Triângulos e Ângulos na Circunferência

Competência(s): 2

Habilidade(s): 6, 7, 8 e 9

AULAS 3 E 4

Você deve saber!

- Triângulos
- Classificação
- Ângulos em um triângulo
- Informações complementares dos triângulos
- Circunferência
- Posições relativas entre reta e circunferência
- Posições relativas entre duas circunferências
- Ângulos na circunferência
- Inscrição e circunscrição de polígonos na circunferência

Mapeando o saber

ÂNGULOS EM UM TRIÂNGULO E ÂNGULOS NUMA CIRCUNFERÊNCIA

LEMBRE-SE DAS CLASSIFICAÇÕES DOS TRIÂNGULOS

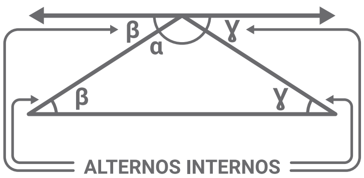
QUANTO AOS LADOS

- **EQUILÁTERO** = 3 LADOS IGUAIS
- **ISÓSCELES** = 2 LADOS IGUAIS
- **ESCALENO** = 3 LADOS DIFERENTES

QUANTO AOS ÂNGULOS

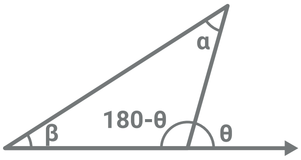
- **RETÂNGULO** = 1 ÂNGULO DE 90°
- **ACUTÂNGULO** = 3 ÂNGULOS INTERNOS AGUDOS
- **OBTUSÂNGULO** = 1 ÂNGULO OBTUSO (MAIOR QUE 90°)

ÂNGULOS EM UM TRIÂNGULO



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS

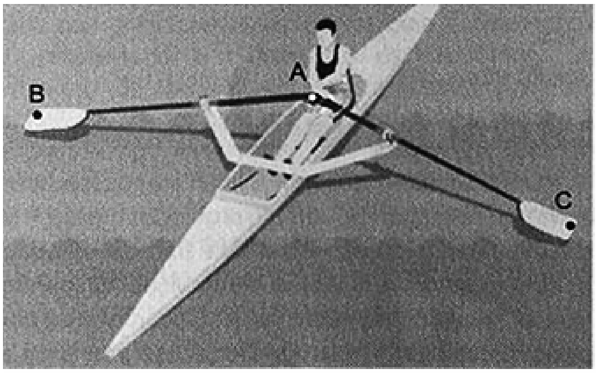


$\alpha + \beta = \theta$ — ÂNGULOS EXTERNOS: SOMA DOS DOIS ÂNGULOS INTERNOS NÃO ADJACENTES A ELE

ANOTAÇÕES

Exercícios de sala

1. (ENEM) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho.
A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.

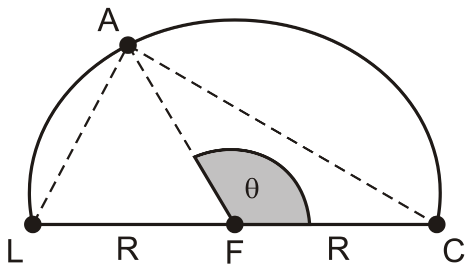


Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos B e C. Esses três pontos formam um triângulo ABC cujo ângulo BÂC tem medida de 170°.
O tipo de triângulo com vértices nos pontos A, B e C, no momento em que o remador está nessa posição, é

a) retângulo escaleno.
b) acutângulo escaleno.
c) acutângulo isósceles.
d) obtusângulo escaleno.
e) obtusângulo isósceles.

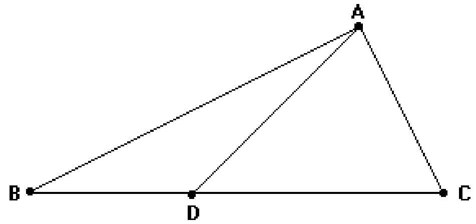
2. (ENEM PPL) Durante seu treinamento, um atleta percorre metade de uma pista circular de raio R, conforme figura a seguir. A sua largada foi dada na posição representada pela letra L, a chegada está representada pela letra C e a letra A representa o atleta. O segmento LC é um diâmetro da circunferência e o centro da circunferência está representado pela letra F. Sabemos que, em qualquer posição que o atleta esteja na pista, os segmentos LA e AC são perpendiculares. Seja θ o ângulo que o segmento AF faz com segmento FC.



Quantos graus mede o ângulo θ quando o segmento AC medir R durante a corrida?

a) 15 graus
b) 30 graus
c) 60 graus
d) 90 graus
e) 120 graus

3. (UFMG) Observe a figura a seguir. Nessa figura, AD = BD, $\hat{C} = 60°$ e $D\hat{A}C$ é o dobro de $\hat{B}$.
A razão $\frac{AC}{BC}$ é igual a



a) $\frac{1}{3}$

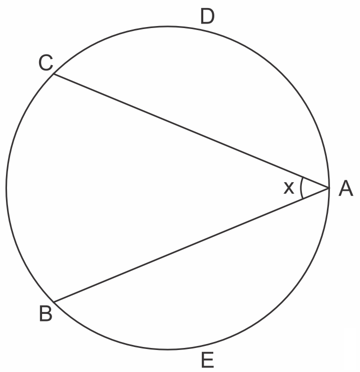
b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{(\sqrt{3})}{3}$

d) $\frac{(\sqrt{2})}{2}$

e) $\frac{(\sqrt{3})}{2}$

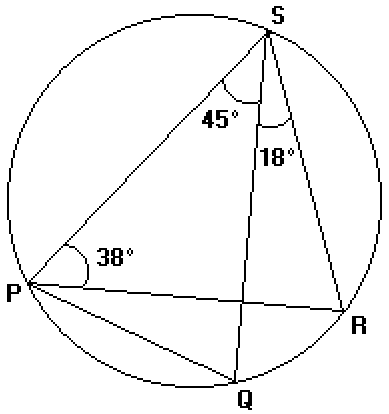
4. (G1 - CFTMG) A figura a seguir mostra uma circunferência, em que os arcos ADC e AEB são congruentes e medem 160° cada um.



A medida, em graus, do ângulo X, é

a) 10°.
b) 20°.
c) 30°.
d) 40°.

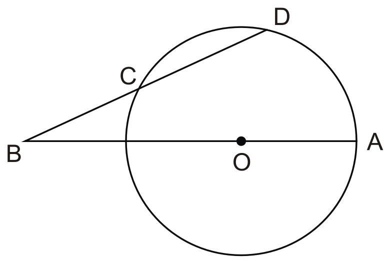
5. **(UFMG)** Observe a figura.



Suponha que as medidas dos ângulos PSQ, QSR, SPR, assinalados na figura, sejam 45°, 18° e 38°, respectivamente. A medida do ângulo PQS, em graus, é:

a) 38
b) 63
c) 79
d) 87

6. **(MACKENZIE)** Na figura, se a circunferência tem centro O e BC = OA, então a razão entre as medidas dos ângulos AÔD e CÔB é



a) $\frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{2}$

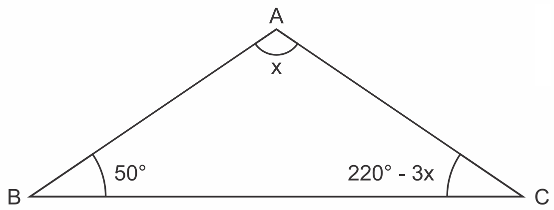
c) 2

d) $\frac{4}{3}$

e) 3

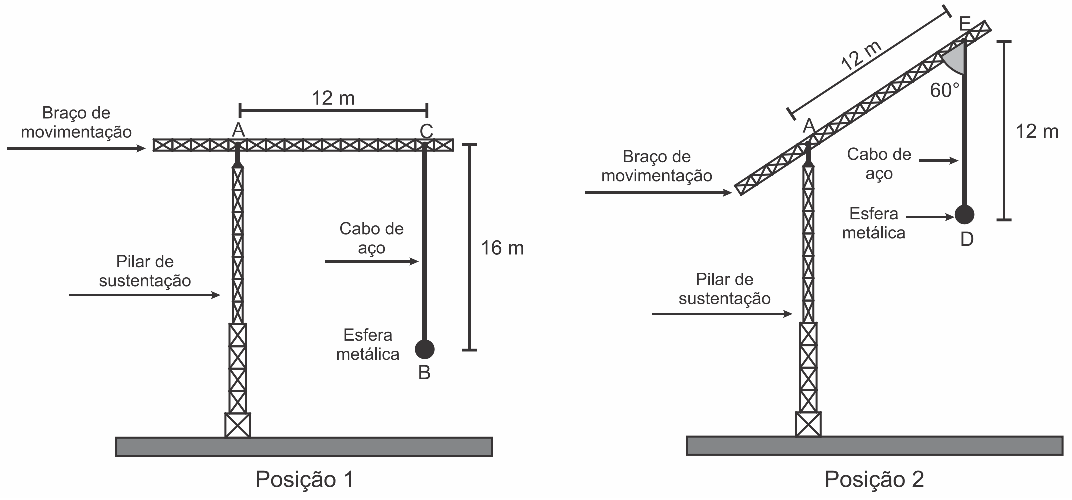
Estudo individualizado (E.I.)

1. **(UNICAMP INDÍGENAS)** Sabendo o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo, podemos afirmar que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ do triângulo ABC na figura abaixo valem, respectivamente:



a) 45° e 85°.
b) 40° e 70°.
c) 35° e 55°.
d) 50° e 100°.

2. **(Enem digital)** Considere o guindaste mostrado nas figuras, em duas posições (1 e 2). Na posição 1, o braço de movimentação forma um ângulo reto com o cabo de aço CB que sustenta uma esfera metálica na sua extremidade inferior.
Na posição 2, o guindaste elevou seu braço de movimentação e o novo ângulo formado entre o braço e o cabo de aço ED, que sustenta a bola metálica, é agora igual a 60°.



Assuma que os pontos A, B e C, na posição 1, formam o triângulo T_1 e que os pontos A, D e E, na posição 2, formam o triângulo T_2, os quais podem ser classificados em obtusângulo, retângulo ou acutângulo, e também em equilátero, isósceles ou escaleno.

Segundo as classificações citadas, os triângulos T_1 e T_2 são identificados, respectivamente, como

a) retângulo escaleno e retângulo isósceles.
b) acutângulo escaleno e retângulo isósceles.
c) retângulo escaleno e acutângulo escaleno.
d) acutângulo escaleno e acutângulo equilátero.
e) retângulo escaleno e acutângulo equilátero.

3. **(UFRGS)** Em um triângulo ABC, $B\hat{A}C$ é o maior ângulo e $A\hat{C}B$ é o menor ângulo. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é 70° maior que a medida de $A\hat{C}B$. A medida de $B\hat{A}C$ é o dobro da medida de $A\hat{B}C$.

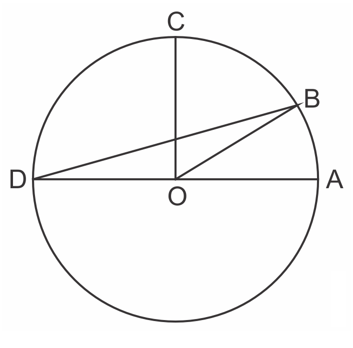
Portanto, as medidas dos ângulos são

a) 20°, 70° e 90°.
b) 20°, 60° e 100°.
c) 10°, 70° e 100°.
d) 30°, 50° e 100°.
e) 30°, 60° e 90°.

4. **(UFJF-PISM)** Numa circunferência, considere três pontos distintos A, B e C da mesma. Sabe-se que $\overline{BC}$ é um diâmetro da circunferência e que o ângulo ∠(ABC) mede 60 graus. Determine a medida (em graus) do ângulo ∠(ABC).

a) 15°
b) 30°
c) 45°
d) 60°
e) 90°

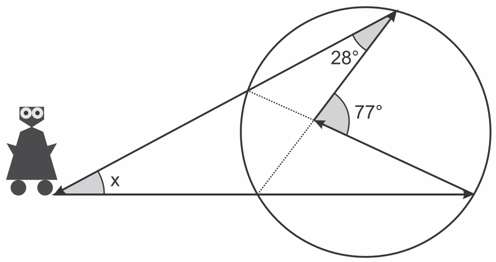
5. **(PUCRJ)** No círculo de centro O, seja AD um diâmetro. Sejam B e C tais que $\overset{\frown}{AOC} = 90°$ e $\overset{\frown}{AOB} = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{BOC}$.



Assinale o valor de $\overset{\frown}{ODB}$

a) 12°
b) 15°
c) 18°
d) 22,5°
e) 30°

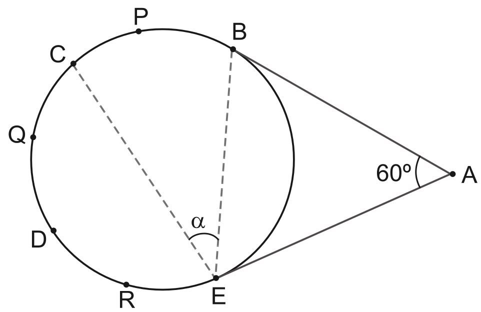
6. **(G1 - IFPE)** Em uma olimpíada de robótica, o robô BESOURO caminha de fora do círculo de manobras e, após se apresentar, retorna ao ponto inicial conforme a figura a seguir.



Considerando que o caminho percorrido pelo robô está indicado pelas setas, qual o ângulo x formado entre o caminho de saída e o caminho de retorno do robô ao ponto inicial?

a) 28°
b) 22°
c) 21°
d) 49°
e) 56°

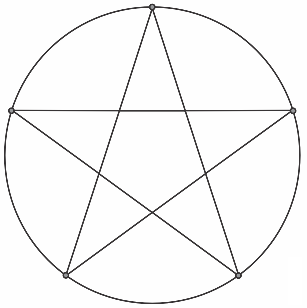
7. **(FGV)** Na figura, AB e AE são tangentes à circunferência nos pontos B e E, respectivamente, e $B\hat{A}E = 60°$.



Se os arcos $\overset{\frown}{BPC}$, $\overset{\frown}{CQD}$ e $\overset{\frown}{DRE}$ têm medidas iguais, a medida do ângulo $B\hat{E}C$, indicada na figura por α, é igual a

a) 20°
b) 40°
c) 45°
d) 60°
e) 80°

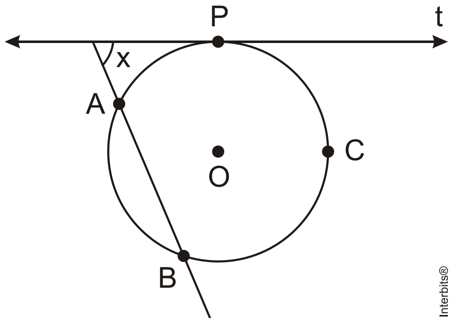
8. (G1 - IFPE) Uma garota, com o objetivo de desenhar uma estrela de cinco pontas, utilizou uma circunferência para servir de apoio, como na figura.



Depois de construir o polígono desejado, ela observou que a soma dos ângulos nas pontas da estrela era de

a) 90°.
b) 540°.
c) 360°.
d) 240°.
e) 180°.

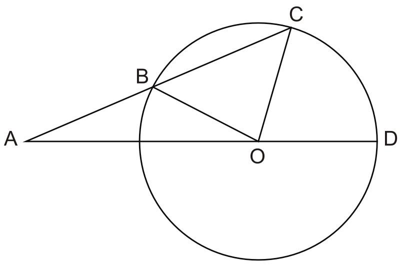
9. (G1 - IFSP) Na figura, a reta t é tangente, no ponto P, ao círculo de centro O. A medida do arco $\widehat{AB}$ é 100° e a do arco $\widehat{BCP}$ é 194°. O valor de x, em graus, é



a) 53.
b) 57.
c) 61.
d) 64.
e) 66.

10. (FUVEST) Na figura, B, C e D são pontos distintos da circunferência de centro O, e o ponto A é exterior a ela. Além disso,

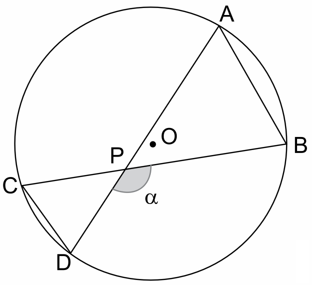
(1) A, B, C, e A, O, D, são colineares;
(2) AB = OB;
(3) $C\hat{O}D$ mede α radianos.



Nessas condições, a medida de $A\hat{B}O$, em radianos, é igual a:

a) $\pi - (\alpha/4)$
b) $\pi - (\alpha/2)$
c) $\pi - (2\alpha/3)$
d) $\pi - (3\alpha/4)$
e) $\pi - (3\alpha/2)$

11. (FGV) As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência de centro O são, respectivamente, lados de polígonos regulares de 6 e 10 lados inscritos nessa circunferência. Na mesma circunferência, as cordas AD e BC se intersectam no ponto P, conforme indica a figura a seguir.



A medida do ângulo $B\hat{P}D$, indicado na figura por α, é igual a

a) 120°.
b) 124°.
c) 128°.
d) 130°.
e) 132°.

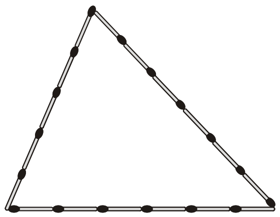
12. (UECE) No triângulo OYZ, os lados OY e OZ têm medidas iguais. Se W é um ponto do lado OZ tal que os segmentos YW, WO e YZ têm a mesma medida, então, a medida do ângulo $Y\hat{O}Z$ é

a) 46°.
b) 42°.
c) 36°.
d) 30°.

13. (UECE) No triângulo isósceles XOZ, cuja base é o segmento XZ, considere os pontos E e U respectivamente nos lados OZ e XZ, tais que os segmentos OE e OU sejam congruentes. Se a medida do ângulo XOU é 48 graus, então, a medida do ângulo ZÛE, é igual a

a) 24°.
b) 22°.
c) 28°.
d) 26°.

14. (ENEM) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

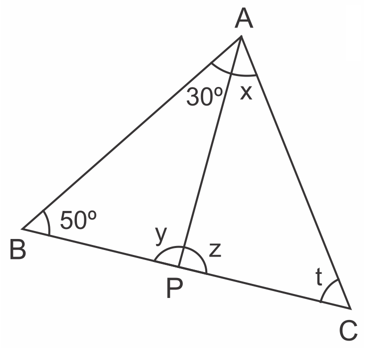
a) 3.
b) 5.
c) 6.
d) 8.
e) 10.

15. (UECE) Sejam UVW um triângulo isósceles com base VW; E e F dois pontos nos lados UV; e UW, respectivamente, tais que as medidas dos segmentos de reta VW, WE, EF e FU são iguais.

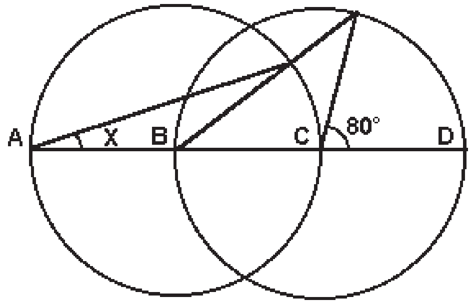
Nessas condições, pode-se afirmar corretamente que a medida do ângulo VÛW é

a) menor do que 21°.
b) maior do que 21° e menor do que 25°.
c) maior do que 25° e menor do que 27°.
d) maior do que 27° e menor do que 32°.

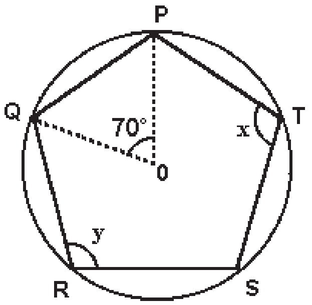
16. (G1) PA é bissetriz do triângulo ABC. Determine x, y, z, t.



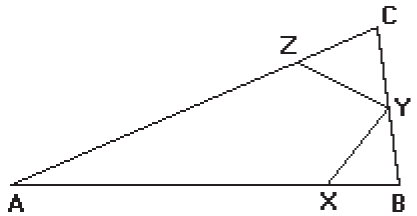
17. (G1) Sabendo que os pontos B e C são centros, calcule o valor de x na figura a seguir



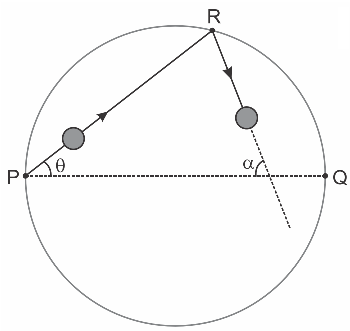
18. Seja o pentágono PQRST da figura, inscrito na circunferência de centro 0. Sabe-se que POQ mede 70°. Chamando de x e y os ângulos PTS e QRS, respectivamente, determine x + y.



19. Na figura adiante, AB = AC, BX = BY e CZ = CY. Se o ângulo Â mede 40°, determine a medida do ângulo XYZ.



20. (Fuvest) Uma bola de bilhar, inicialmente em repouso em um ponto P, situado na borda de uma mesa de bilhar com formato circular, recebe uma tacada e se desloca em um movimento retilíneo. A bola atinge a borda no ponto R e é refletida elasticamente, sem deslizar. Chame de Q o ponto da borda diametralmente oposto a P e de θ a medida do ângulo $Q\hat{P}R$.



a) Para qual valor de θ, após a primeira reflexão, a trajetória da bola será paralela ao diâmetro $\overline{PQ}$?

b) Para qual valor de θ, após a primeira reflexão, a trajetória da bola será perpendicular a $\overline{PQ}$?

c) Supondo agora que $30° < \theta < 60°$, encontre uma expressão, em função de θ, para a medida a do ângulo agudo formado pela reta que contém P e Q e pela reta que contém a trajetória da bola após a primeira reflexão na borda.

Gabarito

1. A	**2.** E	**3.** B	**4.** B	**5.** B
6. C	**7.** B	**8.** E	**9.** D	**10.** C
11. E	**12.** C	**13.** A	**14.** A	**15.** C

16.

$x = 30°$; $y = 100°$; $z = 80°$; $t = 70°$.

PA é bissetriz
$x = 30°$
$z = 30° + 50° = 80°$ (ângulo externo do triângulo ABP)
$y = 180° - 30° - 50° = 100°$
$t = 180° - 30° - 80° = 70°$

17.

$x = 20°$

18.

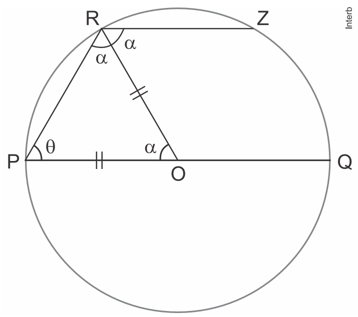
$x + y = 215°$

19.

70°

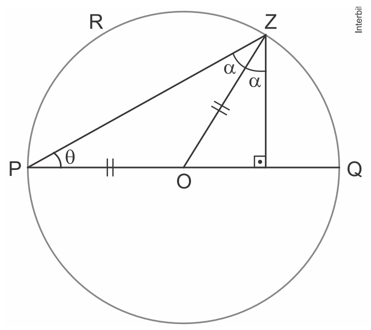
20.

a) Como a bola atinge a borda no ponto R e é refletida elasticamente, sem deslizar, pode-se concluir que o ângulo $P\hat{R}O \cong O\hat{R}Z = \alpha$. Pelos fundamentos da geometria plana, sabe-se que o ângulo $P\hat{O}R$ também é igual a α. Como os segmentos OP e OR são iguais (raio da circunferência), pode-se concluir que o ângulo θ também será igual a α. Assim, todos os ângulos do triângulo PRO são igual, fazendo deste um triângulo equilátero. Logo, $\alpha = \theta = 60°$. Caso $\theta = 0°$, após a primeira reflexão a trajetória também será paralela ao diâmetro PQ.



b) Analisando a figura a seguir, como PO e OZ são segmentos iguais (ambos são iguais ao raio da circunferência), pode-se concluir que o ângulo θ será igual a α. Assim, pode-se escrever sobre o triângulo retângulo:

$3\alpha + 90 = 180 \rightarrow 3\alpha = 90 \rightarrow \alpha = \theta = 30°$



c) Analisando a figura a seguir, pode-se escrever:

$\alpha + 3\theta = 180 \rightarrow \alpha = 180 - 3\theta$, para $30° < \theta < 60°$