ENSINO MÉDIO
PRÉ-VESTIBULAR

MAT

MATEMÁTICA BÁSICA

LIVRO
ÚNICO

Poliedro
Sistema de Ensino

Poliedro
Sistema de Ensino

COLEÇÃO PV

ISBN 978-65-5613-095-8

Presidente: Nicolau Arbex Sarkis

Autoria: Mário Eduardo Marques Fernandes

Edição de conteúdo: Gabriel Henrique Siqueira Neves (assist.), Helen Alessandra Ribeiro, Juliana Grasmann dos Santos, Larissa Calazans e Rodrigo Macena e Silva

Edição de arte: Christine Getschko, Marina Ferreira, Bruna H. Fava, Lourenzo Acunzo, e Nathalia Laia

Design: Adilson Casarotti

Licenciamento e multimídia: Leticia Palaria de Castro Rocha, Danielle Navarro Fernandes e Jessica Clifton Riley

Revisão: Rosangela Carmo Muricy, Bianca da Silva Rocha, Leticia Borges, Paulo V. Coelho, Sara de Jesus Santos e Thiago Marques

Impressão e acabamento: PifferPrint

Crédito de capa: BEST-BACKGROUNDS/Shutterstock.com

Poliedro Sistema de Ensino
T. 12 3924-1616
sistemapoliedro.com.br

Sumário

Lestertair/Shutterstock.com

FRENTE ÚNICA

CAPÍTULO

1

Conjuntos numéricos e Aritmética

A Matemática é considerada por muitos uma linguagem e, sendo ela estruturada como tal, é importante a compreensão dos símbolos que fazem parte dela e de como eles se relacionam. Por isso, neste capítulo, trabalharemos a simbologia básica de conjuntos e as quatro operações fundamentais – adição, subtração, multiplicação e divisão – de modo a prepará-lo para as questões mais elaboradas que envolvam operações no conjunto dos números reais.

Apresentação dos conjuntos numéricos

Conjunto dos números naturais

O primeiro conjunto numérico que apresentaremos será o conjunto dos números naturais. É interessante aqui começarmos a falar sobre a forma de representação e as características dos conjuntos. Quando nos referimos a conjuntos, sua representação será dada sempre por uma letra maiúscula. No caso dos conjuntos predefinidos, trabalharemos com letras específicas, como o caso do conjunto dos números naturais representado simbolicamente pela letra $\mathbb{N}$. Se conhecemos os elementos de um conjunto, bem como sua ordenação, podemos representá-lo por listagem, ou seja, escrevendo seus elementos. O conjunto dos naturais, por exemplo, é representado por listagem da seguinte maneira:

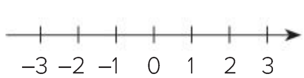
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Repare que, no conjunto dos números naturais, há um elemento inicial, o zero, e a partir dele conseguimos listar os elementos subsequentes, de modo que é sempre possível identificar o próximo elemento desse conjunto. Também é interessante perceber que o conjunto dos números naturais possui infinitos elementos, pois, para cada elemento, sempre poderemos adicionar 1 a ele, gerando o próximo elemento do conjunto.

O símbolo $\in$ (cuja leitura é "pertence") representa a presença de um elemento em um conjunto numérico, ou seja, é ele que indica se um número pertence a um conjunto. Por exemplo, podemos dizer que $1 \in \mathbb{N}$ ou que $213 \in \mathbb{N}$. Caso determinado elemento não pertença ao conjunto numérico, o símbolo utilizado será $\notin$ (cuja leitura é "não pertence"). Repare, por exemplo, que $-2 \notin \mathbb{N}$.

Conjunto dos números inteiros

O conjunto dos números inteiros é representado pela letra $\mathbb{Z}$ e, assim como o conjunto dos números naturais, também pode ser listado. No caso, o conjunto dos números inteiros é formado pelos mesmos elementos do conjunto dos naturais e os **opostos** (ou **simétricos**) desses números. Quando falamos de oposição ou simetria, estamos tomando como referência o número zero. Para compreender essa referência, observe a reta numérica abaixo.



Tomando o zero como referência, podemos listar os elementos do conjunto dos números naturais à sua direita na ordem que conhecemos. Porém, pensando que a reta também pode ser traçada para a esquerda e, novamente, tomando o zero como referência, podemos listar elementos à sua esquerda. Esses elementos são os opostos dos números à direita e sua representação será por meio do sinal de menos. Dessa maneira, o oposto de 1 será -1, o oposto de 2 será -2, e assim por diante. Esses números também são conhecidos como números negativos. Vale ressaltar aqui que podemos pensar no oposto de um número negativo, que também é representado pelo sinal de menos: o oposto de -1 é $-(-1)$, que é igual a 1.

Por listagem, o conjunto dos números inteiros é representado como:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Note que, tal qual o conjunto dos números naturais, o conjunto dos inteiros não possui extremo à direita, ou seja, há infinitos números maiores do que zero. Porém, diferente do conjunto dos números naturais, que possui o zero no começo da listagem, o conjunto dos números inteiros não possui extremo à esquerda, pois há também infinitos números inteiros menores do que zero.

Antes de avançarmos na teoria, vale a introdução de uma nova ideia da teoria dos conjuntos. Repare que todos os elementos do conjunto dos números naturais também são elementos do conjunto dos números inteiros. Nesse caso, dizemos que o conjunto dos números naturais **está contido** no conjunto dos números inteiros, relação que simbolicamente será representada por $\subset$ (cuja leitura é "está contido"), ou seja, podemos escrever $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Outra maneira interessante de relacionar esses conjuntos é por meio dos sinais de mais e de menos: como os números naturais são números inteiros não negativos, então podemos escrever $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$. O sinal de mais colocado do lado inferior direito de um conjunto indica apenas os números positivos desse conjunto e o zero. Analogamente, se colocarmos o sinal de menos, indicaremos apenas os números negativos e o elemento nulo.

Conjunto dos números racionais

O próximo conjunto a ser apresentado é o conjunto dos números racionais, representado pela letra $\mathbb{Q}$. A palavra "racional", em Matemática, vem de razão, que, por sua vez, se refere à divisão. O conjunto dos números racionais é formado pelos números que podem ser escritos na forma de uma fração, ou razão, entre dois números inteiros, e sua definição é:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

A leitura para o conjunto acima é "o conjunto dos números racionais é formado por toda fração de numerador a e denominador b, tal que a pertence ao conjunto dos números inteiros e b pertence ao conjunto dos números inteiros não nulos". Vale ressaltar que o asterisco sobre o símbolo de um conjunto representa o conjunto formado por todos os elementos do conjunto inicial, exceto o elemento nulo, ou seja, o zero.

Ao analisarmos as possibilidades de números que compõem o conjunto dos números racionais, percebemos que todos os números inteiros podem ser considerados números racionais, uma vez que podemos escrever qualquer número inteiro como a razão entre dois números inteiros. Por exemplo, podemos escrever o número 5 das seguintes maneiras:

$$\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{30}{6}$$

De modo geral, qualquer número inteiro, seja positivo ou negativo, pode ser escrito como uma razão de denominador 1.

Além dos números inteiros, outros dois tipos de número surgem da razão entre dois números inteiros:

- Os decimais exatos, que são os números racionais cujo resultado da divisão gera um número decimal com uma quantidade finita de algarismos não nulos após a vírgula. Por exemplo:

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad \frac{-3}{4} = -0{,}75 \qquad \frac{3}{8} = 0{,}375$$

- As dízimas periódicas, que possuem infinitos algarismos não nulos em sua parte decimal que seguem um padrão identificável de repetição. Por exemplo:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333... \qquad \frac{7}{6} = 1{,}1\overline{6} \qquad \frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}$$

A parte numérica que se repete após a vírgula é chamada de **período** da dízima e podemos representá-lo com uma barra sobre os números que o formam. Quando o período é pequeno, composto de um ou dois números, como no primeiro exemplo, podemos representar a ideia de repetição do algarismo por meio das reticências. Também há a possibilidade de termos números após a vírgula que não fazem parte da dízima, como o algarismo 1 após a vírgula no segundo exemplo, o qual chamamos de **anteperíodo** da dízima.

Na parte destinada a operações, presente neste capítulo, trabalharemos a escrita da forma decimal de uma fração, bem como a determinação da fração geratriz de um número decimal.

No conjunto dos números racionais, introduzimos outra definição importante na Matemática: a ideia de **inversão** ou **inverso** de um número. A representação de inverso se dá elevando um elemento do conjunto ao expoente -1. Por exemplo, o inverso de 2 pode ser representado como 2^{-1}, o que, na prática, consiste em trocar a posição de numerador pela de denominador de uma fração e vice-versa, da seguinte maneira:

$$2^{-1} = \frac{2}{1}^{-1} = \frac{1}{2}$$

É muito importante não confundirmos o que chamamos de oposto, apresentado no conjunto dos inteiros, com o que chamamos de inverso.

Conclui-se, então, que todo número racional será inteiro, decimal exato ou dízima periódica. Portanto, podemos dizer que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros, que, por sua vez, está contido no conjunto dos números racionais, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Conjunto dos números irracionais

Existem números que não podem ser escritos como uma razão entre inteiros? A resposta para essa pergunta é sim, e esses números são vários. A reunião desses elementos é o que define o conjunto dos números irracionais. Alguns exemplos famosos de números irracionais são π (letra grega cuja pronúncia é "pi", número relacionado ao comprimento de circunferências e à área de círculos, cujo valor é aproximadamente igual a 3,14), e (número de Euler, relacionado ao estudo de logaritmos, cujo valor aproximado é 2,718), φ (letra grega cuja pronúncia é "fi", relacionada à proporção de ouro, ou razão áurea, cujo valor aproximado é 1,618), além de raízes cujo resultado não é um decimal exato, tais como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, entre outros.

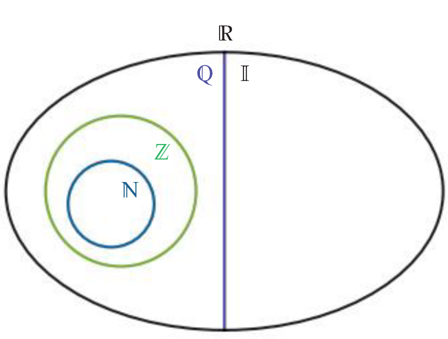
Alguns autores utilizam a letra $\mathbb{I}$ para representar o conjunto dos números irracionais, mas uma maneira mais tradicional vem da ideia de que o conjunto dos números reais é a união entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Assim, podemos dizer que o conjunto dos números reais menos o conjunto dos números racionais gera o conjunto dos números irracionais. Simbolicamente, o conjunto dos números reais é representado pela letra $\mathbb{R}$, sendo então os irracionais definidos como $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ou ainda $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Conjunto dos números reais

Finalmente, chegamos ao último conjunto numérico estudado inicialmente na Matemática, o chamado conjunto dos números reais, que é representado pela letra $\mathbb{R}$. O conjunto dos números reais é formado, como dito anteriormente, pela união entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Na simbologia da teoria dos conjuntos, a união é representada por $\cup$. Sendo assim, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$.

Vale ressaltar que:

- há outros conjuntos numéricos, inclusive contendo o conjunto dos números reais. Nós estudaremos isso em breve;
- é possível representar a relação entre os conjuntos com um diagrama chamado diagrama de Venn-Euler, que trata a representação de conjuntos como regiões. Além disso, conjuntos contidos em outros conjuntos são representados na parte interna dos conjuntos que os contêm. Abaixo temos um diagrama de Venn-Euler que representa a relação entre os conjuntos vistos até agora.



Conjuntos numéricos representados no diagrama de Venn-Euler.

FRENTE ÚNICA

Repare que, ao analisarmos o diagrama, o conjunto dos números naturais está dentro do conjunto dos números inteiros, indicando que todo elemento de $\mathbb{N}$ é também elemento de $\mathbb{Z}$. O mesmo ocorre com os números inteiros em relação aos números racionais. Note também que há uma divisão que separa os números racionais dos números irracionais: essa divisão tem característica conceitual, uma vez que um número real ou é racional ou é irracional. Por fim, a união desses dois últimos conjuntos gera o conjunto dos números reais.

Vamos ver alguns exercícios resolvidos acerca do tema.

Exercícios resolvidos

1. Julgue como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações a seguir. Sendo falsa, dê um contraexemplo que justifique o valor da afirmação.

☐ **a)** Todo número inteiro é natural.
☐ **b)** Todo número racional é inteiro.
☐ **c)** Todo número irracional é real.
☐ **d)** Todo número inteiro é racional.

Resolução:

a) Falso. Contraexemplo: $-1 \in \mathbb{Z}$ e $-1 \notin \mathbb{N}$.
b) Falso. Contraexemplo: $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
c) Verdadeiro.
d) Verdadeiro.

2. Assinale a alternativa verdadeira.

a) $\sqrt{25}$ é irracional.
b) $\frac{-16}{4}$ é um racional não inteiro.
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é racional.
d) $-\sqrt{49}$ é um número inteiro.

Resolução:

Alternativa A: falsa, pois $\sqrt{25} = 5$, que é racional.

Alternativa B: falsa, pois $\frac{-16}{4} = -4$, que é um racional inteiro.

Alternativa C: falsa, pois um racional é, por definição, a razão entre dois inteiros, e não é possível escrever $\frac{\sqrt{2}}{2}$ como uma razão entre dois inteiros.

Alternativa D: verdadeira, pois $-\sqrt{49} = -7$, que é um número inteiro.

Alternativa D.

Exercícios

1. Dados os números 12, -144, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$, 1,333..., $\sqrt{\frac{100}{25}}$, 0,428, $\sqrt{64}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$, determine quais deles são:

a) naturais; **b)** inteiros; **c)** racionais; **d)** irracionais; **e)** reais.

2. Observe as afirmações a seguir.

I. Os números 3, 5, 7 e 152 pertencem ao conjunto dos números naturais.
II. A raiz cúbica de cinco é um número irracional.
III. O conjunto dos números reais é formado pelos elementos comuns entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais.
IV. Todo número inteiro não negativo é um número natural.

As afirmações verdadeiras são:

a) Apenas as afirmações I e II.
b) Apenas as afirmações I, II e IV.
c) Apenas as afirmações I, III e IV.
d) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) Apenas a afirmação I é verdadeira.

3. Considerando a representação para os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, responda se é verdadeira ou não cada afirmação e justifique.

a) O número n de alunos em uma sala pode ser tal que $n \in \mathbb{Q}_+$, com $n \notin \mathbb{N}$.
b) O valor numérico m da massa de uma pessoa pode ser tal que $m \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.
c) O valor numérico v da velocidade de um carro pode ser tal que $v \in \mathbb{Z} - \mathbb{Q}_+$.
d) As medidas a, b e c dos lados de um triângulo podem todas pertencer a $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

4. Em cada item abaixo, preencha o espaço com o símbolo $\in$ ou $\notin$:

a) -2 __ $\mathbb{Z}$
b) -4 __ $\mathbb{N}$
c) $\frac{8}{4}$ __ $\mathbb{Z}$
d) $\frac{4}{8}$ __ $\mathbb{Z}$
e) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ __ $\mathbb{Q}$
f) $\sqrt{16}$ __ $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$
g) -13 __ $\mathbb{Z}_+$
h) $\frac{0}{4}$ __ $\mathbb{Q}^*_+$

Apresentação das quatro operações básicas

Antes de trabalharmos as operações nos conjuntos numéricos apresentados neste capítulo, vamos pensar um pouco sobre o nosso sistema numérico, chamado

sistema decimal posicional, cujo nome explica exatamente suas características: decimal significa que trabalhamos com dez algarismos – a saber, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 –, e posicional se refere ao fato de que a mudança de posição do algarismo de um número modifica seu valor, possibilitando a escrita de todos os números de nosso sistema apenas com esses dez algarismos. Por exemplo, tomemos o número 42 973. Esse número pode ser decomposto das seguintes formas:

$$40\,000 + 2\,000 + 900 + 70 + 3$$

ou

$$4 \times 10\,000 + 2 \times 1\,000 + 9 \times 100 + 7 \times 10 + 3 \times 1$$

Perceba que o 4 é o primeiro de cinco algarismos, seguido pelos algarismos 2, 9, 7 e 3. Dizemos que cada algarismo ocupa uma casa, e esta representa o valor que esse algarismo tem dentro do número. A nomenclatura começa no último algarismo, no nosso exemplo o 3, que ocupa a casa das **unidades**, que indica o valor real do algarismo, nesse caso, 3. A segunda casa – sempre pensando da direita para a esquerda – é a casa das **dezenas**, e representa 10 vezes o valor do algarismo; no nosso exemplo, o algarismo 7 que está nessa casa representa o número 70, pois $70 = 7 \times 10$. O terceiro algarismo está na casa das **centenas** e representa 100 vezes o seu valor; no nosso exemplo, tal algarismo é o 9, cujo valor é 900, pois $900 = 9 \times 100$. Esse primeiro grupo de três casas é chamado de **primeira classe**.

Depois começamos a **segunda classe**, a qual pode ser separada da primeira por um ponto; no entanto, é comum a não utilização do ponto na separação das classes, uma vez que o ponto pode ter o mesmo significado que a vírgula em alguns contextos (por exemplo, nas calculadores financeiras, em que a vírgula é usada na separação das classes e o ponto significa o mesmo que a vírgula na matemática tradicional). Na segunda classe, voltamos à nomenclatura inicial, porém estamos na classe dos milhares; logo, o algarismo 2 do nosso exemplo se encontra na casa das **unidades de milhar**, representando o número 2 000, pois $2\,000 = 2 \times 1\,000$. Por fim, em nosso exemplo, temos o algarismo 4 presente na casa das **dezenas de milhar**, representando o número 40 000, pois $40\,000 = 4 \times 10\,000$. As casas e classes continuam, existindo números que possuem centena de milhar, ou mesmo classes maiores, como milhão, bilhão e assim por diante.

Nas operações, a mudança de casa se dá quando o algarismo presente na referida casa chega ao valor de 10 ou mais. Nesse caso, há a conversão da casa em que ele se encontra para a casa seguinte. Veremos esse procedimento a seguir, começando com as operações no conjunto dos números naturais.

Operações no conjunto dos números naturais

Adição

A primeira operação básica e fundamental é a adição. Quando adicionamos dois ou mais números, chamados de **parcelas**, temos como resultado um único número, chamado de **soma**. Vejamos os exemplos.

Exemplos:

a. $132 + 46 = 178$

Para adicionar esses números, fazemos as operações com os algarismos em cada casa e representamos seu resultado na própria casa, logo $2 + 6 = 8$ será o resultado da adição na casa das unidades, e $3 + 4 = 7$ será o resultado da adição na casa das dezenas. O algarismo 1 na casa das centenas se preservará, uma vez que não há outro algarismo na mesma casa. Assim, o resultado, posicionando cada algarismo em sua respectiva casa, será 178.

b. $785 + 429 = 1\,214$

A soma dos algarismos das unidades é $5 + 9 = 14$. Porém, 14 é um número de duas casas, não sendo possível representá-lo em apenas uma (que seria a das unidades). Assim, precisamos decompor o número 14 em $10 + 4$, transformando as 10 unidades encontradas em 1 dezena e representando-a na casa correspondente, a das dezenas. Já o 4 permanece na casa das unidades como resultado dela.

Após a adição na casa das unidades, vamos para a casa das dezenas, que possui os algarismos 8 e 2, além de 1 dezena resultante da adição das unidades. Assim temos $8 + 2 + 1 = 11$ dezenas; ocorre algo similar à adição na casa das unidades: encontramos um número impossível de ser representado em apenas uma casa. Nesse caso, decompomos 11 dezenas em $(10 + 1)$ dezenas. As 10 dezenas se transformam em 1 centena, e esta é então levada para a casa correspondente; já a 1 dezena restante fica representada na própria casa da dezena.

Por fim, vamos para a casa das centenas, compostas dos algarismos 7 e 4, além de 1 centena que veio da adição das dezenas. Assim, temos $7 + 4 + 1 = 12$ centenas e, mais uma vez, uma transformação será necessária: 12 centenas é o mesmo que $(10 + 2)$ centenas, em que as 10 centenas representam uma mudança de casa, gerando um valor a ser alocado na casa das unidades de milhar, e as 2 centenas restantes ocupam a casa das centenas. Como não há nas parcelas algarismos na casa da unidade de milhar, o algarismo 1 da conversão ocupa essa casa, o que nos leva ao número:

$$1 \times 1000 + 2 \times 100 + 1 \times 10 + 4 = 1214$$

Essa adição pode ser simplificada e feita na vertical da seguinte forma:

$$\begin{array}{rrrr} & {}^{1}7 & {}^{1}8 & 5 \\ + & 4 & 2 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

FRENTE ÚNICA

Nesse formato, é importante alinharmos os algarismos de cada parcela e da soma de acordo com a respectiva casa. Por exemplo, notamos que o algarismo 5 está alinhado ao algarismo 9, já que ambos estão na casa das unidades, e assim por diante. Reparamos também que na forma vertical podemos simplificar a escrita da transformação de 10 unidades em 1 dezena, ou de 10 dezenas em 1 centena, por meio da escrita do número 1 sobre o algarismo da respectiva casa. Nas unidades temos 5 + 9 = = 14, em que o algarismo 4 fica na casa das unidades e o 10 se transforma em 1 dezena, sendo representado pelo 1 sobre o algarismo 8. Agora na casa das dezenas fazemos 8 + 2 e adicionamos o 1 transformado anteriormente. A escrita do número sobre a casa serve para lembrar-nos de que houve uma conversão e é necessário considerá-lo na operação. Com a prática, muitos deixam de representar esse número da conversão e memorizam-no; porém é importante tomarmos cuidado para não nos esquecermos de adicioná-lo.

Caso queiramos adicionar três ou mais números, podemos fazê-lo de modo direto por meio do esquema de adição vertical, seguindo as regras estabelecidas anteriormente.

c. 1 985 + 487 + 7 908 = 10 380

Vejamos a adição acima na forma vertical:

$$\begin{array}{rccccc} & & {}^{2}1 & {}^{1}9 & {}^{2}8 & 5 \\ & & & 4 & 8 & 7 \\ + & & 7 & 9 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 8 & 0 \end{array}$$

Nesse exemplo, temos algo interessante. Inicialmente, posicionamos os três números de modo que os algarismos fiquem alinhados adequadamente. Começando a adição pela casa das unidades, notamos que 5 + 7 + 8 = 20, ou seja, 2 dezenas completas, sem sobrar unidades. Nesse caso, representamos a casa das unidades com o 0 e escrevemos as 2 dezenas sobre o 8 da casa das dezenas. O processo é o mesmo para as dezenas e depois para as centenas. Quando fazemos a adição para a casa da unidade de milhar, notamos que 1 + 7 + 2 = 10, o que nos indica 1 dezena de milhar que, nesse caso, como não há dezenas de milhar nas parcelas, pode ser pensada diretamente como 10, o que é representado pelo zero na casa da unidade de milhar e o algarismo 1 na casa das dezenas de milhar.

Observemos três propriedades da adição:

- a adição entre números naturais sempre gera um número natural;
- a ordem das parcelas na adição não produz um resultado diferente. Nos exemplos anteriores, se trocarmos as posições das parcelas, chegaremos aos mesmos resultados. Chamamos essa propriedade de **comutativa**;
- na adição de três ou mais números, não há a necessidade de adicionarmos todos de uma vez; podemos fazer a adição de dois e adicionar o resultado ao terceiro, e assim por diante.

Exercício

5. Resolva as adições.

a) 7 + 8

b) 9 + 12

c) 17 + 13

d) 142 + 56

e) 790 + 351

f) 1 451 + 936

g) 3 952 + 401 + 12

h) 1 904 + 5 + 392

i) 1 230 + 902 401 + 72 + 470

j) 1 000 002 + 908 + 1 001 + 9 909

Subtração

Na Matemática, é muito frequente o uso de operações inversas para desfazermos um processo anterior. A subtração, por exemplo, é a operação inversa em relação à adição. O processo de subtração é exatamente o mesmo que o da adição em relação à organização das casas, das classes e da montagem operacional na vertical, porém, agora, em vez de adicionarmos os números em casas comuns, faremos a subtração, que tem por resultado a **diferença**. Portanto, será comum não a transformação de 10 unidades em 1 dezena, ou de 10 dezenas em 1 centena, como ocorreu na adição, mas a necessidade de conversão de 1 dezena em 10 unidades, ou de 1 centena em 10 dezenas, para que seja possível o processo de subtração. Perceba que traçaremos exatamente o caminho inverso da adição.

Exemplos:

a. 197 − 42 = 155

Esse primeiro exemplo é simples e busca pensar no processo de diferença. Iniciamos também pela casa das unidades e, diferentemente da adição, em que a ordem dos números não importa, na subtração devemos seguir a ordem dada; por isso, na casa das unidades, faremos 7 − 2 = 5, sendo este o algarismo representado na casa das unidades. Analogamente, na casa das dezenas temos 9 − 4 = 5, sendo este o algarismo da casa das dezenas. Como não há algarismo na casa das centenas do segundo número, o 1 se mantém. Temos, portanto, o resultado 197 − 42 = 155.

b. 1 924 − 897 = 1 027

Nesse caso, ao tentarmos subtrair 7 unidades de 4 na casa das unidades, encontramos um problema, já que precisamos tirar mais do que temos: é como se você tivesse 4 reais em moedas e precisasse pagar uma conta de 7 reais. Nesse caso, precisaremos converter uma dezena em unidades para que possamos ter o suficiente para a operação. Vamos, então, para a casa das dezenas do primeiro número e tomamos 1 dezena, transformando-a em

10 unidades. Assim, juntamos as 10 unidades às 4 que já tínhamos, totalizando 14 unidades, sendo possível agora a subtração $14 - 7 = 7$, e este é o algarismo que será representado na casa das unidades.

Agora vamos para as dezenas. No primeiro número temos o algarismo 2, mas precisamos diminuir em 1, pois ocorreu a troca anterior. Logo o algarismo que fica na casa das dezenas do primeiro número é o 1 e, novamente, ao tentarmos realizar a subtração $1 - 9$, ela se mostra impossível. Precisamos trocar, no primeiro número, 1 centena por 10 dezenas, processo similar ao que fizemos anteriormente, para que seja possível a subtração. Nesse caso, totalizaremos 11 dezenas após a troca, sendo possível a subtração $11 - 9 = 2$, e este é o número que será representado na casa das dezenas.

Por causa dessa segunda troca, o algarismo na casa das centenas do primeiro número não será mais o 9, e sim o 8, e a diferença $8 - 8 = 0$ indica que o algarismo a ser representado na casa das centenas é o 0.

Por fim, perceba que não há algarismo na casa das unidades de milhar no segundo número, logo o algarismo 1 do primeiro número se mantém, chegando ao resultado $1\,924 - 897 = 1\,027$.

A subtração também pode ser representada na vertical, facilitando o processo de resolução da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc} & & 8 & {}^{1}1 & \\ & 1 & \cancel{9} & \cancel{2} & {}^{1}4 \\ - & & 8 & 9 & 7 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 7 \end{array}$$

Algumas observações importantes:

- diferentemente das adições, que podem ser feitas todas de forma simultânea, as subtrações devem ser feitas uma a uma, ou seja, realizamos a subtração entre dois números para depois subtrairmos do resultado obtido o outro número;
- não abordaremos, por enquanto, subtrações em que o primeiro número é menor que o segundo (por exemplo $4 - 7$), pois o resultado dessa operação não é um elemento do conjunto dos números naturais; faremos isso no estudo da subtração no conjunto dos números inteiros.

Exercício

6. Resolva as operações.

a) $9 - 6$

b) $15 - 8$

c) $47 - 29$

d) $182 - 95$

e) $1\,957 - 894$

f) $2\,903 - 452 - 894$

g) $10\,000 - 8\,792 - 936$

Multiplicação

O processo de multiplicação tem por característica a simplificação da adição de números iguais. Por exemplo, quando queremos efetuar a adição $7 + 7 + 7 + 7$, podemos simplificar a escrita da forma 4×7 ("quatro vezes sete"), já que estamos adicionando o número 7 a ele mesmo 4 vezes. Assim, o processo de multiplicação de números naturais pode ser compreendido como a adição de números iguais na quantidade de vezes atribuída pelo primeiro número. Observe os exemplos.

$$5 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$
$$2 \times 8 = 8 + 8 = 16$$
$$7 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 35$$

Como a adição, a multiplicação também é comutativa, ou seja, se trocarmos a posição dos números na multiplicação, encontraremos o mesmo resultado, também chamado de **produto**. Assim, no último exemplo, em vez de trabalharmos com uma adição de 7 parcelas iguais a 5, poderíamos ter trabalhado com 5 parcelas iguais a 7:

$$5 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$$

Na multiplicação é importante que consigamos realizar, sem dispender muito tempo, as multiplicações dos números de 1 a 10 pelos números de 1 a 10, ou seja, é importante que saibamos as **tabuadas** de 1 a 10. Com a prática, é comum a memorização dos resultados, mas podemos traçar estratégias para algumas multiplicações que são mais difíceis utilizando a ideia da adição ou da subtração.

Exemplos:

a. Para realizar 6×7 podemos tomar como base a multiplicação 5×7 que, em geral, é mais fácil de ser trabalhada ou lembrada. Como $5 \times 7 = 35$ equivale à adição do número 7 a ele mesmo 5 vezes, 6×7 será a adição de 7 ao resultado de 5×7, ou seja, $35 + 7 = 42$.

É interessante não demorarmos muito na resolução das operações, mas mais importante é sabermos resolvê-las de forma correta. Com a prática, melhoraremos o tempo utilizado nas resoluções, por isso é importante deixar de lado a calculadora, já que ela não poderá ser usada em provas.

Quando as multiplicações são por números que passam do número 9 existe um algoritmo (uma fórmula, ou regra processual) que nos auxilia no seu desenvolvimento. Esse algoritmo respeita a ideia de casas e classes desenvolvidas na adição.

b. $15 \times 13 = 195$

Nesse caso, posicionaremos os números um abaixo do outro. Apesar de não haver necessidade de respeitar a posição de cada casa, se assim o fizermos melhor será o entendimento do processo. Logo, temos:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 5 \\ \times & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Iniciaremos a multiplicação pela unidade do número de baixo, o algarismo 3. Ele multiplicará tanto o algarismo 5 das unidades quanto o algarismo 1 das dezenas, um de cada vez. No caso, iniciamos pela unidade: $3 \times 5 = 15$. Assim como vimos na adição, 15 não pode ser representado na casa das unidades, então temos que $15 = 10 + 5$, ou seja, 1 dezena e 5 unidades. Colocamos o 5 na casa das unidades e as 10 unidades viram 1 dezena, sendo representada sobre o algarismo 1 na casa das dezenas. Depois fazemos a multiplicação das 3 unidades pelo 1 que está na casa das dezenas: estamos multiplicando agora dezenas, e 3 unidades $\times$ 1 dezena = 3 dezenas. A esse resultado adicionamos a dezena convertida pelo produto das unidades, chegando a 4 dezenas, e a representamos após a barra ao lado do algarismo 5 das unidades.

$$\begin{array}{ccc} & {}^{1}1 & 5 \\ \times & 1 & 3 \\ \hline & 4 & 5 \end{array}$$

Agora vamos para o segundo algarismo do número 13, o algarismo 1 das dezenas. Perceba que multiplicaremos dezenas por unidades e depois dezenas por dezenas. Seguindo esse raciocínio, 1 dezena vezes 5 unidades gera 5 dezenas, portanto não podemos colocar esse resultado abaixo do algarismo 5, que está na casa das unidades; temos de colocá-lo sob o algarismo 4, que representa a casa das dezenas, sendo esta a razão para a atribuição do zero abaixo do 5 quando fazemos a multiplicação do algarismo das dezenas (há pessoas que colocam um sinal de mais ou apenas deixam um espaço em branco para representar a mudança de casa; essas representações funcionam no algoritmo, mas a forma mais correta é a atribuição do zero). Após a multiplicação da dezena pela unidade, fazemos a multiplicação entre dezena e dezena. Quando multiplicamos 1 dezena por 1 dezena temos como resultado 1 centena, algarismo representado à esquerda do algarismo 5 na segunda linha após a barra.

$$\begin{array}{ccc} & {}^{1}1 & 5 \\ \times & 1 & 3 \\ \hline & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Por fim, realizamos a adição dos valores obtidos após a barra, uma vez que fizemos as multiplicações separadamente, ou seja, o que fizemos na realidade foi decompor o número 13 em $10 + 3$ e multiplicar o número 15 por 3 e depois por 10. Essa ideia vem da propriedade **distributiva** que comentaremos em breve. Assim, o resultado da multiplicação será:

$$\begin{array}{ccc} & {}^{1}1 & 5 \\ \times & 1 & 3 \\ \hline & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \\ \hline 1 & 9 & 5 \end{array}$$

Esse processo será aplicado em todas as multiplicações cujos valores numéricos sejam maiores que 9. Precisamos apenas tomar cuidado para não confundirmos o número escrito sobre os valores iniciais, pois podem aparecer outros valores durante o processo de multiplicação. Por exemplo, se pensarmos no produto 45×25, no início do processo 5×5 obteremos 25, que implica a escrita do algarismo 2 sobre o algarismo 4 da casa das dezenas. Porém, posteriormente, quando formos multiplicar o 2 da casa das dezenas do segundo número por 5, o resultado será 10 e registraremos o algarismo 1 sobre o 4, lembrando da conversão de 10 dezenas em 1 centena. Logo, vemos que o algarismo 4 recebe valores vindo de conversões em momentos diferentes, por isso é necessário ter muita atenção.

$$\begin{array}{ccc} & {}^{2}4 & 5 \\ \times & 2 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & & {}^{1}4 & 5 \\ & \times & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 2 & 5 \\ & 9 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

Esse é o algoritmo da multiplicação. Vale lembrar que multiplicar qualquer número por zero gera como resultado zero, ou seja, ele é o que chamamos de elemento nulo da multiplicação, uma vez que seu produto sempre será zero.

Propriedade distributiva

No exemplo da multiplicação 15×13 citamos a propriedade distributiva. Essa propriedade é muito utilizada na Álgebra e consiste em realizar a multiplicação distribuindo o produto.

Exemplos

a. 5×13

Para resolver essa multiplicação podemos escrever o número 13 como $10 + 3$, separando a dezena da unidade. Assim, temos que $5 \times 13 = 5 \times (10 + 3)$, em que $(10 + 3)$ representa o número 13. Quando o produto é feito, o número 5 multiplicará tanto o 10 quanto o 3, por isso dizemos que há a distributiva da multiplicação para o 10 e para o 3:

$$5 \times (10 + 3) = 5 \times 10 + 5 \times 3 = 50 + 15 = 65$$

Essa é uma estratégia que pode ser utilizada para operações de multiplicação.

b. 15×13

Nesse exemplo, estudamos o algoritmo da multiplicação. Nesse caso, podemos escrever $15 \times 13 = 15 \times (10 + 3)$, resultando em:

$$15 \times 10 + 15 \times 3 = 150 + 45 = 195,$$

como vimos no algoritmo apresentado anteriormente.

Exercícios

7. Desenvolva os produtos usando a propriedade distributiva.

a) $5 \times (10 + 4)$

b) $12 \times (5 + 7)$

c) $8 \times (4 + 2)$

d) $A \times (B + C)$

8. Resolva as operações.

a) 7×9

b) 8×12

c) 12×20

d) 42×37

e) 121×18

f) 232×395

Divisão

Assim como a subtração é a operação inversa da adição, a divisão é a operação inversa da multiplicação. Para o desenvolvimento da divisão, será necessário bom domínio sobre as multiplicações iniciais, as famosas tabuadas de 1 a 10.

A divisão pode ser representada de três maneiras:

- com o símbolo $\div$;
- com o uso de dois-pontos (:);
- na forma fracionária, $\frac{a}{b}$ (lemos "*a* sobre *b*" ou "*a* dividido por *b*").

O número que será dividido recebe o nome de **dividendo**, e o que divide será chamado de **divisor**, sendo o resultado o **quociente** e, caso exista, também haverá o **resto** da divisão.

O processo de divisão tem como característica um algoritmo conhecido como divisão euclidiana, ou método da chave. Veremos o funcionamento desse algoritmo por meio de exemplos.

Exemplos:

a. 1284 : 6

Primeiro, vamos montar a divisão na chave, da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} 1284 & 6 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Diferentemente das outras operações, na divisão começamos pelo primeiro algarismo de maior ordem do dividendo, que, em nosso exemplo, é o algarismo 1 na casa da unidade de milhar. Nesse momento questionamos o seguinte: quantas vezes o número 6 (divisor) chega mais próximo ou iguala ao número 1? A resposta é zero, uma vez que 6 é maior do que 1. Percebemos, então, que essa divisão não produzirá um quociente com unidade de milhar, uma vez que essa divisão não é possível. Assim, vamos para a próxima casa e transformamos o algarismo 1 da unidade de milhar em 10 centenas, que, junto a 2 centenas, gera 12 centenas, e fazemos novamente a pergunta: quantas vezes o número 6 (divisor) chega mais próximo ou iguala ao número 12? Agora a resposta é 2. Isso significa que no quociente teremos o número 2 presente na casa das centenas, portanto já sabemos que nosso quociente terá 3 casas numéricas.

$$\begin{array}{rrrrr|l} & 1 & 2 & 8 & 4 & 6 \\ \cline{6-6} - & 1 & 2 & & & 2 \\ \cline{1-5} & & 0 & 8 & & \end{array}$$

Após a determinação do número 2 no quociente, fazemos o seguinte processo: multiplicamos 2 por 6 (divisor), colocamos o resultado da operação sob o dividendo nas casas correspondentes (milhar e centena) e realizamos a subtração. No nosso exemplo, tal subtração teve como resultado zero e, para continuarmos a divisão, vamos tomar a próxima casa, a das dezenas. Assim, reproduzimos o 8 das dezenas e seguimos no mesmo processo.

$$\begin{array}{rrrrr|l} & 1 & 2 & 8 & 4 & 6 \\ \cline{6-6} - & 1 & 2 & & & 21 \\ \cline{1-5} & & 0 & 8 & & \\ & - & & 6 & & \\ \cline{1-5} & & & 2 & & \end{array}$$

Repare que agora é possível apenas multiplicarmos o divisor 6 por 1 na tentativa de chegar mais próximo de 8 sem ultrapassar seu valor. Isso significa que nosso quociente terá 1 na casa das dezenas e sobraram 2 dezenas para serem divididas. O que faremos é transformar essas 2 dezenas em 20 unidades para continuarmos a divisão, adicionando-as às 4 unidades do dividendo. Assim, temos 24 unidades.

$$\begin{array}{rrrrr|l} & 1 & 2 & 8 & 4 & 6 \\ \cline{6-6} - & 1 & 2 & & & 214 \\ \cline{1-5} & & 0 & 8 & & \\ & - & & 6 & & \\ \cline{1-5} & & & 2 & 4 & \\ & & - & 2 & 4 & \\ \cline{1-5} & & & & 0 & \end{array}$$

O número que fica na casa das unidades do quociente será 4, uma vez que $4 \times 6 = 24$, que iguala ao valor a ser dividido. Nesse caso, temos o quociente 214 e o resto 0.

Quando, em uma divisão, o resto é zero, dizemos que o dividendo é divisível pelo divisor, nesse caso, 1284 é divisível por 6.

b. 541 : 5

Primeiro escrevemos na forma da chave e dividimos a casa das centenas pelo divisor. Como é possível essa divisão, temos o algarismo 1 na casa das centenas do quociente. Ao multiplicar esse valor 1 pelo divisor 5, obtemos o resultado 5 que subtraímos do algarismo 5 das centenas do dividendo, obtendo o 0 como resto de centenas. Partimos então para a casa das dezenas, com o algarismo 4.

$$\begin{array}{rrrr|l} & 5 & 4 & 1 & 5 \\ \cline{5-5} - & 5 & & & 1 \\ \cline{1-4} & 0 & 4 & & \end{array}$$

Na tentativa de dividir 4 por 5, observamos que essa operação não é possível nos naturais. Assim, devemos indicar no quociente que não há valor da divisão escrevendo o número zero na casa das dezenas para mostrar que precisaremos ir para a próxima casa decimal a fim de continuar a divisão. As 4 dezenas deverão ser convertidas em 40 unidades e a 1 unidade que há no dividendo será adicionada.

$$\begin{array}{rrrr|l} & 5 & 4 & 1 & 5 \\ \cline{5-5} - & 5 & & & 10 \\ \cline{1-4} & 0 & 4 & 1 & \end{array}$$

Agora, devemos dividir 41 por 5, e o número mais próximo que encontramos é 8, pois $8 \times 5 = 40$. Realizamos a subtração e obtemos como resto 1 unidade.

$$\begin{array}{rrr|l} 5 & 4 & 1 & \;5 \\ \cline{4-4} -\,5 & & & 108 \\ \cline{1-3} 0 & 4 & 1 & \\ & -\,4 & 0 & \\ \cline{1-3} & & 1 & \end{array}$$

Não será objeto de estudo neste momento a continuidade da divisão. Aqui dizemos que 541 não é divisível por 5, uma vez que obtemos o resto 1.

De modo geral, a ideia de divisão será desenvolvida pensando sempre na casa do algarismo que é dividido, gerando no quociente o valor referente à mesma casa. Quando trabalharmos os decimais, poderemos continuar a divisão utilizando o mesmo processo.

Vale ressaltar que, caso queiramos determinar o dividendo, basta multiplicarmos o quociente pelo divisor e adicionar o resto. No caso do exemplo **b**, temos:

$$541 = 108 \times 5 + 1$$

Exercício

9. Determine o quociente e o resto das divisões abaixo.

a) 420 : 4

b) 341 : 5

c) 462 : 11

d) 2 100 : 20

e) 571 : 7

f) 962 : 9

g) 1 824 : 32

h) 5 807 : 27

Operações no conjunto dos números inteiros

As quatro operações desenvolvidas no conjunto dos números naturais têm exatamente o mesmo processo para os números inteiros. No entanto, como no conjunto dos números inteiros existem os números negativos, é importante que os analisemos com atenção.

Adição e subtração

Vamos nos ater aqui à adição e à subtração entre números positivos e negativos, e entre números negativos.

Exemplos

a. $5 + (-7)$

Uma maneira de não nos confundirmos com as operações que envolvem números negativos é pensarmos neles como dívida. No caso, imaginemos que temos 5 reais e ganhamos — o ganhar aqui é representado pelo símbolo de "+" — uma dívida de 7 reais — representada como (-7) na expressão. Nesse raciocínio, perdemos tudo que tínhamos e ainda devemos 2 reais, ou seja, temos então que $5 + (-7) = -2$.

Notamos que $5 + (-7) = 5 - 7 = -2$, pois a adição de um número negativo é equivalente à subtração do oposto do número negativo. Não podíamos concluir isso no conjunto dos números naturais, mas agora podemos no conjunto dos números inteiros.

b. $321 + (-497)$

Nesse caso, fica difícil determinar o valor mentalmente, mas vimos que adicionar um negativo é como subtrair um positivo, assim podemos pensar na operação $321 - 497$. Desse modo, fica claro que o resultado será negativo, uma vez que o número a ser subtraído é maior do que o primeiro número. Uma maneira de calcular essa diferença é realizá-la trocando a posição dos números, ou seja, fazemos $497 - 321$, uma operação já estudada nos naturais, cujo resultado é 176. Porém, apenas trocamos as posições dos números para podermos efetuar a conta, sabemos que o resultado deve ser um número negativo. Assim:

$$321 + (-\,497) = 321 - 497 = -176$$

Os dois exemplos anteriores nos mostram que adicionar um número negativo é o mesmo que subtrair o oposto desse número. Logo, temos a regra de sinais: $+\,(-) = -$. Além disso, subtrair um número positivo é o mesmo que simplesmente subtrair, ou seja: $-\,(+) = -$.

Para falarmos da subtração de números negativos vamos lembrar o conceito de oposto desenvolvido no início do capítulo. Sabemos, por exemplo, que o oposto de -2 é 2, o que simbolicamente pode ser representado por $-(-2) = 2$.

c. $7 - (-3)$

Trabalhando com a ideia de que o oposto de -3 é 3, podemos reescrever a expressão anterior como $7 + 3 = 10$.

Daqui obtemos o resultado ao qual frequentemente nos referimos como "menos com menos dá mais", ou seja, $-\,(-) = +$.

d. $-8 + (-7)$

Nesse caso, podemos pensar que, como um número negativo nos remete a uma dívida, então estamos adicionando duas dívidas. Se possuo uma dívida de 8 reais (representada por -8) e adiciono uma dívida de 7 reais (representada por -7), possuo então uma dívida de 15 reais; logo, $-8 + (-7) = -15$.

Repare que, pelo que vimos no exemplo **b** em relação aos sinais, $-8 + (-7)$ pode ser pensado como $-8 - 7$. Nessas situações em que estamos adicionando números negativos, podemos pensar na adição entre seus módulos $(8 + 7 = 15)$ e no final indicamos que o resultado é negativo (-15).

Multiplicação e divisão

Os processos de multiplicação e de divisão para números inteiros são basicamente os mesmos que aqueles para os números naturais. A única diferença é, novamente, a introdução de números negativos que, como vimos, possibilita resultados negativos.

Como vimos na adição e na subtração entre números inteiros, tanto adicionar um número negativo quanto subtrair um número positivo equivalem a fazer uma subtração:

$$+(-) = - \quad \text{e} \quad -(+) = -$$

Já quando subtraímos um número negativo, temos o equivalente a realizar uma adição:

$$-(-) = +$$

Nas multiplicações e divisões, utilizamos esses mesmos resultados, os quais são conhecidos como "regras de sinais".

Exemplos:

a. $(-12) \times 5$

Quais são os sinais dos números que compõem essa multiplicação? Menos para o 12 e mais para o 5 (note que, quando um número é positivo, não há a necessidade da escrita do sinal de mais, apenas subentende-se sua existência). Vimos que $(-)(+) = -$, assim, o resultado desse produto será -60.

b. $(-7) \times (-11)$

Aqui temos dois números negativos. Inicialmente olharemos para os sinais, cuja regra é $(-)(-) = +$. Logo, o resultado do produto será $+77$, ou apenas 77.

c. $-2 \times (-4) \times 5 \times (-3)$

Quando temos várias multiplicações entre números positivos e números negativos, aconselhamos primeiro a pensar no sinal do resultado, realizando sua análise passo a passo. Nesse caso, primeiro a regra de sinais para a primeira parte da conta, $-2 \times (-4)$, nos fornece resultado positivo. Depois, esse número positivo será multiplicado por 5, que também é positivo, o que gera um resultado positivo. Por fim, esse resultado positivo multiplicado pelo número negativo -3 tem como produto um valor negativo. Já sabendo o sinal do resultado, fazemos a conta, obtendo -120. É claro que você pode trabalhar as multiplicações junto aos sinais, apenas tome cuidado para não se esquecer dos sinais e para não se confundir no meio do processo.

! Atenção

Nas multiplicações, é comum a troca do sinal $\times$ pelo ponto de multiplicação, por exemplo $(-2) \cdot (-5)$. Caso haja parênteses, pode ainda não haver representação nenhuma entre os números, por exemplo $(-2)(-5)$. A justaposição dos fatores deixando a multiplicação subentendida será muito frequente na Álgebra, quando trabalhamos com muitas variáveis compondo os termos, por exemplo, $12x^2yz^3 = 12 \cdot x^2 \cdot y \cdot z^3$.

d. $-120 : 24$

Nas divisões, as regras de sinais também são válidas: nesse exemplo teremos como quociente da divisão de -120 por 24 um número negativo, uma vez que a regra de divisão entre um número negativo dividido por um número positivo resulta em um número negativo. O processo é o mesmo e, nesse caso, chegamos ao quociente -5 e resto zero.

e. $-44 : 7$

Quando a divisão não é exata, ou seja, quando há resto, é importante perceber que o resto terá sinal igual ao do dividendo (número que é dividido). Nesse caso, $-44 : 7$ tem como quociente -6 e resto -2. Uma forma de perceber isso é lembrar a volta do processo, em que o número -44 é escrito da seguinte maneira:

$$-44 = (-6) \times 7 + (-2)$$

Podemos simplificar as regras de sinais na multiplicação e na divisão da seguinte forma: nessas operações, sinais iguais ("menos" com "menos" ou "mais" com "mais") têm resultado positivo e sinais diferentes ("mais" com "menos" ou "menos" com "mais") têm resultado negativo.

Exercícios

10. Realize as operações de adição e de subtração.

a) $32 + (-45)$
b) $-17 + 51$
c) $421 - 640$
d) $-12 - (-27)$
e) $-53 + (-12)$
f) $-134 - 93 + 30$
g) $12 - (-27) - (+30) - 19$
h) $-100 + 12 - 47 - 51 + 200$

11. Realize as multiplicações e as divisões, indicando o resto quando houver.

a) $(-12) \times (-10)$
b) -17×15
c) $41 \times (-5)$
d) $(-4)(+5)(-12)(-6)$
e) $-222 : 3$
f) $175 : (-5)$
g) $431 : (-12)$
h) $(-144) : (-6)$
i) $(-12\,351) : (-40)$

Operações no conjunto dos números racionais

No conjunto dos números racionais temos duas formas de representar seus elementos: a forma de fração e a forma decimal. Antes de trabalharmos as operações entre números racionais, abordaremos essas formas de representação.

Frações equivalentes

Duas frações são chamadas de equivalentes se representam o mesmo valor decimal. Não é necessário, no entanto, efetuar a divisão para identificarmos a equivalência; podemos trabalhá-la na própria forma fracionária identificando múltiplos comuns entre numeradores e denominadores.

Exemplos:

a. $\frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

As três frações anteriores são equivalentes, uma vez que a representação decimal de todas elas é 0,75. É possível também identificar essa equivalência analisando os numeradores e os denominadores das frações. Se dividirmos o numerador e o denominador da primeira fração por 2, chegamos à fração $\frac{6}{8}$ que, por sua vez, pode ter seu numerador e seu denominador divididos por 2, resultando na fração $\frac{3}{4}$. O caminho inverso também é válido: se partirmos de uma fração e multiplicarmos tanto seu numerador quanto seu denominador por qualquer número inteiro, chegaremos a uma fração equivalente à primeira.

Repare que a fração $\frac{3}{4}$ não pode ter seu numerador e seu denominador divididos pelo mesmo número inteiro. Nesse caso, chamamos essa fração de **irredutível**. Também é interessante notar que poderíamos ter chegado à fração irredutível do nosso exemplo diretamente da fração inicial dividindo o numerador e o denominador pelo número 4.

b. Para determinar a fração irredutível de $\frac{120}{150}$, podemos inicialmente dividir o numerador e o denominador por 10:

$$\frac{120}{150} = \frac{12}{15}$$

Em seguida, podemos dividir o novo numerador e o novo denominador por 3:

$$\frac{120}{150} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Exercício

12. Determine as formas irredutíveis das frações a seguir.

a) $\frac{4}{8}$

b) $\frac{-12}{30}$

c) $\frac{231}{27}$

d) $\frac{12}{100}$

e) $\frac{-441}{21}$

Transformação de uma fração em número decimal

Para escrevermos uma fração em forma de número decimal, devemos continuar o processo de divisão entre inteiros passando para as casas à direita da unidade, chamadas de decimais. Para representar essas casas, colocamos uma vírgula após a casa das unidades e passamos a representar os décimos, os centésimos, os milésimos e assim por diante.

Exemplos:

a. Para representarmos o número $\frac{8}{5}$ na forma decimal, fazemos:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{-\ 5} & 1 \\ 3 & \end{array}$$

Sendo 8 o algarismo na casa das unidades do dividendo, obtemos 1 na casa das unidades do quociente, sobrando 3 unidades. No conjunto dos números inteiros, a divisão acaba aqui; como estamos trabalhando no conjunto dos números racionais, podemos e devemos continuar. Vamos transformar o resto de 3 unidades em décimos: temos 30 décimos, que podemos dividir por 5. Esse resultado deve ser representado na casa dos décimos do quociente, por isso colocamos a vírgula após o algarismo 1 e continuamos o processo:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{-\ 5} & 1{,}6 \\ 3\ 0 & \\ \underline{-\ 3\ 0} & \\ 0 & \end{array}$$

Ao dividirmos 30 por 5, chegamos ao quociente 6 e resto 0. Assim, encerramos a divisão e chegamos à equivalência $\frac{8}{5} = 1{,}6$.

b. Para determinarmos o número $\frac{5}{8}$ na forma decimal, também montamos a divisão com a chave. Ao fazer isso, reparamos que a unidade 5 é menor que 8 e, assim, o quociente dessa divisão é 0 e o resto é 5. Vamos transformar essas 5 unidades em 50 décimos e, para tanto, precisaremos colocar uma vírgula após o zero no quociente.

$$\begin{array}{r|l} 5\ 0 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{-\ 4\ 8} & 0{,}6 \\ 2 & \end{array}$$

Realizando a divisão de 50 por 8, temos o algarismo 6 na casa dos décimos do quociente e o resto de 2 décimos. Para continuar a divisão, transformamos 2 décimos em 20 centésimos e representaremos o resultado da divisão de 20 por 8 à direita do 6 no quociente. Dando continuidade, 20 dividido por 8 gera o algarismo 2 na casa dos centésimos e o resto de 4 centésimos.

$$\begin{array}{r|l} 5\ 0 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{-\ 4\ 8} & 0{,}62 \\ 2\ 0 & \\ \underline{-\ 1\ 6} & \\ 4 & \end{array}$$

Podemos continuar a divisão transformando esse resto em 40 milésimos representando o resultado da divisão de 40 por 8 à direita do 2 no quociente. Finalmente, chegamos ao quociente 0,625 e resto 0.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 5 & 0 & & 8 \\ \cline{5-5}
- & 4 & 8 & & 0{,}625 \\ \cline{1-4}
 & & 2 & 0 & \\
 & - & 1 & 6 & \\ \cline{1-4}
 & & & 4\;0 & \\
 & & - & 4\;0 & \\ \cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Nos dois exemplos anteriores, determinamos números decimais exatos, mas também podemos obter como quociente da divisão entre dois números inteiros dízimas periódicas.

c. Para representarmos a forma decimal da fração $\frac{10}{3}$, procedemos da seguinte maneira:

Como o algarismo 1 da dezena é menor do que o divisor 3, tomamos as 10 unidades para efetuarmos a divisão, obtendo 3 na unidade do quociente e resto 1.

$$
\begin{array}{rrr|l}
 & 1 & 0 & 3 \\ \cline{4-4}
- & & 9 & 3 \\ \cline{1-3}
 & & 1 &
\end{array}
$$

Transformamos a unidade do resto em décimos e colocamos a vírgula à direita do 3 no quociente para continuarmos a divisão. Temos que 10 décimos divididos por 3 geram 3 décimos no quociente e resto 1.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 1 & 0 & & 3 \\ \cline{5-5}
- & & 9 & & 3{,}3 \\ \cline{1-4}
 & & 1 & 0 & \\
 & - & & 9 & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 &
\end{array}
$$

Continuando a divisão, vamos para a casa dos centésimos, transformando o resto 1 décimo em 10 centésimos. Perceba que, novamente, no quociente colocaremos o 3 como resultado da divisão e o resto será 1.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 1 & 0 & & & 3 \\ \cline{6-6}
- & & 9 & & & 3{,}33 \\ \cline{1-5}
 & & 1 & 0 & & \\
 & - & & 9 & & \\ \cline{1-5}
 & & & 1 & 0 & \\
 & & - & & 9 & \\ \cline{1-5}
 & & & & 1 &
\end{array}
$$

Se continuarmos o processo, teremos sempre 3 como resultado da divisão e 1 como resto. Nesse caso, temos uma dízima periódica e podemos representá-la como 3,333... ou $3{,}\overline{3}$.

d. Como o processo de divisão já foi explicado anteriormente, vamos analisar o período da forma decimal de $\frac{2}{7}$, que também é uma dízima periódica. A divisão de 2 por 7 gera o quociente 0,285714285714..., ou seja, $0{,}\overline{285714}$. Percebemos, assim, que o período de uma dízima pode ser composto de mais de um algarismo; nesse caso, o período é formado por seis algarismos.

Também pode existir o que chamamos de anteperíodo em uma dízima periódica, que é composto de um ou mais algarismos posteriores à vírgula e anteriores ao período da dízima.

e. Na determinação da forma decimal do número racional $\frac{112}{90}$, encontramos $1{,}2444... = 1{,}2\overline{4}$. Reparamos que o algarismo 2 após a vírgula não se repete tal qual o algarismo 4. Nesse caso, 2 será o anteperíodo e 4 será o período da dízima.

Determinação da fração correspondente a um número decimal exato

Todo número decimal exato pode ser escrito como uma fração decimal, ou seja, uma fração cujo denominador é uma potência de dez. O processo para determinação dessa fração e de sua simplificação será exemplificado a seguir.

Exemplos:

a. Para determinar a fração geratriz do número decimal 1,4, representamos o algarismo 1 abaixo do número 1,4, como se fosse uma fração. Depois multiplicamos o numerador e o denominador por uma potência de 10 de modo a obtermos um número inteiro como numerador. Em seguida, podemos fazer a simplificação para determinar a fração irredutível. Nesse caso, obtemos:

$$\frac{1{,}4}{1} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

A multiplicação por 10 tem como característica aumentar em dez vezes o número, o que, no nosso sistema posicional decimal, implica andarmos com a vírgula uma casa para a direita.

b. Para determinar a fração geratriz do número 0,104, o processo é o mesmo, mas, nesse caso, teremos de multiplicar o numerador e o denominador da fração construída por 1 000 para que o numerador da fração obtida seja um número inteiro.

$$\frac{0{,}104}{1} = \frac{104}{1\,000} = \frac{13}{125}$$

Nesse caso, ao multiplicarmos o numerador por 1 000 utilizando a estratégia de andar com a vírgula a quantidade de casas igual à quantidade de zeros da potência de 10, chegamos ao número 0104. Como o zero à esquerda do numeral não tem significado no conjunto dos inteiros, podemos retirá-lo da representação, deixando apenas 104. Após a simplificação, chegamos à fração $\frac{13}{125}$.

Determinação da fração geratriz de uma dízima periódica

No caso das dízimas periódicas, a estratégia anterior não funcionará, uma vez que temos infinitos algarismos não nulos após a vírgula. O processo se dará de outra forma, que apresentaremos a seguir.

Exemplos:

a. Determine a fração geratriz da dízima periódica $0,\overline{3}$.

1º passo: Chamamos a dízima periódica de x e a escrevemos como $x = 0,333...$

2º passo: Multiplicamos x por 10 a fim de produzir um novo número com parte decimal exatamente igual à do número original. Nesse caso, obtemos o número $10x = 3,333...$

3º passo: Fazemos a subtração entre o número multiplicado por 10 e o original. Nesse processo, percebemos que todos os algarismos da parte decimal, quando subtraídos, têm como resultado zero. Logo, a diferença obtida é um número inteiro.

$$\begin{array}{r} 10x = 3,333... \\ - \ x = 0,333... \\ \hline 9x = 3,000... \end{array}$$

Por fim, basta dividirmos ambos os lados da igualdade por 9 para obtermos $x = \frac{3}{9}$, cuja forma reduzida é $x = \frac{1}{3}$. Como chamamos de x a dízima 0,333..., a fração encontrada para x é a geratriz dessa dízima periódica.

b. Determine a fração geratriz da dízima periódica 0,323232...

O processo utilizado aqui é o mesmo. Chamamos a dízima periódica de $x = 0,323232...$ e multiplicamos por 10 até igualarmos a parte decimal dos números. Repare que $10x = 3,232323...$ não satisfaz nossa busca, pois a parte decimal de x é 323232... e a de $10x$ é 232323... Precisamos, então, multiplicar novamente por 10, obtendo $100x = 32,323232...$

Agora que igualamos a parte decimal, continuamos o processo do exemplo anterior.

$$\begin{array}{r} 100x = 32,323232... \\ - \quad x = \ \ 0,323232... \\ \hline 99x = 32,000000... \end{array}$$

No resultado da subtração, a parte decimal será zero, e dividindo ambos os lados da igualdade por 99 chegamos à fração $\frac{32}{99}$, que é a geratriz da dízima 0,323232...

Para o caso em que a dízima periódica não possui anteperíodo, há uma regra prática para a determinação da fração geratriz sem a necessidade da realização do processo descrito anteriormente. Vamos estudá-la por meio de um exemplo.

c. Determine a fração geratriz da dízima 1,232323...

1º passo: Separamos, quando houver, a parte inteira da decimal: $1 + 0,232323...$

2º passo: A fração geratriz da dízima 0,232323... terá numerador igual ao período da dízima, que é 23, e denominador representado por um número apenas composto de algarismos 9, de modo que a quantidade de algarismos nesse número seja igual à quantidade de dígitos presentes no período. Nesse caso, como há dois dígitos no período, o denominador será 99. Se houvesse um dígito no período, o denominador seria 9; se houvesse três dígitos no período, o denominador seria 999.

Assim, $0,232323... = \frac{23}{99}$.

3º passo: Por fim, adicionamos a parte inteira à fração geratriz da parte decimal:

$$1 + \frac{23}{99} = \frac{122}{99}$$

No caso de termos uma dízima periódica com anteperíodo, utilizamos um raciocínio parecido àquele que envolve multiplicações por 10, mas alguns cuidados devem ser tomados. Observe o exemplo.

d. Determine a fração geratriz da dízima 0,2454545...

$$\begin{aligned} x &= 0,2454545... \\ 10x &= 2,454545... \\ 100x &= 24,545454... \\ 1\,000x &= 245,454545... \end{aligned}$$

Precisamos multiplicar a dízima por 10 algumas vezes a fim de obtermos a mesma parte decimal; no caso, conseguimos obter nos números $10x$ e $1\,000x$. São esses dois números que subtrairemos:

$$\begin{array}{r} 1000x = 245,454545... \\ - \ 10x = \quad 2,454545... \\ \hline 990x = 243,000000... \end{array}$$

Dividindo ambos os lados por 990, obtemos a fração:

$$x = \frac{243}{990} = \frac{27}{110}.$$

Também há uma regra prática para o caso de a dízima periódica possuir anteperíodo. Vamos analisá-la por meio de outro exemplo.

e. Determine a fração geratriz da dízima 2,1626262...

1º passo: Separamos a parte inteira da decimal, caso exista: $2 + 0,1626262...$

2º passo: A fração geratriz da parte decimal terá numerador igual à diferença entre o número formado pelo anteperíodo seguido do período (no caso, o anteperíodo é 1 e o período é 62; logo, temos o número 162) e o anteperíodo, ou seja, o numerador é $162 - 1 = 161$.

Já o denominador será formado por dois algarismos 9 (pois o período da dízima possui dois dígitos) acrescido de um zero à direita (pois há um algarismo no anteperíodo). Logo, o denominador é 990. Se houvesse dois algarismos no anteperíodo, colocaríamos dois zeros à direita dos noves, e assim por diante.

Logo, $0,1626262... = \frac{162-1}{990} = \frac{161}{990}$.

3º passo: Adicionamos a parte inteira à fração geratriz da parte decimal do número: $2 + \frac{161}{990} = \frac{2\,141}{990}$.

Exercícios

13. Determine os números decimais equivalentes às frações a seguir.

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{12}{5}$

c) $-\frac{15}{8}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{5}{6}$

f) $-\frac{12}{7}$

14. **PUC-Rio 2021** O número π é irracional e aproximadamente igual a 3,1415926535. Como para qualquer número irracional, existem boas aproximações racionais de π. Dentre os racionais abaixo, assinale o que estiver mais próximo de π, ou seja, aquele para o qual a distância for mínima.

a) 3

b) $\frac{31}{10}$

c) $\frac{25}{8}$

d) $\frac{22}{7}$

15. Determine as frações geratrizes dos números decimais a seguir.

a) 0,23
b) 1,125
c) −2,501
d) 5,3332
e) 0,444...
f) 1,222...
g) 0,767676...
h) 1,909090
i) 0,1222...
j) 0,2919191...
k) 0,32454545...

Adição e subtração de números decimais exatos

As duas operações que veremos agora respeitam o mesmo processo utilizado no conjunto dos números inteiros em todas as suas formas, ou seja: no caso da adição, a cada conjunto de dez em uma casa ocorre a conversão para um na casa seguinte; no caso da subtração, se necessário, ocorre a troca de um em uma casa posterior para dez na casa anterior. É importante, assim, a representação de casas correspondentes uma acima da outra ao armar as contas.

Exemplos:

a. 124,32 + 469,924

Como o segundo número possui uma casa decimal a mais que o primeiro, acrescentamos um zero à casa decimal do primeiro número e seguimos com o processo de adição da mesma forma que vimos nos inteiros:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & ^{1} & ^{1} & & & & \\
 & 1 & 2 & 4, & 3 & 2 & 0 \\
+ & 4 & 6 & 9, & 9 & 2 & 4 \\
\hline
 & 5 & 9 & 4, & 2 & 4 & 4
\end{array}$$

Dizemos que a vírgula "desce", ou seja, ela permanece representada na mesma posição para os dois números, por isso a importância da representação de cada casa abaixo de sua respectiva entre os números.

b. 110 − 14,95

O processo de igualar as casas decimais é o mesmo tanto na adição quanto na subtração entre números inteiros e números decimais exatos. Basta representar a vírgula no número inteiro após a casa das unidades e os zeros após essa vírgula na mesma quantidade de casas do número decimal. Após essa adequação, realizamos as contas como fizemos antes:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & ^{0} & ^{9} & ^{9} & \\
 & 1 & \cancel{1} & ^{1}\cancel{0}, & ^{1}\cancel{0} & ^{1}0 \\
- & & 1 & 4, & 9 & 5 \\
\hline
 & & 9 & 5, & 0 & 5
\end{array}$$

Nesse exemplo, foi necessário trocar 1 dezena por 10 unidades para então trocarmos uma dessas unidades por 10 décimos, a fim de trocar um dos 10 décimos por 10 centésimos, para finalmente podermos realizar a subtração na referida casa.

Multiplicação de números decimais exatos

Tal qual na adição e na subtração, na multiplicação há o mesmo raciocínio trabalhado no conjunto dos números inteiros. É importante entendermos o processo no conjunto dos números inteiros para não termos dúvidas nas operações com números decimais. No entanto, para simplificar o raciocínio, temos uma regra prática para a multiplicação de números decimais. Isso não significa que abandonaremos todo o raciocínio desenvolvido anteriormente, apenas simplificaremos o processo. Por isso, em caso de dúvida sobre o que está ocorrendo nas operações, devemos recorrer à lógica operacional já trabalhada.

Exemplos:

a. 2,4 × 3,12

A simplificação do processo consiste em, inicialmente, ignorarmos a existência das vírgulas e trabalharmos como se os fatores multiplicados fossem os inteiros 24 e 312. Como o primeiro fator possui menos algarismos e, como na multiplicação a ordem dos fatores não altera o produto, vamos representá-lo embaixo, a fim de trabalharmos com menos processos.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 3 & 1 & 2 \\
\times & & & 2 & 4 \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 & 8 \\
+ & 6 & 2 & 4 & 0 \\
\hline
 & 7 & 4 & 8 & 8
\end{array}$$

Depois de realizarmos a multiplicação sem considerarmos as vírgulas, chegamos ao número 7 488, que claramente não é nossa resposta. Agora é o momento de considerarmos a quantidade de casas após a vírgula nos números. No caso, há 2 casas decimais em um dos fatores e 1 casa decimal no outro, o que totaliza 3 casas após a vírgula.

Assim, a partir do último algarismo do produto, da direita para a esquerda, contamos 3 algarismos e posicionamos a vírgula, indicando que há 3 casas decimais nesse número.

Logo, o resultado da multiplicação entre os dois decimais é 7,488.

b. 134,56 × 1 000

Vale relembrar que o produto de um número decimal por uma potência de 10 implica o deslocamento da vírgula para a direita a mesma quantidade de casas que a quantidade de zeros da potência de 10. Nesse caso, como 1 000 é uma potência de 10, basta deslocarmos a vírgula 3 casas para a direita. A vírgula passará primeiro pelos algarismos 5 e 6 e, depois, pelo algarismo 0, uma vez que não há nenhum algarismo representado na casa decimal seguinte. Portanto:

$$134{,}56 \times 1000 = 134\,560$$

Divisão entre números decimais exatos

Para dividirmos números decimais exatos, devemos multiplicá-los pela mesma potência de 10 de modo que ambos os produtos obtidos sejam números inteiros. Em seguida, realizamos a divisão entre números inteiros já trabalhada anteriormente.

Exemplos:

a. 1,4 : 0,2

Podemos representar tal divisão na forma vertical $\frac{1{,}4}{0{,}2} = \frac{14}{2}$. Repare que multiplicamos o numerador e o denominador por 10, de modo que obtivemos dois números inteiros. Agora, basta trabalharmos o algoritmo visto no conjunto dos números inteiros. Logo, $\frac{1{,}4}{0{,}2} = \frac{14}{2} = 7$.

b. 12,45 : 1,5

Repetimos o processo, porém, nesse caso, para que o numerador se transforme em um número inteiro precisaremos multiplicá-lo por 100. Logo, o denominador deve ser multiplicado por 100 também. Após as multiplicações, realizamos as divisões entre números inteiros.

$$\frac{12{,}45}{1{,}5} = \frac{1245}{150} = 8{,}3$$

c. 110 : 0,3

Na divisão de um número inteiro por um número decimal, o processo é o mesmo. Vamos multiplicar tanto 110 quanto 0,3 por 10 a fim de transformarmos o número decimal 0,3 no número inteiro 3, para podermos então realizar a divisão entre inteiros.

$$\frac{110}{0{,}3} = \frac{1100}{3} = 366{,}666...$$

Apesar de trabalharmos exemplos de divisões entre números positivos, lembramos que as regras de sinais também se aplicam aos números racionais.

Exercícios

16. Calcule:

a) 12,51 + 13,2
b) 40,251 − 12,3
c) 4,17 + 8,23 − 15
d) 120 − 2,4 − 18,96
e) −17,2 + 40,5 + 71,51
f) 1,2 × 2,4
g) 3,4 × 4,2 × 1,01
h) 13,68 : 5,7
i) 14,004 : 3,4
j) 200 : 0,3
k) 100 : 0,33
l) 40 : 2,5

17. Unifor-CE 2020 Um turista argentino veio ao Brasil assistir ao jogo Brasil × Argentina pela semifinal da Copa América de 2019. Ele chegou ao Brasil com 12 600 pesos argentinos (moeda da Argentina). Assim que desembarcou, ele foi a uma casa de câmbio e trocou todo o seu dinheiro: metade por real brasileiro e a outra metade por dólar dos Estados Unidos. Naquele dia, 1 peso argentino valia 9 centavos de real brasileiro e 1 real brasileiro valia 26 centavos de dólar dos Estados Unidos. Podemos concluir que o turista adquiriu

a) 567 reais brasileiro e 150,30 dólares dos Estados Unidos.
b) 1 638 reais brasileiro e 567 dólares dos Estados Unidos.
c) 567 reais brasileiro e 1638 dólares dos Estados Unidos.
d) 567 reais brasileiro e 147,42 dólares dos Estados Unidos.
e) 5 670 reais brasileiro e 1 474,2 dólares dos Estados Unidos.

Adição e subtração de frações

Sempre podemos pensar na conversão de uma fração em um número decimal correspondente e aplicarmos as técnicas vistas anteriormente, porém em muitos casos será mais interessante fazer o contrário: transformar os números decimais em frações para realizarmos as operações (principalmente nos casos de dízimas periódicas).

A ideia da fração é a da divisão de um todo em partes de mesma medida. Por exemplo, a fração $\frac{2}{5}$ nos indica que um determinado todo foi dividido em 5 partes iguais e estamos tomando 2 dessas 5 partes. Se o numerador é maior que o denominador teremos partes que representam o todo e partes que representam a fração. Por exemplo, $\frac{12}{5}$ pode ser pensado como $2 + \frac{2}{5}$, uma vez que:

$$\frac{12}{5} = \frac{5+5+2}{5} = \frac{5}{5} + \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = 1 + 1 + \frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5}$$

Esse número também pode ser representado como $2\frac{2}{5}$. Números como esse, que têm uma parte inteira precedendo a fração, são conhecidos como números mistos.

Para adicionar e subtrair frações, é necessário que as partes sejam de mesmo tamanho para que seja possível adicioná-las ou subtraí-las. Por exemplo, se pensarmos em duas barras de chocolate idênticas, sendo que dividiremos uma ao meio e a outra em três partes iguais, não faz sentido adicionar uma parte da primeira barra a uma da segunda, dizendo que temos duas partes de um todo, pois temos partes de tamanhos diferentes. Resumindo, ao adicionarmos ou subtrairmos frações, devemos ter o mesmo denominador e, caso sejam diferentes, teremos que trabalhar com a mudança desses denominadores a fim de igualá-los, ou seja, trabalharemos com um múltiplo comum, em geral, o menor deles (conhecido como mmc).

Exemplos:

a. $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} - \frac{5}{7} + \frac{6}{7}$

Nesse caso, todas as frações têm o mesmo denominador. Logo, é como se tivéssemos inteiros divididos em partes iguais. Assim podemos adicionar 3 partes do primeiro inteiro a 4 partes do segundo. Em seguida, subtrairemos 5 partes do terceiro e, por fim, adicionaremos 6 partes do último inteiro, ou seja:

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} - \frac{5}{7} + \frac{6}{7} = \frac{3 + 4 - 5 + 6}{7} = \frac{8}{7}$$

Em resumo, quando temos denominadores iguais, mantemos o denominador e adicionamos ou subtraímos os numeradores. É interessante simplificar a fração à sua forma irredutível, mas não é necessário transformá-la em um número misto.

b. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

Nessa situação, os denominadores não são iguais, portanto não podemos adicionar diretamente as frações; devemos primeiro igualar os denominadores. A ideia aqui é encontrar uma fração equivalente a $\frac{1}{2}$ e uma equivalente a $\frac{1}{3}$ tal que ambas tenham o mesmo denominador. Analisando os números 2 e 3, concluímos que 6 é múltiplo de ambos. Se multiplicarmos o denominador 2 por 3 e o denominador 3 por 2, encontraremos o denominador 6 para as duas frações. Mas, ao multiplicarmos o denominador da fração $\frac{1}{2}$ por 3, devemos fazer o mesmo para seu numerador, assim obtemos: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Analogamente, multiplicando o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{3}$ por 2, obteremos $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Chegamos a frações equivalentes de mesmo denominador, e agora é possível efetuar a operação de adição.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

c. $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{7}{18}$

Muitas vezes, o processo de determinação de um múltiplo comum não é tão fácil de se fazer mentalmente. Para nos ajudar, temos um algoritmo que determina o menor múltiplo comum aos denominadores apresentados, nesse caso particular, o mmc (4, 6, 18). Esse algoritmo será explorado em outro capítulo, mas vamos nos antecipar e apresentar o processo. A ideia é dividirmos os números em questão por números inteiros primos até que cheguemos ao quociente 1 para todos eles.

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 18 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ \cline{4-4} 1 & 1 & 1 & 36 \end{array}$$

Inicialmente, podemos dividir 4, 6 e 18 por 2 (representado à direita da barra) colocando o resultado de cada divisão abaixo do respectivo número. Na segunda divisão, apenas um dos números à esquerda da barra pode ser dividido por 2; então realizamos essa operação apenas com esse número e copiamos os outros, obtendo os resultados 1, 3 e 9. Já obtemos o resultado 1 para um dos números iniciais; faremos o mesmo com os outros. Dividindo por 3 os números 3 e 9, obtemos 1 e 3, o qual, dividido por 3 novamente, resulta em 1. Com isso, foram obtidos resultados unitários para todos os números iniciais. À direita da barra temos todos os números primos que dividiram os denominadores; o produto entre todos eles será o mmc entre os denominadores iniciais, esse será o novo denominador.

Agora precisamos buscar as frações equivalentes a cada uma das três frações iniciais que tenham esse novo valor como denominador. Na primeira fração, para descobrirmos por qual número devemos multiplicar o denominador 4 a fim de transformá-lo em 36, podemos pensar no processo inverso, ou seja, dividir 36 por 4 e obter 9. Logo, multiplicamos o denominador e o numerador por 9, obtendo a fração equivalente $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$. Repetindo o raciocínio para as outras duas frações obtemos $\frac{5}{6} = \frac{30}{36}$ e $\frac{7}{18} = \frac{14}{36}$. Fazendo as devidas substituições, temos:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{7}{18} = \frac{27}{36} + \frac{30}{36} - \frac{14}{36} = \frac{43}{36}$$

d. $4 - \frac{2}{5} - \frac{3}{7}$

Se na adição ou subtração entre frações tivermos um número inteiro, a ideia é a mesma, lembrando que um número inteiro pode ser escrito como uma fração de denominador 1. Nesse caso, temos $\frac{4}{1} - \frac{2}{5} - \frac{3}{7}$. Sendo o mmc (1, 5, 7) = 35 e trabalhando o processo de frações equivalentes, chegamos a:

$$\frac{140}{35} - \frac{14}{35} - \frac{15}{35} = \frac{140 - 14 - 15}{35} = \frac{111}{35}$$

Multiplicação de frações

A multiplicação é a operação mais simples entre as frações, uma vez que não há necessidade de se pensar em denominadores comuns, bastando apenas calcular o produto dos numeradores sobre o produto dos denominadores.

Exemplos:

a. $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{2 \times 3}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$

b. $\frac{1}{4} \times \frac{2}{7} \times \frac{14}{5}$

Para a multiplicação de mais de duas frações, o processo é o mesmo:

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{7} \times \frac{14}{5} = \frac{1 \times 2 \times 14}{4 \times 7 \times 5} = \frac{28}{140} = \frac{1}{5}$$

Percebemos que é possível dividir o numerador e o denominador por 28, chegando à fração irredutível $\frac{1}{5}$. Alternativamente, poderíamos ter feito a simplificação antes do processo de divisão, no passo $\frac{1 \times 2 \times 14}{4 \times 7 \times 5}$, dividindo o fator 14 do numerador pelo fator 7 do denominador para obter $\frac{1 \times 2 \times 2}{4 \times 1 \times 5}$ e dividindo os dois fatores 2 do numerador pelo fator 4 do denominador, gerando $\frac{1 \times 1}{1 \times 1 \times 5} = \frac{1}{5}$.

Sempre que notar uma simplificação possível, você pode fazê-la antes de realizar a multiplicação, assim como pode efetuar normalmente a multiplicação e buscar a fração irredutível após a realização da operação.

É importante saber que a multiplicação entre frações e números inteiros segue o mesmo raciocínio, basta pensarmos no número inteiro como uma razão com denominador 1.

Divisão de frações

Já vimos que a divisão é a operação inversa da multiplicação e podemos notar, por exemplo, que 10 : 2 é o mesmo que $10 \times \frac{1}{2}$, ou seja, dividir por 2 é o mesmo que multiplicar pelo inverso de 2, que é $\frac{1}{2}$. Esse será o raciocínio que utilizaremos para a divisão entre frações: para dividir frações vamos manter o primeiro número e multiplicá-lo pelo inverso do segundo.

Exemplos:

a. $\frac{2}{5} : \frac{1}{3}$

Tomando a ideia de divisão como inversa de multiplicação, dividir por $\frac{1}{3}$ é o mesmo que multiplicar por 3, logo:

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{1} = \frac{6}{5}$$

b. $\frac{5}{12} : \frac{10}{27}$

Seguindo o processo do exemplo anterior, temos:

$$\frac{5}{12} : \frac{10}{27} = \frac{5}{12} \times \frac{27}{10} = \frac{5 \times 27}{12 \times 10} = \frac{1 \times 9}{4 \times 2} = \frac{9}{8}$$

Após a inversão da segunda fração e representação da multiplicação, podemos simplificar os fatores do numerador pelos fatores do denominador antes de efetuarmos a multiplicação. No caso, simplificamos o 27 do numerador e o 12 do denominador por 3, e o 5 do numerador e o 10 do denominador por 5.

Por fim, se tivermos mais do que uma divisão na qual não haja evidência gráfica de ordem das operações (representada por parênteses, colchetes ou chaves), fazemos as divisões da esquerda para a direita.

c. $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{2}{5}$

Iniciamos realizando $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

Então, dividimos esse resultado pela terceira fração, obtendo $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$.

Exercícios

18. Calcule:

a) $\frac{2}{11} + \frac{5}{11} - \frac{3}{11}$

b) $\frac{2}{7} - \frac{4}{7} - \frac{9}{7}$

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

d) $\frac{2}{5} + \frac{3}{8} - \frac{1}{20}$

e) $2 - \frac{9}{5} - \frac{2}{8}$

f) $\frac{9}{16} - \frac{1}{4} - \frac{5}{9}$

g) $\frac{5}{4} \times \frac{2}{9}$

h) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

i) $\frac{-5}{8} \times \frac{-9}{13}$

j) $\frac{21}{49} \times \frac{98}{441} \times \frac{1}{2}$

k) $2 \times \frac{1}{3} \times \frac{9}{8}$

l) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$

m) $5 : \frac{2}{5}$

n) $\frac{4}{3} : 2$

o) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{2}{9}$

19. Um livro tem 143 páginas e Carla já leu $\frac{7}{11}$ desse livro. Quantas páginas Carla já leu?

20. O mostrador de combustível de um carro acusa que o tanque, que tem capacidade para 50 litros, está com $\frac{3}{4}$ de sua capacidade. Considerando que o tanque estava cheio, quantos litros já foram consumidos?

21. Caio é operário e recebe R$ 2 080,00 por mês. Desse valor, gasta $\frac{1}{4}$ com aluguel e $\frac{1}{5}$ com alimentação. Neste mês, precisou gastar $\frac{3}{8}$ de seu salário com remédios. Qual é o valor que sobrou?

LAMBERTO JESUS/Shutterstock.com

FRENTE ÚNICA

CAPÍTULO

2

Potências e raízes

No primeiro capítulo, estudamos as quatro operações básicas, porém, existem outras operações importantes. Neste capítulo, trabalharemos duas: as potências e as raízes, além de suas propriedades. Estudaremos também uma importante notação, frequentemente utilizada na Química e na Física, conhecida como notação científica, cuja representação se dá por potências de 10.

Potências

A potenciação é uma operação matemática que pode ser indicada por $a^n = m$, em que a é a base, n é o expoente e m é o resultado ou potência. Podemos ter qualquer número real como base ou expoente, porém consideraremos em nosso estudo apenas os expoentes racionais. Inicialmente, vamos pensar a potenciação para o subconjunto dos números racionais que definimos como números naturais.

Potências de expoente natural

Quando o expoente é um número natural, $m = a^n$ é equivalente a $m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$. Observe os exemplos:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$
$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$
$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$
$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Devemos ficar atentos aos sinais da base da potência. A indicação de que uma potência possui base negativa se dá com o uso de parênteses. Note:

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$
$$(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$$
$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$
$$(-4)^5 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -1024$$

Repare, nos exemplos acima, que os resultados são números positivos e negativos. Isso é uma consequência da regra de sinais trabalhada no capítulo anterior, e podemos, por observação, chegar a uma conclusão acerca do sinal de uma potência em que a base é negativa.

Sempre que a base for um número negativo e o expoente, um número par, teremos como resultado uma potência positiva, pois um número par de sinais negativos gera um resultado positivo, uma vez que $(-) \cdot (-) = (+)$:

$$(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$$

$$(-1)^4 = \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{+1} \cdot \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{+1} = 1$$

Por outro lado, sempre que a base for um número negativo e o expoente, um número ímpar, teremos como resultado um número negativo:

$$(-3)^3 = \underbrace{(-3) \cdot (-3)}_{+9} \cdot (-3) = -27$$

$$(-2)^5 = \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+4} \cdot \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+4} \cdot (-2) = -32$$

Devemos ficar atentos, pois a ausência dos parênteses indica simplesmente que o número é negativo, independentemente de seu expoente. Veja os exemplos:

$$-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$$
$$-4^3 = -4 \cdot 4 \cdot 4 = -64$$

No caso de a base ser negativa e haver um sinal negativo à frente dela, devemos dar preferência à potência, ou seja, resolvemos a potência primeiro para depois analisar o sinal à sua frente. Observe:

$$-(-9)^2 = -\underbrace{(-9) \cdot (-9)}_{+81} = -(+81) = -81$$

$$-(-6)^3 = -\underbrace{(-6) \cdot (-6) \cdot (-6)}_{-216} = -(-216) = 216$$

No caso de um número não apresentar expoente, subentende-se que ele é 1, ou seja, $a = a^1$. Outra observação importante é que, sendo a um número real não nulo, $a^0 = 1$.

$$5^1 = 5$$
$$13^1 = 13$$
$$10^0 = 1$$
$$(-7)^0 = 1$$

Observação: a potência 0^0 é uma indeterminação na Matemática.

Potência de expoente inteiro

O que difere o conjunto $\mathbb{Z}$ do conjunto $\mathbb{N}$ são os números negativos e, neste ponto, estes serão nosso objeto de estudo. No capítulo 1 verificamos que, quando queremos representar o inverso de um número em Matemática, representamos esse número elevado ao expoente -1. Lembre-se:

$$\text{Inverso de 7 é: } 7^{-1} = \frac{1}{7^1} = \left(\frac{1}{7}\right)^1$$

Observe no exemplo que, após a inversão do 7, chegamos a $\frac{1}{7}$, que equivale a $\left(\frac{1}{7}\right)^1$. Nessa perspectiva podemos estender tal raciocínio para outros valores inteiros negativos:

$$4^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$$

$$2^{-10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

Se a base for um número negativo, o raciocínio é o mesmo utilizado para os números naturais:

$$(-5)^{-4} = \left(-\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{625}$$

$$(-10)^{-3} = \left(-\frac{1}{10}\right)^3 = -\frac{1}{1000}$$

A lógica da inversão vale também quando a base é um número racional. No caso de o número racional estar na forma de decimal exato ou de dízima periódica, aconselha-se a buscar sua fração geratriz, facilitando, assim, a operação, para qualquer expoente inteiro:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$$

Repare no caso de $\frac{2}{3}^{-2}$, em que não há parênteses indicando que a base é a fração $\frac{2}{3}$; logo, a base do expoente -2 é apenas o 2. Assim, apenas ele, sendo base, será invertido, ou seja, $\frac{2^{-2}}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} = \frac{\frac{1}{4}}{3}$. Temos aqui uma divisão entre frações, já estudada anteriormente, cuja resolução é $\frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

Exercícios

1. Calcule o valor numérico das potências a seguir.

a) 4^3

b) 5^4

c) $(-4)^3$

d) $(-5)^4$

e) -4^3

f) -5^4

g) 0^3

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

i) $\left(\frac{5}{3}\right)^4$

j) 6^{-1}

k) 5^{-4}

l) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

m) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

n) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$

2. Determine os valores numéricos das potências de 10. Caso seja um número menor que 1, determine sua forma decimal.

a) 10^3

b) 10^2

c) 10^1

d) 10^0

e) 10^{-1}

f) 10^{-2}

g) 10^{-3}

h) 10^{-4}

Propriedades das potências

Vamos desenvolver as propriedades das potências por meio de exemplos.

Exemplos:

a. No cálculo do valor de $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$, pela definição de potência temos que $2^2 = 2 \cdot 2$, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ e $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Assim, $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^4} =$

$= 2^{2+3+4} = 2^9 = 512$

Repare que a multiplicação das potências de base 2 gerou uma única potência de base 2, cujo expoente é a soma dos expoentes das potências multiplicadas. Essa é a nossa primeira propriedade, que pode ser generalizada como:

Propriedade 1

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Mesmo operando com expoentes negativos a propriedade se verifica, devendo haver apenas o cuidado com a soma de termos positivos e/ou negativos. Esse raciocínio vale para todas as propriedades e devemos, sempre, ficar atentos às regras de sinais.

b. Para calcular o valor de $2^4 : 2^2$, temos que $2^4 : 2^2 = \frac{2^4}{2^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2}$. Simplificando essa fração, obtemos: $2^4 : 2^2 = \frac{2^4}{2^2} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{4-2} = 2^2 = 4$.

Verificamos que o resultado de uma divisão entre potências de mesma base é obtido pela diferença entre os expoentes do dividendo (numerador) e do divisor (denominador). De forma geral, temos:

Propriedade 2

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

A ordem na subtração deve ser respeitada. Se o valor de n for maior que o de m, teremos como diferença um valor negativo, que podemos manter, representando o quociente na forma de potência, ou resolver, calculando seu valor numérico.

c. Para o cálculo do valor numérico de $(3^{-2})^3$, utilizando a definição de potência, temos:

$$(3^{-2})^3 = (3^{-2}) \cdot (3^{-2}) \cdot (3^{-2}) = 3^{(-2)+(-2)+(-2)} =$$

$$= 3^{3 \cdot (-2)} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$$

Nesse exemplo, verificamos que, usando a definição de potência e a Propriedade 1, adicionamos o expoente -2 três vezes. Isso pode ser visto da seguinte maneira:

Propriedade 3

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Repare que os parênteses indicam que a base é uma potência, o que caracteriza o produto entre os expoentes. No caso de os parênteses não aparecerem, a base será apenas o número abaixo dos expoentes e, neste caso, o expoente será uma nova potência. Observe:

d. Para calcular 2^{3^4}, como não há parênteses indicando uma base específica, a base é o 2, que possui como expoente a potência 3^4. Devemos começar resolvendo essa potência e depois, com seu valor definido, resolver a potência de base 2. Assim, como $3^4 = 81$, concluímos que $2^{3^4} = 2^{81}$. Para esse exemplo, deixaremos a resposta na forma de potência, pois esse valor é extremamente grande.

e. No cálculo do valor de $(2 \cdot 3)^3$, poderíamos calcular o valor da base e aplicar o conceito de potência, porém buscaremos demonstrar o passo a passo para demonstrarmos a próxima propriedade.

Pela definição de potência, podemos afirmar que $(2 \cdot 3)^3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$. Considerando que a ordem dos fatores não altera o produto, podemos rearranjar esses fatores do seguinte modo: $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^3$. Assim, verificamos que $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 216$. Logo:

Propriedade 4

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

Interessante perceber que, caso o produto que forma a base seja, por sua vez, formado por potências, a lógica da Propriedade 3 se aplica, isto é, multiplicamos o expoente da potência pelos expoentes das potências que compõem a base:

$$(a^m \cdot b^n)^p = a^{m \cdot p} \cdot b^{n \cdot p}$$

f. No cálculo de $(2^4 \cdot 5^3)^2$, utilizando a mesma estratégia do exemplo anterior, temos:

$$(2^4 \cdot 5^3)^2 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 2^4 \cdot 5^3 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 5^3 \cdot 5^3 = 2^8 \cdot 5^6$$

Utilizando a consequência da Propriedade 4, temos:

$$(2^4 \cdot 5^3)^2 = 2^{4 \cdot 2} \cdot 5^{3 \cdot 2} = 2^8 \cdot 5^6$$

Para a divisão, a lógica é a mesma, logo:

Propriedade 5

$$(a : b)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Consequentemente:

$$\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{m \cdot p}}{b^{n \cdot p}}$$

É sempre bom lembrar que o sinal de igual na Matemática indica uma via de mão dupla, isto é, se as propriedades são definidas com seus resultados apresentados à direita, então esses resultados também geram a igualdade da esquerda. É muito comum a "volta" de propriedades para a simplificação de expressões ou até mesmo na resolução de exercícios.
Podemos também ter expressões que exigem o uso de mais que uma propriedade. Nesses casos, é interessante começarmos com a resolução das propriedades que envolvem potências para depois trabalharmos com as que envolvem multiplicação e divisão. Observe o exemplo a seguir.

g. Para simplificar a expressão $\dfrac{(2^2)^{-3} \cdot 2^7 \cdot (2 \cdot 3^2)^4}{3^3 \cdot 2^{-2}}$, começamos pela propriedade que envolve potência de potência, ou seja, $(2^2)^{-3} = 2^{-6}$ e $(2 \cdot 3^2)^4 = 2^4 \cdot 3^8$. Em seguida, podemos utilizar a propriedade do produto de potências de mesma base, gerando $\dfrac{2^{-6} \cdot 2^7 \cdot 2^4 \cdot 3^8}{3^3 \cdot 2^{-2}} = \dfrac{2^5 \cdot 3^8}{3^3 \cdot 2^{-2}}$. Por fim, simplificamos as potências de mesma base, obtendo $\dfrac{2^5 \cdot 3^8}{3^3 \cdot 2^{-2}} = 2^{5-(-2)} \cdot 3^{8-3} = 2^7 \cdot 3^5$

Exercícios

3. Utilizando as propriedades das potências, simplifique as expressões deixando o resultado na forma de potência.

a) $2^2 \cdot 2^5 \cdot 2^{10}$

b) $3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 3^7 \cdot 3^{-10}$

c) $\dfrac{2^{10}}{2^4}$

d) $\dfrac{3^7}{3^{-3}}$

e) $\dfrac{5^{-2}}{5^{-4}}$

f) $\dfrac{10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{10^3 \cdot 10^{-4}}$

g) $(2^3)^4$

h) $(-2^3)^4$

i) 2^{3^4}

j) $(3^{-2})^{-1}$

k) $(2^2 \cdot 3^3)^2$

l) $(5^{-2} \cdot 3^4)^{-2}$

m) $\left(\dfrac{2^3}{7^{10}}\right)^3$

n) $\left(-\dfrac{2^2}{3^3}\right)^4$

o) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$

p) $\left(\dfrac{3^7}{5^5}\right)^{-3}$

4. Simplifique as expressões deixando o resultado na forma de potência.

a) $\dfrac{2^2 \cdot 2^{-3} \cdot (2^2)^3}{2^{-5}}$

b) $\dfrac{3^3 \cdot (2^5 \cdot 3^{-2})^2 \cdot 2^4}{(-3)^4}$

Raízes

A radiciação é a operação inversa da potenciação. Uma das propriedades das potências de expoente racional é a transformação para raízes. Primeiro vamos definir raízes e suas propriedades para então apresentarmos as potências de expoente racional.

Definição de raiz

Considere um número real a e um número natural n diferente de zero. Dizemos que a raiz n-ésima de a é um número b tal que $b^n = a$, e é representado por $\sqrt[n]{a}$. O símbolo $\sqrt{\ }$ é chamado de radical, a é o radicando, n é o índice do radical e b é o valor da raiz n-ésima de a. Por exemplo:

$$\sqrt[2]{4} = 2 \Rightarrow 2^2 = 4$$
$$\sqrt[3]{64} = 4 \Rightarrow 4^3 = 64$$
$$\sqrt[4]{625} = 5, \text{ pois } 5^4 = 625$$

Quando o índice for igual a 2 ou a 3, como nos exemplos, nos referimos às raízes como "raiz quadrada" ou "raiz cúbica". Nas expressões anteriores, lemos que a raiz quadrada de 4 é igual a 2 e que a raiz cúbica de 64 é igual a 4. Além disso, por conveniência, não é preciso escrever o índice da raiz quando ele for igual a 2, isto é, sempre que tivermos o radical com o índice omitido saberemos que se trata de uma raiz quadrada. Veja mais alguns exemplos:

$$\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow 3^2 = 9$$
$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$
$$\sqrt{0,01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} = 0,01$$
$$\sqrt{1} = 1 \Rightarrow 1^2 = 1$$
$$\sqrt[3]{1} = 1 \Rightarrow 1^3 = 1$$
$$\sqrt[3]{-1} = -1 \Rightarrow (-1)^3 = -1$$

Para o caso das raízes cujo índice é um número par, o radicando deverá obrigatoriamente ser um número **não negativo**. Isso se deve ao fato de que todo número real, quando elevado a um expoente par, resulta em um número não negativo. Essa ressalva não ocorre para expoentes ímpares, o que implica que o radicando poderá assumir valores negativos para raízes com índice ímpar. Por exemplo, não existe $\sqrt{-2}$, nem $\sqrt[4]{-2}$, nem qualquer outra raiz de índice par de -2, pois nenhuma potência de base real e expoente par pode ser negativa. No entanto, estão bem definidas as raízes $\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt[5]{-2}$ e outras raízes de índice ímpar de -2.

Outro ponto importante no que se refere à paridade do índice é o fato de que, no conjunto dos números reais, a raiz de um número deve ser única. Assim, se n for par e a positivo, sempre tomaremos b como sendo um número positivo, mesmo existindo outro número (negativo) que elevado a n resulte em a. Como exemplo, note que $5^2 = 25$, mas também $(-5)^2 = 25$. Nesse caso, a raiz quadrada de 25 é 5. Para índices ímpares, no entanto, não há necessidade de termos essa mesma precaução dado que bases distintas levarão a diferentes potências. Veja os exemplos a seguir:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow 2^3 = 8$$
$$\sqrt[3]{-8} = -2 \Rightarrow (-2)^3 = -8$$
$$\sqrt[5]{32} = 2 \Rightarrow 2^5 = 32$$
$$\sqrt[5]{-32} = -2 \Rightarrow (-2)^5 = -32$$

Exercício

5. Calcule o valor das raízes.

a) $\sqrt{49}$

b) $\sqrt{81}$

c) $\sqrt{121}$

d) $\sqrt{256}$

e) $\sqrt[3]{27}$

f) $\sqrt[3]{729}$

g) $\sqrt[3]{-1000}$

h) $\sqrt[4]{81}$

i) $\sqrt[5]{-243}$

j) $\sqrt[7]{-128}$

k) $\sqrt[10]{1024}$

l) $\sqrt{\frac{1}{16}}$

m) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

n) $\sqrt{0,444...}$

o) $\sqrt[3]{-0,125}$

p) $\sqrt[5]{-0,00001}$

Potência de expoente racional

Conhecendo um pouco sobre potências de expoente inteiro, podemos agora estudar as potências de expoente racional, que serão referência para a verificação de algumas propriedades úteis e importantes.

Seja $a^{\frac{m}{n}}$ uma potência de expoente racional, com $a \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$, podemos relacionar essa potência com uma raiz, como mostra a igualdade a seguir: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Note:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$$
$$3^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{3^3}$$

Quando o expoente for um número negativo, o sinal fica com o numerador, elevando a base da potência dentro da raiz:

$$5^{-\frac{2}{3}} = 5^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}}$$

Lembrando que o sinal de igualdade é uma via de mão dupla, podemos considerar também a transformação de uma raiz em potência. Observe:

$$\sqrt[4]{3^7} = 3^{\frac{7}{4}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$$

Exercício

6. Transforme as potências em raízes e as raízes em potências de expoente racional.

a) $2^{\frac{1}{4}}$

b) $5^{\frac{2}{3}}$

c) $17^{-\frac{2}{9}}$

d) $4^{\frac{5}{2}}$

e) $\sqrt[4]{3^3}$

f) $\sqrt[6]{6^{-3}}$

g) $\sqrt{3}$

Propriedades das raízes

Diferentemente do que fizemos na potenciação, vamos apresentar as propriedades dos radicais e, em seguida, mostraremos exemplos com suas aplicações. Em todos os casos, considere a e b positivos. Assim:

Propriedade 1

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Esta propriedade pode ser ampliada para quantos fatores com raízes de mesmo índice tivermos. Por exemplo:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt[3]{210}$$

Propriedade 2

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Observe os exemplos a seguir:

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{6}{2}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\frac{\sqrt[5]{18}}{\sqrt[5]{20}} = \sqrt[5]{\frac{18}{20}} = \sqrt[5]{\frac{9}{10}}$$

Propriedade 3

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Observe os exemplos a seguir:

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{2}} = \sqrt[3 \cdot 2]{2} = \sqrt[6]{2}$$

$$\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[2 \cdot 2]{5} = \sqrt[4]{5}$$

Propriedade 4

$$\sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Observe os exemplos a seguir:

$$\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^{1 \cdot 2}} = \sqrt[3]{2^1}$$

$$\sqrt[12]{8} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[4 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[4]{2^1}$$

$$\sqrt[10]{16} = \sqrt[10]{2^4} = \sqrt[5 \cdot 2]{2^{2 \cdot 2}} = \sqrt[5]{2^2}$$

Neste último exemplo, podemos desenvolver o radicando ou deixá-lo na forma de potência.

Propriedade 5

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p = \sqrt[m]{a^{n \cdot p}}$$

Observe os exemplos a seguir:

$$\left(\sqrt[10]{2^2}\right)^3 = \sqrt[10]{2^6}$$

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^{1 \cdot 2}} = \sqrt[3]{5^2}$$

As propriedades apresentadas são muito utilizadas em ambos os sentidos. No caso, a volta da propriedade 1 nos possibilita a simplificação de raízes.

Observe a simplificação de $\sqrt{12}$.

Inicialmente, podemos fatorar o radicando:

$$12 = 2^2 \cdot 3.$$

Considerando a propriedade 1, temos:

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Repare que, separando 2^2 e 3 em duas raízes, podemos extrair a raiz de 2^2, que é exata e vale 2, o que não é possível com a raiz de 3. Esse processo é muito importante e frequente em questões que envolvem raízes irracionais.

Exercícios resolvidos

1. Simplifique $\sqrt[3]{54}$.

Resolução:

Fatorando 54, obtemos: $54 = 2 \cdot 3^3$. Assim:

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

Note que, para simplificar as raízes, buscamos potências cujo expoente seja igual ao índice da raiz. Caso o expoente seja maior, podemos separá-lo em uma multiplicação de potências de mesma base.

2. Simplifique $\sqrt{360}$.

Resolução:

Fatorando o número 360, obtemos: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Aplicando a Propriedade 1, temos:

$$\sqrt{360} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5}$$

Observando que o expoente do 2 é maior que 2 (índice do radical), podemos separá-lo do seguinte modo:

$$\sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2^1} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^1}$$

Finalmente, temos:

$$\sqrt{360} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$$

Como não há mais simplificações possíveis, da Propriedade 1, chegamos a $\sqrt{360} = 6\sqrt{10}$.

3. Simplifique $\sqrt{12} + \sqrt{75}$.

Resolução:

Podemos observar que os radicandos são (aparentemente) distintos, porém, podemos simplificá-los:

$$\begin{cases} \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5^2} = 5\sqrt{3} \end{cases}$$

Assim, temos:

$$\sqrt{12} + \sqrt{75} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

4. Simplifique a expressão $\sqrt{18} + 2\sqrt{50} - 4\sqrt{32}$.

Resolução:

Fatorando os radicandos:

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} = 3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} = 5\sqrt{2}$$
$$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^1} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^1} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Assim, substituindo os valores obtidos na expressão, temos:

$$\sqrt{18} + 2\sqrt{50} - 4\sqrt{32} = 3\sqrt{2} + 2 \cdot 5\sqrt{2} - 4 \cdot 4\sqrt{2} =$$
$$= 3\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 16\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$$

No capítulo 1 trabalhamos operações com os números racionais. Para os números irracionais devemos observar que a multiplicação e a divisão ocorrem com a utilização das propriedades apresentadas, e só são possíveis se os índices dos radicais forem iguais. Em relação à adição e à subtração, podemos realizá-las apenas se as raízes forem exatamente iguais, ou seja, mesmo índice e mesmo radicando.

Exercícios

7. Utilizando as propriedades das raízes, simplifique as expressões chegando a um único radical na forma mais simplificada possível.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{9}$

c) $\dfrac{\sqrt[5]{20}}{\sqrt[5]{4}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7}}$

e) $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{10}}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{30}}$

g) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{2}}$

h) $\sqrt{\sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{8}$

i) $\sqrt[8]{2^2}$

j) $\sqrt[4]{9}$

k) $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt{3}$

8. Simplifique os radicais chegando a um único radical na forma mais simplificada possível.

a) $\sqrt{8} + \sqrt{18}$

b) $\sqrt{12} + 2\sqrt{48} - 3\sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{24} + 2\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{375}$

d) $\sqrt{50} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{2}$

e) $5\sqrt{162} + 2\sqrt{75} - 3\sqrt{98} + 4\sqrt{50} + 3\sqrt{192} - 5\sqrt{432}$

Racionalização

Existem algumas convenções, em Matemática, sobre a forma na qual devemos apresentar os resultados numéricos obtidos em uma expressão ou equação, sendo a racionalização uma ferramenta para se chegar a uma delas. A racionalização de um denominador é uma ferramenta que torna racional o valor desse denominador.

Não há diferença numérica entre os números $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, porém, convencionalmente, não apresentamos raízes nos denominadores de frações. Nos próximos exemplos veremos os principais casos de racionalização.

Exemplos:

a. Como citado, a racionalização tem como objetivo tornar o número irracional, que forma o denominador da fração, em um número racional. Assim, para racionalizar o denominador da fração $\frac{1}{\sqrt{2}}$, devemos multiplicá-lo por um número irracional de modo a atingir tal objetivo.
Devemos também lembrar que, se multiplicarmos o denominador por um número, devemos fazer o mesmo com o numerador, para obter uma fração equivalente à inicial, isto é, para que o valor dessa fração não se altere. Nesse caso, multiplicaremos o numerador e o denominador por $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Perceba que a multiplicação por $\sqrt{2}$ veio da ideia de obtermos um número racional no denominador. Logo, consideramos uma raiz de mesmo índice da que aparece no denominador, de modo que, ao multiplicarmos os radicandos, cheguemos a uma raiz possível de ser extraída.

b. Para racionalizar $\frac{2}{\sqrt{6}}$, basta multiplicar o numerador e o denominador da fração por $\sqrt{6}$:

$$\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Sempre simplifique a fração caso exista tal possibilidade. De modo geral, quando o denominador for uma raiz quadrada, basta multiplicarmos numerador e denominador pela própria raiz que o processo será feito, porém essa estratégia não vale para qualquer índice. Devemos lembrar que a ideia é extrair uma raiz exata do denominador, portanto devemos ficar atentos na escolha da raiz que fará isso ocorrer.

c. Para racionalizar a fração $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$, observamos que a multiplicação do denominador por $\sqrt[3]{2}$ não surtirá efeito na racionalização, uma vez que teremos como produto $\sqrt[3]{4}$, que não possui valor necessário para que a raiz seja extraída. Para atingir o objetivo pretendido, devemos multiplicar numerador e denominador por $\sqrt[3]{2^2}$. Logo:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^{1+2}}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

Para esse tipo de racionalização devemos observar que, no denominador, a soma dos expoentes dos radicandos deve ser igual ao índice do radical. Assim, não precisamos considerar números cujas raízes serão exatas, e podem ser, em alguns momentos, valores muito grandes.

d. Para racionalizar $\frac{5}{\sqrt[5]{8}}$, inicialmente fatoramos o radicando, chegando a $\frac{5}{\sqrt[5]{2^3}}$. Para que haja uma raiz exata no denominador, precisaremos multiplicá-lo por $\sqrt[5]{2^2}$, uma vez que $\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[5]{2^{3+2}} = \sqrt[5]{2^5} = 2$.

Assim:

$$\frac{5}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{5}{\sqrt[5]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{5\sqrt[5]{4}}{2}.$$

Podemos, conforme interessar ou não, desenvolver a potência no radicando da raiz do numerador.
Por fim, o último caso importante de racionalização envolve a adição (ou subtração) entre raízes quadradas ou uma raiz quadrada e um número inteiro. Usaremos, nesses casos, o resultado de um produto notável conhecido como o *produto da soma pela diferença de dois termos*. Tal resultado gera uma diferença de quadrados: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$. A demonstração dessa igualdade será feita no capítulo dos produtos notáveis.

e. Para racionalizar o denominador de $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$, utilizando o produto notável citado, devemos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{2} + 1$, gerando:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + 1)} =$$

$$= \frac{1 \cdot (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

f. Racionalizamos $\frac{4}{\sqrt{6} + 2}$ multiplicando numerador e denominador por $\sqrt{6} - 2$. Assim:

$$\frac{4}{(\sqrt{6} + 2)} = \frac{4}{(\sqrt{6} + 2)} \cdot \frac{(\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6} - 2)} = \frac{4(\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6})^2 - 2^2} =$$

$$= \frac{4(\sqrt{6} - 2)}{6 - 4} = \frac{4(\sqrt{6} - 2)}{2} = 2(\sqrt{6} - 2) = 2\sqrt{6} - 4$$

g. Para racionalizar $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$, o fato de o denominador ter duas raízes não muda o processo:

$$\frac{2}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{2}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3}$$

Exercício

9. Racionalize os denominadores deixando as frações em sua forma irredutível.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

e) $\frac{2}{\sqrt[4]{2}}$

f) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$

g) $\frac{10}{\sqrt[5]{125}}$

h) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$

i) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$

j) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

k) $\frac{10}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$

l) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

Notação científica

Como o próprio nome define, notação científica é uma forma de representação dos números utilizados na ciência, uma vez que esses números podem ser muito grandes, como a distância entre planetas, ou muito pequenos, como o raio de um átomo. Para demonstrar tais números e operar com eles é interessante representá-los de maneira prática.

A notação científica consiste em representar determinado número como um produto por uma potência de 10, ou seja, podemos apresentá-lo na forma $a \times 10^n$, onde $1 < a < 10$ em que $a \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplos:

a. Lembrando que, ao multiplicarmos um número por 10, o resultado prático é o deslocamento da vírgula uma casa para a direita, note que $1{,}23 \times 10 = 12{,}3$; se multiplicarmos por 100, deslocamos 2 casas para a direita e assim por diante. Para escrever em notação científica o número 1 250 devemos determinar um número entre 1 e 10 que, multiplicado por uma potência de 10, tenha como produto 1 250. Observe que, nesse caso, considerando o número 1,250 (valor entre 1 e 10) e multiplicando-o por 1 000, obtemos 1 250. Assim, temos que $1\,250 = 1{,}250 \times 10^3$. Como o zero à direita do 5 não possui significado numérico, obtemos: $1\,250 = 1{,}25 \times 10^3$.

b. Para escrever em notação científica o número 1 020 000, procedemos da mesma forma, considerando um número entre 1 e 10 que, multiplicado por uma potência do tipo 10^n, resulte 1 020 000, temos o número 1,02. Repare que já eliminamos os zeros à direita por serem desnecessários na sua escrita, porém são fundamentais no número original. Para que o fator 1,02 gere um produto 1 020 000 precisaremos multiplicá-lo por $1\,000\,000 = 10^6$.
Assim, $1\,020\,000 = 1{,}02 \times 10^6$.
Há uma maneira prática para a determinação da notação científica. Identificamos a posição da vírgula (lembre-se de que, se ela não aparecer, está implícita após o último algarismo que compõe o número) e contamos quantas casas andaremos com ela até chegarmos ao número entre 1 e 10 buscado.

c. Para escrever em notação científica o número 1 240,3 devemos verificar que a vírgula será deslocada 3 casas para a esquerda, e obtemos 1,2403, que é a representação entre 1 e 10 que buscamos. Note que esse numero deverá ser multiplicado por 10^3, ou seja, 10 elevado à quantidade de casas que andamos para a esquerda. Desse modo, verificamos que $1\,240{,}3 = 1{,}2403 \times 10^3$.
Chegamos, assim, a uma conclusão importante: para cada casa que deslocamos a vírgula para a esquerda, o expoente do 10 fica uma unidade maior.

d. Podemos escrever em notação científica 120×10^4, que já está com a característica da notação, mas o primeiro fator não é um valor entre 1 e 10. Assim, analisamos somente o 120 para depois juntarmos o 10^4. Deslocando a vírgula 2 casas para a esquerda, chegamos a $1{,}20 \times 10^2$ pela regra vista anteriormente. Logo, $120 \times 10^4 = 1{,}20 \times 10^2 \times 10^4 = 1{,}20 \times 10^6$.
Quando os números são muito pequenos, o processo basicamente é o mesmo, porém teremos expoentes negativos para a potência de base 10. Uma maneira de ver isso é por meio da razão entre os números. Observe que podemos escrever em notação científica o número 0,0000024, considerando-o na forma de fração $\frac{0{,}0000024}{1} = \frac{24}{10000000} = \frac{24}{10^7} = 24 \times 10^{-7}$.
Assim, como vimos anteriormente, ajustamos apenas o número 24. Como $24 = 2{,}4 \times 10^1$, temos que $0{,}0000024 = 2{,}4 \times 10^1 \times 10^{-7} = 2{,}4 \times 10^{-6}$.
Uma forma prática de pensar a transformação de um número muito pequeno em notação científica é deslocando a vírgula para a direita e, nesse processo, para cada casa deslocada temos a adição de -1 ao expoente do 10.

e. Escrevemos 0,0004 em notação científica deslocando a vírgula 4 casas para a direita, obtendo 4. Como deslocamos a vírgula 4 casas para a direita, a potência de 10 será 10^{-4}, assim $0{,}0004 = 4 \times 10^{-4}$.
É muito comum trabalharmos operações com notações científicas. As multiplicações, divisões, potências e raízes seguem as propriedades já estudadas, lembrando apenas que devemos deixar a resposta em notação científica.

f. Para multiplicar $(2 \times 10^4) \times (8 \times 10^{-6})$, faremos, separadamente, o produto entre os números, que não são as potências, e o produto entre as potências de 10. Os parênteses aqui aparecem apenas para identificar os dois números na notação científica, pois como todos os números se multiplicam na expressão, na realidade, não há necessidade dos parênteses.
Assim, $2 \times 8 \times 10^4 \times 10^{-6} = 16 \times 10^{-2}$ que, em notação científica, torna-se $1{,}6 \times 10^{-1}$ (lembre-se de que deslocar a vírgula uma casa para a esquerda implica adicionar 1 ao expoente do 10).

g. De maneira similar, para calcular $(2 \times 10^4) : (8 \times 10^{-6})$, dividiremos, separadamente, os números e as potências de 10:

$$(2 \times 10^4) : (8 \times 10^{-6}) = \frac{2 \times 10^4}{8 \times 10^{-6}} = \frac{2}{8} \times \frac{10^4}{10^{-6}} =$$

$$= 0{,}25 \times 10^{4-(-6)} = 0{,}25 \times 10^{10}$$

Deslocando a vírgula uma casa para a direita, obtemos:

$$0{,}25 \times 10^{10} = 2{,}5 \times 10^{-1} \times 10^{10} = 2{,}5 \times 10^9$$

Devemos tomar cuidado com as adições e subtrações em notação científica, pois elas são possíveis apenas quando os termos tiverem a mesma potência de 10. Caso essas potências sejam diferentes, devemos igualá-las a fim de realizar a operação.

h. No cálculo de $2 \times 10^4 + 7 \times 10^5$, temos dois valores, em notação científica, cujas potências de 10 são diferentes. Se fossem iguais adicionaríamos os números 2 e 7 e manteríamos a potência de 10, tal qual na álgebra quando temos $2x + 7x$ chegando a $9x$. Porém, não é o caso aqui, sendo necessário o ajuste dessas potências. É indiferente transformar o 10^4 em 10^5 ou o contrário, mas é mais comum fazer o maior número chegar ao menor por se tratar de multiplicações por 10. Assim, $7 \times 10^5 = 70 \times 10^4$ pois andamos uma casa com a vírgula do número 7 para a direita e, ao fazermos isso, adicionamos -1 ao expoente do 10. Assim:

$$2 \times 10^4 + 70 \times 10^4 = (2 + 70) \times 10^4 = 72 \times 10^4 = 7{,}2 \times 10^5.$$

i. No cálculo de $2{,}4 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-4}$, novamente devemos igualar os expoentes das potências de 10 para efetuarmos a subtração. Devemos apenas ter cuidado na identificação do maior número que, neste caso, é o $2{,}4 \times 10^{-3}$. Usando a mesma estratégia do exemplo anterior, temos que $2{,}4 \times 10^{-3} = 24 \times 10^{-4}$, assim:

$$2{,}4 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-4} = 24 \times 10^{-4} - 2 \times 10^{-4} =$$

$$= (24 - 2) \times 10^{-4} = 22 \times 10^{-4} = 2{,}2 \times 10^{-3}$$

Exercícios

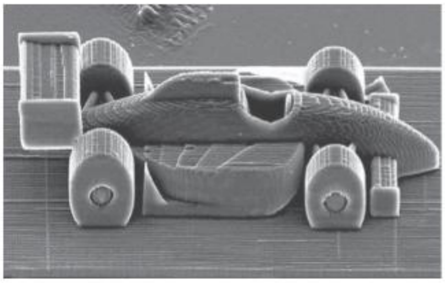
10. Escreva os números a seguir na forma de notação científica.

a) 24
b) 1 550
c) 5 731 000
d) 14 476 001
e) 0,02
f) 0,01
g) 0,000045
h) 0,000000401

11. Resolva as operações deixando seus resultados na forma de notação científica.

a) $7 \times 10^3 + 8 \times 10^3$
b) $5 \times 10^{-3} - 4 \times 10^{-3}$
c) $(4 \times 10^4) \times (7 \times 10^2)$
d) $(1{,}2 \times 10) \times (1 \times 10^{-4})$
e) $(5 \times 10^{-2}) \times (8 \times 10^6)$
f) $(8 \times 10^4) : (2 \times 10^2)$
g) $(9 \times 10^3) : (2 \times 10^{-4})$
h) $(3 \times 10^{-2}) : (6 \times 10^{-5})$
i) $7 \times 10^4 + 3 \times 10^3$
j) $5 \times 10^2 + 6 \times 10^4$
k) $3 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-4}$
l) $3{,}2 \times 10^6 - 2 \times 10^4$
m) $\dfrac{4 \times 10^3 + 2 \times 10^4}{6 \times 10^{-2}}$

12. **Enem 2020** Pesquisadores da Universidade de Tecnologia de Viena, na Áustria, produziram miniaturas de objetos em impressoras 3D de alta precisão. Ao serem ativadas, tais impressoras lançam feixes de laser sobre um tipo de resina, esculpindo o objeto desejado. O produto final da impressão é uma escultura microscópica de três dimensões, como visto na imagem ampliada.



A escultura apresentada é uma miniatura de um carro de Fórmula 1, com 100 micrômetros de comprimento. Um micrômetro é a milionésima parte de um metro. Usando notação científica, qual é a representação do comprimento dessa miniatura, em metro?

a) $1{,}0 \times 10^{-1}$
b) $1{,}0 \times 10^{-3}$
c) $1{,}0 \times 10^{-4}$
d) $1{,}0 \times 10^{-6}$
e) $1{,}0 \times 10^{-7}$

Rafael Berlandi/Shutterstock.com

FRENTE ÚNICA

CAPÍTULO

3

Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum

Você já lidou um pouco com o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum no capítulo 1, quando estudou as frações equivalentes; porém, em Matemática, esses conceitos são utilizados também em diversas outras situações, principalmente aquelas que envolvem a ideia de repetições em ciclos distintos, como a frequência de partidas de ônibus em um terminal, e aquelas que envolvem a divisão em quantidades iguais.

Por isso, neste capítulo, trabalharemos esses conceitos, definiremos o conjunto dos números primos e resolveremos exercícios contextualizados sobre o tema.

Múltiplos

A definição de múltiplo, no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, está relacionada ao resultado da multiplicação entre dois números naturais.

> Um número natural a é **múltiplo** de um número natural b se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b \cdot k = a$.

Por exemplo, dizemos que 6 é múltiplo de 2, pois $2 \cdot 3 = 6$.

Esse conceito é estendido para o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Por exemplo, verificamos que -8 é múltiplo de 2, pois $2 \cdot (-4) = -8$. Pelo resto deste capítulo, seguiremos considerando a definição de múltiplo no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$.

Divisores

A definição de divisor está ligada à de múltiplo, porém com outro olhar. Note que, na definição de múltiplos, dizemos que 6 é múltiplo de 2, uma vez que $2 \cdot 3 = 6$. Agora, dizemos que 6 é divisível por 2, uma vez que $2 \cdot 3 = 6$, ou seja, existe um número inteiro (no caso, 3) cujo produto com 2 gera o 6. Perceba que também podemos afirmar que 6 é divisível por 3, uma vez que existe um número inteiro (no caso, 2) tal que $3 \cdot 2 = 6$. Logo, temos que 2 e 3 são divisores de 6.

De modo geral, temos:

> Um número inteiro b é **divisor** de um número inteiro a se, e somente se, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b \cdot k = a$. Nesse caso, dizemos que "b divide a", ou que "a é divisível por b".

Perceba que os divisores de um número inteiro a são todos os números inteiros que dividem a deixando resto zero.

É importante que, neste momento, fique clara a diferença entre múltiplo e divisor, uma vez que as definições vêm da mesma relação $b \cdot k = a$. Repare que a é o produto entre dois números inteiros, então a é múltiplo de b e, ao mesmo tempo, a é divisível por b, uma vez que o resultado da divisão de a por b é o número inteiro k. Também podemos dizer que b é um divisor de a, ou, ainda, b é um **fator** de a, uma vez que podemos escrever a como o produto entre b e um número inteiro k.

> **Fatores** de um número inteiro a são números inteiros cujo produto tem como resultado o inteiro a.

Mais adiante trabalharemos a decomposição de um número inteiro no que chamaremos de fatores primos.

Para determinar se um número é divisor ou fator de outro número, realizamos a divisão estudada no capítulo 1.

Exemplos:

a. 372 é múltiplo de 12.

Repare que, pela definição de múltiplo, se 372 é múltiplo de 12, deve existir um número inteiro k de modo que $12 \cdot k = 372$. Para determinar k realizamos a divisão de 372 por 12. Com isso, a pergunta do exemplo poderia ser "372 é divisível por 12?". Assim, caso seja divisível, 12 será um divisor (ou fator) de 372. Realizando a divisão, encontramos quociente 31 e resto zero. Assim, $12 \cdot 31 = 372$ e, consequentemente, 372 é um múltiplo de 12 e 12 é um divisor de 372.

b. 225 é múltiplo de -5.

Verificamos que 225 é múltiplo de -5 ao dividir 225 por -5 e obter quociente -45 e resto zero. Assim, temos que $(-5) \cdot (-45) = 225$, podemos afirmar que 225 é múltiplo de -5 e que -5 é divisor de 225.

No primeiro exemplo, provavelmente você teve de fazer a divisão para ter certeza da resposta, mas no segundo é bem provável que você já soubesse que 225 era múltiplo de -5, mesmo realizando a divisão para determinar o quociente. Isso porque os múltiplos de 5 ou -5 têm sempre um mesmo perfil: o algarismo das unidades é sempre 0 ou 5.

Veremos a seguir alguns critérios de divisibilidade que auxiliarão na determinação de divisores e múltiplos de um número inteiro qualquer.

Principais critérios de divisibilidade

Divisibilidade por 2

Um número inteiro será divisível por 2 quando tiver o algarismo das unidades par.

Exemplos:

a. 4 236 é divisível por 2, uma vez que o algarismo das unidades é 6, que é par. No caso, o quociente da divisão será 2 118.

b. 329 não é divisível por 2, uma vez que o algarismo das unidades é 9, que é ímpar. Essa divisão deixará resto que, a saber, será 1.

Divisibilidade por 3

Um número inteiro é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos for um múltiplo de 3.

Exemplos:

a. Para verificar se o número 249 é divisível por 3, sem efetuar a divisão, basta determinar a soma dos algarismos que o compõem, no caso, temos $2 + 4 + 9 = 15$. Como 15 é múltiplo de 3, então 249 é divisível por 3. O resultado dessa divisão é 83.

b. O número 999 693 249 é divisível por 3, pois $9 + 9 + 9 + 6 + 9 + 3 + 2 + 4 + 9 = 60$. Caso o resultado da soma dos algarismos não deixe evidente tratar-se de um número divisível ou não por 3, podemos repetir o processo. Nesse caso, $6 + 0 = 6$, que é um múltiplo de 3 ou, ainda, é divisível por 3.

Divisibilidade por 4

Um número inteiro é divisível por 4 quando seus dois últimos algarismos formarem, na ordem em que aparecerem, um número múltiplo de 4.

Exemplos:

a. Verifica-se que o número -132 é divisível por 4, pois o número formado pelos dois últimos algarismos, no caso 32, é um múltiplo de 4, ou seja, também é divisível por 4. Com isso, -132 também será.

b. O número 1 000 é divisível por 4, pois o número formado pelos seus dois últimos algarismos é zero, e zero é divisível por todo inteiro (exceto o próprio zero) e, consequentemente, múltiplo de qualquer inteiro também. Logo, 1 000 é divisível por 4.

Divisibilidade por 5

Um número inteiro é divisível por 5 quando seu algarismo das unidades for zero ou 5.

Divisibilidade por 6

Um número inteiro é divisível por 6 quando for, simultaneamente, divisível por 2 e por 3.

Exemplo:

O número 234 é divisível por 6, visto que é divisível por 2, pois o algarismo das unidades (no caso, 4) é par, e é divisível por 3, já que a soma dos seus algarismos é $2 + 3 + 4 = 9$, que é divisível por 3. Assim, por ser divisível simultaneamente por 2 e 3, verificamos que 234 é divisível por 6. A saber, o quociente da divisão é 39.

Divisibilidade por 8

Um número inteiro é divisível por 8 quando seus três últimos algarismos formarem, na ordem em que aparecerem, um número múltiplo de 8.

Exemplo:

Para saber se o número 1 176 é divisível por 8, tomamos o número formado pelos três últimos algarismos, que é 176. Efetuamos a divisão de 176 por 8 e, caso ela seja exata, concluímos que o número 1 176 também é divisível por 8. No caso, o quociente é 22 e o resto é zero; logo, 1 176 é de fato divisível por 8.

Divisibilidade por 9

Um número inteiro é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos for um número múltiplo de 9.

Exemplo:

Verifica-se que o número 3 483 é divisível por 9 adicionando os algarismos que o compõem. Assim, como $3 + 4 + 8 + 3 = 18$ e 18 é múltiplo de 9, então 3 483 é divisível por 9.

Divisibilidade por 10

Um número inteiro é divisível por 10 quando seu algarismo das unidades for zero.

Exercícios

1. Para cada um dos itens a seguir, verifique se o primeiro número dado é divisível pelo segundo. Lembre-se de usar os critérios de divisibilidade, sempre que possível.

a) 2 453 258 e 2
b) 345 891 e 3
c) 245 412 e 4
d) 123 455 e 5
e) 235 432 710 e 6
f) 421 128 e 8
g) 1 000 008 e 9
h) 450 220 e 10
i) 3 300 e 12
j) 5 876 e 13

2. Qual é o menor número natural que devemos adicionar ao número 2 147 para que a soma seja um número divisível por 3?

3. Determine qual é o menor algarismo que deve substituir X nos números a seguir para que satisfaçam o que é pedido.

a) 24X deve ser divisível por 3.
b) 2 4X2 deve ser divisível por 4.
c) 3 41X deve ser múltiplo de 6.
d) 4 324 X56 deve ser múltiplo de 8.

Divisores de um número inteiro

Depois de estudar os conceitos de divisores e múltiplos e também alguns critérios de divisibilidade, estudaremos o conjunto dos divisores de um número inteiro, não apenas um divisor específico. Para isso, precisamos **fatorar** esse número, escrevendo-o como um produto de números conhecidos como **números primos**.

Números primos

Definimos número primo como todo número inteiro *a*, diferente de ± 1 cujos únicos divisores são ± 1 e $\pm a$. Em outras palavras, um número é primo se tem apenas esses quatro divisores. Logo, o conjunto dos números primos, listando seus elementos, é:

$$\{\pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \pm 13, \pm 17, \pm 19, \pm 23, \pm 29, \pm 31, \pm 37, ...\}$$

Repare que todos os números listados têm como divisores apenas ± 1, o próprio número e seu oposto. Vale a pena ressaltar três situações aqui:

- os números ± 1 não são números primos;
- o conjunto dos números primos é infinito e não há um padrão para sua listagem;
- ± 2 são os únicos números primos pares.

Teorema fundamental da Aritmética

O teorema fundamental da Aritmética nos diz que:

Todo número inteiro maior do que 1 e não primo pode ser escrito como produto de números primos positivos de maneira única, a menos da ordem dos fatores primos.

O processo de fatoração é a decomposição de um número como o produto dos números primos que o compõem. Chamamos cada um desses números primos de fator primo do número decomposto.

Exemplos:

a. Para escrever o número 40 como um produto de fatores primos, nos valemos de um processo parecido com o de fatoração, já apresentado no capítulo 1 para determinação do mmc na adição e subtração de frações. Vamos recordá-lo agora com ênfase no processo e seu significado.

Para fatorar um número, devemos escrevê-lo com uma barra vertical à direita, onde posicionaremos os números primos, a começar com o 2, e realizamos a divisão, colocando o quociente abaixo do número que está sendo fatorado e repetindo o processo até que se chegue ao quociente 1.

40	2
20	2
10	2
5	5
1	$2^3 \cdot 5$

Note que iniciamos dividindo o 40 por 2, que é o menor número primo positivo que divide o valor inicial, obtendo 20 como resultado. Como 20 é divisível por 2, repetimos o processo, obtendo como resultado 10. Mais uma vez dividimos por 2, obtendo 5. Como não é possível dividir 5 por 2, pensamos no próximo número primo, que é 3, mas também não é possível. Assim, vamos ao próximo número primo, que é 5, cuja divisão por 5 gera o quociente 1, indicando o final da fatoração. Logo, podemos escrever 40 como o produto $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, ou seja, $40 = 2^3 \cdot 5$.

b. Fatorando o número 924, temos:

924	2
462	2
231	3
77	7
11	11
1	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$

Portanto, $924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$.

A forma fatorada de um número nos dá uma pista sobre os possíveis divisores desse número. Tomando o 40 como exemplo, temos que os divisores de 40 são ± 1, ± 2, ± 4, ± 5, ± 8, ± 10, ± 20 e ± 40. Como chegamos a essa conclusão? Tentando a divisão por cada um dos números (não necessariamente só os primos) até o 40.

Quanto às pistas a que nos referimos no parágrafo anterior, repare que todos os números que são divisores de 40 podem ser decompostos em fatores só com o número primo 2, ou só com o número primo 5, ou com uma combinação entre os dois. Por exemplo, $10 = 2 \cdot 5$ e $20 = 2^2 \cdot 5$. Até mesmo o 1 respeita essa regra, pois podemos considerar $1 = 2^0$, por exemplo. A conclusão a que chegamos é a seguinte: o divisor de um número inteiro será composto da combinação de algum ou de todos os fatores primos da decomposição desse número. Assim, não precisamos testar todos os números até 40 para buscar os divisores de 40, basta buscarmos aqueles cuja decomposição tenha só o fator 2, só o fator 5 ou uma combinação entre ambos. Por exemplo, nem precisamos testar a divisão de 40 por 15, uma vez que $15 = 3 \cdot 5$, e 3 é um fator primo que não aparece na decomposição do número 40.

Outra observação importante é que não basta que o divisor contenha o fator primo: esse fator deve ter como seu expoente um número natural menor ou igual ao expoente que aparece no resultado da fatoração do número dado. Note que se verifica que 16 não é um divisor de 40, pois $16 = 2^4$, um número composto do fator 2, também presente na fatoração do 40, porém a fatoração de $40 = 2^3 \cdot 5$ nos mostra que o expoente de 2 é 3, e o 16 tem o fator 2 elevado a 4, que é maior do que 3.

Exercícios

4. **PUC-Rio 2021** Lembre que um inteiro positivo *p* maior do que 1 é primo se os seus únicos divisores inteiros positivos forem 1 e *p*. Assim, por exemplo, 13 é primo mas 15 não é primo. Quantos números primos existem entre 40 e 50?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 5

5. Determine todos os divisores inteiros dos valores a seguir.

a) 12
b) 16
c) 30
d) 84
e) 495

Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum

Como visto anteriormente, para adicionar ou subtrair frações é necessário igualar seus denominadores e, para simplificar uma fração buscando uma fração equivalente, dividimos numerador e denominador pelo mesmo número até que isso não seja mais possível. Nessas duas situações está implícita a possibilidade de utilização do mínimo múltiplo comum (mmc) e do máximo divisor comum (mdc), respectivamente.

Mínimo múltiplo comum (mmc)

O mmc é o menor múltiplo positivo que é comum (ou seja, o mesmo) a dois ou mais números naturais. Por exemplo, o menor múltiplo comum a 4 e 6 é o 12, ou mmc (4, 6) = 12. Uma forma de determinar esse valor é buscar, entre os múltiplos positivos de 4 e 6, o menor número que é comum aos dois conjuntos de múltiplos. Note:

- múltiplos positivos de 4: {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, ...};
- múltiplos positivos de 6: {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, ...}.

Em azul estão destacados os múltiplos positivos comuns a 4 e 6. O menor múltiplo positivo comum a ambos é o 12.

Porém, quando trabalhamos com mais de dois números, ou ainda com números maiores, pode não ser fácil a busca pelo mmc dessa forma. Para isso, usamos a fatoração como técnica para o cálculo do mmc.

Exemplos:

a. No cálculo do mmc entre 12 e 20 vamos utilizar um método que consiste em fatorar ambos os números simultaneamente.

12,	20	2
6,	10	2
3,	5	3
1,	5	5
1,	1	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Montamos a fatoração com os dois números lado a lado e iniciamos a divisão pelo menor número primo positivo que possa dividir pelo menos um deles, no caso o 2. Repare que o 2 é divisor de ambos, logo chegamos à segunda linha, com o 6 e o 10. Continuando o processo, dividimos novamente ambos por 2, obtendo 3 e 5. Nesse ponto, devemos perceber que o 2 não é mais divisor de nenhum dos números, assim buscamos o próximo número primo que seja divisor de pelo menos um deles, que será o 3. Dividimos o 3 por 3 e apenas copiamos o 5, chegando à quarta linha. Como 3 não divide 5, buscamos o próximo número primo que o faça, no caso o próprio 5. Realizando a divisão, chegamos à última linha, finalizando, assim, a fatoração simultânea de 12 e 20. Finalmente, o mmc entre 12 e 20 será o produto de todos os fatores à direita da barra, ou seja, mmc(12, 20) $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

b. Vamos determinar o mmc(4, 6, 9) e verificar que, independentemente de quantos são os números no cálculo, o processo é o mesmo:

4,	6,	9	2
2,	3,	9	2
1,	3,	9	3
1,	1,	3	3
1,	1,	1	$2^2 \cdot 3^2$

Iniciamos a divisão com o 2 dividindo o 4 e o 6 e mantendo o 9, uma vez que 2 não é seu divisor, chegando à segunda linha. Podemos, novamente, dividir por 2, porém apenas o 2, chegando à terceira linha. Como o número primo 2 não é mais divisor de nenhum dos números dessa linha, vamos para o próximo número primo, o 3. Dividindo o 3 e o 9, chegamos à quarta linha. Veja que, nessa linha, já temos dois números cuja divisão gerou o 1, faltando apenas o terceiro. Por fim, dividindo novamente por 3, chegamos ao final da fatoração. Assim, o mmc(4, 6, 9) $= 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

Exercício

6. Determine o mmc dos números a seguir.

a) 4 e 10
b) 4 e 8
c) 2, 3 e 5
d) 10 e 14
e) 6, 8 e 15
f) 7, 9 e 12
g) 21, 24 e 32
h) 16, 20, 24 e 30

Máximo divisor comum (mdc)

O mdc é o maior divisor que é comum a dois ou mais números. Observe a determinação do mdc entre 18 e 24:

- divisores positivos de 18: {1, 2, 3, 6, 9, 18}
- divisores positivos de 24: {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

Em azul estão destacados os divisores positivos comuns a 18 e 24. O maior divisor comum a ambos é o 6.

De maneira análoga ao mmc, quando trabalhamos com mais de dois números, ou com números maiores, a determinação do mdc dessa forma pode não ser uma tarefa simples. Por esse motivo também utilizaremos na determinação do mdc a técnica da fatoração, porém agora só utilizaremos os divisores primos que dividirem todos os valores da linha em questão.

Exemplos:

a. No cálculo do mdc(32, 40), montamos o esquema de fatoração e buscamos a divisão pelos números primos que dividam todos os números da linha:

32,	40	2
16,	20	2
8,	10	2
4,	5	2^3

Inicialmente, podemos dividir ambos os números por 2, gerando a segunda linha com 16 e 20, que também podem ser divididos por 2, gerando a terceira linha com 8 e 10, que, por sua vez, também podem ser divididos por 2, gerando a quarta linha com os números 4 e 5. Repare, agora, que os números 4 e 5 não podem ser divididos pelo mesmo número primo, uma vez que o 4 pode ser dividido apenas por 2, e o 5, apenas por 5. Finalizamos o processo aqui, e o produto dos números à direita da barra é o mdc de 32 e 40, isto é, mdc(32, 40) $= 2^3 = 8$.

b. Na determinação do mdc(420, 672, 840), verificamos que, apesar de ser o cálculo do mdc de três ou mais números, nada muda no processo:

$$
\begin{array}{ccc|c}
420, & 672, & 840 & 2 \\
210, & 336, & 420 & 2 \\
105, & 168, & 210 & 3 \\
35, & 56, & 70 & 7 \\
\hline
5, & 8, & 10 & 2^2 \cdot 3 \cdot 7
\end{array}
$$

Na primeira linha, como todos os números à esquerda da barra são pares, podemos dividi-los por 2. Como isso também ocorre na segunda linha, repetimos o processo. Já na terceira linha, temos apenas dois números pares e, na busca pelo mdc, devemos trabalhar apenas com divisores comuns a todos os três números. Assim, tentamos o próximo número primo, 3. Usando o critério de divisibilidade por 3, verificamos com facilidade que todos os números da linha são divisíveis por 3 e, realizando a divisão, chegamos à quarta linha. O 3 não se torna mais um divisor comum para todos os números, o que também não acontece com o 5, mas ocorre com o número primo seguinte, o 7. Assim, realizando a divisão, chegamos à última linha composta dos números 5, 8 e 10, que não têm divisores comuns, e terminamos, assim, o processo. Logo, temos que $\text{mdc}(420, 672, 840) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

Exercício

7. Calcule o mdc entre os números indicados em cada item.
   a) 8 e 16
   b) 10, 15 e 20
   c) 42 e 70
   d) 60 e 220
   e) 420, 4 200 e 4 410
   f) 180, 240 e 750

Problemas contextualizados envolvendo mmc e mdc

É comum, em diversos vestibulares, o emprego dos conceitos de mmc e mdc em exercícios contextualizados. Nesse tipo de questão é fundamental que saibamos identificar sem dificuldades se nos valemos do mmc ou do mdc para a resolução, e a forma correta a ser utilizada vem das definições desses processos:

- **mmc** – deve ser utilizado quando a questão traz sentido de repetição de elementos em ciclos distintos;
- **mdc** – deve ser utilizado quando a questão traz a ideia de divisão de diferentes conjuntos em quantidades iguais (dentro de cada conjunto), sendo essa divisão pelo maior número possível.

Exercícios resolvidos

1. Em um hospital, o enfermeiro A faz plantão nos finais de semana a cada 4 semanas, e o enfermeiro B, a cada 6 semanas. Se em um final de semana eles estão juntos em plantão, em quantas semanas se encontrarão em um plantão novamente?

Resolução:

Perceba que os ciclos de plantões dos enfermeiros A e B são distintos e pergunta-se o reencontro deles a partir de um final de semana no qual os dois estão de plantão juntos. Isso caracteriza o mmc entre 4 e 6, uma vez que se busca o próximo encontro, ou seja, um múltiplo comum entre 4 e 6 semanas.

$$
\begin{array}{cc|c}
4, & 6 & 2 \\
2, & 3 & 2 \\
1, & 3 & 3 \\
\hline
1, & 1 & 2^2 \cdot 3
\end{array}
$$

Como $\text{mmc}(4, 6) = 2^2 \cdot 3 = 12$, eles voltarão a se encontrar em um plantão em 12 semanas.

2. **Vunesp 2020** Emerson machucou seu joelho praticando esportes e precisa tomar um anti-inflamatório de 8 em 8 horas, colocar gelo a cada 6 horas e passar uma pomada de 4 em 4 horas. No dia 07 de fevereiro deste ano às 10 horas, ele colocou gelo, tomou o anti-inflamatório e passou a pomada. Cumprindo os horários prescritos, ele tornou a fazer os três procedimentos juntos novamente no dia 08 de fevereiro deste ano às:
   a) 10 horas.
   b) 14 horas.
   c) 16 horas.
   d) 18 horas.
   e) 22 horas.

Resolução:

Como cada procedimento é repetido em intervalos distintos, com durações de 8 horas, 6 horas e 4 horas, e às 10 horas do dia 7 de fevereiro esses procedimentos foram realizados juntos, a próxima vez que isso ocorrerá de novo será depois de um intervalo de tempo, em horas, igual ao mmc entre 8, 6 e 4.

$$
\begin{array}{ccc|c}
8, & 6, & 4 & 2 \\
4, & 3, & 2 & 2 \\
2, & 3, & 1 & 2 \\
1, & 3, & 1 & 3 \\
\hline
1, & 1, & 1 & 2^3 \cdot 3 = 24
\end{array}
$$

Portanto, Emerson tornou a fazer os três procedimentos juntos 24 horas depois das 10 horas do dia 7 de fevereiro, ou seja, às 10 horas do dia 8 de fevereiro.
Alternativa: A.

3. Um professor precisa dividir sua sala em grupos, de modo que cada grupo tenha o mesmo número de meninos e também o mesmo número de meninas, e que seja formado o maior número de grupos possível. Se nessa sala de aula há 24 meninos e 16 meninas, determine quantos grupos teremos e a quantidade de meninos e meninas em cada grupo.

Resolução:

Note que temos dois conjuntos distintos, o de meninos e o de meninas, e queremos dividi-los em grupos, sendo que essa divisão deve ser pelo maior número possível. Assim, devemos calcular o mdc (16, 24) a fim de descobrir qual é o maior valor que divide ambos os números e determinar o que foi pedido. Então:

$$\begin{array}{rr|c} 16, & 24 & 2 \\ 8, & 12 & 2 \\ 4, & 6 & 2 \\ \hline 2, & 3 & 2^3 = 8 \end{array}$$

Como mdc (16, 24) = 8, podemos dividir as 16 meninas em 8 grupos de 2 meninas e os 24 meninos em 8 grupos de 3 meninos. Assim, teremos 8 grupos na sala, compostos de 2 meninas e 3 meninos. Tudo isso é representado no esquema, no qual o número de grupos formados é o mdc e as quantidades de meninas e meninos são, respectivamente, os números da última linha do lado esquerdo da barra.

4. O chão de uma sala retangular, que mede 2,80 m por 3,20 m, será revestido por um piso de forma quadrada de comprimento máximo, de modo que não haja cortes no formato dos pisos. Determine as dimensões do piso, em centímetros, e quantos serão utilizados.

Resolução:

Começamos calculando as dimensões da sala em centímetro, obtendo 280 cm e 320 cm, para que os valores numéricos dessas medidas sejam números naturais. Como a sala será revestida de pisos de forma quadrada, a medida do comprimento do piso deverá ser um divisor comum das duas dimensões da sala. Além disso, como queremos que o comprimento do piso seja máximo, esse divisor comum deve ser máximo. Logo, estamos buscando o mdc das duas dimensões:

$$\begin{array}{rr|c} 280, & 320 & 2 \\ 140, & 160 & 2 \\ 70, & 80 & 2 \\ 35, & 40 & 5 \\ \hline 7, & 8 & 2^3 \cdot 5 \end{array}$$

Do processo, temos que mdc $(280, 320) = 2^3 \cdot 5 = 40$; logo, cada lado do piso quadrado deverá ter 40 cm de comprimento. Isso significa que, para a dimensão de 280 cm, serão necessários 7 pisos e, para a dimensão de 320 cm, 8 pisos, que são, respectivamente, os números finais à esquerda da barra. O produto entre as duas quantidades de piso nos fornece o número total de pisos necessários, ou seja, serão necessários $7 \cdot 8 = 56$ pisos.

Exercícios

8. Três viajantes embarcaram no mesmo ônibus em uma mesma rodoviária. O primeiro pega o ônibus a cada 12 dias, o segundo a cada 15 dias e o terceiro a cada 20 dias. Se hoje eles se encontraram e viajaram juntos, daqui a quantos dias voltarão a viajar juntos nessa rodoviária?

9. Dois corredores treinam em uma pista circular. O corredor A dá uma volta completa a cada 10 minutos, enquanto o corredor B leva 14 minutos. Se eles partem juntos, depois de quanto tempo voltarão a se cruzar exatamente na linha de partida?

10. Uma loja de moda vende pacotes de lacinhos para cabelo contendo 9 lacinhos e pacotes de prendedores contendo 6 prendedores. Se um cliente quer comprar a mesma quantidade de lacinhos e prendedores, qual é a quantidade mínima de pacotes que ele deverá comprar de cada um deles?

11. **Uerj 2020** Uma gerente de loja e seu assistente viajam com frequência para São Paulo e voltam no mesmo dia. A gerente viaja a cada 24 dias e o assistente, a cada 16 dias, regularmente. Em um final de semana, eles viajaram juntos. Depois de x viagens da gerente e y viagens do assistente sozinhos, eles viajaram juntos novamente.

O menor valor de $x + y$ é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

12. **Vunesp 2020** A secretária de uma escola realiza, rigorosamente, uma tarefa A, a cada 6 dias trabalhados, e uma tarefa B, a cada 4 dias trabalhados. Sabendo-se que ela trabalha de segunda a sexta-feira, que em uma quinta-feira ela realizou ambas as tarefas, e que durante o mês seguinte a essa quinta-feira não houve interrupção dos dias trabalhados por ela, é correto afirmar que a vez imediatamente posterior em que ela realizou, no mesmo dia, ambas as tarefas foi uma:

a) segunda-feira.
b) terça-feira.
c) quarta-feira.
d) quinta-feira.
e) sexta-feira.

13. **Vunesp 2019** Com todos os 126 novos técnicos e 72 novos analistas legislativos, recém-incorporados aos quadros de um grande município, em decorrência do último concurso realizado, pretende-se montar o maior número possível de grupos, contendo, cada um, x técnicos e y analistas, para participarem de cursos de capacitação, de modo que cada um desses servidores faça parte de apenas um grupo. Dessa forma, em cada grupo, o número de técnicos deve superar o número de analistas em:

a) 6 servidores.
b) 5 servidores.
c) 4 servidores.
d) 3 servidores.
e) 2 servidores.

14. **Vunesp 2019** Um investidor adquiriu uma ampla sala para transformá-la em um espaço *coworking*. Para tanto, serão criadas ilhas de trabalho retangulares, medindo 12,0 m de comprimento por 4,8 m de largura cada. Essas ilhas serão divididas em estações quadradas, de maior área possível, de modo a ocupar todo o espaço disponível. Nesse caso, o número de estações que serão criadas em cada ilha de trabalho é igual a:

a) 5.
b) 10.
c) 15.
d) 20.
e) 24.

15. **Vunesp 2019** Em uma escola, 144 meninos e 180 meninas devem ser vacinados contra o sarampo. Para tanto, pretende-se formar grupos somente de meninas ou somente de meninos, de modo que os grupos tenham a mesma quantidade e o maior número possível de integrantes, e que não reste nenhum aluno fora de um grupo. Nessas condições, o número total de grupos formados será igual a:

a) 5.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 12.

16. **Vunesp 2018** Para a realização de uma determinada atividade cultural, os alunos participantes serão divididos em grupos, com o mesmo número de alunos em cada um deles. Com o número total de alunos participantes, é possível formar grupos ou com 5, ou com 6 ou com 8 alunos de modo que todos os alunos participantes estarão em algum grupo. Nessas condições, o menor número de alunos que estão participando dessa atividade é:

a) 180.
b) 140.
c) 120.
d) 100.
e) 60.

FRENTE ÚNICA

CAPÍTULO

4

Produtos notáveis e fatoração

Dizemos que algo é notável quando se destaca, chama atenção por algum motivo. Na Matemática, os produtos notáveis são resultados de multiplicações entre termos algébricos que aparecem com muita frequência, daí sua notoriedade. Além de trabalharmos com o desenvolvimento desses produtos, também é frequente a necessidade da fatoração de seus desenvolvimentos, voltando à forma original dos produtos. Neste capítulo, desenvolveremos e trabalharemos os principais produtos notáveis e suas fatorações.

Produtos notáveis

Distributiva

A ideia de distribuir remete a dar um mesmo valor, quantia ou parte, a todos os integrantes de um grupo. No caso da Matemática, a distributiva dos produtos notáveis equivale ao produto de um ou mais fatores por todos os termos presentes dentro do sinal gráfico que os agrupa (parênteses, colchetes ou chaves).

Exemplos:

a. $2(x + y) = 2 \cdot (x + y) =$
$= 2 \cdot x + 2 \cdot y = 2x + 2y$

Repare que o número 2 multiplicou tanto o x quanto o y que estavam dentro dos parênteses, lembrando que os coeficientes dos números que acompanham x e y são iguais a 1.

b. $2x(-3x + 2y) = 2x \cdot (-3x + 2y) =$
$= 2x \cdot (-3x) + 2x \cdot (2y) =$
$= -6x^2 + 4xy$

Note que, ao realizarmos a distributiva, o produto de $2x$ por $-3x$ resulta em um termo negativo, prevalecendo a regra dos sinais. Perceba também que a multiplicação entre x e x gera x^2, visto que os expoentes, quando omitidos, valem 1.

c. $-3x^2y(4xy - 3x^2y^4) = -3x^2y \cdot (4xy - 3x^2y^4) =$
$= -3x^2y \cdot (4xy) - 3x^2y \cdot (-3x^2y^4) =$
$= -12x^3y^2 + 9x^4y^5$

Aqui, novamente, devemos ficar atentos à regra dos sinais, o produto entre os números e as potências de cada fator literal. Com prática, as passagens podem ser omitidas.

d. $2xy^3z^2(3xy^2 - 5x^2z^3 + 1) =$
$= 2xy^3z^2 \cdot (3xy^2) + 2xy^3z^2 \cdot (-5x^2z^3) + 2xy^3z^2 \cdot 1 =$
$= 6x^2y^5z^2 - 10x^3y^3z^5 + 2xy^3z^2$

A distributiva ocorre independentemente de quantos termos existem nos parênteses, mas lembre-se de que ela só ocorre quando há o produto entre um termo e uma adição ou subtração, com dois ou mais termos. Quando um desses termos é apenas numérico, como é o caso do terceiro termo desse exemplo, a parte literal permanece a mesma, efetuando-se o produto apenas da parte numérica.

Em determinadas situações, podemos ter o produto de duas somas ou de uma soma por uma diferença ou, ainda, de duas diferenças, ou seja, cada fator que compõe o produto pode ser formado por dois ou mais termos. Nesse caso, a distributiva é feita com cada termo do primeiro fator em relação a cada termo do segundo fator.

Exemplos:

e. $(a + b)(x + y) = a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) =$
$= a \cdot x + a \cdot y + b \cdot x + b \cdot y =$
$= ax + ay + bx + by$

Iniciamos com o termo a do primeiro fator multiplicando cada termo do segundo fator, chegando a $ax + ay$. Depois, o segundo termo do primeiro fator multiplica o segundo fator, e obtemos $bx + by$, chegando ao resultado final $ax + ay + bx + by$.

f. $(2x + 3y)(x^2 - 4y^3) = 2x \cdot (x^2 - 4y^3) +$
$+ 3y \cdot (x^2 - 4y^3) = 2x^3 - 8xy^3 + 3x^2y - 12y^4$

Aqui, como no exemplo anterior, efetuamos primeiro o produto de $2x$ com os termos do segundo fator e, posteriormente, o produto de $3y$ com os termos do segundo fator, respeitando as regras de sinais. Como a ordem no produto não importa, é comum colocarmos em ordem alfabética o produto de fatores literais, assim, $3yx^2 = 3x^2y$.

g. $(2x + 1)(3x - 3) = 2x \cdot (3x - 3) + 1 \cdot (3x - 3) =$
$= 6x^2 - 6x + 3x - 3 = 6x^2 - 3x - 3$

Nesse exemplo, observe que, após a distributiva, há termos que possuem a parte literal exatamente igual, caso do $-6x$ e do $+3x$. Esses termos algébricos, chamados de semelhantes, podem ser reduzidos a um só, ou seja, $-6x + 3x = -3x$, o que reduz a expressão inteira a $6x^2 - 3x - 3$. Sempre que possível, devemos reduzir os termos semelhantes, mas cuidado: a parte literal deve ser exatamente a mesma. Perceba que $6x^2$ e $-3x$ não possuem a parte literal idêntica, apesar de ambas terem o fator x, por isso, não realizamos a operação entre esses termos.

Exercício

1. Desenvolva os produtos usando a distributiva:

a) $2(x + 3y)$
b) $4x(x - 2y)$
c) $2x^2(-x + y)$
d) $3x^2y(xy - y)$
e) $6x^3y^5z^2(-2xy^2 + 3yz^3 + 4x^2z^3)$
f) $(x + y)(a + 2b)$
g) $(x + y)(x + y)$
h) $(2x^2y - 3)(y^2 - xy^2)$

Produtos notáveis do 2º grau

Estes são os produtos notáveis que geram termos do 2º grau, isto é, quadrados.

Quadrado da soma de dois termos

Elevaremos ao quadrado a soma de dois termos. Desenvolver $(a + b)^2$ corresponde a efetuar a seguinte multiplicação: $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$. Utilizando a distributiva, como vimos anteriormente, temos:

$$(a + b) \cdot (a + b) =$$

$$= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b =$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2$$

Como $ab = ba$, podemos adicionar os termos centrais, temos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Esse produto é muito frequente, e pode ser lembrado por: "o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo".

De fato, é exatamente esse o resultado obtido em qualquer quadrado da soma de dois termos. Apenas devemos nos precaver ao memorizar esse tipo de expressão, pois qualquer deslize pode nos levar ao erro. Na dúvida, aplicar a distributiva é sempre mais seguro.

Exemplo:

Para desenvolver $(2x^2 + 3y^3)^2$ a ideia é a mesma vista anteriormente, ou seja, determinar o produto dessa soma por ela mesma:

$$\begin{aligned}&(2x^2 + 3y^3)^2 = \\&= (2x^2 + 3y^3)^2 \cdot (2 + 3y^3) = \\&= 4x^4 + 6x^2y^3 + 6x^2y^3 + 9y^6\end{aligned}$$

Lembrando que podemos reduzir os termos semelhantes dessa operação ao adicionar os termos cuja parte literal é idêntica, ou seja, $6x^2y^3 + 6x^2y^3 = 12x^2y^3$, obtendo:

$$\begin{aligned}&(2x^2 + 3y^3)^2 = \\&= 4x^4 + 12x^2y^3 + 9y^6\end{aligned}$$

Podemos também utilizar a expressão descrita anteriormente:

$$\begin{aligned}&(2x^2 + 3y^3)^2 = \\&= (2x^2)^2 + 2 \cdot (2x^2) \cdot (3y^3) + (3y^3)^2\end{aligned}$$

Repare que o primeiro termo é $2x^2$ e, quando nos referimos ao quadrado dele, temos $(2x^2)^2 = 4x^4$. O mesmo ocorre com o quadrado do segundo termo, ou seja, $(3y^3)^2 = 9y^6$. Assim:

$$\begin{aligned}&(2x^2 + 3y^3)^2 = \\&= (2x^2)^2 + 2 \cdot (2x^2) \cdot (3y^3) + (3y^3)^2 = \\&= 4x^4 + 12x^2y^3 + 9y^6\end{aligned}$$

Quadrado da diferença entre dois termos

Similar ao desenvolvimento estudado anteriormente, difere apenas na operação entre os dois termos, que é a subtração, e não a adição. Assim, desenvolver $(a - b)^2$ corresponde a efetuar a seguinte multiplicação:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b).$$

Utilizando a distributiva, temos:

$$\begin{aligned}(a - b) \cdot (a - b) &= a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = \\&= a^2 - ab - ba + b^2\end{aligned}$$

Analogamente, como $ab = ba$, temos:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Esse produto também aparece com muita frequência em exercícios, e pode ser lembrado por: "o quadrado de uma diferença é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo". Portanto, a diferença entre as expressões do quadrado da soma para o quadrado da diferença se dá pelo sinal que precede o produto entre os dois termos. Mas lembre-se: na dúvida, sempre faça a distributiva.

Exemplo:

Para desenvolver $(3x^2 - 5y^4)^2$ aplicando a distributiva, temos:

$$\begin{aligned}&(3x^2 - 5y^4)(3x^2 - 5y^4) = \\&= 9x^4 - 15x^2y^4 - 15x^2y^4 + 25y^8\end{aligned}$$

Adicionando os termos semelhantes, obtemos:

$$\begin{aligned}&(3x^2 - 5y^4)^2 = \\&= 9x^4 - 30x^2y^4 + 25y^8\end{aligned}$$

Utilizando a expressão, temos:

$$\begin{aligned}&(3x^2 - 5y^4)^2 = \\&= (3x^2)^2 - 2 \cdot (3x^2) \cdot (5y^4) + (5y^4)^2 = \\&= 9x^4 - 30x^2y^4 + 25y^8\end{aligned}$$

Tanto o quadrado da soma quanto o quadrado da diferença geram expressões com três termos, que são comumente chamadas de *trinômios quadrados perfeitos*.

Produto da soma pela diferença de dois termos

Aqui temos a multiplicação entre dois fatores em que um deles possui a adição e o outro, a subtração entre os mesmos dois termos.

Aplicando a distributiva, podemos desenvolver o produto $(a + b)(a - b)$ do seguinte modo:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b$$

Como $ab = ba$, os dois termos centrais do desenvolvimento são opostos. Logo, anulam-se e, então, chegamos a:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Repare que o resultado do produto foi a diferença entre o quadrado do primeiro termo e o quadrado do segundo termo. Podemos usar essa expressão, memorizando que "o produto da soma pela diferença entre dois termos resulta na diferença entre os quadrados do primeiro e do segundo termos".

Exemplos:

a. Desenvolvendo $(2x + 3)(2x - 3)$, obtemos:

$$(2x + 3)(2x - 3) = (2x)^2 - (3)^2 = 4x^2 - 9$$

b. Mesmo que os termos não sejam simples, como em $(3x^2 - y^3)(3x^2 + y^3)$, o produto da soma pela diferença entre os mesmos termos sempre tem como resultado a diferença entre os quadrados; observe:

$$\begin{aligned}&(3x^2 - y^3)(3x^2 + y^3) = \\&= (3x^2)^2 - (y^3)^2 = 9x^4 - y^6\end{aligned}$$

Muitas vezes, pelo fato de o uso da memorização das expressões ser muito frequente, abandona-se a distributiva. Lembre-se de que, sempre que um produto lhe parecer estranho àqueles estudados, é necessário aplicar a distributiva para ter certeza do resultado. Sempre se baseie em regras e conceitos.

c. No caso de $(-2x-3)^2$ temos o quadrado de uma soma ou de uma diferença? O resultado da distributiva nos mostrará que esse produto será o quadrado de uma soma. Se não há certeza sobre qual memorização usar, aplique a distributiva. Observe:

$$(-2x-3)^2 =$$
$$= (-2x-3)(-2x-3) =$$
$$= 4x^2 + 6x + 6x + 9 = 4x^2 + 12x + 9$$

Exercício

2. Desenvolva os produtos, utilizando a distributiva ou a memorização do produto notável:

a) $(x+y)^2$

b) $(2x+1)^2$

c) $(4a-3c)^2$

d) $(5xy+z)^2$

e) $(x-9)^2$

f) $(x^2+y^2)^2$

g) $\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2$

h) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

i) $(\sqrt{5}-1)^2$

j) $(x+1)(x-1)$

k) $(2x-3)(2x+3)$

l) $(x^3+y^2)(x^3-y^2)$

m) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$

n) $(-2x+3)^2$

o) $(-2y+4)(2y+4)$

Outros produtos notáveis

Menos frequentes, porém ainda utilizados, outros produtos notáveis podem ser mais trabalhosos de se desenvolver e memorizar. De qualquer forma, a distributiva sempre pode e deve ser utilizada em caso de dúvida.

Produto da soma de três termos

Esse produto será visto com o desenvolvimento de $(a+b+c)^2$.

Utilizando a distributiva, temos:

$$(a+b+c)^2 =$$
$$= (a+b+c)\cdot(a+b+c) =$$
$$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$$

Reduzindo os termos semelhantes, chegamos a:

$$(a+b+c)^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Podemos memorizar esse produto notável como "o quadrado da soma de três termos é igual à soma dos quadrados de cada termo mais a soma de duas vezes o produto dois a dois de cada termo". O produto dois a dois de cada termo se refere aos produtos "ab", "ac" e "bc".

O desenvolvimento de $(a-b+c)^2$ pode ser visto como o desenvolvimento de $(a+(-b)+c)^2$. Assim, se algum dos termos tiver o sinal negativo, basta resolvê-lo normalmente, respeitando a regra de sinais, ou seja:

$$(a-b+c)^2 =$$
$$= \big(a+(-b)+c\big)\cdot\big(a+(-b)+c\big) =$$
$$= a^2 + a\cdot(-b) + a\cdot c + (-b)\cdot a + (-b)^2 +$$
$$+ (-b)\cdot c + c\cdot a + c\cdot(-b) + c^2 =$$
$$= a^2 - ab + ac - ba + b^2 - bc + ca - cb +$$
$$+ c^2(a-b+c)^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

Repare que o sinal de menos apareceu nos termos em que o fator b aparece.

Cubo da soma entre dois termos

Cubo se refere ao expoente 3, assim, o cubo da soma de dois termos consiste em elevarmos à terceira potência uma soma entre dois termos.

Para o desenvolvimento de $(a+b)^3$, temos que

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b).$$

Assim, realizamos a distributiva, inicialmente, entre os dois primeiros fatores, cujo resultado é conhecido, pois se trata do quadrado da soma. Logo,

$$(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b).$$

Efetuando novamente a distributiva, chegamos a:

$$(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b) =$$
$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

Reduzindo os termos semelhantes, chegamos ao final do desenvolvimento:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Podemos memorizar esse produto notável como: "o cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro, mais três vezes o quadrado do primeiro pelo segundo, mais três vezes o primeiro pelo quadrado do segundo, mais o cubo do segundo". A prática em exercícios e a distributiva auxiliam na compreensão e memorização desse processo.

Cubo da diferença entre dois termos

Neste caso, temos uma diferença entre dois termos que será elevada à terceira potência, ou seja, temos $(a-b)^3$, que será resolvida de maneira análoga à anterior. Assim:

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = (a^2-2ab+b^2)\cdot(a-b) =$$
$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$$

Reduzindo os termos semelhantes, temos:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

A memorização, neste caso, é muito parecida com o cubo da soma. Apenas alternando-se os sinais positivos e negativos, dizemos que “o cubo da diferença entre dois termos é igual ao cubo do primeiro, menos três vezes o quadrado do primeiro pelo segundo, mais três vezes o primeiro pelo quadrado do segundo, menos o cubo do segundo”.

Exercício

3. Desenvolva os produtos a seguir, aplicando a distributiva ou usando a regra prática de memorização:

a) $(x + y)^3$

b) $(2x + y)^3$

c) $(x - y)^3$

d) $(x - 3y)^3$

e) $(2x + 3y)^3$

f) $(x + y + z)^3$

g) $(x + y - z)^3$

h) $(2x + y - 3z)^3$

i) $(3x^2 - 2y - 5z^3)^3$

Fatoração

Na primeira parte deste capítulo, utilizamos a propriedade distributiva na multiplicação de expressões algébricas, para simplificar seu resultado. Faremos a seguir o processo inverso, ou seja, quando se pede para fatorar (transformar em fatores) uma expressão algébrica, buscamos por um produto entre dois ou mais termos que tenha como resultado a expressão dada inicialmente.

Fator comum

Como o nome sugere, buscaremos fatores comuns a todos os termos. Após identificá-los, evidenciamos e efetuamos a divisão de cada termo por esses fatores. Lembre-se de que tais fatores podem ser numéricos ou literais.

Exemplos:

a. A expressão $2x + 4y$ pode ser reescrita como $2x + (2 \cdot 2)y$, logo, notamos que o único fator comum a $2x$ e $4y$ é o 2. Assim, evidenciamos esse número e realizamos a divisão de ambos os termos por ele, obtendo:

$$2\left(\frac{2x}{2} + \frac{4y}{2}\right) = 2(x + 2y).$$

Para verificar se a fatoração está correta, basta aplicar a distributiva e observar se o resultado corresponde à expressão dada. No caso, $2(x + 2y) = 2x + 4y$.

Portanto:

$$2x + 4y = 2(x + 2y).$$

b. Para fatorar uma expressão como $12x^2y + 18xy$, devemos observar que o fator numérico comum é o 6 e a parte literal comum é formada pelo x e pelo y. Evidenciando tais fatores e fazendo a divisão dos termos por eles, obtemos:

$$\begin{aligned} &12x^2y + 18xy = \\ &= 6xy\left(\frac{12x^2y}{6xy} + \frac{18xy}{6xy}\right) = \\ &= 6xy(2x + 3) \end{aligned}$$

É importante notar que sempre devemos considerar o maior fator comum numérico, ou seja, o mdc dos valores envolvidos, no caso mdc (12, 18) = 6, e também que, apesar de o primeiro termo possuir x^2, o fator comum será apenas x, que é o fator presente também no segundo termo. Logo, sempre devemos considerar, entre a parte literal, os fatores comuns com os menores expoentes.

c. Para fatorar a expressão

$$18x^3y^2z^4 - 45x^4yz^3 + 9x^3yz^2,$$

o processo é o mesmo. Inicialmente, buscamos o fator comum aos números 18, 45 e 9 usando o mdc, sendo tal fator o 9. Depois, analisamos a parte literal, identificando como fatores comuns x^3, y e z^2, lembrando sempre de tomar o menor expoente para cada fator da parte literal. Assim, evidenciando os fatores comuns, dividindo cada termo por $9x^3yz$, chegamos a:

$$\begin{aligned} &18x^3y^2z^4 - 45x^4yz^3 + 9x^3yz^2 = \\ &= 9x^3yz^2\left(\frac{18x^3y^2z^4}{9x^3yz^2} - \frac{45x^4yz^3}{9x^3yz^2} + \frac{9x^3yz^2}{9x^3yz^2}\right) = \\ &= 9x^3yz^2(2yz^2 - 5xz + 1) \end{aligned}$$

Agrupamento

Este caso de fatoração é possível quando possuímos quatro ou mais termos, mas sempre em uma quantidade par. Consiste em trabalhar duas ou mais fatorações por fator comum, porém separando esses termos em grupos, daí o agrupamento.

Exemplos:

a. Na fatoração da expressão $ax + ay + bx + by$, repare que não há um fator que seja comum aos quatro termos, porém, se considerarmos separadamente os dois primeiros e os dois últimos, conseguimos identificar fatores comuns. Para os dois primeiros, temos o fator comum a, para os dois últimos, b. Trabalhando a fatoração por fator comum, temos:

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$

Porém, a fatoração ainda não terminou, pois, ao analisarmos os termos a que chegamos após esse primeiro passo, notamos que $(x + y)$ aparece em ambos, logo, é um fator comum a eles. Assim, aplicando o caso do fator comum para $(x + y)$ completamos a fatoração:

$$\begin{aligned} &ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = \\ &= (x + y)\left(\frac{a(x + y)}{(x + y)} + \frac{b(x + y)}{(x + y)}\right) = (x + y)(a + b) \end{aligned}$$

O exemplo anterior nos mostra que o processo de fatoração por agrupamento correspondeu a duas fatorações por fator comum, a primeira separando os termos em grupos, e a segunda evidenciando os parênteses como termos comuns.

b. Novamente, na fatoração da expressão

$$2a + 2b + ax + bx$$

não é possível trabalharmos um fator comum para todos os termos, porém podemos evidenciar o número 2 para os dois primeiros, e o x para os dois últimos. Trabalhando essa fatoração, chegamos a:

$$2a + 2b + ax + bx = 2(a + b) + x(a + b).$$

Nesse ponto, se você tiver dificuldade para perceber que $(a + b)$ é um fator comum aos dois termos, você pode substituir a representação de $(a + b)$ por outra letra, por exemplo, considerando que $(a + b) = m$, artifício chamado de *mudança de variável*. Assim, temos que

$$2(a + b) + x(a + b) = = 2m + xm.$$

Repare que m é um fator comum, logo podemos evidenciá-lo, chegando a $m(2 + x)$. Porém, m é uma variável criada para facilitar a visualização do processo, ela não existe na expressão, por isso substituímos m por $(a + b)$ na expressão fatorada, obtendo $(a + b)(2 + x)$. Ou seja,

$$2a + 2b + ax + bx = (a + b)(2 + x).$$

c. Fatorando a expressão $ax + by - bx - ay$, notamos que nem sempre o agrupamento é feito com termos adjacentes, aqui não conseguimos agrupar os dois primeiros e os dois últimos termos. Por vezes é necessário identificar o agrupamento e reordenar os termos. Podemos considerar o fator x comum ao primeiro e terceiro termos, e y comum ao segundo e quarto termos. Também podemos pensar em a como comum ao primeiro e quarto termos, e b comum ao segundo e terceiro termos. Qualquer uma entre ambas as estratégias chegarão à mesma fatoração.

Trocando a posição entre o segundo e o terceiro termos, temos que

$$ax + by - bx - ay = ax - bx + by - ay.$$

Pensando agora nos dois primeiros termos, x é um fator comum, assim, $ax - bx = x(a - b)$. Já nos dois últimos termos, y é um fator comum, assim, $by - ay = y(b - a)$. Observe que as somas nos parênteses são distintas, o que impossibilita a continuidade da fatoração. Mas perceba que a diferença é apenas entre os sinais, ou seja, basta invertê-los para igualarmos os parênteses. Assim, em vez de y, colocamos $-y$ em evidência e, trabalhando a regra de sinais, teremos

$$by - ay = -y(-b + a) = -y(a - b).$$

Finalmente,

$$ax - bx + by - ay = x(a - b) - y(a - b)$$

que, evidenciando o fator comum, gera

$$ax - bx + by - ay = x(a - b) - y(a - b) = (a - b)(x - y).$$

Fique atento, pois é comum, na fatoração, o termo em evidência ser negativo.

d. Em alguns casos, o fator comum não é facilmente notado. Observe em $ax + bx + a + b$. Nesse caso, repare que x é fator comum entre os dois primeiros termos, mas aparentemente não há fator comum para o terceiro e o quarto termos. Porém, ao fatorarmos $ax + bx = x(a + b)$, observe que a soma gerada corresponde exatamente aos dois últimos termos da expressão. Nesse caso, podemos dizer que o fator 1 é comum a a e b, escrevendo $a + b = 1(a + b)$.

Assim,

$$ax + bx + a + b =$$
$$= x(a + b) + 1(a + b) = (a + b)(x + 1).$$

Exercício

4. Fatore as expressões a seguir:

a) $4x + 6y$

b) $2x^2 + 6x$

c) $3x^2y - 9xy$

d) $6x^3y^2 + 12x^2y^4 - 18x^3y$

e) $24a^6b^3c^4 - 12a^4b^5c^3 + 48ab^4c^5$

f) $4x^2 + 6x^4 - 12x^3 + 8x^6$

g) $8a^2b^3c^6 - 16b^2c^4$

h) $ax - ay + bx - by$

i) $3x - 3y + ax - ay$

j) $x + xy + y + y^2$

k) $a^3 + a^2 + a + 1$

l) $ax + ay - bx - by$

m) $6x^2 - 4xy - 9xz + 6yz$

Fatoração de expressões do 2º grau

Trabalharemos a seguir a fatoração dos trinômios quadrados perfeitos e da diferença de quadrados, que são, respectivamente, resultados obtidos nos produtos notáveis com o quadrado da soma ou da diferença e com o produto da soma pela diferença entre dois termos.

Trinômios do quadrado perfeito

As fatorações desse tipo têm três termos, sendo dois deles quadrados, o que não é suficiente para garantir que o trinômio seja um quadrado perfeito; é necessário, também, que o terceiro termo seja igual a duas vezes o produto entre as raízes dos quadrados.

Exemplos:

a. O primeiro passo para fatorar a expressão $x^2 - 6x + 9$ é identificar os quadrados, que nesse caso são os termos x^2 e 9. Depois, extraímos as raízes deles e observamos se o dobro do produto entre elas gera o terceiro termo, no caso, o terceiro termo $6x$. Observe:

$$\sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad 2 \cdot x \cdot 3 = 6x,$$

que é exatamente o terceiro termo.

Respeitados os fatos de dois termos serem quadrados e o termo central estar de acordo com a regra proposta, podemos dizer que $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. O que fizemos foi elevar ao quadrado a diferença entre as duas raízes e o que definiu o sinal de menos entre elas foi o sinal do termo $-6x$. Se esse termo fosse positivo, teríamos o quadrado de uma soma.

b. De maneira análoga, podemos fatorar a expressão $x^2 + 8x + 16$. Aqui, temos os quadrados x^2 e 16 e, extraídas suas raízes, obtemos x e 4. Como $2 \cdot x \cdot 4 = 8x$, que é exatamente o terceiro termo $+8x$, como o sinal desse termo é positivo, a fatoração fica $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$.

c. Para fatorar $4a^2 + 12ab + 9b^2$, independentemente do fato de os termos terem coeficientes numéricos, o procedimento é o mesmo. Os termos $4a^2$ e $9b^2$ são quadrados. Assim, extraindo as raízes, obtemos $2a$ e $3b$. Como $2 \cdot 2a \cdot 3b = 12ab$, é o terceiro termo do trinômio, a fatoração fica $4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$.

d. Ao tentar fatorar a expressão $x^3 - 14x^2 + 49x$, notamos que não existem dois quadrados evidentes, porém é possível aplicar o outro método de fatoração, o fator comum. O fator x é comum a todos os termos, logo podemos evidenciá-lo, obtendo a expressão $x^3 - 14x^2 + 49x = x(x^2 - 14x + 49)$. É sempre interessante, após uma fatoração, observarmos o resultado verificando a possibilidade de outra fatoração. No caso, o fator nos parênteses possui três termos, sendo dois deles quadrados, x^2 e 49, e, considerando suas raízes, verificamos que $2 \cdot x^2 \cdot 7 = 14x^2$ é o terceiro termo desse trinômio. Isso indica que o trinômio nos parênteses é um trinômio quadrado perfeito. Como o sinal do $14x$ é o de menos, teremos o quadrado da diferença entre as raízes.
Assim:

$$x^3 - 14x^2 + 49x = x(x^2 - 14x + 49) = x(x - 7)^2.$$

Outros trinômios

O teorema fundamental da Álgebra, resumidamente, trata da escrita fatorada de uma equação de grau n como o produto entre fatores envolvendo suas raízes. Com isso, quando tivermos trinômios que não são quadrados perfeitos, podemos, com base nesse teorema, representar sua forma fatorada. Na verdade, essa forma vale, como o teorema afirma, para qualquer equação e, consequentemente, pode ser aplicada também nos casos de trinômios.

Considere uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, sendo x_1 e x_2 suas raízes. Uma forma fatorada para essa equação é $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Assim, para utilizar essa forma de fatoração, precisaremos do coeficiente a e também das raízes da equação. Nos exemplos, já indicaremos as raízes, mas caso restem dúvidas de como calculá-las, trabalharemos as resoluções no próximo capítulo.

Exemplos:

a. Ao fatorar a expressão $x^2 - 5x + 6$, repare que não podemos utilizar nenhum dos métodos de fatoração estudados até aqui, porém essa expressão tem a característica de um trinômio do 2º grau.

> **! Atenção**
>
> Essa expressão não é uma equação, porém vamos tratá-la como se fosse, para poder aplicar o teorema fundamental da Álgebra e escrevê-la na forma fatorada, ou seja, o procedimento será o da resolução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, a fim de determinar suas raízes. Resolvendo essa equação, verificamos que as raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. Como o coeficiente que acompanha o termo x^2 vale 1 ($a = 1$), temos que a forma fatorada é:
>
> $$x^2 - 5x + 6 = 1(x - 2)(x - 3) = (x - 2)(x - 3)$$

Reforçando que, nesse exemplo, igualamos a expressão a zero visando calcular as raízes, porém ela não é uma equação. Logo, ao final, não igualamos a nenhum valor.

b. Fatoramos a expressão $x^2 - x + 12$, definindo as raízes de $x^2 - x - 12 = 0$, que são $x_1 = -3$ e $x_2 = 4$, e verificando que o coeficiente que acompanha x^2 é 1, assim:

$$x^2 - x + 12 =$$
$$= 1[x - (-3)](x - 4) =$$
$$= (x + 3)(x - 4)$$

c. Podemos fatorar a expressão $2x^2 + 4x - 6$ de duas maneiras:

- sem aplicar o fator comum, analisando diretamente a expressão. Assim, temos que $a = 2$ e as raízes são $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$. Logo, a forma fatorada da expressão dada será:

$$2x^2 + 4x - 6 =$$
$$= 2(x - (-3))(x - 1) =$$
$$= 2(x + 3)(x - 1)$$

- aplicando inicialmente o fator comum, ou seja, colocando o 2 em evidência, obtendo $2(x^2 + 2x - 3)$ e fatorando na sequência a expressão dentro dos parênteses. Como temos $a = 1$ e as mesmas raízes, obtemos a mesma forma fatorada:

$$2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x - 3) =$$
$$= 2[1(x + 3)(x - 1)] = 2(x + 3)(x - 1)$$

d. Fatoramos $2x^2 + x - 1$, verificando que $a = 2$, e que as raízes da equação são $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = -1$. Logo, a forma fatorada será:

$$2x^2 + x - 1 =$$
$$= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left[x - (-1)\right] =$$
$$= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)$$

FRENTE ÚNICA

Diferença de quadrados

Esse caso de fatoração é resultado do produto da soma pela diferença entre dois termos, produto notável estudado anteriormente. Sua identificação se dá pelo nome que leva, ou seja, se tivermos a diferença entre dois termos que podem ser escritos como quadrados, podemos escrever essa diferença como o produto notável mencionado.

Exemplos:

a. A expressão $x^2 - y^2$ é uma diferença entre dois termos, claramente quadrados, sendo esse o perfil desse caso de fatoração. Assim, extraímos as raízes dos quadrados, $\sqrt{x^2} = x$ e $\sqrt{y^2} = y$, e a forma fatorada será o produto da soma pela diferença dessas raízes, ou seja, temos:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

b. A fatoração da expressão $4x^2 - 25y^2$ independe de os termos serem compostos de números e parte literal, o procedimento é o mesmo. Extraímos as raízes dos quadrados, $\sqrt{4x^2} = 2x$ e $\sqrt{25y^2} = 5y$, e escrevemos a forma fatorada $4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$.

c. Para fatorar a expressão $x^4 - 4y^2$, devemos notar que nem sempre um termo quadrado tem como expoente o número 2. Como visto nas propriedades de potências, qualquer expoente par pode ser transformado em quadrado. No caso, temos $\sqrt{x^4} = x^2$ e $\sqrt{4y^2} = 2y$, e a fatoração será:

$$x^4 - 4y^2 = (x^2 + 2y)(x^2 - 2y)$$

d. Na fatoração de $x^4 - y^4$, temos que $\sqrt{x^4} = x^2$ e $\sqrt{y^4} = y^2$. Logo, $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$. Ressaltamos, novamente, que, sempre que efetuarmos uma fatoração, devemos analisar no resultado encontrado outras possibilidades de fatoração. Nesse caso, devemos notar que $(x^2 - y^2)$ representa outra diferença de quadrados, cuja fatoração é $(x + y)(x - y)$. Assim, temos que a fatoração completa da expressão será:

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y).$$

Até aqui, estudamos os principais casos de fatoração. Ainda estudaremos as fatorações que envolvem termos do 3º grau, porém esses casos não são tão frequentes quanto os já estudados.

Para desenvolver mais a técnica das fatorações, além de fazer muitos exercícios, vale alertar a melhor ordem para aplicar os casos: primeiro o fator comum, depois o agrupamento e, por fim, as fatorações do 2º grau (trinômios e diferença de quadrados). Seguindo essa orientação, as chances de não identificar uma fatoração ou de fazê-la de modo incompleto se reduzem bastante.

Exercício

5. Fatore completamente as expressões a seguir:

a) $x^2 - 10x + 25$

b) $x^2 + 16x + 64$

c) $x^2 + 22x + 121$

d) $x^2 - 2x + 1$

e) $9x^2 + 24x + 16$

f) $3x^2 - 42x + 147$

g) $4x^2 - 8xy + 4y^2$

h) $x^3 + 12x^2 + 36x$

i) $2x^4 + 12x^3 + 18x^2$

j) $x^2 + x - 2$

k) $x^2 - 10x + 16$

l) $2x^2 - 3x + 1$

m) $3x^2 + 5x - 2$

n) $a^2 - b^2$

o) $25a^2 - b^2$

p) $4x^2 - 64$

q) $2x^2 - 8y^2$

r) $a^4 - b^4$

s) $16a^4 - 81b^4$

Fatoração de expressões do 3º grau

Apresentaremos a seguir outros dois casos de fatoração, a soma e a diferença de cubos.

Soma de cubos

Considere a soma de cubos $x^3 + y^3$, cuja forma fatorada é $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Repare que o segundo fator não é um trinômio quadrado perfeito, uma vez que o termo xy não é o dobro do produto das raízes dos quadrados x^2 e y^2.

Exemplos:

a. Para fatorar a expressão $x^3 + 8$, devemos identificar os dois cubos e suas raízes cúbicas, no caso, x^3 e 8 e as respectivas raízes cúbicas $\sqrt[3]{x^3} = x$ e $\sqrt[3]{8} = 2$. Assim, temos que:

$$x^3 + 8 =$$
$$= (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2) =$$
$$= (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

b. Da mesma maneira, para fatorar a expressão $x^6 + 8y^3$, devemos identificar os cubos, sendo eles x^6, cuja raiz cúbica é x^2, e $8y^3$, cuja raiz cúbica é $2y$. Assim:

$$x^6 + 8y^3 =$$
$$= (x^2 + 2y)[(x^2)^2 - 2\,x^2 \cdot 2y + (2y)^2] =$$
$$= (x^2 + 2y)(x^4 - 2x^2y + 4y^2)$$

Diferença de cubos

Considere a diferença de cubos $x^3 - y^3$; sua forma fatorada é $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

Devemos ficar atentos, pois a soma e a diferença de cubos possuem formas fatoradas muito parecidas. Novamente, repare que o segundo fator da forma fatorada não representa um trinômio quadrado perfeito.

Exemplos:

a. De modo análogo ao anterior, fatoramos $x^3 - 27$, identificando os cubos e suas respectivas raízes cúbicas: x^3 de raiz x e 27 de raiz 3. Assim, temos:

$$x^3 - 27 =$$
$$= (x - 3)(x^2 + 3 \cdot x + 3^2) =$$
$$= (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

b. Fatora-se a expressão $64y^9 - 27x^6$, identificando os cubos $64y^9$ e $27x^6$ e suas respectivas raízes cúbicas $4y^3$ e $3x^2$. Com isso, a forma fatorada será:

$$64y^9 - 27x^6 =$$
$$= (4y^3 - 3x^2)[(4y^3)^2 + 4y^3 \cdot 3x^2 + (3x^2)^2] =$$
$$= (4y^3 - 3x^2)(16y^6 + 12x^2y^3 + 9x^4)$$

Exercício

6. Fatore as expressões a seguir:

a) $a^3 + b^3$
b) $a^3 - b^3$
c) $8z^3 + 125$
d) $k^6 - 1\,000$

Simplificação de expressões algébricas usando fatoração

É fundamental dominar a fatoração, e os exercícios propostos até aqui buscam, na prática, a fixação e o auxílio na identificação dos casos; porém, as questões que envolvem fatoração geralmente trabalham as simplificações algébricas.

Exemplos:

a. Uma fração do tipo $\dfrac{2x + 2y}{x^2 - y^2}$ pode ser simplificada pela divisão do numerador e do denominador por um mesmo termo. Porém, só podemos dividir termos literais quando aparecerem como fatores, tanto no numerador quanto no denominador. No exemplo, a fração apresenta uma soma no numerador e uma diferença no denominador; logo, é necessário fatorá-los para que a simplificação se torne possível. Como no numerador o 2 aparece como fator comum aos termos, colocando-o em evidência, obtemos $2(x + y)$. Já no denominador, não temos fator comum nem o perfil do agrupamento, porém identificamos a diferença de quadrados. Assim, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Ao transformar o numerador e o denominador em produtos, ou seja, fatorar, podemos realizar uma simplificação, obtendo a expressão final:

$$\frac{2x + 2y}{x^2 - y^2} = \frac{2\cancel{(x + y)}}{\cancel{(x + y)}(x - y)} = \frac{2}{x - y}$$

b. Para simplificar a fração $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$ devemos observar que, no numerador, temos um trinômio quadrado perfeito que, fatorado, fica $(x + 2)^2$. Já no denominador, temos uma diferença de quadrados que pode ser fatorada como $(x + 2)(x - 2)$. Assim, temos:

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x + 2)^2}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{\cancel{(x + 2)}(x + 2)}{\cancel{(x + 2)}(x - 2)} = \frac{x + 2}{x - 2}$$

Exercício resolvido

1. Simplifique a expressão $\dfrac{(ax + bx + ay + by)(5a - 5b)}{(a^2 - b^2)(x^2 + 2xy + y^2)}$.

Resolução:

$$\frac{\overbrace{(ax + bx + ay + by)}^{\text{agrupamento}} \cdot \overbrace{(5a - 5b)}^{\text{fator comum}}}{\underbrace{(a^2 - b^2)}_{\text{diferença de quadrados}} \cdot \underbrace{(x^2 + 2xy + y^2)}_{\text{trinômio quadrado perfeito}}} =$$

$$= \frac{[x(a + b) + y(a + b)] \cdot 5(a - b)}{(a + b)(a - b) \cdot (x + y)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(a + b)}\,\cancel{(x + y)} \cdot 5\cancel{(a - b)}}{\cancel{(a + b)}\,\cancel{(a - b)} \cdot (x + y)^{\cancel{2}}} = \frac{5}{x + y}$$

FRENTE ÚNICA

Exercícios

7. Simplifique as expressões a seguir:

a) $\dfrac{2x + 4y}{6x + 12y}$

b) $\dfrac{3a - 9b}{a^2 - 9b^2}$

c) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

d) $\dfrac{x^2 - 2x + xy - 2y}{x^2 - y^2}$

e) $\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + 2xy + y^2}$

f) $\dfrac{(x^2 - 49)(2x - 2)}{2x^2 - 28x + 98}$

g) $\dfrac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{(x^4 - y^4)}$

8. **Fuvest-SP 2016** A igualdade correta para quaisquer a e b, números reais e maiores do que zero, é:

a) $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$

b) $\dfrac{1}{a - \sqrt{a^2 + b^2}} = -\dfrac{1}{b}$

c) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - b$

d) $\dfrac{1}{a + b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

e) $\dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = a - b$

FRENTE ÚNICA

CAPÍTULO

5

Equação do 1º grau e equação do 2º grau

Várias situações em nosso cotidiano nos fazem pensar na resolução de equações simples, seja no troco recebido por uma compra, seja na organização financeira mensal. Nos exames vestibulares e no Enem, o equacionamento e a consequente resolução de equações são muito frequentes. Neste capítulo, trabalharemos resoluções de equações do 1º grau e de equações do 2º grau e alguns problemas e técnicas que facilitam tanto o equacionamento quanto a resolução delas.

Equações do 1º grau

Quando resolvemos uma equação, de qualquer tipo, nossa busca é pelo(s) valor(es) numérico(s) que podemos atribuir à incógnita (parte literal que aparece na equação) de modo que a igualdade apresentada seja verdadeira.

Uma equação é do 1º grau quando a incógnita tem como expoente o número 1. De modo geral, podemos afirmar que uma equação do 1º grau, para a incógnita x, é da forma $ax + b = 0$, na qual a e b pertencem ao conjunto dos números reais.

No intuito de determinar a incógnita, isolamos a variável para encontrar o seu valor, sendo que esse valor satisfaz a igualdade; logo, a equação estará resolvida. Cada lado em relação à igualdade é chamado de membro, sendo o lado esquerdo o primeiro membro e o lado direito o segundo membro. Para trabalharmos a resolução das equações do 1º grau, podemos pensar que cada membro representa uma massa presente sobre o prato de uma balança, e a igualdade nos indica que os dois pratos estão em equilíbrio, ou seja, cada prato possui elementos cuja "massa total" é a mesma. Seguindo esse raciocínio, isolar a incógnita x corresponde a deixá-la sozinha em um dos pratos da balança e verificar se há equilíbrio com o outro prato, ou seja, se as "massas" são iguais. Visando atingir tal objetivo, o que faremos corresponde a adicionar ou remover "massas" idênticas de ambos os pratos da balança (ou membros da equação), de tal modo que o equilíbrio se mantenha e o propósito de determinar o valor desconhecido seja atingido.

É importante estarmos atentos ao conjunto universo, que representa todos os possíveis valores que a incógnita pode assumir. De modo geral, o enunciado trabalha com soluções no conjunto dos números reais, mas é possível que haja soluções nos demais conjuntos numéricos que estudamos no Capítulo 1. Conhecendo o conjunto universo, devemos observar se o valor obtido para a incógnita pertence a ele, e, em seguida, apresentar o conjunto solução, que é o conjunto de todos os valores que tornam a equação verdadeira. Para isso, nos valemos da teoria dos conjuntos, do conjunto solução (S) ou conjunto verdade (V). Por exemplo, se $x = 5$, então o conjunto solução da equação será $S = \{5\}$.

Em determinadas situações, não haverá solução para a equação; nesses casos, o conjunto solução será vazio, ou seja, $S = \varnothing$ ou $S = \{\ \}$. Isso ocorre quando a equação, de fato, não possui solução, ou quando o valor encontrado não é elemento do conjunto universo. Por fim, também podemos nos deparar com equações que possuem infinitas soluções, ou equações cuja solução é o próprio conjunto universo. Esses casos serão trabalhados nos exemplos.

Exemplos:

a. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x + 3 = 7$.

Não é muito complicado perceber que, para que o primeiro membro se iguale ao segundo, é necessário que $x = 4$. Porém, vamos trabalhar com a ideia da balança. Para isolar x, é necessário eliminar o $+3$ do primeiro membro da equação, o que faremos subtraindo 3 em ambos os membros, mantendo a "balança equilibrada". Assim $x + 3 = 7 \Leftrightarrow x + 3 - 3 = 7 - 3 \Leftrightarrow x = 4$. Logo, $S = \{4\}$.

b. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x - 5 = -12$.

A lógica é a mesma: para isolar x no primeiro membro e eliminar o -5, adicionaremos 5 aos dois membros. Assim: $x - 5 = -12 \Leftrightarrow x - 5 + 5 = -12 + 5 \Leftrightarrow x = -7$. Logo, $S = \{-7\}$.

Repare que, nos dois primeiros exemplos, trabalhamos com a adição e subtração. Isso pode ser simplificado se pensarmos de forma mais direta: se um termo está de um lado da igualdade, podemos "enviá-lo" ao outro lado com a **operação oposta**. Assim, no primeiro exemplo, podemos reescrever a equação "removendo" a adição no primeiro membro $(+3)$ e "inserindo" uma subtração no segundo membro (-3). Já no segundo exemplo, a subtração (-5) "aparece" no segundo membro como uma adição $(+5)$. Tome muito cuidado, pois é comum ouvir que devemos "passar o número para o outro membro com o sinal oposto", mas note que não é o sinal e sim a operação oposta.

c. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $2x - 5 = 4$.

Sendo prático, "passamos" 5 do primeiro para o segundo membro trabalhando a operação oposta, obtendo $2x = 4 + 5 \Leftrightarrow 2x = 9$. Agora, note que a operação que envolve a incógnita x, é a multiplicação por 2; assim, para isolarmos o x, devemos dividir ambos os membros da igualdade por 2, ou seja, $2x = 9 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = 4{,}5$. Logo, $S = \{4{,}5\}$.

d. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $5x + 5 = 2x - 3$.

A troca de membro dos termos de uma equação pode ocorrer indiscriminadamente de um membro para outro, respeitadas as mesmas regras. Repare que, neste caso, a variável aparece nos dois membros. Para determinarmos seu valor, precisamos que ela fique isolada em um dos membros. Assim, podemos "passar" o $2x$ para o primeiro membro e o 5 para o segundo, obtendo $5x - 2x = -3 - 5$, que equivale a $3x = -8$. Dividindo ambos os membros por 3, temos $x = -\frac{8}{3}$. Portanto, $S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$.

Nos dois últimos exemplos trabalhamos a divisão dos membros pelo número que acompanha a incógnita a fim de isolarmos o x. Esse procedimento também pode ser simplificado com a aplicação da operação inversa, ou seja, se um número multiplica a incógnita, ele pode ser "levado" para o outro lado da igualdade dividindo o(s) termo(s) ali presentes, mesmo que antes disso seja necessária a realização de outras operações.

e. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $2(x + 3) - 7 = -3(x + 1) + 9$.

Antes de trocarmos algum termo de membro, podemos resolver as operações possíveis em cada membro, reduzindo o número de termos da equação; assim, temos: $2x + 6 - 7 = -3x - 3 + 9 \Leftrightarrow 2x - 1 = -3x + 6$. Em seguida, mudamos de membro os termos -1 e $-3x$, chegando a $2x + 3x = 6 + 1$, que equivale a $5x = 7$. Dividindo ambos os membros por 5, obtemos $x = \frac{7}{5}$. Portanto, $S = \left\{\frac{7}{5}\right\}$.

f. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $-3(x + 5) = 4x - 12$.

Aplicamos a distributiva e deslocamos o termo numérico para o segundo membro e o termo com a incógnita para primeiro membro:

$$-3(x + 5) = 4x - 12 \Leftrightarrow -3x - 15 = 4x - 12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3x - 4x = -12 + 15 \Leftrightarrow -7x = 3$$

Repare que, se dividirmos ambos os membros por 7, chegaremos a $-x = \frac{3}{7}$, porém nossa busca é por x, e não $-x$. Nessa situação, temos duas possibilidades a considerar: podemos dividir ambos os membros por -7, que nos levaria a $\frac{-7x}{-7} = \frac{3}{-7}$ e, pela regra de sinais, teremos $x = -\frac{3}{7}$, ou podemos multiplicar ambos os membros por -1, obtendo: $-7x = 3 \Leftrightarrow 7x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$.

Logo, $S = \left\{-\frac{3}{7}\right\}$.

g. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\frac{x}{2} = 5$.

Temos, neste caso, duas opções para a resolução. A primeira corresponde à ideia da balança: multiplicamos por 2 ambos os membros da igualdade a fim de isolarmos o x. Nesse caso, teremos $\frac{x}{2} = 5 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \cdot 5 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = 10 \Leftrightarrow x = 10$. A segunda opção é reduzir ambos os membros ao mesmo denominador por meio do mmc dos denominadores. Como todo número inteiro pode ser escrito na forma de fração, nesse caso podemos escrever a equação $\frac{x}{2} = 5$ como $\frac{x}{2} = \frac{5}{1}$. Sendo mmc (2, 1) = 2, temos que $\frac{x}{2} = \frac{5}{1} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{2 \cdot 5}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{10}{2}$. Considerando o fato de que, se duas frações de mesmo denominador são iguais, então seus numeradores são iguais, podemos simplesmente desconsiderar os denominadores e verificamos que $x = 10$, ou seja, $S = \{10\}$.

Perceba, neste último exemplo, que não “cortamos ou cancelamos” o denominador. A ideia vem do equilíbrio da balança, pois, se temos **todo** o primeiro membro sendo dividido pelo mesmo número que divide **todo** o segundo membro, podemos pensar que, ao eliminarmos tal divisão, o equilíbrio na balança permanece e, por isso, podemos deixar de representar tal operação.

h. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\frac{x}{2} + 5 = \frac{-2x}{3} + \frac{1}{5}$.

Inicialmente calculamos o mmc entre os denominadores e reduzimos as frações ao mesmo denominador. Assim, como mmc (1, 2, 3, 5) = 30, temos:

$$\frac{x}{2} + \frac{5}{1} = \frac{-2x}{3} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{15x}{30} + \frac{150}{30} = \frac{-20x}{30} + \frac{6}{30}$$

Lembre-se que o processo consiste em dividir o mmc pelo denominador de cada fração e multiplicar esse quociente pelo respectivo numerador, obtendo o novo numerador. Agora que ambos os membros possuem todos os termos divididos pelo mesmo número, no caso o 30, podemos desconsiderar os denominadores e resolver a equação:

$$15x + 150 = -20x + 6 \Leftrightarrow 15x + 20x = 6 - 150 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 35x = -144 \Leftrightarrow x = -\frac{144}{35}.$$

Logo, $S = \left\{-\frac{144}{35}\right\}$.

É frequente a dúvida entre deixar um número na forma decimal ou na forma de fração irredutível. Numa análise simples, se resolvemos uma questão teste, devemos observar as alternativas, que indicarão a forma ideal; caso não seja um teste, a representação na forma de fração irredutível facilitará, na maior parte dos casos, as operações, pois podemos evitar situações com dízimas.

i. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\frac{x + 1}{2} + \frac{2x + 3}{3} = 1$.

Quando alguma fração possuir mais de um termo no numerador, ao fazer a redução ao mesmo denominador, podemos deixar indicada a multiplicação desse numerador para realizá-la depois. São frequentes erros operacionais na tentativa de trabalhar a resolução de uma equação pulando etapas. Neste exemplo, mmc (1, 2, 3) = 6. Assim,

$\frac{x + 1}{2} + \frac{2x + 3}{3} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow \frac{3(x + 1)}{6} + \frac{2(2x + 3)}{6} = \frac{6}{6}$.

Agora que todas as frações têm o mesmo denominador, podemos eliminar os denominadores e resolver a equação. Acompanhe:

$$3(x + 1) + 2(2x + 3) = 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x + 3 + 4x + 6 = 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7x + 9 = 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7x = 6 - 9 \Leftrightarrow 7x = -3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{7} \Rightarrow S = \left\{-\frac{3}{7}\right\}$$

Vale ressaltar neste último exemplo que, no caso de o numerador possuir mais de um termo, a multiplicação trabalhada nele, gerada na redução ao mesmo denominador, deve ser aplicada em todos os termos desse numerador, sendo esse o motivo da aplicação dos parênteses. A orientação de evitar calcular a distributiva mentalmente, deixando-a indicada no primeiro momento, serve tanto para prevenir erros de cálculo quanto para deixá-lo atento à regra de sinais que, eventualmente, pode passar despercebida.

j. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\frac{x - 1}{4} - \frac{x + 3}{2} = \frac{2x - 1}{6}$.

Iniciamos considerando o mmc (2, 4, 6) = 12 e reduzindo as frações ao mesmo denominador. Assim, temos

$\frac{x - 1}{4} - \frac{x + 3}{2} = \frac{2x - 1}{6} \Leftrightarrow \frac{3(x - 1)}{12} - \frac{6(x + 3)}{12} = \frac{2(2x - 1)}{12}$.

Ao desconsiderar os denominadores teremos a equação $3(x - 1) - 6(x + 3) = 2(2x - 1)$. Feito isso, aplicamos as distributivas, atentando para os sinais, e isolamos a incógnita, resolvendo a equação:

$$3x - 3 - 6x - 18 = 4x - 2 \Leftrightarrow -3x - 21 = 4x - 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3x - 4x = -2 + 21 \Leftrightarrow -7x = 19 \Leftrightarrow 7x = -19 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{19}{7}$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{19}{7}\right\}$.

No início do capítulo, afirmamos que existem equações cujo conjunto solução é vazio e outras que apresentam infinitas soluções. Vamos a alguns exemplos desses tipos de equações.

k. Resolva, em $\mathbb{Z}$, a equação $2x - 7 = 2$.

Repare que o enunciado informa que o conjunto universo, aquele no qual buscaremos a solução para a equação, é o conjunto dos números inteiros. Porém, resolvendo a equação, obtemos $x = \frac{9}{2}$, que é um número racional não inteiro. Nesse caso, dizemos que não há solução no universo desejado. Logo, $S = \varnothing$.

l. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $2(x + 3) = 3x + 7 - x$.

Ao iniciar a resolução, chegamos a $2x + 6 = 2x + 7$. Aqui já é possível identificar um problema, uma vez que o primeiro membro possui as parcelas $2x$ e 6 e o segundo possui as parcelas $2x$ e 7. Ora, para que a igualdade seja satisfeita, já que ambos os membros apresentam uma parcela igual ($2x$), a segunda parcela também deveria ser igual. Isso fica evidenciado quando isolamos o x. Note que $2x + 6 = 2x + 7 \Leftrightarrow 2x - 2x = 7 - 6 \Leftrightarrow 0x = 1$. Como o produto de zero por qualquer número é necessariamente igual a zero, não há valor de x que torne a equação possível. Logo, $S = \varnothing$.

m. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $2(x + 5) - (x + 3) = x + 7$.

Iniciamos com as distributivas e a redução dos termos semelhantes, obtendo:

$$2(x + 5) - (x + 3) = x + 7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x + 10 - x - 3 = x + 7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + 7 = x + 7$$

Aqui é possível perceber que qualquer valor de x que atribuirmos na igualdade será solução, uma vez que o primeiro e o segundo membros são iguais. Isso pode ser facilmente notado isolando x:

$$x + 7 = x + 7 \Leftrightarrow x - x = 7 - 7 \Leftrightarrow 0x = 0$$

Como o produto de zero por qualquer número é igual a zero, podemos atribuir qualquer número real para x que teremos a igualdade satisfeita. Logo, nesse caso, a solução será o conjunto universo do enunciado que, no caso, é o conjunto dos números reais. Assim, $S = \mathbb{R}$.

Lembre-se de que tanto o conjunto vazio quanto os conjuntos numéricos, como o dos números inteiros ou reais, possuem sua notação específica, não sendo necessário o uso das chaves { } na representação da solução.

Finalmente, podemos criar um roteiro simples para a resolução de equações do 1º grau:

1º Se ela possuir termos que sejam números na forma de fração, calcule o mmc dos denominadores e reduza os termos ao mesmo denominador. Em seguida, desconsidere os denominadores.

2º Desenvolva as distributivas, se houver alguma.

3º Termos que adicionam ou subtraem são "levados" ao outro membro com sua operação oposta, no intuito de termos a incógnita em um membro e valores apenas numéricos no outro.

4º Se houver um número multiplicando ou dividindo a incógnita, "passe-o" para o outro membro aplicando a seus termos a operação inversa, respectivamente, a divisão ou a multiplicação.

5º Defina o conjunto solução da equação.

Exercícios

1. Resolva as equações, considerando o universo dos números inteiros:

a) $5x + 3 = -13$

b) $2(x + 7) = -20$

c) $3x - 9 = 2x + 14$

d) $5(x - 4) - 12 = 6x + 16$

e) $2(x + 5) - 3(x - 2) = 2x - (x + 7)$

2. Resolva as equações, considerando o universo dos números racionais:

a) $\frac{x}{2} = 4$

b) $\frac{2x}{3} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{x}{3} + 4 = \frac{x}{2} - 1$

d) $2x - \frac{2}{5} = \frac{x}{10} + 3$

e) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{3} = \frac{x+1}{4}$

f) $\frac{2x-3}{5} + \frac{3-x}{8} = 1$

g) $\frac{3x+1}{2} - \frac{x+2}{4} + \frac{2(x-1)}{6} = 3$

h) $\frac{-7x+1}{4} - \frac{2-3x}{6} = \frac{1}{3} - \frac{x-1}{9}$

Sistemas de equações do 1º grau

Algumas equações possuem mais de uma incógnita a ser determinada, sendo necessária a utilização de outras equações para a determinação desses valores. Ao conjunto de equações com as mesmas variáveis damos o nome de sistema, e, sendo tais equações compostas de variáveis do 1º grau, sem relação de produto ou quociente entre elas, denotamos esses sistemas como **sistemas lineares**.

Dos diversos métodos para a resolução de sistemas, destacaremos aqui, por meio de exemplos, dois deles: o da substituição e o da adição.

Exemplos:

a. Resolva o sistema linear: $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$.

Vamos utilizar para a resolução o método da substituição, que consiste em escolher uma das equações do sistema e isolar uma de suas incógnitas, substituindo-a na outra equação. O trabalho fica facilitado quando alguma das incógnitas possuir coeficiente 1, sendo assim a escolha mais prática. No caso, podemos escolher a primeira equação, isolando x ou y. Tomando, por exemplo, a incógnita y, temos $y = 4 - x$. Substituindo o valor de y na outra equação, teremos: $2x - (4 - x) = -1$. Resolvendo essa equação, chegamos a $2x - 4 + x = -1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$. Em seguida, voltamos à equação $y = 4 - x$ e substituímos o valor encontrado para x, obtendo $y = 4 - 1 \Leftrightarrow y = 3$.

Neste caso, como possuímos os valores de duas incógnitas, devemos apresentar a solução na forma de par ordenado, primeiro x e depois y. Apresentaremos a solução com o par ordenado (1, 3), ou seja, $S = \{(1, 3)\}$.

b. Resolva o sistema linear: $\begin{cases} x - y = 6 \\ x + 3y = -10 \end{cases}$.

O método da adição consiste em adicionar as equações membro a membro, de modo que a soma apresente apenas uma das incógnitas. Note que, se fizermos a soma nesse sistema, como ele foi apresentado, não atingiremos tal objetivo, pois teremos $(x - y) + (x + 3y) = 6 + (-10) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x + 2y = -4$. Para que o objetivo seja alcançado, podemos multiplicar por uma constante uma ou ambas as equações do sistema (desde que o façamos com todos os termos, garantindo dessa forma a manutenção da igualdade), de modo a obtermos um dos coeficientes das variáveis com o sinal oposto ao do coeficiente da mesma variável na outra equação. Observe que, neste caso, multiplicando a primeira equação por (-1), teremos -1 como coeficiente de x na primeira equação e 1 como coeficiente de x na segunda equação:

$$\begin{cases} x - y = 6 & \cdot(-1) \\ x + 3y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -6 \\ x + 3y = -10 \end{cases}$$

Em seguida, adicionando as equações, chegamos a $(-x + y) + (x + 3y) = -6 + (-10) \Leftrightarrow 4y = -16 \Leftrightarrow y = -4$. Conhecido o valor de uma das incógnitas, devemos substituí-lo em qualquer uma das equações para determinar o valor da outra. Por exemplo, $x - y = 6 \Leftrightarrow x - (-4) = 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 2$. Assim, $S = \{(2, -4)\}$.

Os dois métodos apresentados funcionam para qualquer sistema desse tipo. Fica a critério de cada um qual método utilizar.

c. Resolva o sistema de equações: $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$.

Em certas situações a substituição se apresenta como mais complicada por não haver nenhuma incógnita com coeficiente 1. Nesses casos, podemos utilizar o método da adição, multiplicando ambas as equações visando, na adição dos produtos, eliminar alguma das incógnitas. No sistema dado, por exemplo, podemos eliminar a incógnita x na adição se multiplicarmos a primeira equação por -3 e a segunda equação por 2:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 & \cdot(-3) \\ 3x + 4y = 10 & \cdot(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 9y = -3 \\ 6x + 8y = 20 \end{cases}$$

Adicionando as equações e igualando os membros, chegamos a:

$$(-6x + 9y) + (6x + 8y) = -3 + 20 \Leftrightarrow 17y = 17 \Leftrightarrow y = 1$$

Substituindo o valor de y na primeira equação, temos:

$$2x - 3 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Assim, $S = \{(2, 1)\}$.

Exercício

3. Resolva os sistemas lineares a seguir:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 7y = -1 \\ 2x - y = 13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x + 2y = 9 \\ 4x + 5y = 12 \end{cases}$

Problemas envolvendo equações do 1º grau

Dominar as técnicas de resolução de equações do 1º grau é muito importante, mas, como esse assunto aparece frequentemente nos vestibulares na forma de problemas, ou seja, em situações contextualizadas, também é importante sabermos equacionar o problema, ou seja, identificar equações ou sistemas de equações que correspondam ao problema dado. Não existem fórmulas mágicas ou um passo a passo para equacionar uma situação problema, uma vez que o contexto pode trazer inúmeras situações que devem ser avaliadas. O treino, ou seja, a resolução do maior número possível de problemas, é o que ajudará a apurar seu olhar na busca por padrões, além de aumentar a confiança ao resolver esse tipo de problemas.

Algumas orientações básicas podem ser úteis nessa tarefa: leia todo o enunciado, identificando os valores desconhecidos e os conhecidos; faça uma segunda leitura organizando os dados e identificando o que foi pedido, atribuindo incógnitas ao valores desconhecidos; verifique se não há uma relação entre incógnitas distintas que pode simplificar o problema para o menor número de incógnitas possíveis; busque uma relação de igualdade entre as incógnitas e os valores numéricos. Além disso, colocar-se na situação do problema pode ajudá-lo a entender e interpretar melhor o enunciado.

Nos exercícios resolvidos a seguir, trabalharemos um pouco com essas orientações.

Exercícios resolvidos

1. Enem O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Disponível em: www.cbat.org.br (adaptado).

Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre

a) 4,0 m e 5,0 m
b) 5,0 m e 5,0 m
c) 6,0 m e 7,0 m
d) 7,0 m e 8,0 m
e) 8,0 m e 9,0 m

Resolução:

Temos uma modalidade do atletismo composta de três saltos: o primeiro de distância em metros desconhecida, que chamaremos de x; o segundo, cujo alcance diminui em 1,2 m em relação ao primeiro, que chamaremos de $(x - 1{,}2)$; e o terceiro, cujo alcance para o segundo diminui em 1,5 m, ou seja, $x - 1{,}2 - 1{,}5 = x - 2{,}7$. Com isso, os valores desconhecidos ficam nomeados e trabalharemos com uma única incógnita. Buscaremos em seguida pela igualdade.

Como o enunciado informa também que a meta para a distância total é de 17,4 metros, temos:

$$x + (x - 1{,}2) + (x - 2{,}7) = 17{,}4$$

No caso, os parênteses servem apenas para evidenciar a distância de cada salto. Resolvendo a equação chegamos ao resultado pedido, a distância do primeiro salto:

$$x + (x - 1{,}2) + (x - 2{,}7) = 17{,}4 \Leftrightarrow 3x - 3{,}9 = 17{,}4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x = 21{,}3 \Leftrightarrow x = 7{,}1$$

Alternativa: D.

2. Unicamp-SP Em uma empresa, $\frac{1}{3}$ dos funcionários tem idade menor que 30 anos, $\frac{1}{4}$ tem idade entre 30 e 40 anos e 40 funcionários têm mais de 40 anos.

a) Quantos funcionários tem a referida empresa?
b) Quantos deles têm pelo menos 30 anos?

Resolução:

Aqui, a incógnita, que chamaremos de x, é o total de funcionários da empresa. Temos que $\frac{1}{3}x$ tem menos de 30 anos, $\frac{1}{4}x$ tem entre 30 e 40 anos e 40 são os funcionários com mais de 40 anos. Organizamos o raciocínio e, em seguida, equacionamos o problema, ou seja, igualamos o total de funcionários da empresa com a soma de cada uma das parcelas fornecidas no enunciado: $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 40 = x$. A resolução dessa equação nos dará o resultado do primeiro item do problema, ou seja, o total x de funcionários da empresa:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{40}{1} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow \frac{4x}{12} + \frac{3x}{12} + \frac{480}{12} = \frac{12x}{12} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x + 3x + 480 = 12x \Leftrightarrow 480 = 5x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{480}{5} = 96$$

Para o segundo item, sabendo que $\frac{1}{3}$ do total de funcionários tem idade menor que 30 anos, o restante têm no mínimo 30 anos, ou seja, o número de funcionários que têm pelo menos 30 anos é:

$$96 - \frac{1}{3} \cdot 96 = 96 - \frac{96}{3} = 96 - 32 = 64$$

3. Em uma prova com 20 questões, cada acerto vale 0,5 ponto e, para cada erro, é descontado 0,1 ponto. Se um aluno tirou 6,4, quantas questões ele acertou?

Resolução:

Vamos chamar de x o número de questões que o aluno acertou. Repare que, em vez de usar outra incógnita e chamarmos de y o número de questões que ele errou, podemos pensar que, o número de questões erradas é a diferença entre o total de questões e o número de questões acertadas, ou seja, $20 - x$. A pontuação, por sua vez, é dada por $0{,}5 \cdot x$, isto é, meio ponto por cada acerto, menos $0{,}1 \cdot (20 - x)$, ou seja, menos um décimo de ponto por cada erro. Logo, a nota final é dada por $0{,}5 \cdot x - 0{,}1 \cdot (20 - x)$. Como o aluno tirou nota 6,4, obtemos a equação $0{,}5 \cdot x - 0{,}1 \cdot (20 - x) = 6{,}4$. Resolvendo essa equação, obtemos $x = 14$, ou seja, o aluno acertou 14 questões.

4. Unicamp-SP Uma senhora comprou uma caixa de bombons para seus dois filhos. Um deles tirou para si metade dos bombons da caixa. Mais tarde, o outro menino também tirou para si metade dos bombons que encontrou na caixa. Restaram 10 bombons. Calcule quantos bombons havia inicialmente na caixa.

Resolução:

Chamando de x o total de bombons da caixa, temos que o primeiro filho retirou a metade dos bombons, ou seja, $\frac{1}{2}x$, restando na caixa a outra metade, $\frac{1}{2}x$. O outro filho retirou para si metade dos bombons que encontrou na caixa, ou seja, retirou metade de $\frac{1}{2}x$, que é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x$. Sabemos também que sobraram 10. Assim, a quantidade tirada pelos meninos corresponde ao total de bombons da caixa: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 10 = x$.

Resolvendo a equação, obtemos $x = 40$ bombons.

5. **Unicamp-SP 2020** Em uma família, cada filha tem o mesmo número de irmãs e irmãos, e cada filho tem um número de irmãs igual ao dobro do número de irmãos. O número total de filhos e filhas dessa família é igual a

a) 11.
b) 9.
c) 7.
d) 5.

Resolução:

No caso, vamos chamar de h o número de filhos e m o número de filhas e, como estamos trabalhando com duas incógnitas, montaremos um sistema de equações.

A primeira equação refere-se às irmãs e irmãos das filhas: cada filha tem $m - 1$ irmãs, uma vez que uma filha não é irmã de si mesma, e h irmãos. Como cada filha tem o mesmo número de irmãs e irmãos, então $m - 1 = h$.

A segunda equação refere-se às irmãs e irmãos dos filhos: cada filho tem um número de irmãs (m) igual ao dobro de irmãos ($h - 1$, pelo mesmo motivo já citado), então $m = 2 \cdot (h - 1)$.

Chegamos assim ao sistema $\begin{cases} m - 1 = h \\ m = 2(h - 1) \end{cases}$.

Resolvendo o sistema, verificamos que $h = 3$ e $m = 4$, totalizando 7 filhos e filhas.

Alternativa: C.

Exercícios

4. **Unifor-CE 2020** Uma pessoa pegou um táxi para ir ao trabalho. A distância de casa ao trabalho é de 12 km. Na ida, ela pagou R$ 29,10, na bandeira 1. Na volta para casa à noite, ela pegou um táxi novamente e pagou R$ 33,90, na bandeira 2, pelo mesmo trajeto. O acréscimo, por quilômetro rodado, da bandeira 1 para a bandeira 2 foi de

a) R$ 0,45
b) R$ 0,40
c) R$ 0,38
d) R$ 0,35
e) R$ 0,30

5. **Cesupa 2018** Um determinado medicamento deve ser administrado a um doente três vezes ao dia, em doses de 5 ml cada vez, durante 20 dias. Se cada frasco contém 100 cm^3 do medicamento, a quantidade mínima de frascos necessários para atender esse doente é

a) 4
b) 3
c) 2
d) 1

6. **UEG-GO 2021** Em um quintal existem porcos e galinhas, num total de 46 patas e 16 animais. Considerando y o número de galinhas, o total de porcos será

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 12

7. **UFJF-MG 2019** Em um edifício de 20 andares, há alguns andares com somente dois apartamentos, e os demais andares possuem três apartamentos cada. No total são 54 apartamentos. Nesse edifício, a quantidade de andares que possuem três apartamentos é

a) 8
b) 10
c) 12
d) 14
e) 27

8. **Enem 2018** Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações. Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

a) 20
b) 24
c) 29
d) 40
e) 58

9. UFT-TO 2019 Em um curso de graduação da UFT, um quinto dos acadêmicos tem altura menor que 1,60 metros, metade tem altura de 1,60 a 1,70 metros e 75 acadêmicos têm mais de 1,70 metros. Quantos acadêmicos, no total, tem o referido curso?

a) 125
b) 175
c) 200
d) 250

10. Unifor-CE 2020 Os departamentos A, B e C de uma empresa de tecnologia do estado do Ceará devem receber a quantia de 850 mil reais para melhorias de cada departamento. Por razões estratégicas, A deve ficar com a mesma quantia que os departamentos B e C juntos e B deve receber 50 mil reais a mais que C.

Nessas condições, temos que:

a) C receberá 150000 reais.
b) C receberá 175000 reais.
c) B receberá 225000 reais.
d) B receberá 250000 reais.
e) A receberá 425000 reais.

Equações do 2º grau

A forma geral de uma equação do 2º grau é $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a \in \mathbb{R}^*$, b e $c \in \mathbb{R}$. Chamamos a de coeficiente dominante, ou ainda nos referimos a ele como coeficiente do termo do 2º grau, assim como b é o coeficiente do termo do 1º grau e c é o coeficiente (ou termo) independente. Repare que, pela definição, a não pode ser zero, porém b e c podem. Observa-se também que uma equação do 2º grau terá até duas soluções distintas, quando existirem no universo trabalhado.

Devemos ficar atentos à forma como a equação do 2º grau nos é apresentada. Devemos manter os termos diferentes de zero em apenas um dos membros da igualdade, de modo que um dos membros seja sempre igual a zero. Também é conveniente organizar os termos do membro diferente de zero de modo que o termo com a incógnita ao quadrado seja o primeiro, o termo central seja o da incógnita elevada a 1 e o último seja o termo independente.

São diversas as maneiras de resolver uma equação do 2º grau e algumas variam em função do número de termos que a equação apresenta e, ainda em função disso, as equações podem ser classificadas em equações do 2º grau completas ou incompletas.

A seguir, veremos os casos e trabalharemos suas possibilidades de resolução.

Equações incompletas do 2º grau

Considerando uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, são chamadas de equações incompletas aquelas que têm $b = 0$ e/ou $c = 0$.

1º caso: $b = 0$

Quando $b = 0$, temos equações do tipo $ax^2 + c = 0$. Repare que a incógnita x aparece apenas em um dos termos, logo, para resolvermos tais equações, podemos simplesmente isolar a variável.

Exemplos:

a. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 - 4 = 0$.

Podemos simplesmente isolar x, chegando a $x^2 = 4$. Em seguida, repare que, para $x = 2$ ou $x = -2$, temos a igualdade satisfeita. Assim, a solução da equação será composta por $x = 2$ ou $x = -2$, que pode ser apresentado como $x = \pm 2$. Portanto, $S = \{\pm 2\}$.

Assim, temos:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2 \therefore S = \{\pm 2\}$$

b. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $2x^2 - 24 = 0$.

Isolando a variável, temos:

$$2x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 24 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

Simplificando o radicando, temos $x = \pm 2\sqrt{3}$. Portanto, $S = \{\pm 2\sqrt{3}\}$.

c. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + 4 = 0$.

Nesse caso, isolando a incógnita chegamos a $x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-4}$, cuja resposta existe em $\mathbb{R}$, que é o universo estipulado no enunciado. Assim, não há solução real para a equação, ou seja, $S = \varnothing$.

2º caso: $c = 0$

Quando $c = 0$, a equação do 2º grau terá a forma $ax^2 + bx = 0$. Observe que, neste caso, a variável aparece em todos os termos, sendo possível trabalharmos a fatoração por fator comum como estratégia de resolução.

d. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + 2x = 0$.

Como x é fator comum aos dois termos do primeiro membro, fatoramos a equação obtendo $x(x + 2) = 0$. Note que chegamos a uma multiplicação com dois fatores, x e $(x + 2)$, cujo produto é zero, e isso só é possível se um dos fatores for igual a zero. Assim, temos que $x = 0$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Assim, a solução será $S = \{-2, 0\}$.

e. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $2x^2 - 3x = 0$.

Fatorando o primeiro membro, temos $x(2x - 3) = 0$. Então, do produto entre x e $(2x - 3)$, temos que $x = 0$ ou $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Assim, $S = \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$.

3º caso: $b = 0$ e $c = 0$

No caso de $b = c = 0$, a equação será da forma $ax^2 = 0$ e, sempre que isso ocorrer, as duas raízes também serão nulas, ou seja, $S = \{0\}$.

Exercício

11. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir:

a) $x^2 - 16 = 0$
b) $x^2 - 121 = 0$
c) $3x^2 - 27 = 0$
d) $5x^2 - 100 = 0$
e) $-2x^2 + 4 = 0$
f) $-3x^2 - 12 = 0$
g) $x^2 - x = 0$
h) $2x^2 - 5x = 0$
i) $x^2 + 7x = 0$
j) $-12x^2 + 3x = 0$
k) $-2x + 6x^2 = 0$

Equações completas do 2º grau

São equações do 2º grau que apresentam todos os coeficientes não nulos, ou seja, temos *a*, *b* e *c* diferentes de zero. A maneira de resolver essas equações também é válida para resolução das equações incompletas, mas sugere-se que as equações incompletas sejam resolvidas com as técnicas trabalhadas anteriormente.

Para resolver as equações completas utilizaremos dois modos diferentes: a *fórmula de resolução* (comumente chamada de fórmula de Bhaskara) e o método conhecido como *soma e produto*.

Fórmula de resolução de equações do 2º grau

Como o próprio nome diz, trata-se de uma fórmula que nos conduz até as soluções da equação. No Brasil, ela é popularmente conhecida como fórmula de Bhaskara.

Considerando uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com *a, b* e *c* diferentes de zero, a fórmula é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observa-se que a organização da equação é fundamental, para uma correta identificação dos coeficientes *a, b* e *c*. Na fórmula, a expressão dentro da raiz é chamada de *discriminante*, e a representamos pela letra grega *delta*; assim, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Como toda fórmula, há a praticidade de, ao atribuirmos os valores dos coeficientes e realizarmos as operações necessárias, obtermos o resultado esperado; porém devemos estar atentos a possíveis erros operacionais e à correta definição dos coeficientes *a, b* e *c*.

É bastante comum iniciarmos a resolução da equação pela determinação do discriminante (delta) e, a partir desse resultado, determinamos as raízes da equação.

Exemplos:

a. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 - 4x + 4 = x - 2$.

Inicialmente trazemos os termos do segundo para o primeiro membro e reduzimos os termos semelhantes, obtendo assim:

$$x^2 - 4x + 4 = x - 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

O passo seguinte consiste em identificar de forma clara quem são os coeficientes, que, no caso, são $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.

Calculando o discriminante, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

Em seguida, aplicando a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, temos $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$. Repare que neste ponto temos duas possibilidades, que gerarão as duas raízes. Chamaremos de $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ e de $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$, obtendo a solução $S = \{2, 3\}$.

b. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + 2x - 1 = 0$.

Temos $a = 1$, $b = 2$ e $c = -1$. Assim: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8$. Substituindo os valores dos coeficientes na fórmula, obtemos $x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$.

As duas raízes da equação então serão:

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-1 + \sqrt{2})}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-1 - \sqrt{2})}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

Portanto, a solução da equação é:

$$S = \{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\} = \{-1 \pm \sqrt{2}\}$$

c. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $-2x + x^2 + 1 = 0$.

Não é incomum equações do 2º grau apresentarem seus termos fora de ordem. Se preferir, para evitar confusão com os coeficientes, basta reescrevê-los na ordem do modelo esperado na definição. Temos, assim, $x^2 - 2x + 1 = 0$, e podemos identificar que $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$. Calculando o discriminante, obtemos $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$. Assim, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2}$. Repare que temos duas possibilidades, mas que geram raízes iguais: $x_1 = \frac{2+0}{2} = \frac{2}{2} = 1$ e $x_2 = \frac{2-0}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Temos, assim, uma só solução sendo o conjunto solução $S = \{1\}$.

d. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $2x^2 + 3x + 5 = 0$.

Aqui, $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$ e o discriminante é $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31$. Agora, quando pensamos na fórmula, o discriminante aparece dentro de uma raiz quadrada, ou seja, teremos $\sqrt{-31}$, que não existe no conjunto dos números reais. Assim, não é possível determinar as raízes da equação, uma vez que elas não estão definidas no conjunto universo dado. É importante saber que esta equação possui duas raízes que estão definidas no conjunto dos números complexos, que será apresentado em outro momento. Logo, a solução, em $\mathbb{R}$, é $S = \varnothing$.

Nos exemplos anteriores, além de trabalharmos o desenvolvimento da fórmula de resolução, também podemos verificar uma relação importante entre o discriminante e as raízes encontradas.

Note que:

- se $\Delta > 0$, as duas raízes serão reais e distintas, como nos exemplos **a** e **b**;
- se $\Delta = 0$, as duas raízes são reais e iguais, como se vê no exemplo **c**;
- se $\Delta < 0$, não existirá raiz real, logo a solução será vazia, como foi visto no exemplo **d**.

Soma e produto

Considerando as duas raízes da equação do 2º grau, $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, ao adicionarmos x_1 e x_2, temos $x_1 + x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = \dfrac{-b}{a}$ e, se multiplicarmos x_1 e x_2, chegamos a

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Com isso, observamos que existe relação direta entre a soma e o produto das raízes da equação do 2º grau e seus coeficientes. Podemos, com isso, resolver as equações por meio dessas duas relações, sendo esse o método conhecido como *soma e produto*. O processo é relativamente simples quando $a = 1$, porém é verdade que nem sempre é funcional, pois, para que seja eficaz o uso da soma e produto, é necessário que as raízes sejam de fácil identificação.

Exemplos:

a. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

A equação é a mesma do exemplo *a* anterior, mas a resolveremos pela soma e produto. Temos $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$, assim, $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-5)}{1} = 5$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{6}{1} = 6$. Agora, resolveremos mentalmente um sistema no qual a soma de dois números é igual a 5 e o produto entre eles é igual a 6. Considerando o produto 6, entre outras, temos algumas possibilidades: 1 e 6, 2 e 3, -1 e -6, -2 e -3, ... Em seguida, testamos cada uma dessas possibilidades, buscando aquela que satisfaz a soma 5 esperada, esses valores serão nossas raízes. Repare que $1 + 6 = 7$, $(-1) + (-6) = -7$, $(-2) + (-3) = -5$ não satisfazem a soma, diferentemente de 2 e 3, cuja soma é 5. Logo, as raízes da equação são 2 e 3 e, portanto, $S = \{2, 3\}$.

Pode parecer que o método da soma e produto seja muito trabalhoso, ou até mesmo incerto, fazendo parecer que o uso da fórmula de resolução facilite tudo; porém, com um pouco de prática, perceberemos que soma e produto é um processo rápido, principalmente quando as raízes forem números inteiros.

b. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Primeiro, identificamos $a = 1$, $b = -3$ e $c = -10$. Assim, $x_1 + x_2 = \dfrac{-(-3)}{1} = 3$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-10}{1} = -10$. Para que um produto seja um número negativo, devemos ter uma raiz positiva e uma negativa. Com isso, podemos pensar em valores como -1 e 10, 1 e -10, -2 e 5 ou 2 e -5. Dentre os quatro pares de números inteiros que satisfazem o produto, o único que satisfaz a soma é o par -2 e 5, pois $(-2) + 5 = 3$. Assim, $S = \{-2, 5\}$.

c. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $2x^2 + 12x + 18 = 0$.

Sendo $a \neq 1$, isso não significa que o método da soma e produto se torna inviável. Temos $a = 2$, $b = 12$ e $c = 18$, então $x_1 + x_2 = \dfrac{-12}{2} = -6$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{18}{2} = 9$. Para que o produto seja 9 temos as opções: 1 e 9, -1 e -9, 3 e 3 ou -3 e -3. Não é necessário listar tantas opções; podemos mentalmente eliminar as opções verificando a soma. No caso, as raízes aqui serão -3 e -3; logo, $S = \{-3\}$.

Neste caso, também podemos simplificar a equação (dividindo ambos os membros por 2), chegando à equação $x^2 + 6x + 9 = 0$, tendo $a = 1$, $b = 6$ e $c = 9$, e essa simplificação não muda as raízes, nem altera seu cálculo.

Exercícios

12. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir, utilizando a fórmula de resolução.

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$

b) $x^2 - x = 12$

c) $10x + 25 + x^2 = 0$

d) $2x^2 - 5x + 6 = x^2 - 6x + 8$

e) $2x^2 - 2x - 4 = x - 5$

f) $x^2 - 4x + 10 = 0$

g) $x^2 - 2x - 1 = 1$

h) $x^2 + 5x + 3 = -2x^2 - x$

i) $-2x^2 + 8x - 3 = 0$

j) $5x^2 = 3x - 1$

13. Determine o valor de k na equação $x^2 + kx + 18 = 0$ para que esta possua duas raízes reais e iguais. (Dica: lembre-se de quem determina a característica das raízes na fórmula de resolução de equações quadráticas.)

14. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações abaixo pelo método da soma e produto.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$

b) $x^2 - 7x + 10 = 0$

c) $-x^2 + x + 12 = 0$

d) $x^2 - 13x - 20 = -3x + 19$

e) $-22x + x^2 + 120 = 0$

f) $x^2 + 2x + 1 = 0$

g) $2x^2 - 32x + 128 = 0$

h) $15 - x^2 = 2x$

15. Dada a equação do 2º grau $x^2 + 5x - 3 = 0$, determine:

a) A soma das raízes.

b) O produto das raízes.

c) A soma dos inversos das raízes.

16. **Urca-CE 2018** Sejam a e b as raízes da equação $x^2 - px + 8$. Sabendo que $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{5}{16}$, então o valor positivo de p é:

a) 4
b) 6
c) 10
d) 8
e) 3

Outras equações recorrentes

Equações irracionais

Equações irracionais são aquelas em que a incógnita a ser calculada está em um radicando. Para resolvê-las devemos isolar a raiz e elevar ambos os membros da equação obtida ao índice da raiz, para que a incógnita possa ser isolada. Devemos ficar atentos, pois podemos, nesse cálculo, encontrar falsas raízes.

Exemplos:

a. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\sqrt{x-1} = 2$.

Como a raiz quadrada já está isolada, devemos elevar ambos os membros ao quadrado, obtendo:

$$\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$$

Repare que 5 satisfaz a igualdade do enunciado, uma vez que $\sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$. Logo, S = {5}.

b. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\sqrt{x+3} = x - 3$.

Elevando ao quadrado ambos os membros, temos:

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (x-3)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + 3 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

Resolvendo a equação, encontramos $x_1 = 1$ e $x_2 = 6$. Agora, vamos verificar se ambas as raízes da equação do 2º grau são soluções da equação irracional. Notamos que, se $x = 1$, temos da equação dada no enunciado que $\sqrt{1+3} = 1 - 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = -2 \Rightarrow 2 = -2$, que é um absurdo, logo, 1 não é solução. Agora, considerando $x = 6$, temos a igualdade válida, pois $\sqrt{6+3} = 6 - 3 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3 = 3$. Logo, S = {3}.

O exemplo anterior nos mostra o cuidado que devemos ter com a operação de elevar os membro a alguma potência (no caso, o quadrado), uma vez que essa ação pode nos levar a uma equação que tem soluções que não são soluções da equação original. Para não incidir em erro, sempre que resolvermos uma equação irracional, devemos testar as raízes encontradas na equação dada, tendo assim a certeza da solução correta.

Exercício

17. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações irracionais a seguir.

a) $\sqrt{x} = 2$

b) $\sqrt{x-5} = 7$

c) $\sqrt{x+3} - 2 = -4$

d) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+3}$

e) $\sqrt{2x+8} = x$

f) $x + 1 = \sqrt{2x+5}$

Equações biquadradas

São equações que pelo nome sugerem o quadrado de um quadrado, ou seja, um termo x^4. Porém, podemos trabalhar a estratégia de resolução para qualquer equação do tipo $a(x^p)^2 + b(x^p) + c = 0$, em que p pode ser qualquer real positivo e não nulo mas, em geral, será natural.

Exemplos:

a. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Repare que o termo $x^4 = (x^2)^2$, ou seja, temos uma equação na forma $(x^2)^2 + 13x^2 + 36 = 0$. A estratégia consiste em trocar x^2 por outra variável, por exemplo y, a fim de obtermos uma equação do 2º grau. Fazendo a troca, chegamos a $y^2 - 13y + 36 = 0$ e, resolvendo-a, encontramos as raízes $y_1 = 4$ e $y_2 = 9$. Lembre-se de que y foi apenas uma variável auxiliar na resolução, pois a variável original é x; assim, para encontrar a variável x, é preciso substituir os valores encontrados. Se $y = 4$, então $x^2 = 4 \Rightarrow \pm 2$, e, se $y = 9$, então $x^2 = 9 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \pm 3$. Assim, o conjunto solução da equação será S = {+2, −2, +3, −3} = {±2, ±3}.

b. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^4 + x^2 - 12 = 0$.

Fazendo $x^2 = y$, temos $y^2 + y - 12 = 0$, cujas raízes são $y_1 = 3$ e $y_2 = -4$. Voltando à variável x, temos que, se $y = 3$, então $x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Agora, se $y = -4$, então $x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$, que não existe no conjunto dos números reais. Portanto, $S = \{\pm\sqrt{3}\}$.

c. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^6 - 10x^3 + 16 = 0$.

Aqui, podemos escrever que $x^6 = (x^3)^2$ e, substituindo $x^3 = y$, chegamos a $y^2 - 10y + 16 = 0$, cujas raízes são $y_1 = 8$ e $y_2 = 2$. Assim, se $y = 8$, temos que $x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} \Rightarrow x = 2$ e, se $y = 2$, temos que $x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$. Logo, a solução da equação é $S = \{2, \sqrt[3]{2}\}$.

Vale ressaltar que as equações do 4º grau possuem quatro raízes e as de 6º grau, 6. As outras raízes, não presentes nas resoluções, são as raízes não reais, que pertencem ao conjunto dos números complexos. Esse conjunto será estudado posteriormente.

Exercício

18. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir.

a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

b) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

c) $x^4 + 2x^2 - 63 = 0$

d) $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

e) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

f) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

g) $x^6 - 6x^3 + 5 = 0$

Gorodenkoff/Shutterstock.com

FRENTE ÚNICA

CAPÍTULO

6

Razão e proporção

Neste capítulo, trabalharemos conceitos importantes, cuja incidência nos vestibulares, principalmente no Enem, é relevante: grandezas direta e inversamente proporcionais, regras de três e porcentagens. Após o estudo deste capítulo, é fundamental que você saiba identificar se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais, para aplicar o método mais apropriado na resolução de problemas, além de trabalhar as situações que envolvam porcentagem.

Um exemplo de aplicação do conceito de grandezas proporcionais é a projeção de maquetes físicas ou virtuais. Nos *softwares* usados para a projeção de maquetes, as medidas dos elementos representados devem ser proporcionais às medidas reais das construções para que não haja deformações e seja possível visualizar a forma final do projeto.

Razão e proporção

Iniciaremos com a definição de **razão** que na Matemática representa a divisão entre dois números reais, sendo o denominador diferente de zero. Matematicamente, temos:

$$\frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}^*$$

Note que há uma diferença entre a razão e um número racional. Quando definimos o conjunto dos racionais, falamos da razão entre inteiros, sendo esta sua definição. Aqui, quando falamos da razão entre dois números, não estamos pensando em números racionais, apenas na representação da divisão na forma fracionária. A nomenclatura também muda, apesar da representação ser na forma de fração, dizemos que *a* é o termo antecedente e *b* é o consequente. A leitura da razão acima é "*a* está para *b*" ou simplesmente "*a* para *b*".

A **proporção** está relacionada a uma igualdade entre razões, ou seja, quando temos a representação de uma mesma razão usando múltiplos para representar o antecedente e o consequente. No conjunto dos números racionais chamamos esta relação de frações equivalentes. Generalizando, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ com } a \text{ e } c \in \mathbb{R}, b \text{ e } d \in \mathbb{R}^*$$

Exemplos:

a. $\frac{150}{120} = \frac{75}{60} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$

Temos, no exemplo acima, a representação de algumas proporções. Note que, se multiplicarmos o antecedente e o consequente de $\frac{5}{4}$ por 30, obtemos $\frac{150}{120}$. Logo, temos uma proporção entre estas frações. Ou ainda, se multiplicarmos o antecedente e o consequente de $\frac{5}{4}$ por 6, encontramos a fração $\frac{30}{24}$, que não aparece na simplificação que fizemos no exemplo, porém também é proporcional, não somente a $\frac{5}{4}$, mas a todas as razões proporcionais representadas no exemplo.

Resumindo, todas as razões que geramos ao multiplicarmos (por um número real não nulo) o antecedente e o consequente da fração irredutível $\frac{5}{4}$ serão razões proporcionais.

b. Em uma sala de aula com 32 alunos, as mulheres representam $\frac{3}{4}$ do total da turma. Quantas mulheres e quantos homens há nessa sala?

Aqui temos um exemplo do uso da proporção. Quando o enunciado diz que $\frac{3}{4}$ da sala são mulheres, está dizendo que, de cada 4 pessoas, 3 são mulheres. Essa é uma ideia de proporção. Assim, se fizermos a razão entre o número de mulheres pelo total de alunos, o resultado simplificado será $\frac{3}{4}$. Logo, seja *m* o número de mulheres,temos: $\frac{m}{32} = \frac{3}{4}$. Se multiplicarmos o antecedente 3 e o consequente 4 pelo número 8, obtemos a fração equivalente $\frac{24}{32}$. Assim, $\frac{m}{32} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{m}{\cancel{32}} = \frac{24}{\cancel{32}} \Rightarrow m = 24$. Portanto, há 24 mulheres na sala.

O exemplo anterior é interessante para extrapolarmos os dados do enunciado e criarmos outras razões que possam auxiliar na resolução de problemas. Por exemplo, quando dizemos que $\frac{3}{4}$ da sala são mulheres, concluímos que, a cada 4 pessoas, 3 são mulheres e, consequentemente, 1 é homem. Assim, podemos dizer que a razão de homens nesta sala é $\frac{1}{4}$ (1 homem para cada 4 pessoas), ou, que a razão entre homens e mulheres na sala é $\frac{1}{3}$ (1 homem para cada 3 mulheres), ou ainda, que a razão entre mulheres e homens nessa sala é $\frac{3}{1}$ (3 mulheres para cada 1 homem).

c. Segundo uma reportagem, a razão entre o número total de alunos matriculados e o número de alunos não concluintes de um curso, nessa ordem, é de 9 para 7. A reportagem ainda indica que 140 alunos concluíram o curso. Com base na reportagem, determine o número total de alunos matriculados nesse curso.

A razão dada no enunciado é $\frac{\text{matriculados}}{\text{não concluintes}} = \frac{9}{7}$, assim, para cada 9 pessoas que se matriculam, 7 não concluem o curso e, consequentemente, apenas 2 concluem. Assim, podemos criar a razão $\frac{\text{matriculados}}{\text{concluintes}} = \frac{9}{2}$. Como sabemos o número total de concluintes, podemos chamar de *x* o número total de matriculados, encontrando a proporção $\frac{x}{140} = \frac{9}{2}$. Logo, $x = 630$ alunos matriculados.

Há duas propriedades de proporção interessantes que podem ser utilizadas na resolução de problemas.

Propriedade 1

Se temos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então $a \cdot d = b \cdot c$ (conhecida como multiplicação em cruz, ou multiplicação cruzada).

Propriedade 2

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, assim, a razão entre a soma dos antecedentes pela soma dos consequentes também é proporcional às razões que a geram.

No primeiro exemplo, vimos que $\frac{25}{20} = \frac{5}{4}$. Se fizermos a razão entre a soma dos numeradores pela soma dos denominadores obtemos $\frac{25}{20} = \frac{5}{4} = \frac{30}{24}$, que é exatamente a razão que verificamos ser proporcional, mesmo não aparecendo na simplificação desse exemplo.

Esta segunda propriedade auxiliará nos exercícios de divisão em partes diretamente proporcionais.

Escala

Uma **escala** é a razão que relaciona a medida de uma representação e a sua medida real, nesta ordem. Observe:

$$\frac{\text{medida da representação}}{\text{medida real}} = \frac{a}{b} \text{ ou } a : b$$

Em escalas, é comum adotarmos o numerador igual a 1 para que a comparação seja feita de uma parte da representação para a quantidade que o denominador apresenta na realidade. Por exemplo, se em um mapa a escala for 1 : 200, isso indica que, para cada unidade de medida na representação, temos 200 unidades na realidade. Repare que não falamos qual a unidade de medida, isso porque em escalas podemos escolher a medida que se encaixa melhor a cada caso, o que indica, no exemplo dado, que qualquer unidade que tomarmos seguirá a razão 1 : 200, ou seja, 1 cm no mapa representa 200 cm no real, ou ainda, 1 metro no mapa representa 200 metros no real, e assim por diante. Muito utilizada em mapas, escalas não servem apenas para indicar reduções, mas também ampliações, como no caso de desenho de peças ou componentes eletrônicos muito pequenos. A escala 20 : 1, por exemplo, indica que temos 20 unidades de medida na representação para cada 1 unidade do real. É importante perceber que, por se tratar de uma razão, a proporção é utilizada na resolução de problemas que envolvem escalas numéricas.

Exemplos:

a. Em uma miniatura de um violão, a escala da representação do objeto para o tamanho real é 1 : 4. Se o comprimento desse violão é de 1,20 m, qual o comprimento da miniatura em centímetros?

Começamos analisando a escala 1 : 4 cujo significado é: "para cada 1 unidade da miniatura, temos 4 unidades para o real", então, 1 cm da miniatura indica 4 cm do violão real. Assim, para resolvermos este exercício começamos transformando a medida do enunciado de metros para centímetros. No caso, 1,2 m = 120 cm. Assim, sendo x o comprimento da miniatura, em centímetros, temos:

$$\frac{\text{representação}}{\text{real}} = \frac{1}{4} = \frac{x}{120}$$

Utilizando a primeira propriedade de proporção, temos $4x = 120 \Rightarrow x = 30$ cm.

b. Uma marca de refrigerantes quer instalar, na entrada de sua fábrica, a representação ampliada da garrafa de seu produto mais vendido. O tamanho real dessa garrafa é 20 cm e, para tal ampliação, pensou-se na escala 30 : 1. Neste caso, qual o tamanho em metros da representação?

Seja x a medida da representação e, neste caso, temos uma ampliação, pois o numerador da escala é maior que o denominador, assim, a representação será maior que o real. Assim,

$$\frac{\text{representação}}{\text{real}} = \frac{30}{1} = \frac{x}{20}$$

Resolvendo a equação, temos $x = 600$ cm, ou, $x = 6$ m.

Exercícios

1. Em uma prova de matemática com 20 questões, um aluno acertou $\frac{3}{5}$ das questões. Quantas questões ele errou?

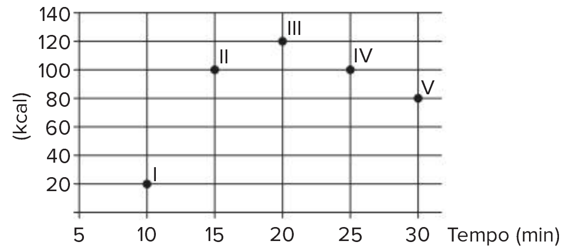
2. Durante certa semana, uma loja de sapatos constatou que a razão entre o número de pares de sapatos de adultos e infantis vendidos foi de 3 para 5, nesta ordem. Sabendo-se que nessa semana foram vendidos ao todo 160 pares de sapatos, qual a quantidade de sapatos de adultos vendidos?

3. Em uma festa, há 42 convidados e a razão entre a quantidade de adultos e crianças, nessa ordem, é de 2 para 5. Se estivessem presentes mais 3 adultos e 3 crianças não tivessem comparecido, qual seria a razão entre adultos e crianças na festa?

4. **Enem 2017** Em alguns países anglo-saxões, a unidade de volume utilizada para indicar o conteúdo de alguns recipientes é a onça fluida britânica. O volume de uma onça fluida britânica corresponde a 28,4130625 mL. A título de simplificação, considere uma onça fluida britânica correspondendo a 28 mL. Nessas condições, o volume de um recipiente com capacidade de 400 onças fluidas britânicas, em cm^3, é igual a
   a) 11 200.
   b) 1 120.
   c) 112.
   d) 11,2.
   e) 1,12.

5. **Enem 2017** Uma televisão pode ser posicionada de modo que se consiga enxergar os detalhes de uma imagem em alta definição. Considere que a distância ideal, com conforto visual, para se assistir à televisão de 32 polegadas é de 1,8 metro. Suponha que haja uma relação de proporcionalidade direta entre o tamanho da tela (medido em polegada) e a distância ideal. Considere que um espectador dispõe de uma televisão de 60 polegadas e que ele deseja se posicionar em frente a ela, com conforto visual.
   A distância da televisão, em metro, em que o espectador deve se posicionar para que tenha conforto visual é mais próxima de
   a) 0,33.
   b) 0,96.
   c) 1,57.
   d) 3,37.
   e) 3,60.

6. **Enem 2019** Os exercícios físicos são recomendados para o bom funcionamento do organismo, pois aceleram o metabolismo e, em consequência, elevam o consumo de calorias. No gráfico, estão registrados os valores calóricos, em kcal, gastos em cinco diferentes atividades físicas, em função do tempo dedicado às atividades, contado em minuto.



Qual dessas atividades físicas proporciona o maior consumo de quilocalorias por minuto?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

7. Enem 2016

O LIRAa, Levantamento Rápido do Índice de Infestação por Aedes aegypti, consiste num mapeamento da infestação do mosquito Aedes aegypti. O LIRAa é dado pelo percentual do número de imóveis com focos do mosquito, entre os escolhidos de uma região em avaliação.

O serviço de vigilância sanitária de um município, no mês de outubro do ano corrente, analisou o LIRAa de cinco bairros que apresentaram o maior índice de infestação no ano anterior. Os dados obtidos para cada bairro foram:

I. 14 imóveis com focos de mosquito em 400 imóveis no bairro;
II. 6 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro;
III. 13 imóveis com focos de mosquito em 520 imóveis no bairro;
IV. 9 imóveis com focos de mosquito em 360 imóveis no bairro;
V. 15 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro.

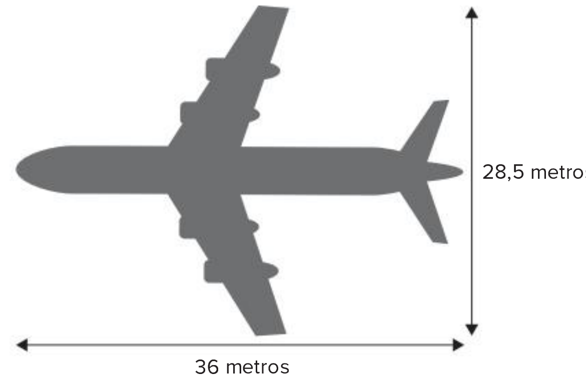
O setor de dedetização do munícipio definiu que o direcionamento das ações de controle iniciarão pelo bairro que apresentou o maior índice do LIRA.

Disponível em: http://bvsms.saude.gov.br.
Acesso em: 28 out. 2015.

As ações de controle iniciarão pelo bairro

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

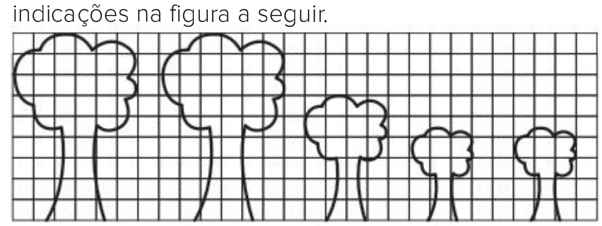
8. Enem A figura a seguir mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião em escala de 1 : 150.



Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1 cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetros, que essa folha deverá ter?

a) 2,9 cm × 3,4 cm.
b) 3,9 cm × 4,4 cm.
c) 0 cm × 25 cm.
d) 21 cm × 26 cm.
e) 192 cm × 242 cm.

9. Enem 2012 Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.



I	II	III	IV	V
1 : 100	2 : 100	2 : 300	1 : 300	2 : 300

Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

a) I b) II c) III d) IV e) V

10. Enem 2020 A caixa-d'água de um edifício terá a forma de um paralelepípedo retângulo reto com volume igual a 28 080 litros. Em uma maquete que representa o edifício, a caixa-d'água tem dimensões 2 cm × 3,51 cm × 4 cm.

Dado: 1 dm^3 = 1 L.

A escala usada pelo arquiteto foi

a) 1 : 10
b) 1 : 100
c) 1 : 1 000
d) 1 : 10 000
e) 1 : 100 000

11. Uerj 2020 Admita que, em dezembro de 2014, uma filha tinha 20 anos e seu pai, 50. Em dezembro de 2024, a razão entre as idades da filha e do pai será de:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$

Grandezas proporcionais

Grandeza, em Física, é tudo aquilo que pode ser medido. Portanto, quando trabalhamos com grandezas, estamos nos referindo a questões e situações que envolvem medidas do cotidiano, como, por exemplo, massa, distância, tamanho, volume, velocidade, entre outras.

Existem duas relações de proporcionalidade a serem estudadas: as **grandezas diretamente proporcionais** (ou apenas proporcionais) e as **grandezas inversamente proporcionais**.

Grandezas diretamente proporcionais

São as grandezas que têm como característica a relação de proporção estudada anteriormente, grandezas cuja razão é sempre constante. Então, ao considerarmos as grandezas X e Y, podemos dizer que:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = k$$

Sendo k a constante de proporcionalidade e os dados $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ são valores relacionados, respectivamente, às grandezas X e Y.

Exemplo:

Considere a seguinte situação. Um posto de combustíveis vende etanol a R$ 5,30 o litro. Qual a relação entre essas duas grandezas?

A pergunta é bem ampla, mas vamos estudar a relação preço por litro. Repare que, se comprarmos 1 litro de etanol, pagaremos R$ 5,30, mas se comprarmos 2 li tros, pagaremos R$ 10,60 e, se comprarmos 10 litros, pagaremos R$ 53,00. A razão entre o valor pago e a quantidade abastecida é sempre constante, como representado a seguir:

$$\frac{5{,}3}{1} = \frac{10{,}6}{2} = \frac{53}{10}$$

Isso indica que essas duas grandezas, preço e volume, são diretamente proporcionais nesse exemplo.

É muito comum que a identificação de grandezas diretamente proporcionais seja dada pela relação entre os valores em que, se um deles aumenta, o outro deve aumentar também, ao passo que, se um diminui, o outro também deve diminuir.

Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são denominadas inversamente proporcionais quando o produto entre elas é sempre constante, então, ao considerarmos as grandezas X e Y, temos:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = \ldots = x_n \cdot y_n = k$$

Assim como em grandezas diretamente proporcionais, k é conhecida como constante de proporcionalidade e os dados $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ são valores relacionados, respectivamente, às grandezas X e Y.

Exemplo:

Considere a seguinte situação: você fará uma viagem de carro para alguma cidade cuja distância da sua casa seja de 100 km. Se você pretende chegar em uma hora, qual deve ser sua velocidade? E se você precisar chegar em meia hora? (Lembre-se que os limites de velocidade das vias devem ser respeitados).

Essa situação é um exemplo de grandezas inversamente proporcionais, a velocidade e o tempo. Repare que, se queremos chegar em 1 hora, a velocidade deve ser de 100 km/h. Agora, para chegarmos em meia hora, a velocidade deve ser de 200 km/h. E se quisermos levar 2 horas, podemos ir a 50 km/h.

Pela definição de grandezas inversamente proporcionais, temos:

$$100 \cdot 1 = 200 \cdot \frac{1}{2} = 50 \cdot 2$$

É comum, para auxílio na identificação de grandezas inversamente proporcionais, o seguinte raciocínio: se uma das grandezas aumentar, a outra deve, necessariamente, diminuir e vice-versa.

Divisão em partes direta ou inversamente proporcionais

Dividir um todo em partes proporcionais significa respeitar a definição da proporção, seja a razão, quando diretamente proporcional, ou o produto, quando for inversamente proporcional, que deve ser sempre constante. Na resolução de problemas com essas situações, podemos usar a segunda propriedade da proporção, apresentada anteriormente, para facilitar a resolução, porém, no caso das divisões em partes inversamente proporcionais, o equacionamento pode ser uma alternativa mais interessante.

Exemplos:

a. Divida o número 120 em partes proporcionais a 2, 3 e 5.

Seja x, y e z as partes em que dividiremos 120 e que são proporcionais a 2, 3 e 5 respectivamente. Sabemos que $x + y + z = 120$ e, pela característica da divisão pedida no enunciado, temos: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$.

Pela segunda propriedade das proporções, temos:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x + y + z}{2 + 3 + 5}$$

Logo: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{120}{10} = 12$.

Portanto, $\frac{x}{2} = 12 \Rightarrow x = 24$, $\frac{y}{3} = 12 \Rightarrow y = 36$ e $\frac{z}{5} = 12 \Rightarrow z = 60$.

b. Divida o número 110 em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 12.

Sejam x, y e z as partes em que dividiremos 110 e que são inversamente proporcionais a 2, 3 e 12 respectivamente. Temos que $x + y + z = 110$ e $2x = 3y = 12z = k$, sendo k uma constante real. Logo, podemos dizer que $x = \frac{k}{2}$, $y = \frac{k}{3}$ e $z = \frac{k}{12}$.

Como $x + y + z = 110$, temos: $\frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{12} = 110$.

Resolvendo a equação, temos:

$$\frac{6k + 4k + k}{12} \Rightarrow \frac{11k}{12} = 110 \Rightarrow k = 120$$

Portanto, $x = \frac{120}{2} = 60$, $y = \frac{120}{3} = 40$ e $z = \frac{120}{12} = 10$.

Regra de três

O que conhecemos como regra de três é uma estratégia para resolução de problemas que envolvem grandezas direta ou inversamente proporcionais. No caso da **regra de três simples**, a relação será apenas entre duas grandezas, mas, caso haja três ou mais grandezas envolvidas em um mesmo problema, temos a estratégia de resolução que chamamos de **regra de três composta**.

Regra de três simples

É muito comum a simplificação da escrita na resolução de um problema na qual o uso da regra de três é identificado, porém é possivel cometer erros. Para evitar tais erros e entendermos melhor o conceito por trás da regra de três, vamos seguir os seguintes passos:

- identificamos a grandeza e montamos uma tabela cujas colunas são os valores fornecidos no enunciado, atribuindo uma letra ao valor que se busca determinar;
- analisamos se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais e, por fim, resolvemos a questão dependendo da relação entre as grandezas.

Exemplo:

Um alfaiate consegue costurar uma camisa em 2 horas. Se ele trabalhar 12 horas por dia, quantas camisas conseguirá costurar?

O exemplo é simples, mas o processo de resolução auxiliará nas questões mais complexas e quando trabalharmos a regra de três composta. Temos, aqui, duas grandezas, a quantidade de camisas produzidas e o tempo de produção (em horas). Daí, temos o quadro:

Camisas	Tempo (h)
1	2
x	12

Depois de montado o quadro, analise as grandezas em relação à proporcionalidade. A pergunta deve ser: se temos mais tempo para produzir as camisas, produziremos mais ou menos camisas? A resposta é: mais. Assim, com o aumento do tempo, temos o aumento da produção, o que nos leva a concluir que estas duas grandezas são diretamente proporcionais.

Como a razão entre as grandezas é sempre constante, temos: $\frac{1}{2} = \frac{x}{12}$.

Resolvendo a equação, obtemos $x = 6$ camisas.

No passo de identificação do tipo de relação entre as grandezas, podemos utilizar uma seta para auxiliar na classificação das variáveis envolvidas. Assim, na coluna da variável desenhamos uma seta em qualquer direção, para cima ou para baixo. Como padrão, vamos desenhar a seta para baixo. Ao analisarmos as grandezas, caso sejam diretamente proporcionais, desenhamos uma seta na mesma orientação na coluna que contém a outra grandeza, ou seja, para baixo. Caso sejam inversamente proporcionais, desenhamos uma seta no sentido contrário (para cima), na coluna da outra grandeza. É importante perceber que a orientação da seta não quer dizer que houve aumento ou redução no valor da grandeza, é apenas uma orientação em relação às grandezas, setas para o mesmo sentido indicam grandezas diretamente proporcionais, e setas em sentidos diferentes representam grandezas inversamente proporcionais.

Exercícios resolvidos

1. Um medicamento deve ser administrado em gotas por via oral e será necessário calcular a quantidade de gotas a ser ministrada a um paciente em relação a sua massa. Sabe-se que, para cada 5 quilogramas é necessário administrar 1 gota do medicamento. Se um paciente tem 60 kg, quantas gotas deste medicamento ele precisará tomar?

Resolução:

Vamos usar o artifício das setas neste exemplo. Após a identificação das grandezas, montamos o quadro com uma seta para baixo na coluna da variável. Lembre-se de que estamos tomando tal sentido apenas por padrão.

Massa (kg)	Gotas
5	1
60	x ↓

A pergunta é: se aumentamos a massa, a quantidade de gotas do remédio aumenta ou diminui? A resposta é: aumenta. Logo, a relação entre as grandezas é diretamente proporcional, pois, se uma grandeza aumenta, a outra aumenta também. Assim, desenhamos uma seta no mesmo sentido que a primeira.

Massa (kg)	Gotas
5	1
↓ 60	x ↓

Por fim, se são grandezas diretamente proporcionais, a razão entre as grandezas é constante, assim, $\frac{5}{1} = \frac{60}{x}$.

Resolvendo a equação, obtemos $x = 12$ gotas.

2. Se a 60 km/h faço o percurso entre duas cidades em 2 horas, trafegando a 80 km/h qual o tempo estimado para realizar o mesmo percurso?

Resolução:

Aqui, as grandezas são velocidade e tempo. Montando o quadro e desenhando uma seta para baixo na coluna da variável, temos:

Velocidade (km/h)	tempo (h)
60	2
80	x

Agora a pergunta: se aumentamos a velocidade, o tempo aumenta ou diminui? A resposta é: diminui. Assim, desenhamos uma seta no sentido contrário apenas para identificar essas duas grandezas como inversamente proporcionais.

Velocidade (km/h)	tempo (h)
60	2
80	x

Logo, sabemos que o produto entre as grandezas é sempre constante. Assim, $80 \cdot x = 60 \cdot 2$, então, $x = \frac{120}{80} = 1,5$.
Portanto, levaremos 1,5 hora ou 1h30min.

3. Um tapete leva 12 horas para ser confeccionado por um tecelão, se ele trabalhar numa razão de 3 metros por hora. Qual o tempo de confecção se o tecelão conseguir trabalhar na velocidade de 4 metros por hora?

Resolução:

As grandezas são tempo e velocidade de confecção do tecelão. Percebemos que, quanto mais rápido o tecelão trabalhar, menos tempo levará para produzir o tapete. Logo, temos grandezas inversamente proporcionais. Organizando as informações no quadro, temos:

Velocidade (m/h)	Tempo (h)
3	12
4	x

Sendo grandezas inversamente proporcionais, temos o produto é sempre constante.
Logo, $4x = 36 \Rightarrow x = 9$ horas.

Exercícios

12. Enem 2020 Uma torneira está gotejando água em um balde com capacidade de 18 litros. No instante atual, o balde se encontra com ocupação de 50% de sua capacidade. A cada segundo caem 5 gotas de água da torneira, e uma gota é formada, em média, por 5×10^{-2} mL de água. Quanto tempo, em hora, será necessário para encher completamente o balde, partindo do instante atual?

a) 2×10^{1}
b) 1×10^{1}
c) 2×10^{-2}
d) 1×10^{-2}
e) 1×10^{-3}

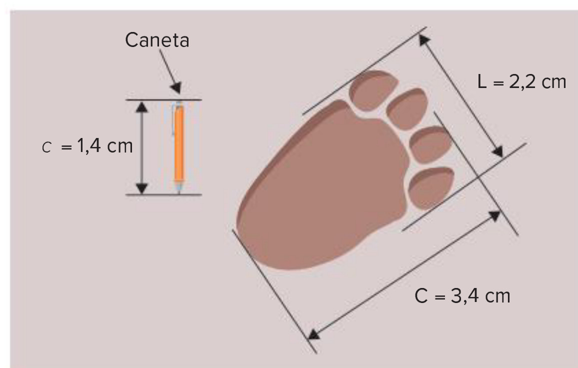
13. Enem Os calendários usados pelos diferentes povos da Terra são muito variados. O calendário islâmico, por exemplo, é lunar, e nele cada mês tem sincronia com a fase da lua. O calendário maia segue o ciclo de Vênus, com cerca de 584 dias, e cada 5 ciclos de Vênus corresponde a 8 anos de 365 dias na Terra.

MATSUURA, Oscar. Calendários e o fluxo do tempo. *Scientific American Brasil*. Disponível em: http://www.uol.com.br. Acesso em: 14 out. 2008 (adaptado).

Quantos ciclos teria, em Vênus, um período terrestre de 48 anos?

a) 30 ciclos.
b) 40 ciclos.
c) 73 ciclos.
d) 240 ciclos.
e) 384 ciclos.

14. Enem 2015 Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.



A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a

a) 4,9 e 7,6.
b) 8,6 e 9,8.
c) 4,2 e 15,4.
d) 26,4 e 40,8.
e) 27,5 e 42,5.

15. Se 10 trabalhadores conseguem desenvolver uma determinada quantidade de um produto trabalhando 9 horas por dia, quantos trabalhadores são necessários, trabalhando 6 horas por dia, para atingir a mesma produção?

16. Enem 2019 O Sistema Métrico Decimal é o mais utilizado atualmente para medir comprimentos e distâncias. Em algumas atividades, porém, é possível observar a utilização de diferentes unidades de medida. Um exemplo disso pode ser observado no quadro.

Unidade	Equivalência
Polegada	2,54 centímetros
Jarda	3 pés
Jarda	0,9144 metro

Assim, um pé, em polegada, equivale a

a) 0,1200.
b) 0,3048.
c) 1,0800.
d) 12,0000.
e) 36,0000.

17. **Enem 2019** Para contratar três máquinas que farão o reparo de vias rurais de um município, a prefeitura elaborou um edital que, entre outras cláusulas, previa:

- Cada empresa interessada só pode cadastrar uma única máquina para concorrer ao edital;
- O total de recursos destinados para contratar o conjunto das três máquinas é de R$ 31 000,00;
- O valor a ser pago a cada empresa será inversamente proporcional à idade de uso da máquina cadastrada pela empresa para o presente edital.

As três empresas vencedoras do edital cadastraram máquinas com 2, 3 e 5 anos de idade de uso. Quanto receberá a empresa que cadastrou a máquina com maior idade de uso?

a) R$ 3 100,00
b) R$ 6 000,00
c) R$ 6 200,00
d) R$ 15 000,00
e) R$ 15 500,00

18. **Unicamp-SP** A quantia de R$ 1 280,00 deverá ser dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se:

a) A divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7?
b) A divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10?

Regra de três composta

Quando temos em um problema mais de duas grandezas relacionadas, o método de resolução é o que chamamos de **regra de três composta**. Para isso, trabalharemos as análises das grandezas em relação ao tipo de proporcionalidade (direta ou inversa), usando as setas como orientação, e um método prático de resolução. Vamos estudar esse método nos exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

4. **Unifor-CE** Se 6 impressoras iguais produzem 1 000 panfletos em 40 minutos, em quanto tempo 3 dessas impressoras produziriam 2 000 desses panfletos?

Resolução:

Primeiro passo, identificação das grandezas, montagem do quadro e identificação da variável.

Impressoras	Panfletos	Tempo (min)
6	1 000	40
3	2 000	x

O segundo passo consiste em relacionar a grandeza que possui a incógnita com cada uma das outras grandezas **separadamente**, ou seja, determinar se as grandezas tempo e panfletos são direta ou inversamente proporcionais, e depois as grandezas tempo e impressoras, utilizando analisar as setas como orientação. Como padrão, desenhamos uma seta para baixo na grandeza da variável. Analisando as grandezas tempo e panfletos, se precisamos produzir mais panfletos, então precisamos de mais tempo. Logo, panfleto e tempo são grandezas diretamente proporcionais e, por isso, desenhamos uma seta no mesmo sentido (para baixo) na coluna da grandeza "Panfletos". Depois, analisando as grandezas impressoras e tempo, se diminuirmos o número de impressoras, precisamos de mais tempo para realizar o trabalho, ou seja, grandezas inversamente proporcionais. Logo, desenhamos uma seta no sentido contrário (para cima) na coluna da grandeza "Impressoras".

Impressoras	Panfletos	Tempo (min)
6 ↑	1 000 ↓	40 ↓
3	2 000	x

Agora, vamos à montagem da equação. Vimos anteriormente que, para grandezas diretamente proporcionais, a razão é constante e, para grandezas inversamente proporcionais, o produto é constante. Logo, faremos a razão entre tempo e panfletos multiplicada por impressoras. Assim, a primeira linha fica $\frac{40}{1000}\cdot 6$ e a segunda linha fica $\frac{x}{2000}\cdot 3$. Igualando, temos:

$$\frac{3x}{\cancel{2000}} = \frac{240}{\cancel{1000}} \Rightarrow \frac{3x}{2} = 240 \Rightarrow x = 160$$

Portanto, são necessários 160 minutos.

5. **UFRGS** Se forem empregados 4 kg de fios para tecer 14 m de uma maquete de fazenda com 80 cm de largura, quantos quilogramas serão necessários para produzir 350 m de uma maquete de fazenda com 120 cm de largura?

Resolução:

Identificando as grandezas, a variável e montando o quadro, temos:

Fios (kg)	Comprimento (m)	Largura (cm)
4	14	80
x	350	120

Agora, vamos analisar separadamente a grandeza fios com comprimento e, depois, fios com largura. Se aumentarmos o comprimento, precisaremos de mais fios, logo, as grandezas são diretamente proporcionais. Se aumentarmos a largura, precisaremos de mais fios, logo, também temos grandezas diretamente proporcionais. Assim, o esquema com as flechas fica:

Fios (kg)	Comprimento (m)	Largura (cm)
4 ↓	14 ↓	80 ↓
x	350	120

Como todas as grandezas são diretamente proporcionais, temos que a razão entre a grandeza fios pelas grandezas comprimento e largura é sempre constante, então, da primeira linha, temos $\frac{4}{14 \cdot 80}$ e da segunda linha, temos $\frac{x}{350 \cdot 120}$.

Repare que, nesse exemplo, como temos duas grandezas diretamente proporcionais à incógnita x, ambas devem dividi-la; isso implica o produto entre elas no denominador.

Igualando as razões e resolvendo a equação, temos:

$$\frac{x}{350 \cdot 120} = \frac{4}{14 \cdot 80} \Rightarrow \frac{x}{42\,000} = \frac{4}{1}120 \Rightarrow x = 150$$

Portanto, são necessarios 150 kg de fios.

Exercícios

19. **Enem 2017** Uma indústria tem um setor totalmente automatizado. São quatro máquinas iguais, que trabalham simultânea e ininterruptamente durante uma jornada de 6 horas. Após esse período, as máquinas são desligadas por 30 minutos para manutenção. Se alguma máquina precisar de mais manutenção, ficará parada até a próxima manutenção.

Certo dia, era necessário que as quatro máquinas produzissem um total de 9 000 itens. O trabalho começou a ser feito às 8 horas. Durante uma jornada de 6 horas, produziram 6 000 itens, mas na manutenção observou-se que uma máquina precisava ficar parada. Quando o serviço foi finalizado, as três máquinas que continuaram operando passaram por uma nova manutenção, chamada manutenção de esgotamento. Em que horário começou a manutenção de esgotamento?

a) 16h45min
b) 18h30min
c) 19h50min
d) 21h15min
e) 22h30min

20. **Enem** Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de?

a) 920 kg.
b) 800 kg.
c) 720 kg.
d) 600 kg.
e) 570 kg.

21. **Enem** Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente. A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

a) 2
b) 4
c) 5
d) 8
e) 9

Porcentagem

Porcentagem é uma forma de representar uma razão, sendo seu uso muito frequente em nosso cotidiano. A palavra "porcentagem" remete a "por cem", uma razão cujo denominador é cem. Assim, podemos dizer que $p\% = \frac{p}{100}$.

Logo, podemos afirmar que porcentagem nada mais é que uma razão cujo denominador é 100 e, para resolvermos os problemas, podemos aplicar a ideia de proporção.

Porém, antes de trabalharmos exercícios que envolvam cálculos percentuais, precisamos dominar a transformação da representação percentual para a fracionária ou decimal, isso porque na parte operacional essas formas são mais utilizadas. Também é importante saber transformar um decimal na sua representação percentual, pois em alguns momentos isso será necessário para resolução dos problemas.

Exercícios resolvidos

6. Escreva na forma de fração irredutível e na forma decimal as porcentagens abaixo.

a) 12%
b) 5%
c) 20%
d) 127%
e) 200%
f) 0,4%

Resolução:

Para tal conversão, trabalhamos a ideia de que porcentagem vem de "por cem", logo:

a) $12\% = \frac{12}{100} = \frac{3}{25} = 0{,}12$

b) $5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0{,}05$

c) $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

d) $127\% = \frac{127}{100} = 1{,}27$

e) $200\% = \frac{200}{100} = 2$

f) $0{,}4\% = \frac{0{,}4}{100} = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250} = 0{,}004$

7. Represente na forma percentual os números racionais abaixo:

a) 0,25 **b)** 0,02 **c)** 0,2 **d)** 1 **e)** 1,43 **f)** 0,0005

Resolução:

Para encontrarmos a representação percentual de um número racional, basta criarmos uma razão, colocando o número 1 abaixo do valor e multiplicar numerador e denominador por cem. Assim, encontraremos a fração "por cem" que nos leva à representação percentual.

a) $\frac{0,25}{1} = \frac{25}{100} = 25\%$

b) $\frac{0,02}{1} = \frac{2}{100} = 2\%$

c) $\frac{0,2}{1} = \frac{20}{100} = 20\%$

d) $\frac{1}{1} = \frac{100}{100} = 100\%$

e) $\frac{1,43}{1} = \frac{143}{100} = 143\%$

f) $\frac{0,0005}{1} = \frac{0,05}{100} = 0,05\%$

Exercícios

22. Nos itens a seguir, transforme os números que estão na forma percentual em decimal e os que estão na forma decimal em percentual.

a) 32%
b) 10%
c) 12,3%
d) 0,0034%
e) 150%
f) 300%
g) 0,89
h) 0,3
i) 0,03
j) 1,2
k) 5
l) 0,002

23. Resolva as operações deixando o resultado na forma percentual.

a) $\sqrt{25\%}$

b) $(10\%)^2$

24. **Unifor-CE 2020** Ao se comparar, por meio de porcentagem, dois cursos, A e B, que preparam alunos para o exame do ENEM, obtivemos que o curso A aprovou 96 de seus 640 alunos e o curso B aprovou 72 de seus 450 alunos. Sendo assim, podemos afirmar que o percentual de aprovação de A é :

a) 22% superior ao do curso B.
b) igual ao do curso B.
c) 4% inferior ao do curso B.
d) 1% inferior ao do curso B.
e) 1% superior ao do curso B.

Operações com porcentagem

Sendo porcentagem uma razão, podemos utilizar a ideia de proporção e a regra de três para resolver os exercícios. Porém, podemos simplificar a forma de se calcular rapidamente um valor, dada a porcentagem ou o percentual de um valor em relação ao todo.

Exemplos:

a. Calcule o valor de 15% de 300.

Seja x o valor a ser calculado. Uma vez que 15% pode ser representado como uma razão, existe outra razão proporcional a $\frac{15}{100}$ cujo numerador é x e o denominador é 300, então, $\frac{x}{300} = \frac{15}{100}$.

Resolvendo a equação, temos: $x = 45$.

Basicamente o que fizemos foi montar e resolver uma regra de três, em que 100% corresponde a 300 e 15% a x. Estruturando de tal forma, temos $\frac{x}{15} = \frac{300}{100}$, e $x = 45$.

No exemplo acima podemos, nas duas proporções, isolar x, chegando na igualdade $x = \frac{15}{100} \cdot 300$ e eis nossa regra prática. Para calcularmos o valor, dada uma porcentagem, basta multiplicarmos a porcentagem na sua forma fracionária (ou decimal) pelo valor que corresponde ao todo. Em outras palavras, sendo x o valor da porcentagem $p\%$ de um total T, temos:

$$x = \frac{p}{100} \cdot T$$

b. Qual percentual representa 54 em relação a 216?

Como porcentagem é a razão entre dois valores, para se determinar qual o percentual que 54 representa de 216, podemos pensar na proporção $\frac{p}{100} = \frac{54}{216}$, em que p representa o numerador da fração por cem relacionada à proporção da fração do segundo membro, em outras palavras, a porcentagem de 54 em relação a 216.

Resolvendo a equação, chegamos em $p = 25\%$.

O conceito de regra de três também se aplica aqui, sendo 216 o valor total, ou 100%, e 54 a parte em que se busca o percentual, ou p. Assim, chegamos em $\frac{100}{216} = \frac{p}{54}$. Apesar de montarmos a proporção de forma diferente, obtemos o mesmo valor, $p = 25\%$.

Nesse exemplo podemos, em ambas proporções, isolar p, chegando na igualdade $p = \frac{54}{216} \cdot 100$, sendo esta a forma prática para o cálculo da referência percentual de um valor sobre um todo, então, devemos dividir a parte pelo todo e multiplicar por 100 o resultado. Assim, o percentual p que um valor x representa de um todo T é:

$$p = \frac{x}{T} \cdot 100\%$$

Note que colocamos o símbolo % no número 100. Quando realizamos a divisão entre x e T o resultado já é o valor percentual, porém na sua forma decimal, desta forma, para transformarmos na representação percentual, multiplicamos a razão por "cem por cento".

Aumentos ou descontos

Não é raro a porcentagem ser utilizada para representar aumentos ou descontos de valores. Nesses casos, é muito comum realizarmos inicialmente o cálculo do aumento ou desconto, para posteriormente somarmos ou subtrairmos, respectivamente, do valor original. Porém, novamente, podemos simplificar o processo com uma única operação. Além de ganharmos tempo, essa forma simplificada nos auxiliará em exercícios cujo valor inicial, aquele no qual o aumento ou o desconto incidirá, não é conhecido.

Exercícios resolvidos

8. Um determinado produto, cujo custo inicial era de R$ 1000,00, teve um aumento de 15%. Qual o novo valor do produto após esse aumento?

Resolução:

O raciocínio é: quem comprar este produto não pagará mais 100% de seu valor pois, com o acréscimo de 15%, o valor do produto passou a ser 115% do que era, então, o consumidor pagará 115% de R$ 1 000,00. Sendo x o valor após o aumento, temos $x = \frac{115}{100} \cdot 1000 = 1150$. Assim, o novo valor é de R$ 1 150,00.

9. Um antibiótico atua em uma cultura de bactérias impedindo que estas se multipliquem e também reduzindo tal cultura em 10% a cada hora. Sendo 10 000 o número inicial de bactérias, após 1 hora da aplicação do antibiótico, qual o número de bactérias nesta cultura?

Resolução:

Podemos considerar que, inicialmente, tínhamos 100% da cultura, o que corresponde ao valor total. Com a entrada do antibiótico, após uma hora não teremos mais 100% da cultura, uma vez que 10% morrerá, então, teremos 90% dessa cultura. Logo, sendo x o valor final de bactérias após 1 hora, temos:

$x = \frac{90}{100} \cdot 10\,000 = 9\,000$.

Portanto, após 1 hora haverá 9 000 bactérias na cultura.

Nos dois exercícios anteriores, vimos que os valores percentuais, de aumento ou desconto, se relacionam com o valor total, 100%, adicionando o percentual de variação, quando este for aumento, ou subtraindo, quando for desconto. No caso do exercício 8 calculamos 100% + 15% = = 115%, uma vez que era um aumento, e no exercício 9, 100% – 10% = 90%, uma vez que era um desconto. De modo geral, seja V_f o valor final, após a variação percentual $p\%$ aplicada sobre V_i, o valor inicial, temos:

$$V_f = V_i(100\% \pm p\%)$$

A fim de simplificar o raciocínio, podemos dizer que $F = (100\% \pm p\%)$, sendo F o fator de correção, ou seja, a mudança percentual que incidirá sobre o valor inicial. Lembrando que o sinal de mais representa aumento e o sinal de menos, desconto, então temos:

$$V_f = V_i \cdot F$$

Exercício resolvido

10. Após um aumento de 18%, um produto passou a custar R$ 295,00. Qual o valor do produto antes do aumento?

Resolução:

Seja x o valor do produto antes do aumento, ou seja, o valor inicial. Após o aumento, temos o valor final: R$ 295,00. Como o aumento foi de 18%, o produto passa a valer 100% + 18% = 118% do valor do produto antes do aumento, então, 118% é nosso fator de correção F.

Assim, $295 = x(118\%) \Rightarrow 295 = x \cdot \frac{118}{100} \Rightarrow 295 = x \cdot 1{,}18$.

Logo, $x = \frac{295}{1{,}18} = 250$.

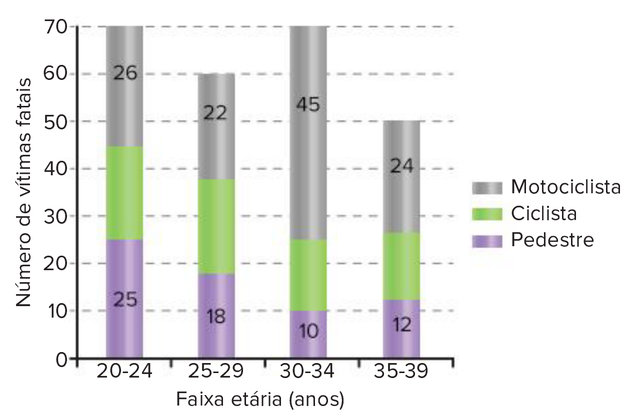
Portanto, o valor do produto antes do aumento era de R$ 250,00.

Exercícios

25. UEG-GO 2021 Pedro comprou três calças pelo preço unitário de R$ 82,00 e cinco camisas pelo preço unitário de R$ 110,50. Como pagou à vista, ele teve desconto de 15% no preço das calças e 18% no preço das camisas. Nessas condições, o valor total de descontos nas compras foi

a) R$ 119,77
b) R$ 122,57
c) R$ 128,77
d) R$ 136,35
e) R$ 138,35

26. Unesp 2018 O gráfico indica o número de vítimas fatais no trânsito de uma grande cidade em 2017. Os dados estão distribuídos por quatro faixas etárias e por três categorias de locomoção dessas vítimas: pedestres, ciclistas e motociclistas.



Nesse ano, a porcentagem de vítimas fatais que se deslocavam de bicicleta e tinham menos de 30 anos, em relação ao total de vítimas das quatro faixas etárias e das três categorias de locomoção, foi de

a) 15,6% **b)** 21,6% **c)** 30% **d)** 12,5% **e)** 27,2%

27. **Enem 2018** Devido ao não cumprimento das metas definidas para a campanha de vacinação contra a gripe comum e o vírus H1N1 em um ano, o Ministério da Saúde anunciou a prorrogação da campanha por mais uma semana. A tabela apresenta as quantidades de pessoas vacinadas dentre os cinco grupos de risco até a data de início da prorrogação da campanha.

Balanço parcial nacional da vacinação contra a gripe			
Grupo de risco	População (milhão)	População já vacinada	
		(milhão)	(%)
Crianças	4,5	0,9	20
Profissionais de saúde	2,0	1,0	50
Gestantes	2,5	1,5	60
Indígenas	0,5	0,4	80
Idosos	20,5	8,2	40

Disponível em http://portalsaude.gov.br. Acesso em: 16 ago. 2012.

Qual é a porcentagem do total de pessoas desses grupos de risco já vacinadas?

a) 12 **b)** 18 **c)** 30 **d)** 40 **e)** 50

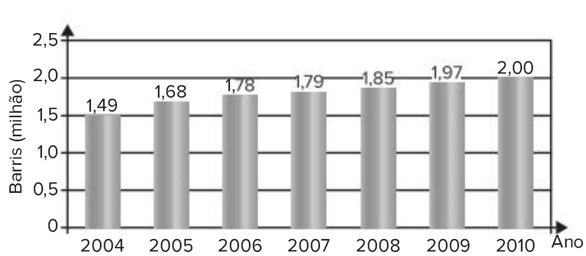
28. **Uema 2020** O quadro ao lado representa o custo médio mensal de ração para cães em um hotel. Um casal adulto da raça Boxer e uma cadela adulta da raça Yorkshire ficarão dois meses no hotel para cães. O custo médio das rações consumidas pelos cães representa 34% da mensalidade a ser paga.

Raças	Custo médio mensal (R$)	
Yorkshire		R$ 14,00
Boxer		R$ 78,00

O gasto total, em reais, por um período de dois meses, será de

a) R$ 500,00
b) R$ 800,00
c) R$ 1 000,00
d) R$ 971,42
e) R$ 790,70

29. **Enem 2016** O gráfico mostra a média de produção diária de petróleo no Brasil, em milhão de barris, no período de 2004 a 2010.



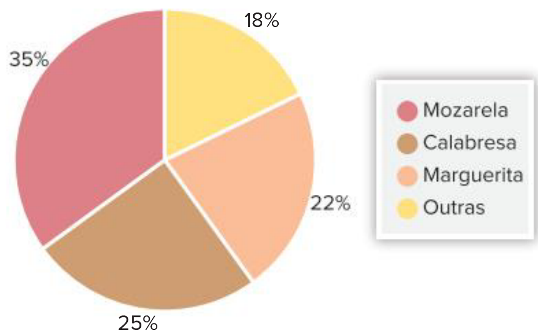
Estimativas feitas naquela época indicavam que a média de produção diária de petróleo no Brasil, em 2012, seria 10% superior à média dos três últimos anos apresentados no gráfico.

Disponível em: http://blogs.estadao.com.br. Acesso em: 2 ago. 2012.

Se essas estimativas tivessem sido confirmadas, a média de produção diária de petróleo no Brasil, em milhão de barris, em 2012, teria sido igual a

a) 1,940.
b) 2,134.
c) 2,167.
d) 2,420.
e) 6,402.

30. Unicamp-SP 2014 A *pizza* é, sem dúvida, o alimento preferido de muitos paulistas. Estima-se que o consumo diário no Brasil seja de 1,5 milhão de *pizzas*, sendo o Estado de São Paulo responsável por 53% desse consumo. O gráfico abaixo exibe a preferência do consumidor paulista em relação aos tipos de *pizza*.



a) Se não for considerado o consumo do Estado de São Paulo, quantas *pizzas* são consumidas diariamente no Brasil?
b) Quantas *pizzas* de mozarela e de calabresa são consumidas diariamente no Estado de São Paulo?

31. Unicamp-SP 2018 A tabela abaixo exibe o valor das mensalidades do Ensino Fundamental em três escolas particulares nos anos de 2017 e 2018:

Ano	Escola A	Escola B	Escola C
2017	R$ 1000,00	R$ 1200,00	R$ 1500,00
2018	R$ 1150,00	R$ 1320,00	R$ 1680,00

a) Determine qual escola teve o maior aumento percentual nas mensalidades de 2017 para 2018.
b) Uma família tem três filhos matriculados na Escola B. Suponha que essa escola ofereça um desconto de 10% na mensalidade para o segundo filho e de 20% para o terceiro filho. Calcule o valor a ser gasto mensalmente com os três filhos em 2018.

Aumentos e/ou descontos sucessivos

Em muitos problemas que envolvem porcentagens, é comum que haja mais de um percentual aplicado em sequência a um mesmo valor. Nessas situações é a aplicação da segunda variação percentual deve ser feita sobre o valor determinado após a primeira aplicação do fator de correção, ou seja, sobre o valor atualizado. Observe o exercício resolvido a seguir.

Exercício resolvido

11. Em fevereiro, o preço de um produto era R$ 500,00. Em março, houve um aumento de 10% no valor do produto. Em abril, houve mais um aumento, agora de 20%. Qual o valor do produto após o aumento de abril?

Resolução:

O valor inicial é de R$ 500,00, que incidirá o primeiro fator de correção $F_1 = (100\% + 10\%) = 1,10$. Logo, $V_{março} = 500 \cdot F_1 = 500 \cdot 1,1 = 550$ (preço em março).
Como em abril houve um aumento de 20%, temos um segundo fator de correção $F_2 = (100\% + 20\%) = 1,2$.
Assim, $V_{abril} = 550 \cdot F_2 = 550 \cdot 1,2 = 660$.
Portanto, o valor final, após os dois aumentos, é R$ 660,00.

Podemos simplificar a resolução de questões com essa característica. Repare que o valor inicial do exercício anterior foi multiplicado por 1,10 (primeiro fator de correção) e seu resultado multiplicado por 1,2 (segundo fator de correção). Assim, representando o produto dos dois fatores diretamente, temos:

$$V_{abril} = \underbrace{500 \cdot 1{,}1}_{550} \cdot 1{,}2 = 550 \cdot 1{,}2 = 660$$

Resumindo, se sobre o valor inicial V_i forem aplicados $F_1, F_2, ..., F_n$ fatores de correção, podemos chegar ao valor final fazendo o produto de V_i com cada fator de correção:

$$V_f = V_i \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot ... \cdot F_n$$

Apesar de termos trabalhado apenas com aumentos no exercício anterior, podemos ter fatores de correção que representam descontos, tal como vimos em outros momentos.

Exercícios

32. Enem 2019 Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros, no ano 2000, era de R$ 1 250,00. Já o Censo 2010 mostrou que, em 2010, esse valor teve um aumento de 7,2% em relação a 2000. Esse mesmo instituto projeta que, em 2020, o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros poderá ser 10% maior do que foi em 2010.

IBGE. *Censo 2010*. Disponível em: www.ibge gov.br. Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado).

Supondo que as projeções do IBGE se realizem, o rendimento médio mensal dos brasileiros em 2020 será de

a) R$ 1 340,00.
b) R$ 1 349,00.
c) R$ 1 375,00.
d) R$ 1 465,00.
e) R$ 1 474,00.

33. Unicamp-SP 2019 Os preços que aparecem no cardápio de um restaurante já incluem um acréscimo de 10% referente ao total de impostos. Na conta, o valor a ser pago contém o acréscimo de 10% relativo aos serviços (gorjeta). Se o valor total da conta for p reais, o cliente estará desembolsando pelo custo original da refeição, em reais, a quantia de

a) $\frac{p}{1{,}20}$
b) $\frac{p}{1{,}21}$
c) $p \cdot 0{,}8$
d) $p \cdot 0{,}81$

34. Unicamp-SP 2018 Dois anos atrás certo carro valia R$ 50.000,00 e atualmente vale R$ 32 000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a

a) R$ 25 600,00.
b) R$ 24 400,00.
c) R$ 23 000,00.
d) R$ 18 000,00.

35. Enem 2013 Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras.
Um cliente deseja comprar um produto que custava R$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja.
Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de

a) 15,00.
b) 14,00.
c) 0,00.
d) 5,00.
e) 4,00

36. PUC-Rio 2021 Em janeiro, 100 gramas de adamantium custavam R$ 20 000,00. Em fevereiro o preço caiu em 5%. Em março o preço subiu 5%.
Quanto custam 500 gramas de adamantium em abril?

a) R$ 99 750,00
b) R$ 100 250,00
c) R$ 100 750,00
d) R$ 101 237,00

FRENTE ÚNICA

CAPÍTULO

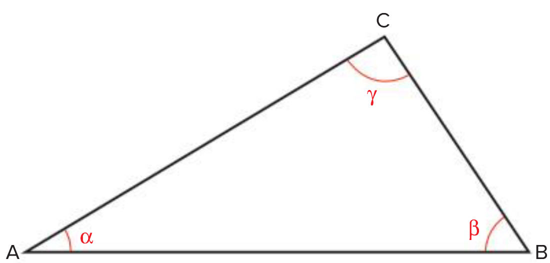
7

Triângulos retângulos

O estudo de polígonos é fundamental em sua preparação para os vestibulares e o Enem, principalmente os triângulos. Neste capítulo, trabalharemos dois conceitos relacionados a triângulos retângulos que são muito importantes: o teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas. Existem outras classificações para triângulos em relação aos ângulos e lados, bem como outras relações métricas e trigonométricas que serão estudadas ao longo do ano letivo, porém as relações desenvolvidas neste capítulo servirão de base para estudos posteriores.

Triângulos

Inicialmente vamos definir e apresentar algumas características e elementos em relação a esse polígono. Triângulo é a região plana formada pela união de três segmentos que possuem, dois a dois, um ponto em comum, sendo esses três pontos distintos entre si. Também podemos definir um triângulo como a região delimitada pelos segmentos de extremos em três pontos distintos e não colineares, ou seja, que não estão contidos em uma mesma reta.



Normalmente nomeamos os vértices, os três pontos não colineares que delimitam o espaço no plano que chamamos triângulo, com letras maiúsculas. Cada vértice é comum a dois lados do triângulo, sendo que tais lados, juntamente com o vértice comum, determinam um ângulo. Os triângulos possuem três ângulos, que podemos nomear com a letra do vértice correspondente com o acento circunflexo sobre ela, por exemplo, $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Também é comum, para nomear os ângulos, utilizar letras gregas, como α, β e γ, ou ainda o uso das três letras que nomeiam os vértices, sendo a letra central a que corresponde ao ângulo, por exemplo, $B\hat{A}C$ é o ângulo do vértice A e $A\hat{C}B$, o do vértice C.

A classificação dos triângulos

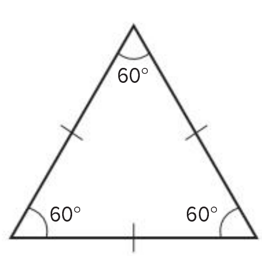
Podemos classificar os triângulos em relação aos seus lados e ângulos internos.

Classificação em relação aos lados

São três as classificações em relação aos lados.

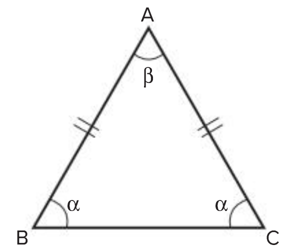
Triângulo equilátero: possui os três lados congruentes (de mesma medida) e, como característica importante, possui os três ângulos internos congruentes medindo 60°. Note que podemos representar a igualdade das medidas dos lados graficamente na figura abaixo, com traços nos segmentos.

Exemplo:



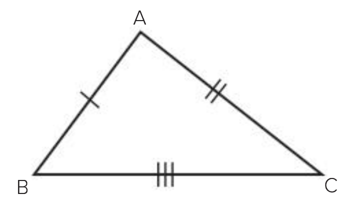
Triângulo isósceles: possui dois lados congruentes e, como característica importante, os ângulos adjacentes à base são congruentes. Vale ressaltar aqui, o que chamamos base em um triângulo isósceles é o terceiro lado. Na imagem a seguir, o lado $\overline{BC}$ é a base do triângulo isósceles ABC, uma vez que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são os lados congruentes.

Exemplo:



Triângulo escaleno: possui os três lados não congruentes, ou seja, de medidas diferentes.

Exemplo:

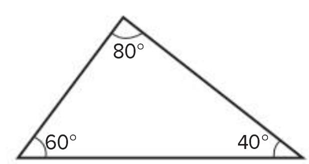


Classificação em relação aos ângulos

São três as classificações em relação aos ângulos de um triângulo.

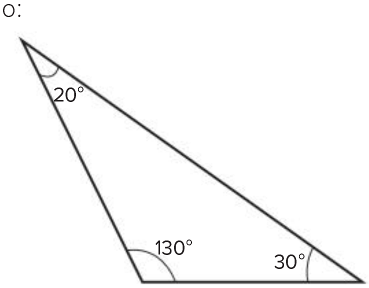
Acutângulo: os três ângulos internos são agudos, ou seja, menores que 90°.

Exemplo:



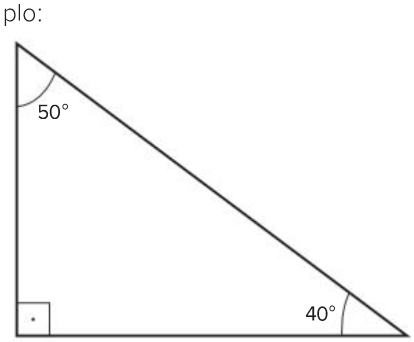
Obtusângulo: um dos três ângulos internos é obtuso, isto é, maior que 90° e menor que 180°, sendo os outros dois agudos.

Exemplo:



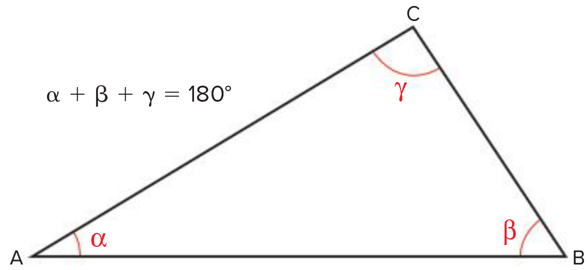
Retângulo: um dos três ângulos internos é reto, ou seja, mede 90°, sendo os outros dois agudos. A representação desse ângulo reto geralmente é feita com um quadrado e um ponto em seu centro, no vértice que corresponde a ele.

Exemplo:



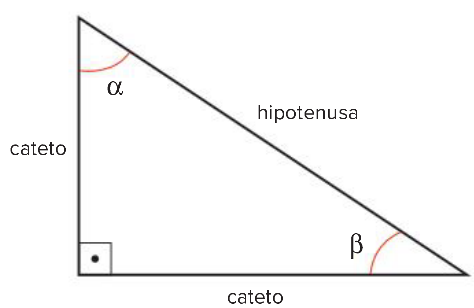
Teorema angular de Tales

Um resultado muito importante para triângulos é o teorema angular de Tales, que diz que a soma das medidas dos ângulos internos de todo triângulo é 180°. Na figura:



O triângulo retângulo

Como vimos anteriormente, um triângulo é chamado retângulo quando possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90°. Para esse triângulo, nomeamos os lados que formam o ângulo reto de catetos e o lado oposto ao ângulo reto de hipotenusa.



Também é interessante notar que, pelo teorema angular de Tales, $\alpha + \beta = 90°$, ou seja, a soma das medidas dos outros dois ângulos de um triângulo retângulo é igual a 90°.

O teorema de Pitágoras

Pitágoras, filósofo e matemático grego, foi quem formalizou e demonstrou o resultado do teorema que leva seu nome, porém estudos sugerem que o algoritmo já era utilizado por matemáticos babilônicos e até por outros povos centenas de séculos antes.

O que Pitágoras notou e formalizou foi que, em triângulos retângulos, a área do quadrado cujo lado é igual ao da hipotenusa é equivalente à soma das áreas de dois quadrados, cada um de lado igual a um dos catetos. Sabendo que a área de um quadrado é igual à medida do seu lado ao quadrado e, considerando a hipotenusa de medida a, e os catetos de medidas b e c, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Esta é a relação que conhecemos como teorema de Pitágoras.

Esse teorema possui muitas aplicações: na geometria plana, tais como o cálculo de expressões para a medida da diagonal de um quadrado ou a altura de triângulos equiláteros; na geometria espacial, na obtenção de expressões para diagonais de paralelepípedos; na geometria analítica, no cálculo da distância entre pontos no plano cartesiano; na trigonometria, no que conhecemos como relação fundamental da trigonometria; além de aplicações em outras áreas do conhecimento, como a Física. Isso mostra a importância desse teorema e como ele pode ser usado nas questões que envolvem triângulos retângulos.

Exercícios resolvidos

1. Determine a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 4 cm e 6 cm.

Resolução:

Seja x a medida da hipotenusa. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = 4^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 16 + 36$$

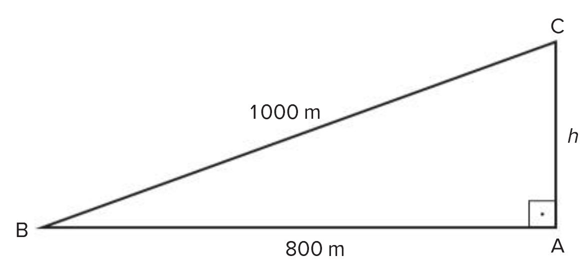
$$x^2 = 52 \Rightarrow x = \pm\sqrt{52}$$

Como x é a medida de um segmento, então $x > 0$. Assim, simplificando a raiz, obtemos $x = 2\sqrt{13}$ cm.

2. Um avião decola percorrendo 1000 m na posição inclinada. Sabendo que seu deslocamento horizontal durante este período foi de 800 m, determine a altura do avião nesse momento.

Resolução:

Vamos fazer um esquema para entender melhor a situação-problema.



A altura do avião é a menor distância entre a posição do avião após percorrer 1 000 metros, ponto C, e o chão, ponto A. Essa distância forma, junto com o deslocamento horizontal e o inclinado, um triângulo retângulo, cujo cateto $\overline{CA}$ indica a altura do avião, que chamaremos de h.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$1000^2 = 800^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 360\,000 \Rightarrow h = 600$$

Portanto, a altura do avião é de 600 metros.

3. Sabendo que a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo medem, respectivamente, $5k$ e $3k$, onde $k \in \mathbb{R}_+^*$, determine a medida do outro cateto.

Resolução:

Seja x a medida do cateto a ser calculado. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(5k)^2 = (3k)^2 + x^2$$

$$25k^2 = 9k^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 16k^2 \Rightarrow x = 4k$$

O resultado do exercício resolvido 3 é muito frequente em questões que envolvem triângulos retângulos. Todo conjunto de três números naturais que satisfaz o teorema de Pitágoras forma um terno, ou trinca, pitagórico. No caso do exercício anterior, temos a trinca ($3k$, $4k$, $5k$), que indica um terno dos múltiplos, para uma mesma constante k, de 3, 4 e 5. Por exemplo, se $k = 2$, o terno (6, 8, 10) também satisfaz o teorema de Pitágoras.

Os principais ternos pitagóricos são (3, 4, 5) e seus múltiplos (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20) e (15, 20, 25).

Exercícios resolvidos

4. Determine a medida da diagonal de um quadrado de lado a.

Resolução:

A diagonal de um quadrado o divide em dois triângulos retângulos cujos catetos medem a. Sendo assim, seja d a diagonal, temos:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$$

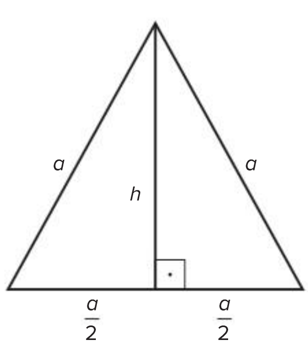
O resultado desse último exercício resolvido generaliza a medida da diagonal de um quadrado em função de seu lado. O uso dessa relação é muito comum e, a partir de agora, podemos recorrer direto a ela na resolução de exercícios.

Outro resultado interessante que obtemos pelo teorema de Pitágoras é a altura de um triângulo equilátero.

5. Determine a altura h de um triângulo equilátero em função de seu lado a.

Resolução:

A altura de um triângulo equilátero é perpendicular à base e a divide em dois segmentos de mesma medida, logo, como podemos observar na figura abaixo, temos um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede a, sendo os catetos h e $\frac{a}{2}$.



Logo:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}.$$ Isolando h, temos:

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Exercícios

1. Considere um triângulo retângulo de hipotenusa x e catetos y e z. Determine:

a) x, sendo $y = 6$ e $z = 8$
b) x, sendo $y = 15$ e $z = 20$
c) y, sendo $x = 8$ e $z = 6$
d) z, sendo $x = 13$ e $y = 5$
e) x, sendo $z = 13$ e $y = 5$
f) z, sendo $x = 2$ e $y = 1$
g) y, sendo $x = 2\sqrt{2}$ e $z = 2$

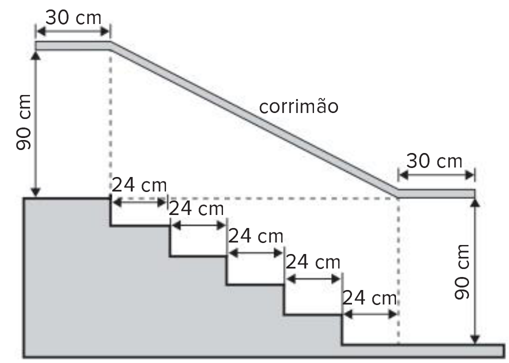
2. Determine a medida da diagonal de um quadrado de lado $5\sqrt{2}$ cm.

3. Determine a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede 4 cm.

4. Determine a altura de um triângulo equilátero de lado 3 cm.

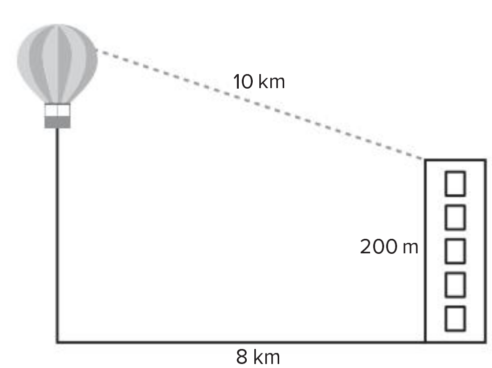
5. Determine a medida do lado de um triângulo equilátero cuja altura mede 3 cm.

6. **Enem** Na figura abaixo, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é:



a) 1,8 m
b) 1,9 m
c) 2,0 m
d) 2,1 m
e) 2,2 m

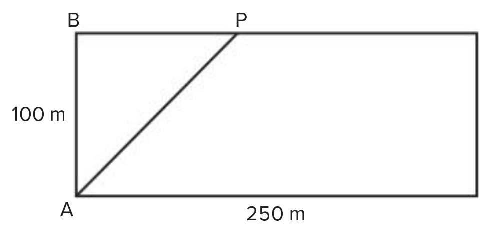
7. **Ufla-MG** Qual deve ser a altitude do balão para que sua distância ao topo do prédio seja de 10 km?



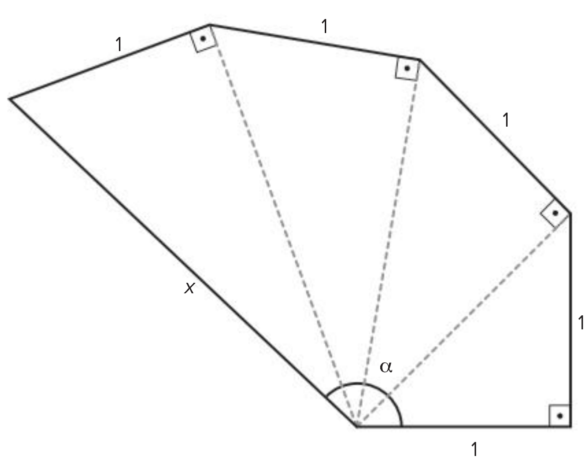
a) 6 km
b) 6 200 m
c) 11 200 m
d) 4 km
e) 5 km

8. Após um acidente, um poste de 8 metros, perpendicular ao plano, quebrou em duas partes, de modo que a medida da parte do poste ainda fixa ao chão tem *x* metros, e a outra parte do poste tocou o chão a 5 metros de distância da parte fixa, formando um triângulo retângulo. Determine o valor de *x*, em metros.

9. **UFG-GO** Uma pista retangular para caminhada mede 100 por 250 metros. Deseja-se marcar um ponto P, conforme a figura a seguir, de modo que o comprimento do percurso ABPA seja a metade do comprimento total da pista. Calcule a distância entre os pontos B e P.



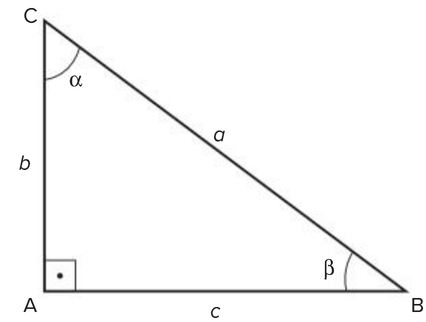
10. **Unicamp-SP 2014 (Adapt.)** Considere um hexágono, como exibido na figura abaixo, com cinco lados de comprimento 1 e um lado com comprimento *x*. Determine *x*.



A trigonometria no triângulo retângulo

A palavra trigonometria significa medida das partes de um triângulo, e está relacionada a lados e ângulos. No triângulo retângulo, a trigonometria relaciona a razão entre dois de seus lados com um dos ângulos internos diferentes de 90°. É demonstrável, usando semelhança de triângulos, que essa razão é sempre constante, independentemente das medidas dos lados do triângulo, desde que não haja alteração nos valores dos ângulos. Podemos, então, nomear tais razões e, a partir de cada valor angular, criar uma tabela com o resultado dessas razões. Com isso, em um triângulo, dados o valor de um ângulo específico e a medida de apenas um lado, é possível determinar os outros dois lados utilizando-se dos valores conhecidos para as razões.

Antes de definir as razões trigonométricas, vamos estudar o posicionamento dos lados em relação aos ângulos. Para isso, considere o triângulo retângulo a seguir, cujos ângulos agudos medem α e β.



Na definição das relações trigonométricas há a necessidade de se especificar qual cateto será utilizado para montar a razão e, para isso, usamos a relação do ângulo com o cateto. Chamamos cateto adjacente aquele que forma o ângulo junto com a hipotenusa e cateto oposto aquele que está à frente do ângulo. Note que, dependendo do ângulo que se toma, muda-se a posição dos catetos. Para o ângulo α, na figura, *c* é cateto oposto, enquanto *b* é cateto adjacente. Já para β, *b* é cateto oposto e *c*, o cateto adjacente.

Assim, definimos as três relações trigonométricas como seno, cosseno e tangente, que, para um ângulo α, são:

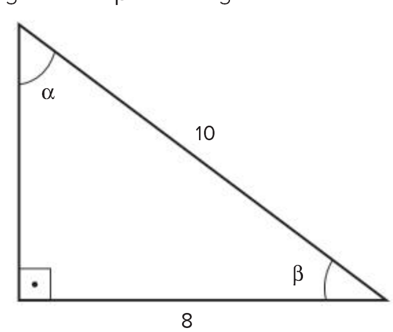
$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$$

Exercícios resolvidos

6. Determine os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos α e β no triângulo abaixo.



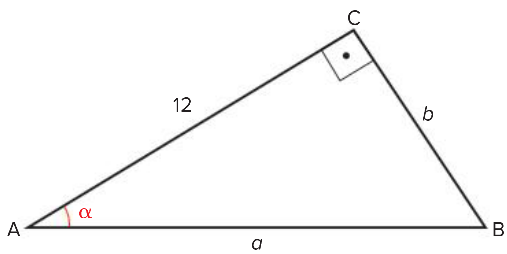
Resolução:

Primeiro vamos calcular o cateto desconhecido usando o teorema de Pitágoras. Sendo *x* a medida desse cateto, temos: $10^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow x = 6$.
Assim, temos:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5};\ \cos(\alpha) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ e } \text{tg}(\alpha) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{sen}(\beta) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5};\ \cos(\beta) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \text{ e } \text{tg}(\beta) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

7. No triângulo retângulo abaixo, determine quais são as medidas de a e b sabendo que $\text{sen}(\alpha) = 0{,}6$ e que $\cos(\alpha) = 0{,}8$.



Resolução:

Tendo por referência o ângulo α, sabemos que a medida do cateto oposto é b, a medida do cateto adjacente é 12 e a medida da hipotenusa é a. Assim, podemos usar o cosseno de α para determinar a medida de a.

$$\cos(\alpha) = \frac{12}{a} \Rightarrow 0{,}8 = \frac{12}{a} \Rightarrow a = 15$$

Sabendo que a hipotenusa mede 15 e um dos catetos mede 12, poderíamos usar o teorema de Pitágoras para determinar b, porém também podemos usar a relação trigonométrica seno.

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{b}{15} \Rightarrow 0{,}6 = \frac{b}{15} \Rightarrow b = 9$$

Portanto, $a = 15$ e $b = 9$.

A tabela de ângulos notáveis

Para a grande maioria dos ângulos, quando o problema sugere o uso das relações trigonométricas, os valores de seno, cosseno ou tangente geralmente são fornecidos no enunciado. Porém, para alguns ângulos específicos é importante conhecer tais valores. Chamamos ângulos notáveis os seguintes ângulos: 30°, 45° e 60°. Abaixo temos a tabela que mostra os valores das relações trigonométricas para os ângulos notáveis.

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Também existem fórmulas, que oportunamente você estudará, que possibilitarão o cálculo, a partir dos ângulos notáveis, do seno, cosseno e tangente de alguns outros ângulos.

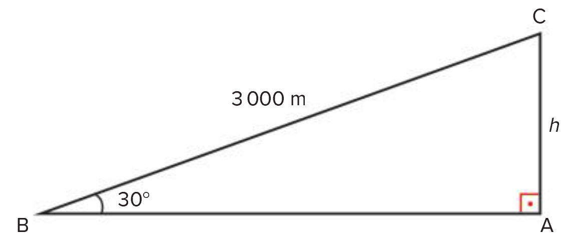
Não há diferença no processo de resolução de um exercício cujo ângulo é notável, mas, pela frequência com que são utilizados, vale a pena memorizá-los.

Exercícios resolvidos

8. Um avião levanta voo formando com a horizontal um ângulo de 30°. Após percorrer 3 000 metros nessa inclinação, qual a altura atingida pelo avião?

Resolução:

Vamos fazer um esquema que ilustre a situação.



A altura atingida pelo avião é a menor distância entre o ponto C e o ponto A, ou seja, a perpendicular entre a posição do avião e o plano do chão. Chamaremos este cateto de h e, para calculá-lo, podemos usar a relação $\text{sen}(30°)$, uma vez que queremos calcular o cateto oposto ao ângulo de 30° e nos foi dada a medida da hipotenusa.

Sabendo que $\text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, temos:

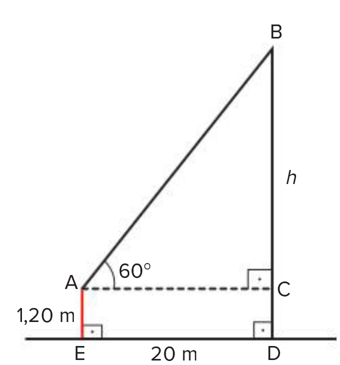
$$\text{sen}(30°) = \frac{h}{3000} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{3000} \Rightarrow h = 1500$$

Portanto, a altura atingida pelo avião foi 1 500 metros.

9. Uma criança de 1,20 metro observa o topo de um prédio de altura h sob um ângulo de 60° com a horizontal. Sabendo que a criança está a 20 metros de distância do prédio, determine h.

Resolução:

Iniciamos montando um esquema para entender melhor a situação-problema.



Na representação, temos que a altura h do prédio é o segmento $\overline{BD}$, sendo $\overline{AE}$ a altura da criança. Repare que h é dado pela soma das medidas dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$. Como o quadrilátero ACDE é um retângulo, temos: $CD = 1{,}20$ m. Resta, agora, calcular a medida do segmento $\overline{BC}$ e, para isso, podemos usar a relação tg(60°), uma vez que queremos determinar o cateto oposto a 60° e possuímos a medida do adjacente que, por ACDE ser um retângulo, mede 20 m.

Temos:

$$\text{tg}(60°) = \frac{BC}{20} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{BC}{20} \Rightarrow BC = 20\sqrt{3}\ \text{m}$$

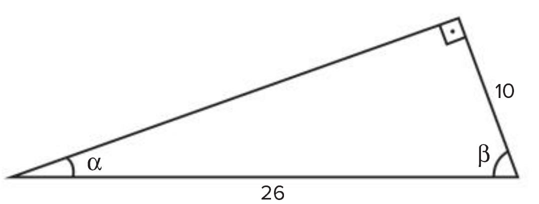
Assim, a altura do prédio será dada por:

$$h = \left(20\sqrt{3} + 1{,}20\right)\ \text{metros}$$

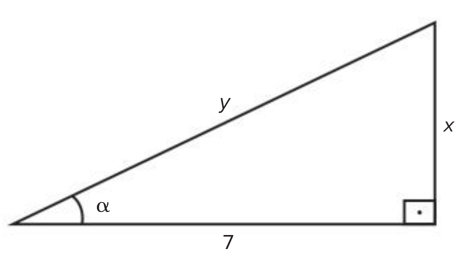
Os parênteses são usados para indicar que o resultado da soma é a medida em metros, uma vez que não temos o valor para $\sqrt{3}$. Apesar de sabermos que $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, não é aconselhável usar essa aproximação a não ser que o enunciado forneça a informação ou que seja pedido, no enunciado, o valor aproximado.

Exercícios

11. Considere o triângulo retângulo da figura a seguir. Determine os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos α e β.



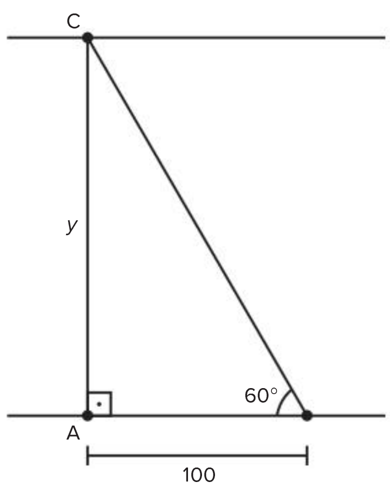
12. Sabendo que $\text{sen}(\alpha) = 0{,}3$ e $\cos(\alpha) = 0{,}95$, determine as medidas de x e y, aproximando os resultados para duas casas decimais.



13. UFPI Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1 000 metros, a altura atingida pelo avião, em metros, é:

a) 200
b) 300
c) 350
d) 450
e) 500

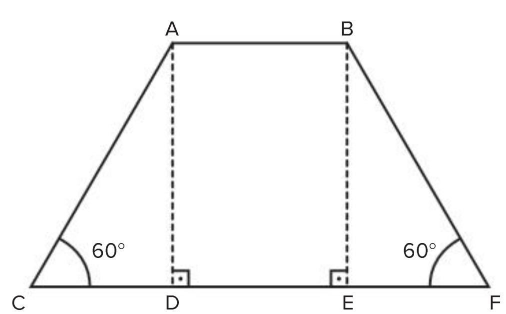
14. PUC-RS Em uma aula prática de Topografia, os alunos aprendiam a trabalhar com o teodolito, instrumento usado para medir ângulos. Com o auxílio desse instrumento, é possível medir a largura y de um rio. De um ponto A, o observador desloca-se 100 metros na direção do percurso do rio, e então visualiza uma árvore no ponto C, localizada na margem oposta sob um ângulo de 60°, conforme a figura abaixo.



Nessas condições, conclui-se que a largura do rio, em metros, é:

a) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$
b) $\frac{100\sqrt{3}}{2}$
c) $100\sqrt{3}$
d) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$
e) 200

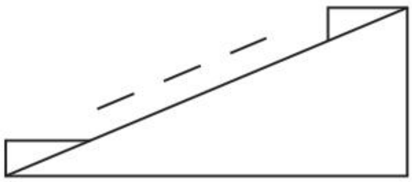
15. Mackenzie-SP (Adapt.) Se, na figura, $AD = BE = 3\sqrt{2}$ e $CF = 14\sqrt{6}$, então a medida de DE é:



a) $8\sqrt{6}$
b) $10\sqrt{6}$
c) $12\sqrt{6}$
d) 28
e) $14\sqrt{5}$

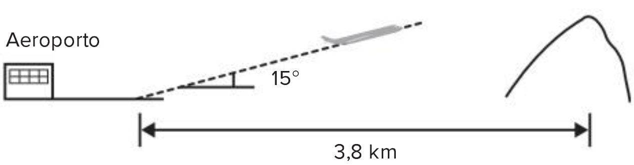
FRENTE ÚNICA

16. **Unifor-CE** Sobre uma rampa de 3 m de comprimento e inclinação 30° com a horizontal, devem-se construir degraus de altura 30 cm. Quantos degraus devem ser construídos?



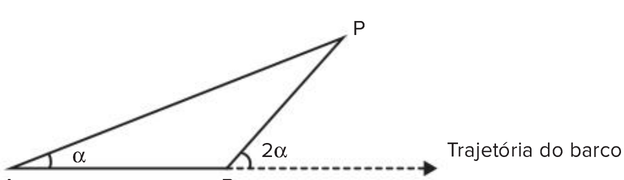
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

17. **Unicamp-SP** Ao decolar, um avião deixa o solo com um ângulo constante de 15°. A 3,8 km da cabeceira da pista existe um morro íngreme. A figura abaixo ilustra a decolagem, fora de escala. Podemos concluir que o avião ultrapassa o morro a uma altura, a partir da sua base, de



a) $3{,}8 \cdot \text{tg}(15°)$ km
b) $3{,}8 \cdot \text{sen}(15°)$ km
c) $3{,}8 \cdot \cos(15°)$ km
d) $3{,}8 \cdot \sec(15°)$ km

18. **Enem** Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação.



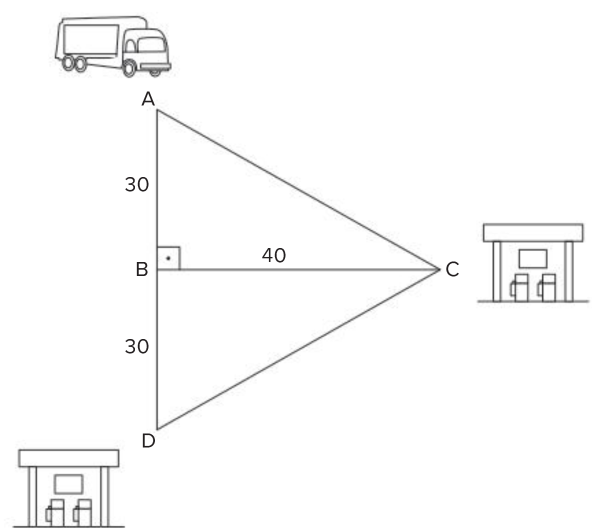
Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

a) 1 000 m
b) $1000\sqrt{3}$ m
c) $2000\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m
d) 2 000 m
e) $2000\sqrt{3}$ m

19. **FGV-RJ (Adapt.)** Em um triângulo retângulo ABC, o cateto AB mede o triplo do cateto BC e α é a medida do ângulo interno relativo ao vértice A.
O valor de $\text{tg}(\alpha)$ é **aproximadamente** igual a

a) 0,3
b) 0,7
c) 0,6
d) 0,5
e) 0,4

20. **Encceja 2018** Um caminhoneiro viajando pelo interior de seu país chega à cidade A. No tanque de combustível do seu veículo restam somente 10 litros. Seu destino final é a cidade D e as distâncias entre cada uma das cidades A, B, C e D são as indicadas na figura. Somente existem postos de abastecimento nas cidades C e D. O veículo consegue percorrer 5 quilômetros (km) com um litro de combustível.



Desejando fazer o percurso mais curto possível, mas sem ficar parado no caminho, o trajeto que ele terá que escolher para ir de A até D e a distância a ser percorrida serão, respectivamente,

a) ABD e 60 km.
b) ACD e 100 km.
c) ABCD e 120 km.
d) ABCD e 140 km.

FRENTE ÚNICA

CAPÍTULO

8

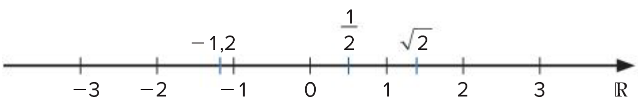
Plano cartesiano, gráficos e relações

Muitas provas, principalmente o Enem, têm privilegiado a cobrança de competências e habilidades, além dos conceitos, em suas questões, relacionando-as com o cotidiano. Nessa perspectiva, a leitura, com a interpretação e a análise de gráficos, aparece cada vez com mais frequência.

Neste capítulo, estudaremos inicialmente o plano cartesiano para, em seguida, abordarmos algumas estratégias para a leitura de gráficos.

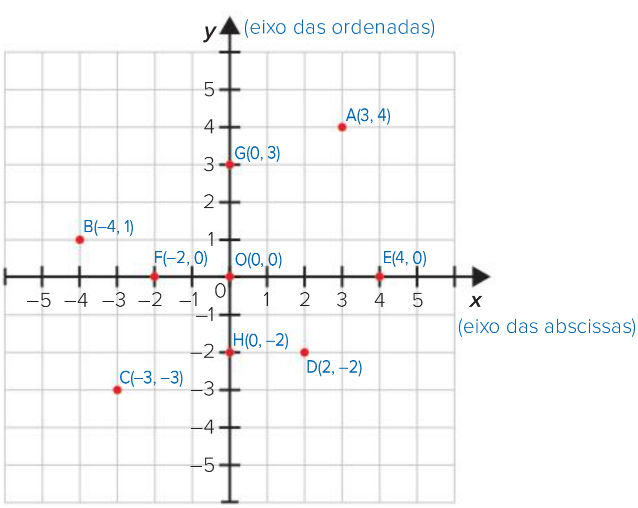
O plano cartesiano

Antes de estudarmos o plano cartesiano, vamos definir o conceito de **reta numérica** ou **reta dos números reais**, que nada mais é que a representação, em uma reta, dos elementos do conjunto dos números reais. Todo número real está relacionado a um, e apenas um, ponto na reta real.



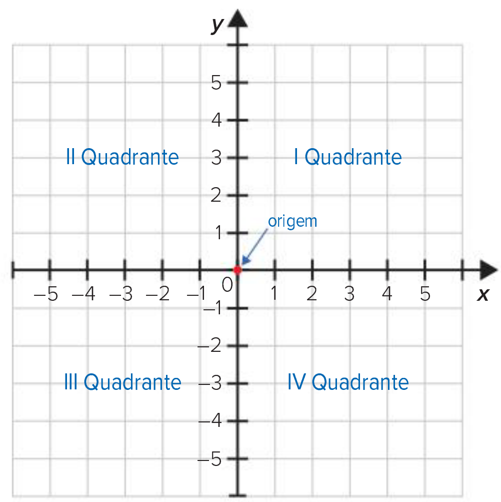
É comum a representação dos números inteiros na reta para orientar o posicionamento dos números racionais e irracionais, como representado acima.

O plano cartesiano é um sistema formado por duas retas reais perpendiculares (que formam 90° entre si) com uma origem em comum. Nomeamos a reta horizontal como **eixo das abscissas**, sendo sua representação feita com a letra *x*, e a reta vertical como **eixo das ordenadas**, representando-a com a letra *y*. Considera-se a interseção dessas retas (ponto comum) como a **origem do sistema**, representada pela letra O, e a partir dela podemos determinar precisamente a posição de qualquer ponto no plano por meio de um par ordenado, que consiste em um valor para *x* e um valor para *y*, nessa ordem. No eixo horizontal, à direita da origem temos a representação dos valores reais positivos e, à esquerda, dos negativos. Em relação ao eixo vertical, temos os valores positivos acima da origem e os negativos, abaixo.



Na imagem anterior, temos a representação de vários pontos no plano cartesiano. Note que cada um deles possui seu par ordenado com suas **coordenadas**, como dito anteriormente, um valor para *x* e um valor para *y*, que definem sua posição no plano cartesiano. As coordenadas do par ordenado são escritas entre parênteses; a primeira (*x*) é chamada de abscissa do ponto, referente à posição do ponto para o eixo horizontal, e a segunda (*y*), chamada de ordenada, referente à posição do ponto em relação ao eixo vertical. Assim, o ponto A(3, 4), por exemplo, é o ponto cuja abscissa é 3, e a ordenada é 4.

Também podemos nos orientar no plano cartesiano pelas regiões que os eixos delimitam. Observe que o plano, a partir dos eixos coordenados, é dividido em quatro regiões, denominadas **quadrantes**, as quais numeramos no sentido anti-horário a partir do quadrante que possui as coordenadas com valores positivos. Assim, dizemos que o ponto A(3, 4) pertence ao 1º quadrante (I Q), o ponto B(−4, 1) pertence ao 2º quadrante (II Q), o ponto C(−3, −3) pertence ao 3º quadrante (III Q) e o ponto D(2, −2) pertence ao 4º quadrante (IV Q). Podemos também ter pontos sobre os eixos coordenados, nesse caso dizemos que o ponto está sobre o eixo das abscissas ou sobre o eixo das ordenadas. Um ponto sobre o eixo das abscissas tem como característica o valor de sua ordenada (*y*) ser zero, como acontece com E(4, 0) e F(−2, 0). Já um ponto sobre o eixo das ordenadas tem o valor de sua abscissa (*x*) igual a zero, como se pode notar nos pontos G(0, 3) e H(0, −2). A origem do sistema, representada pelo ponto O, possui abscissa e ordenada nulas.



De modo geral, podemos afirmar que para um ponto P(*x*, *y*), temos:

P ∈ 1º quadrante se $x > 0$ e $y > 0$;

P ∈ 2º quadrante se $x < 0$ e $y > 0$;

P ∈ 3º quadrante se $x < 0$ e $y < 0$;

P ∈ 4º quadrante se $x > 0$ e $y < 0$;

P ∈ $\overrightarrow{Ox}$ (eixo das abscissas) se $y = 0$;

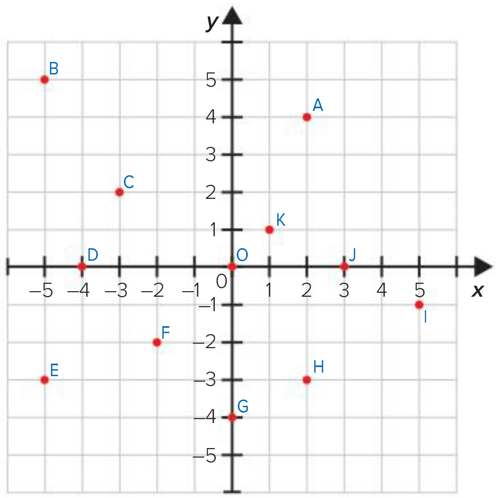
P ∈ $\overrightarrow{Oy}$ (eixo das ordenadas) se $x = 0$.

Exercícios

1. Represente no plano cartesiano os pontos:

a) A(2, 3)
b) B(1, −4)
c) C(−3, 0)
d) D(−2, −4)
e) E(0, 3)
f) F(−2, 5)
g) G(1, 1)
h) H(5, −2)
i) I(−4, 4)
j) J(−5, −3)

2. Dado o plano cartesiano a seguir, escreva as coordenadas dos pontos destacados e sua posição relativa aos eixos ou quadrantes.



3. Considere o ponto A(x, $x + 4$). Sabendo que A pertence ao 2º quadrante do plano cartesiano, determine o intervalo de valores possíveis para x.

4. Sabendo que o ponto P($y - 4$, $2y + 7$) possui abscissa e ordenada iguais, determine as coordenadas do ponto P.

Distância entre pontos no plano cartesiano

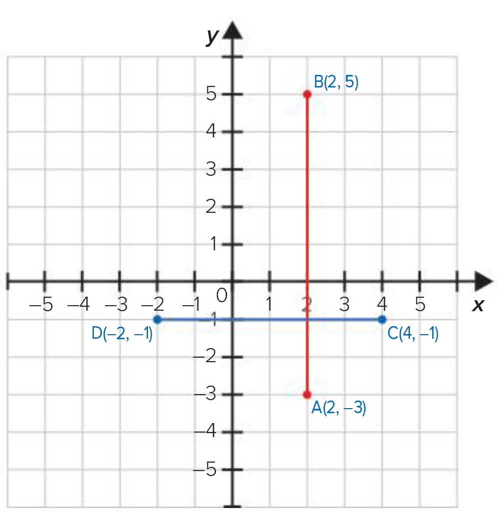
É frequente, em exercícios, o uso do plano cartesiano para representar regiões, por exemplo, uma cidade, onde os pontos indicam a posição de elementos característicos da região ilustrada. Nesse contexto, o cálculo de distâncias entre pontos no plano cartesiano é fundamental.

Se dois pontos possuem a mesma abscissa ou a mesma ordenada, a distância entre eles será a diferença entre suas ordenadas ou abscissas, respectivamente.

Exemplos:

a. Determine, em unidades de comprimento (u.c.), a distância entre os pontos A(2, −3) e B(2, 5) e a distância entre os pontos C(4, −1) e D(−2, −1).

Para visualizarmos as distâncias pedidas, posicionaremos os pontos no plano cartesiano.



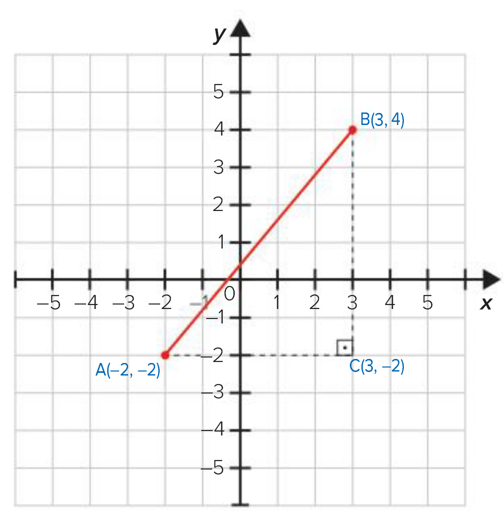
Note que os pontos A e B possuem a mesma abscissa, logo o segmento com extremos nesses pontos é perpendicular ao eixo x. A distância entre A e B, ou seja, a medida do segmento $\overline{AB}$, é dada pela diferença entre as ordenadas desses pontos. Representando a ordenada do ponto A por $y_A = -3$ e a ordenada do ponto B por $y_B = 5$, temos que $y_B - y_A = 5 - (-3) = 8$ u.c. Assim, a distância entre A e B é 8 u.c. Note que poderíamos fazer $y_A - y_B$, obtendo $y_A - y_B = -3 - 5 = -8$ u.c. Porém, como não faz sentido uma distância negativa, utilizamos o módulo e resolvemos essa situação. A distância entre A e B pode ser calculada por $AB = |y_A - y_B| = |-3 - 5| = |-8| = 8$ u.c. ou por $AB = |y_B - y_A| = |5 - (-3)| = |8| = 8$ u.c.

Em relação à distância entre os pontos C e D, note que, por possuírem a mesma ordenada, tais pontos formam uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas. Assim, a distância entre C e D, ou o comprimento do segmento $\overline{CD}$, é dado pela diferença entre suas abscissas, então, $CD = |x_C - x_D| = |4 - (-2)| = |6| = 6$ u.c. ou ainda $CD = |x_D - x_C| = |-2 - 4| = |-6| = 6$ u.c.

No caso em que a distância deve ser calculada entre dois pontos que não possuem a mesma abscissa ou ordenada, usamos o teorema de Pitágoras.

b. Calcule, em unidades de comprimento (u.c.), a distância entre os pontos A(−2, −2) e B(3, 4).

Para determinar a distância entre os pontos A e B, os posicionamos no plano cartesiano e consideramos um triângulo retângulo, como indicado na figura a seguir inserindo um ponto C com coordenadas (3, −2). Não faria nenhuma diferença se o triângulo retângulo fosse formado acima dos pontos A e B, já que nesse caso, as coordenadas de C seriam (−2, 4) e em ambos os casos a distância será a mesma.



Usaremos o teorema de Pitágoras para calcular a medida do segmento $\overline{AB}$, calculando inicialmente as medidas dos catetos, como mostrado no exemplo anterior. Assim, temos que $AC = |x_C - x_A| = |3 - (-2)| = 5$ e $BC = |y_B - y_C| = |4 - (-2)| = 6$. Assim, temos que:

$$(AB)^2 = 5^2 + 6^2 \Rightarrow (AB)^2 = 25 + 36 = 61 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AB = \sqrt{61} \text{ u.c.}$$

Nesse exemplo, para determinar a medida do cateto $\overline{AC}$ fez-se a diferença em módulo das abscissas dos pontos A e C, sendo feito cálculo similar para a determinação do cateto $\overline{BC}$, com as respectivas ordenadas. Então podemos concluir e formalizar a distância d_{AB} entre dois pontos quaisquer A e B da seguinte forma:

$$(d_{A\,B})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Note que a ordem na diferença dentro dos parênteses para as abscissas e ordenadas é indiferente, uma vez que, elevando os valores ao quadrado, sempre teremos como resultado um número positivo. Assim, $(x_A - x_B)^2 = (x_B - x_A)^2$ e $(y_A - y_B)^2 = (y_B - y_A)^2$. Extraindo a raiz quadrada, temos:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exercícios

5. Determine a distância entre os pares de pontos a seguir:

a) A(2, 1) e B(5, 5)
b) C(−2, −7) e D(−2, −9)
c) F(4, −3) e G(−2, −5)
d) X(1, 1) e Y(2, −2)
e) R(−3, −2) e S(9, 3)

6. FEI-SP Num sistema de coordenadas cartesianas são dados os pontos A(0, 0) e P(3, *h*). Assinale a alternativa cuja expressão representa a distância do ponto P ao ponto A em função de *h*.

a) $d = \sqrt{9 + h^2}$
b) $d = h + 3$
c) $d = 3h$
d) $d = 9 + h$
e) $d = \sqrt{9 + 6h + h^2}$

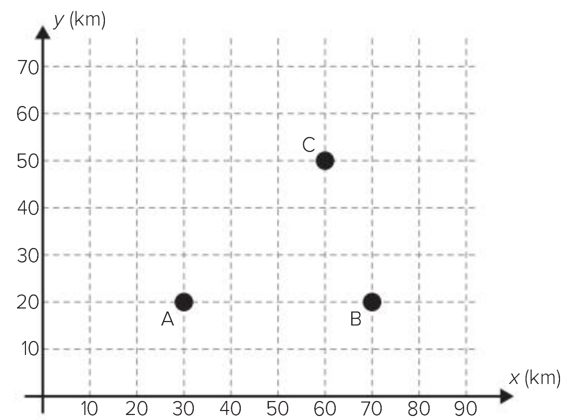
7. UFRGS A distância entre os pontos A(−2, *y*) e B(6, 7) é 10. O valor de *y* é:

a) −1
b) 0
c) 1 ou 13
d) −1 ou 10
e) 2 ou 12

8. UFRGS Se um ponto P do eixo das abscissas é equidistante (distância igual) dos pontos A(1, 4) e B(−6, 3), a abscissa do ponto P vale:

a) −2
b) −1
c) 0
d) 1
e) 3

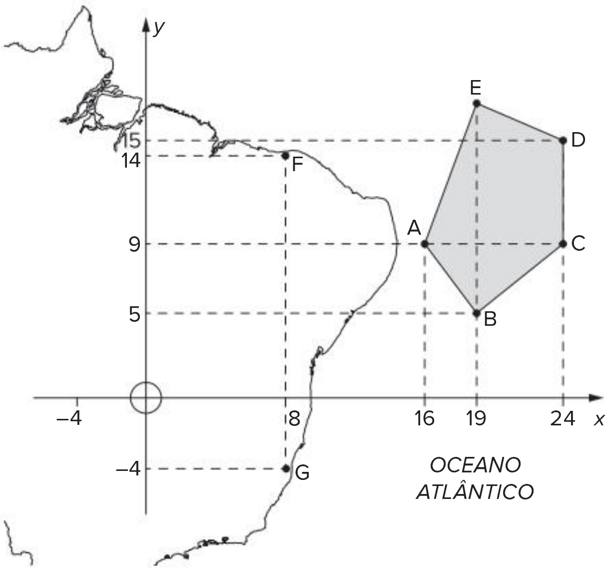
9. Enem 2013 Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.
O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) (65, 35).
b) (53, 30).
c) (45, 35).
d) (50, 20).
e) (50, 30).

10. Unicamp-SP 2021 Em 2019, diversas praias brasileiras foram atingidas por manchas de óleo. Pesquisadores concentraram esforços na tentativa de localizar o ponto provável da emissão do óleo. Na figura abaixo, a origem do plano cartesiano está localizada no Distrito Federal e cada unidade equivale a 1 000 km.



a) Numa primeira investigação sobre a origem do óleo, um navio fez uma sondagem numa área poligonal de 63 000 000 km^2, com vértices A, B, C, D e E, conforme indica a figura anterior. Calcule o valor da ordenada h do ponto E = (19, h).

b) Após a investigação dos resíduos encontrados nas praias indicadas pelos pontos F e G, descobriu-se que a fonte provável do óleo encontrava-se no Oceano Atlântico, a uma distância de 12 000 km do ponto F e 18 000 km do ponto G. Encontre as coordenadas (x, y) da provável fonte do óleo.

Análise gráfica

A prova do Enem sempre se caracterizou pela intertextualidade entre enunciados, gráficos, tabelas e esquemas. A análise de gráficos nem sempre é uma tarefa simples e, por esse motivo, precisamos de muita atenção ao fazê-lo.

Ao analisar um gráfico devemos dar ênfase aos seguintes elementos:

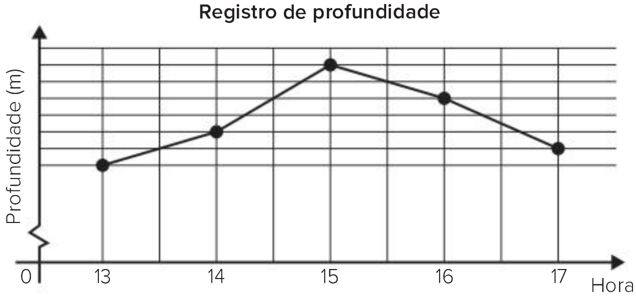
- Título do gráfico: indica o assunto tratado.
- Legenda: informa a relação entre cada coluna, linha ou elemento do gráfico com o assunto.
- Eixos: quando o gráfico for apresentado em um sistema de eixos coordenados é importante notar o que cada eixo representa, a unidade de medida trabalhada em cada um e, caso haja, a escala das grandezas envolvidas.

Nem sempre temos clareza de todos esses elementos, mas uma leitura mais cuidadosa deve se iniciar por eles.

Exercícios resolvidos

1. Enem 2017 Num dia de tempestade, a alteração na profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 horas. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade h, registrada às 13 horas, não foi anotada e, a partir de h, cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro.

Registro de profundidade



Foi informado que entre 15 horas e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu 10%.

Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metro, no local onde foram feitos os registros?

a) 18
b) 20
c) 24
d) 36
e) 40

Resolução:

Nesta questão, o título indica que o assunto tratado é a profundidade do rio, o eixo horizontal representa a hora da medição, e o vertical, a profundidade em metros (os valores foram omitidos). Aqui, em uma análise do gráfico o estudante deve perceber que, das 15 às 16 horas, ocorre uma queda de 2 metros e, pelo enunciado, essa queda está relacionada a 10% do volume que havia às 15 horas. Assim, se 10% do volume corresponderá a 2 metros, 100% desse volume corresponderá a 20 metros, que é a altura do rio às 15 horas. Por fim, podemos concluir que a altura do rio às 16 horas era 2 metros menor, logo, 18 metros.

Alternativa: A.

Uma observação interessante neste gráfico é a representação, no eixo vertical, do achatamento dos valores iniciais. Como cada linha representa um metro, o candidato poderia contar as linhas a fim de descobrir a resposta, ou, ainda, o gráfico ficaria com o eixo vertical muito extenso, assim, na construção optou-se por suprimir os valores iniciais, começando a contagem a partir de um ponto interessante para a questão. Para isso, faz-se o desenho do eixo como se este fosse achatado.

2. Enem 2017 Quanto tempo você fica conectado à internet? Para responder a essa pergunta foi criado um miniaplicativo de computador que roda na área de trabalho, para gerar automaticamente um gráfico de setores, mapeando o tempo que uma pessoa acessa cinco *sites* visitados. Em um computador, foi observado que houve um aumento significativo do tempo de acesso da sexta-feira para o sábado, nos cinco *sites* mais acessados. A seguir, temos os dados do miniaplicativo para esses dias.

Tempo de acesso na sexta-feira (minuto)

Tempo de acesso no sábado (minuto)

FRENTE ÚNICA

Analisando os gráficos do computador, a maior taxa de aumento no tempo de acesso, da sexta-feira para o sábado, foi no *site*:

a) X
b) Y
c) Z
d) W
e) U

Resolução:

Há gráficos que podem ser representados fora de eixos, como é o caso dos gráficos de setores, popularmente conhecidos como gráficos de *pizza*. No caso, cada setor, ou fatia, representa uma parte em relação ao todo. Nessa questão, os gráficos representam os tempos de acesso a *sites* em dois dias distintos, sexta-feira e sábado. Para distinguir os *sites*, foram utilizadas cores diferentes. Há também a informação do tempo, em minutos, de acesso em cada um deles. A taxa de aumento solicitada no exercício está relacionada ao maior aumento percentual de sábado em comparação à sexta-feira, e não apenas ao maior aumento em minutos.

Assim, a maior taxa de aumento será dada pela maior razão $\frac{\text{Tempo (sábado)}}{\text{Tempo (sexta)}}$. Caso a caso, temos:

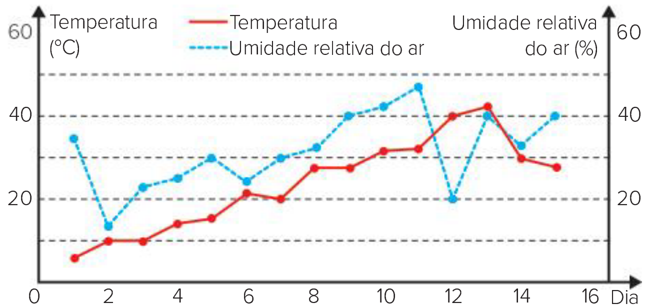
- X: $\frac{21}{12} = 1{,}75$
- Y: $\frac{51}{30} = 1{,}7$
- Z: $\frac{11}{10} = 1{,}1$
- W: $\frac{57}{38} = 1{,}5$
- U: $\frac{56}{40} = 1{,}4$

Assim, com um aumento de 75%, o *site* X apresentou o maior aumento percentual na taxa de acesso.
Alternativa: A.

3. **Enem 2019** O serviço de meteorologia de uma cidade emite relatórios diários com a previsão do tempo. De posse dessas informações, a prefeitura emite três tipos de alertas para a população:

- **Alerta cinza:** deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura será inferior a 10 °C, e a umidade relativa do ar for inferior a 40%;
- **Alerta laranja:** deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura deve variar entre 35 °C e 40 °C, e a umidade relativa do ar deve ficar abaixo de 30%;
- **Alerta vermelho:** deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura será superior a 40 °C, e a umidade relativa do ar for inferior a 25%.

Um resumo da previsão do tempo nessa cidade, para um período de 15 dias, foi apresentado no gráfico.



Decorridos os 15 dias de validade desse relatório, um funcionário percebeu que, no período a que se refere o gráfico, foram emitidos os seguintes alertas:
Dia 1: alerta cinza;
Dia 12: alerta laranja;
Dia 13: alerta vermelho.
Em qual(is) desses dias o(s) aviso(s) foi(ram) emitido(s) corretamente?

a) 1
b) 12
c) 1 e 12
d) 1 e 13
e) 1, 12 e 13

Resolução:

Alguns gráficos mais elaborados podem conter dois eixos verticais. Neste caso, o eixo da esquerda indica a temperatura em graus Celsius, o eixo da direita, a porcentagem da umidade relativa do ar, e o eixo horizontal, os dias apontados no relatório. A curva pontilhada azul, segundo a legenda, representa a umidade relativa, enquanto a linha contínua vermelha representa a temperatura. Nessa situação, deve-se considerar um eixo para cada curva. Repare que os dias ímpares não estão indicados no gráfico, porém pode-se inferir os resultados tomando o ponto médio entre os dias pares. Relacionando as características de cada alerta com as informações do gráfico, vemos que o alerta cinza para o dia 1 está correto, uma vez que a temperatura estava abaixo de 10 °C, e a umidade relativa do ar, abaixo de 40%. O alerta laranja, dado no dia 12, está errado, uma vez que, segundo o enunciado, a temperatura deveria variar entre 35 °C e 40 °C e, de acordo com o gráfico, neste dia a temperatura foi de exatamente 40 °C. Uma vez que o termo "entre" indica que a temperatura está dentro do intervalo, deveríamos ter uma temperatura maior que 35 °C e menor que 40 °C. Por fim, o alerta vermelho do dia 13 também está errado, dado que a umidade relativa do ar para este alerta deve ser inferior a 25%, quando foi, de acordo com o gráfico, de 40%.
Alternativa: A.

Exercícios

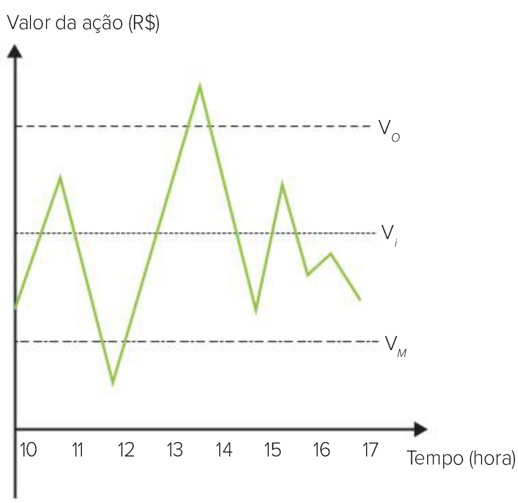
11. Enem 2015 Um investidor inicia um dia com *x* ações de uma empresa. No decorrer desse dia, ele efetua apenas dois tipos de operações, comprar ou vender ações. Para realizar essas operações, ele segue estes critérios:

I. vende metade das ações que possui, assim que seu valor fica acima do valor ideal (V_i);

II. compra a mesma quantidade de ações que possui, assim que seu valor fica abaixo do valor mínimo (V_m);

III. vende todas as ações que possui, quando seu valor fica acima do valor ótimo (V_o).

O gráfico apresenta o período de operações e a variação do valor de cada ação, em reais, no decorrer daquele dia e a indicação dos valores ideal, mínimo e ótimo.

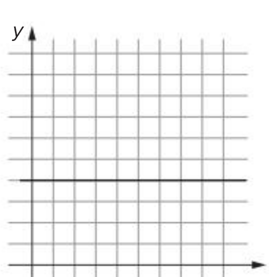


Quantas operações o investidor fez naquele dia?

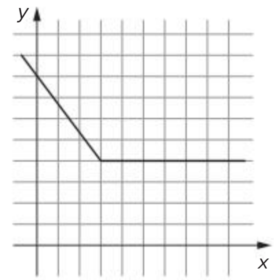
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

12. Fuvest-SP 2021 Qual dos gráficos representa uma relação entre as grandezas *x* e *y* em que *y* sempre diminui na medida em que *x* aumenta?

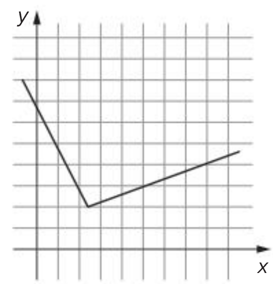
a)



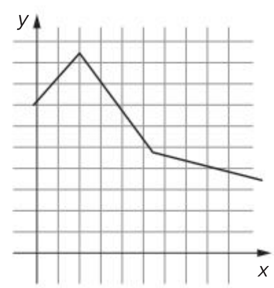
b)



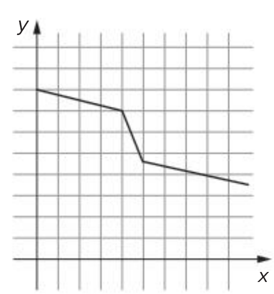
c)



d)



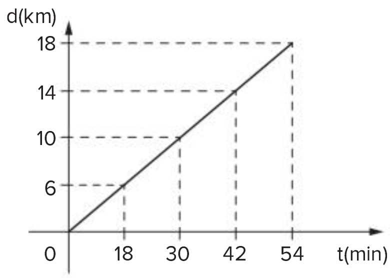
e)

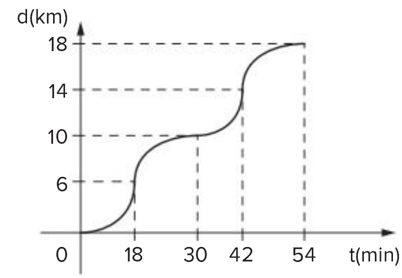


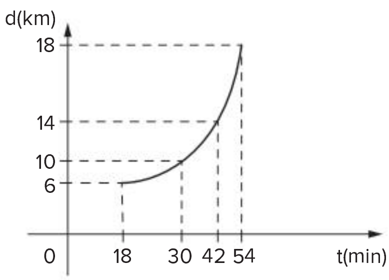
13. Encceja 2018 O técnico de um maratonista está monitorando os tempos obtidos pelo atleta em seu treinamento. Ele registrou o tempo gasto e a distância percorrida durante uma sessão de treinos, conforme indicado. Em seguida, observou que o tempo gasto era diretamente proporcional à distância percorrida.

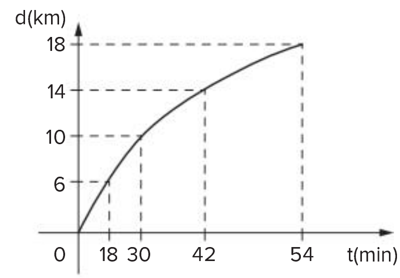
Distância percorrida *d* (km)	Tempo gasto *t* (min)
6	18
10	30
14	42
18	54

Para divulgação impressa desses resultados, optaram pela apresentação dos dados observados em um gráfico cartesiano, mostrando a distância percorrida *d* e o tempo gasto *t*. Qual gráfico representa a relação entre a distância percorrida *d* e o tempo gasto *t*?

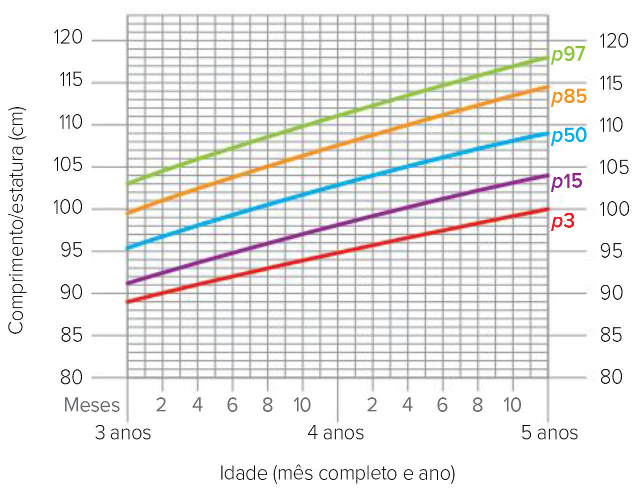
a)


c)


b)


d)


14. Enem 2016 A fim de acompanhar o crescimento de crianças, foram criadas pela Organização Mundial da Saúde (OMS) tabelas de altura, também adotadas pelo Ministério da Saúde do Brasil. Além de informar os dados referentes ao índice de crescimento, a tabela traz gráficos com curvas, apresentando padrões de crescimento estipulados pela OMS.
O gráfico apresenta o crescimento de meninas cuja análise se dá pelo ponto de interseção entre o comprimento, em centímetro, e a idade, em mês completo e ano, da criança.



Disponível em: www.aprocura.com.br. Acesso em: 22 out. 2015 (adaptado).

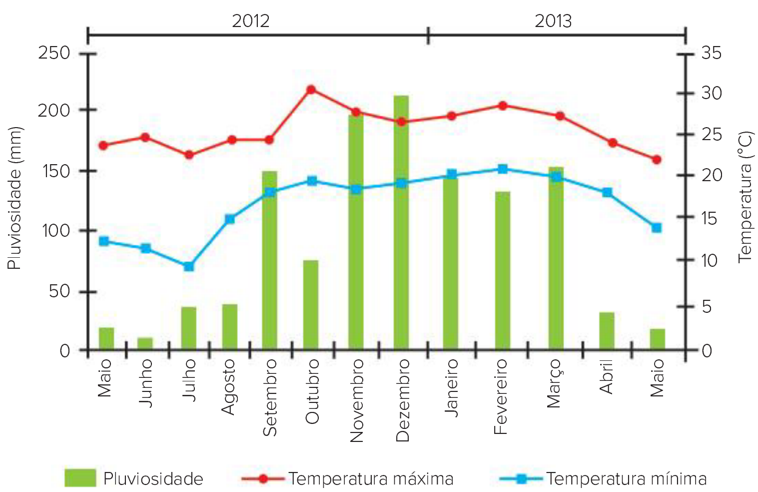
Uma menina aos 3 anos de idade tinha altura de 85 centímetros e aos 4 anos e 4 meses sua altura chegou a um valor que corresponde a um ponto exatamente sobre a curva *p*50. Qual foi o aumento percentual da altura dessa menina, descrito com uma casa decimal, no período considerado?

a) 23,5%.
b) 21,2%.
c) 19,0%.
d) 11,8%.
e) 10,0%.

15. Enem 2016 O cultivo de uma flor rara só é viável se do mês do plantio para o mês subsequente o clima da região possuir as seguintes peculiaridades:

- a variação do nível de chuvas (pluviosidade), nesses meses, não for superior a 50 mm;
- a temperatura mínima, nesses meses, for superior a 15 °C;
- ocorrer, nesse período, um leve aumento não superior a 5 °C na temperatura máxima.

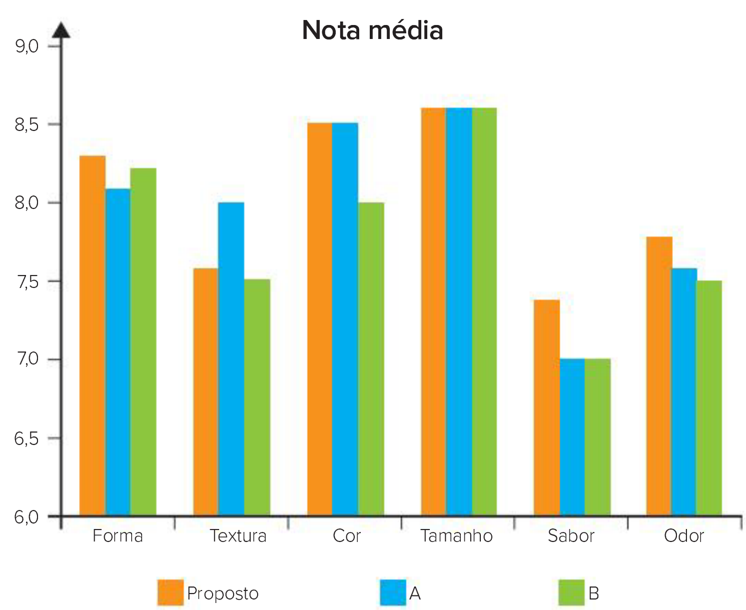
Um floricultor, pretendendo investir no plantio dessa flor em sua região, fez uma consulta a um meteorologista que lhe apresentou o gráfico com as condições previstas para os 12 meses seguintes nessa região.



Com base nas informações do gráfico, o floricultor verificou que poderia plantar essa flor rara. O mês escolhido para o plantio foi

a) janeiro.
b) fevereiro.
c) agosto.
d) novembro.
e) dezembro.

16. Enem 2016 A diretoria de uma empresa de alimentos resolve apresentar para seus acionistas uma proposta de novo produto. Nessa reunião, foram apresentadas as notas médias dadas por um grupo de consumidores que experimentaram o novo produto e dois produtos similares concorrentes (A e B).



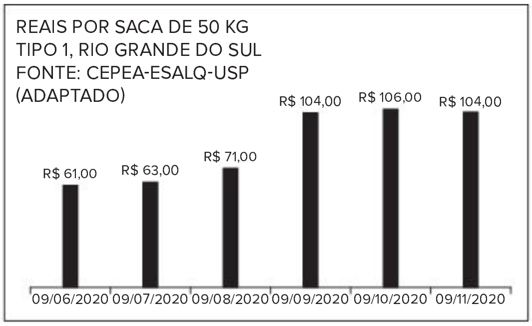
A característica que dá a maior vantagem relativa ao produto proposto e que pode ser usada, pela diretoria, para incentivar a sua produção é a

a) textura.
b) cor.
c) tamanho.
d) sabor.
e) odor.

FRENTE ÚNICA

17. **Unifor-CE 2021** Essencial na mesa da família brasileira, o preço do arroz disparou nos supermercados brasileiros, sobretudo nos últimos meses. Levantamento feito pelo Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (Cepea), da Esalq/USP, mostra a variação de preço no preço da saca de 50 Kg de arroz do tipo 1, no posto indústria Rio Grande do Sul, à vista, nos últimos seis meses.

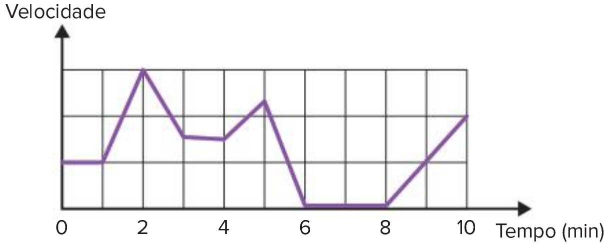
Disponível em: www.economia.uol.com.br. Acesso em: 10 Nov 2020.



De acordo com as informações do gráfico, o preço médio da saca de 50 kg da saca de arroz, tipo 1, no Rio Grande do Sul, de 09/06/2020 a 09/11/2020 era de, aproximadamente,

a) R$ 64,67.
b) R$ 71,00.
c) R$ 78,83.
d) R$ 84,84.
e) R$ 89,73.

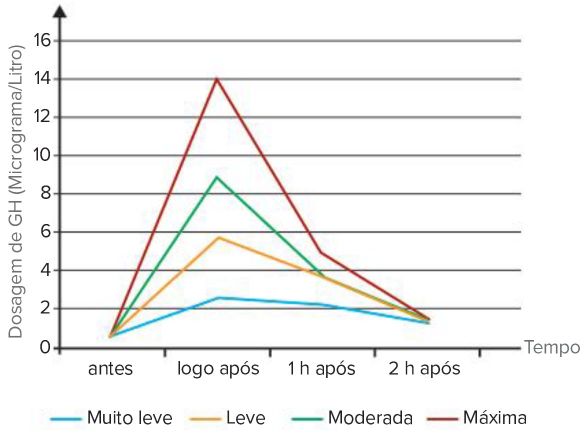
18. **Enem 2017** Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.



Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo analisado?

a) 4 **b)** 3 **c)** 2 **d)** 1 **e)** 0

19. **Enem 2017** GH é a sigla que denomina o hormônio do crescimento (do inglês *growth hormone*), indispensável para retardar o processo de envelhecimento. À medida que envelhecemos, a liberação desse hormônio na corrente sanguínea vai diminuindo. Estudos têm demonstrado, porém, que alguns métodos de treinamento aumentam a produção de GH. Em uma pesquisa, dez homens foram submetidos a sessões de 30 minutos de corrida, em uma esteira, em diferentes intensidades: muito leve, leve, moderada e máxima. As dosagens de GH, medidas por coletas de sangue feitas antes e logo após as sessões, e também 1 hora e 2 horas após o término, são fornecidas no gráfico.



Em qual(is) medição(ões) a liberação de GH na corrente sanguínea em uma sessão de intensidade máxima foi maior que a liberação de GH ocorrida nas demais intensidades?

a) Apenas na medição feita logo após a sessão de treinamento.
b) Apenas na medição feita 1 hora após a sessão de treinamento.
c) Apenas na medição feita 2 horas após a sessão de treinamento.
d) Nas medições feitas logo após e 1 hora após a sessão de treinamento.
e) Nas medições feitas logo após, 1 hora após e 2 horas após a sessão de treinamento.

joelpapalini/Shutterstock.com

FRENTE ÚNICA

CAPÍTULO

9

Sistema métrico e conversão de unidades

Em 1999, uma sonda americana de US$ 125 milhões se aproximou demais da órbita de Marte e “desapareceu”. Uma investigação concluiu que a causa do desaparecimento foi um erro de conversão de unidades de medida, das inglesas para as métricas, no sistema de computação do satélite. Acredita-se que, por conta do erro de conversão, o satélite tenha sido destruído na entrada da atmosfera de Marte.

Não raramente encontramos histórias de problemas gerados por conversões incorretas de unidades. Neste capítulo, trabalharemos o sistema métrico e as principais conversões de unidades de medida.

O sistema internacional de unidades (SI)

Sempre que resolvemos exercícios envolvendo grandezas devemos ficar atentos às unidades de medida utilizadas. Não podemos, por exemplo, calcular a área de um triângulo se as dimensões envolvidas não estiverem em uma mesma unidade de comprimento. Caso estejam em unidades diferentes, será necessário realizar conversões. Tais conversões são muito frequentes por isso é importante dominar, sem restrições, as conversões que trabalharemos neste capítulo.

Para padronizar as unidades de medida utilizadas em diferentes países, definiu-se o Sistema Internacional de Unidades, ou SI, cujas principais unidades básicas estão apresentadas no quadro a seguir.

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Temperatura (termodinâmica)	kelvin	K
Corrente elétrica	ampère	A
Quantidade de substância	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

Há também unidades derivadas das básicas, por exemplo, a velocidade escalar, dada em metros por segundo (m/s), o volume, dado em metros cúbicos (m^3), a densidade, definida como a razão entre a massa e o volume (kg/m^3), entre outras.

Apesar de o SI definir tais unidades como básicas, também são aceitas, e comumente utilizadas, outras unidades para as grandezas, tais como hora (h) para o tempo, quilômetro por hora (km/h) para a velocidade escalar, grau Celsius (°C) para a temperatura, litro (L) ou mililitro (mL) como unidade de capacidade relacionada ao volume e grama (g) para massa. Assim, tão importante quanto identificar as unidades básicas do SI, é saber convertê-las nas unidades propostas por algum exercício em sua resolução.

Conversão de unidades

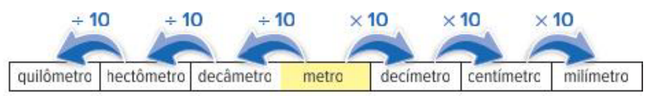
Comprimento, massa e volume

Comprimento, massa e volume, este último trabalhado tanto em m^3 quanto em sua unidade de capacidade, litros, podem ser convertidos em submúltiplos ou múltiplos de suas unidades no SI. Esses submúltiplos e múltiplos adicionam um prefixo à unidade, indicando a potência de dez em relação a ela. Os prefixos, sua simbologia e representação como potências de dez são as seguintes:

Prefixo	Símbolo	Potência de dez
quilo	k	$10^3 = 1000$
hecto	h	$10^2 = 100$
deca	da	$10^1 = 10$
deci	d	$10^{-1} = 0,1$
centi	c	$10^{-2} = 0,01$
mili	m	$10^{-3} = 0,001$

Por exemplo, 2 hectômetros (2 hm) equivalem a $2 \cdot 100 = 200$ metros; 57 mililitros (57 mL) equivalem a $57 \cdot 0,001 = 0,057$ litros; 12,3 quilogramas (12,3 kg) equivalem a $12,3 \cdot 1000 = 12300$ gramas.

O quadro anterior, bem como os exemplos dados, são conversões para as unidades de referência metro, grama e a unidade de capacidade litro. Porém, em várias situações, é necessária a conversão entre outras unidades, como quilômetro para centímetro ou miligrama para quilograma, por exemplo. Uma maneira prática de se trabalhar tais conversões é usar o esquema a seguir:



No esquema utilizamos o metro, mas a lógica para o grama e o litro é a mesma. Para cada casa à direita que caminhamos na conversão da unidade, realizamos uma multiplicação por 10 e, para cada casa à esquerda, uma divisão por dez. Assim, por exemplo, para converter 12 metros em centímetros, devemos multiplicar o número 12 por 100, uma vez que do metro para centímetros deslocamos duas casas, logo, realizamos duas multiplicações por 10, assim, 12 m = 1 200 cm. Por outro lado, para convertermos 12 milímetros (mm) para decâmetros (dam), devemos deslocar quatro casas para a esquerda, o que significa dividir 12 por $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, ou seja, dividir 12 por 10 000, logo, temos que 12 mm = 0,0012 dam.

Para massas, as unidades mais comuns são o quilograma (kg) e o miligrama (mg). Também é frequente o uso de tonelada (t), sendo 1 tonelada equivalente a 1 000 kg.

Para volumes, apenas o litro e o mililitro são comuns no Brasil, porém centilitros (cL) é a unidade utilizada para indicar o volume em alguns países da Europa.

As conversões devem respeitar todas as potências que representam os múltiplos e submúltiplos das unidades metro, grama e litro.

Exercício

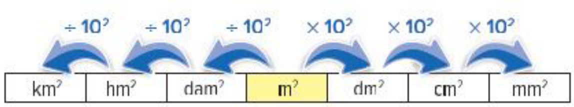
1. Converta os valores para as unidades de medida indicadas:
   - **a)** 37,3 m para quilômetros
   - **b)** 0,45 km para centímetros
   - **c)** 1 dm para milímetros
   - **d)** 12 460,1 m para hectômetros
   - **e)** 10 hm para quilômetros
   - **f)** 5 207 L para mililitros
   - **g)** 0,45 cL para litros
   - **h)** 12 mL para litros
   - **i)** 0,023 L para mililitros
   - **j)** 12 kg para gramas
   - **k)** 1 305 g para miligramas
   - **l)** 1 001 g para quilogramas
   - **m)** 0,2 mg para gramas
   - **n)** 135 000 g para toneladas

Conversão de unidades de área

Quando nos referimos a comprimento, estamos falando de apenas uma dimensão, como altura ou largura. Para áreas, porém, temos a relação entre duas dimensões, por exemplo, a área de um retângulo é o produto das medidas de seu comprimento por sua largura.

Se há duas dimensões, há o produto de duas unidades de medida que, nesse caso, devem estar representadas na mesma unidade. Assim, para áreas, trabalhamos com metros quadrados (m^2), centímetros quadrados (cm^2), quilômetros quadrados (km^2), ou seja, a unidade de medida das dimensões ao quadrado.

Ao convertermos unidades de medida de áreas devemos tomar cuidado com a potência de 10 envolvida. Por exemplo, para transformarmos 7 metros em centímetros devemos multiplicar 7 por 100 ($10 \cdot 10$), mas para transformar 7 metros quadrados em centímetros quadrados devemos multiplicar 7 por 100 ao quadrado ($10^2 \cdot 10^2$), ou seja, por 10 000, exatamente por serem duas dimensões envolvidas. Assim, podemos pensar em um esquema parecido com o apresentado nas conversões de metro, grama e litro.



Note que, para cada casa à direita que deslocamos na conversão da unidade de área, devemos multiplicar por 10^2 e, para cada casa à esquerda, dividir por 10^2.

Assim, se quisermos converter uma área de 1,3 km^2 para metros quadrados, devemos multiplicar 1,3 por $10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2$, o que corresponde a multiplicar por $(10^2)^3 = 10^6 = 1\,000\,000$. Logo, 1,3 km^2 equivale a 1 300 000 m^2. Agora, para determinarmos 10 000 m^2 em hectômetros quadrados, devemos dividir 10 000 por $10^2 \cdot 10^2$, ou seja, $(10^2)^2 = 10\,000$, verificando que 10 000 m^2 é o mesmo que 1 hm^2.

Duas unidades de medida são muito utilizadas para representar áreas grandes, o hectare e o alqueire. Em geral, quando os exercícios trazem essas unidades, suas conversões são informadas. O hectare (cujo símbolo é ha) corresponde a 10 000 m^2 e no exemplo anterior verificamos que essa é a medida de 1 hm^2, assim, podemos dizer que 1 ha corresponde a 1 hm^2. Já o alqueire tem sua medida variando de estado para estado no Brasil. Um alqueire paulista corresponde a 24 200 m^2, já um alqueire mineiro é equivalente a 48 400 m^2. No caso dos alqueires, o enunciado dirá qual equivalência você deve usar.

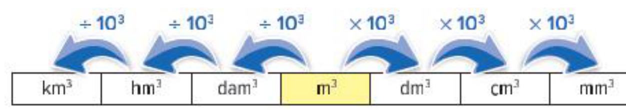
Exercício

2. Converta as medidas de áreas abaixo para as unidades pedidas.

a) 10 m^2 para cm^2
b) 1 200 mm^2 para dam^2
c) 0,42 hm^2 para dm^2
d) 0,0001 km^2 para m^2
e) 1 ha para km^2
f) 1 400 000 mm^2 para ha
g) 24 000 hm^2 para dam^2
h) $1{,}2 \cdot 10^{-8}$ km^2 para mm^2
i) 0,079 km^2 para dam^2
j) 100 alqueires mineiros para km^2

Conversão de unidades de volume

Vimos a conversão do volume em sua unidade de capacidade, o litro. Quando usamos o metro cúbico (m^3), a conversão respeita a mesma lógica que envolve suas dimensões, como visto na conversão de unidades de áreas. Calculamos o volume de um sólido levando em consideração as suas três dimensões e todas elas devem ser expressas na mesma unidade. Isso indica que, ao realizar uma conversão entre unidades adjacentes no quadro, devemos multiplicar ou dividir por 10^3.



Se desejamos, por exemplo, converter 5 m^3 para cm^3 devemos multiplicar 5 por $10^3 \cdot 10^3$, ou seja, por $(10^3)^2 = 10^6 = 1\,000\,000$. Logo, 5 m^3 equivalem a 5 000 000 cm^3. Por outro lado, para converter 1 240 cm^3 em dam^3 devemos dividir 1 240 por $10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3$, ou seja, $(10^3)^3 = 1\,000\,000\,000$. Assim, 1 240 cm^3 corresponde a 0,00000124 dam^3, ou em notação científica, $1{,}24 \cdot 10^{-6}$ dam^3.

Há também relações entre as unidades de volume e de capacidade, cujas conversões são as apresentadas no quadro abaixo.

Unidade de volume	Unidade de capacidade
1 m^3	1 000 litros
1 dm^3	1 litro
1 cm^3	1 mililitro

Para realizar uma conversão de unidade de volume para capacidade, ou vice-versa, basta resolver uma regra de três simples. Essas conversões são muito comuns, por isso é importante praticá-las.

Exercício

3. Faça a conversão das medidas de volume para as unidades solicitadas.

a) 5 m^3 para dm^3
b) 3 900 mm^3 para cm^3
c) 12 m^3 para litros
d) 45 cm^3 para mL
e) 47 litros para cm^3
f) 1 200 mL para dm^3
g) 567 litros para m^3
h) $2 \cdot 10^{-10}$ km^3 para m^3
i) $3{,}75 \cdot 10^{10}$ mm^3 para litros
j) 9 500 cm^3 para litros

Conversão de unidades de temperatura

No Sistema Internacional (SI), a unidade de temperatura é o grau Kelvin (K), mas o grau Celsius (°C) também é frequentemente utilizado. Para estabelecermos uma relação entre essas escalas, tomamos como referência o ponto de fusão da água, temperatura em que ela passa de seu estado sólido para o líquido, e o ponto de ebulição, temperatura em que a água passa do estado líquido para o gasoso. Na escala Kelvin, os pontos de fusão e ebulição são, respectivamente, 273 K e 373 K, aproximadamente. Já na escala Celsius eles são, respectivamente, 0 °C e 100 °C. Note que, em ambas escalas, a variação de temperatura da mudança desses estados físicos é de 100 graus, ou seja, podemos fazer uma relação direta na conversão de graus Celsius para Kelvin, adicionando 273 e, de graus Kelvin para Celsius, subtraindo 273. Assim, dada uma temperatura t_C em graus Celsius e sua equivalente t_K, em Kelvin, temos:

$$t_K = t_C + 273 \qquad t_C = t_K - 273$$

Existem outras unidades de medida para temperatura. A mais conhecida, além das duas citadas anteriormente, é o grau Fahrenheit (°F), usada em alguns poucos países de colonização inglesa, como os Estados Unidos. Nela, os pontos de fusão e ebulição da água são, respectivamente, 32 °F e 212 °F.

Para relacionarmos as escalas Fahrenheit e Celsius também analisamos a variação entre os pontos de fusão e ebulição. Em Fahrenheit a diferença entre os dois pontos é de 180 graus, enquanto em Celsius é de 100 graus, assim, temos uma relação de 1,8 °F para cada 1 °C. Como a diferença, no ponto de fusão da água, entre as escalas é 32, podemos formular a seguinte relação: dada uma temperatura t_C em graus Celsius, sua equivalente t_F em Fahrenheit é dada por:

$$t_F = 1{,}8 \cdot t_C + 32$$

Para determinar a temperatura na escala Celsius dado o valor na escala Fahrenheit, basta isolar t_C na equação anterior, ou seja:

$$t_C = \frac{t_F - 32}{1{,}8}$$

A conversão de Kelvin para Fahrenheit, e vice-versa, pode ser feita trabalhando com graus Celsius. Se desejamos converter uma temperatura da escala Kelvin para a escala Fahrenheit, primeiro convertemos de Kelvin para Celsius e, em seguida, convertemos de Celsius para Fahrenheit. Agora, se desejamos converter de graus Fahrenheit para Kelvin, determinamos a temperatura equivalente na escala Fahrenheit em Celsius e, depois, a convertemos para a escala Kelvin.

Exercício

4. Faça a conversão das temperaturas dadas para as unidades indicadas.

a) 32 °C para K
b) 300 K para °C
c) −100 °C para K
d) 0 K para °C
e) 27 °C para °F
f) 104 °F para °C
g) 291 K para °F
h) 68 °F para K
i) 212 °F para °C
j) 393 K para °F

Conversão da velocidade escalar

Uma conversão muito frequente na Física é a da velocidade escalar de km/h para m/s e vice-versa. Há uma regra prática para tais conversões, mas primeiro vamos à lógica da conversão.

A unidade km/h envolve duas grandezas, o deslocamento, em quilômetros, e o tempo gasto para isso, em horas. Assim, se um carro trafega a 72 km/h em velocidade constante, ele percorre 72 quilômetros a cada hora. Se quisermos determinar a velocidade desse carro em m/s, devemos fazer a conversão da unidade de comprimento (deslocamento) de quilômetros para metros, e a de tempo, de hora para segundos.

Sabemos que 72 km equivalem a 72 000 m, que 1 hora corresponde a 60 minutos e que 1 minuto corresponde a 60 segundos. Assim, 1 hora equivale a $60 \cdot 60 = 3\,600$ segundos. Logo, a velocidade do carro é:

$$\frac{72\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{72000\text{ m}}{3600\text{ s}} = \frac{720\text{ m}}{36\text{ s}} = \frac{20\text{ m}}{1\text{ s}} = 20\text{ m/s}$$

Portanto, a velocidade de 72 km/h equivale a 20 m/s. Porém, para economizar tempo ao realizar essas conversões, utilizamos a seguinte regra prática: convertemos km/h para m/s ao dividir a velocidade dada por 3,6. Note que, no exemplo anterior, $\frac{72}{3{,}6} = 20$. A divisão por 3,6 se dá exatamente pela lógica de conversão apresentada, ou seja, para 1 km/h, temos:

$$1\text{ km/h} = \frac{1\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{1000\text{ m}}{3\,600\text{ s}} = \frac{1\text{ m}}{3{,}6\text{ s}} = \frac{1}{3{,}6}\text{ m/s}$$

Já na conversão de m/s para km/h o processo é o inverso e, portanto, em vez de dividir, devemos multiplicar por 3,6. Por exemplo, 10 m/s é uma velocidade equivalente a $10 \cdot 3{,}6 = 36$ km/h. Podemos verificar esse resultado obtido fazendo a conversão das unidades passo a passo:

$$10\text{ m/s} = \frac{10\text{ m}}{1\text{ s}} = \frac{0{,}010\text{ km}}{\frac{1}{3\,600}\text{ h}} = \frac{0{,}010\text{ km} \cdot 3\,600}{1\text{ h}} = \frac{36\text{ km}}{1\text{ h}} = 36\text{ km/h}$$

Resumindo, para fazer a conversão de velocidades (entre essas unidades) podemos pensar no seguinte esquema:

$$\text{km/h} \underset{\times\ 3{,}6}{\overset{\div\ 3{,}6}{\rightleftarrows}} \text{m/s}$$

Qualquer outra conversão entre duas ou mais grandezas deve ser trabalhada passo a passo, como mostrado anteriormente.

Exercício

5. Converta as velocidades a seguir para a unidade indicada.

a) 20 m/s em km/h
b) 36 km/h em m/s
c) 17 m/s em km/h
d) 108 km/h em m/s
e) 12,5 m/s em km/h
f) 30 m/min em m/s
g) 60 km/h em km/min
h) 120 m/s em km/min
i) 30 km/h em m/min
j) 600 cm/s em km/h

A conversão de unidades nos vestibulares e no Enem

Devemos estar sempre atentos, principalmente com questões que possuem infográficos, gráficos e tabelas, às unidades de medida indicadas. As conversões nos vestibulares são frequentes, principalmente no Enem, ter domínio dos processos de conversão é fundamental. Sempre analise se as unidades de medida fornecidas pelo enunciado e os outros elementos visuais estão de acordo com as unidades do que é pedido. Em certos casos, a conversão pode ser feita antes ou depois do processo de resolução, cabendo a você decidir o momento apropriado de fazê-la.

Exercícios

6. **Enem 2020** Três pessoas, X, Y e Z, compraram plantas ornamentais de uma mesma espécie que serão cultivadas em vasos de diferentes tamanhos.

O vaso escolhido pela pessoa X tem capacidade de 4 dm^3. O vaso da pessoa Y tem capacidade de 7 000 cm^3 e o de Z tem capacidade igual a 20 L.

Após um tempo do plantio das mudas, um botânico que acompanha o desenvolvimento delas realizou algumas medições e registrou que a planta que está no vaso da pessoa X tem 0,6 m de altura. Já as plantas que estão nos vasos de Y e Z têm, respectivamente, alturas medindo 120 cm e 900 mm.

O vaso de maior capacidade e a planta de maior altura são, respectivamente, os de

a) Y e X.
b) Y e Z.
c) Z e X.
d) Z e Y.
e) Z e Z.

7. **Enem 2019** Comum em lançamentos de empreendimentos imobiliários, as maquetes de condomínios funcionam como uma ótima ferramenta de marketing para as construtoras, pois, além de encantar clientes, auxiliam de maneira significativa os corretores na negociação e venda de imóveis. Um condomínio está sendo lançado em um novo bairro de uma cidade. Na maquete projetada pela construtora, em escala de 1 : 200, existe um reservatório de água com capacidade de 45 cm^3. Quando todas as famílias estiverem residindo no condomínio, a estimativa é que, por dia, sejam consumidos 30 000 litros de água. Em uma eventual falta de água, o reservatório cheio será suficiente para abastecer o condomínio por quantos dias?

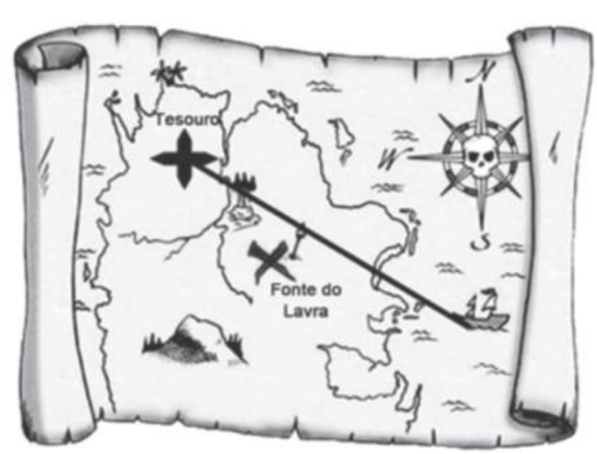
a) 3
b) 6
c) 12
d) 15
e) 30

8. **Enem 2019** A bula de um antibiótico infantil, fabricado na forma de xarope, recomenda que sejam ministrados, diariamente, no máximo 500 mg desse medicamento para cada quilograma de massa do paciente. Um pediatra prescreveu a dosagem máxima desse antibiótico para ser ministrada diariamente a uma criança de 20 kg pelo período de 5 dias. Esse medicamento pode ser comprado em frascos de 10 mL, 50 mL, 100 mL, 250 mL e 500 mL. Os pais dessa criança decidiram comprar a quantidade exata de medicamento que precisará ser ministrada no tratamento, evitando a sobra de medicamento. Considere que 1 g desse medicamento ocupe um volume de 1 cm^3. A capacidade do frasco, em mililitro, que esses pais deverão comprar é

a) 10
b) 50
c) 100
c) 250
d) 500

9. **Enem 2018** Um mapa é a representação reduzida e simplificada de uma localidade. Essa redução, que é feita com o uso de uma escala, mantém a proporção do espaço representado em relação ao espaço real.

Certo mapa tem escala de 1 : 58 000 000.



Disponível em: http://oblogdedaynabrigth.blogspot.com.br. Acesso em: 9 ago. 2012.

FRENTE ÚNICA

Considere que, nesse mapa, o segmento de reta que liga o navio à marca do tesouro meça 7,6 cm. A medida real, em quilômetro, desse segmento de reta é:

a) 4 408
b) 7 632
c) 44 080
d) 76 316
e) 440 800

10. **Enem 2017** Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1 000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina-d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina. A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é

a) 11,25
b) 27,00
c) 28,80
d) 32,25
e) 49,50

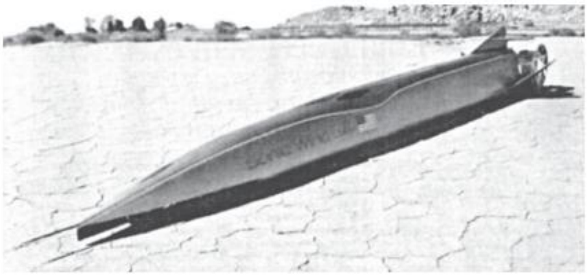
11. **Enem 2017** Para uma temporada das corridas de Fórmula 1, a capacidade do tanque de combustível de cada carro passou a ser de 100 kg de gasolina. Uma equipe optou por utilizar uma gasolina com densidade de 750 gramas por litro, iniciando a corrida com o tanque cheio. Na primeira parada de reabastecimento, um carro dessa equipe apresentou um registro em seu computador de bordo acusando o consumo de quatro décimos da gasolina originalmente existente no tanque. Para minimizar o peso desse carro e garantir o término da corrida, a equipe de apoio reabasteceu o carro com a terça parte do que restou no tanque na chegada ao reabastecimento.

Disponível em: www.superdanilof1page.com.br. Acesso em: 6 jul. 2015 (adaptado).

A quantidade de gasolina utilizada, em litro, no reabastecimento foi

a) $\frac{20}{0,075}$
b) $\frac{20}{0,75}$
c) $\frac{20}{7,5}$
d) $20 \times 0,075$
e) $20 \times 0,75$

12. **Enem 2016** O veículo terrestre mais veloz já fabricado até hoje é o Sonic Wind LSRV, que está sendo preparado para atingir a velocidade de 3 000 km/h. Ele é mais veloz do que o Concorde, um dos aviões de passageiros mais rápidos já feitos, que alcança 2 330 km/h.



BASILIO, A. Galileu, mar. 2012 (adaptado).

Para uma distância fixa, a velocidade e o tempo são inversamente proporcionais.

Para percorrer uma distância de 1 000 km, o valor mais próximo da diferença, em minuto, entre os tempos gastos pelo Sonic Wind LSRV e pelo Concorde, em suas velocidades máximas, é

a) 0,1
b) 0,7
c) 6,0
d) 11,2
e) 40,2

Gabarito

Frente única

Capítulo 1 – Conjuntos numéricos e Aritmética

1. a) $12, \sqrt{\frac{100}{25}}, \sqrt{64}$
   b) $12, \sqrt{\frac{100}{25}}, \sqrt{64}, -144$
   c) $12, \sqrt{\frac{100}{25}}, \sqrt{64}, -144, \frac{2}{3}, 1{,}333..., 0{,}428$
   d) $\sqrt{3}, \frac{\sqrt{5}}{5}$
   e) Todos.
2. B
3. a) Falsa, pois $n \in \mathbb{N}$.
   b) Verdadeira.
   c) Verdadeira.
   d) Verdadeira.
4. a) $\in$
   b) $\notin$
   c) $\in$
   d) $\notin$
   e) $\notin$
   f) $\notin$
   g) $\notin$
   h) $\notin$
5. a) 15
   b) 21
   c) 30
   d) 198
   e) 1 141
   f) 2 387
   g) 4 365
   h) 2 301
   i) 904 173
   j) 1 011 820
6. a) 3
   b) 7
   c) 18
   d) 87
   e) 1 063
   f) 1 557
   g) 272
7. a) 70
   b) 144
   c) 48
   d) AB + AC
8. a) 63
   b) 96
   c) 240
   d) 1 554
   e) 2 178
   f) 91 640
9. a) Quociente = 105; resto = 0.
   b) Quociente = 68; resto = 1.
   c) Quociente = 42; resto = 0.
   d) Quociente = 105; resto = 0.
   e) Quociente = 81; resto = 4.
   f) Quociente = 106; resto = 8.
   g) Quociente = 57; resto = 0.
   h) Quociente = 215; resto = 2.
10. a) −13
    b) 34
    c) −219
    d) 15
    e) −65
    f) −197
    g) −10
    h) 14
11. a) 120
    b) −255
    c) −205
    d) −1440
    e) −74
    f) −35
    g) −35, resto 11.
    h) 24
    i) 308, resto −31.
12. a) $\frac{1}{2}$
    b) $-\frac{2}{5}$
    c) $\frac{77}{9}$
    d) $\frac{3}{25}$
    e) $-\frac{21}{1}$
13. a) 0,25
    b) 2,4
    c) −1,875
    d) $0{,}\overline{6}$
    e) $0{,}8\overline{3}$
    f) $-1{,}\overline{714285}$
14. D
15. a) $\frac{23}{100}$
    b) $\frac{9}{8}$
    c) $-\frac{2\,501}{1000}$
    d) $\frac{13\,333}{2\,500}$
    e) $\frac{4}{9}$
    f) $\frac{11}{9}$
    g) $\frac{76}{99}$
    h) $\frac{190\,909}{100\,000}$
    i) $\frac{11}{90}$
    j) $\frac{289}{990}$
    k) $\frac{357}{1100}$
16. a) 25,71
    b) 27,951
    c) −2,6
    d) 98,64
    e) 94,81
    f) 2,88
    g) 14,4228
    h) 2,4
    i) $\frac{3501}{850}$
    j) $666{,}\overline{6}$
    k) $303{,}\overline{03}$
    l) 16
17. D
18. a) $\frac{4}{11}$
    b) $-\frac{11}{7}$
    c) $\frac{13}{60}$
    d) $\frac{29}{40}$
    e) $-\frac{1}{20}$
    f) $-\frac{35}{144}$
    g) $\frac{5}{18}$
    h) $\frac{1}{4}$
    i) $\frac{45}{104}$
    j) $\frac{1}{21}$
    k) $\frac{3}{4}$
    l) 2
    m) $\frac{25}{2}$
    n) $\frac{2}{3}$
    o) $\frac{27}{8}$
19. 91 páginas.
20. 12,5 L.
21. R$ 364,00.

Capítulo 2 – Potências e raízes

1. a) 64
   b) 625
   c) −64
   d) 625
   e) −64
   f) −625
   g) 0
   h) $\frac{1}{32}$
   i) $\frac{625}{81}$
   j) $\frac{1}{6}$
   k) $\frac{1}{625}$

l) $\frac{9}{4}$

m) 16

n) $\frac{81}{16}$

2. a) 1 000
b) 100
c) 10
d) 1
e) 0,1
f) 0,01
g) 0,001
h) 0,0001

3. a) 2^{17}
b) 3^{-1}
c) 2^{6}
d) 3^{10}
e) 5^{2}
f) 10^{2}
g) 2^{12}
h) 2^{12}
i) 2^{81}
j) 3^{2}
k) $2^{4} \cdot 3^{6}$
l) $5^{4} \cdot 3^{-8}$
m) $\frac{2^{9}}{7^{30}}$
n) $\frac{2^{8}}{3^{12}}$
o) 2^{4}
p) $\frac{5^{15}}{3^{21}}$

4. a) 2^{10}
b) $2^{14} \cdot 3^{-5}$

5. a) 7
b) 9
c) 11
d) 16
e) 3
f) 9
g) -10
h) 3
i) -3
j) -2
k) 2
l) $\frac{1}{4}$
m) $\frac{2}{3}$
n) $\frac{2}{3}$
o) $-0,5$
p) $-0,1$

6. a) $\sqrt[4]{2}$
b) $\sqrt[3]{5^{2}}$
c) $\sqrt[9]{17^{-2}}$
d) $\sqrt{4^{5}}$
e) $3^{\frac{3}{4}}$
f) $6^{-\frac{1}{2}}$
g) $3^{\frac{1}{2}}$

7. a) $\sqrt{10}$
b) $\sqrt[3]{90}$
c) $\sqrt[5]{5}$
d) $\sqrt[3]{7}$
e) $\sqrt{3}$
f) $\sqrt[3]{2}$
g) $\sqrt[6]{2}$
h) 2
i) $\sqrt[4]{2}$
j) $\sqrt{3}$
k) 3

8. a) $5\sqrt{2}$
b) $7\sqrt{3}$
c) $3\sqrt[3]{3}$
d) $4\sqrt{2}$
e) $44\sqrt{2} - 26\sqrt{3}$

9. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
d) $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$
e) $\sqrt[4]{8}$
f) $\frac{5\sqrt[3]{16}}{4}$
g) $2\sqrt[5]{25}$
h) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
i) $\sqrt{3}+1$
j) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$
k) $\frac{5\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)}{4}$
l) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

10. a) $2,4 \times 10^{1}$
b) $1,55 \times 10^{3}$
c) $5,731 \times 10^{6}$
d) $1,4476001 \times 10^{7}$
e) 2×10^{-2}
f) 1×10^{-2}
g) $4,5 \times 10^{-5}$
h) $4,01 \times 10^{-7}$

11. a) $1,5 \times 10^{4}$
b) 1×10^{-3}
c) $2,8 \times 10^{7}$
d) $1,2 \times 10^{-3}$
e) 4×10^{5}
f) 4×10^{2}
g) $4,5 \times 10^{7}$
h) 5×10^{2}
i) $7,3 \times 10^{4}$
j) $6,05 \times 10^{4}$
k) $3,4 \times 10^{-3}$
l) $3,18 \times 10^{6}$
m) 4×10^{5}

12. C

Capítulo 3 – Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum

1. a) 2 453 258 é divisível por 2.
b) 345 891 é divisível por 3.
c) 245 412 é divisível por 4.
d) 123 455 é divisível por 5.
e) 235 432 710 é divisível por 6.
f) 421 128 é divisível por 8.
g) 1 000 008 é divisível por 9.
h) 450 220 é divisível por 10.
i) 3 300 é divisível por 12.
j) 5 876 é divisível por 13.

2. 1

3. a) X = 0
b) X = 1
c) X = 4
d) X = 0

4. C

5. a) ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 e ±12.
b) ±1, ±2, ±4, ±8 e ±16.
c) ±1, ±2, ±3, ±5, ±6, ±10, ±15 e ±30.
d) ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±7, ±12, ±14, ±21, ±28, ±42 e ±84.
e) ±1, ±3, ±5, ±9, ±11, ±15, ±33, ±45, ±55, ±99, ±165 e ±495.

6. a) mmc (4, 10) = 20
b) mmc (4, 8) = 8
c) mmc (2, 3, 5) = 30
d) mmc (10, 14) = 70
e) mmc (6, 8, 15) = 120
f) mmc (7, 9, 12) = 252
g) mmc (21, 24, 32) = 672
h) mmc (16, 20, 24, 30) = 240

7. a) mdc (8, 16) = 8
b) mdc (10, 15, 20) = 5
c) mdc (42, 70) = 14
d) mdc (60, 220) = 20
e) mdc (420, 4 200, 4 410) = 210
f) mdc (180, 240, 750) = 30

8. 60 dias.

9. 70 minutos.

10. Ele deverá comprar 2 pacotes de lacinhos e 3 pacotes de prendedores.

11. C

12. A

13. D

14. B

15. D

16. C

Capítulo 4 – Produtos notáveis e fatoração

1. a) $2x + 6y$
b) $4x^2 - 8xy$
c) $-2x^3 + 2x^2y$
d) $3x^3y^2 - 3x^2y^2$
e) $-12x^4y^7z^2 + 18x^3y^6z^5 + 24x^5y^5z^5$
f) $ax + 2bx + ay + 2by$
g) $x^2 + 2xy + y^2$
h) $2x^2y^3 - 2x^3y^3 - 3y^2 + 3xy^2$

2. a) $x^2 + 2xy + y^2$

b) $4x^2 + 4x + 1$

c) $16a^2 - 24ac + 9c^2$

d) $25x^2y^2 + 10xyz + z^2$

e) $x^2 - 18x + 81$

f) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

g) $\frac{x^2}{4} + xy + y^2$

h) $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$

i) $6 - 2\sqrt{5}$

j) $x^2 - 1$

k) $4x^2 - 9$

l) $x^6 - y^4$

m) $-\frac{1}{2}$

n) $4x^2 - 12x + 9$

o) $16 - 4y^2$

3. a) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

b) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

c) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

d) $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$

e) $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

f) $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 +$
$+ 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + 6xyz$

g) $x^3 + y^3 - z^3 + 3x^2y - 3x^2z +$
$+ 3xy^2 - 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 - 6xyz$

h) $8x^3 + y^3 - 27z^3 + 12x^2y - 36x^2z +$
$+ 6xy^2 - 9y^2z + 54xz^2 + 27yz^2 - 36xyz$

i) $27x^6 - 8y^3 - 125z^9 - 54x^4y -$
$- 135x^4z^3 + 36x^2y^2 - 60y^2z^3 +$
$+ 225x^2z^6 - 150yz^6 + 180x^2yz^3$

4. a) $2(2x + 3y)$

b) $2x(x + 3)$

c) $3xy(x - 3)$

d) $6x^2y(xy + 2y^3 - 3x)$

e) $12ab^3c^3(2a^5c - a^3b^2 + 4bc^2)$

f) $2x^2(2 + 3x^2 - 6x + 4x^4)$

g) $8b^2c^4(a^2bc^2 - 2)$

h) $(x - y)(a + b)$

i) $(x - y)(3 + a)$

j) $(1 + y)(x + y)$

k) $(a + 1)(a^2 + 1)$

l) $(x + y)(a - b)$

m) $(3x - 2y)(2x - 3z)$

5. a) $(x - 5)^2$

b) $(x + 8)^2$

c) $(x + 11)^2$

d) $(x - 1)^2$

e) $(3x + 4)^2$

f) $3(x - 7)^2$

g) $4(x - y)^2$

h) $x(x + 6)^2$

i) $2x^2(x + 3)^2$

j) $(x - 1)(x + 2)$

k) $(x - 2)(x - 8)$

l) $2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

m) $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2)$

n) $(a + b)(a - b)$

o) $(5a + b)(5a - b)$

p) $4(x + 4)(x - 4)$

q) $2(x + 2y)(x - 2y)$

r) $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

s) $(4a^2 + 9b^2)(2a + 3b)(2a - 3b)$

6. a) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

b) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

c) $(2z + 5)(4z^2 - 10z + 25)$

d) $(k^2 - 10)(k^4 + 10k^2 + 100)$

7. a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{a + 3b}$

c) $\frac{x + 1}{x - 1}$

d) $\frac{x - 2}{x - y}$

e) $\frac{x^2 - xy + y^2}{x + y}$

f) $\frac{(x + 7)(x - 1)}{x - 7}$

g) $\frac{1}{x + y}$

8. E

Capítulo 5 – Equação do 1º grau e equação do 2º grau

1. a) $S = \varnothing$

b) $S = \{-17\}$

c) $S = \{23\}$

d) $S = \{-48\}$

e) $S = \varnothing$

2. a) $S = \{8\}$

b) $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

c) $S = \{30\}$

d) $S = \left\{\frac{34}{19}\right\}$

e) $S = \{-1\}$

f) $S = \left\{\frac{49}{11}\right\}$

g) $S = \left\{\frac{40}{19}\right\}$

h) $S = \left\{-\frac{19}{41}\right\}$

3. a) $S = \{(3, 2)\}$

b) $S = \{(0, 4)\}$

c) $S = \{(6, -1)\}$

d) $S = \left\{\left(\frac{27}{17}, -\frac{1}{17}\right)\right\}$

e) $S = \left\{\left(-\frac{21}{13}, \frac{48}{13}\right)\right\}$

4. B

5. B

6. A

7. D

8. B

9. D

10. E

11. a) $S = \{\pm 4\}$

b) $S = \{\pm 11\}$

c) $S = \{\pm 3\}$

d) $S = \{\pm 2\sqrt{5}\}$

e) $S = \{\pm\sqrt{2}\}$

f) $S = \varnothing$

g) $S = \{0, 1\}$

h) $S = \left\{0, \frac{5}{2}\right\}$

i) $S = \{0, -7\}$

j) $S = \left\{0, \frac{1}{4}\right\}$

k) $S = \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$

12. a) $S = \{-2, -4\}$

b) $S = \{-3, 4\}$

c) $S = \{-5\}$

d) $S = \{-2, 1\}$

e) $S = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$

f) $S = \varnothing$

g) $S = \{1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}\}$

h) $S = \{-1\}$

i) $S = \left\{2 - \frac{\sqrt{10}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$

j) $S = \varnothing$

13. $k = \pm 6\sqrt{2}$

14. a) $S = \{6, 7\}$

b) $S = \{2, 5\}$

c) $S = \{-3, 4\}$

d) $S = \{-3, 13\}$

e) $S = \{10, 12\}$

f) $S = \{-1\}$

g) $S = \{8\}$

h) $S = \{-5, 3\}$

15. a) -5

b) -3

c) $\frac{5}{3}$

16. B

17. a) $S = \{4\}$

b) $S = \{54\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \{4\}$

e) $S = \{4\}$

f) $S = \{2\}$

18. a) $S = \{\pm 1\}$

b) $S = \{\pm 2, \pm 4\}$

c) $S = \{\pm\sqrt{7}\}$

d) $S = \{\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{5}\}$

e) $S = \{2, 1\}$

f) $S = \{-2, 1\}$

g) $S = \{\sqrt[3]{5}, 1\}$

Capítulo 6 – Razão e proporção

1. 8 questões.

2. 60 pares de sapato de adulto.

3. $\frac{5}{9}$

4. A
5. D
6. B
7. A
8. D
9. D
10. B
11. B
12. B
13. A
14. D
15. 15 trabalhadores.
16. D
17. B
18. a) 512, 320 e 448.
    b) 320, 800 e 160.
19. B
20. A
21. C
22. a) 0,32
    b) 0,1
    c) 0,123
    d) 0,000034
    e) 1,5
    f) 3
    g) 89%
    h) 30%
    i) 3%
    j) 120%
    k) 500%
    l) 0,2%
23. a) 50%
    b) 1%
24. D
25. D
26. A
27. D
28. C
29. B
30. a) 705 000 *pizzas*.
    b) Serão consumidas 278 250 de mozarela e 198 750 de calabresa.
31. a) Escola A.
    b) R$ 3 564,00.
32. E
33. B
34. A
35. E
36. A

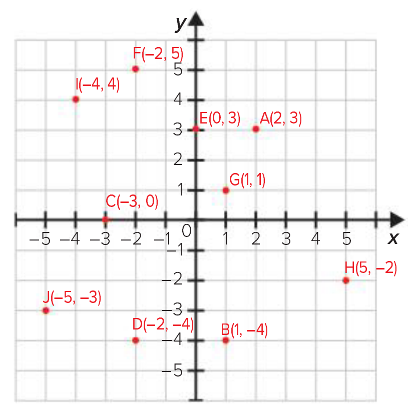
Capítulo 7 – Triângulos retângulos

1. a) $x = 10$
   b) $x = 25$
   c) $y = 2\sqrt{7}$
   d) $z = 12$
   e) $x = \sqrt{194}$
   f) $z = \sqrt{3}$
   g) $y = 2$
2. 10 cm.
3. $2\sqrt{2}$ cm.
4. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.
5. $2\sqrt{3}$ cm.
6. D
7. B
8. $\frac{39}{16}$ m.
9. 105 m.
10. $x = \sqrt{5}$
11. $\text{sen}(\alpha) = \frac{5}{13}$, $\cos(\alpha) = \frac{12}{13}$ e $\text{tg}(\alpha) = \frac{5}{12}$.

    $\text{sen}(\beta) = \frac{12}{13}$, $\cos(\beta) = \frac{5}{13}$ e $\text{tg}(\beta) = \frac{12}{5}$.
12. $y = 7{,}37$ e $x = 2{,}21$.
13. E
14. C
15. C
16. B
17. A
18. B
19. A
20. B

Capítulo 8 – Plano cartesiano, gráficos e relações

1.



2. A(2, 4) – I Quadrante.
   B(−5, 5) – II Quadrante.
   C(−3, 2) – II Quadrante.
   D(−4, 0) – Eixo das abscissas.
   E(−5, −3) – III Quadrante.
   F(−2, −2) – III Quadrante.
   G(0, −4) – Eixo das ordenadas.
   H(2, −3) – IV Quadrante.
   I(5, −1) – IV Quadrante.
   J(3, 0) – Eixo das abscissas.
   K(1, 1) – I Quadrante.
   O(0, 0) – Eixo das abscissas e das ordenadas.
3. $-4 < x < 0$
4. P(−15, −15)
5. a) 5 u.c.
   b) 2 u.c.
   c) $2\sqrt{10}$ u.c.
   d) $\sqrt{10}$ u.c.
   e) 13 u.c.
6. A
7. C
8. A
9. E
10. a) A ordenada do ponto E é $h = 17$.
    b) As coordenadas da provável fonte do óleo são $P(8 + 8\sqrt{2}, 10)$.
11. B
12. E
13. A
14. A
15. A
16. D
17. D
18. C
19. D

Capítulo 9 – Sistema métrico e conversão de unidades

1. a) 0,0373 km
   b) 45 000 cm
   c) 100 mm
   d) 124,601 hm
   e) 1 km
   f) 5 207 000 mL
   g) 0,0045 L
   h) 0,012 L
   i) 23 mL
   j) 12 000 g
   k) 1 305 000 mg
   l) 1,001 kg
   m) 0,0002 g
   n) 0,135 t
2. a) 100 000 cm^2
   b) 0,000012 dam^2
   c) 420 000 dm^2
   d) 100 m^2
   e) 0,01 km^2
   f) 0,00014 ha
   g) 2 400 000 dam^2
   h) 12 000 mm^2
   i) 790 dam^2
   j) 4,84 km^2
3. a) 5 000 dm^3
   b) 3,9 cm^3
   c) 12 000 L
   d) 45 mL
   e) 47 000 cm^3
   f) 1,2 dm^3
   g) 0,567 m^3
   h) 0,2 m^3
   i) 37 500 L
   j) 9,5 L
4. a) 305 K
   b) 27 °C
   c) 173 K
   d) −273 °C
   e) 80,6 °F
   f) 40 °C
   g) 64,4 °F
   h) 293 K
   i) 100 °C
   j) 248 °F
5. a) 72 km/h
   b) 10 m/s
   c) 61,2 km/h
   d) 30 m/s
   e) 45 km/h
   f) 0,5 m/s
   g) 1 km/min
   h) 7,2 km/min
   i) 500 m/min
   j) 21,6 km/h
6. D
7. C
8. B
9. A
10. B
11. B
12. C