Gabarito

Resposta da questão 1:
[A]

Como $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1,$ vem

$$\begin{aligned} z &= i^{2014} - i^{1987} \\ &= i^{4\cdot 503+2} - i^{4\cdot 496+3} \\ &= (i^4)^{503} \cdot i^2 - (i^4)^{496} \cdot i^3 \\ &= -1 + i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|z| = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Resposta da questão 2:
[B]

Tem-se que

$$z = \frac{1+ai}{a-i} = \frac{1+ai}{a-i} \cdot \frac{a+i}{a+i} = \frac{a+i+a^2i-a}{a^2+1} = i.$$

Portanto, o valor de z^{2016} é $i^{2016} = i^0 = 1.$

Resposta da questão 3:
[C]

Sabendo que
$i^5 = i^4 \cdot i = (i^2)^2 \cdot i = (-1)^2 \cdot i = i,$
vem

$$\begin{aligned} (1-i)^{10} &= [(1-i)^2]^5 \\ &= (1-2i+i^2)^5 \\ &= (-2i)^5 \\ &= (-2)^5 \cdot i^5 \\ &= -32i. \end{aligned}$$

Resposta da questão 4:
[C]

x = $\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{i^2+2i-i^2}{1^2-i^2} \frac{2i}{2} = i$ e y = 2i

$(x+y)^2 = (i + 2i)^2 = (3i)^2 = 9i^2 = -9$

Resposta da questão 5:
[B]

Do enunciado, temos:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$
$$x = \frac{4 \pm 6i}{2}$$
$$x = 2 \pm 3i$$

Logo, a parte real das raízes complexas é 2.

Resposta da questão 6:
[E]

$$(9+3i) \cdot (-2+i) = -18 + 9i - 6i + 3i^2 = -18 + 3i + 3 \cdot (-1) = -21 + 3i$$

Resposta da questão 7:
[E]

Queremos calcular o produto $z \cdot w$, ou seja,

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (-3+4i)(2-13i) \\ &= -6 + 9i + 8i - 12i^2 \\ &= 6 + 17i. \end{aligned}$$

Resposta da questão 8:
[A]

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} \to \rho = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \theta = 45°$$
$$\text{sen}\ \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \theta = 45°$$
$$Z = \sqrt{2}\cdot(\cos 45° + i\cdot \text{sen}\ 45°) = 2^{1/2}\cdot(\cos 45° + i\,\text{sen}\ 45°)$$

Resposta da questão 9:
[E]

[I] deve ser relacionada com a letra D, pois $\sqrt{7}^3 = 7\sqrt{7}$ (irracional)
[II] deve ser relacionado com a letra C, pois $\frac{9}{2}\cdot\log_{\sqrt{2}} 2 = \frac{9}{2}\cdot 2 = 9$ (racional)
[III] deve ser relacionado com a letra B, pois $2i$ é imaginário puro.
[IV] deve ser relacionado com a letra A, pois $\frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{3}\cdot i}{2} = \frac{1^2+3}{4} = 1$

Logo, a opção correta será dada por:
[E] I-D, II-C, III-B, IV-A

Resposta da questão 10:
[E]

$$z = \left(\frac{2}{1-i}\right)^4 = \frac{16}{[(1-i)^2]^2} = \frac{16}{(-2i)^2} = -4$$

$$|\,z\,| = |\,-4\,| = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{-4}{4} = -1 \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{0}{4} = 0 \end{array}\right\rangle\ \theta = \pi$$

Resposta da questão 11:
[E]

$|z| = \sqrt{(-1)^1 + \sqrt{3^2}} = \sqrt{1+3} = 2$

Portanto:

$z = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

Portanto o argumento principal do complexo é $\frac{2\pi}{3}$

Resposta da questão 12:
[E]

Tem-se que

$$\begin{aligned}(2+i)^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 \\ &= 8 + 12i - 6 - i \\ &= 2 + 11i.\end{aligned}$$

Resposta da questão 13:
[D]

Calculando a soma dos 2014 termos de uma P.G de primeiro termo 1 e razão i, temos:

$i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2013} = \frac{1.(i^{2014} - 1)}{i-1} = \frac{i^2 - 1}{i-1} = \frac{-2}{i-1} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)} = i+1$

Resposta da questão 14:
[D]

Se $z = a + bi,$ com a e b reais, então $\bar{z} = a - bi.$ Desse modo,

$$\begin{aligned}z + 2\bar{z} = 2 - zi &\Leftrightarrow a + bi + 2 \cdot (a - bi) = 2 - (a + bi) \cdot i \\ &\Leftrightarrow 3a - bi = (b+2) - ai.\end{aligned}$$

Logo, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 3a = b + 2 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Portanto, o número complexo z que satisfaz a condição dada é $z = 1 + i.$

Resposta da questão 15:
[C]

Sabemos que:

$$227 = 56 \cdot 4 + 3$$
$$6 = 1 \cdot 4 + 2$$
$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

Portanto,

$$5 \cdot i^{227} + i^{6} - i^{13} = 5 \cdot i^{3} + i^{2} - i = -5i - 1 - i = -6i - 1$$

Resposta da questão 16:
[D]

Suponha que $z = a + bi,$ então $\overline{z} = a - bi.$

Logo, $5(a + bi) + (a - bi) = 12 + 16i \Rightarrow 6a + 4bi = 12 + 16i \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$

Portanto,

$z = 2 + 4i.$

Resposta da questão 17:
[A]

O polinômio em questão possui três raízes. Se $a + bi$ é raiz, $a - bi$ também será. O polinômio também admite raiz $1,$ pois $P(1) = 1 - 3 + 7 - 5 = 0.$ Assim, aplicando-se Briot-Ruffini, pode-se escrever:

	1	-3	7	5
1	1	-2	5	0

Interbits®

$$P(x) = x^{3} - 3x^{2} + 7x - 5$$
$$P(1) = 0$$
$$\text{Briot} - \text{Ruffini} \to x^{2} - 2x + 5 = 0 \to \begin{cases} x' = 1 - 2i \\ x'' = 1 + 2i \end{cases}$$
$$\xi = 1 + 2i \to \xi^{3} = (1 + 2i)^{3} = 1 + 6i - 12 - 8i \to \xi^{3} == -11 - 2i$$

Assim, a parte real de ξ^{3} é igual a $-11.$

Resposta da questão 18:
[E]

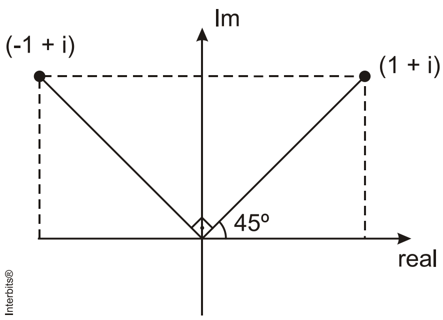
$$z=\frac{1+(3i)^2}{1-i}$$
$$z=\frac{1+9i^2}{1-i}$$
$$z=\frac{1-9}{1-i}$$
$$z=\frac{-8}{1-i}$$
$$z=\frac{-8}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}$$
$$z=\frac{-8-8i}{1^2-i^2}$$
$$z=\frac{-8-8i}{2}$$
$$z=-4-4i$$
$$\text{Re}(z)=-4$$

Resposta da questão 19:
[A]

$$\frac{a}{3}-\frac{b}{5}i=1^4\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{4\pi}{6}\right)$$
$$\frac{a}{3}-\frac{b}{5}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}$$
$$\frac{a}{3}-\frac{b}{5}i=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\frac{a}{3}=-\frac{1}{2}\therefore a=-\frac{3}{2}$$
$$-\frac{b}{5}=\frac{\sqrt{3}}{2}\therefore b=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Então,
$$\frac{a}{b}=-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{5\sqrt{3}}\right)$$
$$\frac{a}{b}=\frac{3}{5\sqrt{3}}$$
$$\frac{a}{b}=\frac{3}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{5}$$

Resposta da questão 20:
[E]



O complexo obtido com a rotação de 90° de 1 + i é z = –1 + i

Fazendo: $(-1 + i)^3$, temos:

$z^3 = (i - 1)^3 = i^3 - 3.i^2.1 + 3.i.1^2 - 1^3 = -i + 3 + 3i - 1 = 2 + 2i$

Resposta da questão 21:
[C]

$$(1+i)^{20} = ((1+i)^2)^{10} = (1+2i+i^2)^{10} = (2i)^{10} = 1024.i^2$$
$$(1-i)^{20} = ((1-i)^2)^{10} = (1-2i+i^2)^{10} = (-2i)^{10} = 1024.i^2$$
$$\text{logo } (1+i)^{20} - (1-i)^{20} = 0$$

Resposta da questão 22:
[A]

De $\dfrac{2+i}{\beta+2i}$,

$$\frac{2+i}{\beta+2i}\cdot\frac{\beta-2i}{\beta-2i}$$
$$\frac{2\beta-4i+\beta i-2i^2}{\beta^2-(2i)^2}$$
$$\frac{(2\beta+2)+(\beta-4)i}{\beta^2+4}$$
$$\frac{2\beta+2}{\beta^2+4}+\frac{\beta-4}{\beta^2+4}i$$
$$\frac{\beta-4}{\beta^2+4}=0$$
$$\beta=4$$

Resposta da questão 23:
[D]

$$\frac{5+5i}{2-2i}=\frac{5\cdot(1+i)}{2\cdot(1-i)}\cdot\frac{(1+i)}{(1+i)}=\frac{5\cdot\left(1+2i+i^2\right)}{2\cdot\left(1-i^2\right)}=\frac{5i}{2}$$
$$\rho=\sqrt{\left(5/2\right)^2}\rightarrow\rho=\frac{5}{2}$$
$$\operatorname{sen}\theta=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\rightarrow\operatorname{sen}\theta=1\rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$

Logo, a forma trigonométrica do número complexo dado será:
$Z=\dfrac{5}{2}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right).$

Resposta da questão 24:
[C]

$$z = a + bi \to z = 1 + i$$
$$a = 1 \text{ e } b = 1$$
$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \to \rho = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \theta = 45° = \frac{\pi}{4}$$
$$z == \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Resposta da questão 25:
[B]

Por inspeção, tem-se que $r = 1$. Logo, pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, vem

$$\begin{array}{c|ccc:c} 1 & 1 & -3 & 7 & -5 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

Daí, encontramos

$$x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = (x-1)(x^2 - 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1-2i)(x-1+2i) = 0.$$

Agora, se $z_1 = 1 - 2i$, então $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$. Por outro lado, se $z_1 = 1 + 2i$, então $|z_1| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Portanto, em qualquer caso, o resultado pedido é $\sqrt{5}$.

Resposta da questão 26:
[A]

Sendo z um número complexo de forma $z = a + bi$, pode-se escrever:
$$2z - i = \overline{z} + 1$$
$$2(a + bi) - i = (a - bi) + 1 \to 2a + 2bi - i = a - bi + 1$$
$$a + 3bi = 1 + i \to \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Assim, o número complexo z será $z = 1 + i/3$.

Resposta da questão 27:
[D]

Sabendo que a forma trigonométrica de um número complexo é dada por
$Z = \sqrt{p}(\cos(\theta) - i\ \text{sen}\ (\theta))$

Sabendo que
$p = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\text{tg}(\theta) = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

Dessa maneira, temos:
$Z = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i\ \text{sen}\ \pi/4).$

Resposta da questão 28:
[E]

$a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i \Rightarrow b = 8$ e $a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2$

$a + \sqrt{a^2 + 8^2} = 2$
$\sqrt{a^2 + 8^2} = (2 - a)$
$a^2 + 64 = 4 - 4a + a^2$
$a = -15$

Logo, $|z|^2 = (-15)^2 + 8^2 = 289.$

Resposta da questão 29:
[D]

Calculando:
$(2 - i) \cdot (3 + xi) = 6 + 2xi - 3i + x$
$2x - 3 = 0$
$2x = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Resposta da questão 30:
[B]

Sendo

$$\begin{aligned} 2i^3 + 3i^2 + 3i + 2 &= -2i - 3 + 3i + 2 \\ &= -1 + i \\ &= (-1, 1), \end{aligned}$$

podemos concluir que a imagem do complexo $2i^3 + 3i^2 + 3i + 2$ está situada no segundo quadrante.