRAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Para um ângulo x qualquer em um triângulo qualquer, como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos que, ao dividirmos os termos dessa equação por $\cos^2 x$ (dado que $\cos x \neq 0$), temos:

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

Além disso, se dividirmos os termos dessa equação por $\text{sen}^2 x$ (dado que $\text{sen } x \neq 0$), temos:

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x} \rightarrow 1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$$

As identidades apresentadas denominam-se **identidades trigonométricas auxiliares**.

Portanto, resumidamente, temos:

$$\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x \ (\cos x \neq 0)$$

$$\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x \ (\text{sen } x \neq 0)$$

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

**1. FGV-RJ** – A função trigonométrica equivalente a (sec x + sen x) / (cossec x + cos x) é

**a)** sen x
**b)** cotg x
**c)** sec x
**d)** cossec x
**e)** tg x

**Resolução**

$$\frac{\sec x + \text{sen } x}{\text{cossec } x + \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \text{sen } x}{\frac{1}{\text{sen } x} + \cos x} = \frac{\frac{1 + \text{sen } x \cdot \cos x}{\cos x}}{\frac{1 + \text{sen } x \cdot \cos x}{\text{sen } x}} =$$

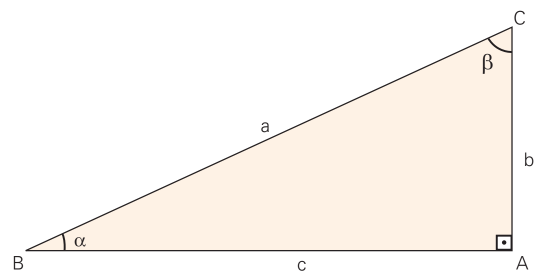
$$= \frac{1 + \text{sen } x \cdot \cos x}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen } x}{1 + \text{sen } x \cdot \cos x}$$

Logo:

$$\frac{\sec x + \text{sen } x}{\cos \sec x + \cos x} = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \text{tg } x$$

# ROTEIRO DE AULA

## IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS




Dado um ângulo α qualquer

$\sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$

$\text{cossec}^2 \alpha = 1 + \text{cotg}^2 \alpha$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Sistema Dom Bosco** – Dado que $\sec^2 x = 4$ e x pertence ao primeiro quadrante, calcule o valor de cotg x.

Temos que $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$

$4 = 1 + tg^2 x \rightarrow tg^2 x = 3 \rightarrow tg\, x = \sqrt{3}$

Logo, $cotg\, x = \frac{1}{tg\, x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

**2. PUC-RS** – Se $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, então o conjunto solução da equação $sen(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ é

**a)** $S = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
**b)** $S = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
**c)** $S = \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$
**d)** $S = [0; 2\pi]$
**e)** $S = [0; \pi]$

Temos $sen\, x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$sen^2 x = 1 - \cos^2 x$

$sen^2 x + \cos^2 x = 1$

Isso é verdade para todo o domínio de x. Logo, $S = [0; 2\pi]$

**3. UFSJ-MG (adaptado)** C5-H21

As relações matemáticas são fundamentais nos estudos sobre a natureza e usadas constantemente para cálculos do nosso cotidiano, como o número π, a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência, muito utilizado na engenharia, geologia, astronomia e demais campos científicos. Na trigonometria, por exemplo, trabalhamos com as funções trigonométricas e as suas relações.

Considerando os valores de θ para os quais a expressão $\frac{sen\,\theta}{cossec\,\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta}$ é definida, é correto afirmar que ela está sempre igual a

**a)** 1
**b)** 2
**c)** sen θ
**d)** cos θ
**e)** e) tg θ

Temos que

$\frac{sen\,\theta}{cossec\,\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta} = \frac{sen\,\theta}{\frac{1}{sen\,\theta}} + \frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta}} = sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**4. Sistema Dom Bosco** – Qual é o valor de |tg x|, sabendo que $\cos x = \frac{-1}{2}$?

Temos que, se a $\cos x = \frac{-1}{2}$, então $\sec x = -2$.
Logo, $\sec^2 x = 4$.
Assim, $\sec^2 x = tg^2 x + 1$.
Por fim, temos que $tg^2 x = 3 \rightarrow |tg\, x| = \sqrt{3}$.

**5. UPE** – Num triângulo retângulo, temos que tg x = 3. Se x é um dos ângulos agudos desse triângulo, qual o valor de cos x?

**a)** $\frac{1}{2}$
**b)** $\frac{\sqrt{5}}{10}$
**c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$
**d)** $\frac{1}{4}$
**e)** $\frac{\sqrt{10}}{10}$

Temos que $tg\, x = \frac{sen\, x}{\cos x} = 3$.

$sen\, x = 3\cos x$

$sen^2 x = 9\cos^2 x \rightarrow 1 - \cos^2 x = 9\cos^2 x \rightarrow 10\cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{10} \rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos x = \frac{\sqrt{10}}{10}$

**6. PUC-RS (adaptado)** – Na equação tg x = cotg x em, onde 0° < x < 90°, o valor de x é

**a)** 0° **b)** 90° **c)** 60° **d)** 45° **e)** 30°

$tg\, x = \frac{sen\, x}{\cos x} = \frac{\cos x}{sen\, x} = cotg\, x$

Logo, $sen^2 x = \cos^2 x$.

$sen^2 x = 1 - sen^2 x \rightarrow sen^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow sen\, x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Portanto, x = 45°.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. UFC-CE** – Considere a igualdade $\text{tg } x = \text{cotg } x + \left[P \cdot \frac{(2 - \sec^2 x)}{2 \cdot \text{tg } x}\right]$. Assinale a opção que apresenta o valor de P, para o qual a igualdade anterior seja válida para todo $x \in \mathbb{R}$, $x = \frac{k\pi}{2}$, k inteiro.

**a)** 2
**b)** 1
**c)** 0
**d)** −1
**e)** −2

**8. Sistema Dom Bosco** – Se cotg x = 2 e x é do 2º quadrante, calcule o valor de cos x.

**9. ITA** – O número de soluções da equação $(1 + \sec\theta)(1 + \text{cossec }\theta) = 0$, com $\theta \in [-\pi, \pi]$, é

**a)** 0
**b)** 1
**c)** 2
**d)** 3
**e)** 4

**10. Cefet-MG** – A simplificação da expressão

$$\frac{2 - 2\cos x - \text{sen}^2 x}{1 - \cos x}$$, onde $\cos x \neq 1$, é

**a)** $-1 - \cos x$
**b)** $-1 + \cos x$
**c)** $1 + \cos x$
**d)** $1 - \cos x$

**11. UEMG** – Sobre trigonometria, analise as assertivas e assinale a alternativa que aponta as corretas.

**I.** $\sec(x) = (1 - \text{sen}^2 x)^{\frac{-1}{2}}$

**II.** O valor de $(1 + \text{cotg}^2 x)(1 - \cos^2 x)$, para $x \neq k\pi$, com k inteiro, é igual a 1.

**III.** A medida do arco trigonométrico da 1ª volta positiva, côngruo ao arco de medida −40°, é 40°.

**IV.** tg 50° · tg 310° < 0.

**a)** Apenas I, II e IV.
**b)** Apenas I, II e III.
**c)** Apenas I e IV.
**d)** Apenas II e III.

**12. PUC-RS** – Na equação tan(x) = cot(x) em $\mathbb{R}$, onde $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o valor de x é

**a)** $-1$
**b)** 1
**c)** $\frac{\pi}{3}$
**d)** $\frac{\pi}{4}$
**e)** $\frac{\pi}{6}$

**13. UFSJ-MG** – Considerando os valores de $\theta$, para os quais a expressão $\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\csc\theta}\right) + \left(\frac{\cos\theta}{\sec\theta}\right)$ é definida, é correto afirmar que ela está sempre igual a

**a)** 1
**b)** 2
**c)** sen $\theta$
**d)** cos $\theta$

**14. ITA (adaptado)** – Determine o conjunto das soluções reais da equação $3 \cdot \operatorname{cossec}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{tg}^2 x = 1$.

Dica: $\cos x = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$

**15. Sistema Dom Bosco** – Um ângulo do segundo quadrante tem seno igual a $\frac{12}{13}$. Calcule a cotangente de seu ângulo complementar:

**16. ITA** – Com relação à equação $\frac{tg^3 x - 3tg\,x}{1 - 3tg^2 x} + 1 = 0$, podemos afirmar que

**a)** no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é igual a 0.

**b)** no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é maior que 0.

**c)** a equação admite apenas uma solução real.

**d)** existe uma única solução no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

**e)** existem duas soluções no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

**17. Unesp** – Se x e y são números reais tais que $y = \frac{\cos^3 x - 2 \cdot \cos x + \sec x}{\cos x \cdot sen^2 x}$, então:

**a)** $y = \sec^2 x$
**b)** $y = tg^2 x$
**c)** $y = \cos^2 x$
**d)** $y = cossec^2 x$
**e)** $y = sen^2 x$

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Enem (adaptado)** C5-H21

Como já estudamos, as funções trigonométricas são muito importantes para o estudo de movimentos de ondulação, movimentos periódicos, assim nos ajudando a entender fenômenos da natureza e tornando-nos capazes até mesmo de prevê-los por sua periodicidade. A importância dessas funções nos leva a estudá-las no ensino médio e praticá-las em diversos tipos de exercícios.

Considere S a soma das raízes da equação trigonométrica $4sen^3 x - 5sen\,x - 4\cos^3 x + 5\cos x = 0$, no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Qual o valor de tg S + cossec 2S?

**a)** 2
**b)** 1
**c)** 0
**d)** –1
**e)** –2

**19. Uneb (adaptado)** C2-H8

A tirolesa é uma técnica utilizada para o transporte de carga de um ponto a outro. Nessa técnica, a carga é presa a uma roldana que desliza por um cabo, cujas extremidades geralmente estão em alturas diferentes. A tirolesa também é utilizada como prática esportiva, sendo considerada um esporte radical. Em certo ecoparque, aproveitando a geografia do local, a estrutura para a prática da tirolesa foi montada de maneira que as alturas das extremidades do cabo por onde os participantes deslizam estão a cerca de 52m e 8m, cada uma, em relação ao nível do solo, e o ângulo de descida formado com a vertical é de 80°. Nessas condições, considerando-se o cabo esticado e que tg 10° = 0,176, pode-se afirmar que a distância horizontal percorrida, em metros, ao final do percurso, é aproximadamente igual a

**a)** 250
**b)** 254
**c)** 256
**d)** 258
**e)** 262

**20. Enem** C5-H21

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br em 2 ago.2012 (adaptado)

Na safra o mês de produção máxima desse produto é

**a)** janeiro
**b)** abril
**c)** junho
**d)** julho
**e)** outubro

11

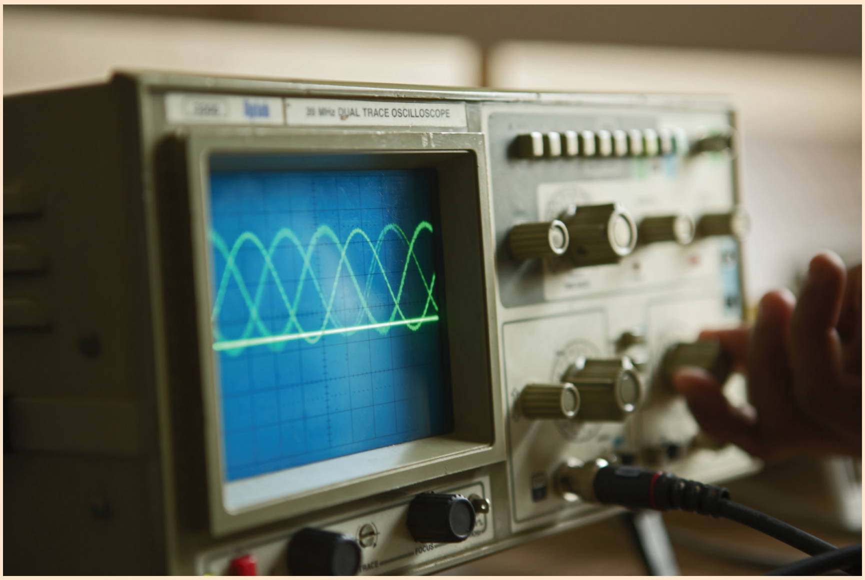
# FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

- Introdução
- Função seno
- Função cosseno
- Função tangente

**HABILIDADES**

- Estudar funções trigonométricas, domínio, imagem, período e paridade.
- Estabelecer relações a respeito do comportamento dos gráficos.
- Resolver problemas que envolvam funções trigonométricas e suas variações.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

VAIBHAV KAMBLE/SHUTTERSTOCK




A corrente alternada pode ser descrita por funções trigonométricas. Na imagem, vemos a superposição de senoides em um osciloscópio.

## Introdução

O nome dado à forma com que o som se propaga é ondas sonoras. A sua movimentação pode variar, dependendo do meio em que o som se espalha. Para medir essas ondas, por exemplo, podemos conectar um microfone em um osciloscópio para entender o seu comportamento. Coisas como o timbre do som nos fornecem esses dados, que são traduzidos no osciloscópio. Se esse fenômeno fosse representado em um gráfico, ficaria semelhante a uma função trigonométrica.

### FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Dado um número real **x**, pode-se destacar um ponto **P** da circunferência trigonométrica. A esse ponto é associado um único valor para seno e cosseno, chamado **sen x** e **cos x**.

Com base nessa ideia, definem-se as **funções trigonométricas**. Essas funções têm domínios no conjunto dos números reais e imagens obtidas com auxílio da circunferência trigonométrica. Neste módulo são apresentadas as funções seno, cosseno e tangente. Também é analisado o comportamento dos gráficos das variações dessas funções.

### Função seno

Associa o número $y = \text{sen } x$ a cada número real x.

**Domínio**

Como sen x é definido para todo x real, o domínio de $f(x) = \text{sen } x$ é o conjunto $\mathbb{R}$.

**Conjunto imagem**

Na circunferência trigonométrica, a função sen x assume valor máximo igual a 1 $\left(\text{quando x é número real que representa arco o com primeira determinação } \frac{\pi}{2}\right)$

e valor mínimo igual a $-1$ (quando x representa arco com primeira determinação $\frac{3\pi}{2}$).

Assim, o conjunto imagem de $f(x) = \text{sen } x$ é: $Im = [-1, 1]$

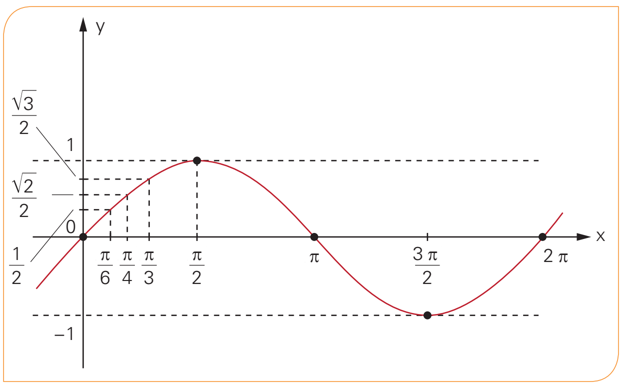
**Gráfico**

Para construir o gráfico da função definida por $f(x) = \text{sen } x$, podemos montar uma tabela para os arcos notáveis. Usando as propriedades de simetria, obtém-se o gráfico para todo conjunto dos reais.

Assim:

| **x** | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **sen x** | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |

Localizando no plano cartesiano os pares (x, sen x) e sabendo o comportamento da função, temos o seguinte esboço:



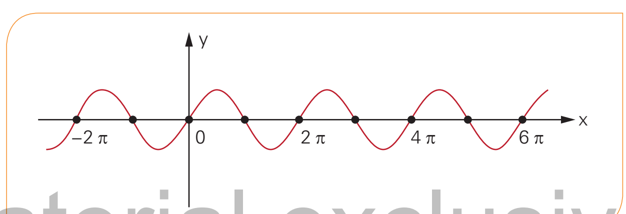

A curva do gráfico é chamada de **senoide**, e o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$, tal que $x \in \mathbb{R}$ é uma sucessão de senoides.

**Período**

Uma função $y = f(x)$, definida no domínio D, é chamada função periódica se existir um número positivo p que satisfaça a igualdade $f(x + p) = f(x)$, para todo $x \in D$.

O menor valor de p que verifica essa condição é chamado período da função.

Observa-se que $\text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } x$. Então, o período da função $f(x) = \text{sen } x$ é $2\pi$. Portanto, o gráfico é uma repetição de senoides de $2\pi$ em $2\pi$.




**Paridade**

Uma função $y = f(x)$, definida no domínio D, é chamada função par se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D$, e função ímpar se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D$.

Na circunferência trigonométrica, verifica-se que $\text{sen } (-x) = -\text{ sen } (x)$. Portanto, a função $f(x) = \text{sen } x$ é função ímpar.

## Função cosseno

Associa o número $y = \cos x$ a cada número real x.

**Domínio**

Como cos x é definido para todo x real, o domínio de $f(x) = \cos x$ é o conjunto $\mathbb{R}$.

**Conjunto imagem**

Na circunferência trigonométrica, a função cos x assume valor máximo igual a 1 (quando x é número real que representa o arco com primeira determinação 0) e valor mínimo igual a $-1$ (quando x representa arco com primeira determinação $\pi$).

Assim, o conjunto imagem de $f(x) = \cos x$ é: $Im = [-1, 1]$

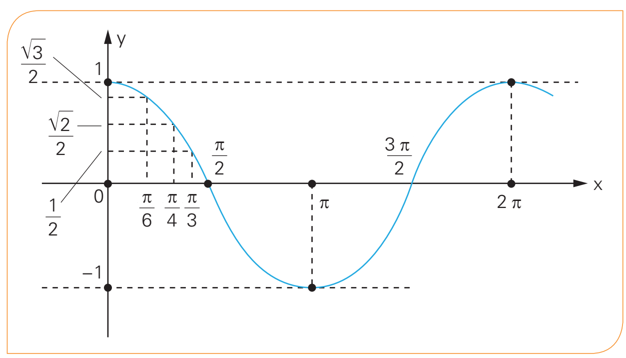
**Gráfico**

Para construir o gráfico da função definida por $f(x) = \cos x$, podemos montar uma tabela para os arcos notáveis. Usando as propriedades de simetria, obtém-se o gráfico para todo conjunto dos reais.

Assim:

| **x** | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **cos x** | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |

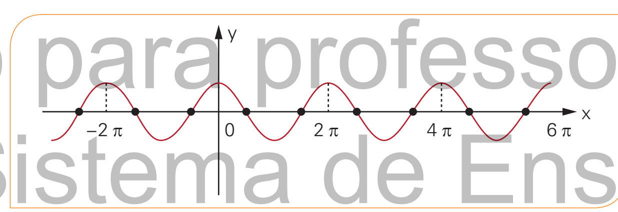
Localizando no plano cartesiano os pares (x, cos x) e sabendo o comportamento da função, temos o seguinte esboço:




A curva do gráfico é chamada de **cossenoide**, e o gráfico da função $f(x) = \cos x$ tal que $x \in \mathbb{R}$ é uma sucessão de cossenoides.

**Período**

Observa-se que em $\cos (x + 2\pi) = \cos x$. Então o período de $f(x) = \cos x$ é $2\pi$. Portanto, o gráfico é uma sucessão de cossenoides de $2\pi$ em $2\pi$



**Paridade**

Na circunferência trigonométrica, verifica-se que cos (−x) = cos (x). Portanto, a função f(x) = cos x é função par.

## Função tangente

A tangente de um número real é a razão entre o seno e o cosseno desse real. Assim: $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$, em que $\cos \neq 0$.

Dessa forma, para todo real x, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{R}$, a tangente existe e é única. Então,

$f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f(x) = tg x.

**Domínio**

Como tg x existe quando $\cos x \neq 0$, o domínio da função f(x) = tg x é: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{R}\}$

**Conjunto imagem**

A tangente de um número real pode assumir qualquer valor real. Assim: $Im = ]-\infty, +\infty[$

**Gráfico**

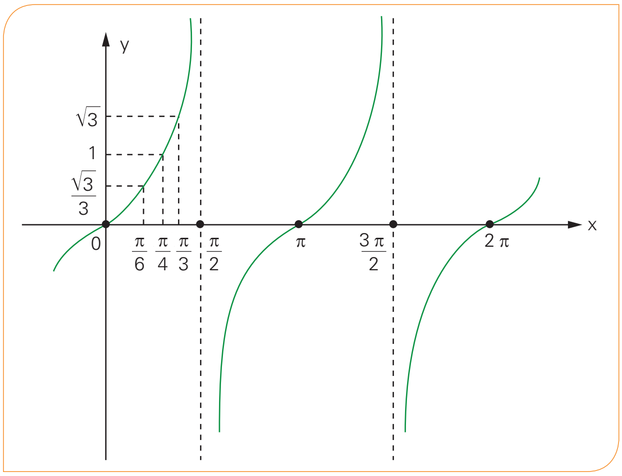
O gráfico da função f(x) = tg x pode ser obtido com base na tabela com os arcos notáveis. Por meio de propriedades de simetria, obtém-se a curva para todo x pertencente ao domínio.

Assim:

| **x** | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **tg x** | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\nexists$ | 0 | $\nexists$ | 0 |

Podemos observar que o gráfico não tem imagens para os valores de $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \ldots$ Analise a função tangente quando x se aproxima de $\dfrac{\pi}{2}$, $\pi$, $\dfrac{3\pi}{2}$ e $2\pi$.

A curva compreendida entre x = 0 e x = π é uma **tangentoide**, o gráfico de f(x) = tg x é obtido pela repetição sucessiva de tangentoides de π em π.




**Período**

Como tg (x + π) = tg x, para qualquer x pertencente ao domínio, o período da função f(x) = tg x é p = π.

**Paridade**

Na circunferência trigonométrica, temos que tg (−x) = −tg x.

Logo, a função f(x) = tg x é uma função ímpar.

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

**1. Sistema Dom Bosco –** Um barco de passageiros encontra-se atracado. A distância de uma dado ponto do navio ao fundo do rio varia com a maré. Essa distância (**d** em metros) pode ser obtida, em determinado dia, em função do tempo (**t** em horas), pela expressão

$$d(t) = 4{,}6 + \frac{7}{5} \cdot \cos\left(t + \frac{11}{18}\pi\right)$$

Em relação a esse ponto, é correto afirmar que a sua distância ao fundo do rio, às 10 horas, é igual a:

f) 3,9 m
g) 4,6 m
h) 5,3 m
i) 7,8 m
j) e) 9,2 m

**Resolução**

Para t = 10 e considerando π = 180° temos que:

$$t + \frac{11}{18}\pi = 10 + \frac{11}{18} \cdot 180° = 10 + 110° = 120°$$

Assim, utilizando a redução ao 1º quadrante vem:

$$\cos 120° = \cos(180° - 120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

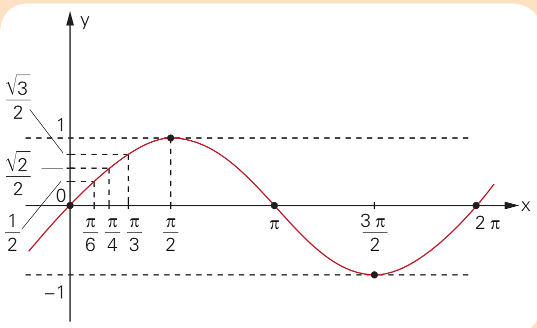
$$d(10) = 4{,}6 + \frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4{,}6 - \frac{7}{10} = 4{,}6 - 0{,}7 = 3{,}9 \text{ m}$$

# ROTEIRO DE AULA

## FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

**Dado um ângulo $\alpha$ qualquer**

sen $\alpha$



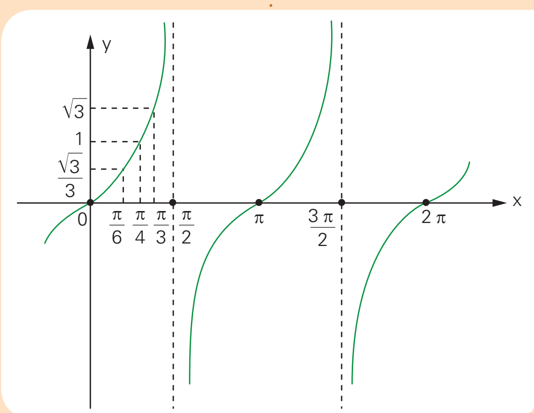

Domínio: D = $\mathbb{R}$

Imagem: Im = $[-1, 1]$

Período: $2\pi$

Paridade: função ímpar

tg $\alpha$



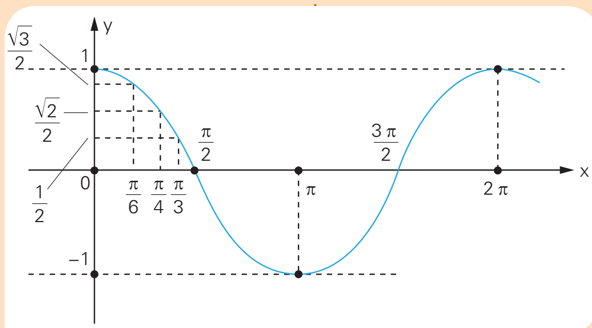

Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}\}$

Imagem: Im = $[-\infty, +\infty]$

Período: $\pi$

Paridade: função ímpar

cos $\alpha$




Domínio: D = $\mathbb{R}$

Imagem: Im = $[-1, 1]$

Período: $\pi$

Paridade: função par

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Unifenas** – Estudando-se as funções: seno, cosseno e tangente, pode-se afirmar que:

**a)** são periódicas e limitadas.
**b)** são limitadas.
**c)** são periódicas.
**d)** são funções pares: seno e cosseno e, ímpar, a tangente.
**e)** são todas sobrejetoras.

Todas essas funções citadas são periódicas.

**2. PUC-RS (adaptado)** C6-H24

O calçadão de Copacabana é um dos lugares mais visitados no Rio de Janeiro. Seu traçado é baseado na praça do Rocio, em Lisboa, e simboliza as ondas do mar.


ARSENIY KRASNEVSKY/SHUTTERSTOCK

Quando vemos seus desenhos, fica evidente que podemos pensar na representação gráfica de uma função:

**a)** logarítmica.
**b)** exponencial.
**c)** seno ou cosseno.
**d)** polinomial de grau 1.
**e)** polinomial de grau 2.

A representação gráfica é semelhante a uma função periódica senoidal ou cossenoidal.

**Competência**: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

**Habilidade**: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

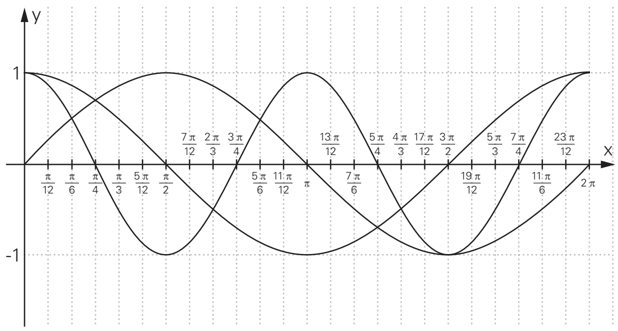
**3. Sistema Dom Bosco** – Sendo f(x) =

$= -5 \cdot \text{sen}\,(\pi + x) - 2 \cdot \cos x$, calcule $f\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

Temos $f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -5 \cdot \text{sen}\left(\pi + \frac{7\pi}{4}\right) - 2 \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) =$

$= -5 \cdot \frac{(-\sqrt{2})}{2} - 2 \cdot \frac{(\sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**4. Insper (adaptado)** – A figura a seguir representa os gráficos das funções f(x) = sen (x), g(x) = cos (x) e h(x) = cos(2x).




Definidas no intervalo [0, 2π].

Calcule o valor máximo da função d(x) = h(x) − g(x)

Temos que a imagem das funções h(x) e g(x) é [−1, 1]. Portanto, o valor máximo que essa função pode atingir é quando h(x) = 1 e g(x) = −1, ou seja, quando x = π. Logo, d(π) = 2.

**5. UERN** – A razão entre o maior e o menor número inteiro que pertencem ao conjunto imagem da função trigonométrica $y = -4 + 2 \cdot \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ é

**a)** 2
**b)** $\frac{1}{3}$
**c)** −3
**d)** $-\frac{1}{2}$

A imagem de $\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ é Im = [−1, 1]. Logo, a imagem de y é Im(y) = [−4 − 2, −4 + 2] = [−6, −2]. Portanto, a razão entre o maior e o menor número inteiro que pertencem ao conjunto imagem é $\frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$.

**6. Unifor (adaptado)** – Para x, a função definida por f(x) = sen x no intervalo [0, 2π] tem:

**a)** um valor máximo para x = 0.
**b)** um valor mínimo para x = π.
**c)** somente valores positivos se $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.
**d)** valores negativos se $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
**e)** Três raízes.

O gráfico da função f(x) = sen x cruza o eixo das abscissas três vezes, em x = 0, x = π e x = 2π.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. Acafe (adaptado)** – Sabe-se que a receita mensal (em milhões de reais) gerada pela produção e venda de equipamentos eletrônicos de duas empresas, A e B, varia de acordo com as seguintes funções periódicas: na empresa A, a receita obtida é dada pela

equação $R_A = \left|2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{60}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{60}\right)\right|$ e na empresa B,

dada pela equação $R_B = \left|\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{60}\right)\right|$, onde, em

ambas, t é o tempo medido em meses.

Portanto, o tempo, em meses, para que as duas empresas tenham pela primeira vez a mesma receita é um número entre:

**a)** 10 e 12 meses.
**b)** 12 e 16 meses.
**c)** 5 e 8 meses.
**d)** 20 e 24 meses.

**Texto para as questões 8 e 9:**

Considere o texto e o esquema para responder à(s) questão(ões).

Ao longo de um ano, a taxa de câmbio de uma moeda X em relação a uma moeda Y foi dada pela seguinte função:

$$f(y) = 1{,}625 + 1{,}25 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{(t-3)}{12}\right)$$

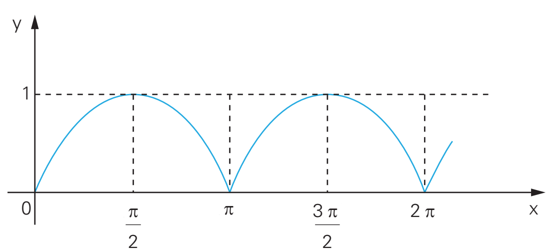
Sendo t o tempo, dado em meses desde o início do ano. Assim, t = 9 indica a taxa no início de outubro, que era de 1,625 unidades da moeda X para uma unidade da moeda Y (note que esse valor da taxa indica que no instante considerado a moeda X era "menos valiosa" que a moeda Y).

**8. Insper (adaptado)** – Ao longo do ano analisado, a maior taxa de câmbio da moeda X em relação à moeda Y atingida e o instante em que isso ocorreu foram, respectivamente,

**a)** 2,625 e início de janeiro.
**b)** 2,625 e início de março.
**c)** 2,875 e início de janeiro.
**d)** 2,875 e início de abril.
**e)** 2,875 e início de junho.

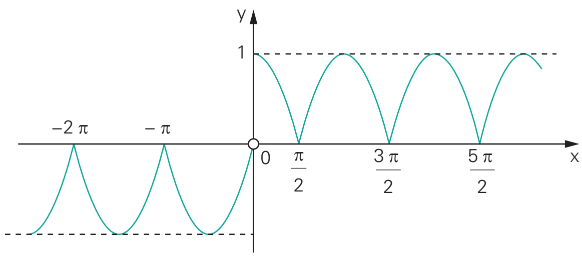
**9. Insper (adaptado)** – Houve um intervalo de tempo ao longo do ano considerado em que a moeda X deixou de ser "menos valiosa" que a moeda Y. Calcule a duração desse intervalo.

**10. FGV-SP** – O gráfico a seguir representa a função:




**a)** $y = |\text{tg } x|$
**b)** $y = |\text{sen } x|$
**c)** $y = |\text{sen } x| + |\cos x|$
**d)** $y = \text{sen } 2x$
**e)** $y = 2 \text{ sen } x$

**11. EsPCEx-SP/Aman-RJ** – A função real f(x) está representada no gráfico a seguir.




A expressão algébrica de f(x) é

**a)** $f(x) = \begin{cases} -|\text{sen}x|, \text{ se } x < 0 \\ |\cos x|, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

**b)** $f(x) = \begin{cases} |\cos x|, \text{ se } x < 0 \\ |\text{sen}x|, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

**c)** $f(x) = \begin{cases} -|\cos x|, \text{ se } x < 0 \\ |\text{sen}x|, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

**d)** $f(x) = \begin{cases} |\text{sen}x|, \text{ se } x < 0 \\ |\cos x|, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

**e)** $f(x) = \begin{cases} |-\text{sen}x|, \text{ se } x < 0 \\ |\cos x|, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

**12. Ibmec-SP** – Uma função f(x) é chamada de

- função par se $f(-x) = f(x)$, para todo x pertencente ao domínio de f(x).
- função ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para todo x pertencente ao domínio de f(x).

É correto afirmar que

**a)** $f(x) = \text{sen}(x)$ é uma função par.
**b)** $f(x) = \cos(x)$ é uma função ímpar.
**c)** o produto de duas funções ímpares resulta numa função ímpar.
**d)** o produto de uma função ímpar por uma função par resulta numa função par.
**e)** o produto de duas funções pares resulta numa função par.

**13. Insper (adaptado)** – Um economista analisou dados históricos sobre o valor das ações de uma empresa e, com o intuito de prevê-lo ao longo do ano de 2014, elaborou o seguinte modelo: $V(t) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{180} - \frac{\pi}{4}\right) + 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{20} - \frac{\pi}{4}\right)$

Na função acima, V é o valor da ação e t é o tempo decorrido, em dias, a partir do início do ano (ou seja, t = 1 denota o fim do dia 1º de janeiro de 2014). Para simplificar, suponha que todos os meses tenham 30 dias. De acordo com esse modelo, a ação deve atingir seu preço máximo ao término de qual dia?

**14. UFRGS-RS** – O gráfico da função f, definida por $f(x) = \cos x$, e o gráfico da função g, quando representados no mesmo sistema de coordenadas, possuem somente dois pontos em comum. Assim, das alternativas abaixo, a que pode representar a função g é

**a)** $g(x) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

**b)** $g(x) = x^2$

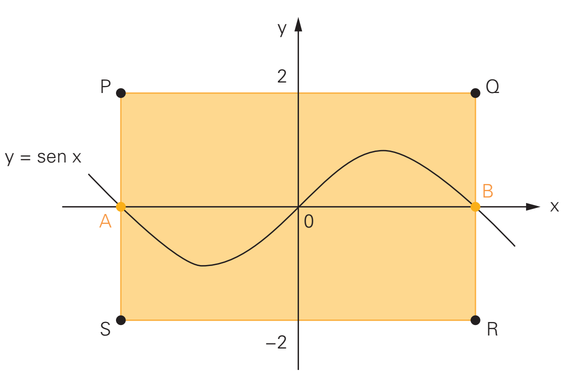
**c)** $g(x) = 2^x$

**d)** $g(x) = \log x$

**e)** $g(x) = \text{sen } x$

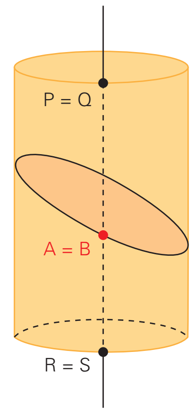
**15. Insper** – A figura 1 indica o gráfico da função trigonométrica, de em R, definida por $y = \text{sen } x$. Seu gráfico foi desenhado no plano cartesiano de eixos ortogonais paralelos aos lados do retângulo PQRS e origem no centro desse retângulo. Sabe-se, ainda, que de A até B ocorre um período completo da senoide.

Figura 1




Em seguida, o retângulo PQRS é enrolado perfeitamente, formando um cilindro circular reto, como se vê na figura 2. A senoide da figura 1 origina uma elipse sobre a superfície lateral do cilindro, como indicado na figura 2.

Figura 2




O comprimento do eixo maior da elipse que foi produzida sobre a superfície do cilindro, na unidade de medida de comprimento dos eixos cartesianos, é igual a:

**a)** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

**b)** $2\sqrt{2}$

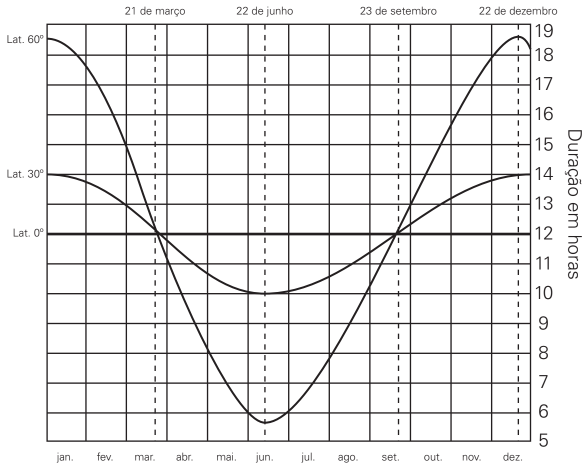
**c)** $2\sqrt{5}$

**d)** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

**e)** $2\sqrt{3}$

**16. UFG** – Analise o gráfico apresentado a seguir.

DURAÇÕES DO PERÍODO CLARO DO DIA AO LONGO DO ANO




Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/dia.htm>. Acesso em: 28 fev. 2014. (Adaptado)

Diante do exposto, conclui-se que, em relação às latitudes 0°, −30° e −60°, as durações do período claro do dia ao longo dos meses correspondem, respectivamente, à

**a)** equação $d - 12 = 0$, que representa iguais durações nos equinócios e nos solstícios; à equação $d = 12 + 2\cos(\omega m + \pi)$; e à equação $d = 12 + 6{,}5\cos(\omega m + \pi)$, com as maiores variações entre os equinócios.

**b)** equação $am + bd + c = 0$, que representa desiguais durações nos equinócios e nos solstícios; à equação $d = 12 + 2\text{sen}\left(\omega m + \frac{\pi}{2}\right)$; e à equação $d = 12 + 6{,}5\text{sen}\left(\omega m + \frac{\pi}{2}\right)$, com as menores variações entre os equinócios.

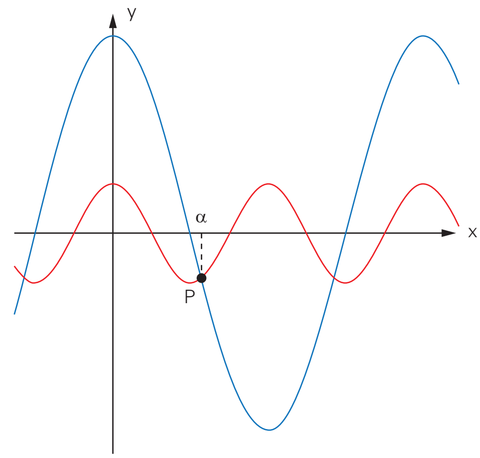
**c)** equação $d - 12 = 0$, que representa iguais durações nos equinócios e nos solstícios; à equação $d = 12 + 2\cos\left(\omega m + \frac{\pi}{2}\right)$; e à equação $d = 12 + 6{,}5\cos\left(\omega m + \frac{\pi}{2}\right)$, com as maiores variações entre os solstícios.

**d)** equação $d = \text{sen}(m)$, que representa desiguais durações nos equinócios e nos solstícios; à equação $d = 12 + 2\cos\left(\omega m + \frac{\pi}{2}\right)$; e à equação $d = 12 + 6{,}5\cos\left(\omega m + \frac{\pi}{2}\right)$, com as menores variações entre os equinócios.

**e)** equação $d = a \cdot \left(\frac{-c}{b}\right)$, que representa iguais durações nos equinócios e nos solstícios; à equação $d = 12 + 2\cos(\omega m + \pi)$; e à equação $d = 12 + 6{,}5\cos(\omega m + \pi)$, com as maiores variações entre os solstícios.

**17. Insper (adaptado)** – A figura mostra os gráficos das funções reais f e g, dadas, respectivamente, pelas leis

$f(x) = \cos(2x)$ e $g(x) = 4\cos x$




Os dois gráficos interceptam-se no ponto P, de abscissa α. Assim, calcule o valor de cos α.

Dica: $\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

**18. FGV-SP** C5-H21

A previsão mensal da venda de sorvetes para 2012, em uma sorveteria, é dada por

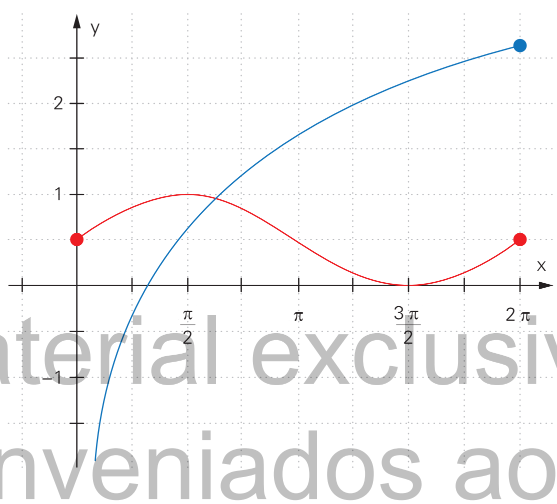
$$P = 6\,000 + 50x + 2\,000 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right),$$

em que P é o número de unidades vendidas no mês x; x = 0 representa janeiro de 2012, x = 1 representa fevereiro de 2012, x = 2 representa março de 2012, e assim por diante. Se essas previsões se verificarem, em julho haverá uma queda na quantidade vendida, em relação a março, de aproximadamente:

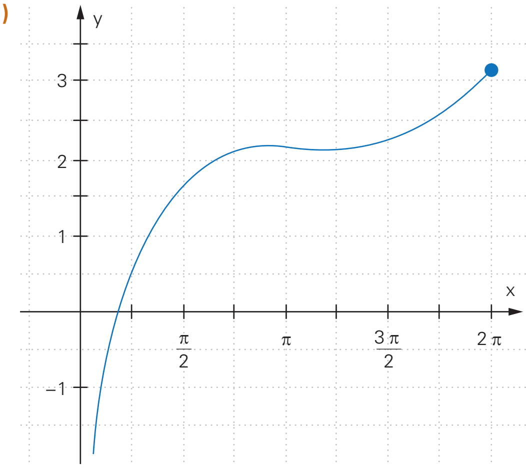
**a)** 39,5%
**b)** 38,5%
**c)** 37,5%
**d)** 36,5%
**e)** 35,5%

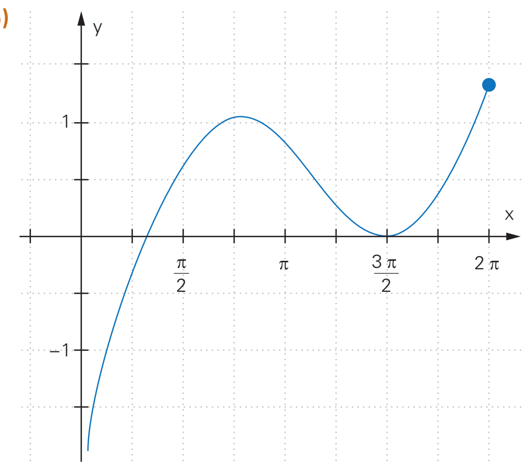
**19. Insper** C5-H22

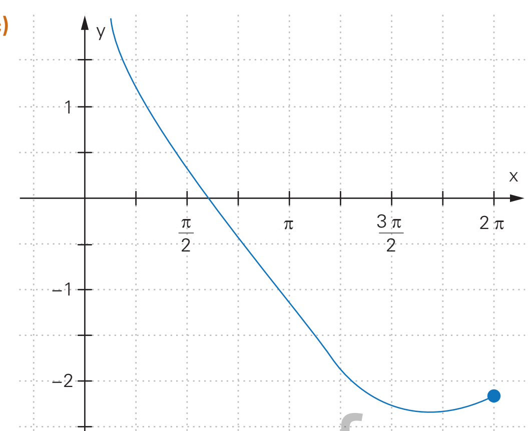
A figura ao lado exibe os gráficos das funções f e g, ambas de domínio ]0, 2π], cujas leis são, respectivamente: $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{ sen } x$ e $g(x) = \log_2 x$.



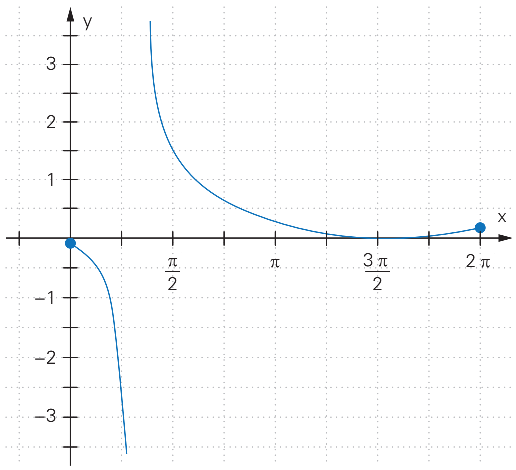

A figura que melhor representa o gráfico da função h, cuja lei é h(x) = g(f(x)), é

**a)**


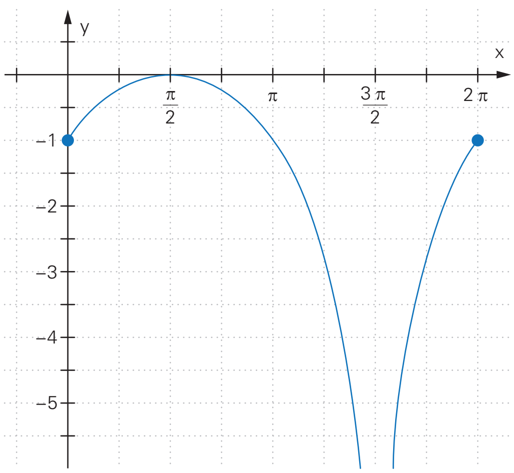

**b)**



**c)**


**d)**

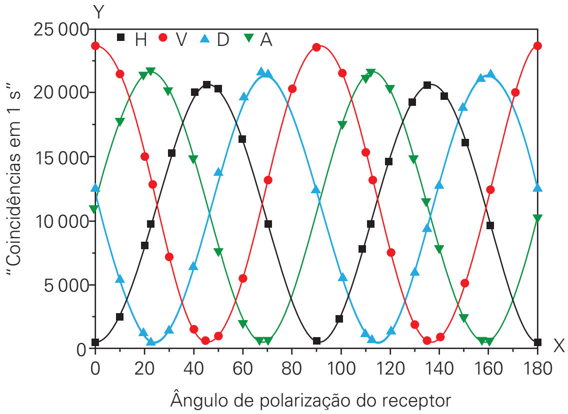



**e)**




**20. Insper** C5-H22

Em estudo divulgado recentemente na The Optical Society of America, pesquisadores da Tong University revelaram uma forma de transmitir dados de comunicação de forma segura utilizando as águas dos mares como meio de transporte das informações. No artigo, os cientistas apresentam o seguinte gráfico como parte dos resultados.




Disponível em: <www.osapublishing.org>. (Adaptado)

Uma função trigonométrica que modela razoavelmente bem a curva indicada por A no gráfico do artigo, com x em graus e y em "coincidências em 1 s", é

**a)** y = 22 000 + cos (x).

**b)** y = 22 000 + 10 000 cos (2x).

**c)** y = 22 000 + sen (4x).

**d)** y = 11 000 + sen (2x).

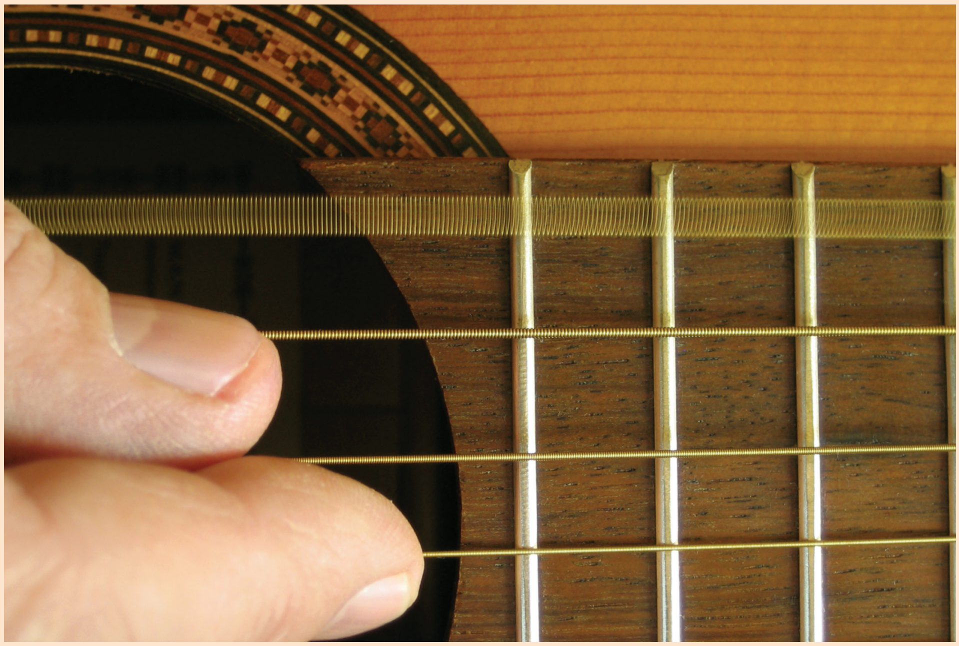
**e)** y = 11 000 + 10 000 sen (4x).

# 12 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

- Funções inversas
- Variações das funções trigonométricas

**HABILIDADES**

- Compreender as funções trigonométricas em relação a domínio, imagem, período e paridade.
- Estabelecer relações a respeito do comportamento dos gráficos.
- Resolver problemas que envolvam funções trigonométricas e suas variações.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.

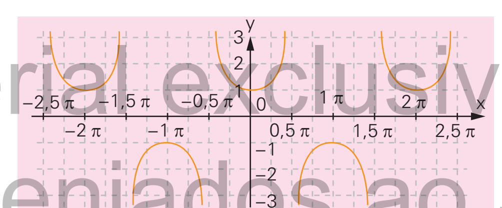
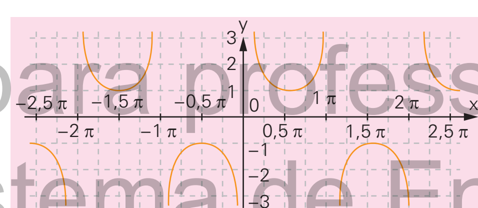


ZOULOU_55/SHUTTERSTOCK

As cordas de um violão vibram ao serem tocadas, e as formas das ondas que se propagam nelas se parecem com uma senoide.

## Funções inversas

Além das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, existem outras três definidas por meio da inversão das razões conhecidas. Podemos citá-las numa tabela.

| Função secante | Função cossecante |
|---|---|
| $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ | $\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$ |
| Pela definição, excluem-se do domínio da secante valores em que $\cos x = 0$.<br>$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$<br>Com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ | Pela definição, excluem-se do domínio da cossecante valores em que $\text{sen } x = 0$.<br>$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$<br>Com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ |
| $Im = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant -1 \text{ ou } f(x) \geqslant 1\}$ | $Im = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant -1 \text{ ou } f(x) \geqslant 1\}$ |
|  |  |

**Função cotangente**

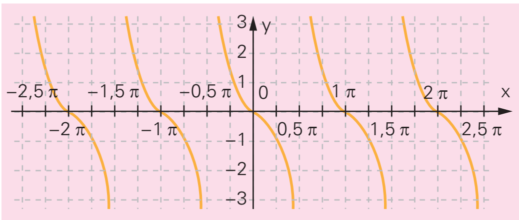
$$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$$

Pela definição, excluem-se do domínio da cotangente valores em que tg x = 0

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$

Com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$Im = \mathbb{R}$




Analise cada função para os pontos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e $2\pi$.

# Variações das funções trigonométricas

## FUNÇÃO f(x) = a + sen x

O número **a**, adicionado ao sen x, altera a paridade e a imagem da função y = sen x. Assim, sendo $a \neq 0$, a função $f(x) = a + \text{sen } x$ fica sem paridade (nem par nem ímpar), pois: $a + \text{sen } x \neq a + \text{sen } (-x)$ e $-(a + \text{sen } x) \neq a + \text{sen } (-x)$.

Cada uma das imagens de y = sen x deve ser acrescida de a, e o conjunto imagem de f(x) = a + sen x é: $Im = [-1 + a, 1 + a]$.

Assim, o gráfico de f(x) = a + sen x pode ser obtido deslocando-se o gráfico de y = sen x de **a** unidades, para cima ou para baixo, conforme o valor de **a** seja positivo ou negativo. Resumindo: o valor a acrescido na função periódica sen x resulta em um **deslocamento vertical** da curva do gráfico.

Mostre o resultado do deslocamento vertical para as funções sen, cos, tg, sec, cossec, cotg.

**Exemplo**:

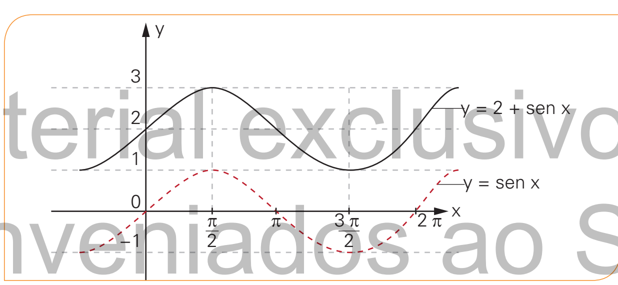
Ao analisar a função f(x) = 2 + sen x quanto a domínio, imagem, gráfico, período e paridade, obtemos:

**Domínio**: $D = \mathbb{R}$

**Imagem**: $Im = [-1 + 2, 1 + 2] \rightarrow Im = [1, 3]$

**Paridade**: sem paridade

**Período**: $p = 2\pi$




## FUNÇÃO f(x) = b · sen x

O número **b** ($b \neq 0$), multiplicado por senx, altera a imagem da função y = sen x. Cada uma das imagens de y = sen x deve ser multiplicada por **b**, e o conjunto imagem de f(x) = b · sen x é: $Im = [-1 \cdot b, 1 \cdot b] = [-b, b]$.

Assim, o gráfico de f(x) = b · sen x continua sendo uma senoide, porém de amplitude alterada para o intervalo [−b, b]. Resumindo: o valor que multiplica a função periódica sen x resulta em uma alteração na **amplitude** da curva do gráfico.

No caso em que o valor de **b** é negativo, todas as imagens ficam invertidas, isto é, a senoide fica invertida.

Mostre o resultado da alteração da amplitude para as funções sen, cos, tg, sec, cossec, cotg.

**Exemplo**:

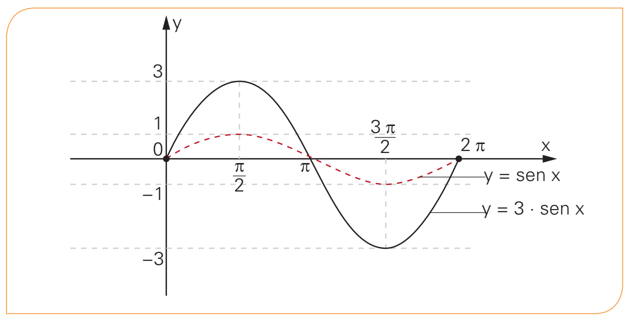
Ao analisar a função f(x) = 3 · sen x quanto a domínio, imagem, gráfico, período e paridade, temos:

**Domínio**: $D = \mathbb{R}$

**Imagem**: $Im = [-3, 3]$

**Paridade**: $f(-x) = 3 \cdot \text{sen } (-x) = 3 \cdot (-\text{ sen } x) = -3 \cdot \text{sen } x = -f(x)$. Assim, f(x) é ímpar.

**Período**: $2\pi$




## FUNÇÃO f(x) = sen (mx)

O número **m**, multiplicado por arco **x**, altera o período da função y = sen x. Assim:

$mx = 0 \rightarrow x = 0$ (início de uma senoide)

$mx = 2\pi \rightarrow x = \frac{2\pi}{m}$ (final de uma senoide)

Como **m** pode ser negativo, o período de f(x) = sen (mx) é dado por: $p = \frac{2\pi}{|m|}$

Resumindo: o valor que multiplica o ângulo **x** na função periódica sen x resulta em uma alteração no **período** da curva do gráfico.

Mostre o resultado da alteração do período para as funções sen, cos, tg, sec, cossec, cotg.

**Exemplo**:

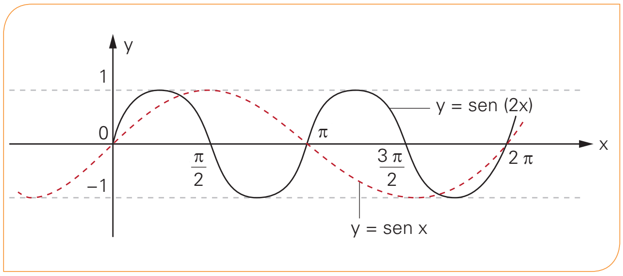
Ao analisar a função f(x) = sen (2x) quanto a domínio, imagem, gráfico, período e paridade, temos:

**Domínio**: $D = \mathbb{R}$

**Imagem**: $Im = [-1, 1]$

**Paridade**: $f(-x) = \text{sen } (-2x) = -\text{sen } (2x) = -f(x)$. Logo, f(x) é ímpar.

**Período**: $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$ $p = \pi$




## FUNÇÃO f(x) = sen (x + n)

O número **n**, acrescido ao arco **x**, altera o gráfico da função y = sen x, deslocando todos os seus pontos para a esquerda ou para a direita, conforme o valor de **n** seja positivo ou negativo. Resumindo: o valor **n** acrescido no ângulo da função periódica sen x resulta em um **deslocamento horizontal** da curva do gráfico.

Mostre o resultado do deslocamento horizontal para as funções sen, cos, tg, sec, cossec, cotg.

**Exemplo**:

Ao analisar a função $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ quanto a domínio, imagem, gráfico, período e paridade, temos:

**Domínio**: $D = \mathbb{R}$

**Imagem**: $Im = [-1, 1]$

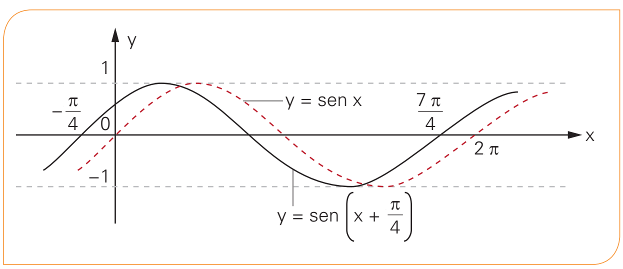
**Paridade**: $\text{sen}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) \neq \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ e $\text{sen}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) \neq -\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Então, f(x) não tem paridade.

Período: $p = 2\pi$

$x + \frac{\pi}{4} = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$ (início de uma senoide)

$x + \frac{\pi}{4} = 2\pi \rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$ (final de uma senoide)




## FUNÇÃO F(X) = a + b · sen (mx + n) COM b ≠ 0 e m ≠ 0

Para a função f(x) = a + b · sen (mx + n):

**Domínio**: $D = \mathbb{R}$

**Imagem**: $Im = [-b + a, b + a]$

**Paridade**: calcular f(–x) e comparar com f(x):

f(–x) = f(x) → função par

f(–x) = –f(x) → função ímpar

f(–x) ≠ f(x) e f(–x) ≠ –f(x) → função sem paridade

**Período**: $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$

**Gráfico**:

$mx + n = 0 \rightarrow x = -\frac{n}{m}$ (início de uma senoide)

$mx + n = 2\pi \rightarrow x = \frac{2\pi}{m} - \frac{n}{m}$ (final de uma senoide)

**Exemplo**:

Ao analisar a função f(x) = 1 + 2 · sen (2x) quanto a domínio, imagem, gráfico, período e paridade.

**Domínio**: $D = \mathbb{R}$

**Imagem**: $Im = [-2 + 1, 2 + 1] \rightarrow Im = [-1, 3]$

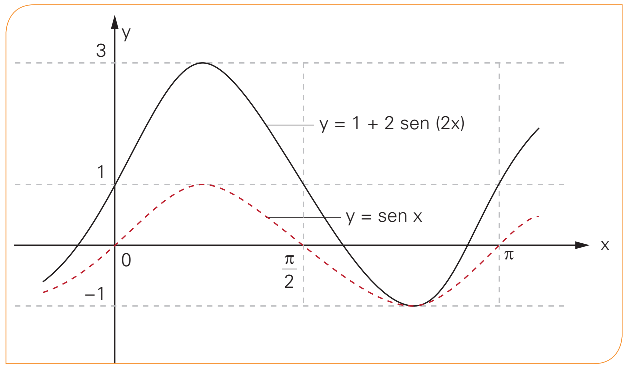
**Paridade**: não tem paridade, pois f(x) = 1 + 2 · sen (2x) e f(–x) = 1 – 2 · sen (2x).

**Período**: $p = \dfrac{2\pi}{|2|}$ $p = \pi$

**Gráfico**:

$2x = 0 \rightarrow x = 0$ (começo da senoide)

$2x = 2\pi \rightarrow x = \pi$ (final da senoide)




## FUNÇÃO f(x) = a + b · cos (mx + n) com b ≠ 0 E m ≠ 0

Para a função f(x) = a + b · cos (mx + n):

**Domínio**: $D = \mathbb{R}$

**Imagem**: $Im = [-b + a, b + a]$

**Paridade**: calcular f(–x) e comparar com f(x):

f(–x) = f(x) → função par

f(–x) = – f(x) → função ímpar

f(–x) ≠ f(x) e f (–x) ≠ – f(x) → função sem paridade

**Período**: $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$

**Gráfico**:

$mx + n = 0 \rightarrow x = -\frac{n}{m}$ (início de uma cossenoide)

$mx + n = 2\pi \rightarrow x = \frac{2\pi}{m} - \frac{n}{m}$ (final de uma cossenoide)

Lembre-se: a amplitude da cossenoide fica determinada pelo conjunto imagem da função, e a cossenoide fica invertida se b < 0.

**Exemplo**:

Ao analisar a função f(x) = 3 + 2 · cos (2x – π) quanto a domínio, imagem, período e gráfico, temos:

**Domínio**: $D = \mathbb{R}$

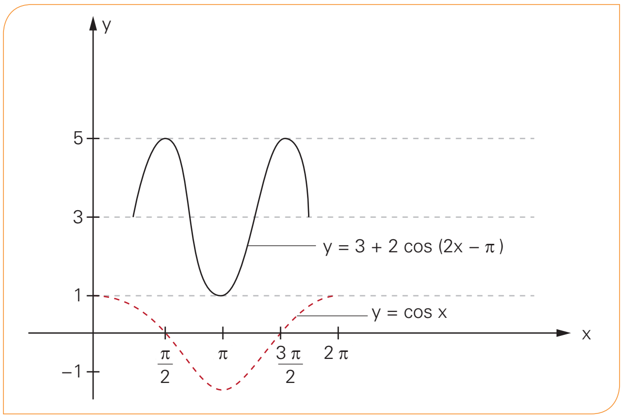
**Imagem**: $Im = [-2 + 3, 2 + 3] = [1, 5]$

**Período**: $p = \dfrac{2\pi}{|2|} = \pi$

**Gráfico**:

$2x - \pi = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ (início de uma cossenoide)

$2x - \pi = 2\pi \rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$ (final de uma cossenoide)




## Função f(x) = a + b · tg (mx + n) com b ≠ 0 e m ≠ 0

Análise apenas em relação ao domínio e ao período:
**Domínio**: para que exista f(x), é preciso que $tg\,(mx + n) \neq 0$. Isso acontece quando:

$mx + n \neq \dfrac{\pi}{2} + + k\pi, k \in \mathbb{R}$

Assim, o domínio é dado por:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid mx + n \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}\}$

**Período**: as funções do tipo $f(x) = a + b \cdot tg\,(mx + n)$ têm como gráfico uma sucessão de tangentoides. Assim:

$mx + n = 0 \rightarrow x = -\dfrac{n}{m}$ (início de uma tangentoide)

$mx + n = \pi \rightarrow x = \dfrac{\pi}{m} - \dfrac{n}{m}$ (final de uma tangentoide)

Então, o período **p** é:

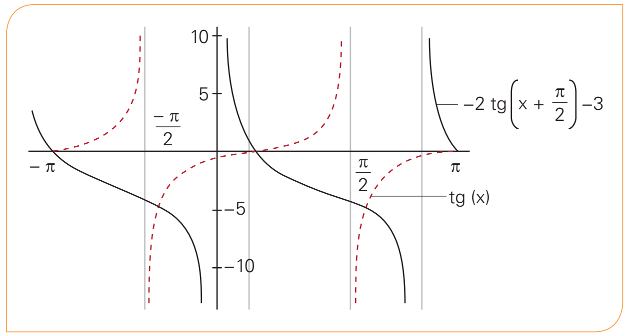
$$p = \left|\left(\frac{\pi}{m} - \frac{n}{m}\right) - \left(-\frac{n}{m}\right)\right| \rightarrow p = \left|\frac{\pi}{m}\right|$$

**Exemplo**:
Dada a função $f(x) = -3 - 2 \cdot tg\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, vamos determinar seu domínio, período e gráfico:

$x + \dfrac{\pi}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq k\pi$

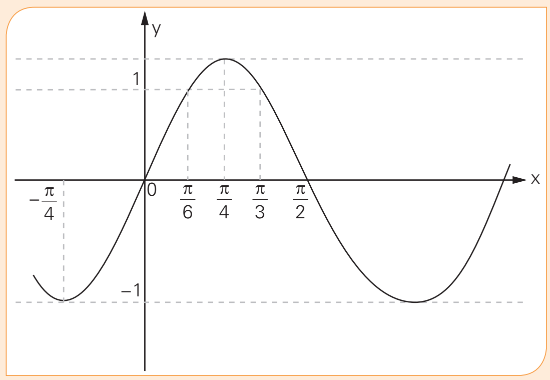
Assim: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{R}\}$

$p = \left|\dfrac{\pi}{m}\right| \rightarrow p = \dfrac{\pi}{1} \rightarrow p = \pi$




EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**1. PucCamp-SP –** Observe o gráfico a seguir:




A função real de variável real que melhor corresponde a esse gráfico é:

**a)** y = cos x
**b)** y = sen x
**c)** y = cos 2x
**d)** y = sen 2x
**e)** y = 2 sen x

**Resolução**

Temos:

Período: $p = \pi \rightarrow \pi = \dfrac{2\pi}{|k|} \rightarrow |k| = 2$

Logo, y = sen 2x ou y = cos 2x

Como para x = 0, y = 0, então ou = sen 2x.

# ROTEIRO DE AULA

## FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

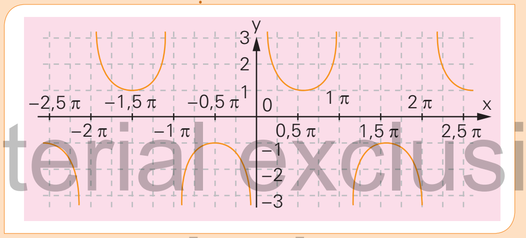
**Dado um ângulo x qualquer**

cossec x = $\frac{1}{\text{sen } x}$

Pela definição, excluem-se do domínio da secante valores em que cos x = 0.

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\text{Im} = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq -1 \text{ ou } f(x) \geq 1\}$

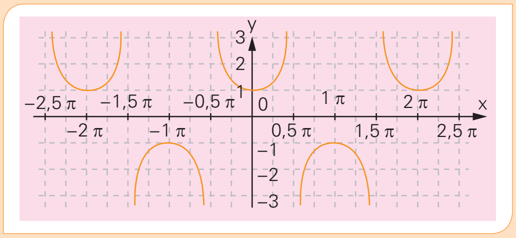



sec x = $\frac{1}{\cos x}$

Pela definição, excluem-se do domínio da cossecante valores em que sen x = 0.

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\text{Im} = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq -1 \text{ ou } f(x) \geq 1\}$

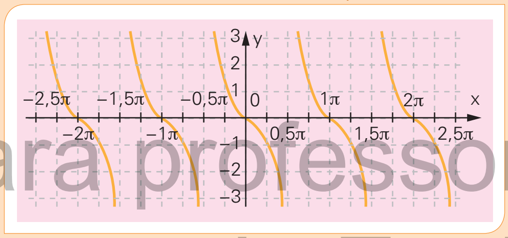



cotg x = $\frac{1}{\text{tg } x}$

Pela definição, excluem-se do domínio da cotangente valores em que tg x = 0.

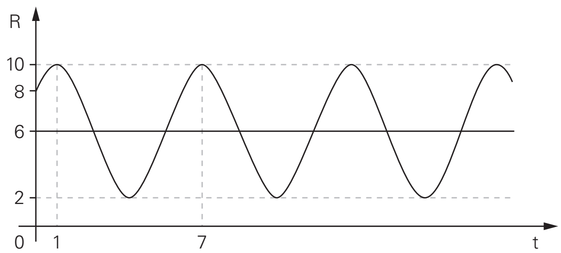
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\text{Im} = \mathbb{R}$



## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. UNB**




Considerando a figura acima, que ilustra o gráfico da função $R(t) = 4\text{sen}\,(mt + b) + 6$, em que $0 < b < \frac{\pi}{2}$, $R(t)$ é dado em centímetros, e t, em segundos, o valor de b é superior a 0,5 radianos.

**f)** Certo
**g)** Errado

Como o período é 6s, temos:

$\frac{2\pi}{m} = 6$

$m = \frac{\pi}{3}$

Como $R(1) = 10$, temos:

$4\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+b\right) + 6 = 10$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+b\right) = 1$

$\frac{\pi}{3} + b = \frac{\pi}{2}$

$b = \frac{\pi}{6} > 0,5$

**2. UPE (adaptado)** – Se a função trigonométrica $y = a + b \cdot \text{sen}\,(px)$ tem imagem $\text{Im} = [1,5]$ e período $\frac{3}{\pi}$, qual é o valor da soma $a + b + p$? Adote $\pi = 3$.

Temos que o período é $\frac{2\pi}{p} = \frac{3}{\pi} \to p = 6$.

Como a imagem é [1,5], temos que o valor de b é $b = \frac{5-1}{2} = 2$.

Portanto, o valor de a é igual a $|-1 - 2| = 3$.

Assim, $a + b + p = 11$.

**3. Acafe (adaptado)** C5-H21

Com o objetivo de auxiliar os maricultores a aumentar a produção de ostras e mexilhões, um engenheiro de aquicultura fez um estudo sobre a temperatura da água na região do sul da ilha, em Florianópolis. Para isso, efetuou medições durante três dias consecutivos, em intervalos de 1 hora. As medições se iniciaram às 5 horas da manhã do primeiro dia ($t = 0$) e os dados foram representados pela função periódica $T(t) = 24 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$, em que t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da medição e $T(t)$, a temperatura (em °C) no instante t. O período da função, o valor da temperatura máxima e o horário em que ocorreu essa temperatura no primeiro dia de observação valem, respectivamente:

**a)** 6h, 25,5 °C e 10h.
**b)** 12h, 27 °C e 10h.
**c)** 12h, 27 °C e 15h.
**d)** 6h, 25,5 °C e 15h.
**e)** 6h, 27 °C e 15h.

Temos que o período é dado por $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|} = 12$ h.

A temperatura máxima ocorre quando $\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right) = 1$. Logo, $T_{max} = 27$ °C.

Assim, podemos encontrar o horário em que ocorreu essa temperatura:

$\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = 2\pi$

$t = 12k - 2, k \in$

Para $k = 1$, temos $t = 10$ h.

Portanto, $t = 10 + 5 = 15$ h.

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**4. Insper** – Sorteando-se aleatoriamente um número real x do intervalo $[0,2\pi]$, a probabilidade de que ele satisfaça a desigualdade $\cos(x) \leqslant \text{sen}(x) \leqslant \cos(2x)$ é igual a

**a)** $\frac{1}{6}$
**b)** $\frac{4}{25}$
**c)** $\frac{5}{24}$
**d)** $\frac{1}{4}$
**e)** $\frac{9}{25}$

Sendo $f(x) = \text{sen}(x)$, $g(x) = \cos(x)$ e $h(x) = \cos(2x)$, temos que: $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$. Assim, pelo gráfico, temos:

$\frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}$

Esse intervalo tem comprimento $\frac{5\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} < \frac{15\pi - 10\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$.

Portanto, a probabilidade P é dada por:

$P = \frac{\frac{5\pi}{12}}{2\pi} = \frac{5}{24}$

**5. Unifenas** – Quando se menciona a palavra função na matemática, lembramos que ela poderá ser classificada em crescente, estritamente crescente, decrescente, estritamente decrescente, par, ímpar, periódica e, por exemplo, limitada. Para o seguinte caso: $y = 3 + 2\text{sen}(4x + \pi)$, qual é o período da função?

**a)** $\frac{\pi}{4}$
**b)** $\frac{\pi}{2}$
**c)** $\pi$
**d)** $2\pi$
**e)** $4\pi$

$P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

**6. UNB (adaptado)**

ANEESE/ISTOCKPHOTO

A cidade de Las Vegas, nos Estados Unidos, famosa pelos cassinos e hotéis, ostenta também uma das maiores rodas-gigantes do mundo. Inaugurada em abril de 2014, a High Roller tem 165 m de altura, 158 m de diâmetro e 28 cabines. Uma volta completa na High Roller dura 30 minutos. Ela é 30 m mais alta que a London Eye, de Londres, que possui diâmetro de 122 m e 32 cabines. Se, para um instante $t \geq 0$, em minutos, a altura, em metros, de uma cabine na High Roller for expressa pela função $H(t) = 7 + 79\left[1 - \cos\frac{\pi t}{15}\right]$, então calcule o instante em que essa cabine estará a uma altura de 86 m pela primeira vez.

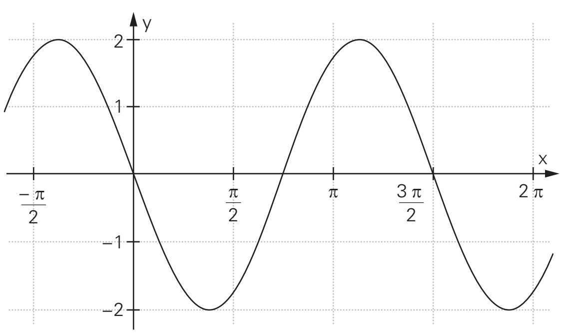
Temos que $86 = 7 + 79\left[1 - \cos\frac{\pi t}{15}\right]$

$79 = 79\left[1 - \cos\frac{\pi t}{15}\right] \rightarrow 1 - \cos\frac{\pi t}{15} = 1 \rightarrow \cos\frac{\pi t}{15} = 0 \rightarrow \frac{\pi t}{15} = \frac{\pi}{2}$

$t = 7{,}5$ min.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

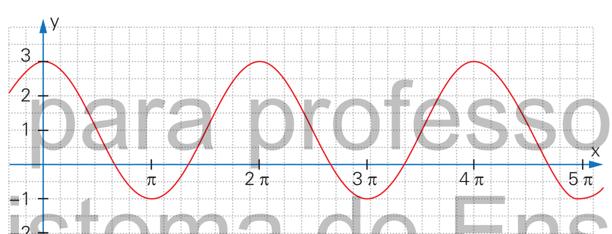
**7. Cefet-MG** – Seja a função $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx)$ em que $a, b \in \mathbb{R}$, cujo gráfico está representado a seguir.




O valor do produto ab é

**a)** $-\frac{8}{3}$
**b)** $-\frac{2}{3}$
**c)** $-\frac{3}{8}$
**d)** $\frac{3}{2}$
**e)** $\frac{1}{3}$

**8. Insper (adaptado)** – A figura abaixo representa o gráfico da função $f(x) = a\cos(x) + b$.



Calcule os valores da soma a + b e da diferença b − a.

**9. UENP** – O som é o resultado de rápidas oscilações que ocorrem na natureza. De acordo com Houaiss (2009), o som pode ser entendido como uma "vibração que se propaga num meio elástico com uma frequência entre 20 e 20.000 Hz, capaz de ser percebida pelo ouvido humano".

HOUAISS, A. *O grande dicionário da língua portuguesa*. São Paulo: Objetiva, 2009.

O som também pode ser concebido como música, e as ondas sonoras, por sua vez, podem ser descritas por meio de funções trigonométricas, como, por exemplo,

$M(t) = 4 \cdot \text{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 5$

Sobre a função, considere as afirmativas a seguir.

**V.** A amplitude da função é dada pelo número 4.

**VI.** A função apresenta um deslocamento para a esquerda de $\pi$ unidades.

**VII.** Na função M, a variável independente é o tempo.

**VIII.** A função seno é uma função par.

**IX.** O gráfico da função M apresenta uma translação vertical de 5 unidades.

Assinale a alternativa correta.

**a)** Somente as afirmativas II e IV são corretas.
**b)** Somente as afirmativas I, II e III são corretas.
**c)** Somente as afirmativas I, III e V são corretas.
**d)** Somente as afirmativas II, IV e V são corretas.
**e)** Somente as afirmativas I, III, IV e V são corretas.

**10. UFSM** – Cerca de 24,3% da população brasileira é hipertensa, quadro que pode ser agravado pelo consumo excessivo de sal. A variação da pressão sanguínea P (em mmHg) de um certo indivíduo é expressa em função do tempo por $P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$ onde t é dado em segundos. Cada período dessa função representa um batimento cardíaco. Analise as afirmativas:

**I.** A frequência cardíaca desse indivíduo é de 80 batimentos por minuto.

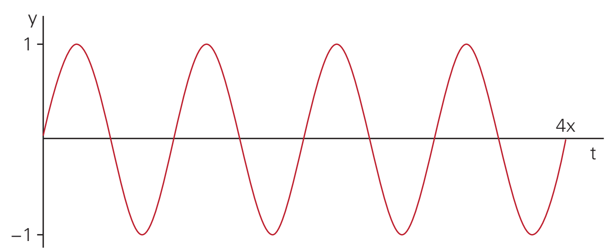
**II.** A pressão em t = 2 segundos é de 110 mmHg.

**III.** A amplitude da função P(t) é de 30 mmHg.

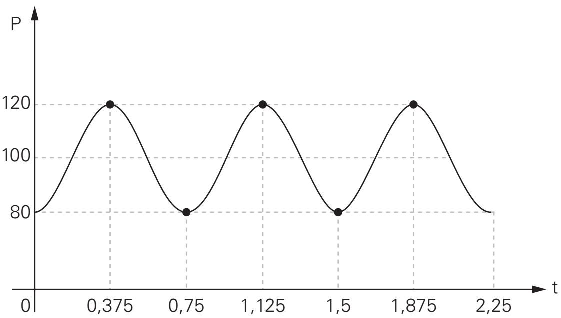
Está(ão) correta(s)

**a)** apenas I.
**b)** apenas I e II.
**c)** apenas III.
**d)** apenas II e III.
**e)** I, II e III.

**11. UFGD (adaptado)** – O gráfico a seguir representa uma função periódica com amplitude A = 1 e período $\pi$. Escreva a função que melhor representa este gráfico.



**12. UNB**




Muitos diagnósticos em medicina são obtidos pela monitoração de sinais vitais do paciente, como a pressão arterial, ou seja, a pressão nas paredes dos vasos sanguíneos. Esse sinal é exemplificado no gráfico acima, em que P(t) é a pressão, em mmHg, e t é o tempo, em segundos. O gráfico mostra um comportamento cíclico, corretamente descrito por uma função da forma P(t) = a + b sen (ct + d), em que a, b, c e d são constantes reais. A partir dessas informações, e sabendo que os ciclos da pressão arterial coincidem com os batimentos cardíacos, julgue. É de 80 batimentos por minuto a frequência cardíaca do paciente cuja pressão arterial está representada no gráfico acima.

**a)** Certo

**b)** Errado

**13. Cefet-MG** – Considere a função $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 \cdot \cos^2 x - \frac{1}{2} + k;\ k \in \mathbb{R}$.

O valor de k para que o máximo de f(x) seja igual a 4 é

**a)** $\frac{1}{2}$

**b)** 2

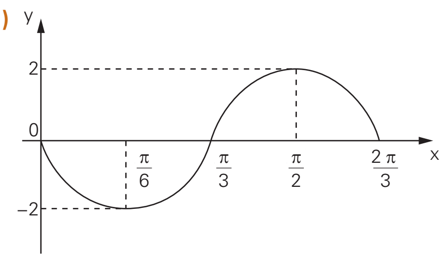
**c)** $\frac{5}{2}$

**d)** 3

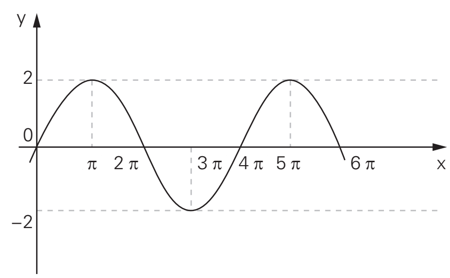
**e)** $\frac{7}{2}$

**14. UPE** – Qual dos gráficos a seguir representa a função $f(x) = -2 \text{ sen } 3x$?

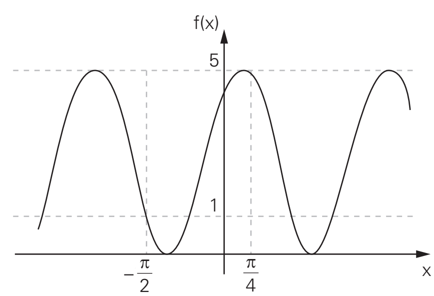
**a)**



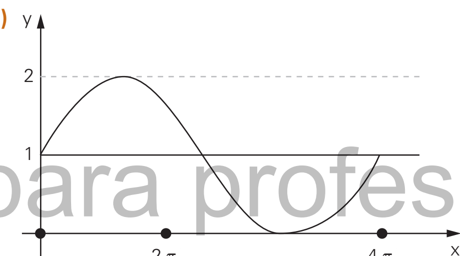

**b)**



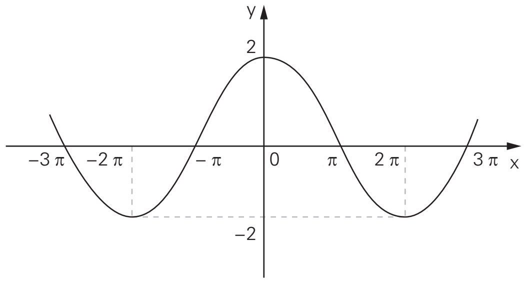

**c)**



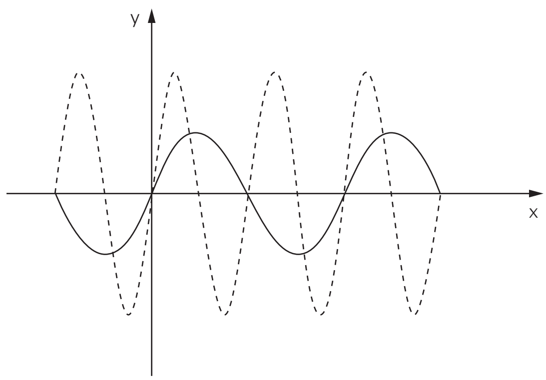

**d)**



**e)**




**15. Fuvest**




Admitindo que a linha pontilhada represente o gráfico da função (x) = sen(x) e que a linha contínua represente o gráfico da função $g(x) = \alpha \cdot \text{sen}(\beta x)$, segue que

**a)** $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$.
**b)** $\alpha > 1$ e $0 < \beta < 1$.
**c)** $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.
**d)** $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 1$.
**e)** $0 < \alpha < 1$ e $\beta = 1$.

**16. Sistema Dom Bosco** – Calcule as raízes e o período da função $f(t) = 1 + 2 \cdot \text{sen}\,(4t + \pi)$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

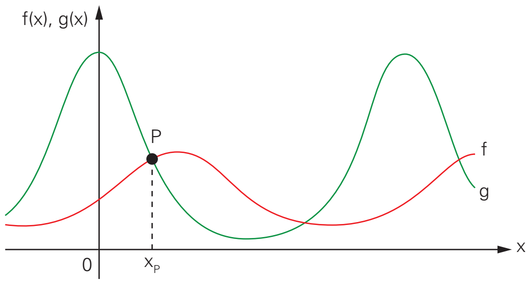
**17. Cefet-MG** – O número de vezes em que o gráfico da função real $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$ intercepta o eixo das abscissas no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ é

**a)** 15
**b)** 13
**c)** 12
**d)** 8
**e)** 4

**18. Famerp (adaptado)** C5-H22

Muitas vezes podemos construir representações gráficas de fenômenos da natureza para auxiliar a prever e entender como o ecossistema de um determinado ambiente funciona.

Observe os gráficos das funções reais f e g, definidas por $f(x) = 2^{\text{sen } x}$ e $g(x) = 4^{\cos x}$.




Considere P ($x_p$, $y_p$) um ponto comum aos gráficos das funções f e g tal que $x_p$, em radianos, é um ângulo do primeiro quadrante. Nessas condições, cos $x_p$ é igual a

**a)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$
**b)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$
**c)** $\frac{\sqrt{6}}{4}$
**d)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$
**e)** $\frac{\sqrt{5}}{4}$

**19. Cefet-MG (adaptado)** C5-H22

Através da análise de duas funções trigonométricas é possível observar e analisar o comportamento de uma empresa e seus custos. Os gráficos das funções reais f(x) = cos(x) e g(x) = sen(x) não coincidem. Entretanto, a partir de uma transformação, é possível fazer o gráfico de g(x) coincidir com o gráfico de f(x). Essa transformação é a função

**a)** $h(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \text{ sen } x$
**b)** $h(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
**c)** $h(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
**d)** $h(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
**e)** $h(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

**20. Cesgranrio** C5-H21

Um objeto flutua na superfície de um líquido em equilíbrio hidrostático. Uma onda é produzida e faz com que esse objeto sofra deslocamentos verticais. Seja $h(t) = 6 \cdot \text{sen}\left(\frac{5}{4}\pi t\right)$ a função que apresenta a altura do objeto, em centímetros, em função do tempo (t), em segundos.

O intervalo de tempo, em segundos, entre uma crista e um vale sucessivos dessa onda é:

**a)** 0,8
**b)** 0,8π
**c)** 1,6
**d)** 1,6π
**e)** 3,2

# TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS I

13

- Introdução às transformações trigonométricas
- Adição de arcos
- Diferença de arcos

**HABILIDADES**

- Determinar razões trigonométricas para ângulos não notáveis.
- Resolver problemas envolvendo valores de razões trigonométricas para ângulos não notáveis.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.

## Introdução

Nosso objetivo neste módulo é obtermos razões trigonométricas para ângulos não notáveis com base nos valores conhecidos de seno, cosseno e tangente de outros ângulos, que, combinados em operações algébricas, se transformam nos ângulos desejados.

Os resultados demonstrados com base nos ângulos agudos internos de triângulos retângulos podem ser usados em ângulos de medida superior a 90°. Por exemplo, aqueles encontrados em triângulos obtusângulos ou em arcos de circunferência.

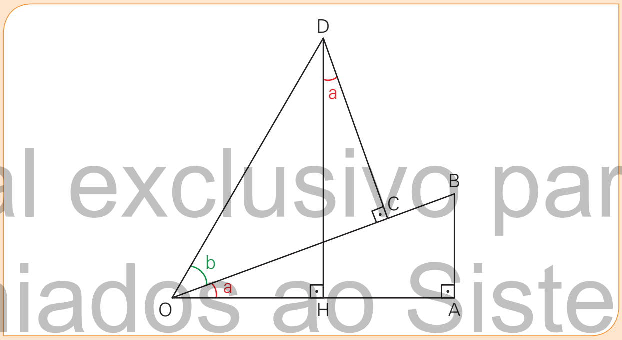
Na navegação à vela, a trigonometria é fundamental para desenvolver cálculos e interpretações de dados, seja na determinação de rotas, na inclinação da embarcação, no ajuste de velas (trimagem) ou na posição da tripulação.

BRONSWERK/ISTOCKPHOTO

Veleiros navegando em alto mar inclinados pelo vento.

## Adição de arcos

Observe na figura três triângulos retângulos de hipotenusa unitária **OAB**, **OCD** e **OHD**. Assim, temos que OB = OD = 1.



A soma dos ângulos **a** e **b**, respectivamente agudos e internos dos triângulos **OAB** e **OCD**, compõe o ângulo interno de medida a + b do triângulo **OHD**. Com base neste ângulo, podem-se definir seno e cosseno de a + b como:

$$\text{sen }(a+b) = \frac{DH}{OD} = \frac{DH}{1} \rightarrow \text{sen }(a+b) = DH$$

$$\cos (a+b) = \frac{OH}{OD} = \frac{OH}{1} \rightarrow \cos (a+b) = OH$$

Assim, podemos calcular seno e cosseno do ângulo **b** como:

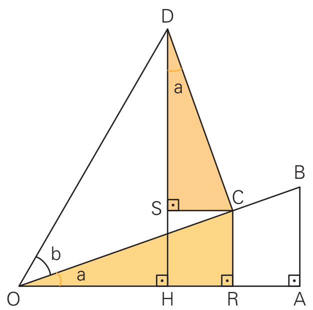
$$\text{sen } b = \frac{CD}{OD} = \frac{CD}{1} \rightarrow CD = \text{sen } b$$

$$\cos b = \frac{OC}{OD} = \frac{OC}{1} \rightarrow OC = \cos b$$

Na Geometria foi demonstrado que, se um ângulo tem seus lados perpendiculares aos lados de outro ângulo, eles terão a mesma medida. Assim, não é difícil notar que, na construção apresentada na figura anterior, os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{D}H$ são tais que $A\hat{O}B = C\hat{D}H = a$, uma vez que os lados $\overline{CD}$ e $\overline{DH}$ são, respectivamente, perpendiculares aos lados $\overline{OB}$ e $\overline{DH}$ do outro.

Na figura a seguir, a partir do ponto C, traçam-se os segmentos $\overline{CR}$ e $\overline{CS}$, perpendiculares respectivamente a $\overline{OA}$ e $\overline{DH}$. Assim, dois novos triângulos retângulos **OCR** e **CDS** são construídos, conforme destacados na ilustração.

Observe que os triângulos formados têm ângulo interno de medida **a**.




Assim,
no triângulo **CDS**:

$$\text{sen } a = \frac{CS}{CD} = \frac{CS}{\text{sen} b} \rightarrow CS = \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\cos a = \frac{DS}{CD} = \frac{DS}{\text{sen} b} \rightarrow DS = \text{sen } b \cdot \cos a$$

no triângulo **OCR**:

$$\text{sen } a = \frac{CR}{OC} = \frac{CR}{\cos b} \rightarrow CR = \text{sen } a \cdot \cos b$$

$$\cos a = \frac{OR}{OC} = \frac{OR}{\cos b} \rightarrow OR = \cos a \cdot \cos b$$

Portanto, como sen (a + b) = DH:
sen (a + b) = CR + DS = sen a · cos b + sen b · cos a
Como cos (a + b) = OH:
cos (a + b) = OR − CS = cos a · cos b − sen a · · sen b

Com base nesses resultados, podemos calcular tg $(a+b) = \dfrac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}$, desde que cos (a + b) ≠ 0.

Logo:

$$\text{tg }(a+b) = \frac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} =$$

$$= \frac{\text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\dfrac{\cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Mostre esse resultado utilizando os triângulos da figura anterior.

## Diferença de arcos

Seja sen (a − b) = sen [a + (−b)].

Aplicando-se a fórmula do seno da soma de dois arcos:

sen (a − b) = sen a · cos (−b) + sen (−b) · cos a

Aplicando a redução ao 1º quadrante, em que cos (−b) = cos b e sen (−b) = − sen b:

sen (a − b) = sen a · cos b + (−sen b) · cos a

Assim:

sen (a − b) = sen a · cos b − sen b · cos a

Analogamente, para cos (a − b), temos:

cos (a − b) = cos a · cos b + sen a · sen b

Prova:

cos (a − b) = cos (a + (−b)) = cos a · cos (−b) +

+ sen a · sen(−b) = cos a · cos b − sen a · sen b

cos (a − b) = cos a · cos b − sen a · sen b

Finalmente, para deduzir a tangente da diferença, podemos utilizar o procedimento tg (a − b) = tg [a + (−b)]. Aplicando a fórmula da adição de arcos:

$$\text{tg }(a-b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Prova:

$$\text{tg }(a-b) = \text{tg }(a + (-b)) =$$

$$= \frac{\text{tg } a + \text{tg }(-b)}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg }(-b)} = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

$$\text{tg }(a-b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

# TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

## Adição e subtração

### Seno

sen (a + b) =
sen a · cos b + sen b · cos a

sen (a − b) =
sen a · cos b − sen b · cos a

### Cosseno

cos (a + b) =
cos a · cos b − sen a · sen b

cos (a − b) =
cos a · cos b + sen a · sen b

### Tangente

tg (a + b) =
$\frac{(\text{tg a} + \text{tg b})}{(1 - \text{tg a} \cdot \text{tg b})}$

tg (a − b) =
$\frac{(\text{tg a} - \text{tg b})}{(1 + \text{tg a} \cdot \text{tg b})}$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Sistema Dom Bosco** – Se tg (a + b) = 10 e tg a = 1, então tg y é igual a:

**a)** $\frac{-9}{11}$

**b)** $\frac{9}{11}$

**c)** 1

**d)** 9

**e)** 0,1

Temos que $tg\,(a + b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \cdot tg\,b}$.

Então, $10 = \frac{1 + tg\,b}{1 - tg\,b}$.

$1 + tg\,b = 10 - 10 \cdot tg\,b$

Logo, $11 \cdot tg\,b = 9$

$tg\,b = \frac{9}{11}$

**2. Sistema Dom Bosco** – Calcule o valor da expressão

$$4 \cdot sen\left(\frac{31\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + 6 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right).$$

$sen\left(\frac{31\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{31\pi}{3}\right) cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen\left(\frac{\pi}{6}\right) cos\left(\frac{31\pi}{3}\right)$

$= sen\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen\left(\frac{\pi}{6}\right) cos\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= sen\left(\frac{\pi}{3}\right) cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen\left(\frac{\pi}{6}\right) cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right) sen\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

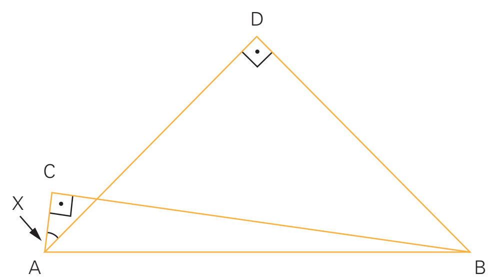
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,(1 + \sqrt{3})$

Então: $4 \cdot sen\left(\frac{31\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + 6 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$.

**3. Fuvest (adaptado)** C5-H21

Podemos utilizar triângulos e suas razões trigonométricas para resolver muitos problemas do cotidiano, como a largura de um rio, a altura de um prédio, entre outras situações.

Nos triângulos retângulos da figura, AC = 1 cm, BC = 7 cm, AD = BD. Sabendo que: (a − b) = sen a · cos b − sen b · cos α, o valor de sen x é:




**a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**b)** $\frac{7}{\sqrt{50}}$

**c)** $\frac{3}{5}$

**d)** $\frac{4}{5}$

**e)** $\frac{1}{\sqrt{50}}$

Temos que: $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

$AB = 5\sqrt{2}$ cm

Logo, $sen\,B\hat{A}C = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ e $cos\,B\hat{A}C = \frac{1}{5\sqrt{2}}$.

O triângulo ABD é isósceles. Logo, $D\hat{B}A = B\hat{A}D = 45°$.
Então, $x = B\hat{A}C - 45°$.

Assim, $sen\,x = sen\,(B\hat{A}C - 45°) = \frac{7}{5\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{5\sqrt{2}} =$

$= \frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**4. UFMA** – Sabendo que $\beta$ é um ângulo tal que $2\text{sen}(\beta - 60°) = \cos(\beta + 60°)$, então tg $\beta$ (tangente de $\beta$) é um número da forma $a + b\sqrt{3}$, em que

**a)** a e b são reais negativos.
**b)** a e b são inteiros.
**c)** $a + b = 1$.
**d)** a e b são pares.
**e)** $a^2 + b = 1$.

Temos que $\text{sen}(\beta - 60°) = \text{sen}\,\beta\,\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta$ e

$\cos(\beta + 60°) = \cos\beta\,\frac{1}{2} + \text{sen}\,\beta\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Então, $\text{sen}\,\beta + \sqrt{3}\cos\beta = \frac{1}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\,\beta$.

Dividindo ambos os lados por cos $\beta$, temos:

$$\text{tg}\,\beta + \sqrt{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{tg}\,\beta$$

$$\text{tg}\,\beta \cdot \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,\beta \cdot (-2 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 1$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{2\sqrt{3} - 1}{-2 + \sqrt{3}} = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(1 - 2\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} =$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 6}{1} = -4 - 3\sqrt{3}$$

Portanto, a e b são inteiros.

**5. Fuvest** – Sabe-se que existem números reais A e $x_0$, sendo $A > 0$, tais que $\text{sen}\,x + 2\cos x = A\cos(x - x_0)$ para todo x real. O valor de A é igual a

**a)** $\sqrt{2}$
**b)** $\sqrt{3}$
**c)** $\sqrt{5}$
**d)** 2
**e)** 3

$\text{sen}\,x + 2 \cdot \cos x = \sqrt{5}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\text{sen}\,x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right] = \sqrt{5}\,[\text{sen}\,x_0\,\text{sen}\,x + \cos x_0 \cos x] = \sqrt{5}\cos(x - x_0)$, pois $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$.

Existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tais que $\text{sen}\,x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\cos x_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Portanto, temos que: $\text{sen}\,x + 2 \cdot \cos x = A \cdot \cos(x - x_0)$ e

$\text{sen}\,x + 2 \cdot \cos x = \sqrt{5} \cdot \cos(x - x_0)$

Logo, $A = \sqrt{5}$.

**6. Sistema Dom Bosco** – Calcule o valor de $(\text{sen}\,15° + \cos 15°)^2$.

$(\text{sen}\,15° + \cos 15°)^2 = \text{sen}^2\,15° + 2 \cdot \text{sen}\,15° \cos 15° + \cos^2 15° = 1 + 2 \cdot \text{sen}\,15° \cdot \cos 15°$

Mas $\text{sen}(30°) = \text{sen}(15° + 15°) = \text{sen}\,15° \cdot \cos 15° + \text{sen}\,15° \cdot \cos 15° = 2 \cdot \text{sen}\,15° \cdot \cos 15°$

$\frac{1}{2} = 2 \cdot \text{sen}\,15° \cdot \cos 15°$

Portanto, $(\text{sen}\,15° + \cos 15°)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. UEG** – Considerando-se que $\text{sen}(5°) = \frac{2}{25}$, tem-se que $\cos(50°)$ é

**a)** $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621} + 2\right)$

**b)** $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621} - 2\right)$

**c)** $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(1 - \sqrt{621}\right)$

**d)** $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621} - 1\right)$

**8. PUC-Rio** – Sabendo que cos (3x) = −1, quais são os possíveis valores para cos (x)?

**a)** $\frac{1}{2}$ e $-1$

**b)** $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$

**c)** $\frac{1}{2}$ e 1

**d)** −1 e 5

**e)** 0 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**9. FGV-SP** – Se sen x + sen y = $\frac{\sqrt{15}}{3}$ e cos x + cos y = 1, então sec (x − y) é igual a

**a)** $\frac{1}{3}$

**b)** $\frac{1}{2}$

**c)** 2

**d)** 3

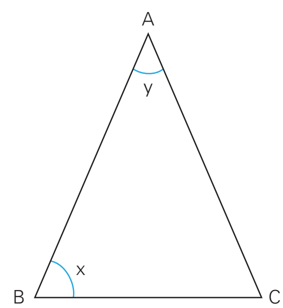
**e)** 4

**10. Fuvest-SP** – Seja x no intervalo $\left]0, \frac{\neq}{2}\right[$ satisfazendo a equação $\text{tg } x + \frac{2}{\sqrt{5}} \sec x = \frac{3}{2}$. Assim, calcule o valor de:

**a)** sec x;

**b)** sen $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

**11. Mackenzie-SP** – No triângulo ABC, temos AB = AC e sen x = $\frac{3}{4}$. Então, cos y é igual a:




**a)** $\frac{9}{16}$

**b)** $\frac{3}{4}$

**c)** $\frac{7}{9}$

**d)** $\frac{1}{8}$

**e)** $\frac{3}{16}$

**12. Facisa** – Calcule o número de soluções da equação $2 \cdot \text{sen } 3x - 1 = 0$ em $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

**13. Mackenzie-SP** – O maior valor inteiro de k, para que a equação $\sqrt{3}\,\text{sen } x + \cos x = k - 2$ apresente soluções reais, é

**a)** 3
**b)** 4
**c)** 5
**d)** 6
**e)** 7

**14. ITA** – Se $\cos 2x = \frac{1}{2}$, então um possível valor de $\frac{\text{cotg } x - 1}{\text{cossec}(x - \pi) - \sec(\pi - x)}$.

**a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$
**b)** 1
**c)** $\sqrt{2}$
**d)** $\sqrt{3}$
**e)** 2

**15. Facisa** – O sen $\frac{\pi}{8}$ é

**a)** $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{4}$
**b)** $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$
**c)** $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$
**d)** $\frac{\sqrt{2}}{8}$
**e)** $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

**17. ITA** – Encontre os pares $(\alpha, \beta) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ que satisfazem simultaneamente as equações $(\text{tg}\ \alpha + \text{cotg}\ \beta) \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}\ \beta - 2 \cdot \cos^2(\alpha - \beta) = -1$ e $\sqrt{3} \cdot \text{sen}\ (\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$.

**16. ITA** – Se $\text{tg}\ x = \sqrt{7}$ e $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, então sen (3x) é igual a

**a)** $-\frac{\sqrt{14}}{8}$

**b)** $\frac{\sqrt{14}}{8}$

**c)** $\frac{\sqrt{14}}{4}$

**d)** $-\frac{\sqrt{14}}{4}$

**e)** $\frac{\sqrt{14}}{6}$

**18. EsPCEx** C5-H22

A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3 \cdot \left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

**a)** o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.

**b)** a população atinge seu máximo em $t = 6$.

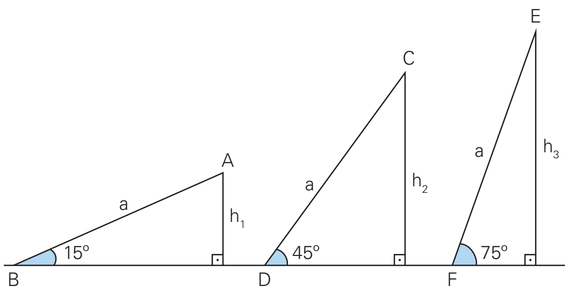
**c)** o período de seca corresponde a 4 meses do ano.

**d)** a população média anual é de 6 000 animais.

**e)** a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6 000 animais.

**19. Uerj** C5-H22

Um esqueitista treina em três rampas planas de mesmo comprimento a, mas com inclinações diferentes. As figuras abaixo representam as trajetórias retilíneas AB = CD = EF, contidas nas retas de maior declive de cada rampa




Sabendo que as alturas, em metros, dos pontos de partida A, C e E são, respectivamente, $h_1$, $h_2$ e $h_3$, conclui-se que $h_1 + h_2$ é igual a

**a)** $h_3\sqrt{3}$

**b)** $h_3\sqrt{2}$

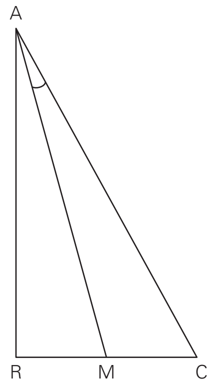
**c)** $2 \cdot h_3$

**d)** $h_3$

**e)** $3 \cdot h_3$

**20. Fuvest** C5-H22

No triângulo retângulo ABC, ilustrado na figura, a hipotenusa AC mede 12 cm e o cateto BC mede 6 cm. Se M é o ponto médio de BC, então a tangente do ângulo MAC é igual a




**a)** $\frac{\sqrt{2}}{7}$

**b)** $\frac{\sqrt{3}}{7}$

**c)** $\frac{2}{7}$

**d)** $\frac{2\sqrt{2}}{7}$

**e)** $\frac{2\sqrt{3}}{7}$

# TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS II

14

- Arco duplo
- Transformação em produto

**HABILIDADES**

- Determinar razões trigonométricas para ângulos não notáveis.
- Resolver problemas envolvendo valores de razões trigonométricas para ângulos não notáveis.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.

## Primeiras transformações

Para dois ângulos a e b quaisquer, temos que

**seno:**

$\text{sen}\ (a + b) = \text{sen}\ a \cdot \cos b + \text{sen}\ b \cdot \cos a$

$\text{sen}\ (a - b) = \text{sen}\ a \cdot \cos b - \text{sen}\ b \cdot \cos a$

**cosseno:**

$\cos\ (a + b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$

$\cos\ (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$

**tangente:**

$$\text{tg}\ (a + b) = \frac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ b}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$$

$$\text{tg}\ (a - b) = \frac{\text{tg}\ a - \text{tg}\ b}{1 + \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$$

### ARCO DUPLO

Para reduzir seno, cosseno e tangente para o dobro de um arco, aplicam-se as expressões reduzidas para a soma de arcos, fazendo b = a.

**Seno:**

$\text{sen}\ (a + b) = \text{sen}\ (a + a) = \text{sen}\ 2a\ \text{sen}\ 2a = \text{sen}\ a \cdot \cos a + \text{sen}\ a \cdot \cos a$

Logo, $\text{sen}\ 2a = 2 \cdot \text{sen}\ a \cdot \cos a$

**Cosseno:**

$\cos\ (a + b) = \cos\ (a + a) = \cos 2a$

$\cos 2a = \cos a \cdot \cos a - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ a$

Assim, $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

**Tangente:**

$$\text{tg}\ (a + b) = \text{tg}\ (a + a) = \text{tg}\ 2a \rightarrow \text{tg}\ 2a = \frac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ a}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ a}$$

Portanto, $\text{tg}\ 2a = \dfrac{2\text{tg}\ a}{1 - \text{tg}^2 x}$

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

**1. Sistema Dom Bosco** – Deduza a fórmula do seno para quando o argumento equivale a 3a:

$\text{sen}\ (3a) = \text{sen}\ (a + 2a) = \text{sen}\ a \cdot \cos 2a + \text{sen}\ 2a \cdot \cos a$

$= \text{sen}\ a \cdot (1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a) + 2 \cdot \text{sen}\ a \cdot \cos^2 a$

$= \text{sen}\ a - 2 \cdot \text{sen}^3 a + 2 \cdot \text{sen}\ a \cdot (1 - \text{sen}^2 a) = \text{sen}\ a - 2 \cdot \text{sen}^3 a + 2 \cdot \text{sen}\ a - 2 \cdot \text{sen}^3 a$

$= -4 \cdot \text{sen}^3 a + 3 \cdot \text{sen}\ a$

**2. Sistema Dom Bosco** – Deduza a fórmula do cosseno para quando o argumento equivale a 3a:

$\cos\ (3a) = \cos\ (a + 2a) = \cos a \cdot \cos 2a - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ 2a$

$= \cos a \cdot (2 \cdot \cos^2 a - 1) - \text{sen}\ a \cdot 2 \cdot \text{sen}\ a \cdot \cos a$

$= 2 \cdot \cos^3 a - \cos a - 2 \cdot \text{sen}^2 a \cdot \cos a$

$= 2 \cdot \cos^3 a - \cos a - 2 \cdot (1 - \cos^2 a) \cos a$

$= 2 \cdot \cos^3 a - \cos a - 2 \cdot \cos a + 2 \cdot \cos^3 a$

$= 4 \cdot \cos^3 a - 3 \cdot \cos a$

**3. Sistema Dom Bosco** – Deduza a fórmula do tangente para quando o argumento equivale a 3a:

$$\text{tg } (3a) = \text{tg } (a + 2a) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } 2a}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } 2a} =$$

$$\frac{\text{tg } a + \dfrac{2 \cdot \text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}}{1 - \text{tg } a \cdot \dfrac{2 \cdot \text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}} = \frac{\dfrac{\text{tg } a - \text{tg}^3 a + 2 \cdot \text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}}{\dfrac{1 - \text{tg}^2 a - 2 \cdot \text{tg}^2 a}{1 - \text{tg}^2 a}} =$$

$$\frac{3 \cdot \text{tg } a - \text{tg}^3 a}{1 - 3 \cdot \text{tg}^2 a}$$

Com base na identidade $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, a expressão do cosseno do arco duplo pode assumir outras formas:

$\cos^2 a = 1 - \text{sen}^2 a \rightarrow \cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \rightarrow \rightarrow \cos 2a = 1 - \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 a$

Então:

$\cos 2a = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a$

$\text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$

$\cos 2a = 1 - 2 + 2\cos^2 a$

Logo:

$\cos 2a = 2 \cdot \cos^2 a - 1$

Com base nas fórmulas para 2a, podemos encontrar uma fórmula para sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$.

Como, $\cos 2b = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 b$.

Fazendo $b = \frac{a}{2}$:

$$\cos a = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$\text{sen}^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}$$

$$\text{sen } \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

Temos também que $\cos 2b = 2 \cdot \cos^2 b - 1$.

Fazendo $b = \frac{a}{2}$:

$$\cos a = 2 \cdot \cos^2 \frac{a}{2} - 1$$

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos a + 1}{2}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}}$$

## TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

Em muitas ocasiões, é útil transformar somas algébricas como sen p + sen q, sen p − sen q, cos p + cos q em produtos. Para tanto, considere as seguintes fórmulas de adição e subtração:

- $\text{sen } (A + B) = \text{sen } A \cdot \cos B + \text{sen } B \cdot \cos A$ (I)
- $\text{sen } (A - B) = \text{sen } A \cdot \cos B - \text{sen } B \cdot \cos A$ (II)
- $\cos (A + B) = \cos A \cdot \cos B - \text{sen } A \cdot \text{sen } B$ (III)
- $\cos (A - B) = \cos A \cdot \cos B + \text{sen } A \cdot \text{sen } B$ (IV)

Então,

I + II: $\text{sen } (A + B) + \text{sen } (A - B) = 2 \text{ sen } A \cdot \cos B$

I − II: $\text{sen } (A + B) - \text{sen } (A - B) = 2 \text{ sen } B \cdot \cos A$

III + IV: $\cos (A + B) + \cos (A - B) = 2 \cos A \cdot \cos B$

III − IV: $\cos (A + B) - \cos (A - B) = -2 \text{ sen } A \cdot \text{sen } B$

Chamamos agora $A + B = p$ e $A - B = q$.

Resolvendo o sistema, temos: $A = \frac{p + q}{2}$ e $B = \frac{p - q}{2}$.

Substituindo A e B nas quatro igualdades obtidas, obtêm-se as fórmulas de fatoração:

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen } \left(\frac{p + q}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{p - q}{2}\right)$$

$$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen } \left(\frac{p - q}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{p + q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \left(\frac{p + q}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{p - q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \text{sen } \left(\frac{p + q}{2}\right) \cdot \text{sen } \left(\frac{p - q}{2}\right)$$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**1. Sistema Dom Bosco** – Desenvolva a relação a seguir sen 50° + sen 10°

$\text{sen } 50° + \text{sen } 10° =$

$$= 2 \cdot \text{sen } \left(\frac{50° + 10°}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{50° - 10°}{2}\right)$$

$= 2 \cdot \text{sen } 30° \cdot \cos 20°$

**2. Sistema Dom Bosco** – Sabendo que $\text{sen } x = \frac{-3}{5}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, determine: sen 2x

Lembre que: $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$

Temos que $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

Logo: $\cos x = \frac{4}{5}$, pois $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

Assim, $\text{sen } 2x = 2 \cdot \frac{-3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{-24}{25}$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{-3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

# ROTEIRO DE AULA

## TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

### Arco duplo

seno

sen 2a = $2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a$

cosseno

cos 2a = $\cos^2 a - \text{sen}^2 a$

tangente

tg 2a = $\dfrac{2\text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 x}$

### Transformação em produto

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. ESPM-SP** – A hipotenusa de um triângulo retângulo mede $\sqrt{2}$ e forma 15° com um de seus catetos. A soma das medidas dos catetos é igual a:

**a)** 2
**b)** 3
**c)** $\sqrt{3}$
**d)** $\sqrt{2} + 1$
**e)** $\sqrt{3} + 1$

Como um ângulo mede 15°, o outro ângulo agudo deve medir 75°.

Temos que 75° = 45° + 30°.

Logo, sendo os catetos x e y tal que: $x = \sqrt{2} \cdot \text{sen } 75°$ e $y = \sqrt{2} \cdot \cos 75°$

Temos que:

$\text{sen } 75° = \text{sen } (45° + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$

e $\cos 75° = \cos (45° + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$

Logo, $x + y = \sqrt{2}(\text{sen } 75° + \cos 75°) = \frac{2}{4}(1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1) = \sqrt{3}$.

**2. FGV-RIO** – Em um triângulo retângulo ABC, o cateto AB mede o triplo do cateto BC e α é a medida do ângulo interno relativo ao vértice A. O valor de cos (2α) é

**a)** 0,8
**b)** 0,7
**c)** 0,6
**d)** 0,5
**e)** 0,4

Como AB = 3BC, temos que $\text{tg } \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{3BC} = \frac{1}{3} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$

$\cos \alpha = 3 \cdot \text{sen } \alpha$

Assim, temos que $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 9\text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 8\text{sen}^2\alpha$.

Temos também que a hipotenusa

$AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = \sqrt{10BC^2} = \sqrt{10} \cdot BC$.

Assim, $\text{sen } \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Portanto, $\cos 2\alpha = 8\frac{1}{10} = 0{,}8$.

**3. FGV-RIO** – Em um triângulo de ângulos internos A, B e C, tem-se que B = 2A. Sabendo que $\cos(B) = \frac{-1}{4}$, calcule sen (A) e cos (A).

Então, temos que $\cos B = \cos 2A = \cos^2 A - \text{sen}^2 A = \frac{-1}{4}$.

Ou seja, $\cos^2 A - 1 + \cos^2 A = \frac{-1}{4}$.

$2\cos^2 A = \frac{3}{4} \rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Logo, $\text{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{6}{16} = \frac{10}{16} \rightarrow \text{sen } A = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

**4. Unifesp** – A expressão sen (x − y) cos y + cos (x − y) sen y é equivalente a:

**a)** sen (2x + y)
**b)** cos (2x)
**c)** sen x
**d)** sen (2x)
**e)** cos (2x + 2y)

Temos que $\text{sen } (x - y) \cos y + \cos (x - y) \text{ sen } y =$
$= \text{sen } x \cdot \cos^2 y - \text{sen } y \cdot \cos x \cdot \cos y + \cos x \cdot \cos y \cdot \text{sen } y + \text{sen } x \cdot \text{sen}^2 y = = \text{sen } x \cdot (\text{sen}^2 y + \cos^2 y) = \text{sen } x$

**5. PUC-Rio** – Sabendo que $\pi < x < \frac{3\neq}{2}$ e sen (x) $= \frac{1}{3}$, é correto afirmar que sen (2x) é:

a) $\frac{-2}{3}$

b) $\frac{-1}{6}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

d) $\frac{1}{27}$

e) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

Como sen x $= \frac{1}{3} \to$ cos x $= \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Logo, sen 2x = 2 · sen x · cos x $= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

**6. PUC-Rio (adaptado)** – Considere a equação sen $(2\theta) = \cos\theta$. Calcule a soma de todas as soluções da equação com $\theta \in [0, 2\pi]$.

Temos que sen $2\theta = \cos\theta$.

Logo, $2 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta = \cos\theta \to 2 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta - \cos\theta = 0 \to \cos\theta\,(2 \cdot \text{sen}\,\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0$ ou $2 \cdot \text{sen}\,\theta - 1 = 0$

Para $\cos\theta = 0$, temos $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Para $2 \cdot \text{sen}\,\theta - 1 = 0 \to \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$, temos $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

Então, a soma das soluções é $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 2\pi + \pi = 3\pi$.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. UEG** – Sabendo-se que sen (x) $= \frac{1}{2}$ e que x é um ângulo do 1º quadrante, o valor da expressão sen(4x) − cos(4x) é

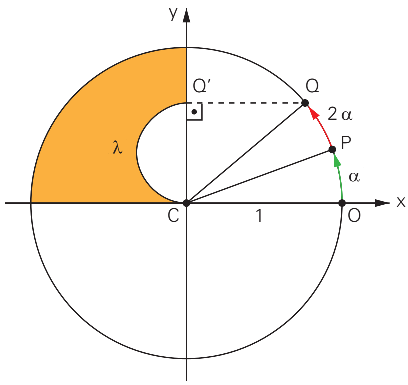
a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

d) 2

**8. Famerp** – Em uma circunferência trigonométrica de centro C e origem dos arcos em O, foram marcados os pontos P e Q, sendo que as medidas dos arcos $\overset{\frown}{OP}$ e $\overset{\frown}{OQ}$ são iguais, respectivamente, a $\alpha$ e $2\alpha$, conforme indica a figura.




Sabendo-se que Q' é a projeção ortogonal de Q sobre o eixo y, que l é uma semicircunferência de diâmetro $\overline{CQ'}$ e que sen $\alpha = \dfrac{1}{3}$, a área da região colorida na figura é

**a)** $\dfrac{7\pi}{36}$

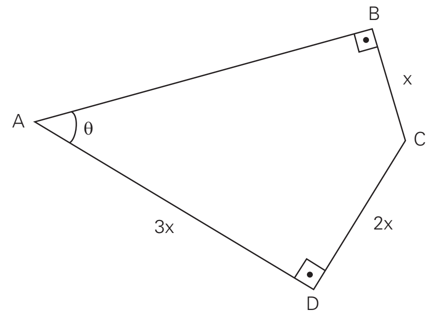
**b)** $\dfrac{31\pi}{162}$

**c)** $\dfrac{5\pi}{27}$

**d)** $\dfrac{65\pi}{324}$

**e)** $\dfrac{16\pi}{81}$

**9. FGV-SP** – No quadrilátero ABCD mostrado na figura abaixo, $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são ângulos retos, BC = x, CD = 2x, AD = 3x e $\hat{A} = \theta$. Determine:




**a)** o comprimento dos segmentos AC e AB em função de x.

**b)** o valor de sen $\theta$.

**10. Fuvest** – No quadrilátero plano ABCD, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são retos, AB = AD = 1, BC = CD = 2 e BD é uma diagonal.
O cosseno do ângulo $B\hat{C}D$ vale

**a)** $\frac{\sqrt{3}}{5}$

**b)** $\frac{2}{5}$

**c)** $\frac{3}{5}$

**d)** $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

**e)** $\frac{4}{5}$

**11. FGV-SP (adaptado)** – Se $1 + \cos\alpha + \cos2\alpha + \cos3\alpha + \cos4\alpha + \ldots = 5$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então sen $2\alpha$ é igual a

Dica: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1 - x}$

**a)** 0,84

**b)** 0,90

**c)** 0,92

**d)** 0,94

**e)** 0,96

**12. ITA-SP** – A soma de todas as soluções distintas da equação:

$\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0$, que estão no intervalo $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, é igual a:

**a)** $2\pi$

**b)** $\frac{23}{12}\pi$

**c)** $\frac{9}{6}\pi$

**d)** $\frac{7}{6}\pi$

**e)** $\frac{13}{12}\pi$

**13. FGV-SP** – A única solução da equação sen 2x · sen 3x = = cos 2x · cos 3x, com $0° \leqslant x < 90°$, é

**a)** 72°
**b)** 36°
**c)** 24°
**d)** 18°
**e)** 15°

**14. PUC-Rio (adaptado)** – Sendo x um arco satisfazendo $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\text{sen } x = \frac{24}{25}$, calcule o valor de $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

**15. Escola Naval-RJ** – A soma das soluções da equação trigonométrica $\cos 2x + 3 \cos x = -2$, no intervalo $[0, 2\pi[$, é

**a)** $\pi$
**b)** $2\pi$
**c)** $3\pi$
**d)** $\frac{5\pi}{3}$
**e)** $\frac{10\pi}{3}$

**16. ITA** – Sabendo que $\text{sen } x = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ um possível valor para $\text{cossec } 2x - \dfrac{1}{2}\text{ tg } x$ é

a) $\dfrac{a - b}{ab}$

b) $\dfrac{a + b}{2ab}$

c) $\dfrac{a^2 - b^2}{ab}$

d) $\dfrac{a^2 + b^2}{4ab}$

e) $\dfrac{a^2 - b^2}{4ab}$

**17. ITA** – Seja n um inteiro positivo tal que

$$\text{sen } \frac{\pi}{2n} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

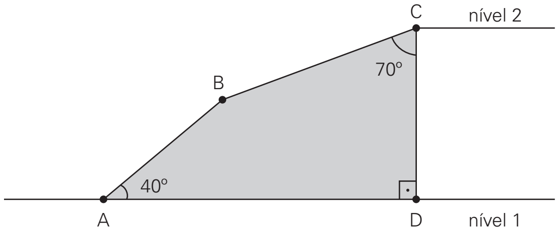
a) Determine n.

b) Determine $\text{sen } \dfrac{\pi}{24}$.

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. FGV-RIO** C5-H22

Um terreno possui dois níveis, ambos horizontais. Para estabilizar o nível superior, um engenheiro projetou um muro de concreto cuja seção transversal é o quadrilátero ABCD mostrado na figura abaixo.




Nesse quadrilátero, AB = 5 m, BC = 8 m, os ângulos A e C medem, respectivamente, 40° e 70° e o ângulo D é reto. Na figura, a altura do nível 2 em relação ao nível 1 é o comprimento do segmento CD.

Dados: sen 20° = 0,34, cos 20° = 0,94

Obs.: use, se necessário, $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$.

A altura do nível 2 em relação ao nível 1 é aproximadamente igual a

a) 6,24 m

b) 5,66 m

c) 5,92 m

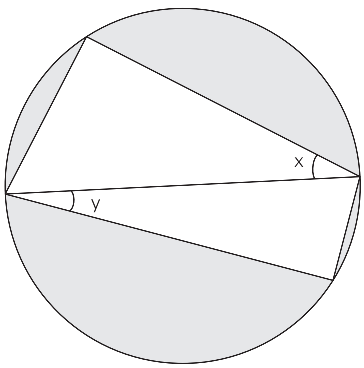
d) 6,12 m

e) 5,80 m

**19. Fuvest (adaptado)** C5-H22

Um empreiteiro estava com o projeto de uma piscina que devia ser construída de modo que o espaço fora dela fosse utilizado pelos banhistas.

O quadrilátero da figura está inscrito em uma circunferência de raio 1. A diagonal desenhada é um diâmetro dessa circunferência.




Sendo x e y as medidas dos ângulos indicados na figura, a área da região cinza, em função de x e y, é:

**a)** $\pi + \text{sen}(2x) + \text{sen}(2y)$

**b)** $\pi - \text{sen}(2x) - \text{sen}(2y)$

**c)** $\pi - \cos(2x) + \cos(2y)$

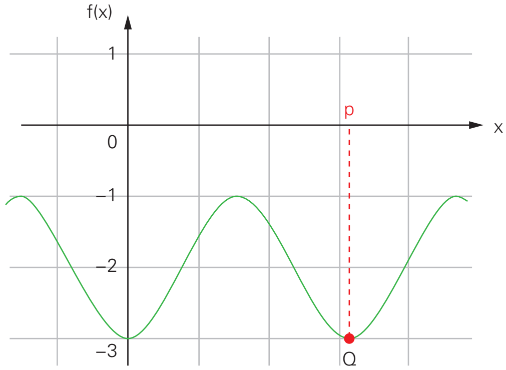
**d)** $\pi - \dfrac{\cos(2x) + \cos(2y)}{2}$

**e)** $\pi - \dfrac{\text{sen}(2x) + \text{sen}(2y)}{2}$

**20. FGV-RIO (adaptado)** C5-H22

Podemos utilizar as funções trigonométricas para expressar e analisar os mais variados tipos de gráficos.

Observe o gráfico de uma função trigonométrica cosseno, dada pela expressão $f(x) = m + n \cdot \cos(2x)$, sendo m, n e p números reais, com ponto de mínimo em $x = p$, que é a abscissa do ponto Q.




O valor de $p^{mn}$ é igual a

**a)** $\dfrac{1}{4\pi^2}$

**b)** $\dfrac{1}{\pi^2}$

**c)** $\dfrac{\pi^2}{4}$

**d)** $\pi^2$

**e)** $4\pi^2$

# EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

15

- Introdução a equações trigonométricas
- Equação de forma sen x = sen a
- Equação de forma cos x = cos a
- Equação de forma tg x = tg a

**HABILIDADES**

- Compreender a resolução de equações trigonométricas envolvendo seno, cosseno e tangente.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

## Introdução

Já estudamos equações trigonométricas, no sentido de buscar soluções na primeira volta da circunferência trigonométrica. Com o conhecimento da representação de todos os números reais associados a um ou mais pontos da circunferência trigonométrica, é possível ampliar o universo das equações para todo o conjunto $\mathbb{R}$.

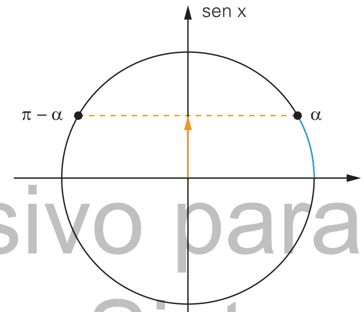
O pêndulo de Foucault é um experimento que comprova de maneira simples o movimento de rotação da Terra. O cálculo que determina a velocidade do giro em certos locais da Terra usa noções de trigonometria, por isso pode ser considerado uma aplicação para os conceitos trabalhados neste módulo.

CELLI07/ISTOCKPHOTO

Pêndulo de Foucault, na França.

### EQUAÇÃO DE FORMA sen x = sen α

Os números x e α apresentam o mesmo **seno** se, e somente se, suas imagens na circunferência trigonométrica forem coincidentes ou simétricas em relação ao eixo das ordenadas.



Assim,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha \leftrightarrow x = \alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

**Sistema Dom Bosco** – Descubra o valor de x para $\operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2}$ em $\mathbb{R}$.

Para resolver a equação $\operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2}$ em $\mathbb{R}$, temos:

$\operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2} \to \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$

Então:

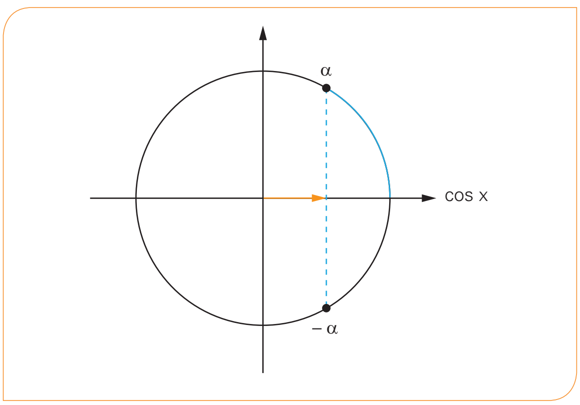
$3x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $3x = \pi - \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

Assim:

$x = \frac{\pi}{18} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k \cdot 2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

## EQUAÇÃO DE FORMA cos x = cos α

Os números x e α apresentam o mesmo **cosseno** se, e somente se, suas imagens na circunferência trigonométrica forem coincidentes ou simétricas em relação ao eixo das abscissas.




Assim,

$$\cos x = \cos \alpha \leftrightarrow x = \pm \alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

**Sistema Dom Bosco** – Descubra o valor de x para $2 \cdot \cos 3x + 1 = 0$ em $\mathbb{R}$.

Para resolver a equação $2 \cdot \cos 3x + 1 = 0$ em $\mathbb{R}$, temos:

$2 \cdot \cos 3x + 1 = 0 \to \cos 3x = \frac{-1}{2}$

Como $\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}$

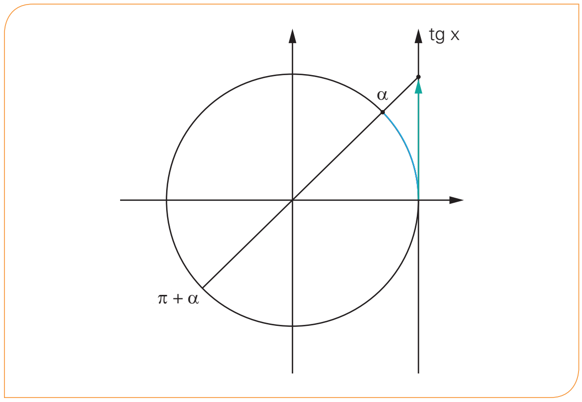
$\cos 3x = \cos \frac{2\pi}{3}$

Assim:

$3x = \pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{k \cdot 2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

## EQUAÇÃO DE FORMA tg x = tg α

Os números x e α apresentam a mesma **tangente** se, e somente se, suas imagens na circunferência trigonométrica forem coincidentes ou simétricas em relação à origem dos eixos coordenados (diametralmente opostos).




Assim,

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \leftrightarrow x = a + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

**Sistema Dom Bosco** – Descubra o valor de x para $\operatorname{tg} 2x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ em $\mathbb{R}$.

Para resolver a equação $\operatorname{tg} 2x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ em $\mathbb{R}$, temos:

Como $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$

Então:

$2x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \to x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

## EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

**seno**

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = \underline{\alpha + k \cdot 2\pi,}\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \underline{\pi - \alpha + k \cdot 2\pi}\ , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

**cosseno**

$$\cos x = \cos \alpha \leftrightarrow \underline{\alpha + k \cdot 2\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

**tangente**

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \leftrightarrow x = \underline{\alpha + k \cdot \pi}, k \in \mathbb{Z}$$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Sistema Dom Bosco** – Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\text{sen } 2x - \cos 2x = 2 \cdot \text{sen}^2 x$.

$\text{sen } 2x - \cos 2x = 2 \cdot \text{sen}^2 x$
$2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 2 \cdot \text{sen}^2 x$
$-\cos^2 x + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \text{sen}^2 x = 0$
$\cos^2 x - 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen}^2 x = 0$
$(\cos x - \text{sen } x)^2 = 0$
$\cos x - \text{sen } x = 0$
$\cos x = \text{sen } x$
$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

**2. UEM-PR** – Assinale o que for correto.

**01)** $\cos 140° + \cos 100° + \cos 20° = 0$
**02)** $f(x) = 2 \cdot \text{sen } (2x)$ é uma função de período $4\pi$
**04)** $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \text{sen } x - \frac{\sqrt{2}}{2}$
**08)** $\text{sen } 250° < \cos 330° < \text{tg } 30°$.
**16)** A equação $3\cos^2 x - 4\text{sen } x + 1 = 0$ não tem solução real.

02) Falso. $p = \frac{2\pi}{|m|} = \pi$.
04) Falso. $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen } 2x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \text{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cos 2x =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}(2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos^2 x + \text{sen}^2 x) =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}(2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - 1 + \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\text{sen}^2 x + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - 1).$
08) Falso. $\text{sen } 250° = -\cos 20° < 0$
$\cos (330°) = \cos (300 + 30°) = \cos 300°$
$\cos 30° - \text{sen } 300° \text{ sen } 30° = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{(-\sqrt{3})}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
16) Falso $- 3 \cdot (1 - \text{sen}^2 x) - 4 \cdot \text{sen } x + 1 = 0$
$3 - 3 \cdot \text{sen}^2 x - 4 \cdot \text{sen } x + 1 = 0$
$3 \cdot \text{sen}^2 x + 4 \cdot \text{sen } x - 4 = 0$
$\Delta = 16 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 64$
Como $\Delta > 0$, a equação tem solução real.
Soma: 01.

**3. UECE** – Se p e q são duas soluções da equação $2 \cdot \text{sen}^2 x - 3 \cdot \text{sen } x + 1 = 0$ tais que $\text{sen } p \neq \text{sen } q$, então o valor da expressão $\text{sen}^2 p - \cos^2 q$ é igual a

**a)** 0
**b)** 0,25
**c)** 0,50
**d)** 1

$\text{sen } x = y$
$2y^2 - 3y + 1 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$
$y = \frac{3 - 1}{4}$
$y = 0{,}5$ ou $y = 1$
$y = \text{sen } x$
$\text{sen } x = 0{,}5$
$x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$
$\text{sen } x = 1$
$x = \frac{\pi}{2}$
Assim, $\text{sen}^2 p - \cos^2 q$ para $\text{sen } p \neq \text{sen } q$.
$\text{sen}^2 p - 1 + \cos^2 q = (0{,}5)^2 - 1 + 1^2 = 0{,}25 - 1 + 1 = 0{,}25.$

**4. UEM-PR** – Assinale o que for correto.

**01)** Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ temos $\text{sen } x \cdot \cos x > 0$.
**02)** O conjunto solução da equação $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ é $\left\{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{R}\right\}$.
**04)** Se $\cos^2 x = 1$, então $\text{sen } x = 0$.
**08)** A função $f: (0, \pi) \to [-1, 1]$, definida por $f(x) = \text{sen } x$, é bijetora.
**16)** A equação $\text{sen } x = 0{,}9$ tem uma solução para $\pi < x < 2\pi$.

08) Falso. Se $a \neq b$, podemos ter $f(a) = f(b)$; logo, não é injetora. Portanto, não é bijetora.
16) Falso, pois para $\pi < x < 2\pi$, $\text{sen } x < 0$.
Soma: 01 + 02 + 04 = 07

**5. Sistema Dom Bosco** – Encontre a solução da equação $\cos 2x = \cos^2 \frac{x}{2}$ para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

$\cos 2y = 2 \cdot \cos^2 y - 1$

Para $y = \frac{x}{2}$

$\cos x = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2}$

$\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$

$2 \cdot \cos^2 x - 1 = \frac{\cos x + 1}{2}$

$4 \cdot \cos^2 x - 2 = \cos x + 1$

$4 \cdot \cos^2 x - \cos x - 3 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 1 + 48 = 49$

$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm 7}{8}$

$\cos x = -1$ ou $\cos x = \frac{3}{4}$

$x = \pi$ ou $x = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$

$S = \left\{\pi, \arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$.

**6. Acafe** – A área da região que tem como vértices as extremidades dos arcos que verificam a equação sen 2x + sen x = 0 no intervalo de $[0, \pi]$ em unidades de área é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\text{sen } 2x + \text{sen } x = 0$

$2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x = 0$

$\text{sen } x \cdot (2 \cdot \cos x + 1) = 0$

$2 \cdot \cos x = -1$ ou $\text{sen } x = 0$

$\cos x = \frac{-1}{2}$

$x = \frac{2\pi}{3}$

ou

$\text{sen } x = 0$

$x = 0$

A base do triângulo é a distância de 0 até $\pi$:

$b = |\cos 0| + |\cos \pi| = 2$

A altura do triângulo é o seno de $\frac{\sqrt{3}}{2}$: $h = \text{sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A área do triângulo é dada por $A = b \cdot \frac{h}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

## EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

**7. UFSCar-SP** – As coordenadas dos vértices do triângulo ABC num plano cartesiano são A (– 4, 0), B (5, 0) e C (sen θ, cos θ). Sendo θ um arco do primeiro quadrante da circunferência trigonométrica, e sendo a área do triângulo ABC maior que $\frac{9}{4}$, o domínio de validade de θ é o conjunto:

a) $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$

b) $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$

c) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right[$

d) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$

e) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$

**8. AFA** – Sejam as funções reais f, g e h definidas por $f(x) = \frac{\text{sen } x}{\text{cossec } x} + \frac{\cos x}{\sec x}$, $g(x) = |\sec x|$ e $h(x) = |\text{cossec } x|$, nos seus domínios mais amplos contidos no intervalo $[0, 2\pi]$. A(s) quantidade(s) de interseção(ões) dos gráficos de f e g; f e h; g e h é(são), respectivamente

a) 0, 0 e 4

b) 3, 1 e 4

c) 2, 3 e 4

d) 0, 2 e 3

**9. UEM-PR** – Considere a equação trigonométrica $\text{tg}\,x \cdot \text{sen}\,x = \text{sen}\,x$ no intervalo $x \in [0, 2\pi[$. Sobre essa equação, é correto afirmar que

**01)** ela é equivalente à equação $\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \text{sen}\,x$, no intervalo $x \in [0, 2\pi[$.

**02)** ela tem como solução o conjunto $S = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

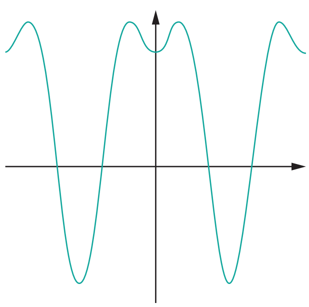
**04)** ela é equivalente à equação $\text{sen}\,x \cdot (\text{tg}\,x - 1) = 0$ no intervalo $x \in [0, 2\pi[$.

**08)** ela é equivalente à equação $\text{sen}^2 x = \text{sen}\,x \cdot \cos x$ no intervalo $x \in [0, 2\pi[$.

**16)** ela é equivalente à equação $\text{tg}\,x = 1$ no intervalo $x \in [0, 2\pi[$.

**10. UFPE** – Quantas soluções a equação trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos x = \frac{5}{4}$ admite no intervalo $[0, 60\pi]$?

Parte do gráfico da função $\text{sen}^2 x + \cos x$ está esboçada a seguir.



**11. UEM-PR** – Considerando a tabela abaixo (com os valores do seno e do cosseno de alguns ângulos x medidos em radianos), as identidades trigonométricas dadas pelas fórmulas apresentadas abaixo e os conhecimentos de trigonometria, assinale o que for correto.

Tabela com senos e cossenos

| x | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|
| cos x | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| sen x | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

Identidades trigonométricas $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$sen $(x + y) = \text{sen}\,x \cdot \cos y + \text{sen}\,y \cdot \cos x$ $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y$

**01)** $\cos 2x = \frac{\cos^2(x) - 1}{2}$.

**02)** $\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) < \frac{1}{2}$.

**04)** $\cos(x + \pi) + \cos x = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

**08)** $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos x = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

**16)** $\text{sen}(3x) = (4 \cdot \cos^2(x) - 1) \cdot \text{sen}(x)$.

**12. UEM-PR** – Sobre trigonometria, assinale o que for correto.

**01)** Se um mastro de navio está preso no seu topo, por um cabo de 10 m de comprimento, ao convés, a uma distância de 5 m, então o ângulo do cabo com o convés é de 60°.

**02)** $(1 + \text{tg}(x))(1 - \text{tg}(x)) = (\sqrt{2} - \sec(x))(\sqrt{2} + \sec(x))$, para todo x nos domínios das funções.

**04)** A função $f(x) = 3 \cdot \text{sen}^2 x + 2 \cdot \cos^2 x$ é crescente no Intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

**08)** A solução da equação $3 \cdot \cos^2(2x) \cdot \text{sen}(2x) + 3 \cdot \text{sen}^3(2x) = 3$ é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

**16)** Em uma pequena cidade, há um aeroporto com uma pista de 1 km, ao final da qual há um prédio de 30 m de altura. Um monomotor precisa de 650 m para ganhar velocidade a fim de decolar, e a altura de segurança entre o avião e o prédio é de no mínimo 220 m. Assim, se o monomotor decolar a um ângulo de 30°, ele estará seguro.

**13. AFA** – Considere a função real sobrejetora $f: A \to B$ definida por $f(x) = \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$. Sobre f é FALSO afirmar que

**a)** O conjunto A é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
**b)** f é par.
**c)** f é injetora.
**d)** $B = \{2\}$.

**14. Uniube-MG** – Medindo-se t em horas e $0 \leqslant t < 24$, a sirene de uma usina está programada para soar em cada instante t, em que $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ é um número inteiro. De quantas em quantas horas a sirene da fábrica soa?

**15. ITA** – Um triângulo retângulo tem perímetro igual a $l\sqrt{5}$, em que l é o comprimento da hipotenusa. Se $\alpha$ e $\beta$ são seus ângulos agudos, com $\alpha < \beta$, então $\text{sen}(\beta - \alpha)$ é igual a

**a)** $5 - 2\sqrt{5}$.
**b)** $-6 + 3\sqrt{5}$.
**c)** $\sqrt{16\sqrt{5} - 35}$.
**d)** $\sqrt{20\sqrt{5} - 44}$.
**e)** $\sqrt{18\sqrt{5} - 40}$.

**16. ITA** – Sejam a um número real e n o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8 x - \text{sen}^8 x + 4\,\text{sen}^6 x = a$. Das afirmações:

**IV.** Se $a = 0$, então $n = 0$;

**V.** Se $a = \frac{1}{2}$, então $n = 8$;

**VI.** Se $a = 1$, então $n = 7$;

**VII.** Se $a = 3$, então $n = 2$.

é (são) verdadeira(s)

**a)** apenas I.
**b)** apenas III.
**c)** apenas I e III.
**d)** apenas II e IV.
**e)** todas.

**17. Ufes** – Determine todos os valores de $\theta$ para os quais

$$\text{sen}^3\theta \cdot \cos\theta - \text{sen}\,\theta \cdot \cos^3\theta = \frac{1}{4}.$$

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. AFA (adaptado)** C5-H21

Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo $f(x) = 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{4}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ em que $y = f(x)$ é a altura da onda, em metros, e x o tempo, em minutos. Dentre as alternativas que seguem, assinale a única cuja conclusão NÃO condiz com o modelo proposto.

**a)** A altura de uma onda nunca atinge 2 metros.
**b)** Entre o momento de detecção de uma crista (altura máxima de uma onda) e o de outra seguinte, passam-se 2 minutos.
**c)** De zero a 4 minutos, podem ser observadas mais de duas cristas.
**d)** As alturas das ondas observadas com 30, 90, 150, … segundos são sempre iguais.
**e)** A cada 2 minutos, podem ser observadas ondas menores que 2 metros.

**19. Unifor-CE** C5-H22

Os tsunamis são ondas de grande comprimento geradas por deformações bruscas no fundo do mar. Considere que uma equação simplificada desse fenômeno pode ser expressa por $f(t) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{t\pi}{4}\right)$, em que f(t) é altura da onda, em metros, e t é o tempo, em minutos, $t \geq 0$. O nível do mar, em repouso, é tomado como referencial inicial de altura. Ao se aproximar da costa, o período diminui, enquanto sua amplitude aumenta. Qual das alternativas abaixo melhor representa a função do tsunami quando da sua aproximação da costa?

**a)** $f(t) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{t\pi}{6}\right)$

**b)** $f(t) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{t\pi}{12}\right)$

**c)** $f(t) = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{t\pi}{3}\right)$

**d)** $f(t) = 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{t\pi}{2}\right)$

**e)** $f(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{t\pi}{8}\right)$

**20. Unesp** C5-H21

Uma equipe de agrônomos coletou dados da temperatura (em °C) do solo em determinada região, durante três dias, a intervalos de 1 hora. A medição da temperatura começou a ser feita às três horas da manhã do primeiro dia (t = 0) e terminou 72 horas depois (t = 72). Os dados puderam ser aproximados pela função $H(t) = 15 + 5 \cdot \operatorname{sen}$, em que t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da observação e H(t) a temperatura (em °C) no instante t.

Nesse caso, qual é o valor da equação $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) = 1$, para $t \in [0,24]$?

**a)** 6

**b)** 12

**c)** 18

**d)** 24

**e)** 36

# 16 INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

- Inequações trigonométricas

**HABILIDADES**

- Resolver inequações aplicando funções trigonométricas e estudo de seus sinais.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

## Inequações trigonométricas

As inequações trigonométricas assemelham-se, em sua apresentação, às equações trigonométricas: envolvem a incógnita em razões como **seno**, **cosseno** e **tangente** ou em outras razões que podem ser expressas em função daquelas.

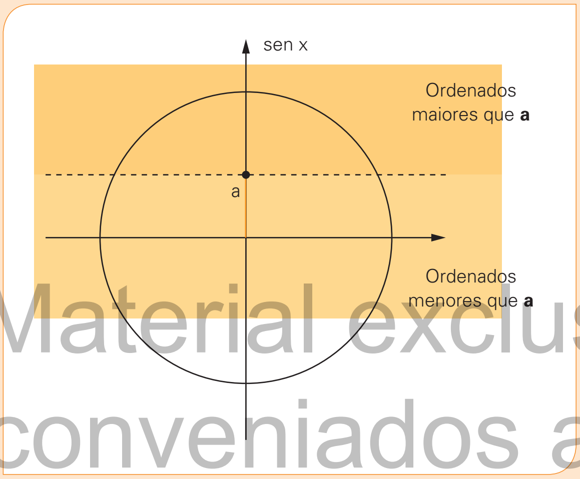
O que distingue inequações de equações é a presença de desigualdades ($\leqslant$, $<$, $>$ ou $\geqslant$) no estabelecimento das relações.

ALVOV/SHUTTERSTOCK

No iatismo, os atletas têm sempre de ajustar as velas de acordo com o vento, mantendo-as próximas de um ângulo ideal para obter o melhor desempenho da embarcação.

### INEQUAÇÕES DO TIPO sen x < a ou sen x > a

Pelo valor **a**, no eixo das ordenadas (ou dos senos), pertencente ao intervalo $[-1, 1]$, traçamos uma reta paralela ao eixo das abscissas. Observe a figura.

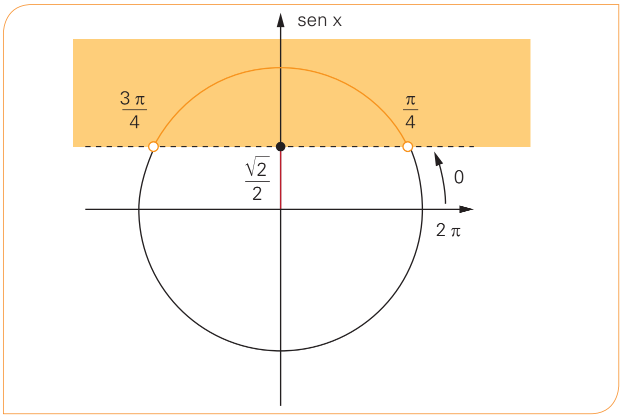



Após isso, destacamos os pontos da circunferência cujas ordenadas são maiores (ou menores, dependendo da inequação fornecida) que **a**. A resposta é dada pelo(s) intervalo(s) de arcos definidos na circunferência, lido(s) no sentido anti-horário a partir da origem dos arcos.

**Exemplo**:

Defina o conjunto solução para sen $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, com $0 \leqslant x < 2\pi$.

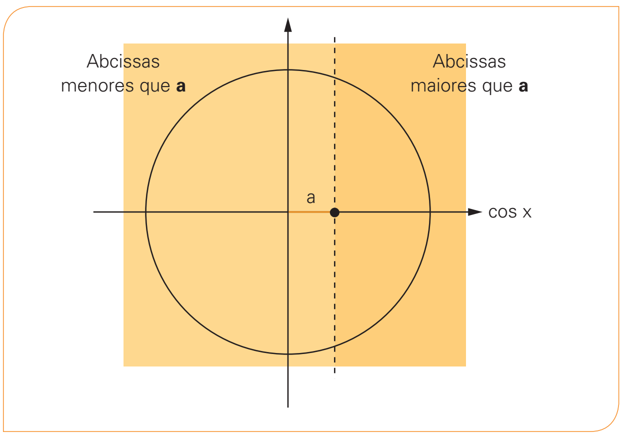
Para sen $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, com $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:




A solução do conjunto é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$.

## INEQUAÇÕES DO TIPO cos x < a ou cos x > a

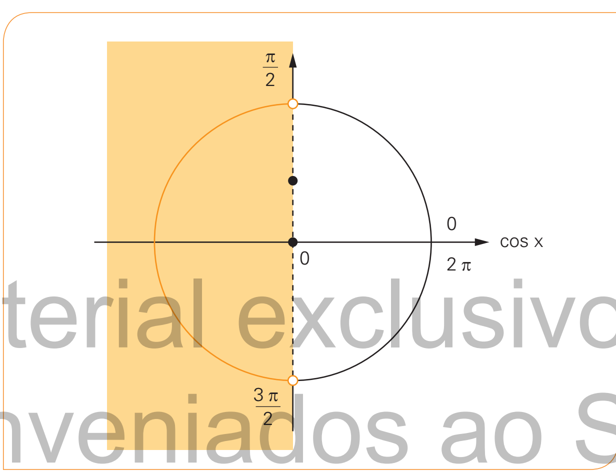
No eixo das abscissas (ou dos cossenos), localizamos o valor **a** e por ele traçamos uma reta paralela ao eixo das ordenadas, conforme a figura a seguir.




Em seguida, destacamos os pontos da circunferência cujas abscissas são maiores (ou menores) que **a**. No sentido anti-horário, a partir da origem dos arcos, anotamos o(s) intervalo(s) que compreende(m) os pontos da circunferência que confirmem a resposta.

**Exemplo**:

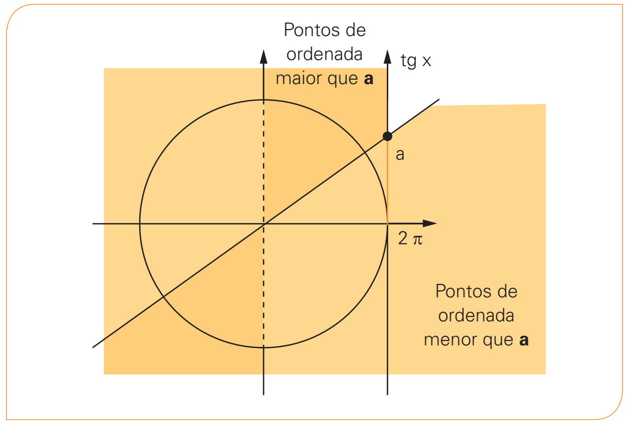
Para $0 \leq x < 2\pi$, resolva a inequação $\cos x < 0$.




A solução do conjunto é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$.

## INEQUAÇÕES DO TIPO tg x < a ou tg x > a

Identificamos, no eixo das tangentes, o ponto de ordenada **a**, conforme a figura.

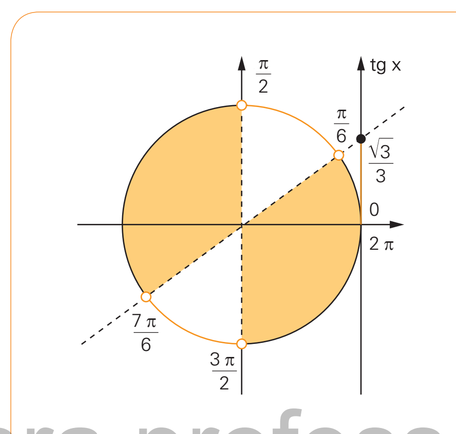



Em seguida, traçamos a reta que passa por esse ponto e pelo centro da circunferência trigonométrica, identificando, na circunferência, a região cujos pontos, ligados ao centro, determinam retas que interceptam o eixo das tangentes em valores maiores (ou menores) que **a**.

**Importante:** anotamos o(s) intervalo(s) que forma(m) a resposta sempre no sentido anti-horário, a partir da origem dos arcos.

**Exemplo**:

Para $0 \leq x < 2\pi$, resolva $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.



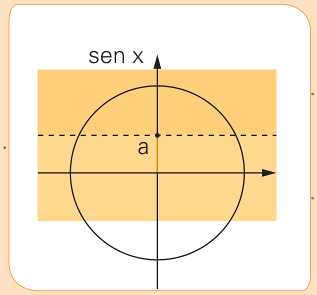

A solução do conjunto é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$$

# ROTEIRO DE AULA

## INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

sen x < a ou
sen x > a



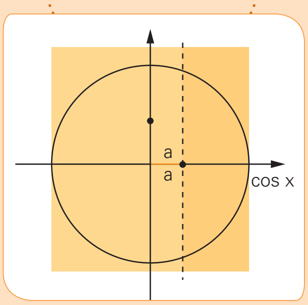

Ordenados maiores que **a**.

Ordenados menores que **a**.

cos x < a ou
cos x > a

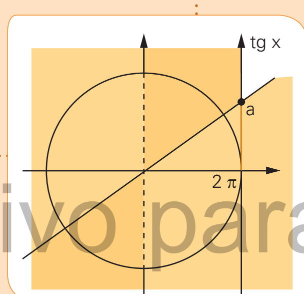
Abcissas maiores que **a**.

Abcissas menores que **a**.




tg x < a ou
tg x > a

Pontos de ordenada maior que **a**.

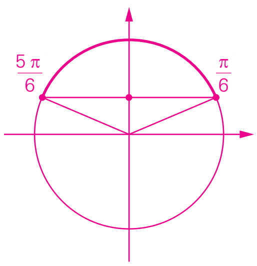



Pontos de ordenada menor que **a**.

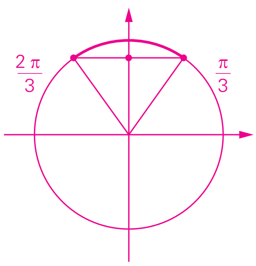
## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

**1. Sistema Dom Bosco** – Calcule a solução da inequação $\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ em $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

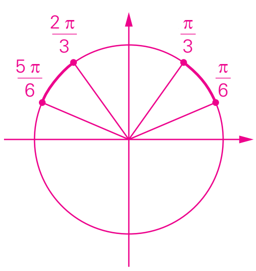
Temos que $\operatorname{sen} x \geq \frac{1}{2}$ quando $x \geq \frac{\pi}{6}$ e $x \leq \frac{5\pi}{6}$.




Além disso, $\operatorname{sen} x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ quando $x \leq \frac{\pi}{3}$ e $x \geq \frac{2\pi}{3}$.




Portanto, $S = \left\{x \in \;|\; \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ e } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\right\}$.




**2. Sistema Dom Bosco** – Sabendo que $\operatorname{tg} \theta \leqslant x$ e que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, então o valor de $\operatorname{sen} \theta$ está no intervalo

**a)** $[0,1]$

**b)** $[-1,1]$

**c)** $\left[x, \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

**d)** $\left[0, \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

**e)** $\left[0, \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \leq x$

$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} \leq x^2$

$\operatorname{sen}^2\theta \leq x^2 \cdot \cos^2\theta = x^2 \cdot (1 - \operatorname{sen}^2\theta)$

$\operatorname{sen}^2\theta \leq x^2 - x^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta$

$(1+x^2) \cdot \operatorname{sen}^2\theta \leq x^2$

$\operatorname{sen}^2\theta \leq \frac{x^2}{(1+x^2)}$

$\operatorname{sen} \theta \leq \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Como $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, então $\operatorname{sen} \theta \geq 0$.

Logo, $0 \leq \operatorname{sen} \theta \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

**3. Sistema Dom Bosco** – Se $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, então $\cos x < \frac{1}{2}$ se, e somente se, x satisfizer a condição

**a)** $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

**b)** $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$

**c)** $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

**d)** $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}$

**e)** $0 \leq x < \pi$ ou $\frac{\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$

Temos que $\cos x < \frac{1}{2} \rightarrow x < \frac{\pi}{3}$ e $x > \frac{5\pi}{3}$, ou seja, $x\left(\frac{\pi}{3} \text{ e } x\right)\frac{-\pi}{3}$.

**4. Sistema Dom Bosco** – A solução da inequação trigonométrica tg x ⩾ 1, no intervalo [0,2 π], é:

**a)** $\left(x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{2}\right)$

**b)** $\left(x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{2}\right)$

**c)** $\left(x \in \mathbb{R} \mid x \ge \frac{\pi}{4} \text{ ou } x \ge \frac{5\pi}{4}\right)$

**d)** $\left(x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{2}\right)$

**e)** $\left(x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{2}\right)$

$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \ge 1 \rightarrow \text{sen } x \ge \cos x$

$\text{sen}^2 x \geqslant \cos^2 x$

$\text{sen}^2 x \geqslant 1 - \text{sen}^2 x$

$\text{sen}^2 x \ge \frac{1}{2}$

$\frac{-\sqrt{2}}{2} \le \text{sen } x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

A tangente do ângulo **x** é positiva nos quadrantes 1 e 3.

Logo, para que $\text{sen } x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos $\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2}$.

Para que $\text{sen } x \ge \frac{-\sqrt{2}}{2}$, temos $\frac{5\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{2}$.

Portanto, $x \in \mathbb{R}\left(\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{2}\right)$.

**5. Sistema Dom Bosco** – Encontre o conjunto solução da equação sec ⩽ $\sqrt{2}$, dado que $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

$\sec x \le \sqrt{2}$

$\frac{1}{\cos x} \le \sqrt{2}$

$\cos x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x \ge \frac{\pi}{4}$ e

Como $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, temos que $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

**6. IFSC** – Se $\cos x = \frac{-12}{13}$, $-\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e x ∈ 3º quadrante, então é correto afirmar que o valor de tg (x) é

**a)** $\frac{-5}{13}$

**b)** $\frac{-5}{12}$

**c)** $\frac{5}{13}$

**d)** $\frac{5}{12}$

**e)** 0,334

Se $\cos x = \frac{-12}{13}$, então $\text{sen}^2 x = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$.

$\text{sen } x = \frac{-5}{13}$, pois pertence ao 3° quadrante. Logo:

$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**7. Unimontes-MG** – Se $x \in [-\pi, \pi] - \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, então a tangente de x, tg x, é positiva

**a)** Nos intervalos $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ e $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

**b)** somente no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

**c)** somente no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

**d)** nos intervalos $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ e $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

**8. FGV-SP** – Resolvendo-se a inequação 2 cos x $\leqslant$ 1 no intervalo [0, 2π], obtém-se:

**a)** $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$

**b)** $x \geq \frac{\pi}{3}$

**c)** $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$

**d)** $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$

**e)** $x \leqslant \frac{1}{2}$

**9. Sistema Dom Bosco** – Encontre o conjunto solução da inequação $\frac{1}{4} \leq \cos x \cdot \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{4}$, onde $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

**10. FGV-SP** – A solução da inequação $\sqrt{2} \cdot \cos^2 x > \cos x$, no intervalo [0, π], é:

**a)** $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$

**b)** $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leq x < \pi$

**c)** $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$

**d)** $\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$

**11. Mackenzie** – Em $\mathbb{R}$ o domínio da função f, definida por

$f(x) = \sqrt{\left(\dfrac{\text{sen } 2x}{\text{sen } x}\right)}$, é

**a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

**b)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

**c)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

**d)** $\left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \dfrac{3\pi}{2} + \\ + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$

**e)** $\left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x \leq 2 + 2k\pi \vee \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x < 2\pi + \\ +2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$

**12. UEM-PR** – Com base nos conhecimentos de trigonometria, assinale o que for correto.

**01)** Para todo x pertencente ao intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, sen x > cos x.

**02)** Não existe solução para a equação sen x = sen $\dfrac{x}{2}$ no intervalo [0, 3].

**04)** Para todo x real, sen x = cos $\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

**08)** Existe $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ satisfazendo a desigualdade x < sen x.

**16)** Para todo x real, $-\dfrac{1}{2} \leq (\text{sen } x)(\cos x) \leq \dfrac{1}{2}$.

**13. Ufla-MG** – Os valores de x com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ que satisfazem à desigualdade $\left(\text{sen } x - \dfrac{1}{2}\right)(\text{sen } x - 2) \leq 0$ são

**a)** $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

**b)** $\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

**c)** $\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{6}$

**d)** $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{6\pi}{4}$

**e)** $\pi \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}$

**14. Fuvest**

**a)** Expresse sen 3α em função de sen α.

**b)** Resolva a inequação sen 3α > 2 sen α para 0 < α < π.

**15. Cefet-MG** – A solução da inequação

$$0 < \frac{2 \cdot \text{sen}^2 x + \text{sen } 2x}{1 + \text{tg } x} < 1 \text{ para } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ é o conjunto}$$

**a)** $\left[0; \frac{\pi}{4}\right[$

**b)** $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$

**c)** $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

**d)** $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

**e)** $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$

**16. Unesp** – O conjunto solução (S) para a inequação $2 \cdot \cos^2 x + \cos(2x) > 2$, em que $0 < x < \pi$, é dado por

**a)** $S = \left\{x \in (0, \pi) \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$

**b)** $S = \left\{x \in (0, \pi) \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\right\}$

**c)** $S = \left\{x \in (0, \pi) \mid 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \pi\right\}$

**d)** $S = \left\{x \in (0, \pi) \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

**e)** $S = \{x \in (0, \pi)\}$

**17. Unicamp** – Considere dois triângulos retângulos, $T_1$ e $T_2$, cada um deles com sua hipotenusa medindo 1 cm. Seja $\alpha$ a medida de um dos ângulos agudos de $T_1$ e $2\alpha$ a medida de um dos ângulos agudos de $T_2$.

**a)** Calcule a área de $T_2$ para $\alpha = 22,5°$.

**b)** Para que valores de $\alpha$ a área de $T_1$ é menor que a área de $T_2$?

## ESTUDO PARA O ENEM

**18. Unioeste-PR** C5-H21

Em uma área de proteção ambiental existe uma população de coelhos. Com o aumento natural da quantidade de coelhos, há muita oferta de alimento para os predadores. Os predadores com a oferta de alimento também aumentam seu número e abatem mais coelhos. O número de coelhos volta então a cair. Forma-se assim um ciclo de oscilação do número de coelhos nesta reserva. Considerando-se que a população p(t) de coelhos fica bem modelada por $p(t) = 1000 - 250 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{360}\right)$, sendo $t \geqslant 0$ a quantidade de dias decorridos, e o argumento da função seno é medido em radianos, pode-se afirmar que

**a)** a população de coelhos é sempre menor ou igual a 1 000 indivíduos.
**b)** em quatro anos a população de coelhos estará extinta.
**c)** a população de coelhos dobrará em 3 anos.
**d)** a quantidade de coelhos só volta a ser de 1 000 indivíduos depois de 360 dias.
**e)** a população de coelhos atinge seu máximo em 1 250 indivíduos.

**19. UNB (adaptado)** C5-H22

Em região próxima ao equador de Marte, a temperatura média é a mais alta desse planeta. Por alguns dias, o robô Opportunity registrou a temperatura nessa área e, com base nas medidas feitas, foi possível estabelecer um modelo simplificado da temperatura, T(t), em graus Celsius, em função do tempo t, em horas, dado pela expressão a seguir, em que o instante t = 0 marca o nascer de um novo dia em Marte.

$$T(t) = 50 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi t}{37}\right) - 30$$

A respeito dos registros realizados pelo robô Opportunity em Marte, é correto afirmar que

**a)** a temperatura máxima é atingida duas vezes a cada dia.
**b)** a temperatura média diária é igual a 50 °C.
**c)** a diferença entre a maior temperatura e a menor temperatura registradas é igual a 80 °C.
**d)** a temperatura não atinge seu valor máximo no instante t = 12 h.
**e)** a temperatura média ocorre no instante t = 12 h.

**20. UEFS-BA (adaptado)** C5-H22


SERAFICUS/ISTOCKPHOTO

As telhas onduladas de amianto, bastante populares, vêm tendo seu uso proibido em diversos municípios brasileiros, por ser um material cancerígeno e por também poder causar doenças respiratórias. Para substituí-las, podem ser usadas as chamadas ecotelhas – telhas onduladas produzidas a partir da reciclagem de material plástico, como, por exemplo, aparas de tubos de creme dental. As ecotelhas têm elevada resistência mecânica, bem como à ação dos raios ultravioleta e infravermelho, além de serem econômicas, são 100% impermeáveis. Supondo-se que a curva representativa de uma secção transversal de uma telha ondulada, como a da figura, seja definida por parte da função real $f(x) = 1 - 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{3}\right)$, é correto afirmar que o conjunto-imagem e o período de f(x) são, respectivamente,

**a)** [–1, 3] e $4\pi$.
**b)** [–3, 1] e $4\pi$.
**c)** [–1, 3] e $3\pi$.
**d)** [–1, 1] e $2\pi$.
**e)** [–3, 3] e $2\pi$.

## EXERCÍCIOS INTERDISCIPLINARES

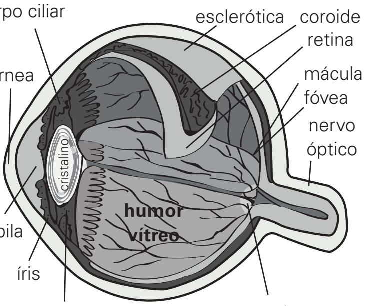
### 21. UNB (adaptado)

A figura acima ilustra um brinquedo de base arredondada denominado joão-bobo. Por mais que o inclinem, ele tende a retornar à sua posição de equilíbrio, permanecendo de pé. Considere que um joão-bobo, ao ser inclinado, execute movimentos oscilatórios de pequenas amplitudes. Considere, ainda, que, para descrever o deslocamento horizontal, em centímetros, da cabeça do joão-bobo durante os movimentos oscilatórios, foram propostos dois modelos distintos, conforme expressões a seguir, em que f e g expressam o deslocamento horizontal do ponto A posicionado no topo da cabeça do brinquedo e o tempo $t \geq 0$ é medido em segundos. Considere, por fim, que, no que se refere a esses modelos, o ponto A realize movimento apenas no plano e que o brinquedo está na posição de equilíbrio quando a posição escalar horizontal do ponto A é nula. Primeiro modelo: $f(t) = 20 \cos [\pi (t + 1)]$ cm

Segundo modelo: $g(t) = 20^{2-t} t \cos [\pi (t + 1)]$ cm

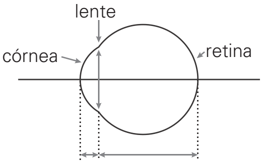
Se, para algum instante $t_0$, tem-se $f(t_0) = g(t_0)$, então o joão-bobo estará na posição de equilíbrio em tal instante.

### 22. Fac. Albert Einstein (adaptado)




O **olho humano**, responsável pela visão, pode distinguir cerca de 10 milhões de cores e é capaz de detectar um único fóton.

É um sistema óptico complexo, formado por vários meios transparentes, além de um sistema fisiológico com inúmeros componentes; e todo o conjunto é chamado GLOBO OCULAR. Pela complexidade de se traçar os trajetos dos raios luminosos através desses diferentes meios, convencionou-se representar todos eles por uma única lente convergente biconvexa (o cristalino), de distância focal variável. E essa representação é chamada de olho reduzido.




**olho reduzido**
No olho reduzido, a lente que fica na posição do cristalino,deve conjugar imagens reais exatamente sobre a retina para que possa ver com nitidez.

http://www.sofisica.com.br/conteudos/Otica/Instrumentosoticos/olhohumno.php

Chama-se Óptica da Visão o estudo das trajetórias dos raios luminosos, através do globo ocular, até a formação de imagens no cérebro. As pessoas que têm visão considerada normal, **emetropes**, têm a capacidade de conjugar imagens nítidas para objetos situados em média a 25 cm da lente (**ponto próximo**), por convenção, até distâncias no infinito visual (**ponto remoto**).

O cristalino é uma lente transparente e flexível, localizada atrás da pupila. Sua distância focal pode ser ajustada para focar objetos em diferentes distâncias, num mecanismo chamado **acomodação**.

A íris (na figura acima) é a área verde/cinza/marrom (castanha), medindo cerca de 12 mm de diâmetro. As outras estruturas visíveis são a pupila (círculo preto no centro) e a esclera (parte branca do olho) ao redor da íris. A córnea está presente, mas não é possível


VIC0429/ISTOCKPHOTO

vê-la na foto, por ser transparente. Teoricamente, poderíamos pensar no centro da pupila como sendo o centro da íris.

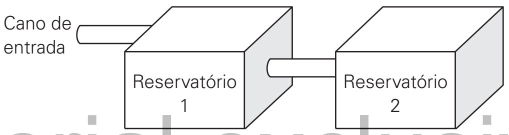
A pupila é um espaço vazio em forma circular, normalmente preto, definido pela margem interior da íris. Mede de 1,5 mm de diâmetro com muita luz até 8 mm de diâmetro com pouca luz. Sua função é controlar a passagem de luz que chega até a retina. Quando o olho é exposto a níveis de iluminação muito elevados, a pupila se contrai (na verdade, a íris dilata), efeito chamado de Pupillary Reflex.

**a)** Admita a íris da figura recebendo **pouca luz**. Qual a área da região colorida? (adote $\pi \cong 3,1$)

**b)** Chamamos de **amplitude de acomodação visual** a variação da vergência do cristalino de um olho, funcionando como uma lente, capaz de conjugar imagens nítidas para um objeto situado em seu ponto próximo e no seu ponto remoto. Determine, em metros, a distância do ponto próximo para uma pessoa que possua o ponto remoto normal e cuja amplitude de acomodação visual seja de 2,5 di.

**23. Enem** C6-H24

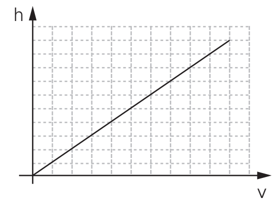
A água para o abastecimento de um prédio é armazenada em um sistema formado por dois reservatórios idênticos, em formato de bloco retangular, ligados entre si por um cano igual ao cano de entrada conforme ilustra a figura.



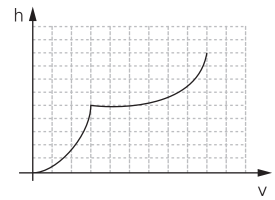

A água entra no sistema pelo cano de entrada do Reservatório 1 a uma vazão constante e, ao atingir o nível do cano de ligação, passa a abastecer o Reservatório 2. Suponha que, inicialmente, os dois reservatórios estejam vazios.

Qual dos gráficos melhor descreverá a altura h do nível da água no Reservatório 1, em função do volume V de água no sistema?

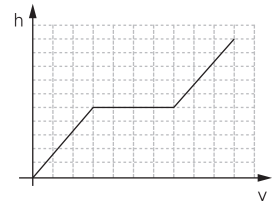
**a)**



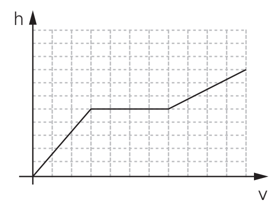

**b)**



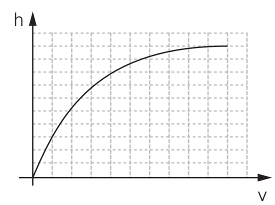

**c)**




**d)**



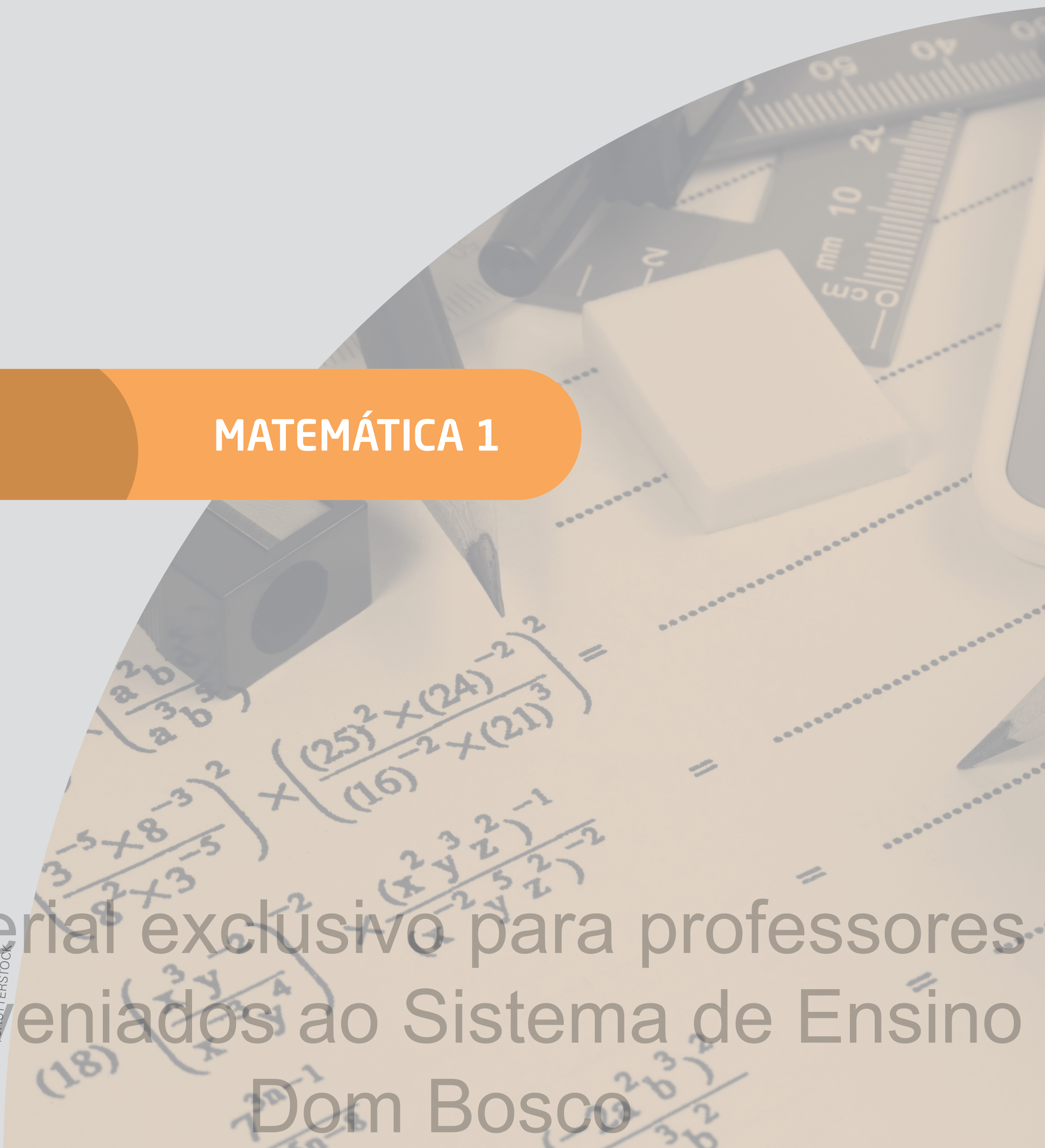

**e)**



MATERIAL DO PROFESSOR

# RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

## MATEMÁTICA 1



WITTAYAYUT/SHUTTERSTOCK

## APRESENTAÇÃO

A disciplina de Matemática é uma ciência de características específicas, que se organiza por **meio de definições**, **teoremas** e **demonstrações**. Os alunos do ensino pré-vestibular devem demonstrar teoremas, justificar definições e, principalmente, usar a Matemática para **resolver problemas do cotidiano** e compreender fenômenos de outras áreas do conhecimento. Para tanto, precisam valorizar o raciocínio matemático, nos aspectos de formular questões, indagar a existência de solução, estabelecer hipóteses e conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos e argumentar de maneira lógico-dedutiva.

Esse material respalda-se na qualidade dos conhecimentos e na prática de sala de aula, abrangendo as áreas de conhecimento do Ensino Médio, cujos conteúdos conceituais são exigidos nos principais vestibulares do Brasil e no novo Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), e contempla uma **ampla coletânea de questões** extraídas de tais provas, com respectivos gabaritos e resoluções comentadas.

Por critério de organização didática, os conteúdos conceituais estão separados da sequência de exercícios e distribuídos para atender à demanda das diversas formatações de cursos, considerando as prioridades dos principais vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Com base nisso, o material didático produzido para essa etapa de ensino contempla e destaca inúmeras competências da nova Matriz de Referências para o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e, consequentemente, habilidades a elas relacionadas.

## CONTEÚDO

### MATEMÁTICA 1

| Volume | Módulo | Conteúdo |
|---|---|---|
| 2 | 17 | Função composta I |
| | 18 | Função composta II |
| | 19 | Função Modular I |
| | 20 | Função Modular II |
| | 21 | Equações modulares |
| | 22 | Inequações modulares |
| | 23 | Equações exponenciais |
| | 24 | Funções exponenciais |
| | 25 | Tipos de função |
| | 26 | Função inversa |
| | 27 | Logaritmos I |
| | 28 | Logaritmos II |
| | 29 | Equações logarítmicas I |
| | 30 | Equações logarítmicas II |
| | 31 | Função logarítmica |
| | 32 | Inequação logarítmica |

## MATEMÁTICA 2

| Volume | Módulo | Conteúdo |
|---|---|---|
| 2 | 17 | Relações métricas no triângulo retângulo I |
| | 18 | Relações métricas no triângulo retângulo II |
| | 19 | Áreas de figuras planas |
| | 20 | Áreas de figuras planas – Paralelogramos |
| | 21 | Áreas de figuras planas – Triângulos I |
| | 22 | Áreas de figuras planas – Triângulos II |
| | 23 | Áreas de figuras planas – Trapézios e losangos |
| | 24 | Áreas de figuras planas – Círculos I |
| | 25 | Áreas de figuras planas – Círculos II |
| | 26 | Áreas de figuras planas – Polígonos irregulares |
| | 27 | Áreas de figuras planas – Polígonos regulares |
| | 28 | Áreas de figuras curvilíneas I |
| | 29 | Áreas de figuras curvilíneas II |
| | 30 | Áreas de figuras especiais |
| | 31 | Relações métricas na circunferência I |
| | 32 | Relações métricas na circunferência II |

## MATEMÁTICA 3

| Volume | Módulo | Conteúdo |
|---|---|---|
| 2 | 9 | Identidades trigonométricas I |
| | 10 | Identidades trigonométricas II |
| | 11 | Funções trigonométricas |
| | 12 | Funções trigonométricas inversas |
| | 13 | Transformações trigonométricas I |
| | 14 | Transformações trigonométricas I |
| | 15 | Equações trigonométricas |
| | 16 | Inequações trigonométricas |

## 17 FUNÇÃO COMPOSTA I

### Comentários sobre o módulo

Neste módulo, abordamos as funções compostas e sua aplicação para resolver situações-problema. Uma delas serve de mote para a apresentação do conteúdo, pois possibilita aos alunos identificarem a necessidade de ferramentas matemáticas mais sofisticadas a fim de resolvê-las.

A série de exercícios difere em grau de complexidade e foram escolhidos dentro de um contexto e conforme as habilidades da matriz de referência do Enem. Os exercícios de aprofundamento são considerados mais difíceis.

### Exercícios propostos

**7.** A

Observando os pontos de $x = 0$ e $x = 2$, temos que $f(2) = 0$ e $g(0) = -2$. Logo, $g(f(2)) = g(0) = -2$ e $f(g(0)) = f(-2) = 0$. Portanto, $g(f(2)) + f(g(0)) = -2 + 0 = -2$.

**8.** D

Temos que no ponto $x = 1$.

Então, $g(1) = 0$ e $f(1) = -1$.

Assim, $f(g(1)) - g(f(1)) = f(0) - g(-1) = 1 - 0 = 1$.

**9.** Soma: 01 + 02 = 03

01) $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Verdadeiro, pois $f(x) = 3^{-x} = \dfrac{1}{3^x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

02) $g\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$.

Verdadeiro, pois $g\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left|\dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{4}\right| = \left|\dfrac{6-9}{4}\right| = \left|\dfrac{-3}{4}\right| = \dfrac{3}{4}$.

04) f é sobrejetora.

Falso, pois, para todo $b \in Im(f(x))$, não existe **a** no domínio de **f** em que $f(a) = b$. Logo, **f** não é sobrejetora.

08) $g(f(0)) = f(g(0))$.

Falso, pois $g(f(0)) = g(3^0) = g(1) = |1 - 1| = 0$.

Então, $f(g(0)) = f(|0 - 0|) = f(0) = 1$, logo $g(f(0)) \neq f(g(0))$.

16) O gráfico da função **g** é uma parábola.

Falso, pois, como o gráfico de $x - x^2$ tem o vértice menor do que zero, na função modular a parte do gráfico negativo é refletida no eixo das abscissas, sem formar uma parábola.

**10.** $f(g(x)) = 3^{x^3} = (3^x)^3 = g(f(x))$

$3^{x^3} = 3^{3x} \leftrightarrow x^3 = 3x \rightarrow x \cdot (x^2 - 3) = 0$

$x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

Portanto, há 3 soluções para a equação.

**11.** Soma: 01 + 02 + 04 = 07

01) A função g é injetora.

Verdadeiro, pois para todo $a \neq b$, temos que $g(a) \neq g(b)$. Logo, **g** é injetora.

02) Para todo x real, $(g \circ f)(x) \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

Verdadeiro, pois o valor mínimo de $(g \circ f)(x)$ é dado quando $f(x)$ for mínimo.

Logo, $f(x_v) = \dfrac{-[1^2 - 4 \cdot (-1)]}{4} = \dfrac{-5}{4}$.

Portanto, o valor mínimo de $(g \circ f)(x)$ será $g(f(x_v)) = 2^{-\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

Assim $(g \circ f)(x) \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

04) $(f \circ g)(x) = 2^{2x} + 2^x - 1$, para todo x real. Verdadeiro, pois $f(g(x)) = (2^x)^2 + 2^x - 1 = 2^{2x} + 2^x - 1$.

08) $f(-1) = -3$.

Falso, pois $f(-1) = 1 - 1 - 1 = -1$.

16) $g(-2) = -4$.

Falso, pois $g(-2) = 4 - 2 - 1 = 1$.

**12.** C

O gráfico da função **g**, dada por $g(x) = f(x - 3)$, corresponde ao gráfico de **y** deslocado três unidades para a direita no eixo das abscissas. O gráfico da função **h**, dada por $h(x) = 3g(x)$, corresponde ao gráfico de **g** distorcido verticalmente por um fator igual a 3. Logo, a combinação dos gráficos da função **g** e **h** geram a imagem da alternativa C.

**13.** Soma: 01 + 02 = 03

01) $g \circ f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 4x + 6}$.

Verdadeiro, pois $g(f(x)) = \dfrac{(x - 2) - 2}{(x - 2)^2 + 2} = \dfrac{x - 4}{x^2 - 4x + 4 + 2} = \dfrac{x - 4}{x^2 - 4x + 6}$.

02) Existe x real para o qual $(f + h)(x) = 0$.

Verdadeiro, pois $(f + h)(x) = f(x) + h(x) = x - 2 + \sqrt{2x^2 + 4} = 0$.

Logo:

$\sqrt{2x^2 + 4} = 2 - x$

$2x^2 + 4 = 4 - 2x + x^2$

$x^2 + 2x = 0$

$x(x + 2) = 0$

Ou seja, existe x real para o qual $(f + h)(x) = 0$.

04) Para todo x real, $fg(x) = 1$. Falso, pois $fg(x) = f(x)g(x) = (x - 2)\dfrac{x - 2}{x^2 + 2} = \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 + 2} \neq 1$.

08) Para todo x real, $gh(x) = (x - 2)\sqrt{2}$

Falso, pois $gh(x) = g(x)h(x) = \dfrac{x-2}{x^2+2}\sqrt{2x^2+4} =$

$= \sqrt{2}\left(\dfrac{x-2}{x^2+2}\right)\left(\sqrt{x^2+2}\right) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}\sqrt{2}.$

16) A função **h** tem inversa.

Falso, pois uma função é inversa se, e somente se, for bijetora (injetora e sobrejetora).

Como **h(x)** não é bijetora, **h** não tem inversa.

**14.** a) Temos que $f(x) \cdot g(x) = (ax + 3a) \cdot (9 - 2x) > 0$. Então:

| | $-3$ | | $\frac{9}{2}$ |
|---|---|---|---|
| f(x) | − | + | + |
| g(x) | + | + | − |
| f(x)g(x) | + | − | − |

Assim, $f(x)g(x) > 0$ se, e somente se, $-3 < x < \dfrac{9}{2}$.

Logo, as soluções inteiras da inequação são −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, totalizando 7 soluções.

b) $f(g(x)) = a(9 - 2x) + 3a = 9a - 2ax + 3a = 12a - 2ax$

$g(f(x)) = 9 - 2(ax + 3a) = 9 - 2ax - 6a$

Então, $12a - 2ax = 9 - 2ax - 6a$.

$12a = 9 - 6a$

$18a = 9$

$a = \dfrac{1}{2}.$

**15.** C

a) $\forall x \in [0, 4],\ g(x) - f(x) > 0$. Falsa.
Ou seja, $\forall x \in [0, 4],\ g(x) > f(x)$.
O que não se verifica para $x \in [3, 4]$.

b) $f(g(0)) - g(f(0)) > 0$. Falsa.
$f(g(0)) = f(2) = 2$
$g(f(0)) = g(0) = 2$

c) $\dfrac{g(x)f(x)}{[f(x)]^2} \leqslant 0,\ \forall x \in ]-\infty, 0[ \cup [4, 9]$. Verdadeira.

$\dfrac{g(x)f(x)}{[f(x)]^2} = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ se $f(x) \neq 0$.

$\dfrac{g(x)f(x)}{[f(x)]^2} \leqslant 0$ (sempre que as funções têm sinais contrários e **f** não nula)

d) Como $\forall x \in [0, 3]$, temos que $g(x) \in [2, 3]$.
Falsa. Para $x \in [0, 3]$, temos $g(x) \in [2, 4]$.

**16.** B

Temos que $f(g(x)) = \dfrac{1}{4(2x^2) - 1} = \dfrac{1}{8x^2 - 1}$

$8x^2 - 1 \neq 0$

Assim, $x^2 \neq \dfrac{1}{8}$.

$x \neq -\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ x \neq \dfrac{1}{2\sqrt{2}},$

**17.** $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^{\alpha x}) = \sqrt{e^{\alpha x}} = e^{\frac{\alpha x}{2}}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = e^{\alpha\sqrt{x}}$

Portanto, para que $(g \circ f)(x) > (f \circ g)(x)$, devemos ter

$e^{\frac{\alpha x}{2}} > e^{\alpha\sqrt{x}} \rightarrow \dfrac{\alpha x}{2} > \alpha\sqrt{x} \rightarrow x > 2\sqrt{x} \rightarrow x^2 > 4x \rightarrow$

$\rightarrow x(x - 4) > 0$

$x > 0$ e $x > 4$

$S = \{x \in \mathbb{R} = \{x > 4\}.$

## Estudo para o Enem

**18.** E

A função do prejuízo de cada operação, dado um terreno de valor **x**, é de $P(x) = 0,9 \cdot x$.

O lucro é dado por $L(x) = 1,2 \cdot x$.

Portanto, na receita total, $R = \dfrac{3P + 2L}{5}$, que, em função de **x**, é dado por $R(x) = \dfrac{3P(x) + 2L(x)}{5} =$

$= \dfrac{3 \cdot 0,9 \cdot x + 2 \cdot 1,2 \cdot x}{5} = \dfrac{2,7x + 2,4x}{5} =$

$= \dfrac{5,1}{5}x = 1,02x.$

Então, ele obteve um lucro de 2%.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**19.** B

O número de pessoas é igual a **p**. Então, o número de copinhos utilizados na empresa é $y(p) = 15p$. Assim, como cada copinho custa R$ 0,05, o valor gasto é $v(y) = 0,05y$.

Portanto, o valor gasto na empresa em função do número de pessoas é $v(y(p)) = v(15p) = 0,05 \cdot 15p = 0,75p$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**20.** C

Temos que $c(v(t)) = 0,5(0,2t^2 + 5) + 2$.

Então, $c(v(t)) = 0,01t^2 + 4,5 = 0,01t^2 + \dfrac{9}{2}$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

## 18 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS - CÍRCULOS I

### Comentários sobre o módulo

Neste módulo, abordamos a construção de funções compostas e sua aplicação na resolução de situações-problema. Além da definição de função composta, são apresentados exemplos de como obter a lei matemática de uma função composta.

### Para ir além

O artigo "Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia", publicado no periódico *Bolema*, é uma resenha do trabalho de pesquisa realizado por Sandra Malta Barbosa sobre o ensino de funções compostas e regra da cadeia, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de uma Variável. Neste trabalho, a autora demonstra sua inquietação quanto à dificuldade apresentada pelos estudantes no entendimento desses conteúdos.

A proposta da autora é desenvolver uma abordagem gráfica para os conceitos, utilizando as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) como recurso para que os alunos visualizem e experimentem conjecturas. Disponível em:

<http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n42a/17.pdf>.
Acesso em: 18 out. 2018.

### Exercícios propostos

**7.** C

I. f é ímpar.

Falso, pois f é par.

II. f é injetora.

Falso. Para $a \neq b$, $\exists\, f(a) = f(b)$. Logo, f não é injetora.

III. A lei matemática de f é $f(x) = ||x| - 1|$.

Verdadeiro. Podemos verificar analisando o gráfico e testando alguns de seus pontos $f(1) = ||1| - 1| = 0$, $f(-1) = ||-1| - 1| = 0$, $f(0) = ||0| - 1| = 1$.

IV. f é crescente se, e só se, $x > 1$.

Falso, pois f também é crescente no intervalo $[-1, 0]$.

V. $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.

Verdadeiro, pois $(f \circ f)(-1) = f(f(-1)) = f(0) = f(f(1)) = (f \circ f)(1)$.

**8.** A

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = x - 3$

Ou seja, $a^2 = 1$ e $ab + b = -3 \to a^2 = 1 \to a = 1$ ou $a = -1 \to b + ab = -3$

Se $a = -1$, então $b - b = -3$, (absurdo). Logo, $a = 1$ e $b + b = -3 \to b = \frac{-3}{2}$.

**9.** Soma: 01

01) O gráfico de uma função afim, cujos domínio e contradomínio são IR, é uma reta. Verdadeiro. O gráfico de uma função afim é dado por uma reta.

02) Sejam **A** um conjunto formado por 10 crianças e **B** um conjunto formado por 20 adultos, sendo os adultos as 10 mães e os 10 pais dessas crianças. Então, a lei que associa cada criança a seu casal de pais é uma função de **A** em **B**.

Falso. Não necessariamente é uma função.

04) Se **f** e **g** são funções reais, sendo **f** crescente e **g** decrescente, então $f - g$ é uma função constante.

Falso. Dado $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, temos que $(f - g)(x) = 2x$, que é crescente.

08) Quaisquer que sejam os conjuntos distintos **A** e **B** e funções $f: A \to B$ e $g: A \to B$, é possível definir a função $g \cdot f: A \to B$.

Falso. Só é possível definir essa função se o domínio de **g** for igual ao contradomínio de **f**.

16) Uma função $f: A \to B$ é injetora se todo elemento de $Y \in$ **B** tiver um correspondente $x \in A$, de tal forma que $f(x) = y$.

Falso, pois essa é a definição de sobrejetora.

**10.** Calculando a composta, temos:

$f \circ g \circ h(6) = f(g(h(6))) = f(g(2)) = f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$= 4 \circ \frac{1}{4} + 5 = 6.$

**11.** Soma: 02 + 04 = 06

01) O único valor real em que **f** não está definida é 0.

Falso. Não está definida em $\mathbb{R}^-$.

02) O número real $-1$ pertence à imagem de **f**.

Verdadeiro, pois $-1 = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x}} \rightarrow -\sqrt{x} = x - 2 \rightarrow x = (x - 2)^2$.

Assim, $x^2 - 5x + 4 = 0$, que tem soluções reais. Logo, $-1$ pertence à imagem de **f**.

04) É possível definir $g \circ f$ em todo domínio de **f**.

Verdadeiro, pois $g(f(x)) = g\left(\dfrac{x - 2}{\sqrt{x}}\right) = \cos\left(\dfrac{x - 2}{\sqrt{x}}\right)$.

Definida em todo o domínio de **f**.

08) A inversa $f^{-1}$: $\text{Im}(f) \rightarrow \text{Dom}(f)$ é dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{y^2 - 1}$.

Falso, pois:

$$y = \frac{x - 2}{\sqrt{x}}$$

$$x = \frac{y - 2}{\sqrt{y}} \rightarrow x\sqrt{y} = y - 2$$

$$x^2y = y^2 - 4y + 4$$

$$y^2 - (4 + x^2)y + 4 = 0$$

Isso resulta em uma função inversa diferente de $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{y^2 - 1}$.

16) A composta $f \cdot g$ não está definida para pontos da forma $2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Falso, pois $f(g(x)) = f(\cos x) = \dfrac{\cos x - 2}{\sqrt{\cos x}}$. Para os pontos da forma $2k\pi$, temos que $\cos(2k\pi) = 1$.

Logo, a composta $f \cdot g$ está definida para os pontos da forma $2k\pi$.

**12.** C

a) $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$f(g(x)) = 2(2x^2 - 2x + 1) + 3 = 4x^2 - 4x + 5$

$g(f(x)) = 2(2x + 3)^2 - 2(2x + 3) +$

$+ 1 = 2(4x^2 + 12x + 9) - 4x - 6 + 1 =$

$= 8x^2 + 20x + 13$

$f(g(x)) \neq g(f(x))$.

b) O gráfico de $f(g(x))$ não intercepta o gráfico de $g(f(x))$.

Fazendo $f(g(x)) = g(f(x))$, temos:

$4x^2 - 4x + 5 = 8x^2 + 20x + 13$

$4x^2 + 24x + 8 = 0$

$x^2 + 6x + 2 = 0$

Como a equação tem solução real, o gráfico de $f(g(x))$ intercepta o gráfico de $g(f(x))$.

c) $g(f(x)) = 8x^2 + 20x + 13$.

$g(f(x)) = 2(2x + 3)^2 - 2(2x + 3) +$

$+ 1 = 2(4x^2 + 12x + 9) - 4x - 6 + 1 =$

$= 8x^2 + 20x + 13$.

d) $f(g(x)) = 2x^2 + 4$.

$f(g(x)) = 2(2x^2 - 2x + 1) + 3 = 4x^2 - 4x + 5$.

e) O domínio da função $h(x) = f(g(x))$ é o conjunto $(0, \infty)$.

O domínio da função $h(x)$ é o conjunto dos reais.

**13.** D

I. A soma das raízes de $f(x)$ é igual a 4.

Verdadeiro, pois, para $f(x) = 0$, temos $x = 1$ ou $-x^2 + x + 6 = 0$.

$x^2 - x - 6 = 0$

$x = 3$ ou $x = -2$ (não convém)

Portanto, a soma é igual a $1 + 3 = 4$.

II. Sendo $N = f(f(f(3))) + f(f(f(0)))$, então o valor de N é igual a $-5$.

Verdadeiro, pois $N = f(f(-9 + 3 + 6)) + f(f(-1)) = f(-1) + f(-2) = -2 - 3 = -5$.

III. A função $f(x)$ é decrescente para $x < 1$.

Falso, pois a função é crescente.

IV. A função $f(x) > 0$, para $-2 < x < 3$.

Falso, pois, para $-2 < x < 3$, podemos ter $f(x) < 0$. Por exemplo: $f(0) = -1$.

V. A imagem de $f(x)$ é dada por $\text{Im} = ]-\infty, 6[$.

Verdadeiro. Quando $x > 1$, a função descreve uma parábola. Assim, o vértice dessa parábola é $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$. Logo, como o vértice do gráfico é menor que 1, o ponto máximo da função para $x > 1$ é $-1^2 + 1 + 6 = 6$.

Como o gráfico de $f(x)$ para $x < 1$ é $x - 1$, temos que $\text{Im}(f) = ]-\infty, 6[$.

**14.** Como $f(x) = 3^{1+x}$, temos que $f(x) > 0$.

Como $g(x) = \text{sen } x$, temos que $-1 < g(x) < 1$.

Então, $f(g(x)) = 3^{1+g(x)}$.

Como $-1 < g(x) < 1$

$0 < 1 + g(x) < 2$

Então, $Im(f \circ g) = [1; 9]$.

$g(f(x)) = \text{sen}(f(x))$

Como $f(x) > 0$, temos que $-1 < \text{sen}(f(x)) < 1$

Então, $Im(g \circ f) = [-1; 1]$.

Portanto, $Im(f \circ g) = [1; 9]$ e $Im(g \circ f) = [-1; 1]$.

**15.** C

Desde que $h(0) = 2^1 = 2$, temos $h(2) = \sqrt{2-1} = 1$ e, portanto, vem $h(1) = 2^{1+1} = 4$

Portanto, temos que:

$h\left(h\left(h(0)\right)\right) = h(h(2)) = h(1) = 4.$

**16.** A

A função composta $g \cdot f(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x^2+2x+1}\right) =$
$= (\sqrt{x^2+2x+1})^2 = x^2 + 2x + 1$, definida em $x \geqslant -1$.

**17.** Temos que $g^{-1}(1) = 0$. Logo, $g(0) = 1$.

$f(g(u)) = g(u)$

$[g(u)]^2 = g(u)$

$[g(u)]^2 - g(u) = 0$

$g(u) \cdot [g(u) - 1] = 0$

$g(u) = 0$ ou $g(u) = 1$

Portanto, se $g(u) = 0$: $u \cdot g(u) = 0$.

Se $g(u) = 1$: $u = 0$, pois $g(0) = 1$. Então, $u \cdot g(u) = 0$.

Assim, $u \cdot g(u) = 0$.

## Estudo para o Enem

**18.** A

Analisando o gráfico, $f(0) = 0$. Logo, $g(f(0)) =$
$= g(0) = 14$.

Podemos chamar $f(x) = ax$.

Então, $g(x) = bx + c$.

Assim, como $g(0) = 14$, temos que $c = 14$.

Como $f(5) = g(5) = \frac{25}{3}$, temos $5a = 5b + 14 = \frac{25}{3}$.

Ou seja, $a = \frac{5}{3}$ e $b = \frac{-34}{30}$.

Portanto, $g(6) = \frac{-34}{30} \cdot 6 + 14 = \frac{36}{5}$.

**Competência:** Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

**Habilidade:** Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

**19.** D

Temos que $6,8 = 0,5p + 1$

$p = \frac{5,8}{0,5} = 11,6$

Portanto, $11,6 = 10 + 0,1 \cdot t^2$

$t^2 = \frac{1,6}{0,1} = 16$

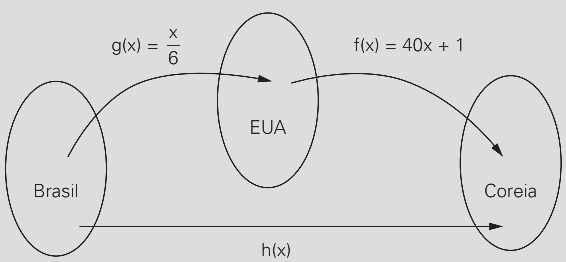
$t = 4$ anos

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**20.** C

Fazendo a composta, temos:




Assim,

$h(x) = f[g(x)]$

$h(x) = 40 \cdot \frac{x}{6} + 1.$

$(x) = \frac{20}{3}x + 1.$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

# 19 FUNÇÃO MODULAR I

## Comentários sobre o módulo

O ensino de módulo ou valor absoluto tem se apresentado desafiador para professores do Ensino Fundamental e, em especial, do Ensino Médio, a começar pela definição dos conceitos a ele relacionados. Tal fato pode se apresentar como entrave para o aprendizado de diversos saberes em Matemática, caso o professor não estabeleça estratégias para dinamizar e investigar com eficácia cada saber envolvido no estudo de valor absoluto de um número e suas diversas aplicações em funções e geometria analítica.

Apresentamos neste módulo situações-problema que vão das mais simples às mais complexas. Além disso, há quatro exercícios contextualizados, similares aos propostos no Enem.

## Para ir além

Um artigo simples, com fundamentos e exercícios interativos sobre módulos e valores absolutos, pode ser encontrado no link a seguir. Disponível em:

<https://pt.khanacademy.org/math/arithmetic/arith-review-negative-numbers/arith-review-abs-value/a/intro-to-absolute-value>

Acesso em: 19 out. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** B

I. Se $|x| = -x$, então $x < 0$.
Verdadeiro. Se $|x| = -x$, então $x < 0$.

II. Se $0 < x < y$, então $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

Verdadeiro, pois $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} \rightarrow y > x \rightarrow x < y$.

III. Se $\frac{2}{x} > 1$, então $x < 2$.

Falso. Se $\frac{2}{x} > 1$, temos:

$\frac{2}{x} - 1 > 0$, então $\frac{2-x}{x} > 0$

Ou $2 - x > 0 \rightarrow x < 2$ e $x > 0$.

Ou $2 - x < 0 \rightarrow x > 2$ e $x < 0$.

IV. Se $x > y$, então $-x > -y$.
Falso. Se $x > y$ então $-x < -y$.

**8.** B

I. A solução da desigualdade $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$ é o conjunto $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$. Verdadeiro. Temos que $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \geqslant 0$. Assim ou $x - 1 \leqslant 0 \rightarrow x \geqslant 1$ e $(x - 1)(x - 2) \geqslant 0$ ou $x - 2 \geqslant 0 \rightarrow x \geqslant 2$ e $(x - 1)(x - 2) \geqslant 0$. Assim, a solução da inequação $(x - 1)(x - 2) \geqslant 0$ é o conjunto $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

II. Se $|x + 2| < 2$, então $x \in ]-3, -1[$.
Falso. Se $x + 2 \geqslant 0$, $x + 2 < 2$, logo $x < 0$.
Se $x + 2 < 0$, $-x - 2 < 2$, logo $x > -4$, $x \in ]-4, 0[$.

**9.** B

Se $3x - 2 \geqslant 0 \rightarrow 3x - 2 > x \rightarrow 2x > \rightarrow x > 1$.

Se $3x - 2 < 0 \rightarrow -3x + 2 > x \rightarrow -4x > -2 \rightarrow x < \frac{1}{2}$.

Logo, $\left\{x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 1\right\}$.

**10.** Calculando as raízes para $x^2 + 2x - 15 = 0$, temos $x = 3$ ou $x = -5$. Para $|x| = 3$, podemos ter $x = -3$ ou $x = 3$. Ambas satisfazem a equação $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$. Para $|x| = 5$, podemos ter $x = -5$ ou $x = 5$. Porém, $x = 5$ não satisfaz $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$. Assim, as soluções da equação são $\{-3, 3\}$.

**11.** C

Temos que

$3x + 10 = 5x + 2$, ou seja, $2x = 8 \rightarrow x_1 = 4$ ou $x_2 = 4$

$3x + 10 = -(5x + 2)$, ou seja, $8x = -12 \rightarrow x_1 = \frac{-3}{2}$ ou $x_2 = \frac{-3}{2}$

Assim, $|x_1 - x_2| = \left|4 - \frac{(-3)}{2}\right| = \left|\frac{8+3}{2}\right| = \frac{11}{2}$.

**12.** Temos que, se $|4x - 6| - 2 \geqslant 0$, então:

- se $4x - 6 \geqslant 0$, então, $4x - 6 - 2 < 3 \rightarrow$
$\rightarrow 4x < 11 \rightarrow x < \frac{11}{4}$
- se $4x - 6 < 0$, então $-4x + 6 - 2 < 3 \rightarrow$
$\rightarrow -4x < \frac{-1}{4} \rightarrow x > \frac{1}{4}$

Se $|4x - 6| - 2 < 0$, temos que:

- se $4x - 6 \geqslant 0$, então $-(4x - 6 - 2) < 3 \rightarrow$
$\rightarrow 4x > 5 \rightarrow x > \frac{5}{4}$
- se $4x - 6 < 0$, então $-(-4x + 6 - 2) < 3 \rightarrow$
$\rightarrow 4x < 7 \rightarrow x < \frac{7}{4}$

Portanto, $S = \left\{\frac{1}{4} < x < \frac{11}{4}\right\}$.

**13.** B

(I) $(r^3 = 8)$ ...... $(r \neq 2)$
$r^3 = 8 \rightarrow r = 2$, portanto, $r^3 = 8 \vee r \neq 2$

(II) $(|r| < 4)$ ...... $(r < 4)$

Se $|r| < 4$, temos que $-4 < r < 4$. Então, $r < 4$, ou seja, se $|r| < 4 \rightarrow r < 4$.

**14.** E

Fazendo $p(x) = 0$, a soma das raízes é dada por $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = b$, e o produto é dado por $x_1x_2 = \frac{-c}{a} = 441 = 9 \cdot 49 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$.
Podemos concluir que o número deve ser divisível por essas raízes. Assim, deve ser divisível por $3 \cdot 7 = 21$. Entre os números das alternativas, o único que satisfaz essa condição é 84.

**15.** B

Analisando os conjuntos, temos:

No conjunto A:

$$\frac{1}{x^2 + 1} > \frac{1}{|x + 3|}$$

$|x + 3| > x^2 + 1$

Se $x + 3 \geqslant 0$, temos que $x + 3 > x^2 + 1 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x + 1)(x - 2) < 0$.
Portanto, $x \in (-1, 2)$.
Se $x + 3 < 0$, temos que $- x - 3 < x^2 + 1 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + x + 4 > 0$. Logo, nesse caso a função sempre será positiva e não terá raiz real.

No conjunto B:

Como $x \neq 0$, se $x > 0$, temos que $x(x^2 + 1) > x \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + 1 > 1 \rightarrow x^2 > 0 \rightarrow |x| > 0$.

Se $x < 0$, temos que $-x(x^2 + 1) > x \rightarrow$
$\rightarrow -x^2 - 1 > 1 \rightarrow x^2 < -2$. (absurdo)

Logo:

(I) $A \cap B = (-1, 0) \cup (0, 2)$
Verdadeiro, pois $A \cap B = (-1, 2) - \{0\} =$
$= (-1, 0) \cup (0, 2)$.

(II) $B - A = \{\ \}$
Falso, pois $(-\infty, +\infty) - (-1, 2) \neq \{\ \}$.

(III) $A \cup B = \mathbb{R}$
Verdadeiro, pois $A \cup B = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

(IV) $B = A$
Falso, pois $B \neq A$.

**16.** Temos que $3x^2 + 8x = 0 \rightarrow x(3x + 8) = 0$. Ou seja, o gráfico é uma parábola com concavidade para cima, cujas raízes são $\frac{-8}{3}$ e 0.

Logo, temos que, para $\frac{-8}{3} \leqslant x \leqslant 0 \rightarrow 0 \leqslant x^2 -$
$- |3x^2 + 8x| \leqslant 2 \leftrightarrow 0 \leqslant x^2 - (-3x^2 - 8x) \leqslant 2 \leftrightarrow 0 \leqslant$
$\leqslant 4x^2 + 8x \leqslant 2 \leftrightarrow x^2 + 2x \geqslant 0$ e

$2x^2 + 4x - 1 \leqslant 0 \leftrightarrow x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 0$

Então, $-1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \leqslant x \leqslant -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Portanto, $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1-\frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq -2 \text{ ou } x = 0\right\}$.

Para $x \leqslant \frac{-8}{3}$ ou $x \geqslant 0$:

$0 \leqslant x^2 - |3x^2 + 8x| \leqslant 2 \leftrightarrow 0 \leqslant x^2 - (-3x^2 - 8x) \leqslant 2 \leftrightarrow$
$\leftrightarrow 0 \leqslant -2x^2 - 8x \leqslant 2 \leftrightarrow -2x^2 - 8x \geqslant 0 \leftrightarrow x^2 +$
$+ 4x \leqslant 0$ e

$x^2 + 4x + 1 \geqslant 1 \leftrightarrow -4 \leqslant x \leqslant 0$ e $x \leqslant 2 - \sqrt{3}$ ou
$x \geqslant -2 + \sqrt{3}$

Assim, $S_2 = \left\{\begin{matrix} x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq -2-\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ -1-\frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq -2 \text{ ou } x = 0 \end{matrix}\right\}$.

Portanto, nesse conjunto, existem os inteiros $-4$, $-2$ e 0. Então, há 3 soluções.

**17.** E

a) $3 \in B$

Como $|x| < 3$, $x \notin B$.

b) $A \cup C = C$

Temos que, em A, $x^2 - 1 \geqslant 0 \rightarrow |x| \geqslant 1$.
Então, $A \cup C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geqslant 1\} \cup \{1, 2, 3, 4\} \neq$
$\neq \{1, 2, 3, 4\}$.

c) O produto cartesiano B x C tem 25 elementos. Como, em B, $x = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, há 5 elementos, e C tem 4 elementos, então B x C tem 20 elementos.

d) $B - C = \varnothing$

$B = -2, -1, 0, 1, 2\}$

$B - C = \{-2, -1, 0\}$.

e) $A \cap B = ]-3, -1] \cup [1, 3[$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geqslant 1\} \cap \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\} =$
$= ]-3, -1] \cup [1, 3[$.

## Estudo para o Enem

**18.** C

Tanto R quanto S satisfazem a equação $|R + 5| =$
$= 2|R - 3|$

Se $R > 3$

Se $R + 5 = 2R - 6$, ou seja, $R = 11$

Se $-5 < R < 3$

$S + 5 = 6 - 2S \rightarrow S = \frac{1}{3}$

Se $S < -5$

Então, $S = 11$. (absurdo)

Logo, $R = 11$ e $S = \frac{1}{3}$.

O triplo da distância é a distância dos triplos, ou seja, a distância entre 33 e 1, que é 32.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**19.** C

A distância entre os pontos $\frac{3}{7}$ e $\frac{4}{7}$ é $\frac{1}{7}$. Então, cada espaço entre eles vale $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$. Logo, o valor de x é dado por

$$\frac{3}{7} + \frac{1}{28} = \frac{12}{28} + \frac{1}{28} = \frac{13}{28}.$$

Portanto, a soma do numerador com o denominador da fração irredutível que representa x é $13 + 28 = 41$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**20.** D

Na escala de cima, podemos ver que existem 12 unidades (32 – 20), que correspondem a 16 unidades na escala de baixo.

Portanto, temos uma razão de variação de escala de 3:4.

Entre 62 e 32 existem 30 unidades. Como a variação é de 3:4, o número 26 da escala de baixo vale $26 + 40 = 66$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

# 20 FUNÇÃO MODULAR II

## Comentários sobre o módulo

O estudo de funções modulares pode se apresentar como entrave para o aprendizado de diversos saberes em Matemática. Tal fato pode ocorrer caso o professor não estabeleça estratégias para dinamizar e investigar com eficácia cada saber envolvido no estudo de valor absoluto de um número e suas diversas aplicações em função e geometria analítica. Percebe-se que, na maioria dos livros didáticos, há uma superficial exploração e investigação da função modular. Grande parte dessas obras dedica poucas páginas para propor uma metodologia de construção gráfica um tanto questionável: o uso de tabelas com suposição de valores para abscissas e cálculo das respectivas imagens. Em seguida, esboça-se o gráfico como se aqueles pontos fossem suficientes para descrever com precisão toda a função estudada.

## Para ir além

O ensino de funções é um tema de pesquisa em educação matemática com inúmeros trabalhos publicados. Entretanto, o ensino da função modular e do valor absoluto apresenta poucas pesquisas que tratam especificamente deste assunto. Por essa razão, indicamos a pesquisa de Dárcio Costa Nogueira Júnior, cujo objetivo foi elaborar uma sequência didática envolvendo atividades investigativas para o ensino de função modular e do valor absoluto, por meio de uma abordagem curricular em rede.Disponível em:

<http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_NogueiraJuniorDC_1.pdf>.

Acesso em: 15 out. 2018

## Exercícios propostos

**7.** Soma: 01 + 02 = 03

01) $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Verdadeiro, pois $3^{-x} > 0$, para $x > 0$ e $3^{-x} > 0$, para $x < 0$.

02) $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Verdadeiro, pois $g\left(\frac{3}{2}\right) = \left|\frac{3}{2} - \frac{9}{4}\right| = \left|\frac{6-9}{4}\right| = \left|\frac{-3}{4}\right| = \frac{3}{4}$.

04) f é sobrejetora.

Falso. Existe um elemento **y** na imagem de **f** tal que não existe **x** no domínio de **f** tal que $f(x) = y$.

08) $g(f(0)) = f((g(0))$.

Falso, pois $g(f(0)) = g(1) = 0$ e $f(g(0)) = f(0) = 1$.

16) O gráfico da função **g** é uma parábola.

Falso. Como a equação $x^2 - x = 0$ tem 2 raízes distintas, o gráfico é uma parábola com valores negativos. Assim, quando aplicado o módulo, a parte negativa dessa parábola será refletida em relação ao eixo **y**, descaracterizando-a.

**8.** A

Temos que, se $x > 1$, $f(x) = 2x$

Se $-1 < x < 1$, $f(x) = 2$.

Se $x < -1$, $f(x) = -2x$.

**9.** D

Temos que a, b ≠ 0. Então:

- para a > 0 e b > 0

$$\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} - \frac{|ab|}{ab} = 1 + 1 - 1 = 1$$

- para a > 0 e b < 0

$$\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} - \frac{|ab|}{ab} = 1 - 1 + 1 = 1$$

- para a < 0 e b > 0

$$\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} - \frac{|ab|}{ab} = -1 + 1 + 1 = 1$$

- para a < 0 e b < 0

$$\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} - \frac{|ab|}{ab} = -1 - 1 - 1 = -3$$

Logo, o conjunto de valores assumido pela expressão é $\{-3, 1\}$.

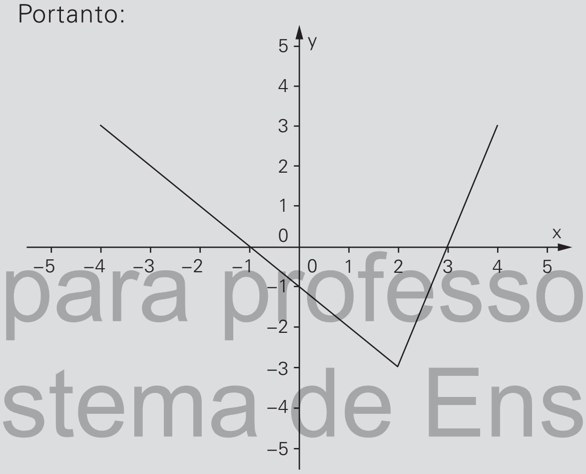
**10.** Temos que se $2x - 4 < 0 \to x < 2$

$f(x) = -(2x - 4) + x - 5 = -2x + 4 + x - 5 =$
$= -x - 1$

Se $2x - 4 > 0 \to x > 2$

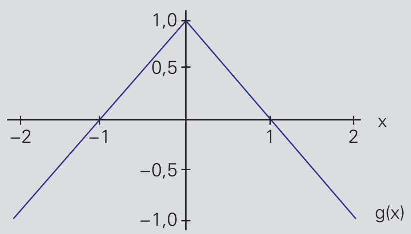
$f(x) = (2x - 4) + x - 5 = 3x - 9$

Portanto:

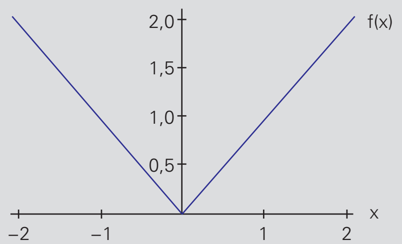


**11.** C

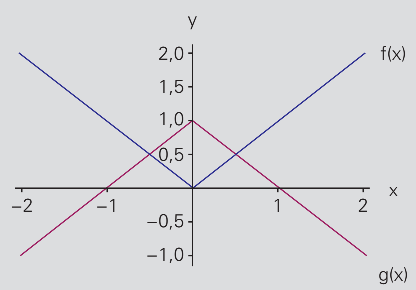
Fazendo um esboço dos gráficos, temos:




e




Portanto, temos o polígono:




Temos um quadrado cuja diagonal mede 1. Logo:

$1^2 = 2l^2$

$l^2 = 0,5$

Portanto, A = 0,5 u.a.

**12.** A

Para que f(x) = g(x), temos

$2 = x^2 - |x|$

$x^2 - |x| - 2 = 0$

Para $x > 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = 2$ e $x = -1$ (não convém)

Para $x < 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = -2$ e $x = 1$ (não convém)

Logo, a soma das abscissas dos pontos em comum é $2 + (-2) = 0$.

**13.** D

Temos que $f(g(x)) = |ax^2 + bx + c| - 5$.

Substituindo as raízes 0, 1 e 3 na função:

Para $x = 0$

$|a \cdot 0 + b \cdot 0 + c| - 5 = 0$

$|c| = 5$

Para $x = 1$

$|a + b + c| - 5 = 0$

$|a + b + c| = 5$

Para $x = 3$

$|9a + 3b + c| = 5$

Podemos perceber que $x_v = \frac{3}{2}$.

Então, $\frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} \rightarrow b = -3a$.

Assim:

$|-2a + c| = 5$

Se $c = 5$

$|-2a + 5| = 5$

$-2a + 5 = 5$

Então, $a = 0$ (não convém)

Ou $-2a + 5 = -5$

Então, $a = 5$

Se $c = -5$

$|-2a - 5| = 5$

$-2a - 5 = -5 \rightarrow a = 5$

Ou $-2a - 5 = -5 \rightarrow a = 0$

Assim, $a = 5$. Logo, $b = -15$.

Então, $|a \cdot b \cdot c| = |5 \cdot (-15) \cdot 5| = |-3 \cdot 5^3| =$

$= 3 \cdot 5^3$.

**14.** a) Temos que se $\dfrac{x^2}{2} - 2 > 0$

$\dfrac{x^2}{2} - 2 = 1 \to x^2 = 6 \to x = \pm\sqrt{6}$

Se $\dfrac{x^2}{2} - 2 < 0$

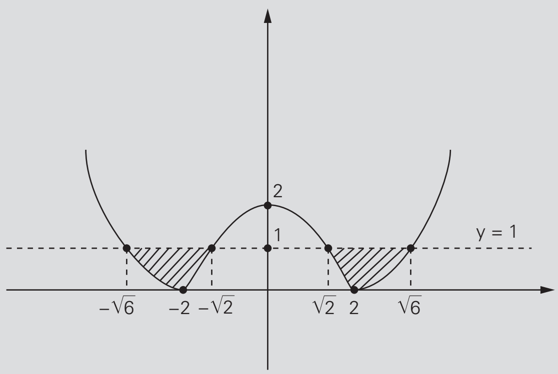
$-\left(\dfrac{x^2}{2} - 2\right) = 1$

$-x^2 + 4 = 2$

$x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2}$

Portanto, para $x = \pm\sqrt{6}$ ou $x = \pm\sqrt{2}$

b) Temos o gráfico da função:




Analisando o gráfico, concluímos que $f(x) \leqslant 1$ quando $-\sqrt{6} \leqslant x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $\sqrt{6} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$.

**15.** Soma: 02 + 04 = 06

01) $|x| \neq -x, \forall x \in R$

Falso. Se $x < 0$, temos que $|x| = -x$.

02) Se **f** e **g** estão definidas no mesmo domínio e no mesmo contradomínio, então o gráfico de $f(x) = |x + 2| - 2$ é igual ao gráfico de $g(x) = |x|$, porém deslocado 2 unidades para a esquerda no eixo **x** e 2 unidades para baixo no eixo **y**.

Verdadeiro. Temos na função f:

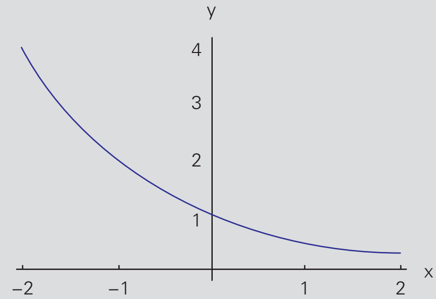
Se $x + 2 > 0$

$f(x) = x + 2 - 2 = x$

Se $x + 2 < 0$

$f(x) = -x - 2 - 2 = -x - 4$

Ou seja




Isto é, é igual ao gráfico de g(x), mas deslocado 2 unidades para a esquerda no eixo **x** e 2 unidades para baixo no eixo **y**.

04) A função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = |x|$ é injetora e sobrejetora.

Verdadeiro. Para $x \neq y$, com $x, y \in \mathbb{R}^+$, temos que $f(x) \neq f(y)$.

Para um $y \in \mathbb{R}^+$, existe um **x** real positivo tal que $f(x) = y$.

08) A solução da equação $\left|\cos(x+4) - \text{sen}(x-1) + \sqrt{x+2-1}\right| + 5 = 0$ é $k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}^+$.

Falso. Para $x = k\pi$, $\left|\cos(k\pi+4) - \text{sen}(k\pi-1) + \sqrt{k\pi+2-1}\right| + 5 \neq 0$.

16) A equação $|x + 1| - |x - 1|$ não tem solução real.

Falso, pois $|x + 1| - |x - 1| = 0$.

$|x + 1| = |x - 1|$

Se $x > 1$

$x + 1 = x - 1$

$1 = -1$, (absurdo)

Se $-1 < x < 1$

$x + 1 = -x + 1$

$2x = 0$

$x = 0$

Se $x < -1$

$-x - 1 = -x + 1$

$1 = -1$, (absurdo)

**16.** A

Os gráficos das funções $y = |x|$ e $y = -|x| + k$ delimitam um quadrado cuja diagonal mede **k**. Então, sendo l o lado do quadrado, temos $k^2 = 2l^2$.

Então, a área do quadrado é dada por $A = l^2 = \dfrac{k^2}{2}$.

Como $A = 16$

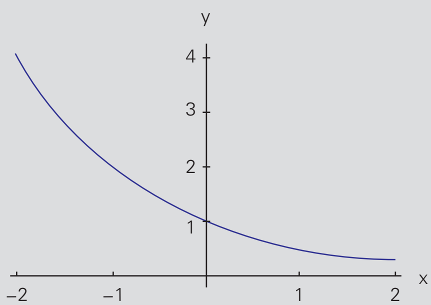
$16 = \dfrac{k^2}{2}$

$k^2 = 32$

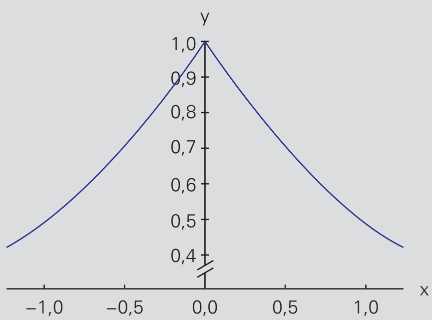
$k = 4\sqrt{2}$

**17.** Temos $f(x) = \left|2^{-|x|} - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x} - \dfrac{1}{2}\right|$.

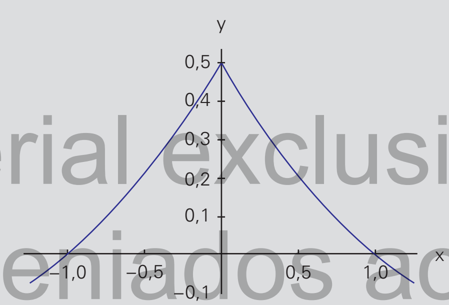
Temos que se $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$:



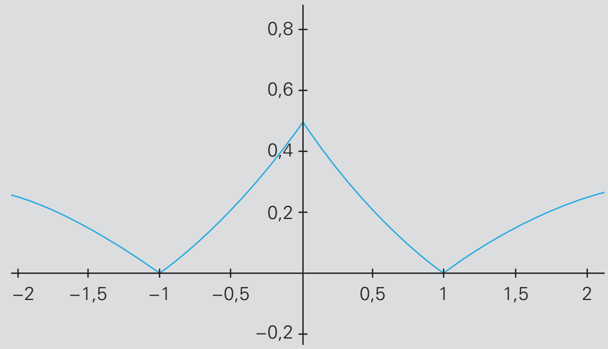

Se $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$:




Se $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|} - \dfrac{1}{2}$:




Se $y = \left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|} - \dfrac{1}{2}\right| = \left|2^{-|x|} - \dfrac{1}{2}\right|$:




## Estudo para o Enem

**18.** A

Para todo $y \in ]-1, 1[$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$ (**f** é sobrejetora).

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $x \neq y$, temos $f(x) \neq f(y)$, (**f** é injetora).

Como **f** é injetora e sobrejetora, **f** é bijetora.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**19.** D

O maior crescimento absoluto registrado é observado entre os anos 2001 e 2000. Logo, em 1 ano houve um crescimento absoluto de $|47\,943 - 45\,360| = 2\,583$. Portanto, em 2010 haverá um número de homicídios de $51\,434 + 2\,583 = 54\,017$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**20.** D

Calculando as raízes do polinômio:

$P(x) = 0$

$x^2 + 10x - 144 = 0$

$x = 8$ ou $x = -18$

Os valores absolutos das raízes são $|x| = 8$ ou $|x| = 18$.

Assim, sendo **x** as pessoas que deveriam pagar meia, mas pagaram inteira, e **y** as pessoas que pagam inteira, temos:

$8x + 18y = 140$

$18x + 18y = 180$

$10x = 40$

$x = \frac{40}{10}$

$x = 4$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

## 21 EQUAÇÕES MODULARES

### Comentários sobre o módulo

O ensino de módulo ou valor absoluto tem se apresentado desafiador para professores do Ensino Fundamental e, em especial, do Ensino Médio, a começar pela definição dos conceitos a ele relacionados. Tal fato pode se apresentar como entrave para o aprendizado de diversos saberes em Matemática, caso o professor não estabeleça estratégias para dinamizar e investigar com eficácia cada saber envolvido no estudo de valor absoluto de um número e suas diversas aplicações em funções e geometria analítica.

De modo geral, o estudo de equações possibilita resolver grande parte dos problemas matemáticos ligados à álgebra. No caso de modular, essa ferramenta particular diminui a amplitude de eficiência, mas constantemente é exigido que o aluno aplique seus conceitos em provas de vestibular.

### Exercícios propostos

**7.** B

Temos que $2x - 1 = 1 - x$ ou $2x - 1 = x - 1$.

Ou seja, $3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3}$ ou $x = 0$.

**8.** B

As raízes da equação $f(x) = 0 \rightarrow |x - 2| - 1 = 0$.

$|x - 2| = 1$

Se $x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$:

$x - 2 - 1 = 0$

$x = 3$

Se $x - 2 < 0 \rightarrow x < 2$:

$-x + 2 - 1 = 0$

$x = 1$

Se $x = 2$, temos $f(2) = -1$.

**9.**

Se $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8} \geq 0$, temos:

$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$

$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} = 0$

$x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{3}{4}$

Se $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8} < 0$, temos:

$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8} = -\frac{1}{4}$

$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8} = 0$, (não há solução no universo dos reais)

Portanto, $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$.

**10.** D

$\frac{1}{2}|x| \cdot |x - 3| = 2 \cdot \left|x - \frac{3}{2}\right| \rightarrow \frac{|x^2 - 3x|}{2} = \frac{|2(2x-3)|}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 3x = 4x - 6$ ou $x^2 - 3x = -2x + 6 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$ ou

$x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$ ou $x = 6$ ou $x = -3$ ou $x = 2$.

Logo, a equação tem quatro raízes.

**11.** E

Se $-1 < x < 0$, temos: $f(x) = \frac{(x + 1)x}{x + 1} + x = 2x$

Se $x \leq -1$, temos: $f(x) = -x^2$

Se $x \geq 0$, temos: $f(x) = \frac{-|x + 1|x}{x + 1} + x = x - x = 0$

**12.** D

Temos que $|x - 2| - 2 = 2$ ou $|x - 2| - 2 = -2$.

Logo, se $x \geq 2$: $x - 2 - 2 = 2 \rightarrow x = 6$ ou $x - 2 - 2 = -2 \rightarrow x = 2$.

Se $x < 0$: $-x + 2 - 2 = 2 \rightarrow x = -2$ ou $-x + 2 - 2 = -2 \rightarrow x = 2$.

Portanto, a soma das raízes distintas da equação é $S = 2 - 2 + 6 = 6$.

**13.** C

Por definição, sabemos que $|x|^2 = x^2$. Para todo **x** real:

$x^2 - 5|x| - 6 = 0 \rightarrow |x|^2 - 5|x| - 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (|x| - 6) \cdot (|x| + 1) = 0 \rightarrow x = 6$ ou $x = -6$

Consequentemente, $a = 0$ e $b = 36$.

**14.** E

Se $|x - 2| - 7 \geq 0$:

Se $x - 2 \geq 0$:

$x - 2 - 7 = 6$

$x = 15$

Se $x - 2 < 0$:

$-x + 2 - 7 = 6$

$-x = 11$

$x = -11$

Se $|x - 2| - 7 < 0$:

Se $x - 2 \geq 0$:

$-x + 2 + 7 = 6$

$x = 3$

Se $x - 2 < 0$:

$x - 2 + 7 = 6$

$x = 1$

A soma das raízes da equação modular é $S = 15 - 11 + 3 + 1 = 8$.

**15.**

a) $\frac{1}{2}|x| + 3 = \frac{3}{2}|x + 1|$

$|x| + 6 = 3|x + 1|$

Se $x \leq -1$, temos que:

$|x| + 6 = 3|x + 1|$

$-x + 6 = 3(-x - 1)$

$x = \frac{-9}{2}$

Se $-1 \leq x \leq 0$, temos que:

$|x| + 6 = 3|x + 1|$

$-x + 6 = 3(-x - 1)$

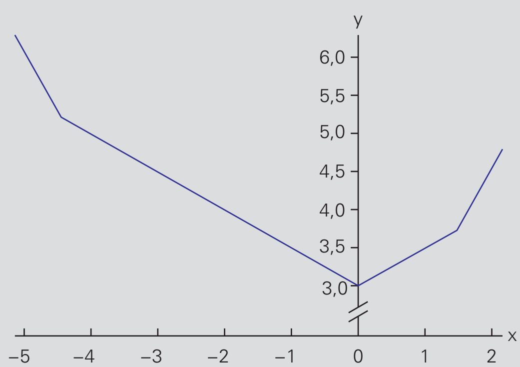
$x = \frac{3}{4}$, mas $\frac{3}{4} \not\subset [-1, 0]$

Se $x \geq 0$, temos que:

$x = \frac{3}{2}$

$S = \left\{\frac{-9}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

b) Se fizermos um esboço do gráfico de **f**, temos:




O menor valor de **f** é 3.

c) A função **f** pode ser definida como $f(x) = \frac{3}{2}|x + 1|$, para $x \leq \frac{-9}{2}$ ou $x \geq \frac{3}{2}$.

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot |x| + 3$, para $\frac{-9}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Com isso, $\frac{3}{2}|x + 1| = 5 \rightarrow |x + 1| = \frac{10}{3}$.

$\leftrightarrow x = \frac{7}{3}$ (pois $x = \frac{-13}{3}$ não está no intervalo)

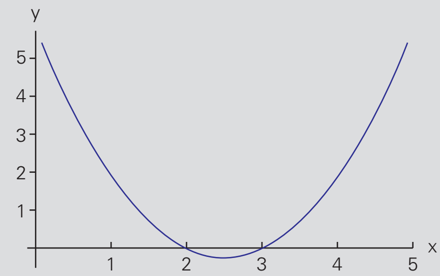
$\frac{1}{2}|x| + 3 = 5 \rightarrow |x| = 4 \leftrightarrow x = -4$ (pois $x = 4$ não está no intervalo).

Então, $x = -4$ ou $x = \frac{7}{3}$.

**16.** A

Temos que $f(x) = x^2 - 5|x| + 6 = |x|^2 - 5|x| + 6$, pois $|x|^2 = x^2$.

Assim, como as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são $x = 2$ e $x = 3$, podemos fazer um esboço do gráfico da função $x^2 - 5x + 6$:




Logo, o gráfico da função f(x) será a reflexão em relação ao eixo **x** dessa função.

**17.** E

Se $x \geq 0$, temos:

$x^2 - x - 6 = 0$

Logo, $x = 3$ ou $x = -2$

Se $x < 0$, temos:

$x^2 + x - 6 = 0$

Logo, $x = -3$ ou $x = 2$.

Então, para a equação $x^2 - ax + b = 0$, não existem **a** e **b** tais que $x^2 - ax + b = 0$ contenha todas as raízes da equação dada.

## Estudo para o Enem

**18.** E

Para que o reservatório seja esvaziado completamente, precisamos ter $y = 0$. Logo, $|3600 - 45x| = 0$.

Assim, $3\,600 - 45x = 0$. Logo, $x = \frac{3\,600}{45} = 80$ min $= 1$h20min.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**19.** B

Temos que $2\,650 = 1\,000 + 11|x|$.

$1\,650 = 11|x|$

$|x| = 150$

Logo, $x = 150$ ou $x = -150$ (não convém).

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**20.** D

Temos $q(8) = |8 - 14| = 6$.
Para $t < 8$, temos $q(t) = |-(t - 8) + t - 14| < 6$.
$q(16) = |8 + 16 - 14| = 10$

Para $8 < t < 16$, temos $q(t) = 2|t - 11|$, $q(t) \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.
Portanto, o máximo de unidades vendidas entre todos os instantes foi 10.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

# 22 INEQUAÇÕES MODULARES

## Comentários sobre o módulo

O conteúdo refere-se a inequações modulares. Além da parte teórica, há exercícios resolvidos de aplicação dos principais conceitos e propriedades ligados ao assunto. Na medida do possível, apresente a resolução de alguns deles como exemplos das propriedades.

Proponha a resolução dos exercícios de aplicação para sistematizar os conceitos estudados em aula, alguns mais simples e dois contextualizados.

## Para ir além

Para um estudo complementar, acesse o conteúdo presente no link a seguir. Disponível em:

<https://blogdoenem.com.br/inequacao-modular-propriedades-modulares/>

Acesso em: 25 out. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** C

Temos que, se $x^2 - 2 \geqslant 0$:

$x^2 - 2 \leqslant 2$

$x^2 \leqslant 4$

$-2 \leqslant x \leqslant 2$

Se $x^2 - 2 < 0$:

$-x^2 + 2 \leqslant 2$

$x^2 \geqslant 0$

$x \geqslant 0$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$.

**8.** E

Se $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$:

$x^2 - 4x + 3 < 3$

$x^2 - 4x < 0$

$x \cdot (x - 4) < 0$

$0 < x < 4$

Se $x^2 - 4x + 3 < 0$:

$-x^2 + 4x - 3 < 3$

$x^2 - 4x + 6 > 0$, (não tem solução nos reais)

Logo, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$.

**9.** E

Se $x^2 - 2 > 0$:

$x^2 - 2 < 1$

$x^2 < 3$

$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

Se $x^2 - 2 < 0$:

$-x^2 + 2 < 1$

$-x^2 < -1$

$x^2 > 1$

$x > 1$ ou $x < -1$

Logo, $(-\sqrt{3} < x < 1)$ ou $(1 < x < \sqrt{3})$.

Portanto, $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$.

**10.** Temos que, no caso $|x^2 - 10x + 21| = |3x - 15|$:

$x^2 - 10x + 21 = 3x - 15$

ou

$x^2 - 10x + 21 = -3x + 15$

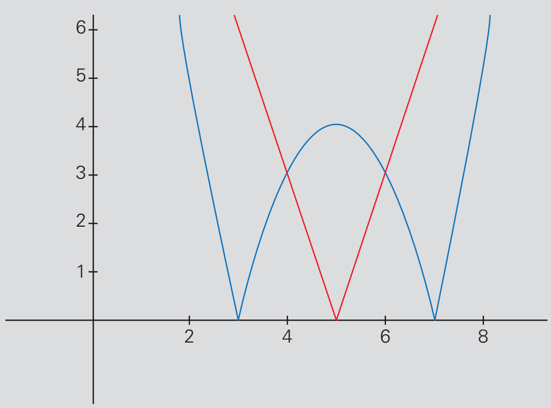
Então:

$x^2 - 13x + 36 = 0$ ou $x^2 - 7x + 6 = 0$

$x = 4$ ou $x = 9$ ou $x = 1$ ou $x = 6$

Portanto, para $|x^2 - 10x + 21| \leqslant |3x - 15|$.

Analisando o gráfico das funções: $|x^2 - 10x + 21|$ e $|3x - 15|$.




Portanto, $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4$ ou $6 \leqslant x \leqslant 9\}$.

**11.** A

Temos que, se $\text{sen}(x) - 1 \geqslant 0$:

$\text{sen}(x) - 1 \leqslant \frac{1}{2}$

$\text{sen}(x) \leqslant \frac{3}{2}$, (trivial)

Se $\text{sen}(x) - 1 < 0$:

$-\text{sen}(x) + 1 \leqslant \frac{1}{2}$

$\text{sen}(x) \geqslant \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\right\}$.

**12.** C

Temos que, se $6y - 1 \geqslant 0$, então $6y - 1 \geqslant 5y - 10$.

$y \geqslant -9$

Se $6y - 1 < 0$, então $-6y + 1 \geqslant 5y - 10$.

$-11y \geqslant -11$

$y \leqslant 1$

Portanto, temos a união de dois conjuntos: $[-9, +\infty) \cup (-\infty, 1] = \mathbb{R}$.

**13.** A

Temos que:

$x^2 - 4x \geqslant 0$

$x^2 - 4x \leqslant 3$

$x^2 - 4x - 3 \leqslant 0$

$(x - (2 - \sqrt{7}) \cdot (x - (2 + \sqrt{7})) \leqslant 0$

Se $x^2 - 4x < 0$:

$-x^2 + 4x \leqslant 3$

$x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$

$(x - 1) \cdot (x - 3) \geqslant 0$

Portanto, $2 - \sqrt{7} \leqslant x \leqslant 1$ ou $3 \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{7}$.

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - \sqrt{7} \leqslant x \leqslant 1$ ou $3 \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{7}\}$.

**14.** Para que $|x^2 - 6x - 8| < 1$, temos que, se $x^2 - 6x - 8 > 0$:

$x^2 - 6x - 8 < 1$

$x^2 - 6x - 9 < 0$

A equação $x^2 - 6x - 9 = 0$ tem as soluções:

$x = 3 - 3\sqrt{2}$ e $x = 3 + 3\sqrt{2}$

Se $x^2 - 6x - 8 < 0$:

$-x^2 + 6x + 8 < 1$

$x^2 - 6x - 7 > 0$

A equação $x^2 - 6x - 7 = 0$ tem as soluções: $x = -1$ e $x = 7$

Logo, $3 - 3\sqrt{3} < x < -1$ ou $7 < x < 3 + 3\sqrt{2}$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 - 3\sqrt{3} < x < -1$ ou $7 < x < 3 + 3\sqrt{2}\}$.

**15.** B

No conjunto P:

Se $x \geqslant 0$:

$x \leqslant \sqrt{7}$

Se $x < 0$:

$-x \leqslant \sqrt{7}$

$x \geqslant -\sqrt{7}$

$-\sqrt{7} \leqslant x \leqslant \sqrt{7}$

Portanto, $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

No conjunto Q:

$x^2 \leqslant 0{,}333\ldots$

$x^2 \leqslant \frac{1}{3}$

$|x| \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}}$

$|x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$

$|x| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{-\sqrt{3}}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$

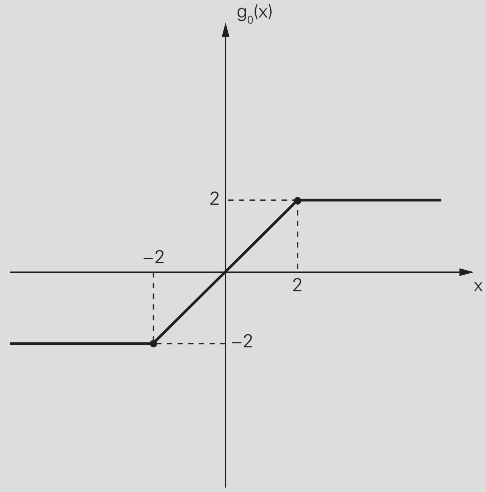
Portanto, $Q = \{0\}$.

II. Incorreta, pois $Q - P = \{\ \}$.

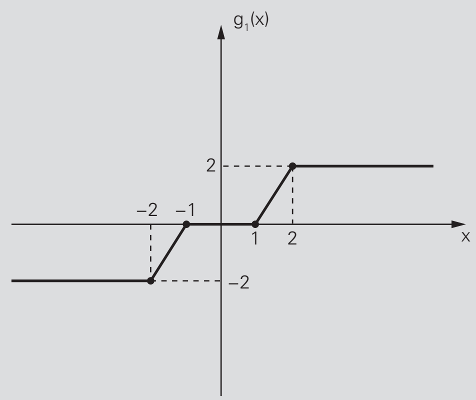
III. Incorreta, pois $P \supset Q$.

**16.**

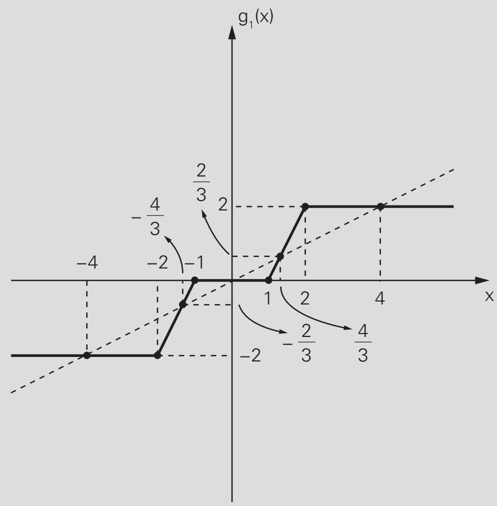
a)




b)




c)




Para $1 \leqslant x \leqslant 2$, temos $g_1(x) = 2x - 2$.

O ponto de intersecção nesse intervalo é:

$$2x - 2 = \frac{x}{2}$$

$$3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Assim, as soluções de $g_1(x) = \frac{x}{2}$ são $\left\{-4, -\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}, 4\right\}$ e $g_1(x) \leqslant \frac{x}{2}$.

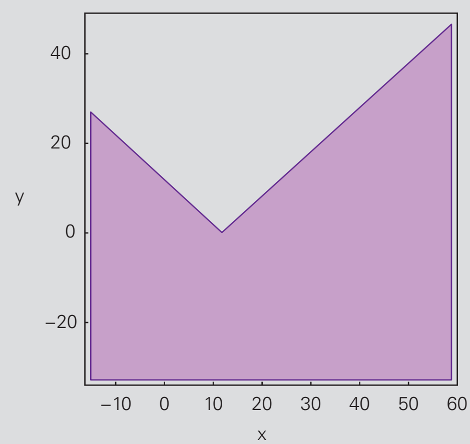
Portanto, $\left[-4, \frac{-4}{3}\right] \cup \left[0, \frac{4}{3}\right] \cup [4, +\infty)$.

**17.** B

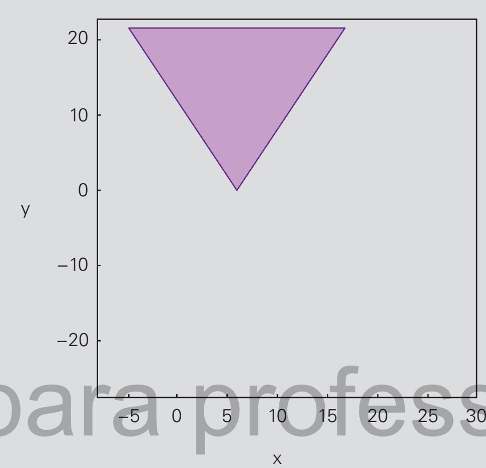
A solução desse sistema é a intersecção de todas as áreas dos gráficos do sistema de inequações.

Portanto:

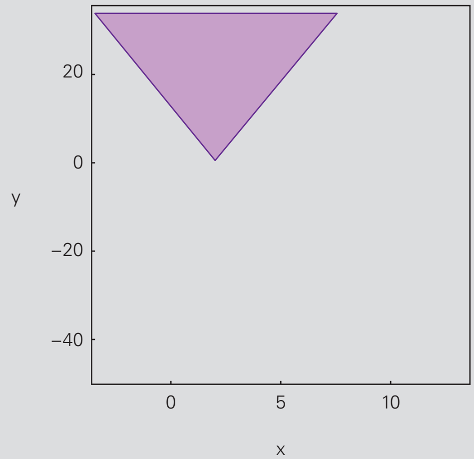
$y \leqslant |x - 12|$:




$y \geqslant |2x - 12|$:



$y \geqslant |6x - 12|$:




As coordenadas de B são:
$y = 6x - 12$
$y = 12 - x$

$B = \left\{\frac{24}{7}, \frac{60}{7}\right\}$

As coordenadas de C são:

$y = 6x - 12$

$y = 12 - 2x$

$C = (3{,}6)$

Logo, é um triângulo de vértices (3, 6), (0, 12) e $\left(\frac{24}{7}, \frac{60}{7}\right)$.

## Estudo para o Enem

**18.** A

Se $-n^2 + 14n - 30 \geqslant 0$, então:

$-n^2 + 14n - 30 \geqslant 15$

$-n^2 + 14n - 45 \geqslant 0$

As raízes da equação $-n^2 + 14n - 45 = 0$ são $n = 5$ e $n = 9$

Portanto, $-n^2 + 14n - 45 \geqslant 0 \leftrightarrow 0 \leqslant n^2 - 14n + 45 \rightarrow n \geqslant 9$ ou $n \leqslant 5$.

Como a empresa já tem 6 funcionários, o mínimo de funcionários que ela tem será 9.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**19.** E

Pela figura, a soma das dimensões da bagagem não pode ser superior a 115 cm.

Portanto, $x + 42 + 24 \leqslant 115$.

Assim, $x \leqslant 49$.

Dessa forma, o valor máximo de **x** para que a caixa permaneça dentro dos padrões da Anac é 49 cm.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**20.** E

Temos que: $\left|\frac{(h-160)}{20}\right| \leqslant 1$.

Logo:

$-1 \leqslant \frac{(h-160)}{20} \leqslant 1$

$-20 \leqslant h - 160 \leqslant 20$

$140 \leqslant h \leqslant 180$

Portanto, a altura mínima de uma mulher desse país é de 1,40 m.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

# 23 EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

## Comentários sobre o módulo

Retomamos as propriedades de potenciação e as aplicações da resolução de equações exponenciais de mesma base.

A equação exponencial é considerada uma importante ferramenta da Matemática e abrange diversas situações cotidianas, além de contribuir de forma satisfatória para se obterem resultados que exigem análises quantitativa e qualitativa.

São abordadas técnicas de resolução de equações exponenciais dentro do conjunto dos reais utilizando propriedades da potenciação.

## Exercícios propostos

**7.** A

Chamamos $t = 2^x$. Logo, $t^3 - 7t + 6 = 0$. Podemos verificar por inspeção que $t = 1$ e $t = 2$ são raízes.

Portanto, se $t = 1$, $x = 0$; e se $t = 2$, $x = 1$.

**8.** B

Reescrevendo a equação, temos:

$$2\left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 3 = 0$$

$$2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{2x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 3 = 0$$

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^{4x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 3 = 0$$

Chamamos $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$.

Logo, $2t^2 - 5t + 3 = 0$.

As raízes da equação são $t = 1$ e $t = \frac{3}{2}$.

Assim, $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 1 \rightarrow x = 0$ e $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \frac{3}{2} \rightarrow$

$\rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Portanto, o dobro da soma das raízes da equação é $2 \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right) = 1$.

**9.** D

Temos que:

$$9^x - 9^{x-1} = 9^x \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 9^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right) = 1\,944$$

$$9^x = \frac{9 \cdot 1944}{8}$$

$$9^x = 9 \cdot 243 = 9 \cdot 9^2 \cdot 3$$

$$3^{2x} = 3^{2+4+1}$$

$$x = \frac{7}{2}$$

Portanto, $m = 7$ e $n = 2$. Logo, $m - n = 5$.

**10.** Transformando todos os termos em potências de base 5, temos:

$5^{2x} + 5^4 = 130 \cdot 5^x$

$5^{2x} - 130 \cdot 5^x + 5^4 = 0$

Fazendo $t = 5^x$:

$t^2 - 130 \cdot t + 5^4 = 0$

$t = 5$ ou $t = 125$

Então, $5^x = 5 \rightarrow x = 1$.

Ou $5^x = 5^3 \rightarrow x = 3$.

$S = \{1, 3\}$.

**11.** D

Para uma criança de 8 kg:

$$S_C = \frac{11}{100} 8^{\frac{2}{3}} = \frac{11}{100} \sqrt[3]{2^{3 \cdot 2}} = \frac{44}{100}$$

Quando essa área duplicar, $S_C = \frac{88}{100}$.

Logo:

$$\frac{88}{100} = \frac{11}{100} m^{\frac{2}{3}}$$

$$m^{\frac{2}{3}} = 8$$

$$m^2 = 8^3 = 2^9$$

$$m = \sqrt{2^9} = 2^4\sqrt{2} = 16 \cdot 1{,}4 = 22{,}4 \text{ kg.}$$

**12.** E

Temos que:

$10 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 \cdot 10^{0,1m}$

$5 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^2 \cdot 10^{0,1m}$

$10 = 10^{0,1m}$

$0{,}1\,m = 1$

$m = 10$.

**13.** C

Temos que $f(g(x)) = 3^{x^3}$ e $g(f(x)) = (3^x)^3 = 3^{3x}$.

Assim, quando $f(g(x)) = g(f(x))$:

$3^{x^3} = 3^{3x}$

$x^3 = 3x$

$x \cdot (x^2 - 3) = 0$

Portanto, é uma equação do 3º grau. Consequentemente, há 3 soluções.

**14.** Temos que $328 = 2^3 \cdot 41$.

Assim:

$$2^{x+1} + 2^{x-2} + 2^{x+3} = 2^x \cdot \left(2+\frac{1}{4}+10\right) = 2^3 \cdot 41$$

$$2^x\left(\frac{41}{4}\right) = 2^3 \cdot 41$$

$2^x = 2^{3+2}$

$x = 5$

$S = \{5\}$.

**15.** C

Em dois dias ($d = 2$), a população de bactérias reduziu-se a 3 750.
Então:

$3\,750 = P_0 \cdot 0{,}25^2$

$$P_0 = \frac{3\,750}{0{,}0625} = 60\,000$$

Assim, $P_0 = \alpha \cdot 10^n = 6 \cdot 10^4 \rightarrow \alpha = 6$ e $n = 4$.

Portanto, $\alpha \cdot n = 6 \cdot 4 = 24$.

**16.** Na base 1 temos, $x^2 - 5x + 7 = 1 \rightarrow x = 2$ ou $x = 3$.
Para $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$.
Portanto, os números reais que satisfazem a equação são 3.
Assim, $S = \{-1, 2, 3\}$.

**17.** D

Fazendo $y = 2^{\sqrt{x+1}}$, $y > 0$, temos: $y^3 - 19y^2 + 44y + 64 = 0$.
Por inspeção, 4 é raiz da equação. Logo, as outras duas raízes $\alpha$ e $\beta$ satisfazem as seguintes equações:

$\alpha + \beta + 4 = 19$ e $\alpha \cdot \beta \cdot 4 = -64$

Então, $\alpha + \beta = 15$ e $\alpha \cdot \beta = -16$.

Assim, $\alpha = 16$ e $\beta = -1$ ou $\alpha = -1$ e $\beta = 16$.

Portanto, os possíveis valores de y serão 4, 16 ou $-1$.

Assim:

$4 = 2^{\sqrt{x+1}} \rightarrow x = 3$

$16 = 2^{\sqrt{x+1}} \rightarrow x = 15$

$-1 = 2^{\sqrt{x+1}}$, $\nexists x \in \mathbb{R}$

Portanto, as raízes são 3 e 15, cuja soma é 18.

## Estudo para o Enem

**18.** A

A taxa de juros em relação ao tempo é de $(100\% + 0{,}033\%)^t = 1{,}00033^t$.
Soma-se a isso a multa de 2% sobre o valor inicial da parcela, que é R$ 2.600,00.
Portanto, a expressão que descreve o valor do juro pago é:

$2\,600\,[(1{,}00033)^t - 0{,}98]$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**19.** B

Como o circuito tem a metade de sua funcionalidade no dia 20:

$50 = Ca^{-k \cdot 20} - 150$

$Ca^{-20k} = 200$

No dia 0:

$100 = Ca^{-k \cdot 0} - 150$

$C = 250$

Assim:

$250a^{-20k} = 200$

$$a^{-20k} = \frac{4}{5}$$

Quando $t = 40$:

$f(40) = 250a^{-40t} - 150$

$250a^{-20t}a^{-20t} - 150 =$

$$= 250 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} - 150 = 10$$

Portanto, a queda de funcionalidade nos primeiros 40 dias é de $100 - 10 = 90\%$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**20.** C

Como é uma função exponencial, podemos tomar $t \rightarrow \infty$, para que $e^{-0{,}4t} = \dfrac{1}{e^{0{,}4t}} \rightarrow 0$.

Portanto, a quantidade máxima de peças que conseguirá montar por hora é de 30.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

# 24 FUNÇÕES EXPONENCIAIS

## Comentários sobre o módulo

Neste módulo, contemplamos os estudos sobre função exponencial. Para tal, retomamos propriedades de potenciação, bem como aplicações na resolução de inequações exponenciais. Em seguida, abordamos de forma concisa o estudo dessas funções, enfatizando a análise dos respectivos gráficos. O gráfico de função exponencial possibilita o estudo de situações que se enquadram em curva de crescimento ou decrescimento, bem como na análise das quantidades relacionadas à curva. Por isso, psicólogos e educadores fazem uso da função exponencial para demonstrar curvas de aprendizagem.

Em razão dessa propriedade, a função exponencial é considerada uma importante ferramenta na Matemática, pois abrange diversas situações cotidianas e contribui de forma satisfatória para a obtenção de resultados que exigem análises quantitativa e qualitativa.

## Para ir além

O trabalho de Carlos Nicolau tem, como base, a utilização de uma das tendências em educação matemática, a resolução de problemas, a fim de explanar o conteúdo de função exponencial.

Disponível em:

<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_carlos_nicolau.pdf>

Acesso em: 20 out. 2018

## Exercícios propostos

**7.** D

Ao igualarmos as duas funções, temos $\frac{3^{x+64}}{5} = \frac{81^x}{45}$.

$\frac{3^{x+64}}{5} = \frac{3^{4x}}{3^2 \cdot 5}$

$\frac{3^{x+64}}{5} = \frac{3^{4x-2}}{5}$

Assim, $x + 64 = 4x - 2$.

Então, $3x = 66$.

Logo, $x = 22$, $y = \frac{81^{22}}{45}$. Ou seja, em um único ponto do 1º quadrante.

**8.** D

Temos que $y = y(t)$.

Logo, a dose inicial é dada por $y(0) = 100 \cdot 0{,}9^0 = 100$ mg.

A dose após 3 horas é de $y(3) = 100 \cdot 0{,}9^3 = 72{,}9$ mg.

**9.** A

Temos que $f(4) = 5\,000 \cdot 2^5 = 5\,000 \cdot 32$.

Quando $f(x) = 5\,000 \cdot 32 \cdot 4 = 5\,000 \cdot 2^7$, obtemos $f(x) = 5\,000 \cdot 2^{(x+1)} = 5\,000 \cdot 2^7$.

Portanto, $x + 1 = 6 \to x = 6$. Logo, no 6º dia.

**10.** Temos que $y = ax = 2^x$

$y(0) = 0$ para $y = a^x$

$y(0) = 1$ para $y = 2^x$

$y(1) = a$ para $y = ax$

$y(1) = 2$ para $y = 2x$

Então, para $y = ax$, com $0 < a < 1$.

Os gráficos não se interceptam nenhuma vez.

**11.** C

Temos que $\frac{f(n+3) + 10f(n)}{f(n-1)} + f(1) = \frac{10^{n+3} + 10^{n+1}}{10^{n-1}} + 10 = \frac{10^{n+1}(10^2+1)}{10^{n-1}} + 10 =$

$= 10^2(10^2 + 1) + 10 = 100(101) + 10 =$

$= 10\,100 + 10 = 10\,110$

**12.** A

Ao analisarmos o gráfico, temos $f(0) = -1$ e $f(2) = 8$.

Assim, $f(0) = 3 \cdot a^{-1} + b = 0 \to \frac{3}{a} = -b \to \to a \cdot b = -3$.

Portanto, $-3 \in [-4, -1[$.

**13.** D

Ao analisarmos cada alternativa, temos:

a) **f** é crescente e **g** é decrescente

Falsa, ambas são crescentes.

b) **f** e **g** se interceptam em $x = 0$. Falsa.

$\frac{2^x + 2^{-x}}{2} = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$

$2^x + 2^{-x} = 2^x - 2^{-x}$

$2 \cdot 2^{-x} = 0$

$2^{1-x} = 0$, (não intercepta em $x = 0$)

c) $f(0) = -g(0)$. Falsa.

$f(0) = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$g(0) = \dfrac{1-1}{2} = 0$

d) $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$. Verdadeira.

$\dfrac{2^{2x} + 2 + 2^{-2x}}{4} - \dfrac{2^{2x} - 2 + 2^{-2x}}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

e) $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Para $x < 0$, $g(x) < 0$.

**14.** Temos que, no ponto $\left(0, \dfrac{1}{64}\right)$, $a^{0+2} = \dfrac{1}{64} \rightarrow a = \dfrac{1}{8}$.

Podemos encontrar os valores de **n** e **k** quando $A(x) = B(x)$. Ou seja, $a^{-x+2} = (4)^{\frac{x}{2}}$.

Assim, $a = \dfrac{1}{8}$.

$\left(\dfrac{1}{8}\right) = 4^{\frac{x}{2}}$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3x+6} = 2^x$

$2^{3x-6} = 2^x$

$3x - 6 = x$

$x = 3 = k$

Como $4^{\frac{x}{2}} = n$

$\sqrt{64} = n$

$n = 8$

Logo, $n + k = 8 + 3 = 11$.

**15.** B

Chamamos de $PIB_0$ o produto interno do país; $P_0$, a população; $R_0$, a renda per capita. Denominamos também $PIB_{20}$, $P_{20}$ e $R_{20}$ esses mesmos dados 20 anos depois.

Temos que $R_{20} = 2R_0$

$R_0 = \dfrac{PIB_0}{P_0}$ e $R_{20} = \dfrac{PIB_{20}}{P_{20}} = \dfrac{(1+i)^{20} PIB_0}{(1+0{,}02)^{20} P_0} =$

$= \left(\dfrac{1+i}{1+0{,}02}\right)^{20} R_0 = 2R_0$

Assim, $\dfrac{1+i}{1{,}02} = \sqrt[20]{2} \leftrightarrow 1 + i = 1{,}02 \cdot 1{,}035 =$

$= 1{,}0557$

$i = 5{,}57\%$

$i > 5{,}6\%$

**16.** E

Calculando, obtemos:

$\left(\dfrac{1}{7^x}\right)^{x^3-4} - 7\left(7^{x^2+1}\right)^{2x+1} \geqslant 0 \rightarrow$

$\rightarrow 7^{-x^4+4x} - 7^{2x^3-x^2+2x} \geqslant 0 \rightarrow$

$\rightarrow x(x-1)(x+1)(x+2) \leqslant 0 \rightarrow -2 \leqslant x \leqslant -1$ ou $0 \leqslant x \leqslant 1$

Portanto, $[-2, -1] \cup [0,1]$.

**17.** C

Resolvendo a inequação, temos:

$N(t) = N_0e^{kt} \rightarrow N(0) = 100 \rightarrow N_0e^{k \cdot 0} = 100 \rightarrow$
$\rightarrow N_0 = 100 \rightarrow N_0 > 0$

Assim:

$N(t) = 100 \cdot e^{kt} \rightarrow N(8) = 50 \rightarrow 100 \cdot e^{k \cdot 8} = 50 \rightarrow$

$\rightarrow e^{k \cdot 8} = \dfrac{1}{2} \rightarrow k < 0$

## Estudo para o Enem

**18.** D

Temos que $p(0) = 40\,000$.

Logo, $p\left(t + \dfrac{1}{3}\right) = 40 \cdot 2^{3\left(t+\frac{1}{3}\right)} = 40 \cdot 2^{3t} \cdot 2 =$

$40\,000 \cdot 2 = 80\,000$.

Portanto, a população será duplicada após 20 min.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**19.** E

Se a cada hora a população de bactérias é reduzida pela metade, com uma população inicial $P_0$, na primeira hora temos:

$P(1) = \dfrac{1}{2}P_0$

Na segunda hora:

$P(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} P_0$

Portanto, numa hora qualquer **t**, temos $P(t) = P_0\left(\frac{1}{2}\right)^t$, que é uma função exponencial.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**20.** B

Caso sejam removidos 20% dos poluentes, sobram 80% dos poluentes no tubo. Logo, como a quantidade inicial de poluentes no tubo é de $P_0$, temos que, em **n** metros de tubulação, $P = P_0(0,8)^n$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

# 25 TIPOS DE FUNÇÃO

## Comentários sobre o módulo

O estudo das relações entre domínio, contradomínio e imagem possibilita construir funções mais sofisticadas.

É preciso ter em mente a ideia de que nem sempre uma função se classifica como injetora ou sobrejetora.

Algumas funções não admitem essa classificação. Converse com os alunos sobre esses conceitos e prepare-os para os próximos módulos, que abordam funções inversas e logaritmos.

## Exercícios propostos

**7.** A

1. A função é crescente no intervalo aberto (4, 6). Verdadeiro. No intervalo aberto (4, 6), se $x < y$, temos que $f(x) < f(y)$.

2. A função tem um ponto de máximo em $x = 1$. Verdadeiro. O ponto $x = 1$ é um ponto de máximo.

3. Esse gráfico representa uma função injetora. Falso. Se traçarmos uma reta horizontal no gráfico, ela o intercepta em mais de um ponto. Logo, não é injetora.

4. Esse gráfico representa uma função polinomial de 3° grau.

Falso. Como há 4 pontos em que $f(x) = 0$, essa função é do 4° grau.

**8.** E

Para que **f** seja bijetora, **f** precisa ser injetora e sobrejetora. Para que **f** seja injetora e sobrejetora, cada valor de **x** deve ter um elemento **y** em sua imagem, e cada valor de **y** deve ter apenas um correspondente no domínio de f. Como o gráfico é uma parábola (ou seja, simétrica e par), ela só é injetora se $D(f) = [0, +\infty[$. Sendo assim, $Im(f) = [1, +\infty[$.

**9.** A

I) $A = \mathbb{R}^*$. Verdadeiro. Como o elemento 0 (zero) não está definido no gráfico, não está no domínio de **f**. Então, $A = \mathbb{R}^*$.

II) f é sobrejetora se $B = \mathbb{R} - [-e, e]$. Falso. Temos que f não é sobrejetora mesmo sem o intervalo $[-e, e]$, pois existem elementos em seu contradomínio que não apresentam um elemento no domínio de **f**.

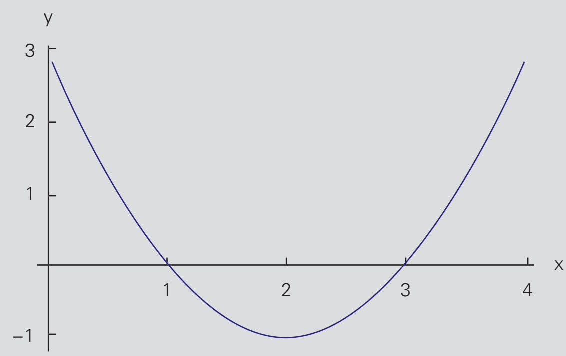
III) Para infinitos valores de $A \in X$, temos $f(x) = -b$ Verdadeiro. Para todo $x \in [c, -b]$, temos $f(x) = -b$, de modo que existem infinitos valores de $x \in A$ com imagem igual a $-b$.

IV) $f(-c) - f(c) + f(-b) + f(b) = 2b$. Verdadeiro. Temos que $f(-c) + f(c) + f(-b) + f(b) = b - (-b) + b = 2b$.

V) f é função par. Falso, pois $f(-a) = -e \neq e = f(a)$.

VI) $\nexists x \in R \mid f(x) = -d$ Falso. Temos que $f([a,b]) = [e,b]$ e, como $-d \in [e,b]$, existe um ponto x no intervalo $[a,b]$, tal que $f(x) = -d$.

**10.** Esboçando o gráfico $x^2 - 4x + 3$, temos:




Para qualquer subconjunto do intervalo $]-\infty, 2]$, no eixo de simetria essa função pode ser injetora.

Portanto, o valor máximo para **d** é 2.

**11.** B

Para que a função seja injetora, temos que, para cada valor de **x** que pertence ao domínio **A**, existe um único valor **y** (ou f(x)) que pertence ao contradomínio **B**.

Se $\forall x_1, x_2 \in A$, temos $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Portanto, se a função associa a cada país que tem um presidente, a função é injetora.

**12.** A

Como **f** é injetora, cada elemento de **A** tem um único elemento correspondente em **B**. Portanto: $3n - 3 = 2n + 1n = 4$. Então, $1 < n \leqslant 4$.

**13.** Soma: 04 + 08 = 12

01. A função f: $R \rightarrow R$, definida por $f(x) = 10 - 2^x$, é decrescente e sobrejetiva. Falso. A função é decrescente, mas como f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a função não é sobrejetiva, pois não existe um elemento **y** nos reais para todo elemento **x** no domínio, tal que $f(x) = y$.

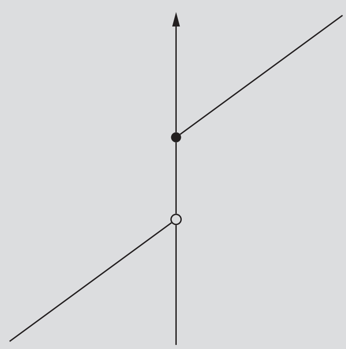
02. A área da região plana fechada, pertencente ao 1º quadrante e limitada pela função $f(x) = 12 - 2x$, é igual a 72 u.a. Falso. Temos que $f(x) = 0 \rightarrow x = 6$ e $f(0) = 12$.

Logo, é um triângulo de base 6 e altura 12. Portanto, de área igual a $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$.

04. A imagem da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 20$, é dada pelo conjunto $Im = [16, +\infty[$.

Verdadeiro. Como o vértice da função é $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16-4\cdot 20)}{4} = \frac{64}{4} = 16$. Como $a > 0$ a parábola é côncava para cima. Logo, Im = [16, + ∞[.
08. Se g: ℝ → ℝ é definida por g(x) = = 2x − 11, então g(2x + 3) = 4x − 5. Verdadeiro. Temos que g(2x + 3) = 2(2x + 3) − − 11 = 4x + 5.
16. Se a função f: ℝ → ℝ, definida por f(x) = $x^2$ + bx + + 10 e com b ∈ ℝ, tem valor mínimo igual a 1, então o único valor possível para **b** é 6. Falso. O valor mínimo é o vértice da parábola. Logo, $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = 1$.
$-b^2 - 40 = 4$.
b = + −6.
32. A função f: ℝ → ℝ, definida por f(x) = = ||x − 2| −1|, tem três raízes reais distintas. Falso. Para f(x) = 0, temos |x − 2 | −1 = 0. |x − 2 | =1 x − 2 = 1 ou x − 2 = −1 x = 3 ou x = 1, (duas raízes)
Soma: 04 + 08 = 12

**14.** Esboçando o gráfico de **f**, temos:



Traçando retas horizontais, podemos ver que todas as retas interceptam o gráfico uma única vez. Assim, **f** é injetora. E, para todas as retas, todos os valores do contradomínio têm um valor correspondente no domínio. Portanto, **f** é sobrejetora.
Como **f** é injetora e sobrejetora, **f** é bijetora.

**15.** A

I. Existe uma bijeção f: X → Y. Falso, pois, para que **f** seja bijetora, deveria haver o mesmo número de elementos em **X** e **Y**.

II. Existe uma função injetora g: Y → X. Falso, pois como **Y** tem mais elementos do que **X**, para existir uma função g: Y → X, deve haver pelo menos dois elementos distintos **a** e **b** de **Y** com a mesma imagem. Ou seja, g(a) = g(b). Portanto, **g** não será injetora.

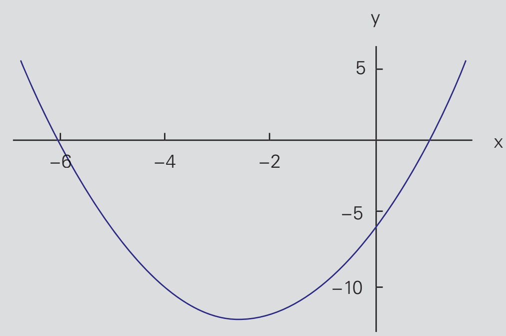
**16.** A

I. Se **f** e **g** são injetoras, f + g é injetora. Falso. Suponhamos que f(x) = x e g(x) = − x, ambas são funções injetora, mas f + g: ℝ → ℝ, tal que (f + g) (x) = 0 não é injetora, pois é uma função constante.
II. Se **f** e **g** são injetoras, f + g é injetora. Falso. Tal como no exemplo anterior, as duas funções **f** e **g** são sobrejetoras, porém f + g : R → R, tal que (f + g) (x) = 0, não é sobrejetora. Então, f + g é sobrejetora (portanto, bijetora).

**17.** a) Para que **f** seja sobrejetora, para todo y pertencente ao contradomínio **B**, deve existir pelo menos um **x** pertencente a **A**, tal que f (x) = y. Portanto, analisando a função **f**, observamos que é uma parábola com concavidade para cima e duas raízes reais. Calculando a ordenada do vértice, temos:

$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(25+24)}{4} = \frac{-49}{4}$. Assim, para que **f** seja sobrejetora, devemos ter $B = \left[\frac{-49}{4}, +\infty\right[$.

b) Como **f** é sobrejetora, para que ela seja bijetora, devemos ter **f** injetora também. Seja o gráfico de **f**:




Logo, para que **f** seja injetora, se traçarmos retas horizontais no gráfico de **f**, elas devem interceptar o gráfico em um único ponto. Para que isso aconteça, devemos ter o menor valor da abscissa em seu vértice. Portanto, $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2}$.
Logo, $a = \frac{-5}{2}$.

## Estudo para o Enem

**18.** A

Segundo a peça publicitária, existe uma única ação associada a cada dia da semana. Podemos dizer que há uma função que associa cada dia da semana a uma ação. Logo, **f** é injetora. Como todas as ações de **B** têm um elemento no conjunto **A**, **f** é sobrejetora. Como **f** é injetora e sobrejetora, **f** é bijetora.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

**19.** A

Para que a função seja bijetora, a função deve ser injetora e bijetora. Portanto, todos os valores de **B** devem ter um valor correspondente em **A**, e todos os valores de **A** devem ter um valor único correspondente em **B**.

A tabela 1 satisfaz essas condições.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**20.** A

Como cada menina do conjunto **A** tem um menino correspondente diferente do conjunto **B**, **f** é injetiva. Porém, como existem meninos que não formarão par com nenhuma menina do conjunto **A**, então **f** não é sobrejetiva. Dessa forma, **f** não é bijetiva.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

# 26 FUNÇÃO INVERSA

## Comentários sobre o módulo

O estudo de funções tem grande importância na formação e preparação dos alunos para provas de concurso em nível nacional. Enfatizamos a função inversa, preparando-os para a abordagem de funções logarítmicas como inversa da função exponencial. Sabemos que a função só admite inversa se for bijetora. Para ser bijetora, é preciso ser injetora e sobrejetora concomitantemente. Por isso se pode entender que, de certa forma, é necessário o estudo da classificação de funções.

Existem funções que não admitem inversa. Por isso devemos ficar sempre atentos aos conjuntos domínio e contradomínio da função. Converse com os alunos sobre esses conceitos e prepare-os para os próximos módulos, que abordam logaritmos.

## Exercícios propostos

**7.** E

a) A função f(x) é ímpar.

$f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x)$, (função par)

b) A função $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$ é a inversa de f(x).
Invertendo **x** e **y** em f(x):
$x = y^2 - 1$
$y^2 = x + 1$
$y=\sqrt{x+1}$
Porém, como o domínio de **x** é diferente do contradomínio de $f^{-1}$, esta não é a função inversa de **f**.

c) O ponto de máximo da função f(x) é P(0, −1).
$x_v=\frac{-b}{2a}=0$

$y_v=f(x_v)=\ -1$

Como a função é côncava para cima, esse é o ponto de mínimo.

d) A função f(x) é crescente para o intervalo [−1, + ∞[. Tomando os pontos $x_1 = -1$ e $x_2 = 0$, temos que $x_2 > x_1$. Então, $f(x_1) = 0$ e $f(x_2) = -1$. Logo, $f(x_2) < f(x_1)$.

e) A equação f(f(x)) = 0 tem três raízes reais distintas. $f(x^2 - 1) = (x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = x^2(x^2 - 2)$
$x = 0,\ x=\ \pm\sqrt{2}$.

**8.** Calculando a inversa de **f**:
$y = 2^{c - 4x}$
Invertendo **x** e **y**:
$x = 2^{c - 4y}$
Temos que $f^{-1}(\sqrt{2})=0$.
Então $2^{\frac{1}{2}}=2^c$.
Assim, $c=\frac{1}{2}$.

**9.** A

Temos que $g^{-1}(f(g^{-1}(x))) = g^{-1}(g(f^{-1}(x)))$.
Então: $f^{-1}(x) = g^{-1}(f(g^{-1}(x)))$.

Fazendo x 5 g(x), temos f−1(g(x)) 5
g−1(f(g−1(g(x))) 5 = g−1(f(x))) 5 $g^{-1}\circ f$.

**10.** Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15

01) As funções $f_1$ e $f_2$ são bijetoras. Verdadeiro, pois A = {0, 1, 2, 3, 4}, B = {0, 2, 4, 6, 8} e $f_1(x) = 2x$, $f_2(x)=\frac{x}{2}$. Logo, como todos os elementos do domínio de uma função têm um único elemento correspondente no contradomínio, $f_1$ e $f_2$ são bijetoras.

02) O contradomínio da função $f_3$ é o conjunto C.
Verdadeiro, pois $f_3: A \to C$.

04) A função $f_1$ é a inversa de $f_2$.
Verdadeiro, pois y = 2x.
Invertendo **x** e **y**, temos $x=2y\to y=\frac{x}{2}$.

08) A função composta $g=f_4\circ f_3: A\to A\cup B$ é tal que $g(x)=2x$.
Verdadeiro, pois $g(x)=f_4(4x+1)=\frac{4x+1-1}{2}=2x$.

16) A imagem da função $f_4$ é o conjunto A ∪ B.
Falso, pois $f_4$: {1, 5, 9, 13, 17} → {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8}
$F_4(1) = 0$
$F_4(5) = 2$
$F_4(9) = 4$
$F_4(13) = 6$
$F_4(17) = 8$
A imagem da função $f_4$ é o conjunto B.

**11.** Soma: 01 + 02 + 16 = 19

Analisando cada situação, temos:
01) Para todo x ∈ R, f(x) < 84.
Verdadeiro. Calculando os valores do vértice da parábola:

$$y_v=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(400-4\cdot16)}{-4}=84$$

Como a parábola é côncava para baixo, esse é o ponto de máximo. Logo, $f(x)\le84$ para todo **x** real.

02) (f + g)(1) = 8.
Verdadeiro, pois (f + g)(1) = f(1) + g(1) = = (−1 + 20 − 16) + (−5 + 10) = 3 + 5 = 8.

04) Os gráficos de **f** e **g** não se interceptam.
Falso, pois, fazendo f(x) = g(x):

$-x^2 + 20x - 16 = -5 + 10$

$-x^2 + 25x - 26 = 0$

$\Delta = 625 - 4 \cdot 26 = 521 > 0$

Portanto, existem pontos reais em que **f** e **g** se interceptam.

08) O gráfico da função **g** é uma parábola com concavidade voltada para cima.
Falso. O gráfico de **g** não é uma parábola.

16) A função **f** não tem inversa, e $g^{-1}(x) = -\frac{x}{5} + 2$, para todo **x** real.

Verdadeiro. Como **f** não é bijetora, **f** não tem inversa.
Seja y = −5x + 10.

Invertendo **x** e **y**:

$x = -5y + 10$

$5y = 10 - x$

$y = -\frac{x}{5} + 2$

$g^{-1}(x) = -\frac{x}{5} + 2.$

**12.** D

Temos que f(x) = ax + b

f(4) = 0 e f(0) = 2

f(0) = b = 2

f(4) = 4a + 2 =

$a = \frac{-1}{2}$

Logo, $f(x) = \frac{-1}{2}x + 2.$

$y = \frac{-1}{2}x + 2$

Invertendo **x** e **y**:

$x = \frac{-1}{2}y + 2$

$2x = -y + 4$

$y = 4 - 2x$

$f^{-1}(x) = 4 - 2x$

a = −2 e b = 4 (decrescente e intercepta o eixo das abscissas em x = 2)

**13.** B

Analisando cada caso, temos:

(V) A função **f** é injetora.

Para cada x ≠ y, temos f(x) ≠ f(y).

(V) $\forall x \in \mathbb{R}$, − a função **f** é crescente.

Para x < 2, a função é crescente, pois o coeficiente linear é positivo.

Para x > 2, a função também é crescente, pois é uma parábola com concavidade para cima.

(V) A função $f^{-1}$, inversa de **f**, é dada por $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x)^{-1} \begin{cases} x+3, \text{ se } x \leq -1 \\ \sqrt{4x+4}, \text{ se } x > -1 \end{cases}$.

Para x < 2, y = x − 3.

Invertendo **x** e **y**:

$y < 2,\ x = y - 3$

$y = x + 3$

$f^{-1}(x) = x + 3$

$x + 3 \leq 2 \rightarrow x \leq -1$

Para x > 2, $y = \frac{x^2}{4} - x.$

Invertendo **x** e **y**:

$y > 2,\ x = \frac{y^2}{4} - y$

$4x = y^2 - 4y$

$4x + 4 = y^2 - 4y + 4$

$(y - 2)^2 = 4x + 4$

$y - 2 = \sqrt{4x+4}$

$y = \sqrt{4x+4} + 2$

$\sqrt{4x+4} + 2 > 2$

$\sqrt{4x+4} > 0$

$4x + 4 > 0$

$x > -1.$

**14.** a) $f^{-1}(\alpha) = \text{arcsen}\,\alpha = k$

$\text{sen}\,k = \alpha$

$-\frac{\pi}{2} \leq k \leq \frac{\pi}{2}$

$(g \circ f^{-1})(\alpha) = g(k) = \cos k = \sqrt{1 - \text{sen}^2 k} = \sqrt{1 - \alpha^2}$ .

b) $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{arcsen}\frac{1}{2} = \beta$

$\text{sen}\beta = \frac{1}{2} \leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$, pois $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$

$g^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \theta$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\theta = \frac{\pi}{12}$, pois $0 \leq \theta \leq \pi$

Logo, $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + g^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \beta + \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}.$

**15.** E

Analisando cada situação, temos:

I. Se $x, y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então $x + y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$;
Falso. Com y ≠ −x, podemos escolher **x** e **y** de forma que sejam números irracionais, mas sua soma seja racional.

Seja:

$x = 1+\sqrt{3}$

$y = 1-\sqrt{3}$

$x+y = 2 \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, pois $2 \in \mathbb{Q}$.

II. Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Falso, pois **x** pode ser nulo. Portanto, $x \cdot y = 0$ e $x \cdot y \in \mathbb{Q} \leftrightarrow xy \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

III. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a < b < c$. Se $f:[a, c] \to [a, b]$ é sobrejetora. Então, **f** não é injetora.

Falso. Seja uma função $f:[a, c] \to [a, b]$, estritamente decrescente no intervalo [a, c]. Ela é injetora, pois é estritamente decrescente e é sobrejetora, pois $Im(f) = [a, b] = CD(f)$.

**16.** Se f e $f^{-1}$ têm um ponto comum, é da forma (a, a). Portanto, para determinar esses pontos, temos $y = x$.

Logo, $x = -x^2 + 2x + 2 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0$. $x = -1 \notin [1, +\infty[$ ou $x = 2$

Logo, o ponto é (2, 2). Portanto, $a + b = 2 + 2 = 4$.

**17.** A

Temos que $f(x) = y = ax + b$

$x = \dfrac{y-b}{a}$, logo $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

Sendo $g(x) = t = cx + b$

$x = \dfrac{t-d}{c}$, logo $g^{-1}(x) = \dfrac{x-d}{c}$

$$f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}\left[\frac{x-d}{c}\right] = \frac{\frac{x-d}{c} - b}{a} =$$

$$= \frac{x-d-bc}{ac}$$

$$g^{-1}(x) \circ f^{-1}(x) = g^{-1}[f^{-1}(x)] = g^{-1}\left[\frac{x-b}{a}\right] = \frac{\frac{x-b}{a} - d}{c} =$$

$$= \frac{x-b-ad}{ac}$$

Como $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$:

$$\frac{x-d-bc}{ac} = \frac{x-b-ad}{ac}$$

$d + bc = b + ad$

## Estudo para o Enem

**18.** E

Temos que $y = 2x + 1$

Invertendo **x** e **y**:

$x = 2y + 1$

$y = \dfrac{x-1}{2}$

$G^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

Como a primeira letra é codificada por 27, $G^{-1}(x) = \dfrac{27-1}{2} = 13$, o que corresponde à letra M.

Portanto, a palavra é **Matemática**.

**Competência:** Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

**Habilidade:** Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

**19.** D

Temos que $v = -0{,}1t^2 + 4t - 10$.

Invertendo **v** e **t**:

$t = -0{,}1v^2 + 4v - 10$. Para que $v = 20$:

$t = -0{,}1(100) + 4(10) - 10 = -10 + 40 - 10 = 20$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**20.** D

A função n(t) do gráfico é descrita por:

$N(t) = -10t^2 + 40t$

Logo, $n = -10t^2 + 40$.

Invertendo **n** e **t**:

$t = -10n^2 + 40n$

$t - 40 = -10n^2 + 40n - 40$

$40 - t = 10(n^2 - 4n + 4)$

$40 - t = 10(n-2)^2$

$4 - \dfrac{1}{10}t = (n-2)^2$

$n - 2 = \sqrt{4 - \dfrac{1}{10}t}$

$n = \sqrt{4 - \dfrac{1}{10}t} + 2$

$n^{-1}(t) = \sqrt{4 - \dfrac{1}{10}t} + 2$

$n^{-1}(t) = \sqrt{4 - \dfrac{1}{10}t} + 2$

**Competência:** Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

**Habilidade:** Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

## 27 LOGARITMOS I

### Comentários sobre o módulo

A aplicação do logaritmo é feita em diversas áreas. No Ensino Básico, os usos mais evidentes estão em Matemática financeira, Química, Geografia etc.

Na Matemática financeira, o logaritmo tem aplicação no cálculo do tempo de aplicação de um capital, a juros compostos, para gerar determinado montante.

Nos enunciados de questões de concursos e vestibulares, em que não é possível usar calculadora, normalmente é fornecido o logaritmo dos números que dizem respeito à resolução do problema.

### Para ir além

Veja algumas aplicações do conceito de logaritmo com o conteúdo a seguir, que apresenta um pequeno resumo das propriedades logarítmicas e um modo de resolver problemas reais utilizando o logaritmo. Disponível em:

<http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=581>

Acesso em: 22 out. 2018.

### Exercícios propostos

**7.** B

Temos que $1 - 2x > 0$ e $2 - x - x^2 > 0$ e $1 > 2x \rightarrow$
$\rightarrow x < \frac{1}{2}$

As raízes da equação $x^2 + x - 2 = 0$

são $x = 1$ e $x = -2$.

Logo:

$-(x+2)(x-1) > 0$

$(x+2)(x-1) < 0$

$x > -2$

$x < 1$

Então, $S = \left\{x \in \mathbb{R}^* \mid -2 < x < \frac{1}{2}\right\}$.

**8.** B

Colocando todos os termos na base **x**, temos:

$$\frac{2}{\log_2 x} + \frac{2}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_4 x} = 2\left(\frac{\log_2 2}{\log_2 x} + \frac{\log_2 2}{\log_3 x} + \frac{\log_2 2}{\log_4 x}\right) =$$

$= 2(\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 4)$

$2 \cdot \log_x 2 \cdot 3 \cdot 4 = \log_x 24^2 = \log_x 576$

**9.** $S = \frac{\log_2 2}{2 \cdot \log_2 2016} + \frac{\log_3 3}{5 \cdot \log_3 2016} + \frac{\log_7 7}{10 \cdot \log_7 2016} =$

$= \frac{1}{2}\log_{2016} 2 + \frac{1}{5}\log_{2016} 3 + \frac{1}{10}\log_{2016} 7 =$

$= \log_{2016}\sqrt{2} + \log_{2016}\sqrt[5]{3} + \log_{2016}\sqrt[10]{7} =$

$= \log_{2016}\sqrt[10]{32} + \log_{2016}\sqrt[10]{9} + \log_{2016}\sqrt[10]{7} =$

$= \log_{2016}\left(\sqrt[10]{32 \cdot 9 \cdot 7}\right) = \log_{2016} 2016^{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} = S = \frac{1}{10}$.

**10.** D

Temos que $\log_{10}(A+B) \neq \log_{10}A + \log_{10}B$.

Porém, para $A = 4$ e $B = r$, temos

$\log_{10}(A + B) = \log_{10} A + \log_{10}B$.

Logo, $\log_{10}(A + B) = \log_{10}(4 + r) = \log_{10}4 + \log_{10}r$.

Assim, $4 + r = 4r \rightarrow r = \frac{4}{3} = 1{,}333$.

Portanto, o número está entre 1,3 e 1,4.

**11.** Temos 10#, $(-5) = 10^2 - (-5)^2 + \log(10 - 5)$

$= 100 - 25 + \log 5 = 75 + \log\left(\frac{10}{2}\right) =$

$= 75 + \log 10 - \log 2 = 75 + 1 - \log 2 = 76 - \log 2$

**12.** Soma: 04 + 08 + 16 = 28

01) $\log 360 = 6(a + b) + 1$.

Falso, pois

$\log 360 = \log(2^3 3^2 5) = \log 2^3 + \log 3^2 + \log 5 =$

$= 3a + 2b + \log 5$.

02) $\log_{0,04} 18 = \frac{a + 2b}{a - 1}$.

Falso, porque

$\log_{\frac{4}{100}} 18 = \log_{\frac{4}{100}} 3^2 2 = 2 \cdot \log_{\frac{4}{100}} 3 + \log_{\frac{4}{100}} 2$

$= 2 \cdot \frac{\log 18}{\log \frac{4}{100}} + \frac{\log 2}{\log \frac{4}{100}} =$

$= 2 \cdot \frac{\log 3^2 2}{\log 2^2 - \log 10^2} + \frac{\log 2}{\log 2^2 - \log 10^2} =$

$= 2 \cdot \frac{2b + a}{2a - 2} + \frac{a}{2a - 2}$

$= \frac{4b + 2a + a}{2a - 2} = \frac{3a + 4b}{2a - 2}$.

04) $\log_x 40 = 2$ tem solução $x = \sqrt{10^{2^a+1}}$.

Verdadeiro, pois

$\log_x 40 = \log_x 2^2 10 = 2 \cdot \log_x 2 + \log_x 10 =$

$= 2\frac{\log 2}{\log x} + \frac{\log 10}{\log x} = \frac{2^a}{\log x} + \frac{1}{\log x} = \frac{2^a + 1}{\log x} = 2 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cdot \log x = 2a + 1 \rightarrow \log x^2 = 2a + 1$

$x^2 = 10^{2a+1} \rightarrow x = \sqrt{10^{2a+1}}$.

08) $\log 8^x - \log 6^{2x} = x^2$ tem duas soluções, sendo uma delas $x = a - 2b$.

Verdadeiro, porque

$$\log 8^x - \log 6^{2x} = \log \frac{8^x}{6^{2x}} = \log\left(\frac{8}{6^2}\right)^x = \log\left(\frac{2}{9}\right)^x =$$

$$= x \cdot \log \frac{2}{3^2} = x \cdot (\log 2 - 2 \cdot \log 3) = x \cdot (a - 2b) = x^2$$

$x = a - 2b$.

16) $\log\sqrt{250} = \frac{3}{2} - a$.

Verdadeiro, pois

$$\log\sqrt{250} = \log\sqrt{5^2 \cdot 10} = \log 5 \cdot 10^{\frac{1}{2}} = \log 5 + \frac{1}{2}$$

$$= \log\frac{10}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \log 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - a.$$

**13.** A

I. $xy = 10^{\frac{51}{10}}$

Verdadeiro. Aplicando logaritmo, temos:

$$\log xy = \log 10^{\frac{51}{10}} \rightarrow \log xy = \frac{51}{10}\log 10 \rightarrow \log xy = \frac{51}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow \log x + \log y = \frac{51}{10} \cdot \frac{5}{2} + \frac{13}{5} = \frac{25}{10} + \frac{26}{10} = \frac{51}{10}.$$

II. $\log(y^2 - x^2) = 0{,}2$ log(y2−x2) = 0,2

Falso, pois

$\text{Log } (y^2 - x^2) = \log (y-x)(y+x) = \log (y-x) + \log(y+x) = 1{,}913 + 2{,}854 = 4{,}767$

III. $\log\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right) = 0{,}608$

Verdadeiro, porque

$$\log\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right) = \log\left(\frac{x^2}{xy} + \frac{2xy}{xy} + \frac{y^2}{xy}\right) = \log\left(\frac{(x+y)^2}{xy}\right)$$

$$= \log(x+y)^2 - \log(xy) = 2 \cdot \log(x+y) - \log x - \log y = 2 \cdot$$

$$= 2 \cdot (2{,}854) - \frac{5}{2} - \frac{13}{5} = 0{,}608.$$

**14.** E

Temos que $\log_2 \pi = a \rightarrow \log_\pi 2 = \frac{1}{a}$ e

$\log_5 \pi = b \rightarrow \log_\pi 5 = \frac{1}{b}$

$\log_\pi 5 + \log_\pi 2 = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \log_\pi 10$. Assim, como

$2 < \log_\pi 10 < 3$:

$2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 3$. Ou seja, $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

**15.** B

Temos que

$$A = \log_{25} 27 \cdot \log_4 5 \cdot \log_{\sqrt{3}} \sqrt{2} = \frac{3}{8}\log_5 3 \cdot \log_2 5 \cdot \log_3 2 =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{3}{8}$$

$$B = \log_n(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} = \log_n\left(\log_n n^{\frac{1}{n^2}}\right) = \log_n n^{-2} = -2$$

$$C = \left(\frac{a}{b}\right)^{\log c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log b}$$

$$C = \left(\frac{a}{b}\right)^{\log c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log b} = \frac{a^{\log c}}{b^{\log c}} \cdot \frac{b^{\log a}}{c^{\log a}} \cdot \frac{c^{\log b}}{a^{\log b}} =$$

$$= a^{\log c - \log b} \cdot b^{\log a - \log c} \cdot c^{\log b - \log a} \rightarrow$$

$$\rightarrow \log C = \log\left(a^{\log c - \log b} \cdot b^{\log a - \log c} \cdot c^{\log b - \log a}\right) =$$

$$= \log a^{\log c - \log b} + \log b^{\log a - \log c} + \log c^{\log b - \log a} =$$

$$= (\log c - \log b)\log a + (\log a - \log c)\log b + (\log b - \log a)\log c =$$

$$= 0 \leftrightarrow C = 10^0 = 1$$

$B < A < C$

**16.** Temos que $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[n]{32}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_{\frac{1}{2}} 32 = \frac{1}{n} \cdot (-5) = \frac{-5}{n}$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(8^{n+2}\right) = (n+2) \cdot \log_{\frac{1}{2}} 8 = (n+2) \cdot (-3) = -3(n+2)$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[n]{32}}{\log_{\frac{1}{2}} 8^{n+2}} = \sum_{n=1}^{4} \frac{\frac{-5}{n}}{-3(n+2)} = \sum_{n=1}^{4} \frac{5}{3n(n+2)} = \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n(n+2)}$$

$$= \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24}\right) = \frac{17}{18}.$$

**17.** C

I. $a^{(\log_c b)} = b^{(\log_d b)}$.

Verdadeiro, pois $a^{(\log_c b)} = a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}} = (a^{\log_a b})^{\frac{1}{\log_a c}} = b^{\log_c a}$.

II. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c}\left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a}\left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1$

Verdadeiro, porque

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c}\left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a}\left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = \frac{a^{\log_d c}}{b^{\log_d c}} \cdot \frac{b^{\log_d a}}{c^{\log_d a}} \cdot \frac{c^{\log_d b}}{a^{\log_d b}} = 1.$$

III. $\log_{ab}(bc) = \log_a c$.

Falso, pois, suponha que $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$, então $\log_{ab}(bc) = \log_{10} 6 \neq \log_5 3$.

## Estudo para o Enem

**18.** A

$$Q = 1 + 4 \cdot (0,8)^{2p} \to 4 \cdot (0,8)^{2p} = Q - 1 \to (0,8)^p =$$

$$= \sqrt{\frac{Q-1}{4}} \to p = \log_{0,8}\sqrt{\frac{Q-1}{4}},\ Q > 1.$$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**19.** E

$\log 2 = 0,3 \leftrightarrow 2 = 10^{0,3}$

$M(30) = \frac{A}{2}$

$A \cdot (2,7)^{k \cdot 30} = \frac{A}{2}$

$(2,7)^{30k} = \frac{1}{2} = 2^{-1} = 10^{-0,3}$

$M(t) = \frac{10}{100}A$

$A \cdot (2,7)^{kt} = \frac{1}{10}$

Então, $(2,7)^{30kt} = \left(\frac{1}{10}\right)^{30} \to [(2,7)^{30k}]^t = 10^{-30}$.

$(10^{-0,3})t = 10^{-30}$

Portanto, $-0,3t = -3,0 \to t = 100$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**20.** E

A expressão para o terremoto do Chile é dada por:

$$8,3 = \log\frac{a_C}{T} + B = \log a_C - \log T + B$$

E no Japão é dada por:

$$5,3 = \log\frac{a_J}{T} + B = \log a_J - \log T + B$$

Subtraindo uma equação de outra:

$$3,0 = \log a_C - \log a_J = \log\frac{a_C}{a_J}$$

$$\frac{a_C}{a_J} = 10^3 = 1000$$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

# 28 LOGARITMOS II

## Comentários sobre o módulo

Vimos as consequências das propriedades dos logaritmos e como utilizá-las para facilitar a resolução de situações-problema. Conscientize os alunos sobre a importância de lidar algebricamente com as expressões para obter os logaritmos informados. Explore as propriedades logarítmicas desenvolvidas, que são de grande valia na resolução de situações-problema que envolvem o estudo de logaritmos.

## Exercícios propostos

**7.** D

Calculando, temos:

$$\log\left(10^3\cdot 100^{\frac{1}{3}}\right) = \log 10^3 + \log 10^{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)} =$$

$$= 3 + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

**8.** B

Calculando, temos:

$$(2^{\log_2\sqrt{2}})^2 = \left(2^{2\cdot\log_2\sqrt{2}}\right) = 2^{\log_2(\sqrt{2})^2} = 2^{\log_2 2} = 2^1 = 2$$

**9.** a) Substituindo na função, temos

$$f\left(\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = 10^{1+\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)} + 10^{1-\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

$$= 10\cdot 10^{\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)} + 10\cdot 10^{-\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

$$= 10\cdot\left(2+\sqrt{3}\right) + 10\cdot(2+\sqrt{3})^{-1}$$

$= 10\cdot\left(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}\right) = 10\cdot 4 = 40$ (que é um número inteiro)

b) Temos que $52 = 10^{1-x} + 10^{1-x} = 52$

$$10\cdot 10^x + 10\cdot\frac{1}{10^x} = 52$$

Fazendo $y = 10^x$, temos:

$$10y + 10\frac{1}{y} = 52 \quad 10y^2 - 52y + 10 = 0$$

$$y = 5 \text{ ou } y = \frac{1}{5}$$

Logo, para $y = 5$:

$10^x = 5 \quad x = \log 5$

$x = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Para $y = \frac{1}{5}$:

$$10^x = \frac{1}{5} \quad x = \log\frac{1}{5}$$

$x = \log\frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = 0{,}3 - 1 = \ -0{,}7$. Portanto, $S = \{0{,}7;\ -0{,}7\}$.

**10.** B

$$\log_x\left(\frac{x^2y^3}{z^4}\right) = \log_x x^2y^3 - \log_x z^4 =$$

$$= 2\log_x x + 3\log_x y - 4\log_x z$$

Temos que, se $\log_y x = 5$, então $\log_x y = \frac{1}{\log_y x} = = \frac{1}{5}$

Também temos que

$$\log_y z = \frac{\log_x z}{\log_x y} = \frac{\log_x z}{\frac{1}{5}} = 7 \rightarrow \log_x z = \frac{7}{5}.$$

Assim,

$$\log_x\left(\frac{x^2y^3}{z^4}\right) = 2 + 3\cdot\frac{1}{5} - 4\cdot\frac{7}{5} = \frac{10+3-28}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

**11.** B

A população de pássaros em A e B é dada por

$p_A = p_{0A}\cdot(1{,}05)^t$.

$p_B = p_{0B}\cdot(1{,}2)^t$

Para que $p_A = p_B$:

$p_{0A}\cdot(1{,}05)^t = p_{0B}\cdot(1{,}2)^t$

$12\cdot(1{,}05)^t = (1{,}2)^{tw}$

$$\left(\frac{1{,}05}{1{,}20}\right)^t == 12$$

$$\left(\frac{8}{7}\right)^t = 12$$

$$t\cdot\log\left(\frac{2^3}{7}\right) = \log(2\cdot 6)$$

$t\cdot(3\cdot 0{,}3 - 0{,}85) = 0{,}3 + 0{,}78$

$t = 21{,}6$ anos

Portanto, no 2º semestre do ano de 2034.

**12.** C

Considerando a taxa de crescimento anual **i**:

$80\,000\cdot(1+i)\,(1+i)\,(1+i) = 400\,000 \rightarrow (1+i)^3 = 5$

$\rightarrow (1+i) = \sqrt[3]{5}$

$i = \sqrt[3]{5} - 1$

$i = \left(100\sqrt[3]{5} - 100\right)\%$

**13.** B

I. Para todo número real **n**, tem-se:

$$\frac{7^{n-2}+7^{n-1}}{7^{n-2}-7^{n-3}} < 8.$$

Falso, pois

$$\frac{7^{n-2}+7^{n-1}}{7^{n-2}-7^{n-3}}=\frac{7^n\cdot 7^{-2}+7^n\cdot 7^{-1}}{7^n\cdot 7^{-2}-7^n\cdot 7^{-3}}=\frac{7^n\left(\frac{1}{49}+\frac{1}{7}\right)}{7^n\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{343}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1+7}{49}}{\frac{7-1}{343}}=\frac{28}{3}>8.$$

II. Se $N=\left(27^{\frac{1}{3}}-0{,}777...\right)\div\frac{5}{18}$, então $\log_4 N=1{,}5$.

Verdadeiro, porque $N=\left(3-\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{5}=\frac{20}{9}\cdot\frac{18}{5}=8.$

Então, $\log_4 N=\log_4 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 4}=\frac{3}{2}=1{,}5$ .

III. Efetuando-se $\left(\sqrt[4]{8+4\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt[4]{8-4\sqrt{3}}\right)$, obtemos um número primo.

Verdadeiro, pois

$$\left(\sqrt[4]{8+4\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt[4]{8-4\sqrt{3}}\right)=\sqrt[4]{8^2-(4\sqrt{3})^2}=$$

$$=\sqrt[4]{64-48}=\sqrt[4]{16}=2 \text{ (um número primo).}$$

**14.** Temos:

$$\log_b\frac{32}{8.1}-\log_b 20=\log_b 32-\log_b\frac{81}{10}-\log_b 20=$$

$$=\log_b 2^5-\log_b\frac{3^4}{10}-\log_b 2\cdot 10=$$

$$=5\cdot\log_b 2-4\cdot\log_b+\log_b 10-\log_b 2-\log_b 10=$$

$$=5X-4Y-X=4X-4Y$$

**15.** C

Temos que:

$$B=\log\sqrt{\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{5}}}}=\log\sqrt{a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}}=\log\sqrt{a^{\frac{15-10-6}{30}}}=$$

$$=\log\sqrt{a^{\frac{-1}{30}}}=\log a^{\frac{-1}{60}}$$

Então, se $\log_b a=\frac{k}{m}$:

$$\log_b a=\frac{\log a}{\log b}=\frac{k}{m}\rightarrow\frac{\log a}{m}=\frac{k}{m}\rightarrow\log a=k$$

Assim,

$$B=\frac{-k}{60}.$$

**16.** Temos que $x=\frac{3\log(100!)}{\log(1^3\cdot 2^3\cdot...\cdot 100^3)}=\frac{3\log(100!)}{3\log(100!)}=1.$

$z=\text{sen}\alpha+\text{sen}(\alpha+2\pi)+...+\text{sen}(\alpha+99\pi)=$
$=\text{sen}\alpha+(-\text{sen}\alpha)+\text{sen}\alpha+(-\text{sen}\alpha)+...$

$...+\text{sen}\alpha+(-\text{sen}\alpha)=0$

Portanto, $x + y = 1 + 0 = 1$.

**17.** D

I. Se a expansão decimal de **x** é infinita e periódica, então **x** é um número racional. Verdadeiro. Se a expansão decimal de **x** é infinita e periódica, então **x** é uma dízima periódic; logo, racional.

II. $\ln\sqrt[3]{e^2}+(\log_3 2)(\log_4 9)$ é um número racional.

Verdadeiro, pois

$$\ln\sqrt[3]{e^2}+(\log_3 2)(\log_4 9)=\ln e^{\frac{2}{3}}+(\log_3 2)\cdot\left(\frac{\log_3 9}{\log_3 4}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\ln e+(\log_3 2)\cdot\left(\frac{2\log_3 3}{2\log_3 2}\right)=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3},$$

que é racional.

## Estudo para o Enem

**18.** D

Temos que $3000\cdot(0{,}99)^n=30\leftrightarrow(0{,}99)^n=\frac{1}{100}$

$\log\,(0{,}99)^n=\log\left(\frac{1}{100}\right)\leftrightarrow n\cdot\log\,0{,}99=\ -2$. Como

$\log\,0{,}99=\log\frac{99}{100}=\log\frac{3^2 11}{100}=2\log\,3+\log\,11-$

$-\log\,100=2\cdot 0{,}477+1{,}041-2=$

$=-0{,}005$. Então: $-0{,}005n=-2\rightarrow n=400$.

Ou seja, $400\frac{1}{2}=200$ horas.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**19.** B

Temos que $x=\sqrt[8]{35}=35^{\frac{1}{8}}$.

Assim,

$$\log x=\log\,35^{\frac{1}{8}}=\frac{1}{8}\log\,35=\frac{1}{8}\log 7\cdot 5=$$

$$=\frac{1}{8}(\log\,7+\log\,5)=\frac{1}{8}(0{,}845+0{,}699)=$$

$=0{,}193$.

Portanto, $\log x=0{,}193$.

Logo, $x=1{,}56$.

**Competência:** Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

**Habilidade:** Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

**20.** D

$F(h) = 16 - \log_2 (3h + 1)$

$10 = 16 - \log_2 (3h + 1)$

$\log_2 (3h + 1) = 6$

$3h = 63$

$h = 21$ horas.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

# 29 EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS I

## Comentários sobre o módulo

Na sequência ao estudo de logaritmos, após vermos a definição e algumas de suas propriedades no módulo anterior, este conteúdo envolve equações logarítmicas e o uso delas na resolução de determinadas situações-problema. Este módulo ainda inclui algumas aplicações que dão sentido ao estudo sobre equações logarítmicas.

## Exercícios propostos

**7.** Dado um montante inicial **M**, o valor corrigido pela taxa de juros é de $(1 + 0,1)M$.

Após **n** anos, $(1,1)^n$ M.

Ao triplicar o capital, $(1,1)^n M = 3M$.

Logo:

$(1,1)^n = 3$

$\log (1,1)^n = \log 3$

$n \cdot \log 1,1 = \log 3$

$n = \dfrac{\log 3}{\log \frac{11}{10}} = \dfrac{\log 3}{\log 11 - \log 10} = \dfrac{0,48}{1,04 - 1} = \dfrac{0,48}{0,04} = 12$

Portanto, 12 anos.

**8.** C

Temos que $1,5\, C0 = C_0 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$

$1,5 = 2^{\frac{t}{5}}$

$3 = 2^{\frac{t+5}{5}}$

$\log_2 3 = \log_2 2^{\frac{t+5}{5}}$

$1,6 = \dfrac{t+5}{5}$

$8 = t + 5$

$t = 3$ horas

**9.** A

Temos:

$0,8 = 2(0,5)^t$

$\log 0,8 = \log 2(0,5)^t$

$\log \dfrac{2^3}{10} = \log 2 + t \cdot \log 0,5 = \log 2 + t \cdot \log 2^{-1}$

$3 \cdot 0,3 - 1 = 0,3 + t(-0,3)$

$0,3t = 0,4$

$t = \dfrac{4}{3}$ horas

$t = \dfrac{4}{3} \cdot 60 = 80$ minutos

**10.** A

Temos que $\log_4 (y) = \dfrac{\log_2 y}{\log_2 4} = \dfrac{1}{2} \log_2 y$

Logo:

$\log_2 x + \dfrac{1}{2} \log_2 y = 2$

$\log_2 \left(x \cdot y^{\frac{1}{2}}\right) = 2$

$x \cdot y^{\frac{1}{2}} = 4$

Temos também que $2^{x+y} = 32 = 2^5$. Então, $x + y = 5$.

Substituindo o valor de **x** na equação anterior:

$(5 - y)y^{\frac{1}{2}} = 4$

$(5 - y)y = 4y$

$5y - y^2 = 4y$

$y^2 - y = 0$

$y(y - 1) = 0$

$y = 0$, (não convém, pois $y > 0$)

Então, $y = 1$.

Assim, $x = 5 - y = 5 - 1 = 4$.

Portanto, $x \cdot y = 4$.

**11.** D

Temos que $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) = \log_{3^{-1}} (x - 1) =$

$= \dfrac{\log_3 (x-1)}{\log_3 (3^{-1})} = -\log_3 (x - 1)$

Então:

$\log_3 (x^2 - 2x - 3) + \log_{\frac{1}{3}} (x-1) = \log_3 (x + 1)$

$\log_3 (x^2 - 2x - 3) - \log_3 (x - 1) = \log_3 (x + 1)$

$\log_3 \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)} = \log_3 (x+1)$

$\log_3 (x - 3) = \log_3 (x + 1)$

$x - 3 = x + 1$

$-3 = 1$, (absurdo)

Portanto, $S = \varnothing$.

**12.** A

Temos que:

$\dfrac{100^{\log(x)}+3}{10^{\log(x)}} = \dfrac{10^{2 \cdot \log x}+3}{10^{\log x}} = \dfrac{10^{\log x^2}+3}{10^{\log x}} = \dfrac{x^2+3}{x} = 4$

$x^2 + 3 = 4x$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 3$ ou $x = 1$

Então, $|3 - 1| = 2$, $|1 - 3| = 2$.

**13.** A

Temos que:

$2\,000 = \dfrac{20\,000}{2 + 15 \cdot 4^{-2t}}$

$1 = \dfrac{10}{2 + 15 \cdot 4^{-2t}}$

$2 + 15 \cdot 4^{-2t} = 10$

$4^{-2t} = \dfrac{8}{15}$

$\log 4^{-2t} = \log \dfrac{2^3}{3 \cdot 5}$

$-2t \cdot 2 \cdot \log 2 = 3 \cdot \log 2 - \left(\log 3 + \log \dfrac{10}{2}\right) =$

$= 3 \cdot \log 2 - (\log 3 + \log 10 - \log 2)$

$-2t \cdot 0{,}6 = 3 \cdot 0{,}3 - (0{,}48 + 1 - 0{,}3)$

$-1{,}2t = -0{,}28$

$t = 0{,}2333...$ meses

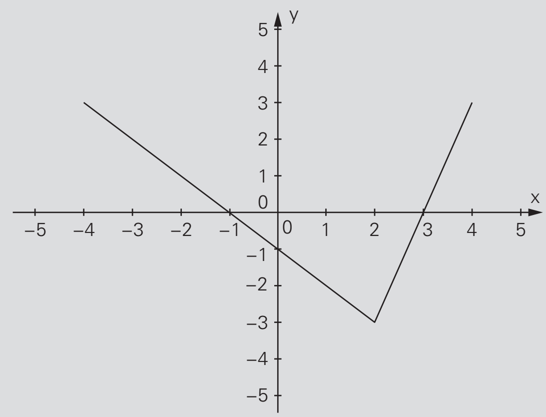
Ou seja, aproximadamente 7 dias.

**14.** a) Pela definição do módulo:

$f(x) = \begin{cases} -(2x-4)+x-5, \text{ se } 2x-4<0 \\ (2x-4)+x-5, \text{ se } 2x-4 \geq 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} -2x+4+x-5 \text{ se } 2x<4 \\ 2x-4+x-5 \text{ se } 2x \geq 4 \end{cases} = \begin{cases} -x-1 \text{ se } x<2 \\ 3x-9 \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$

Portanto, o gráfico de **f**, para o intervalo $-4 < x < 4$, será:




b) Temos que $\log_a (-1 + b) = f(-1) = 0$ e $\log_a (6 + b) = f(6) = 9$.

Logo, $a^0 = b - 1$ e $a^9 = b + 6$.

Então, como $a \neq 0$, obtemos $1 = b - 1$, ou seja, $b = 2$.

Assim, $a^9 = 8 \rightarrow a = 8^{\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{2}$.

**15.** D

$\log 1 + 2\log 2 + 3\log 3 + 4\log 4 + ... + 10\log 10 =$
$= \log 1^1 + \log 2^2 + ... + \log 10^{10}$

$\log (1 \cdot 2^2 \cdot ... \cdot 10^{10}) = \log x$

$x = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot 10^{10}$

$x = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 10) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 10) \cdot$
$\cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot 10) \cdot ... \cdot (10)$

$x = 10! \cdot \dfrac{10!}{1!} \cdot \dfrac{10!}{2!} \cdot ... \cdot \dfrac{10!}{9!}$

$x = \dfrac{(10!)^{10}}{2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot ... \cdot 9!}$

**16.** C

Temos que $\log_2 (1 + x^4 + x^2) + \log_2 (1 + 2x^2) =$
$\log_2 (1 + x^4 + x^2)(1 + 2x^2) = 0$

$(1 + x^4 + x^2)(1 + 2x^2) = 1$

$1 + 2x^2 + x^4 + 2x^6 + x^2 + 2x^4 = 1$

$2x^6 + 3x^4 + 3x^2 = 0$

$x^2 (2x^4 + 3x^2 + 3) = 0$

$x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

Ou:

$2x^4 + 3x^2 + 3 = 0$

$y = x^2$

$2y^2 + 3y + 3 = 0$

Como $\Delta < 0$, a equação admite exatamente duas raízes reais, as quais são iguais.

**17.** Temos que:

$$\frac{\log_{10} 16x}{\log_{100} 16} = \frac{\dfrac{\log_4 16x}{\log_4 10}}{\dfrac{\log_4 16}{\log_4 10^2}} = \frac{\dfrac{\log_4 16x}{\log_4 10}}{\dfrac{2}{2\log_4 10}} = \log_4 16x =$$

$$= \log_4 16 + \log_4 x = 2 + \log_4 x$$

$$(\log_4 x)^3 - \log_4 (x^4) - 3\,\frac{\log_{10} 16x}{\log_{100} 16} = 0$$

$$(\log_4 x)^3 - 4\log_4 x - 6 - 3\log_4 x = 0$$

Fazendo $\log_4 x = y$:

$y^3 - 4y - 6 - 3y = 0$

$y^3 - 7y - 6 = 0$

$(y - 3)(y^2 + 3y + 2) = 0$

$y = 3$ ou $y = -2$ ou $y = -1$

Então:

$\log_4 x = 3$ ou $\log_4 x = -2$ ou $\log_4 x = -1$

$x = 64$ ou $x = \frac{1}{16}$ ou $x = \frac{1}{4}$

$S = \left\{64, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right\}$.

## Estudo para o Enem

**18.** B

Temos que $3\,000 \cdot N_0 = N_0 \cdot 3^t$

$3\,000 = 3^t$

$\log 3^t = \log 3\,000$

$t \cdot \log 3 = \log 3 \cdot 1\,000 = \log 3 + \log 1\,000 =$

$= \log 3 + \log 10^3$

$t \cdot (0{,}48) = 0{,}48 + 3$

$t = \frac{3{,}48}{0{,}48} = 7{,}25$ dias

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**19.** B

Temos que $\log_2 (-x^2 + 32) = 4$

$-x^2 + 32 = 2^4 = 16$

$-x^2 + 16 = 0$

$x = 4$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**20.** E

Temos que:

$\log (k + n) = \frac{h}{2}$, $\log k = \frac{-h}{2}$

$h = 2 \cdot \log (k + n)$

$h = -2 \cdot \log k$

$2 \cdot \log (k + n) = -2 \cdot \log k$

$\log (k + n) = -\log k$

$\log (k + n) + \log k = 0$

$\log (k + n)\, k = 0$

$(k + n)\, k = 1$

$k^2 + nk - 1 = 0$

$k = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$, pois $k > 0$

$$h = 2 \cdot \log (k + n) = 2 \cdot \log \left(\frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} + n\right) =$$

$$= 2 \cdot \log \left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$$

**Competência:** Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

**Habilidade:** Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

## 30 EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS II

### Comentários sobre o módulo

Após o estudo das propriedades e dos métodos para resolução de equações logarítmicas, este módulo é dedicado ao aperfeiçoamento da resolução dessas equações e às suas aplicações em situações reais. Aproveite para conversar com os alunos sobre as provas de avaliação do Enem. Lembre-os de que as questões abordam determinados objetos de conhecimento dentro de um contexto.

### Para ir além

O experimento presente no link a seguir propõe modelar matematicamente avalanches provocadas por materiais simples, como milho de pipoca, feijão e recipientes quaisquer. Inicialmente, os alunos devem produzir avalanches, para depois verificar sua intensidade pela quantidade de grãos/objetos que desmoronam. Com base nisso, eles constroem gráficos com os dados coletados, obtendo uma curva. Aplicar o logaritmo torna possível analisar a função que modela esses fenômenos e até fazer algumas previsões. Disponível em:

<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/hadle/mec/15591>

Acesso em: 24 out. 2018.

**7.** C

Temos que:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{2^x-1}} = -1$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2^x-1}} = -2$$

$$1 = -2-\frac{2}{2^x-1}$$

$$3 = \frac{-2}{2^x-1}$$

$3 \cdot 2^x - 3 = -2$

$3 \cdot 2^x = 1$

$\log 3 \cdot 2^x = \log 1$

$\log 3 + x \cdot \log 2 = 0$

$$x = \frac{-\log 3}{\log 2} = \frac{-0,48}{0,30} = -1,6$$

Logo, $-2 \leq x < 0$, ou seja, $x \in [-2;0[$.

**8.** Chamamos $y = \log_2 (x^2 + 1)$

$y^2 - 34y + 64 = 0$

$y = 2$ ou $y = 32$

Assim, se $\log_2(x^2+1)=2$, temos $x^2+1=4$.

O que resulta em duas soluções reais.

Ou $\log_2(x^2+1)=32$

$x^2+1=2^{32}$. O que resulta em mais duas soluções reais.

Portanto, existem 4 soluções reais.

**9.** B

Calculando, temos:

$2 - \log_x 2 - \log_2 x = 0 \; \log_x 2 + \log_2 x = 2$

$$\log_x 2+\frac{\log_x x}{\log_x 2} = 2$$

$$\log_x 2+\frac{1}{\log_x 2} = 2$$

Se $y = \log_x 2$

$y^2 + 1 = 2y$

$y^2 - 2y + 1 = 0$

$(y - 1)^2 = 0$

$y = 1$

$\log_x 2 = 1$

$x = 2$, logo $p = 2$

$$\frac{3}{2}<p<\frac{5}{2}$$

**10.** E

Temos:

$A \cdot \log_{200} 5 + B \cdot \log_{200} 2 = \log_{200} 5^A + \log_{200} 2^B = C$

$\log_{200} 5^A\, 2^B = C$

$200^C = 5^A\, 2^B$

$(2^3 \cdot 5^2)^C = 5^A\, 2^B$

$2^{3C} \cdot 5^{2C} = 5^A\, 2^B$

Assim, $A = 3C$ e $B = 2C$.

Portanto, $A + B + C = 3C + 2C + C = 6C$.

**11.** E

(F) A função polinomial $f(x)=3x^2-4x$ satisfaz à equação $f(xm)=m^2 f(x)$ para todo $m \in \mathbb{R}$.

$f(xm)=3(xm)^2-4xm=3x^2m^2-4xm$

$$= m^2 \cdot \left(3x^2-\frac{4}{m}x\right) \neq m^2 f(x).$$

(F) Se $\sqrt{x^2-4x+4} = 8-x$ e $y^2 - 7 = (y - 1)^3$, então $y - x = 7$.

$\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 8-x$

$x - 2 = 8 - x$

$2x = 10 \rightarrow x = 5$ ou $-x + 2 = 8 - x \rightarrow 2 = 8$, absurdo!

$y^3 - 7 = (y-1)^3$

$(y-1)^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = y^3 - 7$

$-3y^2 + 3y + 6 = 0$ $y^2 - y - 2 = 0$ $y = -1$ ou $y = 2$

Portanto, $y - x = -1 - 5 = -6$ ou $y - x = 2 - 5 = -3$.

(V) O gráfico de uma função f(x), de domínio R, intercepta o eixo Ox em apenas dois pontos de abscissas positivas, e o gráfico de f(|x|) intercepta esse mesmo eixo em exatamente quatro pontos.

Se f(x) intercepta o eixo Ox em dois pontos, f(x) é uma equação de 2º grau. Logo, f(|x|) intercepta o eixo Ox em 2·2 pontos, ou seja, 4 pontos.

(F) Seja $f(x) = \log_a x$.

Se $f(a) = d$ e $f(2a) = d + 1$, então $d - a = 1$.

Temos que:

$f(a) = \log_a a = d \rightarrow d = 1$

$f(2a) = \log_a 2a = d + 1 = 2$

$\log_a 2a = \log_a 2 + \log_a a = \log_a 2 + 1 = 2 \rightarrow$

$\rightarrow \log_a 2 = 1 \rightarrow a = 2$

Assim, $d - a = 1 - 2 = -1$.

(V) $\log (x^2) = 2\log (|x|)$ para todo $x \in R^*$.

$\log x^2 = 2 \cdot \log x$

Como **x** é sempre positivo, $\log x = \log|x|$.

Logo, $\log x^2 = 2 \cdot \log(|x|)$.

**12.** A

I. Um dos valores é um número primo.

Verdadeiro, pois $\log_2 (a + b + c) = 0 \rightarrow a + b + c = 1$.
Então:

$\log(a + 2b) = 1$

$a + 2b = 10$

$$\frac{2^a \cdot 4^b}{8^c} = \frac{2^a 2^{2b}}{2^{3c}} = 2$$

$a + 2b - 3c = 1$

$10 - 3c = 1 \rightarrow 3c = 9 \rightarrow c = 3$ (primo)

$a + b + 3 = 1 \rightarrow a + b = -2$

$a + 2b = 10$

$b = 12$ e $a = -14$.

II. Todos os valores são números reais não negativos.

Falso, pois $a = -14 < 0$.

III. Dois dos valores são números naturais.

Verdadeiro, pois $b = 12$ e $c = 3$, $b, c \in \mathbb{N}$.

IV. Todos os valores são números racionais não inteiros.

Falso. Todos os valores são inteiros.

**13.** B

Calculando, temos:

$\log (2x + 7) = \log (2x) + \log 7$

$\log (2x+7) = \log (2x \cdot 7)$

$2x + 7 = 14x$

$12x = 7$

$$x = \frac{7}{12} \simeq 0{,}5833$$

$$\frac{1}{2} < x < 1$$

**14.** a) Temos:

$x \cdot (1{,}01)^2 = x + 4\,020$

$1{,}0201x = x + 4\,020$

$0{,}0201x = 4\,020$

$$x = \frac{4\,020}{0{,}0201}$$

$x = 200\,000$

R$ 200.000,00

b) Calculando, temos:

$x \cdot (1{,}01)^t = 4x$

$(1{,}01)^t = 4$

$$t = \frac{2\log 2}{\log \frac{202}{200}}$$

$$t = \frac{2\log 2}{\log 202 - \log(2 \cdot 10^2)}$$

$$t = \frac{2\log 2}{\log 202 - \log 2 - 2\log 10}$$

$$t = \frac{2 \cdot 0{,}301}{2{,}305 - 0{,}301 - 2 \cdot 1} = \frac{0{,}602}{0{,}004} = 105{,}5 \text{ meses}$$

$E = 150{,}5 - 139{,}3$

$E = 11{,}2$ meses.

**15.** C

Calculando, temos:

$$140=(740-40)\cdot 10^{-\frac{t}{12}}+40$$

$$100=700\cdot 10^{-\frac{t}{12}}$$

$$1=7\cdot 10^{-\frac{t}{12}}$$

$$\log 1=\log 7\cdot 10^{-\frac{t}{12}}$$

$$0=\log 7-\frac{t}{12}$$

$$\frac{t}{12}=\log 7$$

$t=12\log(7)$ minutos

**16.** a) Para $c = 1$, temos

$f(x) = 2x+1$

$(2x + 1)^3 = 2x^3 + 1$

$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 2x^3 + 1$

$x^3 + 2x^2 + x = 0$

$x \cdot (x^2 + 2x + 1) = 0$

$x = 0$ ou $x = -1$

$S = \{0, -1\}$.

b) Temos que:

$g(x) = \log (xf(x)+c)$

$xf(x) + c > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$x \cdot (2x + c) + c > 0$

$2x^2 + cx + c > 0$

$c^2 - 4 \cdot 2 \cdot c < 0$

pois $y=2x^2 + cx + c$

Logo:

$c^2 - 8c < 0$

$0 < c < 8$

$h(c) = c^2 - 8c$

$S=\{c \in \mathbb{R} \mid 0 < c < 8\}$.

**17.** D

Temos que:

$(5y)^{\log_x 5}-(7y)^{\log_x 7}=0$

$(5y)^{\log_x 5} = (7y)^{\log_x 7}$

$\log_x (5y)^{\log_x 5} = \log_x (7y)^{\log_x 7}$

$\log_x 5 \cdot \log_x 5y = \log_x 7 \cdot \log_x 7y$

$\log_x 5 \cdot (\log_x 5 + \log_x y) = \log_x 7 \cdot (\log_x 7 + \log_x y)$

$(\log_x 5)^2 + \log_x 5 \cdot \log_x y = (\log_x 7)^2 \cdot \log_x 7 \cdot \log_x y$

$\log_x y \cdot (\log_x 7 - \log_x 5) = (\log_x 5)^2 - (\log_x 7)^2$

$$\log_x y=\frac{(\log_x 5+\log_x 7)(\log_x 5-\log_x 7)}{(\log_x 7-\log_x 5)}=$$

$$=-(\log_x 5+\log_x 7)$$

$$\log_x y=\log_x (7\cdot 5)^{-1}=\log_x 35^{-1}=\log_x \frac{1}{35}$$

$$y=\frac{1}{35}$$

**18.** C

Para que $V = 0{,}1 \cdot V_0$.

$0{,}1 \cdot V_0 = V_0 \cdot 2^{-t}$

$0{,}1 = 2^{-t}$

$\log 0{,}1=t \cdot \log 2^{-1}$

$$t=\frac{\log 0{,}1}{\log 2^{-1}}=\frac{\log 10^{-1}}{\log 2^{-1}}=\frac{-\log 10}{-\log 2}=\frac{1}{\log 2}=\frac{1}{0{,}3}\simeq$$

$$\simeq 3{,}3\text{ h}=3\text{h e }18\text{ min}$$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**19.** C

Temos que:

$$9{,}0=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_0}\right)$$

$$\log E_1-\log E_0=\frac{27}{2}$$

$$\log E_1=\frac{27}{2}+\log E_0$$

E também que:

$$7{,}0=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E_2}{E_0}\right)$$

$$\log E_2-\log E_0=\frac{21}{2}$$

$$\log E_2=\frac{21}{2}+\log E_0$$

$$\log E_1=\log E_1+3$$

$$\log E_1-\log E_2=3$$

$$\log\frac{E_1}{E_2} = 3$$

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^3$$

$$E_1 = 10^3\,E_2$$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**20.** B

Temos que:

$$8,9 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{7\cdot 10^{-3}}\right)$$

$$8,9\cdot\frac{3}{2} = \log E - \log 7\cdot 10^{-3} = \log E - 0,84 + 3$$

$$\log E = 11,19$$

$$E = 10^{11,19}\ \text{kWh}$$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

# 31 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

## Comentários sobre o módulo

O conteúdo deste módulo é sequencial ao estudo de logaritmos. Constantemente nos vestibulares há questões envolvendo funções logarítmicas, que, na substituição de determinado valor, recaem em equações logarítmicas. Para desenvolver o estudo proposto, aplique a definição e as propriedades logarítmicas vistas no módulo anterior.

Os principais objetivos deste módulo estão relacionados a compreensão, aplicação e resolução de situações-problema envolvendo funções. Oriente os alunos a manter-se em dia com a matéria ministrada em sala de aula, dedicando-se a aprender logaritmos com afinco, porque se trata de assunto que facilita o amadurecimento do raciocínio em geral.

Apresente esquemas e gráficos com propriedades operatórias, para melhor fixação das informações e compreensão de conceitos e análises.

## Para ir além

O artigo *Construindo as funções logarítmicas e exponenciais por meio do GeoGebra*, dos autores Evelyn Rosana Cardoso e Valdeni Soliani Franco, apresenta uma boa discussão sobre o estudo de funções logarítmicas. Disponível em:

<http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/14.pdf>

Acesso em: 25 out. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** D

a) $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Falsa.

$f(0) < 0$.

b) $f(g(x)) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Falsa.

$f(g(x)) = 2^{(\log_2 (x+8)^2 - 6)} - 8 \neq x$.

c) $(g \circ f)(x) > 3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Falsa.

$g \circ f(x) = g(f(x)) = \log_2 \left(2^{(x^2-6)} - 8 + 8\right) =$

$= \log_2 \left(2^{(x^2-6)}\right) = x^2 - 6$.

Para $x = 0$, $g(f(0)) = -6 < 3$.

d) $g \circ f$ tem o gráfico representado por uma parábola. Verdadeira.

$g \circ f(x) = x^2 - 6$, que descreve uma parábola.

e) $\text{Im}f = \mathbb{R}$, em que $\text{Im}f$ representa o conjunto imagem da função f. Falsa.

A imagem de f é dada por $\text{Im}f = [-8, +\infty[$.

**8.** B

Temos:

$$y_A = \log_4 2 = \frac{1}{2}\log_2 2 = \frac{1}{2}$$

$$y_C = \log_4 8 = \frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{3}{2}$$

$$S = (8-2)\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right) = 6$$

**9.** A

Temos que $f(2) = g(2)$.

Logo:

$$\frac{3}{2} + \log_{10}(2-1) = k \cdot 2^{(-2+1)}$$

$$\frac{3}{2} = k \cdot \frac{1}{2}$$

$$k = 3$$

$$g(f(11)) = g\left(\frac{3}{2} + \log_{10}(11-1)\right) = g\left(\frac{3}{2}+1\right) =$$

$$= g\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \cdot 2^{\left(\frac{-5}{2}+1\right)} = 3 \cdot 2^{\frac{-3}{2}} = 3 \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

**10.** Todos os retângulos do gráfico têm base igual a 1.

Assim:

$S_1 = \log 3 + \log 4 + \log 5 = \log 3 \cdot 4 \cdot 5 = \log 60$

$S_2 = \log 4 + \log 5 + \log 6 = \log 4 \cdot 5 \cdot 6 = \log 120$

Logo:

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{1}{2}(\log 60 + \log 120) =$$

$$= \frac{1}{2}(\log 60 \cdot 120) = \frac{1}{2}\log 7200$$

$$S = \frac{1}{2}(\log 100 + \log 72) = \frac{1}{2}(2 + \log 2^3 \cdot 3^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(2 + 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3)$$

$S = 1{,}93$.

**11.** A

No ponto P(a, b), g(a) = f(a). Logo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a = \log_{\frac{1}{2}} a$$

$$2^{-a} = \log_{\frac{1}{2}} a$$

$$2^{-a} = \frac{\log_2 a}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 a}{-1}$$

$$2^{-a} = \log_2 \frac{1}{a}$$

$$\log_2 2^{-a} = \log_2 \left(\log_2 \frac{1}{a}\right)$$

$$a = -\log_2\left(\log_2\left(\frac{1}{a}\right)\right) = \log_2\left(\log_2\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}$$

$$a = \log_2\left(\frac{1}{\log_2\left(\frac{1}{a}\right)}\right)$$

**12.** A

Temos que:

$$f\left(\frac{1}{100}\right) = m + \log\frac{1}{100} = 0$$

$$m - 2 = 0$$

$$m = 2$$

$$f\left(g\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)\right) = f\left(n\cdot\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)+1\right) =$$

$$= 2 + \log\left(n\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)+1\right) = \frac{5}{2}$$

$$\log\left(n\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)+1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{10} = n\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) + 1$$

$$n\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) = \sqrt{10} - 1$$

$$n = -3$$

Assim, $m^n = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

**13.** E

Temos que y = f(x).

Logo:

$f(2) = 1 + \log 2 = 1{,}301$

$f(6) = 1 + \log 6 = 1 + \log 2 \cdot 3 = 1 + \log 2 +$
$+ \log 3 = 1 + 0{,}301 + 0{,}477 = 1{,}778$

Assim, a área do trapézio é dada por

$$S = \frac{(6-2)(1{,}778 + 1{,}301)}{2} = 6{,}158.$$

**14.** a) Temos que:

$2{,}11 = 0{,}67 \cdot \log E - 3{,}25$

$5{,}36 = 0{,}67 \cdot \log E$

$\log E = 8$

$E = 10^8$ J.

b) Com base no gráfico, o domínio é $\mathbb{R}$, a imagem é [4,8], e o período é 10.

Temos que $y = A + B \cdot \cos(mx + n)$

Então, A = 6 e B = 2. Logo, $y = 6 + 2 \cdot \cos(mx + n)$.

Assim, para (1,8), $8 = 6 + 2 \cdot \cos(m + n) \rightarrow$
$\rightarrow m + n = 0$.

Para (6,4), $4 = 6 + 2 \cdot \cos(6m + n) \rightarrow 6m + n = \pi$.

Logo:

$m + n = 0$

$6m + n = \pi$

$m = \frac{\pi}{5}$ e $n = \frac{-\pi}{5}$.

**15.** E

Temos que:

$$h(x) = g(f(x)) = \log_2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{sen}x\right)$$

Então:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\text{sen}\,x > 0$$

$$\text{sen}\,x > -1,\ x \neq \frac{3\pi}{2},\ \text{pois } x \in [0,\ 2\pi]$$

O logaritmo de base 2 é uma função estritamente crescente. Então, quando f(x) for estritamente crescente, **h** será estritamente crescente. Quando f(x) for estritamente decrescente, **h** será estritamente decrescente.

Quando $f(x) \to 0 \to g(x), h(x) \to -\infty$, pois $f(x) < 1$.

Para os valores de x iguais a 0, $\pi$ e $2\pi$, temos:

$f(x) = \frac{1}{2}$ e $h(x) = g(f(x)) = g(1) = \log_2 1 = 0$.

**16.** B

I. A função $f(x) = \log_{10}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ é estritamente crescente no intervalo $]1, +\infty[$.

Verdadeiro. Tomando $\{x_1, x_2\} \subset ]1, +\infty[$, com $x_1 < x_2$, então:

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \leftrightarrow \frac{-1}{x_1} < \frac{-1}{x_2}$$

$$1 - \frac{1}{x_1} < 1 - \frac{1}{x_2}$$

$$\log\left(1 - \frac{1}{x_1}\right) < \log\left(1 - \frac{1}{x_2}\right)$$

$$\log\left(\frac{x_1 - 1}{x_1}\right) < \log\left(\frac{x_2 - 1}{x_2}\right)$$

Logo, f é estritamente crescente.

II. A equação $2^{x+2} = 3^{x-1}$ tem uma única solução real.

Verdadeiro, pois:

$$2^x \cdot 4 = \frac{1}{3} 3^x$$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{1}{12}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{12}$$

$$x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{12}.$$

III. A equação $(x + 1)^x = x$ admite pelo menos uma solução real positiva.

Falso, pois $(x + 1)^x > x, \forall x \in \mathbb{R}_+$.

**17.** a) Se $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$, deve-se ter:

$x^2 - 2x - 8 > 0$

$x + 1 > 0$

$x + 1 \neq 1$

Logo:

$x < -2$ ou $x > 4$

$x > -1$

$x \neq 0$

Então:

$x > 4$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b) Calculando, temos:

$f(x) = 2 = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$

$(x + 1)^2 = x^2 - 2x - 8$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x - 8$

$4x = -9$

$x = \frac{-9}{4} \notin D_f \to S = \emptyset$.

c) Calculando, temos: $f(x) > 1 \to \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8) > 1$

Como $x > 4$, f(x) é estritamente crescente. Assim:

$x^2 - 2x - 8 > x + 1$

$x^2 - 3x - 9 > 0$

$x < \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$ ou $x > \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$

$x > \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$, pois $x > 4$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}\right\}$.

## Estudo para o Enem

**18.** E

A população de bactérias é dada pela função $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t}$; portanto, é uma função exponencial.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**19.** B

Temos que:

$L = 32{,}44 + 20 \cdot \log_{10} f + 20 \cdot \log_{10} d$

$L = 32{,}44 + 20 \cdot \log_{10} 600 + 20 \cdot \log_{10} 20$

$L = 32{,}44 + 20 \cdot (2 + \log 2 + \log 3) + 20 \cdot$
$\cdot (1 + \log 2)$

$L = 32{,}44 + 20 \cdot (2 + 0{,}3 + 0{,}48) + 20 \cdot (1 + 0{,}3)$

$L = 32{,}44 + 55{,}6 + 26 \approx 114$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**20.** C

O preço do automóvel é igual a $P(t) = P_0 (1 - 19\%)^t$.

Logo, para que $P(t) = \frac{1}{3} P_0$, temos:

$\frac{1}{3} P_0 = P_0 (1 - 0{,}19)^t = P_0 (0{,}81)^t$

$\frac{1}{3} = (0{,}81)^t$

$\log_3 \frac{1}{3} = t \cdot \log_3 \left(\frac{81}{100}\right) = t \cdot (\log_3 3^4 - \log_3 10^2)$

$-1 = t \cdot (4 - 2 \cdot 2{,}1)$

$t = \frac{1}{0{,}2} = 5$ anos

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

# 32 INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

## Comentários sobre o módulo

Os principais objetivos deste módulo estão relacionados a compreensão, aplicação e resolução de situações-problema que envolvem inequações logarítmicas. Oriente os alunos a se manterem em dia com a matéria ministrada em sala de aula, dedicando-se a aprender logaritmos com afinco, porque se trata de assunto que facilita o amadurecimento do raciocínio em geral.

## Para ir além

O GeoGebra é um software interativo de fácil programação e excelente para visualização de problemas matemáticos que envolvam inequações. Disponível em:

<https://www.geogebra.org>

Acesso em: 26 out. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** C

I. A solução da desigualdade $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ é o conjunto $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

Verdadeiro, pois, se $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x = 1$ ou $x = 2$.

Logo:

$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \rightarrow x \leq 1$ ou $x \geq 2$

$x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

II. Se $|x + 2| < 1$, então $x \in ]-3, -1[$.

Verdadeiro, pois:

$-1 < x + 2 < 1$

$-3 < x < -1$

Então, $x \in ]-3, -1[$.

III. Se $\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) < 1$, então $-1 < x < -\frac{2}{3}$.

Falso, pois:

$\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) < 1 \rightarrow (x + 1) < \frac{1}{3} \rightarrow x < \frac{-2}{3}$

Além disso:

$x + 1 > 0$

$x > -1$.

**8.** B

Temos que $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10}\left(\frac{3}{7}\right)}$

Na inequação, temos:

$3^{\cos(x)} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$

$\log 3^{\cos(x)} \leq \log\left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$

$\cos(x) \cdot \log 3 \leq \beta \cdot \log\left(\frac{3}{7}\right)$

$\cos(x) \leq \beta \cdot \frac{\log\left(\frac{3}{7}\right)}{\log 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log 3}{\log\left(\frac{3}{7}\right)} \cdot \frac{\log\left(\frac{3}{7}\right)}{\log 3} = \frac{1}{2}$

$\cos x \leq \frac{1}{2}$

$x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

**9.** D

Calculando, temos:

$\log_2(2x + 5) - \log_2(3x - 1) > 1$

$\log_2\left(\frac{2x + 5}{3x - 1}\right) > 1$

$\frac{2x + 5}{3x - 1} > 2$

$2x + 5 > 6x - 2$

$-4x > -7$

$x < \frac{7}{4}$

Das condições de existência:

$2x + 5 > 0$

$x > \frac{-5}{2}$ e $3x - 1 > 0$

$x > \frac{1}{3}$

Logo, $x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$.

**10.** A produção de A é dada por: $P_A = 120\,000 \cdot (1 + 0{,}04)^t$

A produção de B é dada por: $P_B = 60\,000 \cdot (1 + 0{,}12)^t$

Logo:

$120\,000 \cdot (1 + 0{,}04)^t = 60\,000 \cdot (1 + 0{,}12)^t$

$2(1{,}04)^t = (1{,}12)^t$

$\log 2 + t \cdot \log 1{,}04 = t \cdot \log 1{,}12$

$t \cdot \log \frac{1{,}12}{1{,}04} = \log 2$

$t \cdot \log \frac{14}{13} = \log 2$

$t = \frac{\log 2}{\log 14 - \log 13} = \frac{\log 2}{\log 2 + \log 7 - \log 13}$

$\frac{0{,}301}{0{,}301 + 0{,}845 - 1{,}114} = \frac{0{,}301}{0{,}032} \simeq \frac{300}{32} = 9{,}375$

Portanto, a produção de soja do município B será, pela primeira vez, maior que a produção do município A no ano em que $t = 10$. Ou seja, em 2023.

**11.** C

(F) A função quadrática $f(x) = 2(x - 2)^2$ apresenta valor mínimo no ponto $(-2{,}5)$.

Falso. O valor mínimo se dá quando $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$. Logo, $f(2) = 0$.

(V) Se $f(x) = |x + 5| \cdot \sqrt{x+5} \cdot (-x^2 + 2x - 2)$.

Então, para todo $x \geq -5$, temos $f(x) \leqslant 0$. Verdadeiro. Para todo $x \geq -5$:

$f(x) = (x + 5) \cdot \sqrt{x+5} \cdot (-x^2 + 2x - 2)$

$f(x) = (x+5)^{\frac{3}{2}} (-x^2 + 2x - 2)$

Para $x \geq -5$, $(x+5)^{\frac{3}{2}} \geq 0$ e

$-x^2 + 2x - 2 < 0$.

Logo, $f(x) \leqslant 0$.

(F) O domínio da função $f(x) = \log_{\sqrt{x}} \sqrt{x+1}$ é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Falso, pois:

$\sqrt{x+1} > 0$

$x + 1 > 0$

$x > -1$

e $\sqrt{x} \neq 1$

$x \neq 1$.

**12.** E

Temos que:

$4^{f(x)} \leqslant 2x + 105$

$\log_2 4^{f(x)} \leqslant \log_2 (2x + 105)$

$f(x) \cdot 2 \leqslant \log_2 (2x + 105)$

$2 \cdot \log_8 (x + 3)^3 \leqslant \log_2 (2x + 105)$

$\frac{6}{3} \log_2 (x + 3) \leqslant \log_2 (2x + 105)$

$\log_2 (x + 3)^2 \leqslant \log_2 (2x + 105)$

$x^2 + 6x + 9 \leqslant 2x + 105$

$x^2 + 4x - 96 \leqslant 0$

Para:

$x^2 + 4x - 96 = 0$

$x = 8$ ou $x = -12$

Pelas condições de existência:

$x + 3 > 0$

$x > -3$

Logo, $-3 < x < 8$.

O que resulta em 11 soluções inteiras.

**13.** C

Calculando, temos:

$-1 \leqslant \log_3 (3x) \leqslant 1$

$\frac{1}{3} \leqslant 3x \leqslant 3$

$\frac{1}{9} \leqslant x \leqslant 1$

**14.** a) Temos:

$S = -18 \cdot \log (t + 1) + 86$

$S = -18 \cdot \log (9 + 1) + 86$

$S = -18 \cdot 1 + 86$

$S = 68\%$

b) Temos:

$50 < -18 \cdot \log (t + 1) + 86$

$-36 < -18 \cdot \log (t + 1)$

$\log (t + 1) > t + 1 > 100$

$t > 99$ minutos $= 1$ hora e 39 minutos

Depois de 1 hora e 39 minutos.

**15.** A

Temos que:

$x^2 - 4x + 3 > 8$

$x^2 - 4x - 5 > 0$

Resolvendo:

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$x = -1$ e $x = 5$

Logo, $x < -1$ ou $x > 5$.

Temos também que:

$x^2 - 4x + 3 > 0$

$x = 1$ ou $x = 3$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1$ ou $3 < x < 5\}$.

**16.** D

Calculando, temos: $e^{2\log x} - 11 \cdot e^{\log x} + 28 < 0$

Se $y = e^{\log x}$ $y^2 - 11y + 28 < 0$

Resolvendo a equação $y^2 - 11y + 28 = 0$, temos:

$y = 4$ ou $y = 7$

Logo:

$e^{\log x} = 4$ ou $e^{\log x} = 7$

$\log x = \ln 4$ ou $\log x = \ln 7$

$x = 10^{\ln 4}$ ou $x = 10^{\ln 7}$

Assim, $x \in \,]10^{\ln 4}, 10^{\ln 7}[$.

**17.** Temos que $x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0$.

Logo: $0 < x < \frac{\pi}{4}$; $x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 1$ (para todos os números reais, pois a equação

$x^2 - \frac{\pi}{4}x + 1 = 0$ não tem raízes reais)

Então:

$4 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x - 1 > 0$

$2 \cdot \text{sen}\, 2x > 1$

$\text{sen}\, 2x > \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$

Portanto, o maior domínio é dado quando

$\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$.

Logo, por $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}\right\}$.

## Estudo para o Enem

**18.** A

O número de casos por mês é dado por $N = 50 \cdot (1{,}25)^t$.

Então:

$50 \cdot (1{,}25)^t > 500$

$(1{,}25)^t > 10$

$t \cdot \log_2 1{,}25 > \log_2 10$

$t\left(\log_2 \frac{5}{4}\right) > \log_2 (2 \cdot 5)$

$t > \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 5 - \log_2 2^2} = \frac{1 + 2{,}32}{2{,}32 - 2} = \frac{3{,}32}{0{,}32} = 10{,}375$

Ou seja, no 11º mês.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**19.** B

Temos que $E = 10^{15{,}3}$.

E também $10^{n-0{,}5} \leqslant 10^{15{,}3} \leqslant 10^{n+0{,}5}$.

Logo, $n - 0{,}5 \leqslant 15{,}3 \leqslant n + 0{,}5$.

Dessa forma, podemos concluir que a ordem de grandeza é equivalente a $n = 15$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**20.** C

O número de pessoas deslocadas é dado por: $N(t) = N_0 \cdot (1{,}1)^t$

Para que $N_0 \cdot (1{,}1)^t > 2N_0$

$(1{,}1)^t > 2$

$t \cdot \log 1{,}1 > \log 2$

$t > \frac{0{,}30}{0{,}04} > 7{,}5$

Logo, no ano de $2014 + 8 = 2022$

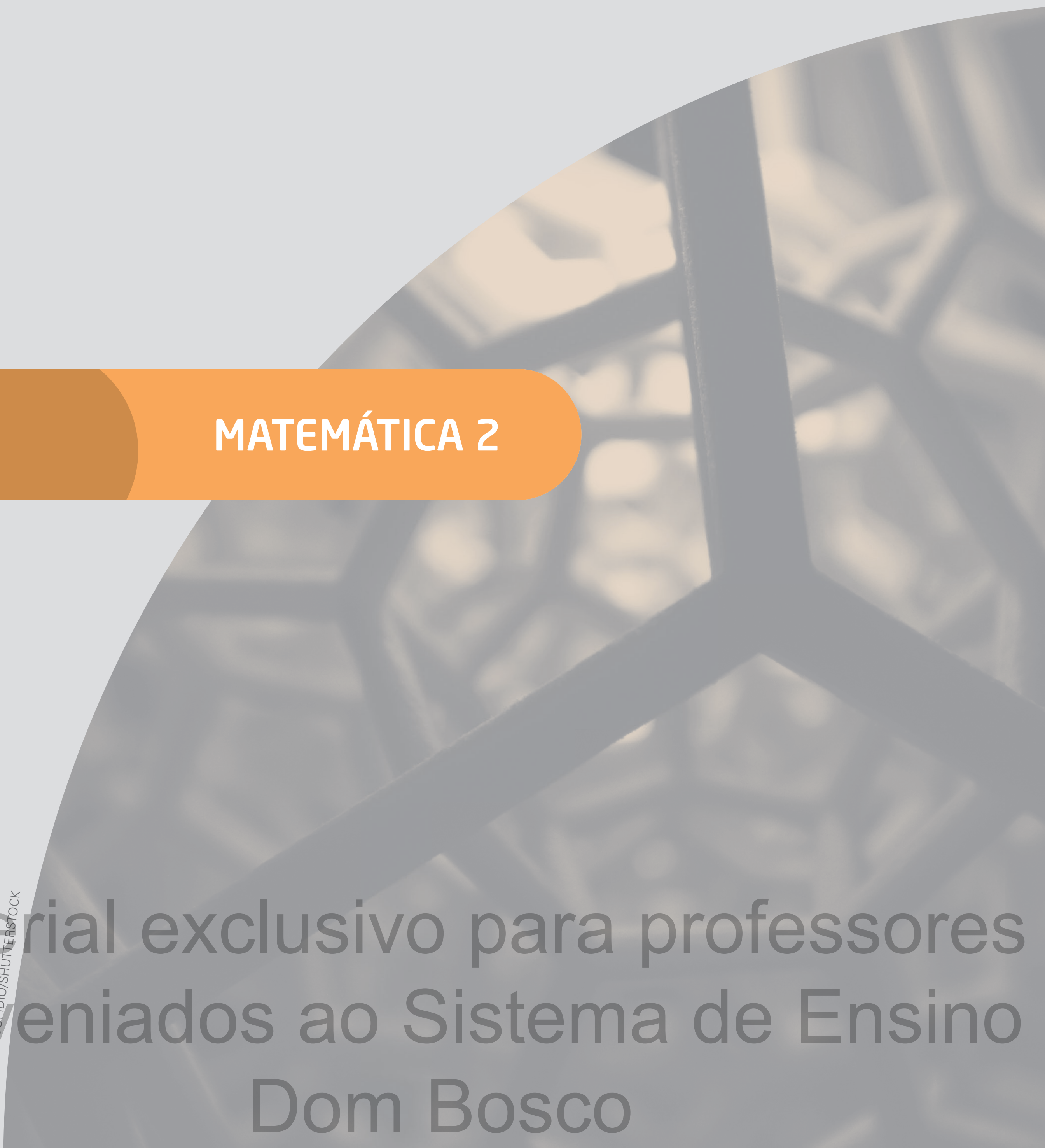
**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

MATERIAL DO PROFESSOR

# RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

## MATEMÁTICA 2



ELIZABETH SCOFIDIO/SHUTTERSTOCK

# 17 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO I

## Comentários sobre o módulo

Deduza o teorema de Pitágoras e indique algumas de suas aplicações. Deduza também a fórmula para a diagonal do quadrado e a fórmula para a altura do triângulo equilátero. Enfatize que as fórmulas podem ser aplicadas diretamente, ou que podem ser obtidas com o uso do teorema de Pitágoras.

## Para ir além

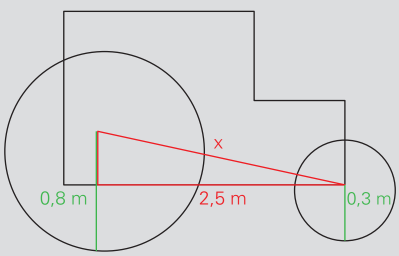
Por conta das muitas habilidades de Pitágoras de Samos (matemático, músico, filósofo, astrônomo), é possível sugerir uma pesquisa e a teatralização da vida desse importante pensador grego.

## Exercícios propostos

**7.** Ao usarmos a fórmula da altura do triângulo equilátero, temos: $h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = 3\sqrt{3}$

Logo, a diagonal do quadrado mede $d = 3\sqrt{3}$ cm.

**8.** D




Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras, obtemos:

$x^2 = (0{,}5)^2 + (2{,}5)^2$

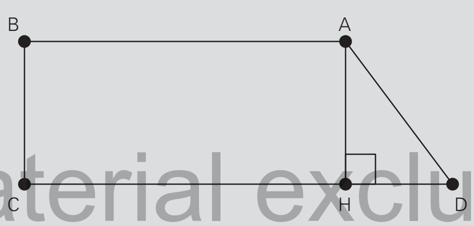
$x^2 = 0{,}25 + 6{,}25$

$x = \sqrt{6{,}5}$

Portanto, $x = \sqrt{6{,}5}$ m

**9.** C

Considere a figura, em que H é o ponto do segmento AH, perpendicular a $\overline{CD}$.




Tem-se que o segmento AB = CH = 9 cm. Logo, o segmento DH tem por medida DH = CD – CH = = 3 cm.

Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras, temos:

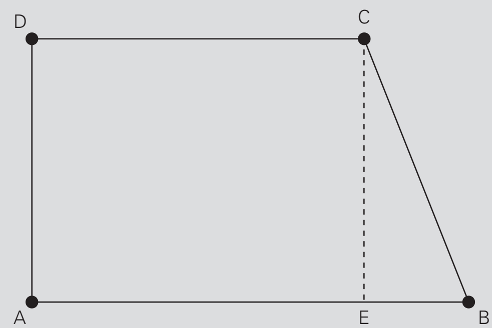
$5^2 = 3^2 + \overline{AH}^2$

$\overline{AH}^2 = 25 - 9$

$\overline{AH} = \sqrt{16} = 4$

Como o segmento AH = BC = 4 cm, teremos: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 9 + 4 + 12 + 5 = 30$ cm.

**10.** A




Traçando a perpendicular $\overline{CE}$ a $\overline{AB}$, encontramos $\overline{BE}$. Seja: BE = 20 – 15 = 5.

Como $\overline{CE}$ = 12 m, aplicaremos o teorema de Pitágoras para descobrir $\overline{CB}$. Logo,

$\overline{CB}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2$

$\overline{CB}^2 = 5^2 + 12^2 = 144 + 25 = 169$

$\overline{CB} = \sqrt{169}$

$\overline{CB} = 13$

Perímetro = 12 + 15 + 20 + 13 = 60. Portanto, o valor do perímetro será 60 m.

**11.** D

Considerando que a soma dos catetos corresponde a 15 cm, podemos estabelecer que a medida de um dos catetos é x cm, e a outra medida é (15 – x) cm. Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 + (15 - x)^2 = (5\sqrt{5})^2$

$x^2 + 225 - 30x + x^2 = 125$

$2x^2 - 30x + 100 = 0$

Agora, utilizando a fórmula de Bhaskara, temos:

$2x^2 - 30x + 100 = 0$

$a = 2 \qquad b = -30 \quad c = 100$

$\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 100$

$\Delta = 900 - 800$

$\Delta = 100$

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 2} \rightarrow x = \frac{30 \pm 10}{4}$$

$$x_1 = \frac{30 + 10}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

$$x_2 = \frac{30 - 10}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

**12.** Sejam A o ponto onde se encontrava inicialmente a bicicleta e B o ponto 6 metros ao norte de A. Chamando de C o ponto onde se encontra o hidrante, a distância pedida corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo ABC, reto em A.

Portanto, pelo teorema de Pitágoras temos:

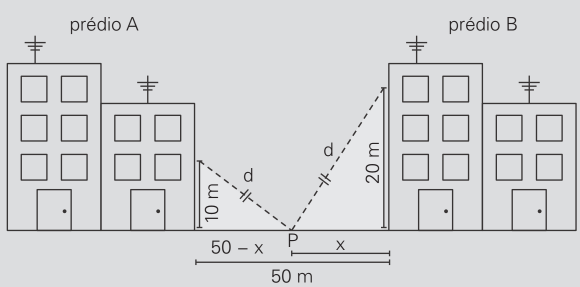
$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$

$\overline{BC}^2 = 8^2 + 6^2$

$\overline{BC} = \sqrt{100}$

$\overline{BC} = 10$ m.

**13.** A




Como o ponto P está equidistante às crianças, temos:

$d^2 = 10^2 + (50 - x)^2$ e $d^2 = 20^2 + x^2$

Igualando as equações, obtemos:

$20^2 + x^2 = 10^2 + (50 - x)^2$

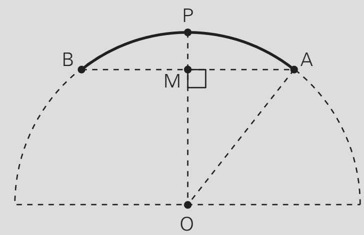
$400 + x^2 = 100 + 2\,500 - 100x + x^2$

$100x = 2\,500 + 100 - 400 = 2\,200 \rightarrow x = \frac{2\,200}{100} =$
$= 22$

Portanto, $x = 22$ m.

**14.** C

Considere a figura, em que A e B representam as extremidades, M é o ponto médio do segmento de reta AB e O é o centro do círculo de raio 4 000 m.




Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras no triângulo OAM, temos:

$\overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{AM}^2$

$4\,000^2 = \overline{OM}^2 + 160^2$

$\overline{OM} \cong 3\,996{,}8$ m.

Portanto, o resultado pedido é:

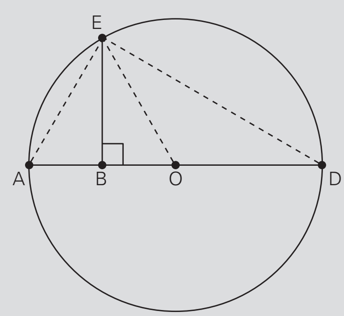
$\overline{MP} = \overline{OP} - \overline{OM}$

$\overline{MP} \cong 4\,000 - 3\,996{,}8 \cong 3{,}2$

$\overline{MP} \cong 3{,}2$ m.

**15.** C

Considere a figura, em que O é o centro da circunferência.




Tem-se que o triângulo ADE é retângulo em E e $\overline{OA} = \frac{l}{2}$.

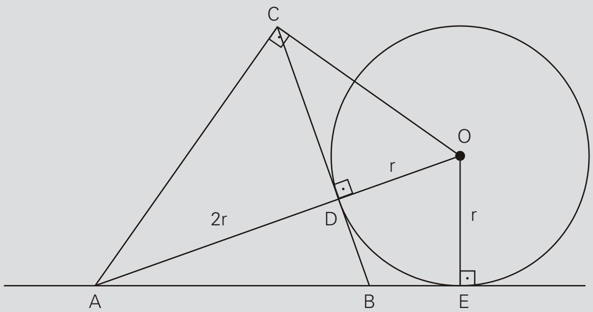
Como $\overline{OB} = a + \frac{l}{2}$ e o segmento OA = OE = raio, temos que $\overline{OE} = a + \frac{l}{2}$. Portanto, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{OE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{BO}^2$$

$$\left(a + \frac{l}{2}\right)^2 = l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\frac{l}{a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

**16.** Considere a figura a seguir.




a) No $\Delta AOE$: $AE^2 + r^2 = (3r)^2$

$$AE^2 = 8r^2$$

$$AE = 2r\sqrt{2}$$

$\Delta ADB \sim \Delta AEO$

$$\frac{AB}{3r} = \frac{2r}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot r}$$

$$AB = \frac{3 \cdot r}{\sqrt{2}}$$

$$AB = \frac{3 \cdot r\sqrt{2}}{2}$$

b) No $\Delta ACO$, temos:

$$CO^2 = (2r + r) \cdot r$$

$$CO^2 = 3 \cdot r^2$$

$$CO = r \cdot \sqrt{3}$$

**17.** E

Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras e utilizarmos a proporção dada no enunciado, podemos montar o seguinte sistema:

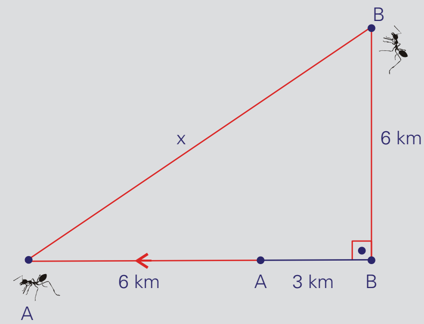
$$x^2 + y^2 = (32 \cdot 2{,}5)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 6400 \end{cases}$$

## Estudo para o Enem

**18.** D

Cada formiga, em duas horas, percorrerá 6 km. Desse modo, temos a seguinte situação:




Logo, $x^2 = 6^2 + 9^2 = 117$.

$x = \sqrt{117}$ km

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

**19.** C

O triângulo OAB é um triângulo pitagórico do tipo 3-4-5. Portanto:

$\overline{OA} = 4$

$AB = r = 3$

$R = 5$

$h = R - \overline{OA}$

$h = 5 - 4$

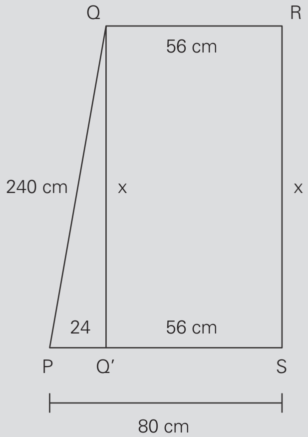
$h = 1$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**20.** D

PQRS forma um quadrilátero (trapézio). Assim, temos:




Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras no triângulo PQQ′, temos:

$(240)^2 = (24)^2 + x^2$

$x^2 = 57\,024$

$x = \sqrt{57\,024} = 238,8$

$x \approx 238,8$ cm.

Como as circunferências têm os comprimentos:

$C_1 = 2\pi R_1 = 2 \cdot 3 \cdot 80 \cdot 480$ cm

$C_2 = 2\pi R_2 = 2 \cdot 3 \cdot 56 = 336$ cm

Concluímos que o valor procurado é a diferença entre os comprimentos das circunferências 1 (de raio $\overline{PS}$) e 2 (de raio $\overline{QR}$): $x > 480 - 336$.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

# 18 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO II

## Comentários sobre o módulo

Neste módulo, foram estudadas as relações métricas no triângulo retângulo, resultados das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, acrescentando-se outros mecanismos para serem descobertos os catetos e a hipotenusa de um triângulo.

## Para ir além

LAMAS, Rita de Cássia Pavani; MAURI, Juliana. Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo com material emborrachado. Disponível em:

<https://www.ime.usp.br/~iole/oteoremadepitagoras.pdf>.

Acesso em: set. 2018.

SOUZA, Luciana Silva dos Santos Souza et al. Relações métricas no triângulo retângulo: análise da organização matemática no livro didático. Disponível em:

<https://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/TRABALHO_EV065_MD1_SA4_ID742_19102016155136.pdf>.

Acesso em: set. 2018.

Para enriquecer ainda mais a aula, pode-se sugerir o vídeo que demonstra na prática o teorema de Pitágoras. Disponível em:

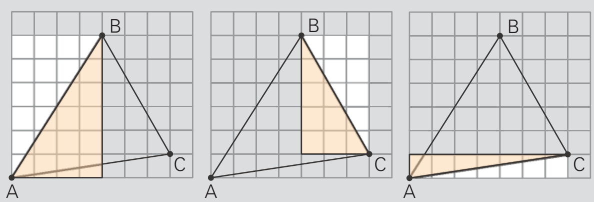
<https://www.youtube.com/watch?v5UulXgcaRIEI>.

Acesso em: set. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** D

Cada um dos segmentos pode ser medido utilizando o teorema de Pitágoras, conforme os triângulos retângulos apresentados na figura:




Assim, pode-se escrever:

$\overline{AB}^2 = 4^2 + 6^2 \rightarrow \overline{AB}^2 = 52 \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{52}$

$\overline{BC}^2 = 5^2 + 3^2 \rightarrow \overline{BC}^2 = 34 \rightarrow \overline{BC} = \sqrt{34}$

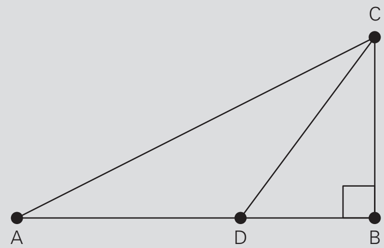
$\overline{AC}^2 = 1^2 + 7^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = 50 \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{50}$

Logo, o produto dos lados do triângulo será:

$\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} = \sqrt{52} \cdot \sqrt{34} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{88\,400} \rightarrow$
$\rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} = 20\sqrt{221}$

**8.** Soma: 04 + 08 = 12

Supondo A, B e D alinhados, considere a figura, em que $\overline{AD} = 20$ m, $\overline{BD} = 12$ m e $B\hat{D}C = 2 \cdot D\hat{A}C$.

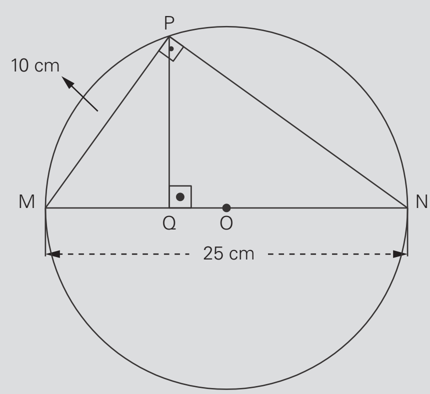



No triângulo ACD, pelo teorema do ângulo externo, tem-se que $A\hat{C}D \equiv D\hat{A}C$. Logo, CD = AD = = 20 m. Em consequência, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCD, encontramos H = = BC = 16 m.

01. Incorreto. Tem-se que $6 \cdot 2 < 16 < 6 \cdot 3 \rightarrow \rightarrow 12 < H < 18$.

02. Incorreto, pois 16 > 12.

**9.** Considere a figura a seguir.




Considerando que todo triângulo inscrito numa semicircunferência com lado coincidindo com o diâmetro é retângulo, temos:

$PM^2 = 25 \cdot MQ$

$10^2 = 25 \cdot MQ$

$MQ = 4$

$PQ^2 = MQ \cdot QN$

$PQ^2 = 4 \cdot (25 - 4)$

$PQ^2 = 84$

$PQ = 2\sqrt{21}$

**10.** E

Tem-se que $\overline{AB} = 40v$ e $\overline{BC} = 30v$. Logo, pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo ABC, temos:

$AC^2 = AB^2 + BC \rightarrow AC^2 = (40V)^2 + (30V)^2 \rightarrow$

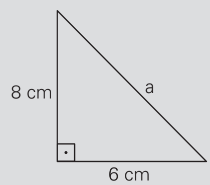
$\rightarrow AC^2 = 1\,600V^2 \rightarrow AC^2 = 900V^2 \rightarrow AC^2 =$

$= 2\,500V^2 \rightarrow \sqrt{AC^2} = \sqrt{2\,500V^2} \rightarrow AC = 50V$

Desse modo, o tempo para ir de A até C na nova configuração é $\frac{50v}{v} = 50$ s. Portanto, a economia de tempo será igual a $90 - 50 = 40$ s.

**11.** B

Observe primeiro que:



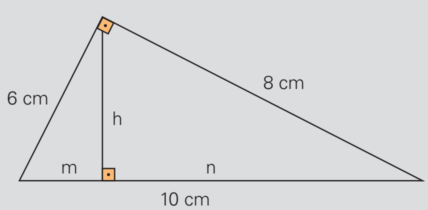

Obtendo a hipotenusa, temos:

$a^2 = 8^2 + 6^2$

$a = \sqrt{100}$

$a = 10$

Analisando a altura relativa (h), temos:




De acordo com as propriedades referentes à altura relativa à hipotenusa, podemos afirmar que:

$6^2 = m \cdot 10$

$36 = 10\,m$

$m = 3{,}6$

E que:

$8^2 = n \cdot 10$

$10n = 64$

$n = 6{,}4$

Por fim, basta aplicar a relação $h^2 = m \cdot n$ sobre o triângulo. Logo:

$h^2 = m \cdot n$

$h^2 = 3{,}6 \cdot 6{,}4$

$h = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$

Portanto, $h = 4{,}8$ m.

**12.** E

Desde que os triângulos ACE e BCD sejam semelhantes pela relação AA (ângulo-ângulo), temos:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AE}} \rightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{CD} + 3} = \frac{4}{5}$$

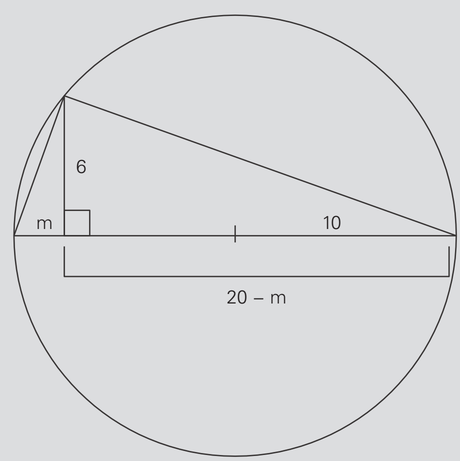
Então, $\overline{CD} = 12$.

Portanto, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ACE, encontramos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = 5^2 + 15^2$$

Então, $AC = 5\sqrt{10}$

**13.** Pelas relações métricas do triângulo retângulo, podemos afirmar que $6^2 = (20 - m) \cdot (m)$.




Resolvendo, temos:

$6^2 = (20 - m) \cdot (m)$

$36 = 20m - m^2$

$m^2 - 20m + 36 = 0$

$a = 1 \quad b = -20 \quad c = 36$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{20 + 16}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$x_2 = \dfrac{20 - 16}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

Logo, m = 2 e m = 18.

Como o raio é 10, a resposta é m = 2.

**14.** B

Sejam os segmentos MN = NO = PQ = QM = l.

Pelo teorema de Pitágoras no ΔNPR, temos:

$NR^2 = NP^2 + PR^2 \rightarrow NR^2 = l^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2$

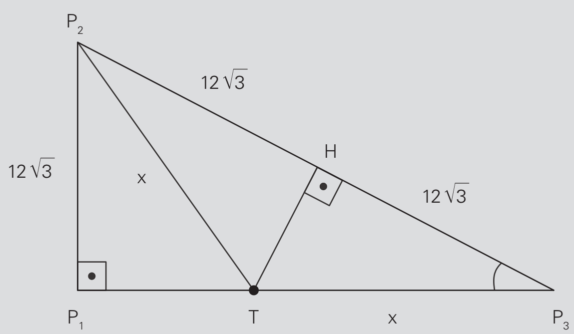
$NR = \dfrac{l\sqrt{5}}{2}$ cm

Como o ΔNPR e o ΔMSN são semelhantes pela relação AA, consequentemente, temos:

$\dfrac{NP}{MS} = \dfrac{NR}{MN} \rightarrow \dfrac{l}{3} = \dfrac{\frac{l\sqrt{5}}{2}}{l}$

Portanto, $l = 1{,}5\sqrt{5}$ cm.

**15.** Considere a figura a seguir.




Traça-se inicialmente o segmento $\overline{TH}$ perpendicular à hipotenusa $\overline{P_2P_3}$.

Calculando a medida do segmento $P_1P_3$, temos:

$\left(\overline{P_1P_3}\right)^2 = \left(24\sqrt{3}\right)^2 - \left(12\sqrt{3}\right)^2$

$\overline{P_1P_3} = \sqrt{1296}$

$\overline{P_1P_3} = 36$

Considerando que os triângulos $P_1P_2P_3$ e $THP_3$ são semelhantes, podemos escrever:

$\dfrac{24\sqrt{3}}{x} = \dfrac{36}{12\sqrt{3}}$

$36x = 24 \cdot 12 \cdot 3$

$x = 24$ m.

**16.** A

Desde que AB ∥ EM e E seja o ponto médio do segmento AD, segue-se que EM é base média do triângulo ABD. Assim, temos $EM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo DEM, temos: $\overline{DM}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{DE}^2 \rightarrow \overline{DM}^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2$.

Podemos concluir então que $\overline{DM} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Por conseguinte, dado que DH é um arco de circunferência com centro em M, encontramos:

$\overline{EH} = \overline{HN} - \overline{EM} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

**17.** C

Sendo x e y as dimensões da TV menor, pode-se calcular:

$16^2 = x^2 + y^2$

$21^2 = (kx)^2 + (ky)^2 = k^2 \cdot (x^2 + y^2)$

$21^2 = k^2 \cdot 16^2$

$k = \left(\dfrac{21}{16}\right)$

Pela razão de proporção das áreas, $k^2 = \dfrac{A_1}{A_2}$. Logo:

$A_1 = xy$

$A_2 = k \cdot xy = \left(\dfrac{21}{16}\right)^2 \cdot A_1$

$A_2 = 1{,}723 \cdot A_1$

≈ 72% de acréscimo

## Estudo para o Enem

**18.** A

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos AFE e ABE, obtemos:

$\overline{AE}^2 = 9^2 + \left(\overline{AB} + 2\right)^2$

e

$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + 13^2$

Logo, $81 + \overline{AB}^2 + 4 \cdot \overline{AB} + 4 = \overline{AB}^2 + 169$

$\overline{AB} = 21$ m.

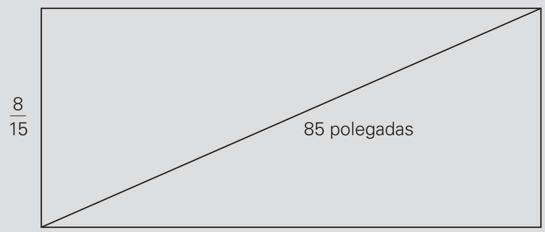
Portanto, $\overline{AB} = 21$ m e $\overline{EF} = 23$ m.

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**19.** E

A tela pode ser representada pela figura a seguir.




Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 85^2 = x^2 + \left(\frac{8}{15}x\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 7\,225 = \frac{64x^2}{225} + \frac{225x^2}{225}$$

$$\frac{289x^2}{225} = 7\,225 \rightarrow x^2 = \frac{225 \cdot 5\,625}{289} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 75$ polegadas.

Já a largura do lençol será $\frac{8}{15} \cdot 75 = 40$ polegadas.

Logo, o comprimento é 35 polegadas menor que a largura.

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**20.** D

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$$

$$d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Assim:

$$\overline{AR} = a + d$$

$$\overline{AR} = \frac{a(1 + \sqrt{5})}{2}$$

Portanto, a resposta é: $\dfrac{\frac{a(1 + \sqrt{5})}{2}}{a} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

# 19 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS I

## Comentário sobre o módulo

Neste módulo foram estudadas as áreas de dois quadriláteros notáveis, o retângulo e o quadrado.

## Para ir além

GRAVINA, Maria Alice; LOPES, Sérgio Augusto Amaral. Perímetro e área. Atividades sobre perímetro e área do 2º simpósio de formação de professores de Matemática da região Nordeste. Disponível em:

<https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2017/07/Simposio_Nordeste_Perimetro-e-area.pdf>.

Acesso em: set. 2018.

Exercícios de revisão de área de retângulos. Disponível em:

<https://pt.khanacademy.org/math/cc-third-grade-math/3rd-geometry/cc-third-grade-multiply-to-find-area/a/area-rectangles-review>.

Acesso em: set. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** Primeiro, temos:

$x + y + (y - 2) + (x - 1) = 35$

$x + y = 19$

$6 + y = 19$

$y = 13$

$S_{externa} = 6 \cdot 13 - (2 \cdot 1) = 76 \text{ m}^2$

Logo:

$S(x) = x \cdot y - (2 \cdot 1)$

$x + y = 19$

$y = 19 - x$

$S(x) = x \cdot (19 - x) - 2 = -x^2 + 19x - 2$

$$x_{máx} = \frac{19}{2 \cdot (-1)}$$

$x_{máx} = 9,5$

$y = 9,5$

**8.** Soma: 02 + 04 + 08 = 14

01) Incorreta. Pois o número total de pessoas é dado por meio do produto da área pela concentração de público:

$x \cdot (x + 10) \cdot 4 = 1\,500$

$x^2 + 10x - 375 = 0$

$x = 15 \text{ m}$

**9.** Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15

Sejam a e b, nessa ordem, a hipotenusa e o maior cateto do triângulo; como o menor lado mede 8 m, temos:

$a + b + 8 = 40$

$a + b = 32$

Além disso, podemos utilizar o teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + 8^2$

$a^2 - b^2 = 64$

Sendo assim, $a - b = 2$. Dessa forma, $a = 17$ e $b = 15$.

**10.** B

Analisando cada retângulo decorado, obtemos dimensões de $(x + 2)$ m e 2 m. Logo:

$x^2 = 2 \cdot 2 \cdot (x + 2)$

$x^2 - 4x + 8 = 0$

Sendo assim, $x = 2 + 2\sqrt{3}$.

**11.** D

Como o terreno é retangular e sabendo que sua área é de 20 m², podemos encontrar suas medidas. Sendo h o comprimento do terreno, temos:

$5h = 20$

$$h = \frac{20}{5}$$

$h = 4 \text{ m}$

Sabendo que o terreno tem ao todo 4 metros de comprimento, o lago terá comprimento igual a:

$L = 4 - 1 - 0,5$

$L = 3 - 0,5$

$L = 2,5 \text{ m}$

Como sabemos a área do terreno, vamos considerar como x a largura do deque e do lago. Assim, podemos escrever:

grama + lago + deque = 20 m²

$0,48 \cdot 20 + 2,5 \cdot x + 4 = 20$

$6,5x = 10,4$

$x = \dfrac{10,4}{6,5}$

$x = 1,6$ m

Sendo assim, a área do lago será igual a $2,5 \cdot 1,6 = 4$ m².

**12.** B

Vamos considerar:

$A_I$ = área do triângulo I

$A_{II}$ = área do triângulo II

$A_{III}$ = área do triângulo III

Teremos, então:

$$\frac{A_I + A_{II}}{A_{III}} =$$

$$= \frac{a \cdot \frac{b}{2} + a \cdot b}{\frac{7a}{4} \cdot b} =$$

$$= \frac{a \cdot b \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right)}{a \cdot b \cdot \frac{7}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7} \cong 0,857 \cong 86\%$$

**13.** Sabemos que a diagonal do retângulo corresponde ao diâmetro do círculo.

Sendo assim, podemos utilizar o teorema de Pitágoras para concluir quanto mede a diagonal:

$C^2 = 4^2 + 3^2$

$C^2 = 16 + 9$

$C^2 = 25$

$C = \sqrt{25}$

$C = 5$

Concluímos que a diagonal do retângulo mede 5 cm. Portanto, o resultado será $A = \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}\pi$ cm².

**14.** Soma: 01 + 04 + 08 = 13

Sendo c e l, respectivamente, o comprimento e a largura do terreno:

$$\begin{cases} (c-5)(l-6) = cl - 290 \\ (c+5)(l+2) = cl + 210 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6c + 5l = 320 \\ 2c + 5l = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \text{ m} \\ l = 28 \text{ m} \end{cases}$$

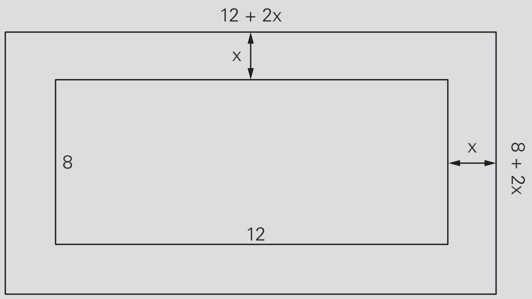
O perímetro e a área do terreno medem, respectivamente, $2(30 + 28) = 116$ m e $30 \cdot 28 = 840$ m²

02. Falsa, uma vez que 116 m < 120 m.

**15.** B

Podemos notar que o quadrilátero MNPQ é um quadrado, com lado medindo $a\sqrt{5}$. Assim, a resposta é $5a^2$.

**16.** Se x é a largura da calçada, podemos desenhar:




Sendo assim:

$S_{calçada} = 69 \text{ m}^2 = ((8 + 2x) \cdot (12 + 2x)) - 8 \cdot 12$

$69 = 96 + 16x + 24x + 4x^2 - 96$

$4x^2 + 40x - 69 = 0$

$\Delta = 40^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-69)$

$\Delta = 2\,704$

$x = \dfrac{-40 \pm \sqrt{2704}}{2 \cdot 4}$

$$x = \frac{-40 \pm 52}{8} \rightarrow \begin{cases} x' = -11{,}5 \text{ (não convém)} \\ x'' = 1{,}5 \text{ m} \end{cases}$$

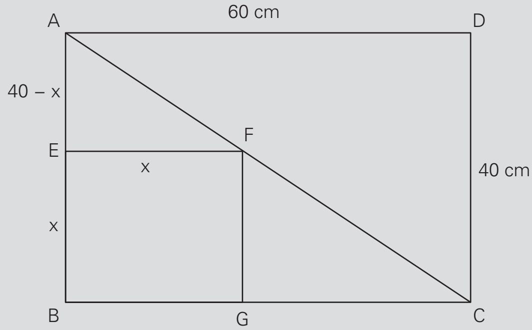
$$x_I = \frac{-40 - 52}{8} = \frac{-92}{8} = -11{,}5$$

$$x_{II} = \frac{-40 + 52}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$$

Portanto, a largura da calçada deverá ser de, no máximo, 1,5 m.

**17.** A

Considerando a figura abaixo:




Sendo $\overline{EF} = x$ o lado do quadrado.

Sabendo que os triângulos AEF e ABC são semelhantes, temos:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} \rightarrow \frac{40 - x}{40} = \frac{x}{60} \rightarrow x = 24 \text{ cm}$$

Sendo assim, o resultado pedido é:

$$\frac{(BEFG)}{(ABCD)} = \frac{24^2}{40 \cdot 60} = \frac{576}{240} = \frac{6}{25}.$$

## Estudo para o Enem

**18.** E

Para obter o resultado solicitado, teremos:

$$\frac{7000 \cdot 10000}{40 \cdot 125} = \frac{70000000}{5000} = 14000.$$

**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade:** Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**19.** D

Calculando:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ x \cdot y = S \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x \cdot y = S \end{cases}$$

$$x \cdot (50 - x)$$

$$S \rightarrow x_{máx} = y_{máx} = 25$$

**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade:** Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**20.** D

Primeiro devemos calcular a área da superfície das paredes a ser revestida, lembrando de descontar a área da porta e a superfície do piso. Assim, podemos escrever:

$$S_{paredes} = (4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 2) - (2 \cdot 1)$$

$$S_{paredes} = 52 \text{ m}^2$$

$$S_{piso} = 5 \cdot 4 \rightarrow S_{piso} = 20 \text{ m}^2$$

Logo, a despesa total com cada fornecedor seria:

| Fornecedor | Azulejo (R$/m²) | Lajota (R$/m²) | Despesa total |
|---|---|---|---|
| A | 31,00 | 31,00 | $52 \cdot 31 + 20 \cdot 31 = 2232$ |
| B | 33,00 | 30,00 | $52 \cdot 33 + 20 \cdot 30 = 2316$ |
| C | 29,00 | 39,00 | $52 \cdot 29 + 20 \cdot 39 = 2288$ |
| D | 30,00 | 33,00 | $52 \cdot 30 + 20 \cdot 33 = 2220$ |
| E | 40,00 | 29,00 | $52 \cdot 40 + 20 \cdot 29 = 2660$ |

Analisando a tabela, concluímos que o fornecedor mais barato é o D.

**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade:** Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

# 20 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS - PARALELOGRAMOS

## Comentário sobre o módulo

Neste módulo, estudamos a área do paralelogramo. São trabalhados alguns exercícios envolvendo quadrados e retângulos, além das relações entre as unidades de medida metro, centímetro e decímetro.

## Para ir além

REZENDE, Dayselane Pimenta Lopes. Uma proposta para o estudo dos paralelogramos a partir de artefatos modeladores. Disponível em:

<http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/uma-proposta-para-o-estudo-dos-paralelogramos-a-partir-de-artefatos-modeladores-e-atividades-investigativas-no-8%c2%ba-ano-do-ensino-fundamental.pdf>.

Acesso em: set. 2018.

Para enriquecer ainda mais a aula, pode-se sugerir um vídeo sobre área de paralelogramos. Trata-se de uma animação em espanhol bastante didática.

Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=j3CoPZ9dkN4>.

Acesso em: set. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** E

Primeiro vamos calcular a área do local; dessa forma: $A = 300 \cdot 500 = 150\,000\ m^2$

Para saber o total de pessoas permitidas, basta usarmos o cálculo da densidade permitida. Logo:

$5 = \dfrac{x}{150\,000} \rightarrow x = 750\,000$ pessoas

**8.** Com base nos dados informados na questão, a área de terreno que excede à do campo é: $200\,000 - (105 \cdot 68) = 192\,860\ m^2$.

**9.** D

Primeiramente vamos calcular a área ocupada por 30 bilhões de cigarras: $30 \cdot 10^9 \cdot 7 \cdot 10^{-4} = 210 \cdot 10^5\ m^2$.

Sendo assim, o comprimento N da estrada será calculado por:

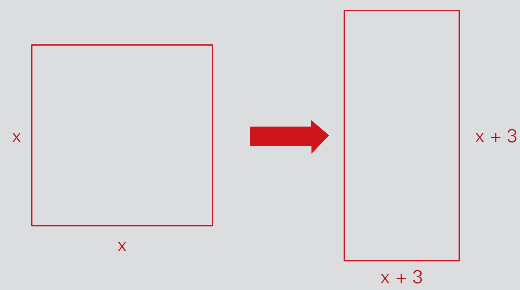
$10 \cdot n = 210 \cdot 10^5$

$n = 2 \cdot (100\,000)$

$n = 2\,100$ km

**10.** B

Considere a transformação:




Como a área de um retângulo é dada pela fórmula $b \cdot h$, temos:

$A = (x - 3)(x + 3)$

$A = x^2 - 3^2$

$A = x^2 - 9$

**11.** D

Sabendo que O é o centro do quadrado e R é o ponto médio do lado AB, temos que $\overline{RO}$ é a diagonal do quadrado pintado. Logo, $\overline{RO} = \dfrac{x}{2}$.

O resultado é dado por: $\dfrac{\dfrac{\overline{RO}^2}{2}}{\overline{AB}^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \dfrac{1}{8}$.

**12.**

Como **a** e **b** são as dimensões do terreno e como **a** > **b**, temos:

$$\begin{cases} 2(a+b)=78 \\ a-b=22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=39 \\ a-b=22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{61}{2}\ m \\ b=\dfrac{17}{2}\ m \end{cases}$$

Então, o valor do terreno é: $\dfrac{61}{2} \cdot \dfrac{17}{2} \cdot 400 =$ = R$ 103.700,00

O terreno custa R$ 103.700,00.

**13.** C

Nota-se que os triângulos retângulos AME, BNF, CPG e DQN são congruentes.

Assim, temos CP = PQ = 2 e PG = l, em que l é o lado do quadrado MNPQ.

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo CPG, obtemos:

$$\overline{CG}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PG}^2$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\frac{5l^2}{4} = \frac{25}{4}$$

$$l^2 = 5$$

**14.** A

Calculando as áreas, obtemos:

$$A_{ABCD} = x^2$$

$$A_{DEFG} = y^2$$

Sendo assim, temos: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

**15.**

Como (AEF) = 2S, pela simetria da figura, temos (EBDF) = (BDHG) = S. Assim, os triângulos AEF e ABD são semelhantes por AA.

Logo, (ABD) = (AEF) + (EBDF) = 3S.

Portanto:

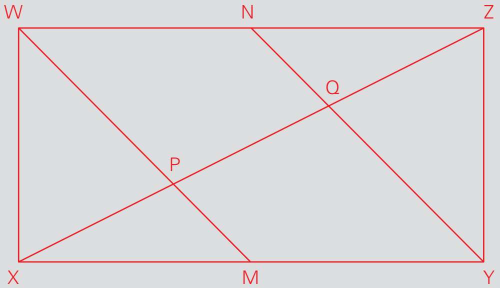
$$\frac{(AEF)}{(ABD)} = \left(\frac{x}{b}\right)^2$$

$$\frac{2S}{3S} = \left(\frac{x}{b}\right)^2$$

$$\therefore \frac{x}{b} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

**16.** D

Consideramos a figura a seguir:




Os triângulos MXW e MZY são congruentes por LAL, e o quadrilátero MYNW é um paralelogramo.

Sendo assim, como os quadriláteros MYQP e NWPQ são congruentes por simetria, vamos obter:

$$(XYZM) = 2\,[(MXW) + (MYQP)]$$

$$5 \cdot 3 = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 3 + (MYQP)\right]$$

$$\frac{15}{2} - \frac{15}{4} = (MYQP)$$

$$(MYPQ) = 3{,}75 \text{ m}^2$$

**17.** E

As placas não podem ser cortadas, e a altura do portão é de 3 m. Assim, como o número de placas utilizadas para fabricar o portão será igual a 3n, n será o número de placas sobre o eixo horizontal.

O eixo pode suportar até 250 kg. Logo:

$$3n \cdot 15 < 250$$

$$n < 5{,}5$$

Portanto, o número máximo de placas que se pode utilizar sobre o eixo é igual a 5. Sendo assim, a largura máxima do portão é 5 · 1 m = 5 m.

## Estudo para o Enem

**18.** A

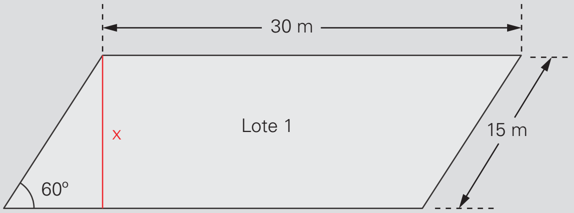
Como os triângulos retângulos são isósceles e congruentes, seus catetos medem 18 m. A base do paralelogramo mede 24 m – 18 m = 6 m. Logo, a área do passeio será igual a 6 · 18 = = 108 m².

**Competência**: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

**19.** C

Vamos considerar a figura a seguir.




$$\frac{15}{\text{sen }90^\circ} = \frac{x}{\text{sen }60^\circ}$$

$$x = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 15 \cdot \frac{1{,}7}{2}$$

$x \approx 12{,}75$ m

Logo:

$S_{lote1} = 12{,}75 \cdot 30 = 382{,}5\ m^2$

$S_{lote2} = 15 \cdot 30 = 450\ m^2$

Sendo assim, o Lote 2 é o único que tem área suficiente para a execução do projeto.

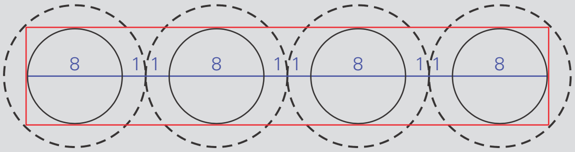
**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

**20.** C

Como as taças devem ficar alinhadas, seus diâmetros também ficarão.

O desenho demonstra a disposição das taças, sendo os círculos menores suas bases (raio de 4 cm) e os círculos maiores pontilhados suas bordas superiores (raio de 5 cm). Em vermelho está delimitada a área mínima da bandeja.




Logo, a área mínima é de:

$A = 38 \cdot 8$

$A = 304\ cm^2$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

# 21 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – TRIÂNGULOS

## Comentários sobre o módulo

Neste módulo, foram estudadas as áreas dos triângulos a partir das medidas da base e da altura, quando indicadas a área do triângulo no caso de dois catetos adjacentes; e o ângulo entre eles e a área do triângulo em dois casos particulares: o triângulo retângulo e o triângulo equilátero.

## Para ir além

LEIVAS, José Carlos Pinto; GOBBI, Juliana Aparecida. O *software* GeoGebra e a engenharia didática no estudo de áreas e perímetros de figuras planas. Este artigo discorre sobre o uso de software e o cálculo de áreas de figuras planas. Disponível em:

<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/viewFile/1521/1226>.

Acesso em: set. 2018.

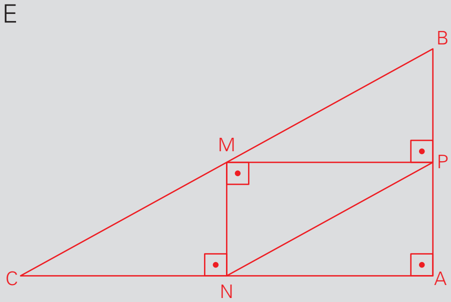
Para enriquecer ainda mais a aula, pode-se sugerir os vídeos a seguir sobre área de paralelogramos. Trata-se de uma animação em espanhol bastante didática.
Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=SpneNEiWvqg>;
<https://www.youtube.com/watch?v=cST-379_cjQ>.

Acesso em: set. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** E




MN = BP = NA

MP = CN = NA

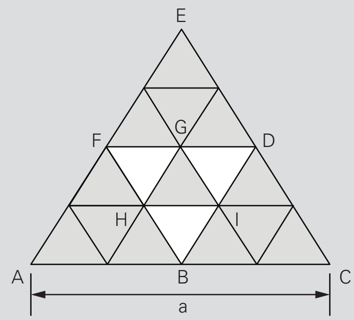
$B\hat{P}C = N\hat{M}C = N\hat{M}P = D\hat{A}N = 90°$

Logo, os triângulos CNM, NAP, PMN e MPB são congruentes pelo caso LAL.

Sendo assim, a área do quadrilátero MBAN é o triplo da área do triângulo MNC.

**8.** D

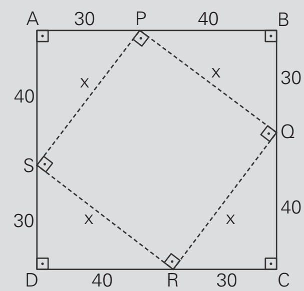
Dividindo o triângulo **ABC** e os triângulos equiláteros congruentes ao triângulo **GHI**, podemos concluir que a área assinalada é $\frac{13}{16}$ da área total do triângulo ABC. Logo:




$$A = \frac{13}{16} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A = \frac{13a^2 \cdot \sqrt{3}}{64}$$

**9.** Analisando o enunciado e a figura, temos:




a) Seja $A_{APS}$ a área do triângulo APS:

$$A_{APS} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40$$

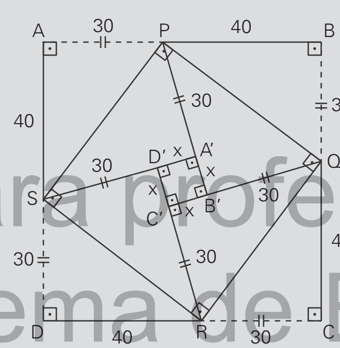
$$A_{APS} = 600 \text{ cm}^2$$

b) Sendo PS = x, a área do quadrado PRQS é $A_{PQRS} = x^2$ no triângulo APS.

$$x^2 = 30^2 + 40^2$$

$$x^2 = 2\,500 \text{ cm}^2$$

c) Temos:



CR = RC′

$C\hat{R}Q = C'\hat{R}Q$

$\overline{RQ}$ é o lado comum dos triângulos CRQ e C′RQ.

Dessa forma, os triângulos CRQ e C′RQ são congruentes. Então:

QC′ = 40

30 + x = 40

x = 10 cm

**10.** A

Sabemos que a área das cerâmicas é de
$0,2 \cdot 0,2 = 0,04\ m^2$

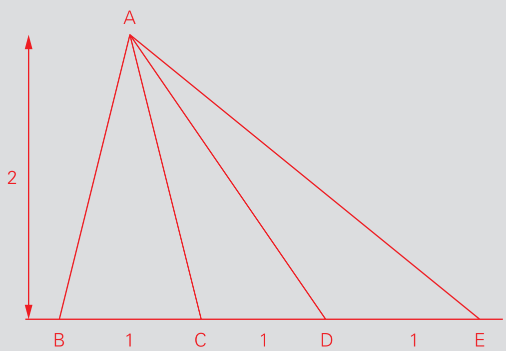
Contando o número de cerâmicas, temos:

$58 \cdot 0,04 + \frac{20}{2} \cdot 0,04 = 2,27\ m^2$.

Separamos a contagem entre as cerâmicas inteiras e aquelas pela metade. Multiplicando pelo valor do metro, temos: $2,4 \cdot 12,5 = 34$.

**11.** E

Podemos considerar a seguinte situação:




Logo, sabemos que os triângulos possíveis são: ABC, ACD, ADE, ABD, ACE, ABE.

Nota-se que os triângulos ABC, ACD, ADE têm mesma base e altura. Assim, suas áreas são:

$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

Os triângulos ABD e ACE têm base = 2. Então, sua área vale:

$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$

Note que o triângulo ABE tem base = 3. Logo, sua área vale:

$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$

Somando todas as áreas, temos:

ABC + ACD + ADE + ABD + ACE + ABE

1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 10

**12.** Considerando que AB = BE = x e BF = 12 − x, vamos obter:

$S_{BEF} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$

$\frac{x \cdot (12 - x)}{2} = \frac{x^2}{2}$

$12x - x^2 = x^2$

$2x^2 - 12x = 0$

$2x \cdot (x - 6) = 0$

$2x_I = 0\ x_I = \frac{0}{2}$

$x_I = 0$

$x_{II} - 6 = 0$

$x_{II} = 6$

Logo, x = 0 (não convém) ou x = 6.

Sendo assim, BE = 6 e BF = 6. Considerando o triângulo retângulo BEF, podemos calcular EF utilizando o teorema de Pitágoras:

$EF^2 = 6^2 + 6^2$

$EF = 6\sqrt{2}$ cm

**13.** A

Sendo L a medida, em metros, de cada lado do triângulo equilátero de área $9\sqrt{3}$ cm², temos que:

$\frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

L = 6 m

Conseguimos visualizar que os quatro triângulos menores são semelhantes ao triângulo maior, de modo que a razão de semelhança é igual a $\frac{1}{2}$.

Logo, a medida dos lados dos triângulos menores é igual a 3 m. Então, o resultado pedido é igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2} = 1,5\sqrt{3} = \sqrt{6,75}$ cm.

**14.** Soma: 02 + 08 = 10

[01] Falsa, pois $\frac{13,60}{1000} \cdot 1\,000 \cdot 3,25 = 44,20$.

[04] Falsa, pois $\frac{80\,\text{cm}}{8\text{ m}} = \frac{80\text{ cm}}{800\text{ cm}} = 10\%$ (maior que 8,33%).

[16] Falsa. Considerando a = 1 e b = 1, temos a soma de seus coeficientes: $(2 \cdot 1 - 3 \cdot 1)^5 = -1$.

**15.** C

Podemos utilizar o teorema de Pitágoras: $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$

Sabendo que os triângulos ABE e ACD são equiláteros, temos que:

$$C\hat{A}D + D\hat{A}E + E\hat{A}B + B\hat{A}C = 360°$$

$$60° + D\hat{A}E + 60° + 90° = 360°$$

$$D\hat{A}E = 150°$$

[III] Falsa. Se ABC é isósceles, então $\overline{AB} = \overline{AC} < \overline{BC}$. Sendo assim, pela desigualdade triangular, temos:

$$\overline{DE} < \overline{AD} + \overline{AE}$$

$$\overline{DE} < \overline{AB} + \overline{AB}$$

$$\overline{DE} < 2\overline{AB}$$

Por outro lado, sendo $\overline{BC} > \overline{AB}$, segue de imediato que: $\overline{BE} + \overline{BF} = \overline{AB} + \overline{BC}$

$$\overline{BE} + \overline{BF} > 2\overline{AB}.$$

Em consequência, $\overline{BE} + \overline{BF} > \overline{DE}$.

**16.**

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{RC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{S_{RQC}}{8}$$

$$S_{RQC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{S_{PBQ}}{S_{RQC}} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = \frac{9}{1}$$

$$\frac{9}{1} = \frac{S_{PBQ}}{\frac{1}{2}}$$

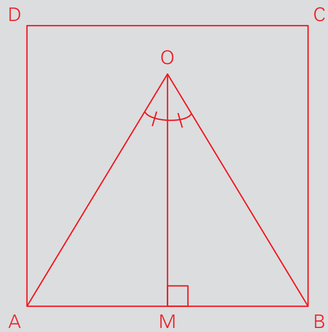
$$S_{PBQ} = \frac{9}{2}$$

$$S_{hachurado} = S_{ABC} - S_{PBQ} = 8 - \frac{9}{2} - \frac{1}{2}$$

$$S_{hachurado} = 3\text{ cm}^2$$

**17.** E

Podemos considerar a figura a seguir, em que M é o ponto médio do lado AB.




Do triângulo retângulo OMB, obtemos:

$$\text{tg } M\hat{O}B = \frac{\overline{BM}}{\overline{MO}}$$

$$\overline{MO} = \frac{\overline{AB}}{2\text{tg }\frac{\theta}{2}}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que

$\overline{AB} = 1$. Assim, $(AOB) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{MO}}{2} = \frac{1}{4\text{tg }\frac{\theta}{2}}$

A área do quadrado ABCD é maior que a área do triângulo AOB se (ABCD) > (AOB):

$$1^2 > \frac{1}{4\text{tg }\frac{\theta}{2}}$$

$$\text{tg }\frac{\theta}{2} > \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Logo, como tg 15° ≅ 0,2679 > 0,25 e $0° < \theta < 180°$, temos que $30° < \theta < 180°$. Note que ]30°, 150°[ ⊂ ]30°, 180°[.

## Estudo para o Enem

**18.** C

Se considerarmos a desigualdade triangular, os triângulos possíveis serão:

Triângulo equilátero: (4, 4, 4)

Triângulo isósceles: (5, 5, 2) e (4, 4, 4)

Triângulo retângulo: (3, 4, 5)

Triângulo escaleno: (3, 4, 5)

Logo, $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ e $w = 1$ e $x + y + z + w = 5$.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**19.** A

Seja S′ a área coberta pelas placas de uma caixa nova.

Como $S = N \cdot y^2$, $S' = x \cdot 9y^2$ e $S' = S$, temos:

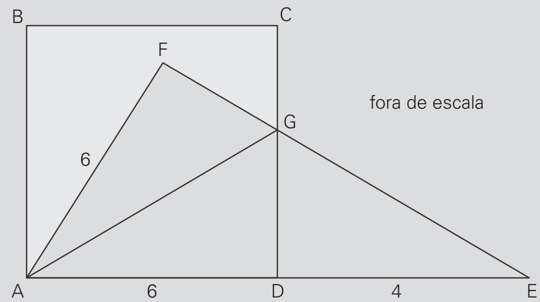
$$x \cdot 9y^2 = N \cdot y^2 \rightarrow x = \frac{N \cdot y^2}{9y^2} \rightarrow x = \frac{N}{9}$$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**20.** B

Considere a figura a seguir.




No triângulo AFE, temos:

$EF^2 + 6^2 = 10^2 \rightarrow EF^2 = 100 - 36 \rightarrow EF^2 = 64 \rightarrow EF = \sqrt{64} \rightarrow EF = 8$

$\Delta EDG \sim \Delta EFA \rightarrow \frac{DG}{6} = \frac{4}{8} \rightarrow DG = 3$ cm

$\Delta GFA \sim \Delta GDA$ (caso HC).

Portanto, têm a mesma área A: $A = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ cm².

Sendo assim, a área S pedida será dada por: $S = 6^2 - 2 \cdot 9 = 18$ cm².

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

# 22 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS - TRIÂNGULOS II

## Comentários sobre o módulo

Neste módulo, foram estudadas as áreas dos triângulos inscritos e circunscritos em uma circunferência e as áreas de um triângulo por meio da fórmula de Heron. Também foi feito um breve resumo sobre o cálculo das áreas dos triângulos já estudadas.

## Para ir além

BATISTA, Fernando da Silva. Área dos triângulos. In: Um estudo sobre área de triângulos e polígonos convexos e não convexos. p. 31-40. Disponível em: <http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Fernando.pdf>. Acesso em: set. 2018.

PAULANTI, Cláudio Magno. Área das figuras planas. Uso da fórmula de Heron. Disponível em: <http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/12122014Claudio-Magno-Paulanti.pdf>. Acesso em: set. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** B

Podemos calcular da seguinte maneira: $\Delta AMD$ é retângulo (note que é um triângulo pitagórico).

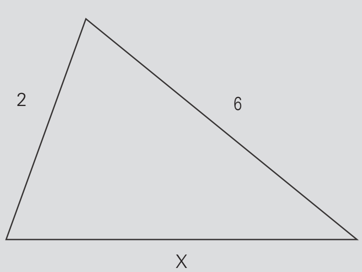
Logo, $\overline{AD} = 4$

$S_{AMD} = \dfrac{3 \cdot 4}{2}$

$S_{AMD} = \dfrac{12}{2}$

$S_{AMD} = 6$

**8.** Considere a figura:




Temos:

$S_n = \dfrac{1}{2}$ ab sen $\alpha$

$6 = \dfrac{1}{2} \cdot (2) \cdot (6) \cdot \text{sen } \alpha$

sen $\alpha = 1$

$\alpha = 90°$

Portanto, trata-se de um triângulo retângulo.

Logo, podemos calcular utilizando o teorema de Pitágoras:

$x^2 = 2^2 + 6^2$

$x^2 = 4 + 36$

$x = \sqrt{40}$

$x = 2\sqrt{10}$ cm

**9.** B

Sendo, $\overline{AB} = 2x$ e $\overline{BC} = 2y$, temos:

$A_{DEF} = A_{ABCD} - A_{ADE} - A_{BEF} - A_{CDF}$

$A_{DEF} = 2x \cdot 2y - \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot 2y - \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot y - \dfrac{1}{2} \cdot 2x \cdot y$

$A_{DEF} = 4xy - \dfrac{5}{2}xy$

$A_{DEF} = \dfrac{3}{2}xy$

Logo, a resposta é:

$$\frac{A_{DEF}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{3}{2}xy}{4xy} = \frac{3}{8}$$

**10.** A

Analisando o triângulo, concluímos que seus lados formam uma PG de razão $\dfrac{1}{2}$.

Logo, o lado do triângulo JKL será $\dfrac{1}{8}$ do lado do triângulo ABC.

Sabendo que o lado do triângulo ABC é 1, vamos considerar que o lado do triângulo JKL é $\dfrac{1}{8}$.

Portanto, sua área será dada por: $A = \left(\dfrac{1}{8}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{256}$

**11.** B

**R** e **r** são, respectivamente, o raio da circunferência circunscrita e o raio da circunferência inscrita.

Sejam ainda **a**, **b** e **c**, com **a** $\geq$ **b** $\geq$ **c**, as medidas dos lados do triângulo.

Desde que um dos lados passe pelo centro da circunferência circunscrita, temos que o triângulo é retângulo.

Portanto, $a = 2R$ é a hipotenusa, b e c são os catetos e $b + c = s$.

Em decorrência, temos:

$$\frac{bc}{2} = \frac{a + b + c}{2} r$$

$$bc = r\,(2R + s)$$

Além disso, elevando os dois lados da equação $b + c = s$ ao quadrado, temos:

$$b^2 + c^2 + 2bc = s^2$$

$$a^2 + 2r\,(2R + s) = s^2$$

$$s^2 - 2rs - 4\,(R^2 + Rr) = 0$$

$$s = 2\,(R + r)$$

Portanto, a resposta é $2\pi R + 2\pi r = \pi 2\,(R + r) = = \pi s$.

**12.** C

Podemos calcular a área do triângulo ABC utilizando a fórmula de Heron:

$$p = \frac{8 + 10 + 12}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$A = \sqrt{15 \cdot (15-8) \cdot (15-10) \cdot (15-12)}$$

$$A = 15\sqrt{7}$$

Agora podemos calcular o raio R da circunferência inscrita no triângulo ABC.

$$15 \cdot \sqrt{7} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot R}$$

$$60 \cdot R \cdot \sqrt{7} = 8 \cdot 10 \cdot 12$$

$$R = \frac{16}{\sqrt{7}}$$

$$R = \frac{16\sqrt{7}}{7}$$

O raio r da circunferência que passa pelos pés das alturas do triângulo ABC é a metade do raio R da circunferência circunscrita no triângulo ABC.

Sendo assim: $R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$

**13.** Calculando, temos:

$$A = 12{,}5 = \frac{(2x - 1) \cdot (x + 2)}{2}$$

$$12{,}5 = \frac{2x^2 + 4x - x - 2}{2}$$

$$25 = 2x^2 + 3x - 2$$

$$0 = 2x^2 + 3x - 27$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-27)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{225}}{4}$$

$$x_I = \frac{-3 + 15}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_{II} = \frac{-3 - 15}{4} = \frac{-18}{4} \text{ (não convém)}$$

a = hipotenusa

$$a^2 = (2x - 1)^2 + (x + 2)^2$$

$$a^2 = (2 \cdot 3 - 1)^2 + (3 + 2)^2$$

$$a^2 = 5^2 + 5^2$$

$$a^2 = 50$$

$$a = 5\sqrt{2}$$

$$a \approx 7$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x + 2}{a} = \frac{3 + 2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\operatorname{sen}\theta = 0{,}71$$

**14.** C

$$RS^2 + RT^2 = (8\sqrt{2})^2$$

$$RS^2 + RS^2 = 128$$

$$RS^2 = 64$$

$$RS = \sqrt{64}$$

$$RS = 8$$

Sendo assim, a razão entre as áreas dos triângulos será dada por: $\frac{A_{SRU}}{A_{SRT}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6}{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8} = \frac{6}{8} =$

$= 0{,}75 = 75\%$

**15.** E

Como já conhecemos os lados AB e BC, podemos utilizar o teorema de Pitágoras para descobrir quanto mede o lado AC. Logo:

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$12^2 + AC^2 = 20^2$

$AC^2 = 256$

$AC = 16$

Note que, como os pontos E, F e G são pontos médios do triângulo ABC, temos:
$\Delta BEF \sim \Delta EAG \sim \Delta FGC \sim \Delta GFE$.

Também teremos que $\begin{cases} \overline{AG} \equiv \overline{EF} = 8 \\ \overline{AE} \equiv \overline{FG} = 6 \end{cases}$.

Logo, a área do triângulo FEG será: $A_{FEG} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} =$

$= 24 \text{ cm}^2$.

**16.** Sabendo que h é a altura do triângulo FQR e que x é a altura do triângulo DQE, podemos escrever:

$DE = 4$

$FR = RG$

$FR + RG = \dfrac{8}{2} = 4$

$FR = RG = 2$

Sendo assim:

$\Delta FRQ \sim \Delta EQD$

$\dfrac{4}{2} = \dfrac{x}{h}$

$x = 2h$

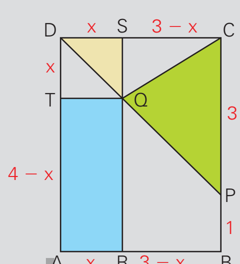
Temos que $h + x = 4$. Então, $h = \dfrac{4}{3}$.

Logo, a área do triângulo será dada por:

$A = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{3}$

**17.** A

De acordo com o enunciado, pode-se desenhar:




A soma das áreas hachuradas será:

$S(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3 \cdot (3 - x)}{2} + x \cdot (4 - x)$

$S(x) = \dfrac{x^2 + 9 - 3x + 8x - 2x^2}{2}$

$S(x) = \dfrac{1}{2} \cdot (-x^2 + 5x + 9)$

$S_{máx} = Y_{máx} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-(5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 9)}{4 \cdot (-1)}$

$S_{máx} = \dfrac{61}{8}$

## Estudo para o Enem

**18.** B

Sendo r e s, respectivamente, a área de cada um dos triângulos congruentes que constituem os triângulos SOL e LUA, temos que $9r = 16s$.

Logo, se x é o número que, multiplicado pela medida da área da superfície em amarelo, resulta na medida da área da superfície em azul, então:

$6r \cdot x = 10s$

$x = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{9}{16}$

$x = \dfrac{15}{16}$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**19.** B

$S\Delta = \dfrac{6 \cdot 6\sqrt{2}}{2}$

$S\Delta = 18\sqrt{2}$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

**20.** A

Para que as áreas dos terrenos sejam iguais, devemos considerar que $BD = DC = 10$ m.

No triângulo ABD, temos:

$AD^2 = 21^2 + 10^2$

$AD \approx 23$ m

Então, o comprimento total do muro será dado por, aproximadamente,

21 + 29 + 20 +23 = 93 m.

Portanto, a área total de muro construído será de, aproximadamente,

$93 \cdot 3 = 279$ m².

O valor total da construção será de, aproximadamente, $279 \cdot 90 = 25 \cdot 110{,}00$. Ou seja, cerca de 25 mil reais.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

## 23 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – TRAPÉZIOS E LOSANGOS

### Comentários sobre o módulo

Neste módulo, foram estudados os cálculos das áreas do trapézio e do losango, com a demonstração das fórmulas das áreas de cada um para o aprofundamento do tema.

### Para ir além

BATISTA, Fernando da Silva. Um estudo sobre área de triângulos e polígonos convexos e não convexos. Disponível em:

<http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Fernando.pdf>.

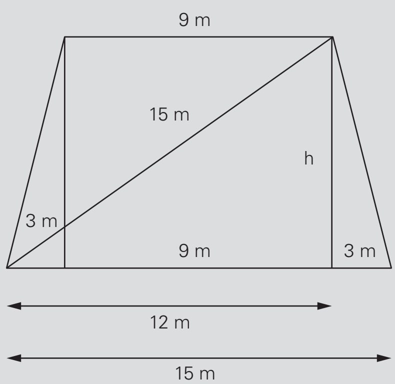
Acesso em: set. 2018.

Este é um bom material que aborda outra maneira para calcular as áreas de polígonos.

### Exercícios propostos

**7.** C

Considere a figura a seguir:




Vamos considerar h a medida da altura do trapézio e A a medida de sua área. Então:

$h^2 + 12^2 = 15^2$

$h^2 = 225 - 144$

$h = \sqrt{81}$

$h = 9$

$A = \dfrac{(15 + 9) \cdot 9}{2} = 108 \text{ m}^2$

**8.** A área do trapézio é $A_t = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$. Logo:

$22{,}32 = \dfrac{(8 + 6{,}4) \cdot h}{2}$

$44{,}54 = 14{,}4 \text{ h}$

$h = 3{,}10 \text{ m}$

**9.** D

Calculando, temos:

$S = \dfrac{(b + B) \cdot h}{2} = \dfrac{(b + B) \cdot 50}{2} = 1\,800$

$b + B = 72$

$\dfrac{b}{8} + \dfrac{B}{8} = \dfrac{72}{8}$

$\dfrac{b}{8} + \dfrac{B}{8} = 9$

Dois números inteiros cuja soma é 9:

1 e 8

$1 \cdot 8 + 8 \cdot 8 = 72$

2 e 7

$2 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 72$

3 e 6

$3 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = 72$

4 e 5

$4 \cdot 8 + 5 \cdot 8 = 72$

Ou seja, 4 possibilidades.

**10.** A

Temos que $A_{ACFG} = \overline{AC}^2 = s_1$ e $A_{ABHI} = \overline{AB}^2 = s_2$.

Logo, no triângulo ABC podemos utilizar o teorema de Pitágoras:

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$

$\overline{BC}^2 = S_1 + S_2$

Sendo assim, a área do trapézio BCDE é dada por:

$A_{BCDE} = \dfrac{1}{2}(\overline{CD} + \overline{BE})$

$A_{BCDE} = \dfrac{1}{2} \cdot (\overline{CX} + \overline{BX}) \cdot \overline{BC}$

$A_{BCDE} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BC}$

$A_{BCDE} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{BC}^2$

$A_{BCDE} = \dfrac{S_1 + S_2}{2}$

**11.** a) Seja **A'** o pé da perpendicular baixada de **A** sobre **CD**, temos:

$\text{sen } 6° = \dfrac{\overline{A'C}}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{A'C} \cong 10 \cdot 0{,}104 \rightarrow \overline{A'C} \cong 1{,}04 \text{ cm}$

Em consequência, sendo **ABCD** isósceles:

$\overline{AB} - \overline{CD} = 2 \cdot \overline{A'C} = 2{,}08 \text{ cm}$

b) Tomando o triângulo **AA′C**, temos:

$\cos 6° = \dfrac{\overline{AA'}}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{AA'} \cong 10 \cdot 0{,}994 \rightarrow \overline{AA'} \cong 9{,}94 \text{ cm}$

Se a área do trapézio **ABCD** é igual a 99,4 cm², então:

$$99{,}4 = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{AA'}$$

$$99{,}4 = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot 9{,}94$$

$$\overline{AB} + \overline{CD} = 20 \text{ cm}$$

**12.** C

Sendo **h** a altura do trapézio e considerando as informações contidas no enunciado, podemos escrever:

$PQ = x$

$SR = 3x$

$$S_{\text{trapézio}} = \frac{(x + 3x) \cdot h}{2} \rightarrow S_{\text{trapézio}} = 2xh$$

$$S_{\text{quadrilátero}} = xh$$

$$\frac{S_{\text{trapézio}}}{S_{\text{quadrilátero}}} = \frac{2xh}{xh} = 2$$

**13.** E

Área do lote: $20(12 + 18) = 600$ m².

Área construída: $\dfrac{(x + 12) \cdot 20}{2} = 10x + 120$.

De acordo com as informações do enunciado, temos:

$$\frac{40}{100} \cdot 600 \leq 10x + 120 \leq \frac{60}{100} \cdot 600$$

$$240 \leq 10x + 120 \leq 360$$

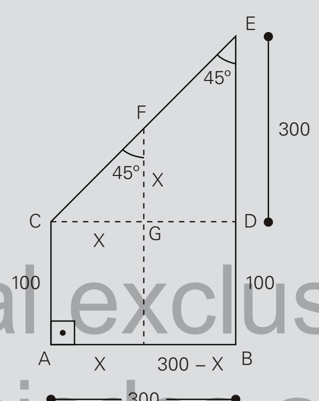
$$120 \leq 10x \leq 240$$

$$12 \leq x \leq 24$$

Logo, $x \in [12, 24]$.

**14.** A

Considere a figura a seguir:




O triângulo **CGF** é isósceles, logo $CG = GF = x$.

O triângulo **ADE** é isósceles, logo $CD = DE = 300$.

Igualando as áreas dos dois trapézios, temos a seguinte equação:

$$\frac{(100 + x + 100) \cdot x}{2} = \frac{(400 + 100) \cdot (300 - x)}{2}$$

$$200x + x^2 = 150\,000 - 500x + 300x - x^2$$

$$2x^2 + 400x - 150\,000 = 0$$

$$x^2 + 200x - 75\,000 = 0$$

Sendo assim:

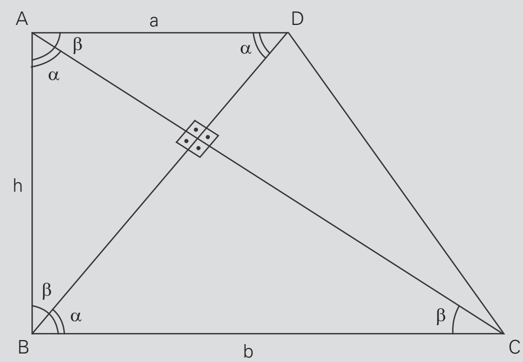
$$x = \frac{-200 + 100\sqrt{34}}{2}$$

$$x = -100 + 50 \cdot 5{,}83$$

$$x = 191{,}5 \text{ m}$$

**15.** C

Desenhando o trapézio com os dados do enunciado, temos:




Por semelhança de triângulos, podemos escrever:

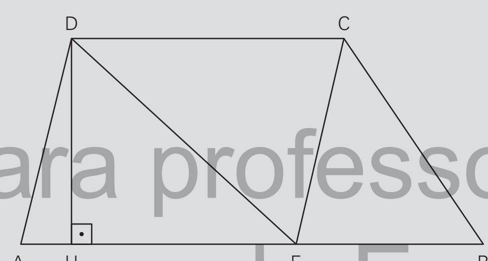
$\Delta ABC \sim \Delta ABD$

$$\frac{h}{b} = \frac{a}{h} \rightarrow h^2 = ab \rightarrow h = \sqrt{ab}$$

$$S_{\text{trapézio}} = \left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot h \rightarrow S_{\text{trapézio}} = \left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot \sqrt{ab}$$

**16.** E

Considere a figura, em que H é o pé da perpendicular baixada de D sobre $\overline{AB}$.



Traçando CE e escrevendo $\overline{BE} = 54 - \overline{AE}$, temos:

$A_{ADE} = A_{BCDE}$

$A_{ADE} = A_{CDE} + A_{BCE}$

$A_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{DH}$

$A_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DH} + \frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{DH}$

$\overline{AE} = 26 + 54 - \overline{AE}$

$\overline{AE} = 40$ cm

**17.** a) Vamos supor que **ACDE** seja um retângulo. Assim: $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = 15 - 7 = 8$ cm.

Então, sendo $\overline{AE} = \overline{CD} = 6$ m, basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo BCD para encontrar $\overline{BD} = 10$ m.

Por conseguinte, o custo total da cerca é igual a: $7 \cdot 100 + 10 \cdot 200 =$ R\$ 2.700,00.

b) Se **ACDE** é um retângulo, então:

$A_{ABDE} = \frac{\overline{AB} + \overline{DE}}{2} \cdot \overline{AE}$

$A_{ABDE} = \frac{7 + 15}{2} \cdot 6$

$A_{ABDE} = 66\ m^2$

c) Como $BB' = 2BC = 16$ m e $B'D' = CD = 6$ m, temos:

$A_{BB'D} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BB'} \cdot \overline{B'D'}$

$A_{BB'D} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6$

$A_{BB'D} = 48\ m^2$

## Estudo para o Enem

**18.** C

A área do trapézio é dada por $\left(\frac{3,8 + 3}{2}\right) \cdot 4 = 13,6\ m^2$.

Podemos concluir que a quantidade mínima de BTUh necessária é: $13,6 \cdot 800 + 600 = 11\,480$.

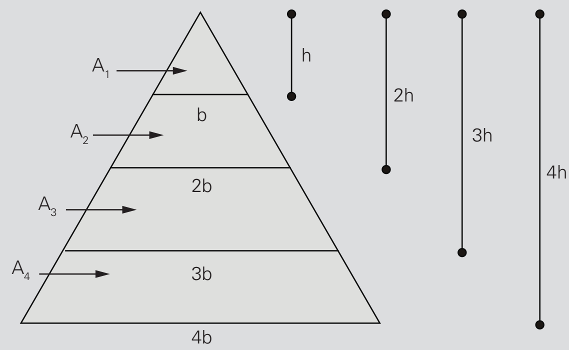
Em consequência, a escolha do supervisor recairá sobre o aparelho do tipo III.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

**19.** A

Considere a figura a seguir.




$A_1 = \frac{b \cdot h}{2}$

$A_2 = \frac{(b + 2b)}{2} \cdot h = \frac{3bh}{2}$

$A_3 = \frac{(2b + 3b)}{2} \cdot h = \frac{5bh}{2}$

$A_4 = \frac{(3b + 4b)}{2} \cdot h = \frac{7bh}{2}$

Portanto, são sete terços da área do grupo com predominância de proteínas.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

**20.** E

Seja a área do quadrado de lado a: $A = a \cdot a = a^2$, nota-se que as hortas das alternativas B e C têm metade da área do quadrado: $A_h = \frac{a^2}{2}$.

A horta da alternativa A é menor que a metade do quadrado. Logo: $A_h < \frac{a^2}{2}$.

A área da horta da alternativa D é:

$a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{2a^2 - a^2}{2} = \frac{a^2}{2}\ \frac{a^2}{2}\ \frac{a^2}{2}$. Ou seja, a metade da área do quadrado.

Desta maneira, a horta da alternativa E é a que tem maior área.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

## 24 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – CÍRCULOS I

### Comentários sobre o módulo

Neste módulo, foram estudadas as áreas das figuras planas com formato curvilíneo: o círculo e a coroa circular. Também foi demonstrada, geometricamente por aproximação, a fórmula da medida da área do círculo.

### Para ir além

LAMAS, Rita de Cássia Pavani. A área do círculo: atividades experimentais. Este material apresenta atividades ludicas relacionadas a circulos e circunferencias. Disponível em:

<http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/a-area-do-circulo-atividades-experimentais---prof-rita.pdf>.

Acesso em: set. 2018.

Para enriquecer ainda mais a aula, pode-se sugerir vídeos sobre área de círculos e coroas circulares. Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v5Y11eEwDt1hE>;
<https://www.youtube.com/watch?v5wY-620oVI08>.

Acesso em: set. 2018.

### Exercícios propostos

**7.** B

Como ABC está inscrito no semicírculo, temos $A\hat{B}C = 90°$, ou seja, o triângulo ABC é retângulo isósceles. Portanto:

$$\frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{OB}$$

$$\frac{r^2}{2}\cdot(\pi - 2)$$

$$2 \cdot 1{,}14$$

$$2{,}28 \text{ cm}^2$$

**8.** Basta calcularmos a área da praça menos a área da fonte:

$$A_{praça} = 40 \cdot 60 = 2\,400 \text{ m}^2$$

$$A_{fonte} = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 64 = 200{,}96 \text{ m}^2$$

Subtraindo, temos $2\,400 - 200{,}96 = 2\,199{,}04 \text{ m}^2 \therefore$
$\therefore A = 2\,199{,}04 \text{ m}^2$.

**9.** E

Para o cálculo da área da coroa dourada, temos que o diâmetro da parte prateada é de 24 mm. Logo, seu raio ($r_2$) corresponde a 12 mm, e o diâmetro da moeda é de 27 mm. Então, seu raio ($r_1$) corresponde a 13,5 mm. Assim, obtemos:

$$A_{coroa} = A_2 - A_1$$

$$A_{coroa} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = 3{,}1 \cdot (13{,}5^2 - 12^2) = 118{,}575 \text{ mm}^2$$

**10.** C

Sendo **r** o raio do círculo, se aumentarmos a medida de r em 20%, obtemos um círculo de área $\pi\cdot(1{,}2r)^2 = 1{,}44\,\pi r^2$. Ou seja, 44% maior que a área do círculo de raio r.

**11.** D

Temos que a altura do retângulo é 1,5x. Logo, a resposta será obtida por:

$$A = x \cdot 1{,}5x + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(1{,}5 + \frac{\pi}{8}\right)x^2$$

**12.** a) Como o triângulo é equilátero e está inscrito na circunferência, podemos escrever:

r = raio da circunferência

h = altura do triângulo ABC

l = lado do triângulo ABC

Logo:

$$r = \frac{2}{3}h \rightarrow \sqrt{48} = \frac{2}{3}h \rightarrow h = \frac{3\sqrt{48}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow 6\sqrt{3} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow l = 12$$

b) Resolvendo, temos:

$$S_{cinza} = S_{circunf} - S_{ABC}$$

$$S_{circunf} = \pi R^2 = \pi\left(\sqrt{48}\right)^2 = 48\pi$$

$$S_{ABC} = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$$

$$S_{cinza} = 48\pi - 36\sqrt{3} \approx 88 \text{ cm}^2$$

**13.** B

Sejam **l**, **r** e **R**, respectivamente, o lado do quadrado, o raio do círculo menor e o raio do círculo maior.

Logo, como $l = 2r$ e $R = r\sqrt{2}$, temos que a área escura é dada por: $l^2 - \pi r^2 \cong (2r)^2 - 3{,}14r^2 \cong 0{,}86r^2$.

Sendo assim, como a área do círculo maior é $\pi R^2 \cong 6{,}28r^2$, obtemos: $\frac{0{,}86r^2}{6{,}28r^2}\cdot 100\% = 13{,}7\%$.

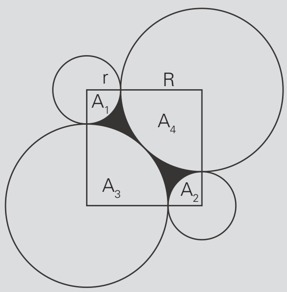
**14.** E

$2R = 1 \cdot \sqrt{2}$ (diagonal do quadrado)

$R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

A área medida é dada pela diferença entre a área do quadrado e as áreas dos quartos de círculos indicados por $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$.

Considere a figura a seguir.




$$A = 1^2 - (A_1 + A_2) - (A_3 + A_4)$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

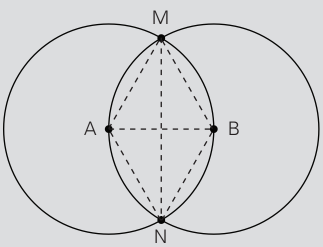
$$A = 1 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4} + \frac{2}{4}\right)$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)$$

$$A = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\pi$$

**15.** D

Considere a figura, em que **A** e **B** são os centros das circunferências e **M** e **N** são os pontos em que elas se intersectam.




Sabendo que os triângulos ABM e ABN são equiláteros (já que os segmentos AM, BM e AB são congruentes), podemos concluir que $N\hat{A}M = 120°$.

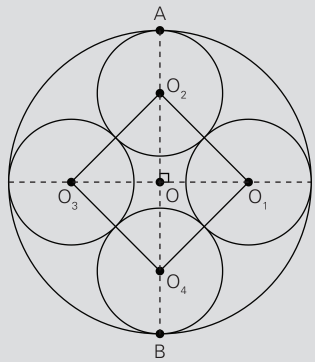
A área solicitada corresponde à soma das áreas de dois segmentos circulares congruentes de raio 10 m e ângulo central igual a $\frac{2\pi}{3}$ rad. Então:

$$2 \cdot \frac{10^2}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$100 \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{200\pi}{3} - 50\sqrt{3}\right) m^2$$

**16.** Considerando a figura, em que **AB** é o diâmetro da circunferência de centro **O** e raio **R**, temos:




Como o triângulo $OO_1O_2$ é retângulo isósceles, segue que $\overline{OO_2} = \overline{OO_4} = r\sqrt{2}$

Logo:

$$\overline{AB} = \overline{AO_2} + \overline{O_2O_4} + \overline{O_4B}$$

$$2R = 2r + 2r\sqrt{2}$$

$$r = \frac{R}{\sqrt{2} + 1}$$

$$r = \left(\sqrt{2} - 1\right) R$$

Portanto, como $O_1O_2O_3O_4$ é quadrado, temos:

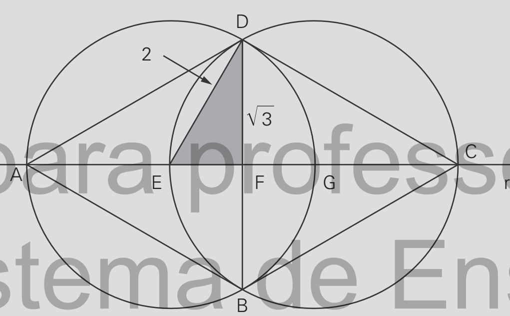
$$O_1O_2O_3O_4 = (2r)^2$$

$$4 \cdot \left[\left(\sqrt{2} - 1\right)R\right]^2$$

$$4\left(3 - 2\sqrt{2}\right) R^2$$

**17.** C

Considere a figura a seguir.



Na figura:

$AE^2 + EF^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2 \rightarrow EF = 1$

$AC = 6$ e $BC = 2\sqrt{3}$

Portanto, a área do quadrilátero ABCD será:

$$A = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

## Estudo para o Enem

**18.** A

A área total de cobertura das duas antenas era de $2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 8\pi$ km².

Com a nova antena, a área passou a ser de $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$ km².

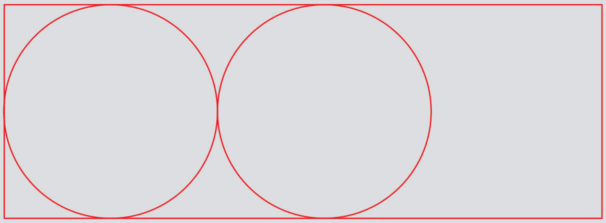
Logo, o aumento foi de $16\pi - 8\pi = 8\pi$ km².

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

**19.** C

Considere a figura, em que estão indicadas duas possíveis posições do esguicho:



A área que não será molhada é igual a $15 \cdot 6 - 2 \cdot \pi \cdot 3^2 \cong 33,48$ m².

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

**20.** C

Calculando as áreas, temos:

$$S_I = \frac{\pi \cdot (4R)^2}{2} - \frac{\pi \cdot (3R)^2}{2} + \frac{\pi \cdot (R)^2}{2} = 4\pi R^2$$

$$S_{II} = \frac{\pi \cdot (3R)^2}{2} - \frac{\pi \cdot (2R)^2}{2} + \frac{\pi \cdot (2R)^2}{2} - \frac{\pi \cdot (R)^2}{2} =$$

$$= 4\pi R^2$$

$$S_{III} = 2n\left[\frac{\pi \cdot (2R)^2}{2} - \frac{\pi \cdot (R)^2}{2} + \frac{\pi \cdot (R)^2}{2}\right] = 4\pi R^2$$

$$S_{IV} = 2 \cdot \left[\frac{\pi \cdot (2R)^2}{2} - \frac{2 \cdot \pi \cdot (R)^2}{2}\right] = 2\pi R^2$$

Logo, $S_{IV} = \frac{1}{2} S_{II}$.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

# 25 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS - CÍRCULOS II

## Comentários sobre o módulo

Neste módulo, continuamos a estudar as áreas das figuras planas com formato curvilíneo: o setor circular e o segmento circular. Também foram demonstradas as fórmulas utilizadas para o cálculo da área do segmento circular em função do ângulo central.

## Para ir além

KHAN Academy. Área e perímetro de setores circulares. Este é um material sobre área de setores circulares, com revisão teórica e vídeos explicativos. Disponível em:

<https://pt-pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-area-and-perimeter/area-circumference-circle/e/area-and-circumference-of-parts-of-circles>. Acesso em: set. 2018.

Para enriquecer ainda mais a aula, podem-se sugerir vídeos sobre área de círculos e coroas circulares. Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v5zLvHpbR6NA4.; ,https://www.youtube.com/watch?v57uy-DLCcTcE>. Acesso em: set. 2018.

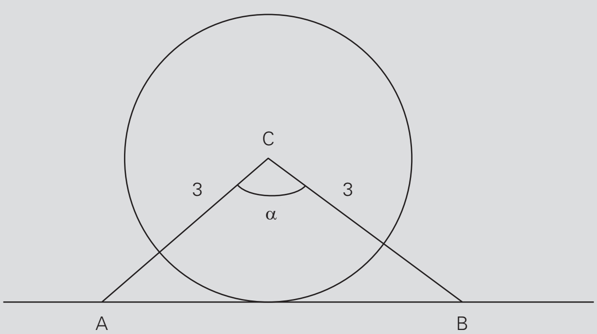
## Exercícios propostos

**7.** C

De acordo com as informações do enunciado, a resposta será dada por: $\frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{8\pi}{3}$ cm².

**8.** A

Considere a figura a seguir.




Sabemos que a região comum entre o triângulo e a circunferência é o setor circular destacado acima. Sua área será dada por: $A = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot \alpha}{360°} = \frac{\pi \cdot \alpha}{40°}$

Como $0° < \alpha < 180°$, temos: $0 < A < 4{,}5\pi$.

Sendo assim, a área **A** não terá um valor máximo.

**9.** E

Sabemos que a área do losango inscrito em um retângulo é metade da área do retângulo. Basta obtermos a área do retângulo e do círculo: $A_{retângulo} = 8 \cdot 12 = 96$

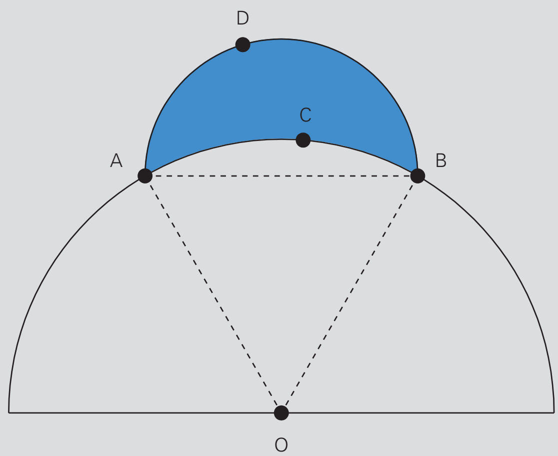
Dividindo pela metade, temos: $\frac{96}{2} = 48$ cm².

$A_{círculo} = \pi r^2$

$A_{círculo} = 3^2\pi$

$A_{círculo} = 9\pi$

**10.** a) Considere a figura.




Como $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{AB} = R$, o triângulo ABO é equilátero.

Sendo assim, o perímetro da parte sombreada é dado por:

$\overset{\frown}{ACB} + \overset{\frown}{ADB}$

$\frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot R + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R}{2}$

$\frac{5\pi R}{6}$ u.c.

b) A área da parte sombreada é igual a:

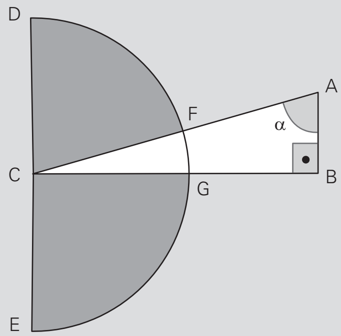
$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right)$

$\frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{1}{24} \cdot \pi \cdot R^2$

$\frac{R^2}{4}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ u.a.

**11.** D

Calculando, temos:




$$S_{sombreada} = S_{semicírculo} - S_{CFG}$$

$$\frac{1}{2}\pi \cdot 12^2 - \frac{90° - \alpha}{360°} \cdot \pi \cdot 12^2 = 69\pi$$

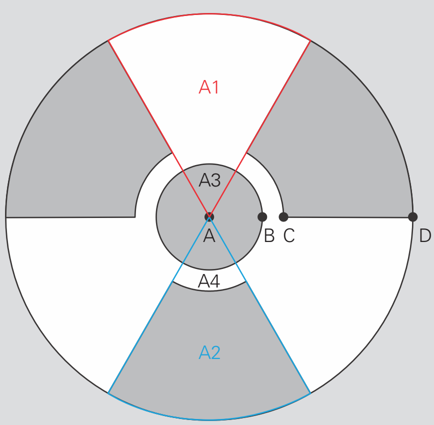
$$69\pi = 144\pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{90° - \alpha}{360°}\right)$$

$$\frac{69}{144} = \frac{180° - 90° - \alpha}{360°}$$

$$\alpha = 82{,}5°$$

**12.** B

Calculando, temos:




$$A_3 = \frac{\pi \cdot (\overline{AB})^2}{6} = \frac{\pi \cdot (2)^2}{6}$$

$$A_3 = \frac{2\pi}{3}$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD})^2 - \pi \cdot (\overline{AB} + \overline{BC})^2}{6}$$

$$A_2 = \frac{81\pi - 9\pi}{6}$$

$$A_2 = 12\pi$$

$$S_{sombreado} = 6\,A_3 + 3\,A_2 = 6 \cdot \frac{4\pi}{6} + 3 \cdot 12\pi$$

$$S_{sombreado} = 40\pi$$

$$S_{total} = \pi \cdot (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD})^2 = 81\pi$$

$$S_{branco} = S_{total} - S_{sombreado}$$

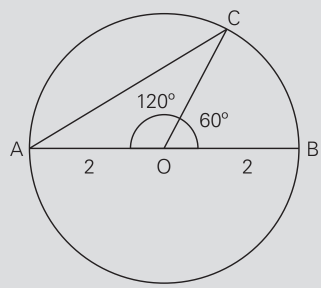
$$S_{branco} = 81\pi - 70\pi$$

$$S_{branco} = 41\pi$$

$$\frac{S_{sombreado}}{S_{branco}} = \frac{40}{41}$$

**13.** C

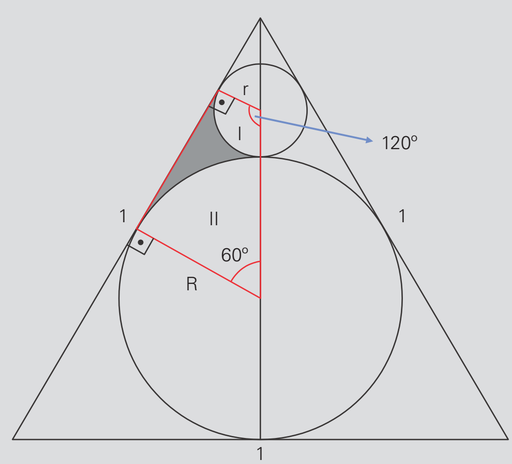
De acordo com as informações do enunciado, a área pedida corresponde à região destacada na figura abaixo, ou seja, a área de um segmento circular de 120°.




$$A = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 120°}{360°} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \text{sen}120°$$

$$A = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

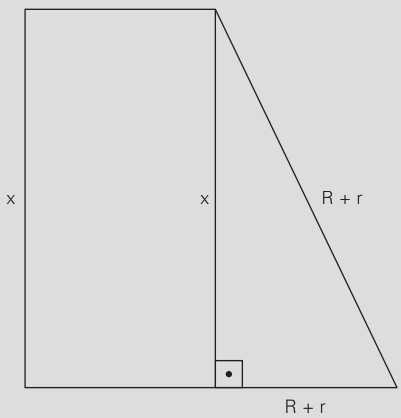
**14.** Considere a figura a seguir.




a) $R = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

b) $r = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}$

c) Teremos:




$(R + r)^2 = x^2 + (R - r)^2$

$R^2 + 2Rr + r^2 = x^2 + R^2 - 2Rr + r^2$

$x^2 = 4Rr$

$x^2 = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{18}$

$x = \dfrac{1}{3}$

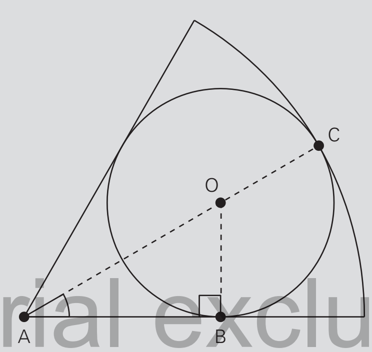
$A = A_{(\text{trapézio})} - A_{(\text{setor I})} - A_{(\text{setor II})}$

$A = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{18}\right) \cdot \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{18}\right)^2 -$

$- \dfrac{1}{6}\, \pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$

$A = \dfrac{\sqrt{3}}{27} - \dfrac{\pi}{324} - \dfrac{\pi}{72}$

**15.** a) Considere a figura.




Como o círculo e o setor são tangentes internamente, temos $\overline{AC} = R$, $\overline{OB} = \overline{OC} = r$ e $B\hat{A}O = 30°$.

Sendo assim, segue que $\overline{AO} = \overline{AC} - \overline{OC} = R - r$.

Portanto, do triângulo ABO, temos:

$\text{sen}\, B\hat{A}O = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{AO}}$

$\text{sen}\, 30° = \dfrac{r}{R - r}$

$\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{3}$

Em consequência, a razão pedida é igual a:

$\dfrac{\pi r^2}{\pi R^2 \cdot \dfrac{60°}{360°}} = 6 \cdot \left(\dfrac{r}{R}\right)^2 = \dfrac{2}{3}$

b) Se $R = 4r$, então, do triângulo ABO, obtemos:

$\text{sen}\, \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{r}{R - r}$

$\text{sen}\, \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{3}$

Logo:

$\cos\theta = 1 - 2\, \text{sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$

$\cos\theta = 1 - 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$\cos\theta = \dfrac{7}{9}$

**16.** No $\Delta BHC$, temos:

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{13}\right)^2 + \overline{BH}^2$

$\overline{BH} = \dfrac{5}{52}$

No $\Delta ABC$, temos:

$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BH}$

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \overline{AB} \cdot \dfrac{5}{52}$

$\overline{AB} \cdot \dfrac{13}{20}$

Sendo assim, o raio da região circular será dado por:

$r = 2 \cdot \dfrac{13}{20} = \dfrac{13}{10}$

A área da região será:

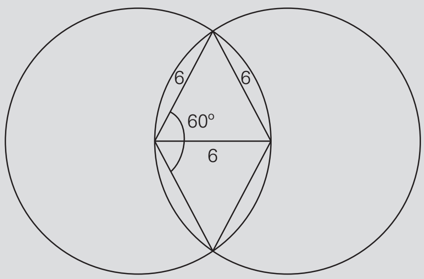
$$A = \pi \cdot \left(\frac{13}{10}\right)^2 = \frac{169 \cdot \pi}{100}\ m^2$$

$$A = \frac{169 \cdot \pi}{100}\ m^2$$

**17.** C

O segmento $\overline{C_1C_2}$ é igual ao raio de ambas as circunferências, e também é igual a 6.

Assim, pode-se concluir:




Logo, a área da região limitada pelos círculos é composta pela área dos círculos menos a área da intersecção entre eles.

Já a área da intersecção é composta por dois triângulos equiláteros de lado 6 e quatro segmentos circulares.

Assim, considerando $\sqrt{3} = 1,73$ e $\pi = 3,14$, podemos estimar a área da intersecção como:

$$S_\Delta = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S_\Delta = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S_\Delta = 9\sqrt{3}$$

$$S_\Delta \cong 15,6$$

$$S_{seg} = S_{setor} - S_n$$

$$S_{seg} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 60°}{360°} - 9\sqrt{3}$$

$$S_{seg} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60°}{360°} - 9\sqrt{3}$$

$$S_{seg} = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

$$S_{seg} \cong 3,27$$

$$S_{intersec} = 2\ S_\Delta + 4\ S_{seg}$$

$$S_{intersec} = 2 \cdot 15,6 + 4 \cdot 3,27$$

$$S_{intersec} \cong 44,28$$

Logo, a área da região limitada pelos círculos será:

$$S_\infty = 2\ S_0 - S_{intersec}$$

$$S_0 = \pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \cong 113$$

$$S_\infty = 2 \cdot 113 - 44,28 \cong 181,72$$

$$S_\infty = 182\ cm^2$$

## Estudo para o Enem

**18.** E

[1] Verdadeira.

$$A = 2n \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Para $n = 3$

$$A = 6\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ cm^2$$

Para $n = 4$

$$A = 8\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 8\ cm^2$$

[2] Verdadeira.

$$A = 2n \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Para $n = 12$

$$A = 24\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{12}\right) = 12\ cm^2$$

[3] Verdadeira.

Se n tende ao infinito, a figura inscrita tende a uma circunferência. Logo: $A = \pi R^2 = \pi\ (2^2) = 4\pi\ cm^2$.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

**19.** C

Sendo **R** o raio do círculo maior, e de acordo com as informações fornecidas no enunciado, temos que R = 3 cm.

Logo, como a área pedida é a área do círculo maior subtraída da área dos 7 círculos menores, temos como resultado:

$\pi \cdot 3^2 - 7 \cdot \pi \cdot 1^2$

$9\pi - 7\pi$

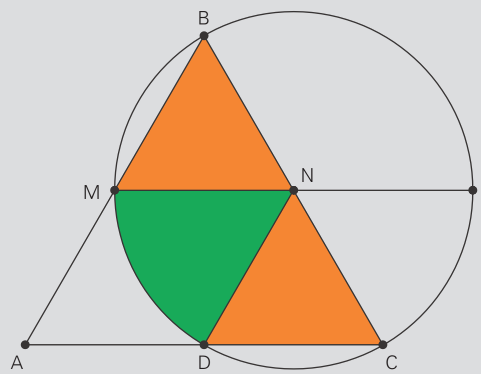
$2\pi$ cm$^2$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

**20.** D

A área de intersecção será igual à área de dois triângulos equiláteros de lado 2 somada com a área de um setor circular de 60°, conforme a figura a seguir.




Calculando, temos:

$$S_{\text{triângulo}} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$$S_{\text{setor}} = \frac{\pi R^2}{6} = \frac{\pi 2^2}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$S_{\text{intersecção}} = 2S_{\text{triângulo}} + S_{\text{setor}} = 2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{6} =$$

$$= \frac{6\sqrt{3} + 2\pi}{3}$$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

## 26 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS - OUTROS POLÍGONOS

### Comentários sobre o módulo

Neste módulo, foi feita uma grande revisão do cálculo de áreas de quadriláteros e triângulos, a fim de determinar a área de um polígono qualquer.

### Para ir além

Sobre a área e o perímetro de setores circulares, acesse o conteúdo a seguir. Ele é um ótimo material que aborda o cálculo de áreas de figuras planas com o uso do *software* Geogebra. Disponível em:

<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/134122/000983908.pdf?sequence=1>

Acesso em: out. 2018.

### Exercícios propostos

**7.** Soma: 04 + 08 + 16 = 28

A área do quadrado 1 será dada por $A_1 = b^2$, em que b é a medida do lado desse quadrado.

A área do quadrado 2 será dada por $A_2 = a^2$, em que a é a medida do lado desse quadrado.

A área do quadrado 3 será dada por $A_3 = c^2$, em que c é a medida do lado desse quadrado.

Podemos, então, escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 18 \end{cases}$$

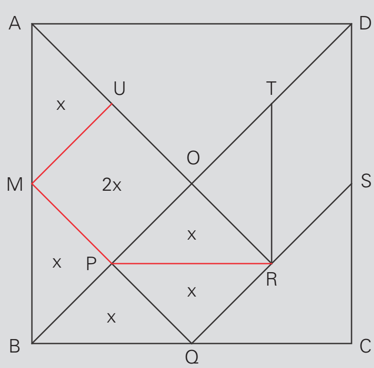
Resolvendo o sistema, temos $2a^2 = 9$, ou seja, a = 3.

[01] Falsa. A área do quadrado 2 é 9.

[02] Falsa. O sistema tem duas equações e três incógnitas.

**8.** D

Do enunciado e da figura, temos:




V é ponto médio de $\overline{AB}$; U é o ponto médio de $\overline{AO}$; x é a medida da área do triângulo BPQ.

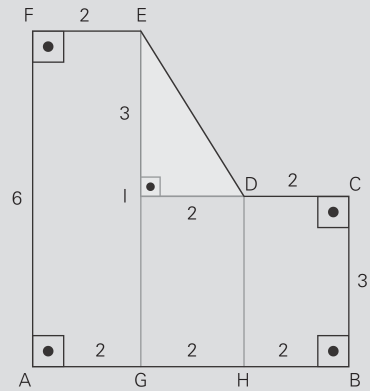
Sendo assim:

$2x + x + x = 16$

$x = 4$

Dessa forma, a área do quadrado OPQR é, em centímetros quadrados, 2x = 8.

**9.** a) Teremos:

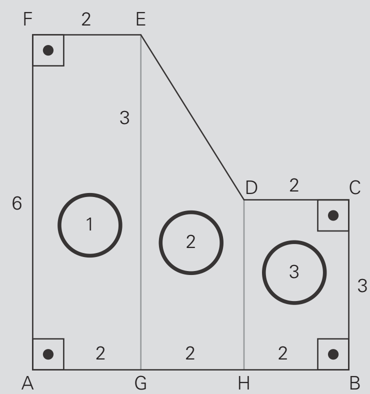



Podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo EID:

$DE^2 = 3^2 + 2^2$

$DE = \sqrt{13}$ cm

b) Vamos obter:




Considerando $A_1$ a área do retângulo AGEF, $A_2$ a área do trapézio GHDE e $A_3$ a área do retângulo HBCD, podemos calcular a área A do polígono ABCDEF da seguinte forma:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = 6 \cdot 2 + \frac{(6 + 3) \cdot 2}{2} + 3 \cdot 2$$

$$A = 12 + 9 + 6$$

$$A = 27 \text{ cm}^2$$

**10.** D

Se **x** e **y** são as dimensões do estande:

$$\begin{cases} 2 \cdot (x + y) = 22 \\ x \cdot y = 21{,}25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 11 - x \\ x^2 - 11x + 21{,}25 = 0 \end{cases}$$

$x = 8{,}5$ m e $y = 2{,}5$ m
ou
$x = 2{,}5$ m e $y = 8{,}5$ m

**11.** A

Considerando que:

- S: a área do triângulo ABC
- $S_1$: a área do triângulo AMN
- $S_2$: a área do trapézio BCNM

Além disso, os triângulos AMN e ABC são semelhantes. Então:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{8}{18}\right)^2 \to \frac{S_1}{S} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \to S_1 = \frac{16 \cdot S}{81}$$

$$S_2 = S - S_1 = \frac{65 \cdot S}{81}$$

Portanto, a razão entre a área do trapézio BCNM e a área do triângulo AMN é: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{65 \cdot S}{81}}{\frac{16 \cdot S}{81}} =$ $= 4{,}0625 \cong 4$.

**12.** E

Como sabemos que o lado dos furos mede 1 cm, a área de cada furo é dada por:

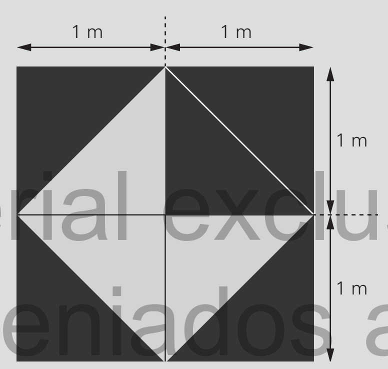
$$\frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cong \frac{17}{40}\ \text{cm}^2$$

Sabemos também que o número de furos em cada etapa cresce segundo uma progressão aritmética de primeiro termo igual a 1 e razão 3.

Sendo assim, o número de furos na 14ª etapa é igual a $1 + 13 \cdot 3 = 40$.

Logo, o percentual pedido é igual a: $\frac{170 - 40 \cdot \frac{17}{40}}{170} \cdot$ $\cdot\, 100\% = 90\%$

**13.** Vamos considerar esta tela dividida em 8 triângulos retângulos congruentes:




a) A área pintada de preto é $\frac{5}{8}$ da área total, ou seja: $A = \frac{5}{8} \cdot (2 \cdot 2) = 2{,}5$ m².

A proporção da cor preta para a cor cinza será de $\frac{5}{3}$.

b) A área pintada de cinza será $4 - 2{,}5 = 1{,}5$ m².

Portanto, o custo com a pintura da tela será de: $2{,}5 \cdot 100 + 1{,}5 \cdot 200 = 550$.

Logo, o custo total do quadro será de R$ 550,00.

c) Considerando a pintura com cores invertidas, temos o seguinte gasto: $1{,}5 \cdot 100 + 2{,}5 \cdot 200 = 650$.

Portanto, um aumento de R$ 100,00.

Em porcentagem, será dado por: $\frac{100}{550} = \frac{2}{11} =$ $= 0{,}1818 \to 18{,}18\%$

**14.** A

Desde que os ângulos $A\hat{Q}P \equiv S\hat{Q}B$ sejam opostos pelo vértice, podemos afirmar que os triângulos retângulos APQ e SQB são semelhantes por AA. Logo:

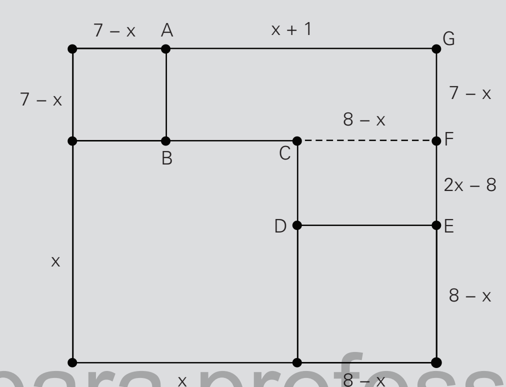
$$\frac{QB}{8 - QB} = \frac{SB}{AP} \to \frac{QB}{8 - QB} = \frac{7}{3} \to QB = \frac{28}{5}\ \text{cm}$$

Sendo os triângulos SRC e SQB também semelhantes por AA:

$$\frac{QB}{RC} = \frac{SB}{SC} \to \frac{28}{\frac{5}{RC}} = \frac{7}{2} \to RC = \frac{8}{5}\ \text{cm}$$

Logo, a resposta é: $(QBCR) = \frac{1}{2} \cdot (QB + RC) \cdot BC \to$ $\to (QBCR) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{28}{5} + \frac{8}{5}\right) \cdot 5 \to (QBCR) = 18$ cm²

**15.** Considere a figura a seguir.




A área do polígono P é dada por:

$(ABCDEG) = (ABFG) + (CDEF)$

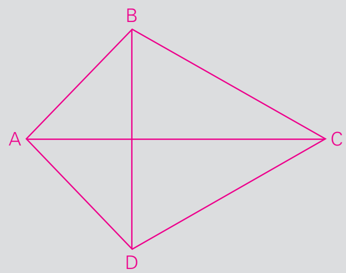
$(ABCDEG) = AG \cdot FG + CF \cdot EF$

$$(ABCDEG) = (x + 1)(7 - x) + (8 - x)(2x - 8)$$
$$(ABCDEG) = -3 \cdot (x^2 - 10x + 19)$$
$$(ABCDEG) = -3 \cdot [(x - 5)^2 - 25 + 19]$$
$$(ABCDEG) = 18 - 3 \cdot (x - 5)^2$$

Sendo assim, a área do polígono P é máxima para $x = 5$. Seu valor é 18 cm².

**16.** B

Considere a figura a seguir.




Aplicando a lei dos cossenos no triângulo BCD:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos B\hat{C}D$$
$$BD^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$BD = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \text{cm}$$

Sabendo que $\overline{AC}$ é bissetriz de $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$, os triângulos retângulos ABE e ADE são congruentes.

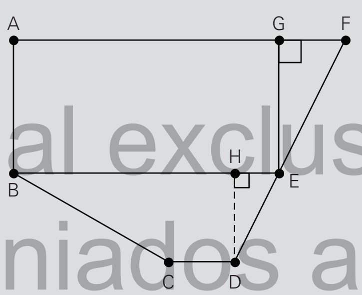
Logo, podemos concluir que $AE = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ cm.

Assim:

$$(ABD) + (BCD) = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AE + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \cdot \operatorname{sen} B\hat{C}D$$
$$(ABD) + (BCD) = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$(ABD) + (BCD) = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}$$
$$(ABD) + (BCD) = 2\ \text{cm}^2$$

**17.** E

Considere a figura, em que H é o pé da perpendicular baixada de D sobre $\overline{BE}$.




Sabendo que $AF = 15$ cm, $AG = 12$ cm e $AB = EG = 6$ cm e aplicando o teorema de Pitágoras:

$$EF^2 = GF^2 + EG^2$$
$$EF^2 = 3^2 + 6^2$$
$$EF^2 = 3^2 \cdot 5$$
$$EF = 3\sqrt{5}\ \text{cm}$$

Sendo assim, dado que $DF = 5\sqrt{5}$ cm, obtemos $ED = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ cm.

Assim, como os triângulos FGE e EHD são semelhantes:

$$\frac{DH}{EG} = \frac{DE}{EF}$$
$$\frac{DH}{6} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$$
$$DH = 4\ \text{cm}$$

Desse modo, a área pedida, em cm², é dada por:

$$(ABEF) + (BCDE) = \frac{(15 + 12)}{2} \cdot 6 + \frac{(12 + 3)}{2} \cdot 4$$
$$(ABEF) + (BCDE) = 81 + 30$$
$$(ABEF) + (BCDE) = 111$$

Consequentemente, se x é a área real da APP, então:

$$\frac{111 \cdot 10^{-10}}{x} = \left(\frac{1}{200\,000}\right)^2$$
$$x = 111 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 10^{10}$$
$$x = 444\ \text{km}^2$$

## Estudo para o Enem

**18.** C

Sendo de 20% a redução nas medidas dos lados, a redução na área é dada por:

$$1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36 = 36\%$$

**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade:** Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**19.** A

O custo total das lajotas é dado por $8x + 6y$, que é o resultado pedido.

**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade:** Identificar características de figuras planas ou espaciais.

**20.** A

Seja, $y_p$ a ordenada do ponto P, de tal forma que:

$$B = \frac{90 \cdot y_p}{2} + \left(\frac{y_p + 100}{2}\right) \cdot 10 = 50 \cdot y_p + 500$$

Assim:

$$A = \frac{100 \cdot 100}{2} - B = 4\,500 - 50 \cdot y_p$$

Desse modo, se a meta é 0,3, então:

$$\frac{A}{A + B} = 0{,}3 \rightarrow A = 1\,500$$

$$4\,500 - 50 \cdot y_p = 1\,500$$

$$y_p = 60$$

Portanto, (100 − 60)% = 40%.

**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

# 27 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – POLÍGONOS REGULARES

## Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos as áreas de polígonos regulares. Também aproveitamos para ver a relação entre as medidas dos polígonos regulares inscritos na circunferência.

## Para ir além

Confira o conteúdo a seguir, sobre área e perímetro de setores circulares. Este é um excelente material com abordagem completa sobre os polígonos convexos e não convexos. Também há uma abordagem histórica sobre as fórmulas e o cálculo de áreas de quadriláteros e triângulos. Disponível em:

<https://www.dm.ufscar.br/dm/index.php/component/attachments/download/41>

Acesso em: out. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** C

Como sabemos que o ângulo interno de um octógono regular mede 135°, os quatro triângulos resultantes da decomposição do octógono são retângulos isósceles de catetos iguais a $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Sabendo que a área do quadrado destacado no centro do octógono é $S = a^2$, o resultado pedido é:

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} + a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + S$$

$$a^2 + 2\sqrt{2}a^2 + S$$

$$2S\sqrt{2} + 2S$$

$$2S(\sqrt{2} + 1)$$

**8.** A

Sabemos que um hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros (seus lados medem o mesmo que o raio da circunferência circunscrita).

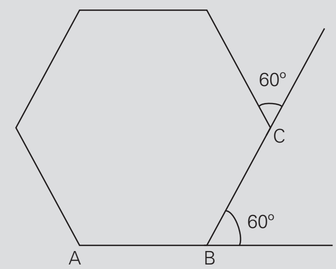
Sendo assim, calculando a área:

$$S_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{hexágono}} = 3\sqrt{3}$$

**9.** C

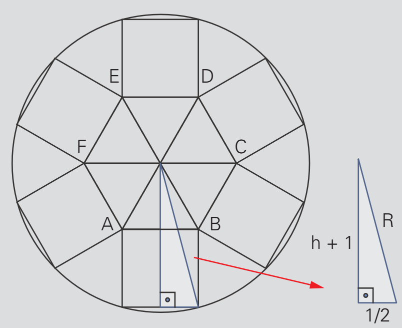
O trajeto descrito pela máquina formará um hexágono regular de lado 6 cm.




Logo, sua área **A** será dada por:

$$A = 6 \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

**10.** C




Temos no triângulo destacado R (raio da circunferência) e h (medida da altura do triângulo equilátero). Podemos escrever, então:

$$h = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$R^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2$$

$$R^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + 1$$

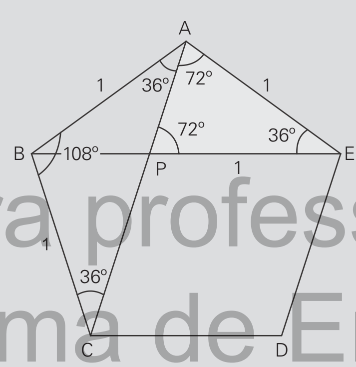
$$R^2 = 2 + \sqrt{3}$$

Sendo assim, a área do círculo será dada por:

$$A = \pi \cdot R^2$$

$$A = \pi \cdot (2 + \sqrt{3})$$

**11.** A



$A\hat{B}C = \dfrac{180° \cdot (5-2)}{5} = 108°$ (ângulo interno do pentágono regular)

$AB = BC$

$B\hat{A}C = B\hat{C}A = 36°$

$P\hat{A}E = 108° - 36° = 72°$

$AB = AE$

$A\hat{E}B = 36°$ e $A\hat{P}E = 72°$

$P\hat{A}E = A\hat{P}E$

$PE = 1$

Logo, a área do triângulo assinalado será dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \text{sen}36° = \frac{\text{sen}36°}{2}$$

**12.** A

É certo que a área do triângulo ABO corresponde a $\dfrac{l^2}{4}$.

Além disso, sendo PQ uma base média do triângulo ABO, temos:

$$(PQO) = \frac{1}{4}(ABO) = \frac{l^2}{16}$$

Logo, a área do trapézio isósceles ABQP é igual a:

$$(ABQP) = (ABO) - (PQO)$$

$$(ABQP) = \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{16}$$

$$(ABQP) = \frac{3l^2}{16} \text{ u.a.}$$

$$A_{ABQP} = \frac{3l^2}{16} \text{ u.a.}$$

**13.** C

Sejam $x$, $x + r$ e $x + 2r$ as medidas, em metros, dos lados do triângulo, com $x, r > 0$.

Aplicando o teorema de Pitágoras, encontramos $x = 3r$.

Assim, os lados do triângulo medem $3r$, $4r$ e $5r$.

Como sabemos que o perímetro do triângulo mede 6,0 m:

$$3r + 4r + 5r = 6$$

$$12r = 6$$

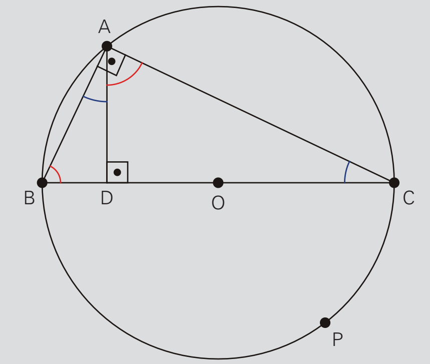
$$r = \frac{12}{6}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

Logo, a área do triângulo é igual a:

$$\frac{3r \cdot 4r}{2} = 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1{,}5 \text{ m}^2$$

**14.** Soma: 01 + 04 + 08 = 13




02. Falsa, pois $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

16. Falsa. Área máxima para o triângulo ABC: $\dfrac{2 \cdot R \cdot R}{2}$ e $R^2 < \dfrac{\pi \cdot R^2}{3}$.

**15.** A área de $T_1$ é dada por $\dfrac{1}{2} \cdot l^2$, enquanto a área de $T_2$ é igual a $\dfrac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \text{sen } 2\theta$.

Logo, sabendo que a área de $T_1$ é o triplo da área de $T_2$, temos:

$$\frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \text{sen}\theta = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \text{sen}2\theta$$

$$\text{sen}\theta = 3 \cdot 2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta$$

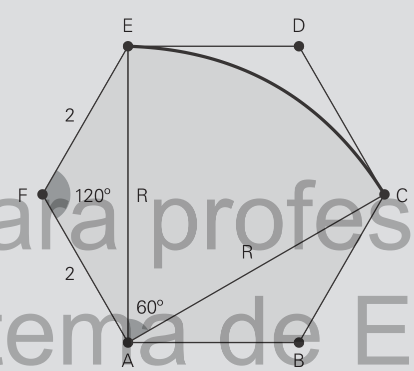
$$\cos\theta = \frac{1}{6}$$

**16.** A

$A\hat{F}E = 120°$ (ângulo interno do hexágono regular).

$E\hat{A}C = 60°$ (ângulo interno do triângulo equilátero EAC).

Os triângulos AFE e ABC são congruentes pelo caso LAL.



Portanto, a área **S** pedida será a soma da área do setor de 60° e raio **R** com o dobro da área do triângulo AFE.

Calculando, inicialmente, a medida do raio **R** do setor circular e utilizando o teorema dos cossenos no triângulo AFE, temos:

$$R^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 120°$$

$$R^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$R^2 = 12$$

$$R = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Sendo assim:

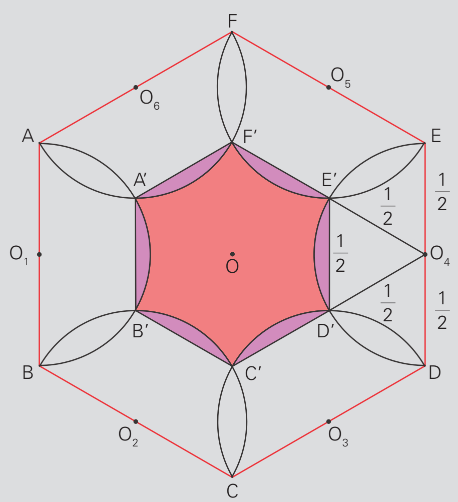
$$S = \frac{\pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot 60°}{360°} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \text{sen}120°$$

$$S = 2 \cdot \pi + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = 2 \cdot \pi + 2\sqrt{3}$$

**17.** A

De acordo com as informações do enunciado e da figura:




A'B'C'D'E'F' é um hexágono regular cujo lado tem medida igual a $\frac{1}{2}$.

Sendo assim, podemos decompô-lo em 6 triângulos equiláteros congruentes, todos com lados de medida $\frac{1}{2}$.

$S_{A'B'C'D'E'F'}$: área do hexágono regular A'B'C'D'E'F'.

$S_{setor}$: área do setor circular de centro no ponto $O_4$, extremos nos pontos E' e D' e raio de medida $\frac{1}{2}$.

$O_4E'D'$ é um triângulo equilátero cujo lado tem medida igual a $\frac{1}{2}$.

Sendo **S** a área pedida:

$$S = S_{A'B'C'D'E'F'} - 6 \cdot (S_{setor} - S_{O_4E'D'})$$

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen}60° \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen}60°\right)$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{8} - 6 \cdot \left(\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{16}\right)$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$S = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{4}$$

## Estudo para o Enem

**18.** B

Se P e L denotam, respectivamente, as áreas de cada pentágono e de cada losango do mosaico, então $\frac{P}{L} = R$.

Observando as simetrias, o mosaico é formado por $89 + \frac{1}{2}$ pentágonos e 45 losangos. Portanto, a razão pedida é dada por: $\frac{\left(89 + \frac{1}{2}\right) \cdot P}{45 \cdot L} \cong 2R$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**19.** C

O resultado pedido é dado por:

$$\frac{3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{2} - \pi \cdot 1^2 \cong 6 \cdot 1,7 - 3 = 7,2 \text{ cm}^2.$$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

**20.** B

A área do espaço é igual a $4 \cdot 6 = 24$ m² = = 240 000 cm²

Cada quadrado do tipo I tem área igual a $20^2 =$ $= 400$ cm². Sendo assim, o custo do piso I é:

$$\frac{240000}{400} \cdot 15 = \text{R\$ } 9.000{,}00.$$

Cada retângulo do tipo II tem área igual a $30 \cdot 20 =$ $= 600$ cm². Logo, o custo do piso II é:

$$\frac{240000}{600} \cdot 20 = \text{R\$ } 8.000{,}00.$$

Cada quadrado do tipo III tem área igual a $25^2 =$ $= 625$ cm². Desse modo, o custo do piso III é:

$$\frac{240000}{625} \cdot 25 = \text{R\$ } 9.600{,}00.$$

Cada retângulo do tipo IV tem área igual a $16 \cdot 25 =$ $= 400$ cm². Sendo assim, o custo do piso IV é:

$$\frac{240000}{400} \cdot 20 = \text{R\$ } 12.000{,}00.$$

Cada quadrado do tipo V tem área igual a $40^2 =$ $= 1\,600$ cm². Então, o custo do piso V é:

$$\frac{240000}{1600} \cdot 60 = \text{R\$ } 9.000{,}00.$$

Com base nessas informações, o piso que terá o menor custo para a colocação no referido espaço é II.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

# 28 ÁREAS DE FIGURAS CURVILÍNEAS I

## Comentários sobre o módulo

Neste módulo, aprofundamos o cálculo das áreas de regiões curvilíneas. Para isso, revemos as áreas de círculos e coroas circulares.

## Para ir além

Leia o artigo "As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração". Esse é um bom material, que aborda o cálculo de áreas por meio da segmentação da figura. Disponível em:

<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_flores_moretti.pdf>

Acesso em: out. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** A área **A** pintada de branco será dada pela diferença entre a área $A_R$ do retângulo e a área do círculo $A_C$. Sendo assim:

$A = A_R - A_C$

$A = 8 \cdot 12 - \pi \cdot 2^2$

$A = 8 \cdot 12 - 3 \cdot 2^2$

$A = 96 - 12$

$A = 84\ cm^2$

**8.** B

Se calcularmos as áreas de cada pizza, temos:

Pizza broto inteira $= \pi \cdot 15^2 = 225\pi$

Pizza gigante inteira $= \pi \cdot 20^2 = 400\pi$

Para resolver, podemos utilizar a regra de três:

$225\pi \rightarrow 27$

$400\pi \rightarrow x$

$x = 48$ reais

Sabendo que a pizza gigante tem 10 pedaços, cada um custará R$ 4,80.

**9.** C

$A_{total} = \pi \cdot \left(\frac{122}{2}\right)^2$

$A_{total} = \pi \cdot 61^2$

$A_{cinza} = \pi \cdot (2 \cdot 6{,}1)^2$

$A_{cinza} = \pi \cdot 12{,}2^2$

$\frac{A_{cinza}}{A_{total}} = \frac{\pi \cdot 12{,}2^2}{\pi \cdot 61^2} = \left(\frac{12{,}2}{61}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

$\frac{A_{cinza}}{A_{total}} = \frac{1}{25}$

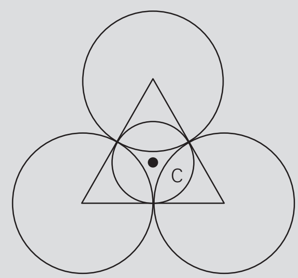
**10.** C

O raio **r** de cada região circular corresponde a:

$\pi \cdot r^2 = 16\pi$

$r = 4$ km

Considere a figura, em que **C** é o centro do triângulo.




Sendo assim, no centro do triângulo não haverá sinal de qualidade.

**11.** a) Centro C: 16

Centros A e B: 8

b) Sendo assim:

$m(AC) = \frac{2 \cdot \pi \cdot 8}{2} = 8 \cdot \pi$

$m(BC) = \frac{2 \cdot \pi \cdot 8}{2} = 8$

$\pi m(AB) = \frac{2 \cdot \pi \cdot 16 \cdot 60°}{360°} = \frac{16 \cdot \pi}{3}$

c) Calculando, obtemos:

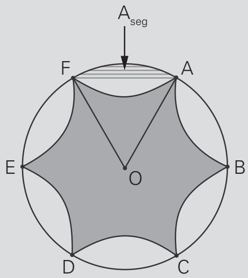
$A_I = \frac{\pi \cdot 8^2}{2} = 32 \cdot \pi$

$A_{II} = \frac{16^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 63 \cdot \sqrt{3}$

$A_{III} = A_I = 32 \cdot \pi$

$A_{IV} = \frac{\pi \cdot 16^2 \cdot 60°}{360°} = \frac{128 \cdot \pi}{3}$

**12.** A




Calculando a área do segmento circular assinalado na figura:

$$A_{seg} = \frac{\pi \cdot 1^2}{6} - \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

A área assinalada será a diferença entre a área de um hexágono regular e a área do segmento circular multiplicada por 6:

$$A = \frac{6 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 6 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = (3\sqrt{3} - \pi)\ \text{cm}^2$$

**13.** Soma: 02 + 08 = 10

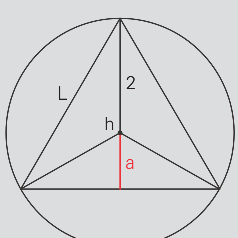
01. Falsa. O triângulo ABC é isósceles de base AC, pois AB = BC = 2 cm. Logo, pelo teorema do ângulo externo, $D\hat{B}C = 2 \cdot B\hat{A}C = \frac{\pi}{3}$ rad.

04. Falsa. Os triângulos ACD e CBD são semelhantes, com razão de semelhança igual a $\frac{CD}{BD} = 1$.

16. Falsa. A área comum entre a circunferência de centro C e raio 2 cm e o triângulo ABC é dada por: $\frac{1}{12} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{\pi}{3}\ \text{cm}^2 > 1\ \text{cm}^2$

**14.** C

A figura a seguir apresenta um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 2.




Sendo **L** o lado do triângulo equilátero e **h** sua altura, da Geometria plana sabemos que:

$$a = \frac{R}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow a = 1$$

$$h = R + a = 2 + 1 \rightarrow h = 3$$

$$L = R\sqrt{3} \rightarrow L = 2\sqrt{3}$$

Assim, a área do triângulo equilátero será:

$$S_\Delta = \frac{h \cdot L}{2} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \rightarrow S_\Delta = 3\sqrt{3}$$

Já a área da circunferência será:

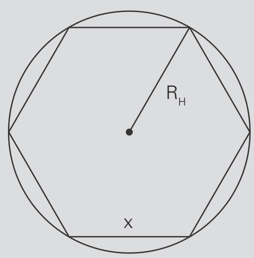
$$S_o = \pi R^2 = (2)^2\,\pi \rightarrow S_o = 4\pi$$

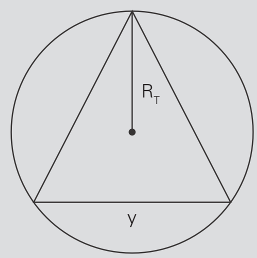
Por fim, a área das regiões internas à circunferência e externas ao triângulo será:

$$S = S_o - S_\Delta$$

$$S = 4\pi - 3\sqrt{3}$$

**15.** Sabendo que x é a medida do lado do hexágono regular e y é a medida do lado do triângulo equilátero, temos:




Considerando que a área do hexágono é igual à área do triângulo:

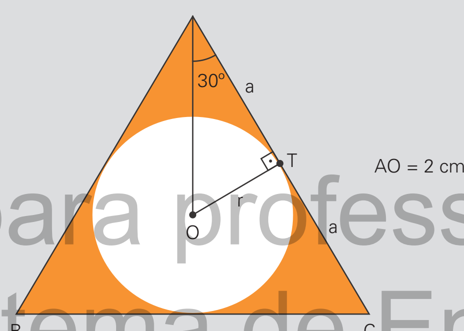
$$6 \cdot \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{y^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Portanto:

$$\frac{R_H}{R_T} = \frac{x}{y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**16.** B

De acordo com as informações do enunciado:



S: área da região do triângulo não ocupada pelo círculo.

$S_{ABC}$: área do triângulo ABC.

$S_{circulo}$: área do círculo.

No triângulo AOT, temos:

$$\begin{cases} \text{sen}30° = \dfrac{r}{2} \rightarrow r = 1 \\ \cos 30° = \dfrac{a}{2} \rightarrow a = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$S = S_{ABC} - S_{círculo}$$

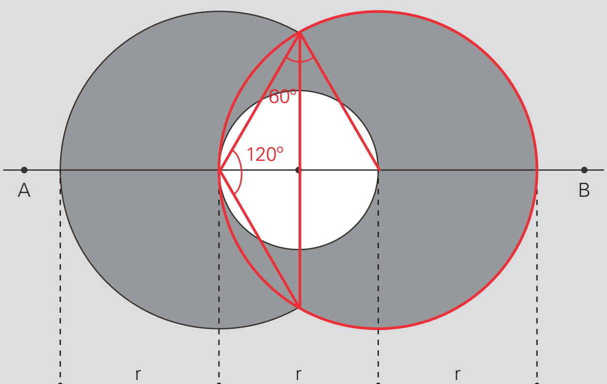
$$S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \text{sen}\,60° - \pi r^2$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \pi \cdot 1^2$$

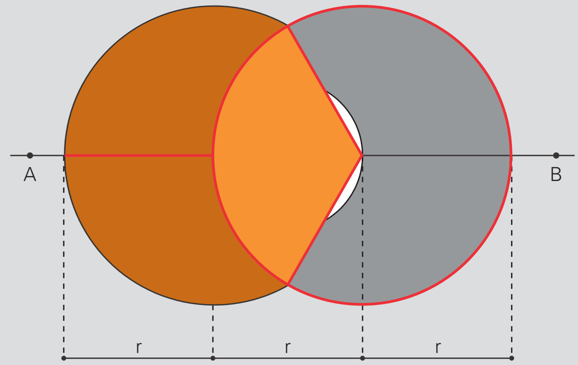
$$S = (3\sqrt{3} - \pi)\ \text{cm}^2$$

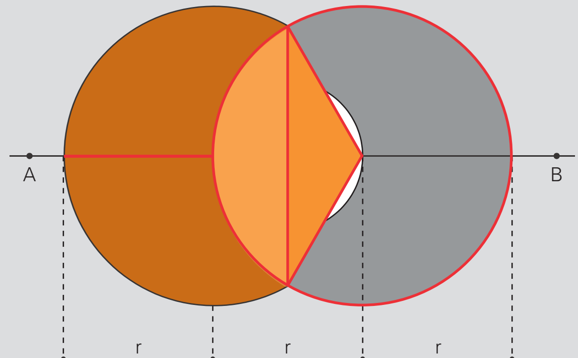
**17.** D

A área hachurada será igual à área de uma circunferência maior (raio r) somada à área da "lua" remanescente da outra circunferência maior (raio r). Subtraindo-se a área da circunferência menor $\left(\text{raio } \frac{r}{2}\right)$, podemos deduzir graficamente:




Concluímos, portanto, que a área de uma circunferência maior é igual a $\pi r^2$. Para calcular a área da "lua" remanescente da outra circunferência de raio **r** (área hachurada em azul nas figuras a seguir), precisamos subtrair o equivalente a duas áreas verdes (ver figuras a seguir). Para calcular a área verde, necessitamos calcular a área do setor circular de 120° menos a área de um triângulo equilátero de lado **r**.




Assim, podemos escrever que a área total hachurada em cinza é igual a:

$$\left\{\pi r^2 + \left[\pi r^2 - 2\cdot\left(\frac{\pi r^2 \cdot 120°}{360°} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)\right]\right\} - \pi\frac{r^2}{4} =$$

$$= \pi r^2 - \pi\frac{r^2}{4} + \left[\pi r^2 - 2\cdot\left(\frac{4\pi r^2 - 3r^2\cdot\sqrt{3}}{12}\right)\right] =$$

$$= \frac{3\pi r^2}{4} + \left[\pi r^2 - \left(\frac{8\pi r^2 - 6r^2\cdot\sqrt{3}}{12}\right)\right] =$$

$$= \frac{3\pi r^2}{4} + \left[\frac{12\pi r^2 - 8\pi r^2 + 6r^2\cdot\sqrt{3}}{12}\right] =$$

$$= \frac{3\pi r^2}{4} + \frac{4\pi r^2 + 6r^2\cdot\sqrt{3}}{12} =$$

$$= \frac{9\pi r^2 + 4\pi r^2 + 6r^2\sqrt{3}}{12} = \frac{13\pi r^2 + 6r^2\sqrt{3}}{12} =$$

$$= \left(\frac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12}\right)\cdot r^2$$

## Estudo para o Enem

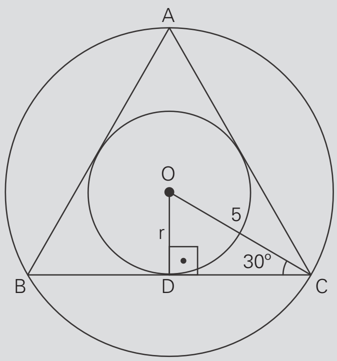
**18.** B

O raio da circunferência de comprimento igual a $10\pi$ cm é **R**. Então:

$$2\pi R = 10\pi$$

$$R = 5\ \text{cm}$$

Logo:




No triângulo ODC:

$\operatorname{sen} 30° = \dfrac{r}{5}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{r}{5}$

$r = \dfrac{5}{2}$

Portanto, a área pedida **S** é tal que:

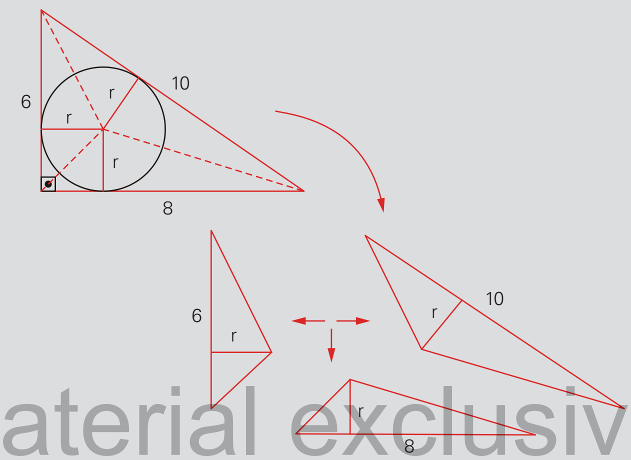
$S = \pi \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^2$

$S = \dfrac{25\pi}{4}$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**19.** B




Seja **r** o raio da base do cilindro.

O triângulo é retângulo, pois $6^2 + 8^2 = 10^2$.

Logo, sua área será $A = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

Portanto:

$\dfrac{6r}{2} + \dfrac{8r}{2} + \dfrac{10r}{2} = 24$

$12r = 24$

$r = 2$ cm

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**20.** B

Seja **r**, em quilômetros, o raio da mancha de óleo. Então:

$100 = \pi \cdot r^2$

$r \cong \sqrt{\dfrac{100}{3}}$

$r \cong \dfrac{10}{1{,}7}$

$r \cong 6$ km

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

## 29 ÁREAS DE FIGURAS CURVILÍNEAS II

### Comentários sobre o módulo

Neste módulo, foram estudadas as áreas de regiões curvilíneas mais complexas. Para isso, foram revistas as áreas de setor circular e segmento circular, além de serem utilizados todos os outros conceitos relacionados às áreas já trabalhados.

### Para ir além

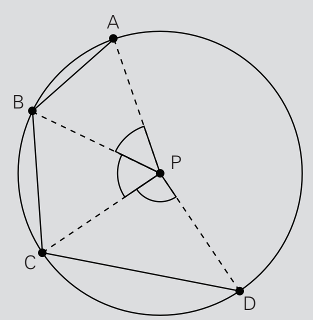
Este trabalho de conclusão de curso intitulado *Regiões circulares e o número π* é um interessante material que aborda o contexto histórico do cálculo da área de uma região circular. Esse material enfatiza regiões circulares e o número π. Disponível em:

<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tde/2959/5/disserta%C3%A7%C3%A3o%20mestrado%20Thiago.pdf>

Acesso em: out. 2018.

### Exercícios propostos

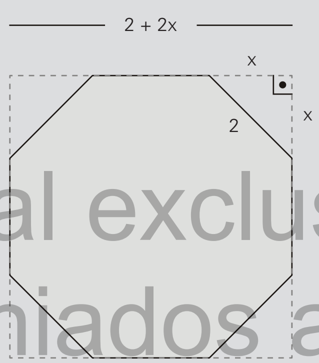
**7.** Observe a figura.




No caso do octógono, o ângulo central mede 45°; no hexágono, 60°; no quadrilátero, 90°. Logo, o ângulo do setor circular será: 360° – 45° – 60° – – 90° = 165°. Como já sabemos que o raio da circunferência mede r = 6 cm:

$$A = \frac{\alpha° \cdot \pi \cdot R^2}{360°} = \frac{165° \cdot \pi \cdot 6^2}{360°} \therefore A = \frac{33\pi}{2}\text{ cm}^2$$

**8.** A




Vamos calcular a área do octógono regular:

$x^2 + x^2 = 2^2$

$x = \sqrt{2}$

Portanto, a área $A_1$ do octógono regular será dada por:

$$A_1 = (2 + 2x)^2 - 4 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$A_1 = (2 + 2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 8\sqrt{2} + 8$$

Cálculo da área $A_2$ dos oito semicírculos:

$$A_2 = 8 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 4\pi$$

Logo, a área da figura será dada por:

$A = A_1 + A_2$

$A = 8\sqrt{2} + 8 + 4\pi$

**9.** C

Seja **r** o raio do círculo:

$2 \cdot r = 8\sqrt{2}$

$r = 4\sqrt{2}$ cm

Sendo assim, a área hachurada, em cm², é dada por:

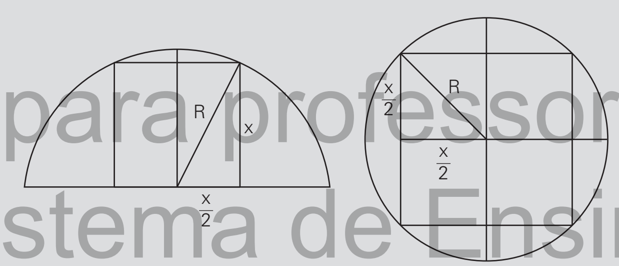
$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (4\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4} \cdot [\pi \cdot (4\sqrt{2})^2 - 8^2]$$

$16\pi - 8\pi + 16$

$8(\pi + 2)$

**10.** D

Calculando:



Semicírculo:

$R^2 = \frac{x^2}{4} + x^2$

$R^2 = \frac{5x^2}{4}$

$S = x^2 = \frac{4R^2}{5}$

Círculo:

$R^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4}$

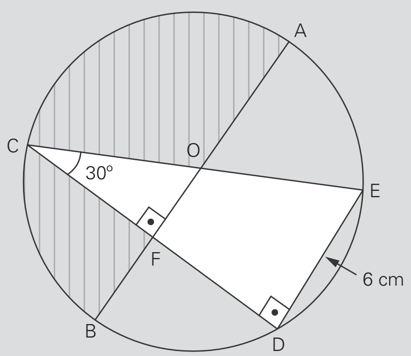
$r^2 = \frac{2x^2}{4}$

$S = x^2 = \frac{4R^2}{2}$

Razão:

$$\frac{\frac{4R^2}{5}}{\frac{4R^2}{2}} = \frac{2}{5}$$

**11.**




$C\hat{D}E = \frac{180°}{2} = 90°$

$CE = 2R$

$\text{sen}30° = \frac{6}{2R}$

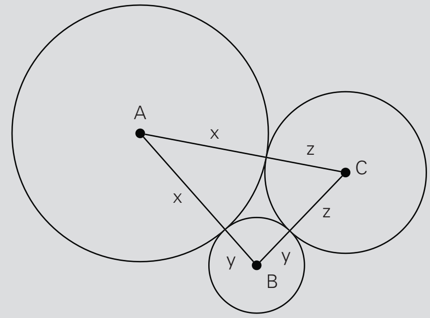
$OC = R = 6$

Sendo assim, $OF = 6 \cdot \text{sen}30° = 3$ e $CF = 6 \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$.

A área pedida será dada por:

$$A = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = \left(18\pi - \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{2}\right)$$

**12.** D




Na figura **A**, **B** e **C** são centros das circunferências de raios **x**, **y** e **z**, respectivamente.

De acordo com as informações do enunciado:

$$\begin{cases} x + z = 50 \text{ (I)} \\ x + y = 40 \text{ (II)} \\ y + z = 30 \text{ (III)} \end{cases}$$

Fazendo (I) – (II) – (III), temos $-2y = -20$. Logo: $y = 10$; $x = 30$; $z = 20$.

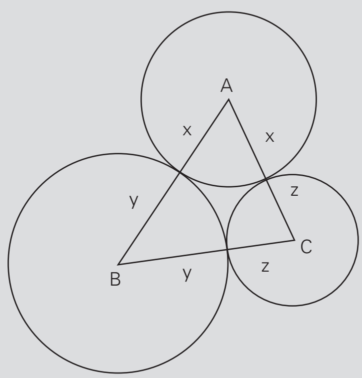
Sendo assim, a área pedida será dada por:

$A = \pi \cdot x^2 + \pi \cdot y^2 + \pi \cdot z^2$

$A = \pi \cdot (30^2 + 10^2 + 20^2)$

$A = 1\,400\pi$

**13.** D




Admitindo **x**, **y** e **z** como os raios das circunferências de centros **A**, **B** e **C**, respectivamente:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$x = \frac{3}{2}$$

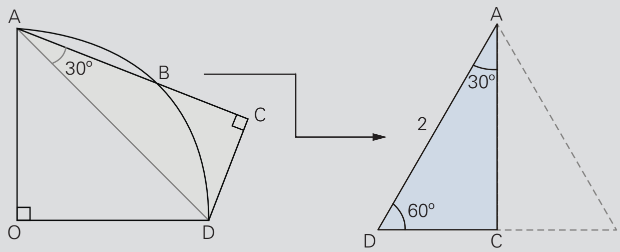
$$y = \frac{11}{2}$$

$$z = \frac{5}{2}$$

Calculando, agora, a soma das áreas de todos os círculos:

$$A = \pi \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{195\pi}{4}\ \text{km}^2$$

**14.** A




Sabemos que a medida do arco BD é 60°.

O ângulo DAC mede 30°, pois é ângulo inscrito do arco BD.

A medida do segmento AD será dada por $AD^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 \rightarrow AD = 2$.

A área **A** do triângulo ABC é igual à metade da área de um triângulo equilátero de lado 2 (como na figura).

Sendo assim: $A = \dfrac{\frac{2^2\sqrt{3}}{4}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

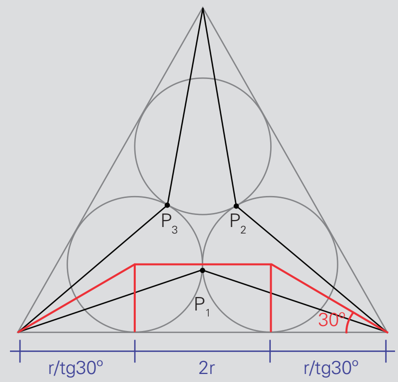
**15.** B

Sabemos que a diagonal do quadrilátero o divide em dois triângulos retângulos.

Sendo 2senx e 2cosx os catetos do primeiro e 2seny e 2cosy, os catetos do segundo, podemos concluir que o resultado é:

$$\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 2\text{sen}x \cdot 2\cos x - \frac{1}{2} \cdot 2\text{sen}y \cdot 2\cos y =$$
$$= \pi - \text{sen}2x - \text{sen}2y$$

**16.** a) O triângulo equilátero descrito é o "externo", que contém as três esferas. Assim, seu lado será igual a:

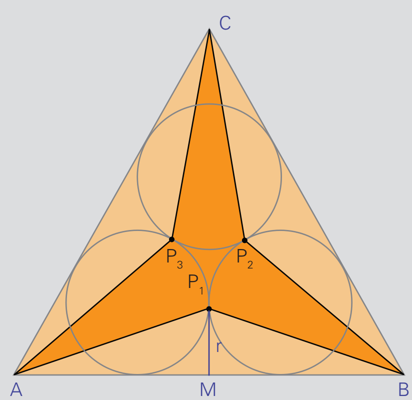



Ou seja:

$$\text{lado}_\Delta = \frac{2r}{\text{tg}30°} + 2r = 2r \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} + 2r$$

$$\text{lado}_\Delta = 2r \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

b) Considerando como **A**, **B** e **C** os vértices do triângulo equilátero "externo", podemos desenhar:




Assim, percebemos que a área destacada em azul se dá por:

$$S_{azul} = S_\Delta - S_{amarelo}$$

$$S_{azul} = \frac{(\text{lado}_\Delta)\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{r \cdot \text{lado}_\Delta}{2}$$

$$S_{azul} = \frac{\left[2r \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)\right]^2}{4} - 3 \cdot \frac{r \cdot 2r \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)}{2}$$

$$S_{azul} = \sqrt{3r}^2 \cdot (\sqrt{3} + 1)^2 - 3r^2 \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

$$S_{azul} = \sqrt{3r}^2 \cdot (3 + 2\sqrt{3} + 1) - 3r^2 \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

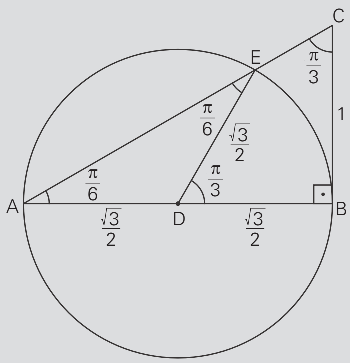
$$S_{azul} = 3\sqrt{3r}^2 + 6r^2 + \sqrt{3r}^2 - 3r^2$$

$$S_{azul} = \sqrt{3r}^2 + 3r^2$$

$$S_{azul} = r^2 \cdot (\sqrt{3} + 3)$$

**17.** D

Do enunciado, temos:




No triângulo ABC:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{AC}$$

$$AC = 2$$

D é o centro da circunferência.

Seja **r** a medida do raio da circunferência: AB = 2r.

No triângulo ABC:

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{2r}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A reta suporte do segmento $\overline{AC}$ é secante à circunferência, e o ponto de intersecção entre tal reta e a circunferência é o ponto E.

Assim:

$$DE = DA = DB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

No triângulo ABC:

$$C\hat{A}B + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$C\hat{A}B = \frac{\pi}{6}$$

O triângulo AED é isósceles, com AD = DE.

Sendo assim:

$$D\hat{A}E = D\hat{E}A = \frac{\pi}{6}$$

$B\hat{D}E$ é ângulo externo do triângulo AED. Logo:

$$B\hat{D}E = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

S: área da parte do triângulo ABC externa à circunferência.

$S_{DEFB}$: área do setor circular centrado no ponto **D** com raio cuja medida é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e ângulo cuja medida é $\frac{\pi}{3}$.

$S_{ADE}$: área do triângulo ADE.

$S_{ABC}$: área do triângulo ABC.

Então:

$$S = S_{ABC} - S_{AED} - S_{DEFB}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}\cdot 1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\text{sen}\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{6}\cdot\pi\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$S = \frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{8}$$

## Estudo para o Enem

**18.** B

A = área do círculo – área do triângulo

$$A = \pi\cdot\left(\frac{500}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot 400\cdot 300$$

$$A = \frac{3\cdot 250\,000}{4} - 60\,000$$

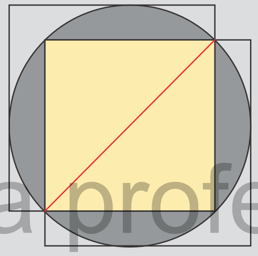
$$A = 127\,500\ m^2$$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

**19.** D

Calculando:



l = lado do quadrado amarelo

r = raio do círculo = 3

$l\sqrt{2} = 2r$

$l\sqrt{2} = 6$

$l = 3\sqrt{2}$

$S_{cinza} = S_{círc} - S_{quadrado}$

$S_{cinza} = \pi \cdot 3^2 - (3\sqrt{2})^2$

$S_{cinza} = 9\pi - 18$

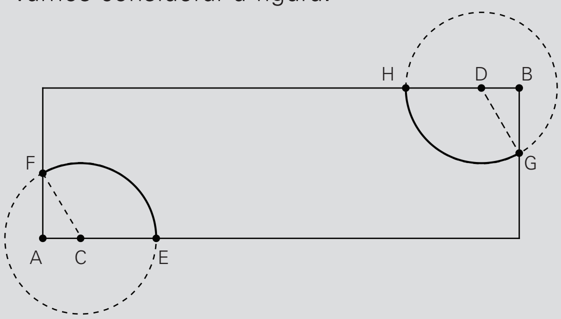
$S_{cinza} = 9 \cdot (\pi - 2)$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

**20.** D

Vamos considerar a figura.




Do triângulo ACF:

$\cos A\hat{C}F = \frac{AC}{CF}$

$\cos A\hat{C}F = \frac{2,5}{5}$

$\cos A\hat{C}F = 60°$

Logo, $E\hat{C}F = 180° - A\hat{C}F = 120°$.

Portanto, como os triângulos ACF e BDG são congruentes, bem como os setores ECF e BGH, a área pedida é dada por:

$2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \operatorname{sen} A\hat{C}F + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot CF^2\right)$

$2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2\right)$

$2 \cdot \left(\frac{25}{8} \cdot 1,7 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 25\right)$

61 m²

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

# 30 ÁREAS DE FIGURAS ESPECIAIS

## Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos as áreas de figuras especiais, ou seja, áreas de figuras complexas que são resultados da adição de muitas outras. Contudo, com este módulo concluímos os estudos sobre as áreas principais com os conhecimentos da Geometria euclidiana.

## Para ir além

Para aprofundar o tema deste módulo, estes dois *links* têm bons materiais que abordam o cálculo de áreas de polígonos.

Área e aplicações em geometria. Disponível em:

<https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/areas_e_aplicacoes_em_geometria.pdf>

Acesso em: out. 2018.

Fórmula de áreas de figuras geométricas planas. Disponível em:

<https://scholar.google.com/scholar?cluster511019139465949086076&hl5pt-BR&as_sdt50,5>

Acesso em: out. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** E

Sabemos que $x \cdot y = 10$ m².

Assim, como $z = y \cdot \cos 25°$ e $A = x \cdot z$:

$A = xy \cos 25° \cong 10 \cdot 0{,}9 = 9$ m²

**8.** Soma: 02 + 32 = 34.

01. Incorreta.

$$A = A(AGEB) + A(BEDEC) = \frac{(2+1)}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 1 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

04. Incorreta. A área do triângulo FED é 1, que representa 40% de 2,5.

08 Incorreta.

$$\frac{DE}{DA} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

16. Incorreta. A distância é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**9.** C

Do triângulo ABC, obtemos:

$$\text{sen}B\hat{A}C = \frac{BC}{AC}$$

$$\overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 40$$

$$BC = 20 \text{ cm}$$

Temos também que:

$$\cos B\hat{A}C = \frac{AB}{AC}$$

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 40$$

$$AB \cong 34\text{cm}$$

Além disso, como $D\hat{A}E = 45°$, segue que $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{BC} = 20$ cm.

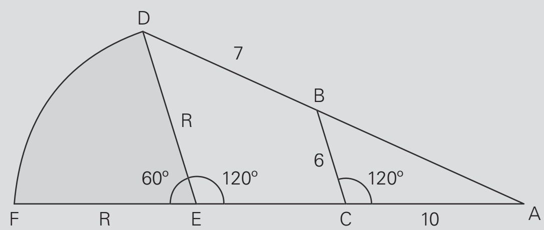
Portanto, a área do triângulo ACE é dada por:

$$(ACE) = (ADC) - (ADE)$$

$$(ACE) = \frac{34 \cdot 20}{2} - \frac{20 \cdot 20}{2}$$

$$(ACE) = 140 \text{ cm}^2$$

**10.**




Podemos aplicar o teorema dos cossenos no triângulo ABC:

$$AB^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120°$$

$$AB^2 = 136 - 120 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$AB^2 = 196$$

$$AB = 14 \text{ cm}$$

Os triângulos ABC e ADE são semelhantes. Logo:

$$\frac{AB}{AB+7} = \frac{6}{R}$$

$$\frac{14}{14+7} = \frac{6}{R}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{R}$$

$$R = 9 \text{ cm}$$

Se calcularmos a área A do setor circular de raio R, vamos obter:

$$A = \frac{60 \cdot \pi \cdot 9}{360°} = \frac{81\pi}{6} = \frac{27\pi}{2} \text{ cm}^2$$

**11.** B

Sendo 50 m² a área do terreno retangular de dimensões $3x - 2$ e $x + 1$:

$(3x - 2)(x + 1) = 50$

$3x^2 + x - 52 = 0$

$a = 3$, $b = 1$ e $c = -52$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-52)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{6}$$

$$x_I = \frac{-1 + 25}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$x_{II} = \frac{-1 - 25}{6} = \frac{-26}{6} \cong 4{,}33 \text{ (não convém)}$$

Logo, se $x = x_0$ é o valor de x, tal que $(3x_0 - 2)(x_0 + 1) = 250$, temos:

$3x_0 + x_0 - 252 = 0$

$a = 3$, $b = 1$ e $c = -252$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-252)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3025}}{6}$$

$$x_I = \frac{-1 + 55}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

$$x_{II} = \frac{-1 - 55}{6} = \frac{-56}{6} \cong 9{,}33 \text{ (não convém)}$$

Sendo assim, o parâmetro x deve ser aumentado em $9 - 4 = 5$ metros.

**12.** C

$3QT = 2TA$

$\frac{QT}{TA} = \frac{2}{3}$ (razão de semelhança)

Os triângulos PTQ e BTA são semelhantes. Considerando que S é a área do triângulo BTA, podemos escrever que:

$$\frac{12}{S} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$4 \cdot S = 108$

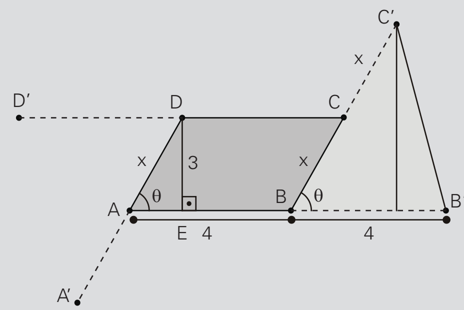
$S = 27$

Portanto, a área do triângulo ABCD será o dobro da área do triângulo BTA, ou seja, 54 cm².

**13.**

a) $A = 4 \cdot 3 = 12$

b) No triângulo ADE, $\text{sen}\theta = \frac{3}{x}$.



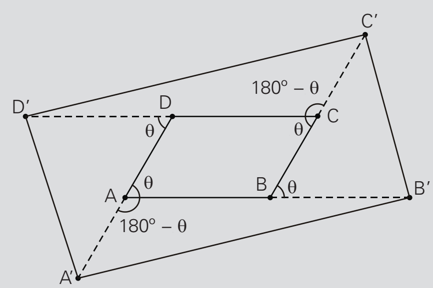

Logo, a área do triângulo BB'C será dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 4 \cdot \text{sen}\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 4 \cdot \frac{3}{x}$$

$A = 12$

c) Considerando que:




$$\text{sen}\theta = \text{sen}(180° - \theta) = \frac{3}{x}$$

$S(A'B'C'D') = S(A'DD') + S(AA'B') + S(BB'C') + S(C'C'D') + S(ABCD)$

$S(A'B'C'D') =$

$$\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 4 \cdot \text{sen}(\theta) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4x \cdot \text{sen}(180° - \theta) +$$

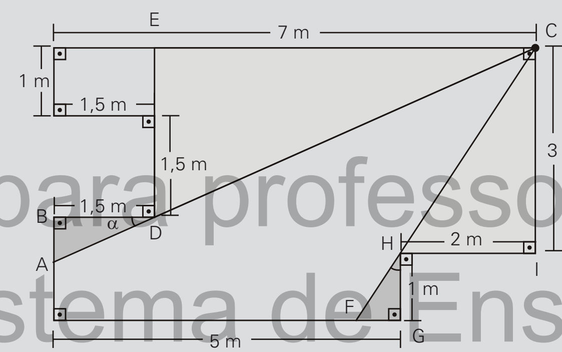
$$+ \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 4 \cdot \text{sen}(\theta) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4x \cdot$$

$$\cdot (\text{sen}180° - \theta) + 12$$

$S(A'B'C'D') = 12 + 12 + 12 + 12 + 12$

$S(A'B'C'D') = 60$

**14.** C



$\Delta ABD \sim \Delta DEC : \dfrac{AB}{2,5} = \dfrac{1,5}{5,5}$

$AB = 0,682$

$A_{\Delta ABD} = \dfrac{0,682 \cdot 1,5}{2}$

$A_{\Delta ABD} = 0,51 \text{ m}^2$

$\Delta FGH \sim \Delta HIC : \dfrac{FG}{2} = \dfrac{1}{3}$

$FG = 0,667$

$A_{\Delta FGH} = \dfrac{0,667 \cdot 1}{2}$

$A_{\Delta FGH} = 0,33 \text{ m}^2$

Área da loja: $A = 4 \cdot 7 - 1,5^2 - 2 \cdot 1 = 23,75 \text{ m}^2$.

Área coberta pela câmera em porcentagem: $\dfrac{23,75 - 0,51 - 0,33}{23,75} = 96,46\%$

**15.** D

Sendo ABCD um paralelogramo, é imediato que $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Como a área de ABCD vale 24 cm²:

$(ABCD) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \text{sen}A\hat{D}C$

$\overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \text{sen}A\hat{D}C = 24$

Além disso, $A\hat{D}C \equiv A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D = 180° - A\hat{D}C$.

Por conseguinte, o resultado pedido é dado por:

$(AMND) = (ABCD) - (ABM) - (MCN)$

$(AMND) = 24 - \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BM} \cdot \text{sen}A\hat{B}C - \dfrac{1}{2} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{CN} \cdot \text{sen}B\hat{C}D$

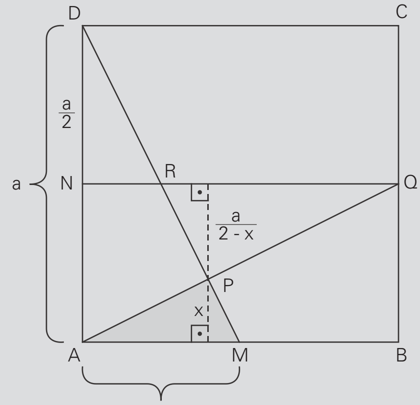
$(AMND) = 24 - \dfrac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \dfrac{\overline{AD}}{2} \cdot \text{sen}A\hat{D}C - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\overline{AD}}{2} \cdot \dfrac{\overline{CD}}{2} \cdot \text{sen}(180° - A\hat{D}C)$

$(AMND) = 24 - \dfrac{1}{4} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \text{sen}A\hat{D}C - \dfrac{1}{8} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \text{sen}A\hat{D}C$

$(AMND) = 24 - 6 - 3$

$(AMND) = 15 \text{ cm}^2$

**16.** Inicialmente, vamos calcular a área do triângulo AMP.




$\Delta DNR \sim \Delta DAM \rightarrow \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{NR}{\frac{a}{2}} \rightarrow NR = \dfrac{a}{4}$ e

$QR = \dfrac{3 \cdot a}{4}$

$\Delta RQP \sim \Delta MPA \rightarrow \dfrac{\frac{3a}{4}}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\frac{a}{2} - x}{x} \rightarrow x = \dfrac{a}{5}$

Portanto, a área S do triângulo APM será dada por:

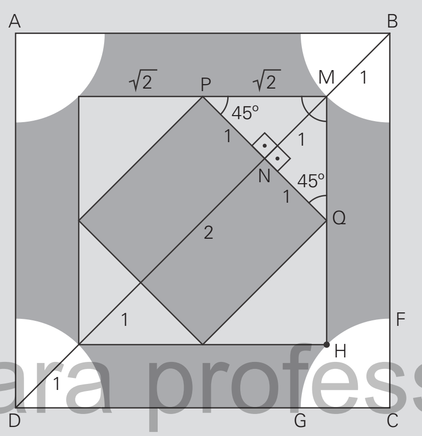
$S = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{5} = \dfrac{a^2}{20}$

Logo, a área $S_E$ da estrela representada será dada pela diferença entre as áreas do quadrado e dos oito triângulos congruentes ao triângulo APM. Ou seja:

$S_E = a^2 - 8 \cdot \dfrac{a^2}{20} = \dfrac{12a^2}{20} = 0,6 \cdot a^2$

Logo, 60% da área do quadrado.

**17.** B




Do enunciado e da figura, temos:

No triângulo PMN:

$(PM)^2 = 1^2 + 1^2$

$(PM)^2 = 2$

Como $PM > 0$:

$PM = \sqrt{2}$ m

Seja x a medida do lado do quadrado ABCD:

No triângulo BCD:

$6^2 = x^2 + x^2$

$2x^2 = 36$

$x^2 = 18$

Assim, a área do quadrado ABCD é 18 m².

Seja $S_1$ a área preenchida com ladrilhos pretos e $S_2$ a área preenchida com ladrilhos brancos:

$S_1 = S_{ABCD} - S_2$, em que $S_{ABCD}$ é a área do quadrado ABCD.

Então:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{ABCD}}{S_2} - \frac{S_2}{S_2}$$

Como $S_{ABCD} = 18$:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{18}{S_2} - 1$$

$S_2 = 4 \cdot S_{setorCGHF} + 4 \cdot S_{PMQ}$

$S_{setorCGHF}$ é a área do setor circular CGHF, e $S_{PMQ}$ é a área do triângulo PMQ.

Então:

$$S_2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$S_2 = 4 + \pi$

Dessa forma:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{18}{4+\pi} - 1$$

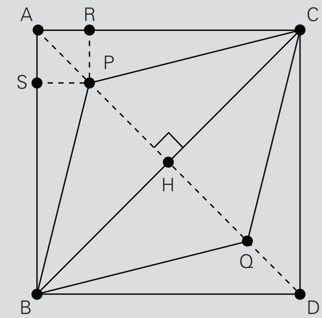
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{18-(4+\pi)}{4+\pi}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{14-\pi}{4+\pi}$$

## Estudo para o Enem

**18.** B

Vamos considerar a figura, em que R é o pé da perpendicular baixada de P sobre AC e S é o pé da perpendicular baixada de P sobre AB.




É imediato que ARPS é um quadrado de lado 8 cm.

Logo, a diagonal AD intersecta BC em H, centro do quadrado. Então:

$\overline{PH} = \overline{AH} - \overline{AP}$

$$\overline{PH} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \overline{AD} - \overline{AR} \cdot \sqrt{2}$$

$$\overline{PH} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 40 - 8 \cdot \sqrt{2}$$

$\overline{PH} = 12\sqrt{2}$ cm

A área do triângulo BPC é dada por:

$$(BPC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{PH} \cdot \overline{BC}$$

$$(BPC) = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot 40\sqrt{2}$$

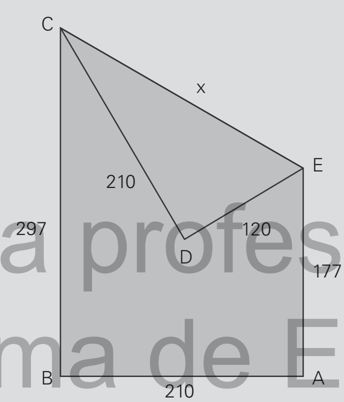
$(BPC) = 480$ cm²

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

**19.** A

Aplicando o teorema de Pitágoras:



$x^2 = 210^2 + 120^2$

$x = \sqrt{44\,100 + 14\,400}$

$x = 30\sqrt{65}$ mm

Cálculo da área do polígono ABCDE:

$S_{pol} = S_{ret} - S_{triang}$

$S_{pol} = (210 \cdot 297) - 2 \cdot \left(\frac{210 \cdot 120}{2}\right)$

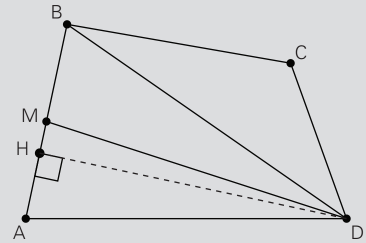
$S_{pol} = (62\,370) - (25\,200)$

$S_{pol} = 37\,170$ mm²

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

**20.** A
Vamos considerar a figura.




Sabendo que (ABD) = 2 · (BCD), o terreno ficará dividido em três partes iguais se, ao traçarmos DM, obtivermos (BDM) = (ADM).

Logo, como DH é a altura relativa ao vértice D dos triângulos BDM e ADM, devemos ter $\overline{BM} = \overline{AM}$ para que (BDM) = (ADM). Ou seja, M deve ser o ponto médio de AB.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

## 31 RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA I

### Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos as relações métricas na circunferência. Foram abordados os três teoremas das cordas e a relação de tangência entre um segmento e uma circunferência.

### Para ir além

A dissertação *O estudo da circunferência no ensino médio: uma proposta utilizando um software livre* é um bom material que aborda o estudo da circunferência por meio de *softwares*. Disponível em:

<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/138537/000864488.pdf;jsessionid=F966EC08CD02C2EFDAF171D5796D1531?sequence=1>

Acesso em: out. 2018.

O texto "Potência de um ponto em relação a uma circunferência" é um ótimo material para abordar as relações métricas na circunferência. Disponível em:

<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM45/RPM45_05.PDF>

Acesso em: out. 2018.

### Exercícios propostos

**7.** C

Aplicando o teorema 3 das cordas, temos:

$(2 + y) \cdot 2 = 8^2 \rightarrow 4 + 2y = 64 \rightarrow 2y = 60 \rightarrow$
$\rightarrow y = 30$

Logo, **y** é um número par.

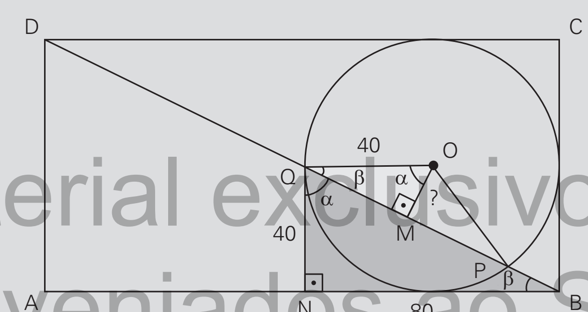
**8.** D

Pelo teorema 2 das cordas, temos:

$(x + 7) \cdot 7 = (8 + 6) \cdot 8$

$7x + 49 = 112 \rightarrow 7x = 112 - 49 = 63 \rightarrow x = \dfrac{63}{7} =$
$= 9 \therefore x = 9$

**9.**




a) A circunferência tem raio de $\dfrac{80}{2} = 40$.

b) Por meio do teorema de Pitágoras, temos:

$BQ^2 = 80^2 + 40^2 \rightarrow BQ = 40\sqrt{5}$

Como o $\Delta MOQ \sim \Delta NQB$:

$\dfrac{MQ}{80} = \dfrac{40}{40\sqrt{5}} \rightarrow MQ = \dfrac{80}{\sqrt{5}} \therefore MQ = 16\sqrt{5}$

Como M é o ponto médio da corda PQ:

$PQ = 2 \times MQ = 2 \times 16\sqrt{5} \therefore PQ = 32\sqrt{5}$

**10.** B

Primeiro calculamos o valor de **y**:

$6 \cdot (6 + y) = 3 \cdot (3 + 24)$

$36 + 6y = 3 \cdot 27 = 81 \rightarrow 6y = 81 - 36 = 45 \therefore$
$\therefore y = 7{,}5$

Depois calculamos o valor de **x**:

$x^2 = 3 \cdot (3 + 24) = 3 \cdot 27 = 81$

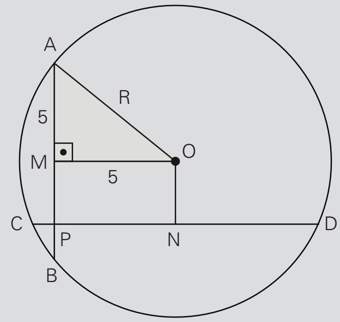
$x^2 = 81 \rightarrow x = 9$

Fazendo x + y:

$7{,}5 + 9 = 16{,}5 \therefore x + y = 16{,}5$

**11.** E

Vamos considerar a figura:




Pelo teorema 1 das cordas, temos:

$PD \cdot 2 = 6 \cdot 4 \rightarrow PD = 12$

$AM = \dfrac{4+6}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ e $OM = \dfrac{12+2}{2} - 2 =$
$= \dfrac{14}{2} - 2 = 5$

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$R^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \therefore R = 5\sqrt{2}$

**12.** PB = 24 → AB = 24 − 9 = 15

Aplicando o teorema 2 das cordas:

$x \cdot (x + x) = 9 \cdot (9 + 15)$

$x \cdot (2x) = 9 \cdot 24$

$x^2 = 108 \rightarrow x = 6\sqrt{3}$ cm

**13.** D

Pelo teorema 3, temos:

$AC \cdot EC = DC^2$

$x \cdot 3 = 6^2 \rightarrow 3x = 36 \rightarrow x = 12$

Como o triângulo é isósceles, AC ≅ BC. Logo:

$x + 3 = y + 6 \rightarrow 12 + 3 = y + 6 \rightarrow 15 - 6 = y \rightarrow$
$\rightarrow y = 9$

Com os valores de **x** e **y** conhecidos, obtemos a soma x + y.

$x + y = 12 + 9 = \rightarrow x + y = 21$

**14.** B

Pelo teorema 2 das cordas, temos:

$x \cdot (x + 5) = 2 \cdot (2 + 10)$

$x^2 + 5x = 24$

$x^2 + 5x - 24 = 0$

As raízes da equação do 2º grau são: $x_1 = 3$ e $x_2 = -8$. Como está no enunciado que x é um número positivo, logo x = 3.

**15.** A

Calculando, temos:

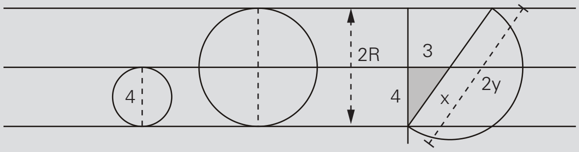
$CD \cdot CA = CF^2 \rightarrow 4 \cdot (4 + AD) = 6^2 \rightarrow$
$\rightarrow 16 + 4 \cdot AD = 36 \rightarrow 4 \cdot AD = 20 \rightarrow AD = 5$

$BE \cdot BA = BF^2 \rightarrow 4 \cdot (4 + AE) = 8^2 \rightarrow$
$\rightarrow 16 + 4 \cdot AE = 64 \rightarrow 4 \cdot AE = 48 \rightarrow AE = 12$

$BC^2 = BA^2 + CA^2 - 2 \cdot BA \cdot CA \cdot \cos\hat{A} \rightarrow$
$\rightarrow 14^2 = 16^2 + 9^2 - 2 \cdot 16 \cdot 9 \cdot \cos\hat{A} \rightarrow \cos\hat{A} =$
$= \frac{141}{288} = \frac{47}{96}$

$ED^2 = AE^2 + AD^2 - 2 \cdot AE \cdot AD \cdot \cos\hat{A} \rightarrow$
$\rightarrow x^2 = 12^2 + 5^2 - 2 \cdot 12 \cdot 5 \cdot \frac{47}{96} \rightarrow x^2 = \frac{441}{4} \rightarrow$
$\rightarrow x = \frac{21}{2} = 10{,}5$

**16.** C




Analisando a figura e adotando **R** como o raio da maior circunferência e **y** como o raio do semicírculo, obtemos:

$x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow x = 5$

$\text{Área}_{\text{semi}} = \frac{\pi \cdot y^2}{2} = 112{,}5\,\pi \rightarrow y^2 = 225 \rightarrow y = 15$

Assim, o diâmetro do semicírculo equivale a 2y = = 2 · 15 = 30

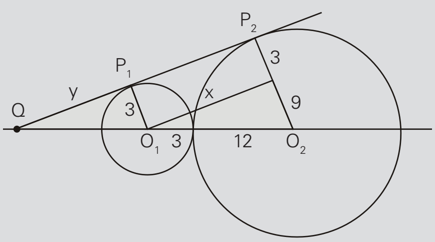
Por semelhança de triângulo, temos:

$\frac{2R}{4} = \frac{30}{5} \rightarrow 10R = 120 \rightarrow R = 12$

Por fim, o comprimento da circunferência que tangencia as retas será:

$2\pi \cdot R = 2\pi \cdot 12 = 24\pi$

**17.** De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Então:

a) $x^2 + 9^2 = 15^2 \rightarrow x^2 = 225 - 81 \rightarrow x = 144 \rightarrow$
$\rightarrow x = 12$

b) $A = 12 \cdot 3 + \frac{(9 \cdot 12)}{2} \rightarrow A = 36 + 54 \rightarrow A = 90$

c) $\frac{y}{y + 12} = \frac{3}{12} \rightarrow 12y = 3y + 36 \rightarrow 9y = 36 \rightarrow$
$\rightarrow y = 4$

Logo: $A = \frac{12 \cdot (12 + 4)}{2} \rightarrow A = 6 \cdot 16 \rightarrow A = 96$

## Estudo para o Enem

**18.** E

Em relação ao solo, o rolo se desloca $2\pi \cdot R$.

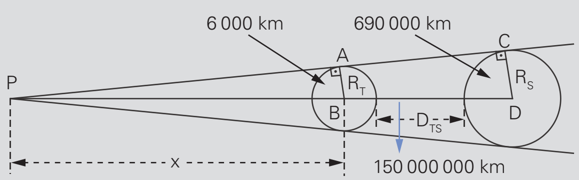
Em relação ao solo, o bloco se desloca $2\pi \cdot R$.

Logo, o deslocamento do bloco em relação ao solo equivale a $4\pi R$.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

**19.** C




Da figura, notamos que $\Delta PAB \sim \Delta PCD$. Logo:

$$\frac{x + 150\,000\,000}{x} = \frac{690\,000}{6\,000} \rightarrow 115x =$$

$$= x + 150\,000\,000 \rightarrow 114x = 150\,000\,000$$

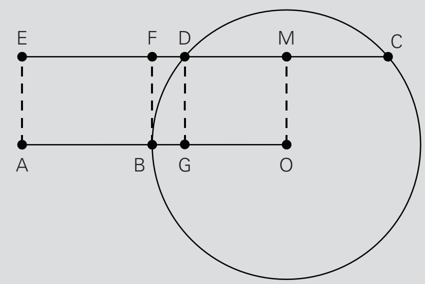
$$\therefore x = \frac{150\,000\,000}{114} \cong 1\,300\,000 \text{ km}$$

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

**20.** B

Podemos considerar a seguinte figura:




Temos que calcular $2 \cdot \overline{OB}$.

De acordo o enunciado, sabemos que $\overline{ED} = 2$ cm e $\overline{EC} = 4{,}5$ cm. Logo, $\overline{DC} = \overline{EC} - \overline{ED} = 4{,}5 - 2 = 2{,}5$ cm.

Se M é o ponto médio do segmento DC, então $\overline{DM} = \frac{\overline{DC}}{2} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$ cm.

Por outro lado, se EF // AB, temos que $\overline{FD} = \overline{ED} - \overline{EF} = \overline{ED} - \overline{AB} = 2 - 1{,}6 = 0{,}4$ cm.

Portanto, $2 \cdot \overline{OB} = 2 \cdot (\overline{FD} + \overline{DM}) = 2 \cdot (0{,}4 + 1{,}25) = 3{,}3$ cm.

**Competência**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

# 32 RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA II

## Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos as relações métricas na circunferência. Também foram abordados os três teoremas das cordas e a relação de tangência entre um segmento e uma circunferência.

## Para ir além

O texto "Potência de um ponto em relação a uma circunferência" é um bom material que aborda as relações métricas na circunferência. Disponível em:

<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM45/RPM45_05.PDF>

Acesso em: out. 2018.

Para enriquecer ainda mais a aula, podem-se sugerir os seguintes vídeos sobre as relações métricas em uma circunferência e os quadriláteros circunscritíveis em uma circunferência. Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=VkvaQWT8z-I>
<https://www.youtube.com/watch?v=3A2rfSGvR-c>

Acesso em: out. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** C

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$

$10 + 8 = 12 + x \rightarrow 18 - 12 = x \therefore x = 6$

**8.** Soma: 01 + 16 = 17

[02] Falsa. Todo retângulo, não quadrado, é um quadrilátero inscritível e não tem diagonais perpendiculares.

[04] Falsa, pois, se considerarmos uma diagonal coincidindo com o diâmetro e a outra intersectando o diâmetro em um ponto diferente de seu centro, teremos um quadrilátero inscritível cujas diagonais não se cortam nos respectivos pontos médios.

[08] Falsa, pois podemos imaginar um quadrilátero com dois pares de ângulos opostos medindo 120° e 60°.

**9.** D

Como AO e BO são tangentes à circunferência:

$AO \cong BO = 40$ cm

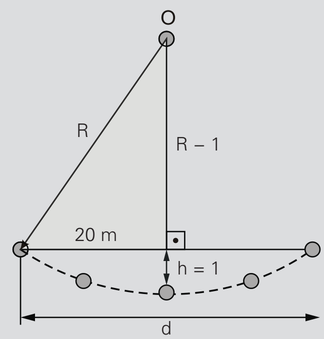
$R = \dfrac{60}{2} = 30$ cm

$P = 40 + 40 + 30 + 30 \rightarrow P = 140$

Portanto, P = 140 cm.

**10.** A

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo assinalado:




$R^2 = (R - 1)^2 + 20^2$

$R^2 = R^2 - 2 \cdot R + 01 + 400$

$2 \cdot R = 401$

$R = 200{,}5$ m.

**11.** a) MC = MN = 8 cm

BP = BM = 10 cm

$x = BM + MC = 10 + 8 = 18 \;\therefore\; x = 18$ cm

b) Como o perímetro do triângulo ABC mede 50 cm:

PA = AN = y

$10 + PA + AN + 8 + x = 50$

$10 + y + y + 8 + 18 = 50$

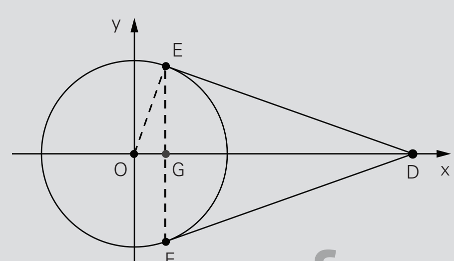
$2y + 36 = 50 \;\rightarrow\; y = 14/2 \;\therefore\; y = 7$ cm

**12.** D

III. Errado. O correto é A′C′ + G′E′ = A′G′ + C′E′.

**13.** D

Vamos considerar a figura.




O triângulo OED é retângulo, pois E e F são pontos de tangência. Logo, aplicamos o teorema de Pitágoras: $ED^2 = OD^2 - OE^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32 \therefore ED = 4\sqrt{2}$ cm.

Seja G o pé da perpendicular baixada do ponto E sobre o eixo x.

A altura EG, relativa à hipotenusa do triângulo OED, é:

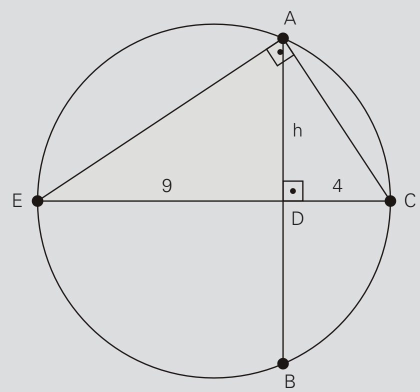
$OD \cdot EG = OE \cdot DE \rightarrow 6 \cdot EG = 2 \cdot 4\sqrt{2} \rightarrow\ EG =$

$= \dfrac{4\sqrt{2}}{3} \cong 1{,}9$ cm

Portanto, a distância entre os pontos E e F é:

$EF = 2 \cdot EG = 2 \cdot 1{,}9 \cong 3{,}9$ cm $\therefore EF > 3{,}5$ cm

**14.** A




$E\hat{A}C = 180° : 2 = 90°$

No triângulo retângulo AEC, temos:

$h^2 = 9 \cdot 4$

$h = \sqrt{36}$

Logo, h = 6.

Portanto, a área do triângulo AED será dada por: $A = (6 \cdot 9) : 2 = 27$ cm².

**15.** $C\hat{G}D = \dfrac{180°}{2} = 90°$

$\Delta CGD$ é retângulo

Podemos então encontrar o diâmetro CD:

$CD^2 = 3^2 + 4^2$

$CD = 5$ e $AC = 2{,}5$

Temos também que:

$CG^2 = CD \cdot CF$

$3^2 = 5 \cdot CF$

$CF = 1{,}8$

Portanto:

$AF = AC - CF$

$AF = 2{,}5 - 1{,}8$

$AF = 0{,}7$

**16.** B

A figura apresenta um arco de circunferência com um quadrado "inscrito" e um triângulo retângulo em um de seus lados. O lado do quadrado é igual à hipotenusa do triângulo.

Pelo teorema de Pitágoras:

$l^2 = 8^2 + 6^2$

$l = 10$

Pelos conhecimentos em Geometria plana, podemos deduzir que a diagonal do quadrado será igual ao diâmetro do "semicírculo", e seu raio R é igual a duas vezes seu diâmetro. Logo:

$2R = l\sqrt{2}$

$2R = 10\sqrt{2}$

$R = 5\sqrt{2}$

A área hachurada S será igual a três quartos da área da circunferência C menos a área do quadrado Q. Aplicando as fórmulas, temos:

$S = \dfrac{3}{4}(C - Q)$

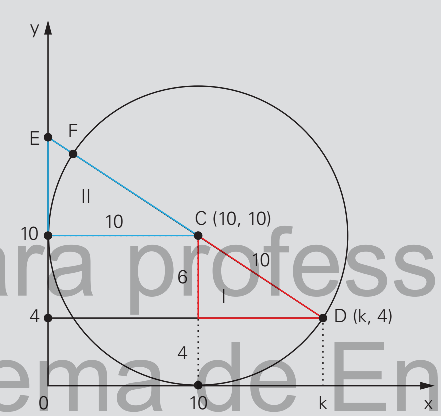
$S = \dfrac{3}{4}(\pi R^2 - l^2)$

$S = \dfrac{3}{4}\left(\pi\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 10^2\right)$

$S = \dfrac{3}{4}(50\pi - 100)$

**17.** D

Como a circunferência tem raio de 10 cm e é tangente aos eixos **x** e **y**, seu centro C tem coordenadas (10,10).



Analisando o triângulo I, temos:

$10^2 = 6^2 + (k - 10)^2$

$100 - 36 = (k - 10)^2$

$64 = (k - 10)^2 \rightarrow 8 = k - 10 \rightarrow k = 18$

Logo, as coordenadas do ponto D são (18, 4).

Como o triângulo I é semelhante ao triângulo II:

$\frac{10}{EC} = \frac{8}{10} \rightarrow EC = \frac{10 \cdot 10}{8} = 12{,}5$

$EF = EC - 10 \rightarrow EF = 12{,}5 - 10 \therefore EF = 2{,}5$ cm

## Estudo para o Enem

**18.** C

De acordo com as propriedades dos segmentos tangentes, AE = AF = 20 cm.

Considerando EB = x e CD = y, respectivamente, BD = x e FC = Y.

Assim, AB = 20 − x e AC = 10 − y.

Logo, o perímetro P do triângulo ABC será dado por:

$P = AB + AC + BC$

$P = 20 - x + 20 - y + x + y$

$P = 40$

Portanto, o perímetro do triângulo hachurado mede 40 cm.

**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade**: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

**19.** D

As distâncias do ponto P ao satélite e de Q ao satélite são iguais. Aplicando-se o teorema de Pitágoras:

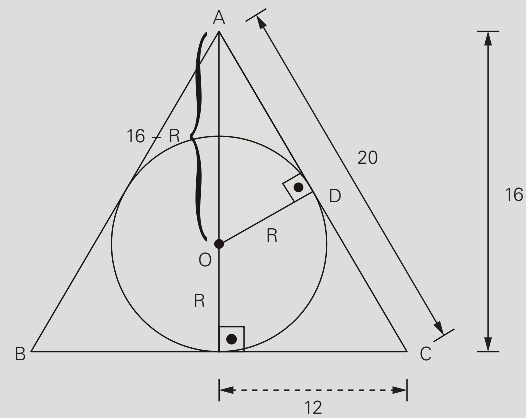
$QO = PO = \sqrt{R^2 + (7R)^2} = \sqrt{50R^2} = 5\sqrt{2}R$

Logo, a distância percorrida será $2 \cdot 5\sqrt{2}R =$
$= 10\sqrt{2}\,R$.

**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade:** Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

**20.** A




$AC^2 = 16^2 + 122$

$AC = 20$

$\Delta AOD \sim \Delta ACM$

$\frac{R}{12} = \frac{16 - R}{20}$

$R = 6$

Área que será pintada:

$A = A = 450 \cdot \pi \cdot R^2 = 450 \cdot 3 \cdot 6^2 = 48\,600$ cm²

Número de potes $= \frac{48\,600}{5\,400} = 9.$

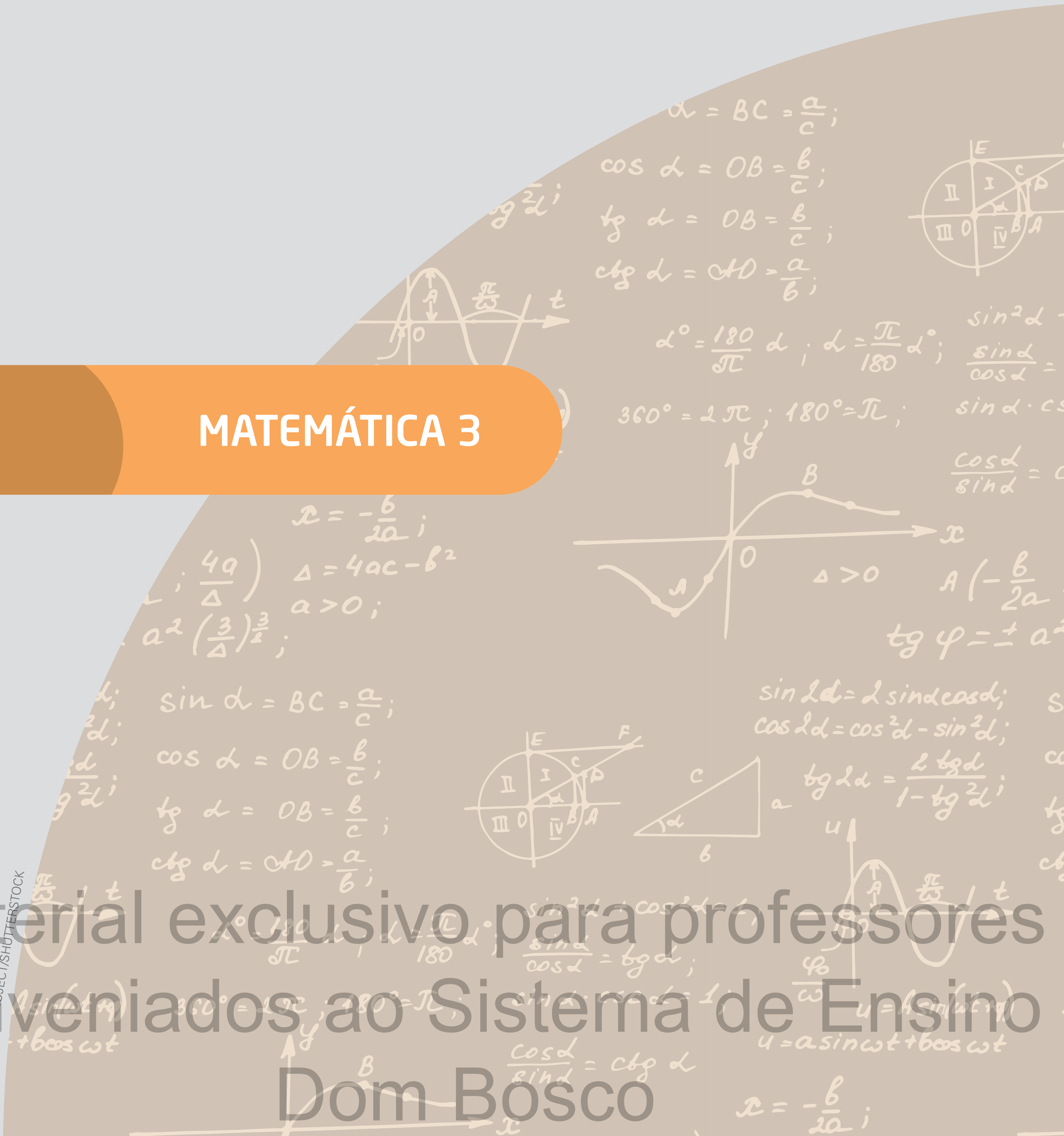
**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade:** Identificar características de figuras planas ou espaciais.

MATERIAL DO PROFESSOR

# RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

## MATEMÁTICA 3



DB PROJECT/SHUTTERSTOCK

# 9 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS I

## Comentários sobre o módulo

O objetivo é apresentar as identidades trigonométricas e suas inversas como ferramentas na simplificação de expressões extensas envolvendo relações trigonométricas para um mesmo ângulo. Demonstram-se essas identidades com base nas razões entre lados e ângulos de triângulo retângulo, por isso é importante que os alunos relembrem as razões seno, cosseno e tangente para se aprofundar no estudo.

## Para ir além

Texto sobre a história da trigonometria e seus primeiros registros.

LUSA. *Afinal, foram os babilônios (e não os gregos) os primeiros a estudar trigonometria*. Disponível em: <https://zap.aeiou.pt/afinal-os-babilonios-nao-gregos-os-primeiros-estudar-trigonometria-171538>. Acesso em: ago. 2018

## Exercícios propostos

**7.** Soma: 01 + 04 + 08 = 13.

02) Incorreto, pois $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

16) Incorreto, pois $\text{tg}\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{4}}{\cos x} = \frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = \frac{2}{3}$ (não convém).

**8.** D

Temos que sen x + cos x = 0,2.

Elevando ao quadrado ambos os lados, temos:

$\text{sen}^2 x + 2 \cdot \text{sen}\ x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0{,}04 \rightarrow$

$\rightarrow 1 + 2 \cdot \text{sen}\ x \cdot \cos x = 0{,}04 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cdot \text{sen}\ x \cdot \cos x = -0{,}96$

Como $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ e $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, então:

$(\text{sen}\ x - \cos x)^2 = \text{sen}^2 x - 2 \cdot \text{sen}\ x \cdot \cos x + \cos^2 x \rightarrow 1 - 2 \cdot \text{sen}\ x \cdot \cos x = 1{,}96$

Logo, como $\sqrt{(\text{sen}\ x - \cos x)^2} = |\text{sen}\ x - \cos x|$

$|\text{sen}\ x - \cos x| = \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$

**9.** E

Temos que $\frac{\sec x + \text{sen}\ x}{\text{cossec}\ x + \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \text{sen}\ x}{\frac{1}{\text{sen}\ x} + \cos x} =$

$= \frac{\frac{1 + \cos x \cdot \text{sen}\ x}{\cos x}}{\frac{1 + \cos x \cdot \text{sen}\ x}{\text{sen}\ x}} = \frac{1 - \cos x \cdot \text{sen}\ x}{1 - \cos x \cdot \text{sen}\ x} \cdot \frac{\text{sen}\ x}{\cos x} =$

$= \text{tg}\ x$.

**10.**

Como $\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, temos que $\text{sen}\ x \leqslant 0$ e $\cos x \leqslant 0$.

Logo, $\frac{\cos^2 x}{1 - \text{sen}\ x} = \frac{1 - \text{sen}^2 x}{1 - \text{sen}\ x} =$

$= \frac{(1 + \text{sen}\ x)(1 - \text{sen}\ x)}{1 - \text{sen}\ x} = 1 + \text{sen}\ x$.

Como $-1 \leqslant \text{sen}\ x \leqslant 0$, temos que $0 \leqslant 1 + \text{sen}\ x \leqslant 1$. Logo, o intervalo é [0,1].

**11.** B

Temos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \frac{1}{9} + \cos^2 x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9}$.

Logo, $\cos x = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$.

Então, $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{-3}{2\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{4}$.

**12.** A

Temos que 2sen x = 1 + cos x

$4\text{sen}^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x \rightarrow 4 - 4\cos^2 x =$
$= 1 + 2\cos x + \cos^2 x \rightarrow 5\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$

$\cos x = \frac{3}{5}$ ou $\cos x = -1$

$x = \arccos \frac{3}{5}$ ou $x = \pi$, pois $x \in [0;2\pi]$

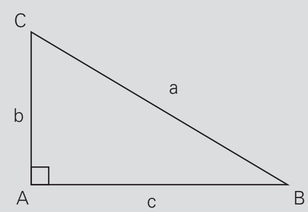
**13.** C

Temos que $\cos x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos x} \rightarrow \cos^2 x = \text{sen}\ x$.

$1 - \text{sen}^2 x = \text{sen}\ x \rightarrow \text{sen}^2 x + \text{sen}\ x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \text{sen}\ x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

**14.** Temos que o triângulo ABC é:




Assim, $\text{tg}\ \hat{B} + \text{tg}\ \hat{C} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{25}{12}$

$\frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{25}{12}$

Note que um triângulo onde a soma do quadrado dos catetos é 25 e a sua multiplicação é 12 é o triângulo pitagórico 3, 4 e 5.

Portanto, $\text{sen}\ \hat{B} + \text{sen}\ \hat{C} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$

**15.** B

Fazendo $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = x$, temos: $x = \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5} \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$

$x = 1$ ou $x = \frac{1}{4}$

Para $x = 1$, temos: $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm 1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\alpha}{2} = n\pi \rightarrow \alpha = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Para $x = \frac{1}{4}$, temos: $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow$

$\rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{1}{2} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi \rightarrow$

$\rightarrow \alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Logo, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ou $\alpha = \frac{4\pi}{3}$, pois $\alpha \in \,]0;2\pi[$.

$\cos^2\frac{\beta}{3} = \frac{4}{7}\cos^4\frac{\beta}{3} + \frac{3}{7}$

Fazendo $\cos^2\frac{\beta}{3} = y$, temos: $y = \frac{4}{7}y^2 + \frac{3}{7} \rightarrow$

$\rightarrow 4y^2 - 7y + 3 = 0$

$y = 1$ ou $y = \frac{3}{4}$

Para $y = 1 \rightarrow \cos^2\frac{\beta}{3} = 1 \rightarrow \cos\frac{\beta}{3} = \pm 1$

$\frac{\beta}{3} = n\pi \rightarrow \beta = 3n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Para $y = \frac{3}{4} \rightarrow \cos^2\frac{\beta}{3} = \frac{3}{4} \rightarrow \cos\frac{\beta}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\beta}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi \rightarrow \beta = \pm\frac{\pi}{2} + 3n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Logo, $\beta = \frac{\pi}{2}$ ou $\beta = \frac{3\pi}{2}$, pois $\beta \in \,]0;2\pi[$.

Portanto, o menor valor de $\cos(\alpha + \beta)$ se dá quando $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ e $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Assim, $\cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) =$

$= \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

**16.** a) Chamamos o ângulo $\hat{B} = \hat{C} = x$, logo

$\hat{A} = 2(x + x)$.

Então, $2(x + x) + x + x = 6x = 180°$

$x = 30°$

Portanto, o ângulo $\hat{A} = 120°$.

Assim, pela lei dos senos, temos que:

$$\frac{\text{sen } 30°}{L} = \frac{\text{sen}120°}{10} \rightarrow L = \frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} =$$

$$= 10\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$P = L + L + 10 = \left(\frac{20\sqrt{3}}{3} + 10\right) \text{ cm.}$$

b) Temos que $a^3 + b^3 = (a^2 - ab + b^2)(a + b)$.

Logo, $\text{sen}^3 x + \cos^3 x = (\text{sen } x + \cos x)(\text{sen}^2 x - \text{sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x) = k(1 - \text{sen } x \cdot \cos x)$.

Temos também que, como $\text{sen } x + \cos x = k$, $\text{sen}^2 x + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x = k^2 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = k^2 - 1\ \text{sen } x \cdot \cos x = \frac{k^2 - 1}{2}$

Então: $\text{sen}^3 x + \cos^3 x = k\left(1 - \frac{k^2 - 1}{2}\right) = \frac{3k - k^3}{2}$.

**17.** E

Temos, $x = \text{arccos}\frac{2}{5} \rightarrow \cos(\text{arccos } x) = \frac{2}{5} \rightarrow$

$$\rightarrow \text{sen } x = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{tg}\left(\text{arccos}\frac{2}{5}\right) = \text{tg } x = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

## Estudo para o Enem

**18.** E

No ciclo trigonométrico, os valores de sen x e cos x são os catetos de um triângulo retângulo inscrito no círculo.

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**19.** D

Como $\text{tg } \alpha = \frac{x}{y}$

$\frac{x}{y} = 2$

$x = 2y$

Temos que $x^2 + y^2 = 25$.

$4y^2 + y^2 = 25 \rightarrow y^2 = 5 \rightarrow y = \sqrt{5}$

Portanto, $x = 2\sqrt{5}$ e $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**20.** D

Temos que $\sec x = \dfrac{\text{tg}\ x + 2}{2}$

Ou seja: $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\text{sen}\ x}{2 \cdot \cos x} + 1 \rightarrow 2 =$

$= \text{sen}\ x + 2 \cdot \cos x \rightarrow \text{sen}\ x = 2 - 2 \cdot \cos x$

Como $\text{sen}\ x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$\sqrt{1 - \cos^2 x} = 2 - 2 \cdot \cos x \rightarrow 1 - \cos^2 x =$

$= 4 - 8 \cdot \cos x + 4 \cdot \cos^2 x \rightarrow$

$\rightarrow 5 \cdot \cos^2 x - 8 \cdot \cos x + 3 = 0$

$\cos x = 1$ ou $\cos x = \dfrac{3}{5}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Temos que $\sec x = \dfrac{5}{3}$ e $\text{tg}\ x = \dfrac{4}{3}$.

Logo, a razão da sequência é $\dfrac{5}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}$.

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

# 10 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS II

## Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos outras identidades trigonométricas que podem ser encontradas com base na identidade trigonométrica fundamental. Essas relações são capazes de proporcionar uma maior praticidade na resolução de problemas em que temos apenas uma informação (tangente, cotangente, secante, cossecante).

## Para ir além

A trigonometria se desenvolveu há muitos séculos e faz parte de todas as grandes civilizações. É fundamental conhecer a história dos estudos sobre trigonometria para melhor compreender o conteúdo deste módulo. Para tanto, a coleção *Tópicos de história da Matemática*, editora Atual – *para uso em sala de aula* (vários autores) oferece ao leitor uma visão ampla da construção da Matemática. Um de seus volumes é destinado à trigonometria e pode enriquecer o trabalho em sala de aula.

## Exercícios propostos

**7.** E

Temos que $\text{tg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x} + \left[P \cdot \dfrac{2 - (1 + \text{tg}^2 x)}{2 \cdot \text{tg } x}\right] =$

$= \dfrac{1}{\text{tg } x} + \left[P \cdot \dfrac{1 - \text{tg}^2 x}{2 \cdot \text{tg } x}\right]$

$\text{tg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x} = \dfrac{1}{2}\, P \left(\dfrac{1}{\text{tg } x} - \text{tg } x\right)$

$P = -2$

**8.** Temos que $\text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = 2$

$\cos x = 2\text{sen } x \to \cos^2 x = 4\text{sen}^2 x \to \cos^2 x =$

$= 4 - 4\cos^2 x \to 5\cos^2 x = 4 \to \cos^2 x = \dfrac{4}{5}$

Como x é do 2° quadrante: $\cos x = \dfrac{-2}{\sqrt{5}} = \dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$.

**9.** A

Temos que, pela equação,

$(1 + \sec\theta)(1 + \text{cossec }\theta) = 0$

$1 + \sec\theta = 0$ ou $1 + \text{cossec }\theta = 0$

com $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ e $\theta \neq n\pi$

Além disso: $1 + \sec\theta = 0 \to \sec\theta = -1\cos\theta =$

$= -1 \to \theta = \pi + n2\pi$

Finalmente, temos que: $1 + \text{cossec }\theta = 0 \to$

$\text{cossec }\theta = -1 \to \text{sen }\theta = -1 \to \theta = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$

Portanto, concluímos que o número de soluções é zero.

**10.** D

Temos que $\dfrac{2 - 2\cos x - \text{sen}^2 x}{1 - \cos x} =$

$= \dfrac{2 - 2\cos x - (1 - \cos^2 x)}{1 - \cos x} =$

$= \dfrac{1 - 2\cos x + \cos^2 x}{1 - \cos x} = \dfrac{(1 - \cos x)^2}{1 - \cos x} = 1 - \cos x$

**11.** A

III. Incorreto, pois a medida é 360° – 40° = 320°.

**12.** D

Temos que $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$.

Assim: $\text{sen}^2 x = \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \to 2\text{sen}^2 x =$

$= 1 \to \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{2} \to \text{sen } x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Portanto, $x = \dfrac{\pi}{4}$

**13.** A

Temos que $\left(\dfrac{\text{sen }\theta}{\text{csc }\theta}\right) + \left(\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta}\right) = \dfrac{\text{sen }\theta}{\frac{1}{\text{sen }\theta}} + \dfrac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta}} =$

$= \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

**14.** $3 \cdot \text{cossec}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - \text{tg}^2 x = 1 \to \dfrac{3}{\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$

$= \text{tg}^2 x + 1$

Devemos lembrar que $\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1$

Então, podemos escrever:

$\dfrac{3}{\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Como $\text{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos x}{2}$

$\dfrac{3}{\frac{1 - \cos x}{2}} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \to 3\cos^2 x = \dfrac{1 - \cos x}{2} \to$

$\to 6 \cdot \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

Resolvendo a equação, temos: $\cos x = \dfrac{-1 \pm 5}{12} \to$

$\to \cos x = \dfrac{1}{3}$ ou $\cos x = \dfrac{-1}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \arccos\dfrac{1}{3} + 2n\pi;\ \text{ou } x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi, \text{ em que } n \in \mathbb{R}\right\}$.

**15.** Seja x o ângulo da questão.

Como $\text{sen } x = \frac{12}{13}$, temos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x =$ $= \frac{144}{169} + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

$\cos x = \frac{-5}{13}$, pois $x \in 2^\circ$ quadrante.

Assim, temos que $\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$

$= \frac{\text{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{-5}{13}} = \frac{-12}{5}$.

**16.** B

$\frac{\text{tg}^3 x - 3\text{tg } x}{1 - 3\text{tg}^2 x} + 1 = 0 \rightarrow \frac{\text{tg}^3 x - 3\text{tg } x}{1 - 3\text{tg}^2 x} = -1$

$\text{tg}^3 x - 3\text{tg } x = -1 + 3\text{tg}^2 x \rightarrow (\text{tg } x + 1)(\text{tg}^2 x - \text{tg } x + 1) - 3\text{tg } x(\text{tg } x + 1) = 0$

$(\text{tg } x + 1)(\text{tg}^2 x - 4\text{tg } x + 1) = 0 \rightarrow \text{tg } x + 1 = 0$ ou $\text{tg}^2 x - 4\text{tg } x + 1 = 0$

$\text{tg } x = -1$ ou $\text{tg } x = 2 + \sqrt{3}$ ou $\text{tg } x = 2 - \sqrt{3}$

$x = \frac{-\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{5\pi}{12}$

No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a soma das soluções é

$\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} > 0$.

**17.** B

Temos que

$$\frac{\cos^3 x - 2 \cdot \cos x + \sec x}{\cos x \cdot \text{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^3 x - 2 \cdot \cos x + \frac{1}{\cos x}}{\cos x \cdot \text{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^3 x - 2 \cdot \cos x + \frac{1}{\cos x}}{\cos x \cdot \text{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^4 x - 2 \cdot \cos^2 x + 1}{\cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x} = \frac{(\cos^2 x - 1)^2}{\cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{(-\text{sen}^2 x)^2}{\cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \text{tg}^2 x$$

## Estudo para o Enem

**18.** E

$4\text{sen}^3 x - 5\text{sen } x - 4\cos^3 x + 5\cos x = 0 \leftrightarrow$ $\leftrightarrow 4(\text{sen } x - \cos x)(\text{sen}^2 x + \text{sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x) - 5(\text{sen } x - \cos x) = 0 \leftrightarrow (\text{sen } x - \cos x)[4(1 + \text{sen } x \cdot \cos x) - 5] = 0 \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (\text{sen } x - \cos x)(2 \cdot \text{sen } 2x - 1) = 0$

Portanto, temos: $\text{sen } x - \cos x = 0 \leftrightarrow \text{sen } x =$ $= \cos x \leftrightarrow \text{tg } x = 1 \leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $2 \cdot \text{sen } 2x - 1 =$ $= 0 \leftrightarrow \text{sen } 2x = \frac{1}{2}$

ou seja, $2x = \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{\pi}{12}$ ou $2x = \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \frac{5\pi}{12}$

$\rightarrow S = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} \rightarrow \text{tg } S + \text{cossec } 2S =$

$= \text{tg } \frac{3\pi}{4} + \text{cossec } \frac{3\pi}{2} = (-1) + (-1) = -2$

**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade:** Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

**19.** A

A tirolesa forma um triângulo retângulo de ângulos agudos 10° e 80° e um cateto
52 − 8 = 44 m.

Para encontrar o outro cateto **d**, temos que **tg**

$10^\circ = \frac{44 \text{ m}}{d} = 0{,}176$.

$d = \frac{44}{0{,}176} = 250$ m.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**20.** D

Com base no texto, podemos perceber que:

1° A produção máxima ocorre quando o preço é o mais baixo possível.

2° Sabemos que a função cosseno varia entre [1, −1].

Como queremos o menor valor possível, teremos então: $\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1 \rightarrow \frac{\pi x - \pi}{6} = \pi \rightarrow$

$\rightarrow x - 1 = 6 \rightarrow x = 7$

Como x = 7, o mês de produção máxima será julho.

**Competência:** Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

**Habilidade:** Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

# 11 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

## Comentários sobre o módulo

O módulo é dedicado ao estudo das funções trigonométricas básicas, enfatizando os conceitos de domínio, imagem e paridade. Além disso, analisamos o comportamento dos gráficos e dos períodos das funções seno, cosseno e tangente.

## Para ir além

As imagens de abertura remetem ao movimento das marés e à corrente alternada. Comente que esse movimento é causado principalmente pela atração gravitacional da Lua sobre a Terra e se assemelha a uma função trigonométrica quando representado no gráfico pela sua periodicidade.

Outro ponto de destaque é a análise das variações das funções trigonométricas no que se refere ao deslocamento do gráfico, em relação aos eixos coordenados e às alterações de amplitude e de período.

## Exercícios propostos

**7.** B

Devemos ter $R_A = R_B$. Logo:

$$\left|2\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{60}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi t}{60}\right)\right| = \left|\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi t}{60}\right)\right|$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi t}{60}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi t}{60} = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = 15 \text{ meses.}$$

**8.** D

O valor máximo se dá quando $\cos\left(\pi\cdot\frac{(t-3)}{12}\right) = 1$

Ou seja, quando $\pi\cdot\frac{(t-3)}{12} = k\cdot 2\pi$.

$t - 3 = 24k$

$t = 24k + 3$

No intervalo [0,11], o único valor possível é $t = 3$ (início de abril).

$f(3) = 1{,}625 + 1{,}25\cdot 1 = 2{,}875$.

**9.**

A moeda X deixa de ser menos valiosa que a moeda Y quando $f(x) \le 1$. Logo,

$$1{,}625 + 1{,}25\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{(t-3)}{12}\right) \le 1 \rightarrow 1{,}25\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{(t-3)}{12}\right) \le -0{,}625 \rightarrow \cos\left(\pi\cdot\frac{(t-3)}{12}\right) \le \frac{-1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \le \pi\cdot\frac{(t-3)}{12} \le \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow$$

$$8 + 24k \le t - 3 \le 16 + 24k \rightarrow 11 + 24k \le t \le 19 + 24k$$

No intervalo [0,11], o único valor possível para t é $t = 11$. Portanto, a moeda deixou de ser menos valiosa em dezembro. Logo, o intervalo é de 1 mês.

**10.** B

Podemos observar que se trata de um senoide, pois $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y(2\pi) = 0$. Porém, a função está em módulo, porque, para todo x real, $y \ge 0$. Logo, $y = |\text{sen}\, x|$.

**11.** A

Podemos observar que, quando $x < 0$, a função é o módulo de um senoide $f(x) = -|\text{sen}\, x|$. Quando $x \ge 0$, a função é o módulo de um cossenoide $f(x) = |\cos x|$.

**12.** E

Como podemos ver $f(-x)\cdot f(-x) = f(x)\cdot f(x)$, como o produto de um número para por outro número par gera um número par, logo o produto de duas funções pares resulta em par.

**13.**

Temos que a função $f(x) = \text{sen}\, x$ possui $Im = [-1,1]$; logo, para obtermos o valor máximo deveremos usar $f(x) = 1$

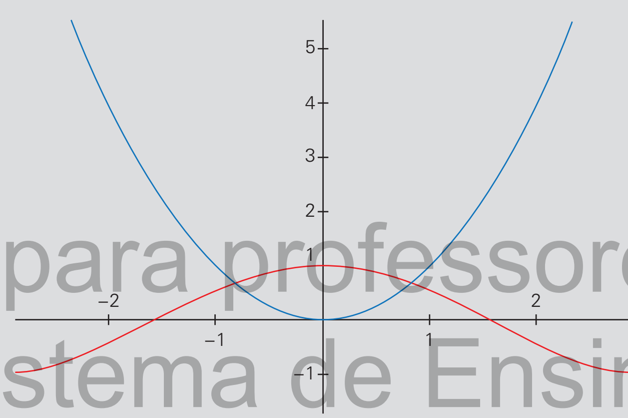
Portanto, temos: $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{180} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow \frac{\pi t}{180} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \rightarrow t = 135 + 360k$ e

$\text{sen}\left(\frac{\pi t}{20} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow \frac{\pi t}{20} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2p\pi,\ p \in \mathbb{Z} \rightarrow t = 15 + 40p$

O primeiro valor positivo que satisfaz as duas equações é 135. Logo, devemos contar 135 dias a partir de 1° de janeiro. Portanto, 15 de maio.

**14.** B

Podemos analisar os gráficos e, como $x^2$ é côncava para cima, temos que:

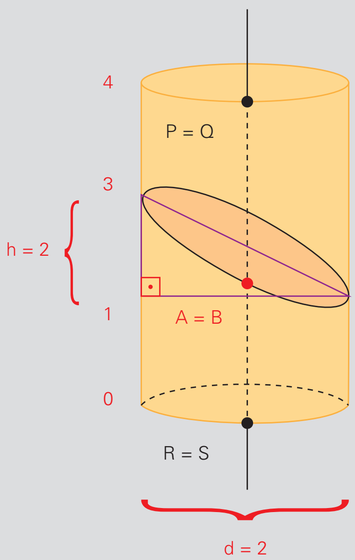


**15.** B

Podemos observar que o diâmetro do cilindro pode ser calculado pelo comprimento do círculo, que, pelo gráfico da figura 1, é igual ao período da função $y = \text{sen } x$, ou seja, $2\pi$. $2\pi r = 2\pi \rightarrow r = 1$

Logo, o diâmetro é igual a $d = 2$.

Assim, como a altura do cilindro é igual a 4, e a imagem de $y = \text{sen } x$ é $\text{Im} = [-1,1]$, temos o triângulo:




Portanto, o diâmetro maior da elipse é dado por:
$D = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

**16.** C

Na latitude 0°: $d - 12 = 0$. Função constante.

Na latitude −30°: amplitude igual a 2,

$d = 12 + 2 \cdot \cos\left(\omega m + \frac{\pi}{2}\right)$

Na latitude −60°: amplitude igual a 6,5,

$d = 12 + 6{,}5 \cdot \cos\left(\omega m + \frac{\pi}{2}\right)$.

Podemos observar também que os deslocamentos vertical e horizontal das curvas são os mesmos.

**17.**

Igualando as equações, teremos:

$\cos(2\alpha) = 4\cos(\alpha) \rightarrow \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha =$
$= 4\cos\alpha \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 4\cos\alpha \rightarrow$
$\rightarrow 2\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - = 0$

Resolvendo a equação de 2° grau, temos que:

$\cos\alpha = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$.

## Estudo para o Enem

**18.** A

Em março: $P(2) = 6\,000 + 50 \cdot 2 + 2000 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{6}\right) = 6\,000 + 100 + 2000 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$
$= 6000 + 100 + 1000 = 7100$. Em julho: $P(6) =$
$= 6\,000 + 50 \cdot 6 + 2000 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 6}{6}\right) =$
$= 6000 + 300 - 2000 = 4300$

$1 - \frac{P(6)}{P(2)} = 1 - \frac{4\,300}{7100}$; $0{,}395 = 39{,}5\%$.

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**19.** E

Temos que $h(x) = g(f(x)) = \log_2$
$(f(x)) = \log_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sen } x\right)$.

Então, temos que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sen } x \geq 0$

$\text{sen } x \geq -1$, $x \neq \frac{3\pi}{2}$, pois $x \in [0,2\pi]$

Para $x = 0$, $x = \pi$ ou $x = 2\pi$, temos $f(x) = \frac{1}{2}$ e $h(x) = -1$.

Para $x = \frac{\pi}{2}$, temos $f(x) = 1$ e $h(x) = 0$.

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**20.** E

Temos que o gráfico deve ter $y(0) = 11\,000$.
$y(90) = 11\,000 + \text{sen}(4 \cdot 90) = 11\,000$
$y(180) = 11\,000 + \text{sen}(4 \cdot 180) = 11\,000$.

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

## 12 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

### Comentários sobre o módulo

O módulo foca principalmente no estudo das funções trigonométricas, enfatizando os conceitos de domínio, imagem e paridade. Também analisa o comportamento dos gráficos e dos períodos das funções cossecante, secante e cotangente.

São analisadas também as variações das funções trigonométricas inversas, no que se refere ao deslocamento do gráfico em relação aos eixos coordenados e às alterações de amplitude e de período.

### Para ir além

No *site* Ciência à Mão da USP, acesse um simulador no qual é possível utilizar a circunferência trigonométrica e o plano cartesiano para esboçar as funções seno, cosseno e tangente. Disponível em:

<http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia5tex&cod5funcaotrigonometricasgraficosi>.

Acesso em: ago. 2018.

### Exercícios propostos

**7.** A

Podemos observar que a amplitude é igual a 2. Logo, a = 2.

Temos também que o período é igual a $p = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{3\pi}{2}$.

Então, $|b| = \frac{4}{3}$. Como o gráfico está invertido: $b = \frac{-4}{3}$.

Portanto, $a \cdot b = 2 \cdot \frac{(-4)}{3} = \frac{-8}{3}$.

**8.**

Temos que a imagem da função f é Im = [−1,3].

Portanto, $a = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$.

A função f está deslocada em 1 unidade para cima. Logo, b = 1.

Assim, temos que a + b = 2 + 1 = 3 e b − a = = 1 − 2 = −1.

**9.** C

II Incorreto, pois a função apresenta um deslocamento de $\frac{\pi}{2}$.

IV Incorreta, pois a função seno é uma função ímpar.

**10.** B

III incorreto, pois a amplitude é dada pela constante que multiplica a função periódica, no caso, 20 mmHg.

**11.**

Temos quatro períodos completos em $4\pi$; logo, o período é $\pi$.

Então, $\pi = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow m = 2$.

Como a função não está deslocada, temos que a = 0 e n = 0.

Como a amplitude vale 1, a função é y = sen 2t.

**12.** A

$T = 0{,}75 \text{ s} = \frac{3}{4} \text{ s} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{60} \text{ min} = \frac{1}{80} \text{ min}$

$f = \frac{1}{T} = 80$ bat/min

**13.** C

Temos o máximo da função quando cos x = 1. Logo, x = 0. Portanto, $f(0) = 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} + k = 4$.

Assim, $\frac{3}{2} + k = 4 \rightarrow k = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

**14.** A

Devemos ter uma função de amplitude 2, inversa (a = 2) e período $p = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$.

**15.** A

Temos que, como a função não é invertida no gráfico, $\alpha > 0$.

Como a amplitude aumenta, temos que $\alpha \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2} = \alpha$. E, portanto, $0 < \alpha < 1$.

Como o período de g(x) é $4\pi$, temos que $p = \frac{2\pi}{|\beta|} = 4\pi \rightarrow |\beta| = \frac{1}{2} \rightarrow \beta = \frac{1}{2}$.

**16.**

Temos que $f(t) = 1 + 2 \cdot \text{sen } (4t + \pi) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow \text{sen } (4t + \pi) = \frac{-1}{2}$.

$4t + \pi = \frac{7\pi}{6}$ ou $4t + \pi = \frac{11\pi}{6}$

$4t = \frac{\pi}{6} \rightarrow t = \frac{\pi}{24}$ ou $4t = \frac{5\pi}{6} \rightarrow t = \frac{5\pi}{24}$

O período da função é $p = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$.

**17.** B

Temos que se $0 \leq x \leq 2\pi$, então $0 \leq x^2 \leq 4\pi^2$. Como $4\pi^2 \simeq 12{,}5\pi$, temos:

$\text{sen } x^2 = 0$

$x^2 = k\pi$

No intervalo $0 \leq x^2 \leq 12{,}5\pi$. Temos que a função f intercepta o eixo das abscissas nos valores de k = {0, 1, 2, ..., 12}, ou seja, 13 vezes.

## Estudo para o Enem

**18.** D

$f(x_p) = g(x_p)$

$2^{\text{sen} x_p} = 4^{\cos x_p}$

$2^{\text{sen} x_p} = 2^{2\cos x_p}$

$\text{sen } x_p = 2\cos x_p$

$\text{sen}^2 x_p = 4\cos^2 x_p$

$1 - \cos^2 x_p = 4\cos^2 x_p$

$\cos^2 x_p = \dfrac{1}{5}$

$\cos x_p = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**19.** C

Analisando a circunferência trigonométrica, temos que $\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Assim, se tomarmos $\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, podemos coincidir os gráficos de f(x) e g(x).

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**20.** A

A função forma uma crista quando

$\text{sen}\left(\dfrac{5}{4}\pi t_c\right) = = 1 \rightarrow \dfrac{5}{4}\pi t_c = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow t_c = \dfrac{2}{5}.$

A função forma um vale quando

$\text{sen}\left(\dfrac{5}{4}\pi t_v\right) = = -1 \rightarrow \dfrac{5}{4}\pi t_v = \dfrac{3\pi}{2} \rightarrow t_v = \dfrac{6}{5}.$

Portanto, o intervalo é dado por

$\Delta t = t_v - t_c = \dfrac{6}{5} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8.$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

## 13 TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS I

### Comentários sobre o módulo

Em geral, o conteúdo deste módulo é cobrado em questões de simplificação de expressões envolvendo as razões trigonométricas. Entretanto, selecionamos alguns problemas que também podem ser resolvidos com essas transformações trigonométricas.

### Exercícios propostos

**7.** B

Temos que $\text{sen}^2\ 5° + \cos^2 5° = 1$

$\cos^2 5° = 1 - \dfrac{4}{625} = \dfrac{621}{625}$

$\cos 5° = \pm\dfrac{\sqrt{621}}{25}$

Como 5° é um ângulo do primeiro quadrante, temos $\cos 5° = \dfrac{\sqrt{621}}{25}$.

Assim: $\cos 50° = \cos(5° + 45°) =$

$= \cos 5° \cdot \cos 45° - \text{sen}\ 5° \cdot \text{sen}\ 45°$

$= \cos 50° = \dfrac{\sqrt{621}}{25}\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{2}{25}\dfrac{\sqrt{2}}{2} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621}-2\right)$

**8.** A

$\cos 3x = -1 \to 3x = (2n + 1)\pi \to x = \dfrac{(2n+1)\pi}{3}$.

Logo, $\cos\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ ou $-1$.

**9.** D

Elevando ao quadrado as duas equações, obtemos:

$(\text{sen}\ x + \text{sen}\ y)^2 = 1 + 2 \cdot \text{sen}\ x \cdot \text{sen}\ y = \dfrac{15}{9} \to$

$\to \text{sen}\ x \cdot \text{sen}\ y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{15}{9}-1\right) = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$

$(\cos x + \cos y)^2 = 1 + 2 \cdot \cos x \cdot \cos y = 1 \to$

$\to \cos x \cdot \cos y = 0$

Temos que $\sec(x - y) = \dfrac{1}{\cos(x-y)}$.

Mas $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \text{sen}\ x \cdot \text{sen}\ y$

$\cos(x - y) = \dfrac{1}{3}$

$\sec(x - y) = 3$

**10.** a) $\text{tg}\ x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\sec x$

$\text{tg}^2 x = \dfrac{9}{4} - 2 \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}}\sec x + \dfrac{4}{5}\sec^2 x$

Mas $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

$\sec^2 x - 1 = \dfrac{9}{4} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}\sec x + \dfrac{4}{5}\sec^2 x \to$

$\to 4\sqrt{5}\sec^2 x + 120\sec x - 65\sqrt{5} = 0$

$\sec x = \dfrac{-120 \pm 140}{8\sqrt{5}}$. Como $\sec x > 0$, $\sec x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

b) Como $\sec x = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \to \cos x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Temos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \to$

$\to \text{sen}\ x = \sqrt{1-\dfrac{4}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Então,

$\text{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\ x \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} + \text{sen}\dfrac{\pi}{4} \cdot \cos x =$

$= \dfrac{\sqrt{5}}{5}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

**11.** D

Temos que $2x + y = \pi$.

$\cos y = \cos(\pi - 2x) =$

$= \cos\pi \cdot \cos 2x + \text{sen}\ \pi \cdot \text{sen}\ 2x$

$\cos y = -\cos 2x = -\cos(x + x) =$

$= -\cos x \cdot \cos x + \text{sen}\ x \cdot \text{sen}\ x = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$

$\cos y = \text{sen}^2 x - 1 + \text{sen}^2 x = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 x$

$\cos y = 1 - 2 \cdot \dfrac{9}{16} = \dfrac{1}{8}$

**12.** Temos $\text{sen}\ 3x = \dfrac{1}{2}$.

Para $0 \leq x \leq \pi \to 0 \leq 3x \leq 3\pi$.

Então, $3x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $3x = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $3x = \dfrac{11\pi}{6}$ ou $3x = \dfrac{17\pi}{6}$.

4 soluções.

**13.** B

Dividindo ambos os lados por 2, temos:

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\ x + \dfrac{1}{2}\cos x = \dfrac{k}{2} - 1$

$\cos\dfrac{\pi}{6}\text{sen}\ x + \text{sen}\dfrac{\pi}{6}\cos x = \dfrac{k}{2} - 1$

$\text{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{k}{2} - 1$

Então, como $-1 \leq \text{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) \leq 1$.

Temos que $-1 \leq \dfrac{k}{2} - 1 \leq 1$.

Logo:

$-2 \leqslant k - 2 \leqslant 2$

$0 \leqslant k \leqslant 4$

Então, o maior valor inteiro de k é 4.

**14.** A

Temos que $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

Então:

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x = \frac{1}{2}$

$2\cos^2 x = \frac{3}{2}$

$\cos^2 x = \frac{3}{4} \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Temos que $\dfrac{\operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cossec}(x-\pi) - \sec(\pi - x)} =$

$$= \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - 1}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x-\pi)} - \frac{1}{\cos(\pi - x)}} = \frac{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\cos x}} =$$

$= -\cos x$.

Então, o maior valor de cos x é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**15.** E

Temos que $\cos(x + x) =$
$= \cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

Então, $\cos(x + x) = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x =$
$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.

Fazendo $x = \frac{\pi}{8}$, temos:

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{8}$

Assim, $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -2\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{8}$

$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

**16.** B

Temos que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sqrt{7}$

$\operatorname{sen} x = \sqrt{7} \cos x$

Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{sen}^2 x = 7\cos^2 x = 7 - 7\operatorname{sen}^2 x$

$8 \cdot \operatorname{sen}^2 x = 7$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{7}{8}$

$\operatorname{sen} x = \frac{-\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{14}}{4}$, pois $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Temos que $\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(x + 2x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x + \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x$

Porém, como $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(x + x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$

Assim, $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \cos x$

$= \operatorname{sen} x (1 - 2\operatorname{sen}^2 x) + 2\operatorname{sen} x \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x) =$

$= \frac{-\sqrt{14}}{4}\left(1 + 2 \cdot \frac{14}{16}\right) + 2 \cdot \frac{\sqrt{14}}{4}\left(1 - \frac{14}{16}\right) = \frac{\sqrt{14}}{8}$

**17.**

$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta) \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta - 2 \cdot \cos^2(\alpha - \beta) = -1$

$\left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \beta}\right) \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta - 2 \cdot \cos^2(\alpha - \beta) = -1$

$\left(\frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta + \cos \beta \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}\right) \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta - 2 \cdot \cos^2(\alpha - \beta) = -1$

$\cos(\alpha - \beta) - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$

Resolvendo a equação do 1° grau, temos que

$\cos(\alpha - \beta) = 1$ ou $\cos(\alpha - \beta) = \frac{-1}{2}$

$\alpha - \beta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ou $\alpha - \beta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \beta$, pois $\alpha, \beta$ são do 1º quadrante.

Então:

$\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen}\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha + \beta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

ou

$\alpha + \beta + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ ou $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

Pois $\alpha, \beta$ são do 1º quadrante

Com isso, temos:

$\alpha = \beta\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ ou $\alpha = \beta = \frac{\pi}{12}$

ou

$\alpha = \beta$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$

Portanto, $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right)$ ou $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

## Estudo para o Enem

**18.** A

A função cosseno é decrescente no intervalo $[0, \pi]$ e crescente no intervalo $[\pi, 2\pi]$.

Quando temos o mínimo da função cosseno, vem: $\cos\left(\frac{t - 2}{6}\right) \cdot \pi = \cos \pi \rightarrow t = 8$

Quando temos o máximo da função cosseno, vem: $\cos\left(\frac{t - 2}{6}\right) \cdot \pi = \cos 0 \rightarrow t = 2$

Portanto, do mês 0 ao mês 2 e do mês 8 ao mês 12, temos chuva.

Assim, 6 meses de chuva e 6 meses de seca.

Temos a população mínima de 4 000 animais.

A população média é de $\frac{4\,000 + 6\,000}{2} = 5\,000$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**19.** D

Temos que $h_1 = a \cdot \text{sen } 15°$, $h_2 = a \cdot \text{sen } 45°$ e $h_3 = a \cdot \text{sen } 75°$.

Como sen (15°) = sen (45° − 30°) =

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

e sen (75°) = sen (45° + 30°) =

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Assim, $h_3 = a \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$.

Então $h_1 + h_2 = a \cdot \text{sen } 15° + a \cdot \text{sen } 45° =$

$$= a \cdot \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = h_3.$$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**20.** B

O cateto AB mede: $\sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

Como $A\hat{C}B = 60°$: $\text{tg}\,(A\hat{C}B) = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Como $A\hat{M}B = 60° + \alpha$: $\text{tg}\,(60° + \alpha) = \frac{6\sqrt{3}}{3} =$

$= 2\sqrt{3}$

Portanto,

$$\frac{\text{tg } 60° + \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg } 60° \cdot \text{tg } \alpha} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3} + \text{tg } \alpha}{1 - \sqrt{3}\,\text{tg } \alpha} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} + \text{tg } \alpha = 2\sqrt{3} - 6\text{tg } \alpha$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

# 14 TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS II

## Comentários sobre o módulo

Este módulo é dedicado ao estudo das transformações trigonométricas para os casos particulares mais utilizados, como no arco duplo. Também são abordadas transformações em produtos, que podem facilitar a resolução de problemas de ângulos cujo valor da propriedade trigonométrica é desconhecido.

## Para ir além

No link a seguir, você encontra um artigo que explica várias características da navegação à vela utilizando conhecimentos físicos e matemáticos. Disponível em:

<https://www.integrandoconhecimento.com single-post/2016/08/05/A-f%C3%ADsica-da-navega%C3%A7%C3%A3o-%C3%A0-vela>. Acesso em: ago. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** C

Temos que $\cos x = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pois x é um ângulo do 1º quadrante.

Então: $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\operatorname{sen}(2x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen}(4x) - \cos(4x) = \operatorname{sen}(2x + 2x) - \cos(2x + 2x) =$

$= 2 \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x - (\cos^2(2x) - \operatorname{sen}^2(2x)) =$

$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

**8.** D

Temos que $\cos x = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Então,

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Logo, sendo Q″ a projeção ortogonal de Q sobre o eixo das abscissas e CQ′ = 1, temos que $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{QQ''}{CQ''} \rightarrow QQ'' = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Então, a área é $\frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^2 =$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{81} = \frac{65\pi}{324}$.

**9.**

a) $AC^2 = AD^2 + CD^2 = 9x^2 + 4x^2 = 13x^2$

$AC = x\sqrt{13}$ $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 13x^2 - x^2 =$

$= 12x^2$ $AB = 2x\sqrt{13}$

b) $\theta = B\hat{A}C + D\hat{A}C$

$\operatorname{sen}(B\hat{A}C) = \frac{x}{x\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$

$\cos(B\hat{A}C) = \frac{2x\sqrt{3}}{x\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

$\operatorname{sen}(D\hat{A}C) = \frac{2x}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\cos(D\hat{A}C) = \frac{3x}{x\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(B\hat{A}C + D\hat{A}C) =$

$= \frac{\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} + \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{3}{13} + \frac{4\sqrt{3}}{13} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{13}$

**10.** C

No triângulo ABC temos: $AC^2 = AB^2 + BC^2 =$
$= 1^2 + 2^2 = 5 \rightarrow AC = \sqrt{5}$, pois $AC > 0$.

Portanto: $\cos(B\hat{C}A) = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos(B\hat{C}D) = \cos(2B\hat{C}A) = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 = \frac{3}{5}$.

**11.** E

Temos então que

$1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \cos^4\alpha + \ldots =$

$= \frac{1}{1 - \cos\alpha} = 5$.

Logo: $1 - \cos\alpha = \frac{1}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Assim, $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$.

Portanto, $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} = 0{,}96$.

**12.** E

Como $\cos p + \cos q =$

$= 2 \cdot \cos\left(\frac{p + q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$. Fazendo a = 3x, temos: $\cos a + 2\cos 2a + \cos 3a = 0$

$2 \cdot \cos 2a + 2 \cdot \cos\frac{3a + a}{2} \cdot \cos\frac{3a - a}{2} = 0$

$2 \cdot \cos 2a + 2 \cdot \cos 2a \cdot \cos a$ $2 \cdot \cos 2a \cdot (1 + \cos a) = 0$

$\cos 2a = 0$ ou $\cos a = -1$

Então, $\cos 6x = 0$ ou $\cos 3x = -1$.

Logo: $6x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ou $3x = \pi + n\pi$, (n inteiro)

$x = \frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{3} + n\frac{2\pi}{3}$ (n inteiro)

Para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, a soma de todas as soluções distintas é:

$$S = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$$

**13.** D

$\text{sen } 2x \cdot \text{sen } 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$

$\text{sen } 2x \cdot \text{sen } 3x - \cos 2x \cdot \cos 3x = 0$

$\cos (2x + 3x) = 0 \ \cos 5x = 0$

$5\,x = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{10} = \frac{180°}{10} = 18°$

**14.**

Como $\text{sen } x = \frac{24}{25}$

$\cos x = \sqrt{1 - \frac{24^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{49}{625}} = \frac{7}{25}$ pois $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Temos que $\cos 2y = 2 \cdot \cos^2 y - 1$.

Fazendo

$y = \frac{x}{2}$: $\cos x = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \ \frac{-7}{25} = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{25}\right) \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

**15.** C

$\cos 2x + 3 \cos x = -2$

$2 \cdot \cos^2 x - 1 + 3 \cdot \cos x = -2$

$2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \cos x + 1 = 0$

$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$

$\cos x = \frac{-1}{2} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$ ou

$\cos x = -1 \rightarrow x = \pi$

A soma das soluções da equação é igual a

$\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \pi = 3\pi$.

**16.** E

Temos que

$\text{sen } x = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

$\cos^2 x = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

Assim: $\text{cossec } (2x) - \frac{1}{2} \text{tg } x = \frac{1}{2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x}$

$- \frac{\text{sen } x}{2 \cdot \cos x} = \frac{1 - \text{sen}^2 x}{2 \cdot \text{sen} x \cdot \cos x} = \frac{\cos x}{2 \cdot \text{sen } x}$

$\text{cossec } (2x) - \frac{1}{2} \text{tg } x = \frac{\pm (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)}{2 \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2}}$

$= \pm \frac{a^2 - b^2}{4ab}$

**17.**

a) Temos que $\text{sen } \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

então $\text{sen } \frac{\pi}{2n} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{2}}$.

Se $\text{sen } \frac{\pi}{2n} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$, devemos ter:

$\frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{2} \cdot \rightarrow 2 - \sqrt{3} =$

$= 2 - 2 \cdot \cos \frac{\pi}{n} \ 2 \cdot \cos \frac{\pi}{n} = \sqrt{3}$

$\cos \frac{\pi}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $n = 6$.

b) Para $n = 6$, tem-se $\text{sen } \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$.

Assim: $\cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

$\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

b) $\text{sen } \frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{12}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}{2}}$

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2} - \sqrt{6}}}{8}$.

## Estudo para o Enem

**18.** C

A altura do nível 2 em relação ao nível 1 é igual a $h = AB \cdot \text{sen } 40° + BC \cdot \text{sen } 20°$.

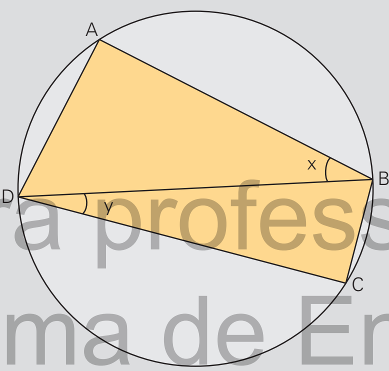
Então, $h = 5 \cdot 2 \cdot \text{sen } 20° \cdot \cos 20° + 8 \cdot \text{sen } 20°$

$h = 10 \cdot 0{,}34 \cdot 0{,}94 + 8 \cdot 0{,}34 = 5{,}916 \cong 5{,}92$ m

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**19.** B



Como DB é um diâmetro, então $D\hat{A}B$ e $D\hat{C}B$ são ângulos retos.

Logo: $AD = 2 \cdot \text{sen } x$ e $AB = 2 \cdot \cos x$.

Então, sua área é $\frac{AB \cdot AD}{2} = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x =$ $= \text{sen } 2x$.

Assim: $CB = 2 \cdot \text{sen } y$ e $CD = 2 \cdot \cos y$.

Então, sua área é $\frac{CD \cdot CB}{2} = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos y =$ $= \text{sen } 2y$.

Portanto, a área da região cinza é:

$\pi \cdot 1^2 - \text{sen } 2x - \text{sen } 2y = \pi - \text{sen } 2x - \text{sen } 2y$

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**20.** D

O período da função f é igual a $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$. Então, $p = \pi$.

Para os pontos A $(0, -3)$ e B $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$, temos:

$f(0) = -3$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Ou seja:

$m + n = -3$

$m - n = -1$

$p_{mn} = \pi^{(-2) \cdot (-1)} = \pi^2$

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

# 15 EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

## Comentários sobre o módulo

O estudo deste módulo é dedicado a equações e inequações trigonométricas, válidas para todo o conjunto dos números reais. Com base nos exemplos, são apresentadas as soluções para as igualdades de seno, cosseno e tangente de arcos com imagens coincidentes ou simétricas. De modo análogo, foram apresentados os principais casos de inequações trigonométricas.

## Para ir além

Conteúdo sobre equações trigonométricas.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. Equação trigonométrica. Brasil Escola. Disponível em:

<https://brasilescola.uol.com.br/matematica/equacao-trigonometrica.htm>.

Acesso em: out. 2018.

## Exercícios propostos

**7.** E

$$\frac{AB \cdot \cos\theta}{2} > \frac{9}{4} \rightarrow \frac{9 \cdot \cos\theta}{2} > \frac{9}{4} \rightarrow \cos\theta > \frac{1}{2}$$

Como $\theta$ é arco do primeiro quadrante, temos que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$.

O domínio da validade de $\theta$ é o conjunto $\left[0; \frac{\pi}{3}\right[$.

**8.** A

O domínio da função f é $(0,2\pi) - \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$, pois $\cos x \neq 0$ e $\operatorname{sen} x \neq 0$.

O domínio da função g é $[0,2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

O domínio da função h é $(0,2\pi) - \{\pi\}$. Assim, $|\sec x| = 1 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = 0$. Como esses pontos não estão no domínio de f, não existem pontos de intersecção entre f e g.

Analogamente, não existem pontos de intersecção entre f e h.

Portanto, entre g e h temos:

$|\sec x| = |\operatorname{cossec} x| \rightarrow |\operatorname{sen} x| = |\cos x| \rightarrow$

$\rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

Então, temos 4 pontos de intersecção entre g e h.

**9.** Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15

16) Incorreto, pois exclui o caso $\operatorname{sen} x = 0$.

**10.**

$\operatorname{sen}^2 x + \cos x = \frac{5}{4} \rightarrow 1 - \cos^2 x + \cos x = \frac{5}{4} \rightarrow$

$\rightarrow \cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4} = 0$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, em $[0,60\pi]$

Há 60 soluções.

**11.** Soma: 04 + 08 + 16 = 28

1) Incorreto, pois $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

2) Incorreto, pois, como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, então $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) > \frac{1}{2}$.

**12.** Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15

16) Falso. O triângulo formado pela pista, o prédio mais a altura de segurança e a rota do avião teria catetos iguais a 350 m (1 000 m – 650 m) – necessários para ganhar velocidade e 250 m. Assim, o ângulo de decolagem será igual a $\operatorname{tg} x = \frac{250}{350} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7} \rightarrow x \neq 30°$.

**13.** C

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen}(x + 2x)}{\operatorname{sen} x} -$$

$$- \frac{\cos(x + 2x)}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos 2x + \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} -$$

$$- \frac{\cos x \cdot \cos 2x - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x + 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x}{\operatorname{sen} x} -$$

$$- \frac{\cos x(2 \cdot \cos^2 x) - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x}{\cos x} =$$

$= 1 - 2 \cdot \operatorname{sen} x + 2 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot$
$\cdot \operatorname{sen}^2 x =$

$= -1 - 2 \cdot \operatorname{sen} x + 2 \cdot \cos^2 x = -1 - 2 \cdot \operatorname{sen} x - 2 +$
$+ 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x = 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x - 2 \cdot \operatorname{sen} x - 3$

Temos que a solução para a equação $2 \cdot \operatorname{sen}^2 x - 2 \cdot \operatorname{sen} x - 3 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} =$

$= \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4}$

O domínio da função é igual aos reais, mas $\operatorname{sen} x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.

$x \neq \frac{k\pi}{2}$

$$f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-3x)}{\operatorname{sen}(-x)} - \frac{\cos(-3x)}{\cos(-x)} = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} =$$

$= f(x)$ (portanto, a função é par)

Dados dois números **a** e **b**, tal que $a \neq b$, temos que $f(a) = f(b)$.

Logo, f não é injetora.

**14.**

Temos que:

- se $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0 \to \frac{\pi t}{6} = 0 \to t = 0$
- se $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 1 \to \frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2} \to t = 3$
- se $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0 \to \frac{\pi t}{6} = \pi \to t = 6$

A sirene soa de três em três horas.

**15.** D

Sejam **x** e **y** os comprimentos do triângulo retângulo:

$x^2 + y^2 = l^2$

$x + y + l = l\sqrt{5}$

$x^2 + y^2 = l^2$

$x^2 + y^2 + 2xy = l^2\,(6 - 2\sqrt{5}\,)$

$x^2 + y^2 = l^2$

$l^2 + 2xy = l^2\,(6 - 2\sqrt{5}\,)$

$2 \cdot x \cdot y = l^2\,(6 - 2\sqrt{5}\,)$

$2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{y}{l} = 5 - 2\sqrt{5}$

$\text{sen}\,(2\beta) = 5 - 2\sqrt{5}$

$\text{sen}^2(2\beta) + \cos^2(2\beta) = 1$

$\cos^2(2\beta) = 1 - (5 - 2\sqrt{5}\,)^2$

$\cos^2(2\beta) = 20\sqrt{5} - 44$

$\cos(2\beta) = -\sqrt{20\sqrt{5} - 44}$, pois $\alpha < \beta$

$\text{sen}\,(\beta - \alpha) = \text{sen}\,(\beta - (90° - \beta))$

$= \text{sen}\,(2\beta - 90°) = -\cos\,(2\beta) = -\sqrt{20\sqrt{5} - 44} =$

$= \sqrt{20\sqrt{5} - 44}$

**16.** E

**17.**

$\text{sen}\,\theta \cdot \cos\,\theta \cdot (\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta) = \frac{1}{4}$

$2 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \cos\,\theta \cdot (-\cos\,2\theta) = \frac{1}{2}$

$\text{sen}\,2\theta \cdot \cos\,2\theta = \frac{-1}{2}$

$2 \cdot \text{sen}\,2\theta \cdot \cos\,2\theta = -1$

$\text{sen}\,4\theta = -1$

$4\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

## Estudo para o enem

**18.** C

$f(x) = 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) =$

$= 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) =$

$= 3\,\frac{1}{2}\,\text{sen}\left(2\frac{\pi x}{4}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Assim, $f(x) = \frac{3}{2}\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**19.** D

Dada a função $y = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$. O período é dado por $\frac{2\pi}{c}$.

O maior coeficiente de t é $\frac{\pi}{2}$, portanto corresponde ao menor período.
A maior amplitude é 4.

**Competência**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade**: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**20.** B

Temos que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) = 1$.

$\frac{\pi}{12}\,t + \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\frac{t}{12} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 2k$

$\frac{t}{6} + 3 = 1 + 4k$

$t = 24\,k - 12$

Como $t \in [0,24]$
Para $k = 0$, temos $t = -12$ (não convém).
Para $k = 1$, temos $t = 12$ (convém).
Para $k = 2$, temos $t = 36$ (não convém).

Portanto, $t = 12$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

# 16 INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

## Comentários sobre o módulo

O estudo deste módulo é dedicado às inequações trigonométricas, válidas para todo o conjunto dos números reais. Com base nos exemplos, são apresentados os principais casos de inequações trigonométricas e suas soluções para as desigualdades de seno, cosseno e tangente de arcos, com as respectivas imagens.

## Para ir além

O livro *Funções trigonométricas – Elementos "de" & "para" uma engenharia didática* aborda conceitos práticos computacionais para a compreensão das funções trigonométricas com base no estudo da função f(x) = a + b sen (cx + d) como típica de funções trigonométricas em geral. A motivação do autor para a pesquisa foi a relação entre os gráficos das funções seno e cosseno com as ondas eletromagnéticas medidas num osciloscópio.

## Exercícios propostos

**7.** A

Temos que a tangente do ângulo x é positiva nos quadrantes 1 e 3. Logo, como $x \in [-\pi, \pi] - \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$,

temos os intervalos $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ou seja, $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ e $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

**8.** D

$2 \cos x \leq 1 \cos x \leq \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3} \leq x \leq 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$

**9.**

$\frac{1}{4} \leq \cos x \cdot \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{1}{2} \leq 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{8}$

$S = \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}\right]$.

**10.** A

Temos que cos x ≠ 0, portanto $x \neq \frac{\pi}{2}$

Assim, $\sqrt{2} \cdot \cos^2 x - \cos x > 0$.

$\cos x \cdot (1 - \sqrt{2} \cdot \cos x) < 0$

$\cos x < 0$ ou $1 - \sqrt{2} \cdot \cos x < 0$

$\cos x > \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Fazendo o quadro de sinais temos que $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ou $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

**11.** D

Temos que $f(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x}}$,

temos que $\operatorname{sen} x \neq 0 \rightarrow x \neq 2k\pi$

$f(x) = \sqrt{2 \cdot \cos x}$

Temos que $2 \cdot \cos x > 0$.

$\cos x > 0$

$0 + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e

$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**12.** Soma: 04 + 16 = 20

1) Incorreto, pois $0 \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} < \cos \frac{\pi}{6}$.

2) Incorreto, pois $\operatorname{sen} 2y = 2 \cdot \operatorname{sen} y \cdot \cos y$.

Fazendo $y = \frac{x}{2}$:

$\operatorname{sen} x = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \frac{x}{2} =$

$= 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \rightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{2\pi}{3}$.

8) Incorreto, pois temos que, para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sen x < x.

**13.** C

$\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \leq 0$ ou $\operatorname{sen} x - 2 \leq 0 \rightarrow \operatorname{sen} x \leq 2 \rightarrow x \in \mathbb{R}$

$\text{sen } x < \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

**14.**

a) $\text{sen}(3\alpha) = \text{sen}(\alpha + 2\alpha) = \text{sen } \alpha \cdot \cos 2\alpha +$
$+ \text{sen } 2\alpha \cdot \cos \alpha$
$= \text{sen } \alpha \cdot (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) + 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos^2\alpha$
$= 3 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos^2\alpha - \text{sen}^3\alpha$
$= 3 \cdot \text{sen } \alpha - 3 \cdot \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^3\alpha$
$= 3 \cdot \text{sen } \alpha - 4 \cdot \text{sen}^3\alpha$

b) $\text{sen } 3\alpha > 2 \cdot \text{sen } \alpha$.
$3 \cdot \text{sen } \alpha - 4 \cdot \text{sen}^3\alpha > 2 \cdot \text{sen } \alpha\ 3$
$4 \cdot \text{sen}^3 \alpha - \text{sen } \alpha < 0$.
$\text{sen } \alpha \cdot (4 \cdot \text{sen}^2\alpha - 1) < 0$
$\text{sen } \alpha < 0$ ou $4 \cdot \text{sen}^2\alpha - 1 > 0$

$\text{sen}^2\alpha > \frac{1}{4}$

$0 < \text{sen } \alpha < \frac{1}{2}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \pi$

$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid 0 < \alpha < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < \alpha < \pi\right\}$

**15.** B

$0 < \frac{2 \cdot \text{sen}^2 x + \text{sen } 2x}{1 + \text{tg } x} < 1$

$0 < \frac{2 \cdot \text{sen}^2 x + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x}{1 + \text{tg } x} < 1$

$0 < \frac{2 \cdot \text{sen } x \cdot (\text{sen } x + \cos x)}{1 + \text{tg } x} < 1$

$0 < 2 \cdot \text{sen } x \cdot (\text{sen } x + \cos x) < 1 + \text{tg } x$

$0 < 2 \cdot \text{sen } x \cdot (\text{sen } x + \cos x) < 1 + \frac{\text{sen } x}{\cos x}$

$0 < 2 \cdot \text{sen } x \cdot (\text{sen } x + \cos x) < \frac{\cos x + \text{sen } x}{\cos x}$

$0 < 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x < 1$

$0 < \text{sen } 2x < 1$

$0 < 2x < \frac{\pi}{2}$

$0 < x < \frac{\pi}{4}$

**16.** A

$2 \cdot \cos^2 x + \cos 2x > 2$

$2 \cdot \cos^2 x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x > 2$

$2 \cdot \cos^2 x + 2 \cdot \cos^2 x - 1 > 2$

$4 \cdot \cos^2 x > 3$

$\cos^2 x > \frac{3}{4}$

$\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ou seja, $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$.

**17.** a) Temos então que um ângulo de $T_2 = 45°$.

Portanto, seus catetos valem $1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim, a área vale $A_{T_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

b) $A_{T_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \text{sen } \alpha \cdot 1 \cdot \cos \alpha = \frac{\text{sen } 2\alpha}{4}$

$A_{T_1} = \frac{\text{sen } 2\alpha}{4}$

$A_{T_2} = \frac{1}{2} \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{\text{sen } 4\alpha}{4}$

$A_{T_1} < A_{T_2}$

$\frac{\text{sen } 2\alpha}{4} < \frac{\text{sen } 4\alpha}{4}$

$\text{sen } 2\alpha < 2 \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$

$1 < 2 \cdot \cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha > \frac{1}{2}$

$2\alpha > \frac{\pi}{3}$

Como $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ e a função cosseno é decrescente

$0 < 2\alpha < \frac{\pi}{3}$, logo $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$.

## Estudo para o Enem

**18.** E

Temos que $-1 \leq \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{360}\right) \leq 1$.

Logo, $750 \leq p\ (t) \leq 1\,250$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

**19.** D

$T(12) = 50 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi \cdot 12}{37}\right) - 30 =$

$= 50 \cdot \text{sen}\left(\frac{36}{37}\pi\right) - 30 \neq 20\ °C$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

**20.** A

Temos que $-1 \leq \text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{3}\right) \leq 1$.

Logo, $-1 \leq 1 - 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{3}\right) \leq 3$.

Assim, o conjunto imagem de f(x) é [–1, 3].

Seu período é $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$.

**Competência:** Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Habilidade:** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

## Exercícios interdisciplinares

**21.** $f(t_0) = g(t_0)$

$20 \cos\left[\pi(t_0 + 1)\right] = 2^{2-t_0} \cos\left[\pi(t_0 + 1)\right]$, supondo

$\cos\left[\pi(t_0 + 1)\right] \neq 0$,.

Segue então que:

$$\frac{20}{20^{2-t_0}} = 1$$

$20^{t_0 - 1} = 20^0$

Logo, $t_0 = 1$.

Então:

$f(1) - 20 \cos\left[\pi\ (1+1)\right] = 20$

Portanto, para $t_0 = 1$ tem-se $f(t_0) = g(t_0)$. Nesse instante, o joão-bobo não está em equilíbrio.

**22.** a) Para o cálculo da área colorida, temos:

$r_1 = \frac{12}{2} = 6$ mm e $r_2 = \frac{812}{2} = 4$ mm

$A = \pi \cdot \left(r_1^2 - r_2^2\right) = \pi \cdot \left(6^2 - 4^2\right)$

Portanto, $A \cong 62$ mm².

b) Para o cálculo do ponto próximo de uma pessoa que tem hipermetropia com variação de 2,5 di, temos:

$V = \frac{1}{d_N} - \frac{1}{d_H}$

V = vergência (di)

dN = distância mínima de visão para o olho normal (25 cm = 0,25 m)

dH = distância mínima de visão para o olho hipermétrope

$2{,}5 = \frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{d_H} \rightarrow \frac{1}{d_H} = 4 - 2{,}5 = 1{,}5 \rightarrow dH = \frac{1}{1{,}5}$

Portanto, dH ≅ 0,667 m.

**23.** D

Inicialmente a água entra no reservatório 1 e o enche linearmente. Logo, temos uma reta no gráfico até a água começar a encher o reservatório 2. Em seguida, a água vai enchendo o reservatório 2. Então, o volume do reservatório 1 não vai aumentar até que o reservatório 2 esteja cheio. Assim, depois de certo tempo, os dois reservatórios encherão com a mesma velocidade, ou seja, uma reta também.

**Competência:** Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

**Habilidade:** Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.