Coleção Pré-Vestibular

Elaborado de acordo com as matrizes do ENEM

MATEMÁTICA

Matemática e suas Tecnologias

Matemática 1

Módulo 1: Frações 1
Módulo 2: Sistema métrico decimal 5
Módulo 3: Problemas com equações do 1º e 2º graus com uma e duas variáveis 9

Matemática 2

Módulo 1: Geometria Plana I 13
Módulo 2: Geometria Plana II 21
Módulo 3: Geometria Plana III 29

Matemática 3

Módulo 1: Teoria dos conjuntos; Operações e problemas envolvendo conjuntos; Leis de De Morgan 36
Módulo 2: Conjuntos numéricos; Relação binária; Conceito de função 43
Módulo 3: Domínio, contradomínio e imagem de uma função; Função afim 53

Matemática 4

Módulo 1: Análise de dados I – Noções de estatística 59
Módulo 2: Análise de dados – Interpretação de gráficos: linhas, colunas, setores, histograma, polígono de frequência, cartograma e pictograma 64
Módulo 3: Medidas de tendência central – Média 72

Matemática 5

Módulo 1: Trigonometria I 76
Módulo 2: Trigonometria II 83
Módulo 3: Trigonometria III 91

Neste livro:

Módulo 1: Frações 1
Módulo 2: Sistema métrico decimal 5
Módulo 3: Problemas com equações do 1º e 2º graus com uma e duas variáveis 9

Conhecimentos numéricos

C	1
H	1,3

Módulo 1 — Frações

Observe os seguintes textos:

"Teatro do Jockey (150 lugares). Rua Mario Ribeiro, 410, Gávea. Estacionamento: R$ 4,00 por uma hora, mais R$ 3,00 a **fração**."

Disponível em: <http://vejario.abril.com.br>. Acesso em: 16 jun. 2015.

"— É uma doença enorme que vai se tornar ainda maior, entretanto, recebe somente uma minúscula **fração** do orçamento dos Institutos Nacionais de Saúde – disse Aucott."

Disponível em: <http://www.zh.clicrbs.com.br>. Acesso em: 16 jun. 2015.

"Em praticamente metade deles, a coleta seletiva de resíduos sólidos (a chamada **fração** seca) é feita pela própria prefeitura."

Disponível em: <http://noticias.terra.com.br>. Acesso em: 16 jun. 2015.

Como é possível notar nos exemplos dados, as frações estão mais presentes no cotidiano do que se imagina. Apesar de o estudo das frações ser iniciado ainda no Ensino Fundamental, ele continua sendo de suma importância como ferramenta para o resto da vida.

Fração é uma forma matemática de se referir a pedaços, a partes, a coisas inteiras ou não inteiras. Tão importante quanto saber que uma fração possui um numerador e um denominador, e, a partir disso, classificá-las em próprias (numerador menor que o denominador) ou impróprias (numerador maior que o denominador), é essencial saber transformar informações de situações-problema em expressões ou equações que façam chegar a uma conclusão plausível.

Será dispensada, ao longo da teoria, uma descrição dos procedimentos de cálculos com frações (adição, subtração, multiplicação e divisão), pois eles serão relembrados por meio dos exercícios selecionados a seguir.

Exercícios resolvidos

1. Uma garrafa está cheia de uma mistura, na qual $\frac{2}{3}$ do conteúdo é composto pelo produto A e $\frac{1}{3}$ pelo produto B. Uma segunda garrafa, com o dobro da capacidade da primeira, está cheia de uma mistura dos mesmos produtos da primeira garrafa, sendo agora $\frac{3}{5}$ do conteúdo composto pelo produto A e $\frac{2}{5}$ pelo produto B. O conteúdo das duas garrafas é derramado em uma terceira garrafa, com o triplo da capacidade da primeira. Que fração do conteúdo da terceira garrafa corresponde ao produto A?

a) $\frac{10}{15}$ b) $\frac{5}{15}$ c) $\frac{28}{45}$ d) $\frac{17}{45}$ e) $\frac{3}{8}$

Resolução:

Primeira garrafa (x L) $\Rightarrow \frac{2}{3}x$ do produto A

Segunda garrafa (2x L) $\Rightarrow \frac{3}{5}2x = \frac{6}{5}x$ do produto A

Juntas (3x L) $\Rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{6}{5}x = \frac{28}{15}x$

Fração do produto A = $\dfrac{\frac{28x}{15}}{3x} = \frac{28}{45}$

Resposta: C

2. Uma herança foi distribuída entre quatro irmãos. Ao primeiro, coube $\frac{2}{3}$ do total, ao segundo, $\frac{3}{4}$ do restante, ao terceiro, $\frac{1}{33}$ da soma das partes dos dois primeiros e ao quarto, R$ 15 000,00. Quanto coube, em reais, ao herdeiro que recebeu a menor quantia?

a) 18 000,00
b) 6 750,00
c) 15 000,00
d) 7 500,00
e) 5 000,00

Resolução:

Se o primeiro herdeiro ficou com $\frac{2}{3}$ do total da herança, sobrou $\frac{1}{3}$.

Se o segundo herdeiro ficou com $\frac{3}{4}$ do restante, ele ficou com a fração $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.

Se o terceiro ficou com $\frac{1}{33}$ da soma das partes, ele ficou com a fração $\frac{1}{33} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{33} \cdot \frac{11}{12} = \frac{1}{36}$ do total.

Já foram distribuídos $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36} = \frac{34}{36}$.

A fração que coube ao quarto herdeiro foi $\frac{2}{36}$, que corresponde a R$ 15 000,00. Portanto, a herança total somava R$ 270 000,00.

Dessa forma:

Ao primeiro, coube: $\frac{2}{3} \cdot 270000 = 180000$

Ao segundo, coube: $\frac{1}{4} \cdot 270000 = 67500$

Ao terceiro, coube: $\frac{1}{36} \cdot 270000 = 7500$

Ao quarto, como foi dito no enunciado, coube R$ 15 000.

Resposta: D

3. Em uma empresa de auditoria, há duas máquinas trituradoras de papel, cuja função é fragmentar os documentos descartados todas as semanas nos escritórios da empresa. O volume de papel descartado semanalmente é sempre o mesmo e as duas máquinas levam juntas, trabalhando sem interrupções, 20 horas para fragmentar todos os documentos. Cada uma das máquinas precisou ficar parada para manutenção durante uma semana, na qual todo o papel foi triturado apenas pela outra. Percebeu-se que as máquinas não têm rendimento igual e que a mais rápida levou 9 horas a menos que a mais lenta para fazer a fragmentação. O tempo que a mais lenta levou para triturar todo o papel sozinha é igual a

a) 41 horas.
b) 43 horas.
c) 45 horas.
d) 47 horas.
e) 49 horas.

Resolução:

Sendo T_1 o tempo gasto (em horas) pela máquina mais lenta para triturar todo o papel, o tempo gasto pela máquina mais rápida será $T_1 - 9$.

Da relação de rendimento, tem-se:

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_1 - 9} = \frac{1}{20} \Rightarrow T_1^2 - 49T_1 + 180 = 0 \begin{cases} T_1 = 45 \\ \text{ou} \\ T_1 = 4 \\ \text{(não convém)} \end{cases}$$

Logo, $T_1 = 45$ horas

Resposta: C

4. Terno pitagórico é a denominação para os três números inteiros que representam as medidas, com a mesma unidade, dos três lados de um triângulo retângulo.

Um terno pitagórico pode ser gerado da seguinte forma:

- escolhem-se dois números pares consecutivos ou dois números ímpares consecutivos;
- calcula-se a soma de seus inversos, obtendo-se uma fração cujo numerador e denominador representam as medidas dos catetos de um triângulo retângulo;
- calcula-se a hipotenusa.

Utilizando o procedimento descrito, as medidas dos três lados de um triângulo retângulo, considerando os números pares 4 e 6, será

a) 7. b) 9. c) 11. d) 13. e) 15.

Resolução:

Sejam **a**, **b** e **c**, respectivamente, a hipotenusa e os catetos do triângulo procurado, de acordo com o enunciado, tem-se: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$. De onde b = 5 e c = 12.

Logo, $a = \sqrt{25 + 144} = 13$.

Resposta: D

5. A professora de Matemática de minha filha pediu que ela fizesse uma pesquisa informativa sobre os moradores do bairro em que moramos. Feita a pesquisa, concluiu-se que: $\frac{1}{2}$ dos moradores são menores de 18 anos e $\frac{1}{2}$ dos restantes são homens adultos. Se as mulheres adultas residentes nesse bairro são 130, determine o número de moradores do bairro.

a) 130 b) 260 c) 390 d) 520 e) 680

Resolução:

Menores de 18 anos: $\frac{1}{2}x$

Homens: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x = 130 \Rightarrow x = 520$

Resposta: D

Atividades para sala

1. Um *pet shop* realizou uma pesquisa com 60 clientes a fim de avaliar seu nível de satisfação em relação aos serviços prestados. As respostas dos clientes encontram-se expressas na tabela a seguir.

Serviço	Nível de satisfação			
	Muito satisfeito	Satisfeito	Pouco satisfeito	Insatisfeito
Banho	15	21	18	6
Tosa	28	16	12	4
Hospedagem	12	15	23	10

Pode-se afirmar que

a) $\frac{1}{6}$ dos clientes respondeu que está insatisfeito com o serviço "banho".

b) $\frac{7}{15}$ dos clientes responderam que estão muito satisfeitos ou satisfeitos com o serviço "tosa".

c) $\frac{1}{5}$ dos clientes respondeu que está pouco satisfeito com o serviço "tosa".

d) $\frac{1}{8}$ dos clientes respondeu que está satisfeito com o serviço "hospedagem".

e) $\frac{1}{10}$ dos clientes respondeu que está insatisfeito com o serviço "hospedagem".

2. Duas serpentes, enroladas em uma torre de 63 m de altura, movimentam-se, a cada dia, de acordo com o relatório de um observador. No primeiro dia, pela manhã, a serpente que está no topo desce $\frac{2}{3}$ m e sobe $\frac{3}{5}$ m. Em seguida, fica em repouso. À tarde, a serpente que está na base sobe $\frac{5}{6}$ m e desce $\frac{3}{8}$ m, permanecendo, em seguida, em repouso.

Toda noite, o observador mede a distância entre as duas. Verificando que seus deslocamentos se repetem dia após dia, como relatado anteriormente, quantos dias são necessários para que o observador comprove o encontro entre as duas?

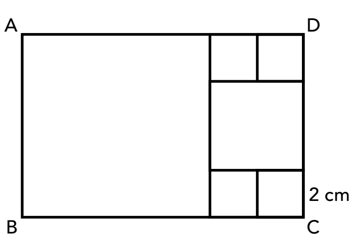
a) 110
b) 120
c) 130
d) 140
e) 150

3. Doze amigas resolveram alugar uma casa de praia para passar uma temporada. Metade do aluguel foi pago no dia da assinatura do contrato de aluguel, sendo o valor divido igualmente entre todas as doze amigas. O restante deveria ser pago no dia em que chegassem à casa; porém, no dia do passeio, três amigas desistiram. O restante do valor do aluguel teve, então, de ser dividido igualmente apenas entre aquelas que compareceram.

A fração do valor total do aluguel pago por cada uma das amigas que compareceu é

a) $\frac{7}{72}$.
b) $\frac{1}{18}$.
c) $\frac{1}{24}$.
d) $\frac{1}{6}$.
e) $\frac{2}{9}$.

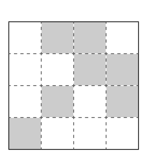
4. O retângulo ABCD está decomposto em quadrados, sendo que o menor deles possui lado igual a 2 cm.



Qual a fração que representa o quociente entre as dimensões dos lados AD e AB?

a) $\frac{96}{1}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{6}{2}$
d) $\frac{4}{2}$
e) $\frac{2}{3}$

5. Na figura a seguir está representada uma lajota.



Qual fração da lajota está representada com o sombreado?

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{7}{9}$
c) $\frac{9}{7}$
d) $\frac{7}{16}$
e) $\frac{3}{8}$

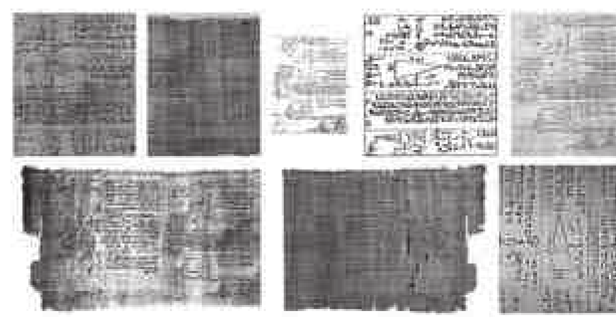
6. No início de certa rodada de um jogo disputado apenas entre Marcos e Lucas, Marcos tinha $\frac{2}{5}$ do número total de fichas, e Lucas tinha a quantidade restante. No final dessa rodada, Marcos tinha $\frac{1}{4}$ do número total de fichas, e Lucas tinha a quantidade restante. Se, nessa rodada, Marcos perdeu 9 fichas, então o número de fichas de Lucas, no final dessa rodada, era igual a

a) 45.
b) 40.
c) 36.
d) 34.
e) 31.

Atividades propostas

1. Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., no qual um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculos de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria. É um dos mais famosos e antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, juntamente com o Papiro de Moscou.

Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Rhind>. Acesso em: 17 nov. 2012.



No papiro de Rhind, entre outras informações, encontra-se a expansão de frações como soma de outras frações de numerador 1, por exemplo, $\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}$. Nessa expressão, o valor de **x** é igual a

a) 345.
b) 350.
c) 355.
d) 360.
e) 365.

2. Larissa fez uma viagem de 1 210 km, até chegar à fazenda de seu avô. A viagem foi feita da seguinte forma: $\frac{7}{11}$ do percurso, de avião; $\frac{2}{5}$ do resto, de trem; a seguir, $\frac{3}{8}$ do que restou, de ônibus; e os demais quilômetros, de carro com tração nas quatro rodas, pois não se chega em carro com tração em duas rodas à fazenda, em época de chuva. Calcule quantos quilômetros ela percorreu de carro com tração nas quatro rodas.

a) 135
b) 145
c) 155
d) 165
e) 175

3. Um professor de Matemática do 6º ano de uma escola resolveu organizar uma maratona de Matemática composta de três fases. Sobre o desempenho dos 48 alunos inscritos nessa atividade, considere as seguintes afirmações:

I. $\frac{1}{6}$ dos alunos inscritos não obteve a pontuação necessária para realizar a segunda fase;
II. 0,7 dos alunos que participaram da segunda fase foram classificados para a terceira fase;
III. 25% dos alunos que participaram da terceira fase não conseguiram concluí-la.

Com base nessas informações, pode-se afirmar que o número de alunos que completou as três fases da maratona foi

a) 7. b) 14. c) 21. d) 35. e) 40.

4. Um assalariado de determinada cidade recebe líquido, ou seja, após os descontos, um salário de 520 reais por mês. Dessa quantia, gasta $\frac{1}{4}$ com aluguel e $\frac{2}{5}$ com alimentação da família. Este mês ele teve uma despesa extra: $\frac{3}{8}$ do seu salário foram gastos com remédios, extrapolando o seu orçamento e, consequentemente, fazendo com que ele pedisse um adiantamento. Qual a fração do salário que ele extrapolou?

a) $\frac{41}{40}$ b) $\frac{3}{40}$ c) $\frac{3}{20}$ d) $\frac{1}{40}$ e) $\frac{7}{40}$

5. Em um concurso para um colégio militar de certa cidade, foram abertas 30 vagas para o 5º ano do Ensino Fundamental e 10 vagas para a 1ª série do Ensino Médio. Houve 900 inscrições para o 5º ano e a terça parte desse valor foi o total de inscritos para a 1ª série. Então,

a) houve 20 candidatos por vaga para o 5º ano.
b) houve 15 candidatos por vaga para a 1ª série.
c) a concorrência para o 5º ano foi maior que a concorrência para a 1ª série.
d) a concorrência para a 1ª série foi de 20 candidatos por vaga.
e) a concorrência para o 5º ano foi igual à concorrência para a 1ª série.

6. Para ir com Maria ao cinema, João pode escolher dois caminhos. No primeiro, ele passa pela casa de Maria e os dois vão juntos até o cinema; nesse caso, ele anda sozinho $\frac{2}{3}$ do caminho. No segundo, ele vai sozinho e encontra Maria na frente do cinema; nesse caso, ele anda 1 km a menos que no primeiro caminho, mas o dobro do que Maria terá que caminhar. Qual é a distância entre a casa de Maria e o cinema?

a) 1 km b) 2 km c) 3 km d) 4 km e) 6 km

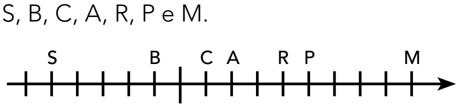
7. Um reservatório tem uma torneira capaz de enchê-lo em 2 horas e outra em 4 horas. Com as duas torneiras abertas ao mesmo tempo, no fim de quanto tempo o reservatório estará cheio?

a) $\frac{2}{3}$ da hora. c) $\frac{4}{3}$ da hora. e) $\frac{8}{3}$ da hora.
b) 120 minutos. d) 360 minutos.

8. Um produtor de café embalou, para venda no varejo, 3 750 kg de sua produção. Metade desse café foi distribuído em sacos com capacidade de $\frac{3}{4}$ de quilograma cada. Determine quantos sacos foram usados.

a) 1 500 b) 1 800 c) 2 000 d) 2 500 e) 3 000

9. Observe a reta numérica, na qual estão destacados os pontos S, B, C, A, R, P e M.



Os números racionais $-1\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$ estão representados na reta numérica, respectivamente, pelos pontos

a) B e A. b) S e R. c) R e P. d) B e P. e) S e P.

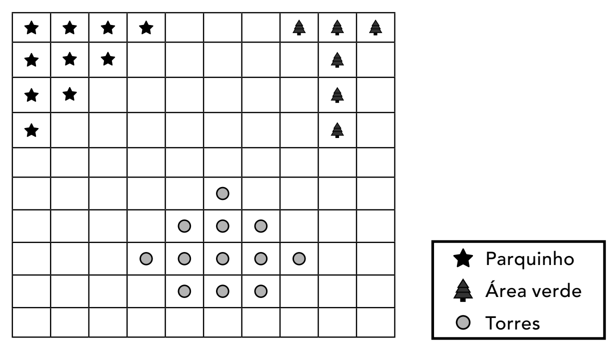
10. Uma escola tem 4 classes de 9º ano, todas com o mesmo número de alunos. Em um determinado dia, por causa de uma greve nos transportes coletivos, constatou-se que:

- na classe A, $\frac{2}{5}$ dos alunos faltaram;
- na classe B, 40% dos alunos faltaram;
- na classe C, de cada 5 alunos, 2 estavam presentes;
- na classe D, $\frac{6}{10}$ dos alunos estavam presentes.

Desse modo, é correto afirmar que as classes do 9º ano que tiveram números iguais de faltas nesse dia foram, apenas,

a) A e B. c) A, B e D. e) B e C.
b) A e D. d) B, C e D.

11. A figura a seguir representa o terreno de um grande condomínio.



É correto afirmar que

a) $\frac{1}{5}$ do terreno corresponde ao parquinho, $\frac{4}{25}$ correspondem às torres e $\frac{3}{25}$ correspondem à área verde.

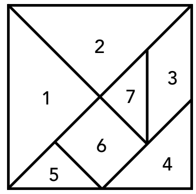
b) $\frac{3}{10}$ do terreno correspondem ao parquinho, $\frac{3}{20}$ correspondem às torres e $\frac{5}{12}$ correspondem à área verde.

c) $\frac{2}{5}$ do terreno correspondem ao parquinho, $\frac{4}{35}$ correspondem às torres e $\frac{3}{10}$ correspondem à área verde.

d) $\frac{1}{10}$ do terreno corresponde ao parquinho, $\frac{3}{25}$ correspondem às torres e $\frac{3}{50}$ correspondem à área verde.

e) $\frac{2}{5}$ do terreno correspondem ao parquinho, $\frac{6}{25}$ correspondem às torres e $\frac{4}{25}$ correspondem à área verde.

12. O Tangram é um quebra-cabeça chinês antigo. O nome significa "7 tábuas da sabedoria". Ele é composto por sete peças, chamadas de *tans*, que podem ser posicionadas de maneira a formar um quadrado.



Nesse jogo, não é permitido sobrepor peças. Considerando que o Tangram da figura representa a unidade, a forma decimal da fração que representa a soma das áreas das peças 5, 6 e 7 é

a) 0,0625.
b) 0,1250.
c) 0,2000.
d) 0,2500.
e) 0,5000.

Conhecimentos numéricos

C 3

H 10,11,12,13

Módulo 2

Sistema métrico decimal

Você já imaginou o tamanho do problema que seria se uma pessoa não soubesse a relação entre grandezas e tivesse que aplicar em um paciente uma dose de 10 mL a cada 12 horas de um determinado remédio, cuja bula orientasse a utilizar uma seringa graduada em mm^3?

Trabalhar com sistema métrico decimal é algo tão cotidiano que o conhecimento dessa ferramenta se torna quase obrigatório. No Brasil, a unidade fundamental de medida é o **metro**. O sistema de medidas é uma tentativa de padronização mundial para medição de massas, comprimentos, volumes, áreas etc. Registros históricos mostram que os povos criavam seus métodos particulares de medição. Os avanços comerciais, contudo, impediam a coexistência de uma grande diversidade de sistemas de medidas. Dessa forma, foi necessário que se adotasse um "sistema padrão" de medidas em suas respectivas grandezas.

Data de 1971 o início das discussões com vários representantes mundiais para estabelecer um consenso na adoção de um sistema de medidas único, que, dessa forma, viabilizaria a troca de informações entre os povos dos mais diferentes lugares do mundo. Ao resultado desse processo, denominou-se **sistema métrico decimal**.

O termo **metro** tem origem na palavra grega *métron*, que significa "o que mede". Estabeleceu-se, no princípio, que a medida do metro seria a décima milionésima parte da distância entre o Polo Norte e o Equador, medida pelo meridiano que passa pela cidade francesa de Paris. O metro padrão foi criado no ano de 1799 e hoje é baseado no espaço percorrido pela luz no vácuo em um determinado período de tempo $\left(\frac{1}{299\,792\,458}\text{ s}\right)$.

Unidades de medidas e suas relações de transformação

Medidas de comprimento

× 10

km hm dam m dm cm mm

÷10

Medidas de superfície

× 100

km^2 hm^2 dam^2 m^2 dm^2 cm^2 mm^2

÷100

Medidas agrárias

hectare (ha) = hm^2 are (a) = dam^2 centiare (ca) = m^2

Medidas de volume

× 1000

km^3 hm^3 dam^3 m^3 dm^3 cm^3 mm^3

÷1000

Medidas de capacidade

× 10

kL hL daL L dL cL mL

÷10

Medidas de massa

× 10

kg hg dag g dg cg mg

÷10

Medidas de tempo

1 hora = 60 minutos = 3600 segundos
1 minuto = 60 segundos

Tome nota

Os múltiplos do metro são usados para realizar medição em grandes áreas/distâncias; e os submúltiplos, para realizar medição em pequenas distâncias. No caso de haver necessidade de fazer medições milimétricas, em que a precisão é fundamental, podem ser utilizadas as seguintes unidades:

Mícron (μ) = 10^{-6} m
Angstrom (Å) = 10^{-10} m

No caso de haver necessidade de fazer medições astronômicas, pode-se utilizar a seguinte medição:

Ano-luz = $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km

Ano-luz é a distância percorrida pela luz em um ano, com uma velocidade, no vácuo, de 300000 km/s.

Leitura complementar

Ser ou não uma nanopartícula, eis a questão

Pesquisadores defendem revisão do conceito de nanopartícula para levar em conta propriedades, e não apenas tamanho

As mesmas propriedades das nanopartículas que as tornam tão valiosas ao setor industrial podem, como indicam diversos cientistas, prejudicar o meio ambiente e a saúde humana.

O que é uma nanopartícula?

Pouco se sabe a respeito de quais partículas poderiam ser, de fato, danosas. Parte do problema tem a ver com a definição: o que exatamente é uma nanopartícula?

Um novo estudo feito por um grupo internacional de pesquisadores ligados ao Centro de Implicações Ambientais da Nanotecnologia (CEINT, na sigla em inglês), sediado na Universidade Duke, nos Estados Unidos, defende uma nova abordagem na maneira como as nanopartículas são selecionadas.

Os cientistas analisaram impactos potenciais à saúde e ao ambiente e verificaram que muitas das pequenas partículas chamadas de **nano** não poderiam ser enquadradas nessa categoria por não contarem com propriedades especiais que as tornem diferentes de materiais brutos.

A definição mais usada atualmente estipula que uma partícula é nano se o seu diâmetro estiver entre 1 e 100 nanômetros – 1 nanômetro equivale a 1 bilionésimo de metro.

Propriedades das nanopartículas

As propriedades especiais das nanopartículas derivam de sua elevada proporção entre área superficial e seu volume. Elas também têm uma porcentagem consideravelmente mais alta de átomos em sua superfície quando comparadas com partículas maiores, o que pode torná-las mais reativas.

Produzidas pelo homem, as nanopartículas têm sido empregadas em um grande número de produtos de consumo, como tintas, filtros solares, medicamentos e materiais esportivos.

Há vários anos, as discussões sobre as nanopartículas tendem a considerá-las muito mais com relação ao seu tamanho do que às suas propriedades. Entretanto, os autores do estudo sugerem que a definição atual não é específica o suficiente.

Uma definição que se baseie em propriedades, apontam, é fundamental para ajudar os cientistas a determinar exatamente quais nanopartículas são as mais propensas a representar riscos à saúde humana e ao meio ambiente.

Menores dentre as menores

Segundo Mark Wiesner, professor da Universidade Duke e um dos autores do estudo, são as partículas menores (com até 30 nanômetros) que devem receber a maior atenção no estudo do impacto do uso de nanomateriais.

Partículas maiores teriam menos propriedades especiais que as menores.

"Muitas nanopartículas com menos de 30 nanômetros passam por alterações drásticas em suas estruturas cristalinas que ampliam a forma com que os átomos em sua superfície interagem com o ambiente", disse.

"Como há um número infinito de nanopartículas que podem ser produzidas pelo homem, temos que descobrir uma maneira de restringir nossos esforços naquelas que têm maiores chances de contar com determinadas propriedades e potenciais efeitos", destacou.

Disponível em: <http://www.inovacaotecnologica.com.br>.

Exercícios resolvidos

1. Um queijo foi partido em quatro pedaços de mesmo peso. Três desses pedaços pesam o mesmo que um pedaço mais um peso de 0,8 kg. Qual era o peso do queijo inteiro?

a) 1,2 kg
b) 1,5 kg
c) 1,6 kg
d) 1,8 kg
e) 2,4 kg

Resolução:
Ao tirar um pedaço de queijo de cada um dos pratos da balança, ela continua equilibrada, pois todos os pedaços têm o mesmo peso. Logo, dois pedaços de queijo pesam 0,8 kg; como o queijo foi partido em quatro pedaços, conclui-se que o queijo inteiro pesa $2 \cdot 0,8 = 1,6$ kg.
Resposta: C

2. Quantos copos de 130 mililitros é possível encher, até a borda, com dois litros de água?

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

Resolução:
Observa-se que 2 litros equivalem a 2000 mililitros. Como $2000 = 15 \cdot 130 + 50$, é possível encher completamente 15 copos de 130 mililitros e ainda restam 50 mililitros na jarra.
Resposta: E

3. Um dia sideral corresponde ao tempo necessário para que a Terra complete uma rotação em torno do seu eixo relativo a uma estrela fixa no espaço sideral, possibilitando aferir um tempo de aproximadamente 23,93447 horas. O dia solar médio é o tempo correspondente a uma rotação da Terra, em que se vê o Sol voltar à sua posição no céu após um tempo de 24 horas. A diferença entre o dia sideral e o dia solar médio é de

a) 3 minutos e 45 segundos.
b) 6 minutos e 55 segundos.
c) 6 minutos e 56 segundos.
d) 3 minutos e 56 segundos.
e) 3 minutos e 30 segundos.

Resolução:
$24 - 23,93447 = 0,06553$ horas
$0,06553 \cdot 60 = 3,93$ minutos $= 3$ minutos
$0,93 \cdot 60$ segundos $= 56$ segundos
Logo, a diferença é de 3 minutos e 56 segundos.
Resposta: D

4. O nanômetro é a unidade de medida de comprimento usada em nanotecnologia (*nano* vem do grego e significa anão). Sabe-se que um metro equivale a um bilhão de nanômetros. Considerando o diâmetro da Terra com 13000 quilômetros, conclui-se que a medida do diâmetro da terra, em nanômetro, é igual a

a) $1,3 \cdot 10^{16}$.
b) $1,3 \cdot 10^{-16}$.
c) $1,3 \cdot 10^{-9}$.
d) $1,3 \cdot 10^{9}$.
e) $1,3 \cdot 10^{4}$.

Resolução:
Se 1 m = 1000000000 nm e 1 km = 1000 m, então 13000 km = 13000000 m = $1,3 \cdot 10^7 \cdot 10^9$ nm = $1,3 \cdot 10^{16}$ nm.
Resposta: A

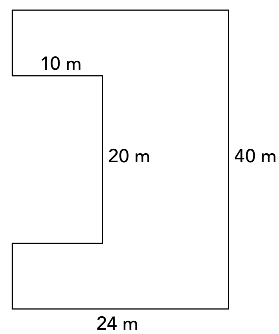
5. A distância entre duas determinadas cidades é de 90 km. Sabendo-se que a légua é uma unidade de medida correspondente a 6 km, a distância, em léguas, entre essas duas cidades é

a) 30. b) 25. c) 20. d) 15. e) 10.

Resolução:
$$\frac{90 \text{ km}}{6 \text{ km}} = 15 \text{ léguas}$$
Resposta: D

Atividades para sala

1. Para adubar o jardim com o formato e as medidas da figura a seguir, são necessários 2,5 kg de fertilizantes para cada 100 m².



Quantos quilogramas de fertilizantes serão necessários para adubar todo o jardim?

a) 7,6 kg
b) 19 kg
c) 29,4 kg
d) 38 kg
e) 76,2 kg

2. No mês de setembro de 2011, a Petrobras atingiu a produção diária de 129 mil barris de petróleo na área do pré-sal no Brasil. O volume de um barril de petróleo corresponde a 159 litros.

Disponível em: <http://www.veja.abril.com.br>. Acesso em: 20 nov. 2011. (adaptado)

De acordo com essas informações, em setembro de 2011, a produção diária, em m³, atingida pela Petrobras na área do pré-sal no Brasil foi de

a) 20,511.
b) 20 511.
c) 205 110.
d) 2 051 100.
e) 20 511 000.

3. (ENEM) Para economizar em suas contas mensais de água, uma família de 10 pessoas deseja construir um reservatório para armazenar a água captada das chuvas, que tenha capacidade suficiente para abastecer a família por 20 dias. Cada pessoa da família consome, diariamente, 0,08 m³ de água. Para que os objetivos da família sejam atingidos, a capacidade mínima, em litros, do reservatório a ser construído deve ser

a) 16.
b) 800.
c) 1 600.
d) 8 000.
e) 16 000.

4. (ENEM) Em 2010, um caos aéreo afetou o continente europeu, devido à quantidade de fumaça expelida por um vulcão na Islândia, o que levou ao cancelamento de inúmeros voos. Cinco dias após o início desse caos, todo o espaço aéreo europeu acima de 6 000 metros estava liberado, com exceção do espaço aéreo da Finlândia. Lá, apenas voos internacionais acima de 31 mil pés estavam liberados.

Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 21 abr. 2010. (adaptado)

Considere que 1 metro equivale a, aproximadamente, 3,3 pés. Qual a diferença, em pés, entre as altitudes liberadas na Finlândia e no restante do continente europeu cinco dias após o início do caos?

a) 3 390
b) 9 390
c) 11 200
d) 19 800
e) 50 800

5. A origem da milha terrestre – sistema de medida ainda em uso na Inglaterra e nos Estados Unidos – está no *mille passus*, unidade de comprimento utilizada pelo exército romano que correspondia a 1 000 passos dados por um centurião, o comandante das suas milícias. Os passos do centurião tomados como base eram duplos, mais largos que o normal, e a medida encontrada foi o equivalente a 63 360 polegadas, ou 1 690,34 metros. "Já a milha náutica, ou marítima, foi estabelecida de forma científica. Como a Terra possui um formato arredondado, qualquer linha a contorná-la terá 360 graus. A linha do Equador mede, aproximadamente, 40 000 km. Dividiu-se, então, esse perímetro por 360 e depois por 60, pois um grau corresponde a 60 segundos. O valor resultante é a milha marítima, ou 1 853,25 metros. Por convenção internacional, esse valor foi arredondado para 1 852 metros", afirma o físico Giorgio Mascate, do Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (Inmetro), em Brasília.

Disponível em: <http://www.mundoestranho.abril.com.br/materia/por-que-a-milha-nautica-ediferente-da-milha-terrestre>. Acesso em: 1º maio 2015.

Arredondando a milha terrestre para o inteiro mais próximo, qual a relação entre esta e a milha marítima convencionada?

a) milha terrestre · 1 690 = milha marítima · 1 852
b) milha terrestre · 845 = milha marítima · 463
c) milha terrestre · 463 = milha marítima · 845
d) milha terrestre · 926 = milha marítima · 845
e) milha terrestre · 463 = milha marítima · 169

6. (ENEM) Especialistas do Instituto Internacional de Águas de Estocolmo estimam que cada pessoa necessita de, no mínimo, 1 000 m³ de água por ano, para consumo, higiene e cultivo de alimentos. Sabe-se, também, que o Rio Amazonas despeja 200 000 m³ de água no mar por segundo.

Scientific American Brasil, set. 2008, p. 62. *Veja*, jul. 2008, p. 104.

Por quanto tempo seria necessário coletar as águas que o Rio Amazonas despeja no mar para manter a população de uma determinada cidade, estimada em 20 milhões de pessoas, por um ano?

a) 16 minutos e 40 segundos.
b) 2 horas, 46 minutos e 40 segundos.
c) 1 dia, 3 horas, 46 minutos e 40 segundos.
d) 11 dias, 13 horas, 46 minutos e 40 segundos.
e) 3 meses, 25 dias, 17 horas, 46 minutos e 40 segundos.

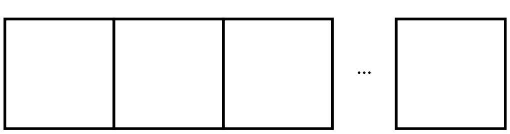
Atividades propostas

1. (ENEM) Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota de água tem volume de 0,2 mL.

Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?

a) 0,2
b) 1,2
c) 1,4
d) 12,9
e) 64,8

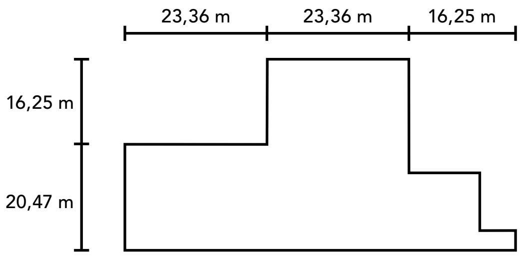
2. Uma folha de papel quadrada com um metro de lado será dividida em quadrados de um milímetro de lado cada. Rafael começou a colocar todos esses quadrados em uma fila, conforme ilustração a seguir.



Após colocar todos os quadrados, Rafael terá formado uma fila cujo comprimento mede

a) dez mil metros.
b) um quilômetro.
c) cem mil decímetros.
d) um hectômetro.
e) dez decâmetros.

3. Um terreno com o formato e as medidas indicadas na figura a seguir será utilizado para a criação de galinhas.



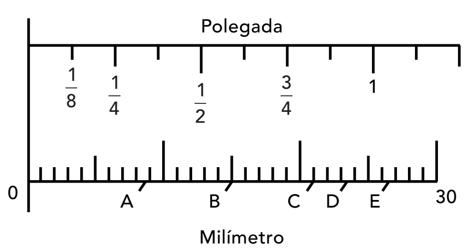
Para fazer uma cerca nesse terreno, com cinco voltas de arame farpado, o proprietário adquiriu 9 rolos de 100 m cada do referido material. Após utilizar esse material, ele

a) percebeu que comprou 3 rolos a mais que o necessário.
b) percebeu que comprou 2 rolos a mais que o necessário.
c) percebeu que comprou 1 rolo a mais que o necessário.
d) precisará adquirir mais 1 rolo para concluir o serviço.
e) notou que a quantidade adquirida foi exatamente o que precisava para a construção da cerca.

4. Ao escolher o tamanho da tela de uma televisão, ou realizar a compra de uma torneira ou de tubulações, temos em comum a dimensão utilizada: a polegada. Esse modelo de medida teve origem no século XVI, quando o rei Eduardo I definiu que a polegada seria a medida entre a base da unha até a ponta do dedo de seu polegar. A polegada, representada pelo símbolo **"** (dupla plica), pode ser fracionária ou decimal. É uma unidade de medida que corresponde a 25,4 mm.

LIMA. Diana Maia de; NETO, Orlando; JUCHA, Wanda. *Matemática para processos industriais.* Porto Alegre: Bookman, 2014.

A figura a seguir mostra uma comparação entre as escalas milímetro e polegada.



Nessa figura, a letra que corresponde ao resultado da expressão $\left(\frac{3}{4}\right)'' + \left(\frac{1}{8}\right)'' - 1\text{ mm}$ é

a) A. b) B. c) C. d) D. e) E.

5. (ENEM) Nos Estados Unidos, a unidade de medida de volume mais utilizada em latas de refrigerante é a onça fluida (fl oz), que equivale a, aproximadamente, 2,95 centilitros (cL).
Sabe-se que o centilitro é a centésima parte do litro e que a lata de refrigerante usualmente comercializada no Brasil tem capacidade de 355 mL.
Assim, a medida do volume da lata de refrigerante de 355 mL, em onça fluida (fl oz), é mais próxima de

a) 0,83.
b) 1,20.
c) 12,03.
d) 104,73.
e) 120,34.

6. Na linha de produção de uma empresa de envasamento de água mineral, na qual a água é colocada nos recipientes, o trabalho não para. Seu Durval, em uma tarde, atendeu a um pedido de 700 galões de 20 litros para abastecer um de seus clientes. É correto afirmar que o volume, em metros cúbicos, referente aos 700 galões de 20 litros que seu Durval vendeu foi de, exatamente,

a) 1400 m^3.
b) 1,4 m^3.
c) 140 m^3.
d) 14 m^3.
e) 14000 m^3.

7. A necessidade de medir é quase tão antiga quanto a de contar. Quando o homem começou a construir suas habitações e a desenvolver a agricultura, precisou criar meios de efetuar medições. Para isso, ele tomava a si próprio como referência.
Foi assim que surgiram unidades de medida como a polegada e o pé.
Veja os seus valores correspondentes em centímetros:
1 polegada = 2,54 cm
1 pé = 30,48 cm

MACHADO, Nílson José. *Vivendo a Matemática:* medindo comprimentos. São Paulo: Scipione, 2000. (adaptado)

O perímetro de um triângulo é de 79,6 cm. Dois de seus lados medem 25 cm e 16,5 cm. A medida do terceiro lado, em polegadas, é

a) 12. b) 15. c) 22. d) 25. e) 32.

8. Para fazer o controle do consumo de água nas residências, as empresas distribuidoras de água usam um aparelho chamado hidrômetro. Ele é instalado no cano que alimentará a caixa-d'água ou a cisterna. Dessa forma, tem-se o controle do volume d'água fornecido àquele imóvel. Durante um procedimento de emissão da conta de água de uma residência, o operador viu nos registros que, no mês anterior, a leitura foi de 43980 m^3, e a leitura atual é de 44016 m^3.
Quantos litros de água foram consumidos nessa residência no mês em questão?

a) 2600
b) 3600
c) 36000
d) 46000
e) 56000

9. Em um teste para uma nova modalidade de corrida tripla, uma equipe de três corredores deve se revezar da seguinte forma:

- o primeiro percurso é feito de motocicleta, em um rali, por um membro da equipe;
- o segundo percurso deve ser feito de bicicleta, em uma corrida em estrada, por outro membro da equipe;
- o terceiro percurso é feito a pé, em uma pista urbana, pelo último membro da equipe.

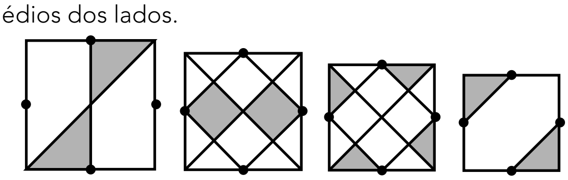
Considere que, para os atletas da equipe Alfa,

- o primeiro atleta correu metade do percurso total mais 37 km;
- o segundo atleta correu metade do que faltava mais 27 km;
- o terceiro atleta correu metade do restante mais 17 km, pisou em falso, machucou-se e saiu da corrida a 2 km do seu fim.

Qual a distância total, em km, percorrida pela equipe que completar a prova?

a) 81 b) 83 c) 166 d) 167 e) 334

10. Os pontos destacados nos quadrados a seguir são pontos médios dos lados.



Quantos desses quadrados têm área sombreada igual a $\frac{1}{4}$ de sua área?

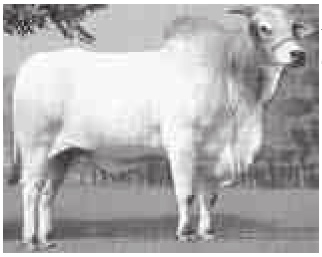
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

11. Uma empresa de exportação de gasolina comunicou à Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP) o desaparecimento de 7,2 milhões de litros de gasolina dos seus depósitos. Se um caminhão-tanque tem capacidade de 32 m^3, quantos caminhões seriam necessários para transportar a gasolina desaparecida?

Dado: 1 m^3 = 1 000 L.

a) 205
b) 210
c) 215
d) 220
e) 225

12. A unidade usada para medir massa é o grama (g). Mil gramas correspondem a um quilograma (kg), e mil quilogramas correspondem a uma tonelada (t). Ao medir a massa de alguns animais, pode-se utilizar a medida arroba, que equivale a 15 quilogramas.



Reprodução

Se um boi possui massa de $\frac{3}{4}$ de uma tonelada, pode-se dizer que sua massa, em arrobas, é

a) menos de 30.
b) exatamente 30.
c) entre 30 e 60.
d) exatamente 60.
e) mais de 60.

Conhecimentos algébricos

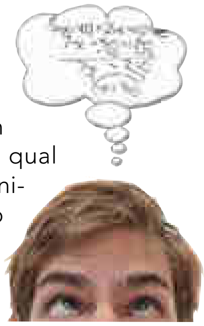
C	1,5
H	3,21

Módulo 3

Problemas com equações do 1º e 2º graus com uma e duas variáveis

Veja a situação a seguir.

Um aluno acabou de entrar na universidade e resolveu comprar um *notebook* e uma impressora, e o menor preço encontrado foi R$ 2 040,00. Ao chegar em casa, não sabia onde estava o papel no qual havia anotado os preços individuais. A única coisa que lembrava era que o preço do *notebook* era R$ 90,00 mais caro que o quádruplo do preço da impressora. De posse dessas informações, é possível descobrir os preços individuais de cada objeto? Quais são esses preços?



Fotolia

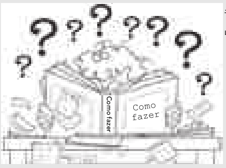
Essa é uma situação que pode ser resolvida com auxílio de equações. Os procedimentos de cálculo serão relembrados durante a resolução dos exercícios. No final, volte ao problema inicial e veja se os valores encontrados são R$ 1 650,00 para o *notebook* e R$ 390,00 para a impressora.

Qual o melhor método para o aluno resolver sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis: adição e substituição ou comparação? Essa decisão deve ser do aluno.

Problemas matemáticos sem problemas

Entender o que dizem os enunciados é o primeiro passo para decifrar enigmas matemáticos

"Meus alunos não sabem interpretar o que os problemas pedem" é uma reclamação recorrente entre os professores de Matemática. A explicação também está na ponta da língua: a garotada não consegue relacionar o que está escrito em palavras com as operações matemáticas necessárias para solucionar a proposta. O que permanece um mistério para muita gente é como mudar esse quadro. "Enquanto os estudantes não atingem certo nível de proficiência em leitura, não compreendem adequadamente enunciados de problemas, principalmente dos mais complexos", afirma Daniela Padovan, mestre em Didática da Matemática e coordenadora pedagógica da rede municipal de ensino de São Paulo. Além de enunciados e exercícios, gráficos e tabelas precisam ser analisados e discutidos para que sejam mais bem entendidos.



Fotolia

Claro que a disciplina tem uma linguagem própria, com números e sinais. Mas, sem o aporte da leitura e da escrita, a apropriação dos códigos específicos é pobre – no pior dos casos, mecânica e sem sentido. Assim, ler em Matemática envolve usar o ponto de vista matemático para compreender textos em diversos gêneros (compilação de parte do texto da matéria completa).

Cleusa Acosta. Disponível em: <http://www.revistaescola.abril.com.br>.

Exercícios resolvidos

1. Um produtor de soja deseja transportar a produção da sua propriedade até um armazém distante 2 225 km. Sabe-se que 2 000 km devem ser percorridos por via marítima, 200 km, por via férrea e 25 km, por via rodoviária. Ao fazer um levantamento dos custos, o produtor constatou que, utilizando transporte ferroviário, o custo por quilômetro percorrido é:

- cem reais mais caro que utilizando transporte marítimo;
- a metade do custo utilizando transporte rodoviário.

Com base nessas informações e sabendo que o custo total para o produtor transportar toda sua produção será de R$ 700,000, é correto afirmar que o custo, em reais, por quilômetro percorrido, no transporte marítimo, é de

a) 200. b) 250. c) 300. d) 350. e) 400.

Resolução:
Custo por km no transporte marítimo: $x - 100$
Custo por km no transporte férreo: x
Custo por km no transporte rodoviário: $2x$
$2000 \cdot (x - 100) + 200x + 25 \cdot 2x = 700000$
$2250x - 200000 = 700000 \Rightarrow 2250x = 900000 \Rightarrow x = 400$

O valor por quilômetro do transporte marítimo será 400 – 100 = 300 reais.
Resposta: C

2. O Código de Trânsito de certo país adota o sistema de pontuação em carteira para os motoristas: são atribuídos 4 pontos quando se trata de infração leve, 5 pontos por infração grave e 7 pontos por infração gravíssima. Considere um motorista que, durante um ano, cometeu o mesmo número de infrações leves e graves, foi autuado **p** vezes por infrações gravíssimas e acumulou 57 pontos em sua carteira. Nessas condições, pode-se afirmar que o valor de **p** é igual a

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

Resolução:

$4x + 5x + 7p = 57$

$7p = 57 - 9x$

$p = \frac{57-9x}{7}$(natural)

Observando que $p < 7$:

Se $x = 1$, tem-se $p = \frac{48}{7}$ (não convém).

Se $x = 2$, tem-se $p = \frac{39}{7}$ (não convém).

Se $x = 3$, tem-se $p = \frac{30}{7}$ (não convém).

Se $x = 4$, tem-se $p = \frac{21}{7} = 3$.

Resposta: C

3. Quarenta pessoas em excursão pernoitam em um hotel. Somados, os homens despendem R$ 2400,00. O grupo de mulheres gasta a mesma quantia, embora cada uma tenha pago R$ 64,00 a menos que cada homem. Denotando por **x** o número de homens do grupo, uma expressão que modela esse problema e permite encontrar tal valor é

a) $2400x = (2400 + 64x)(40 - x)$.
b) $2400(40 - x) = (2400 - 64x)x$.
c) $2400x = (2400 - 64x)(40 - x)$.
d) $2400(40 - x) = (2400 + 64x)x$.

Resolução:
Se o número de homens no grupo é **x**, então o número de mulheres é $40 - x$. Além disso, o valor pago por cada homem é $\frac{2400}{x}$ reais. Como cada mulher pagou R$ 64,00 a menos que cada homem, conclui-se que cada uma pagou $\frac{2400}{x} - 64$ reais. Portanto, sabendo que a despesa das mulheres também foi de R$ 2400,00, segue que:

$$(40-x)\left(\frac{2400}{x} - 64\right) = 2400 \Rightarrow (40-x)\left(\frac{2400-64x}{x}\right) = 2400$$

$$\Rightarrow (40-x)(2400-64x) = 2400x$$

Resposta: C

4. Um funcionário de certa empresa recebeu 120 documentos para arquivar. Durante a execução da tarefa, fez uma pausa para um café e, nesse instante, percebeu que já havia arquivado $\frac{1}{n-1}$ do total de documentos ($n \in N - \{0, 1\}$). Observou também que, se tivesse arquivado 9 documentos a menos, a quantidade arquivada corresponderia a $\frac{1}{n+2}$ do total. A partir do instante da pausa para o café, o número de documentos que ele ainda deverá arquivar é

a) 92. b) 94. c) 96. d) 98. e) 100.

Resolução:
Do enunciado, entende-se:
$\left[\frac{1}{(n-1)}\right] \cdot 120 - 9 = \left[\frac{1}{(n+2)}\right] \cdot 120$. Fazendo o desenvolvimento, tirando o m.m.c., chega-se à equação $n^2 + n - 42 = 0 \Rightarrow n = 6$ ou $n = -7$.

Se $n \in N - \{0; 1\}$, então $n = 6$. Portanto, a partir do instante da pausa para o café, o número de documentos que ele ainda deverá arquivar é:

$$120 \cdot \left[\frac{1}{(6-1)}\right] \cdot 120 = 120 - 24 = 96$$

Resposta: C

5. Na divisão dos lucros com seus 20 acionistas, uma empresa distribuiu R$ 600,00 entre os preferenciais e R$ 600,00 entre os ordinários. Sabe-se que cada acionista preferencial recebeu R$ 80,00 a menos que cada acionista ordinário. Determine quantos acionistas preferenciais essa empresa possui.

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

Resolução:
Sendo P os acionistas preferenciais e P – 20 os ordinários, de acordo com o enunciado:

Valor recebido por cada acionista preferencial: $\frac{600}{P}$

Valor recebido por cada acionista ordinário: $\frac{600}{(20-P)}$

$$\frac{600}{P} = \frac{600}{(20-P)} - 80$$

Fazendo o desenvolvimento, conclui-se:

$600(20 - P) = 600P - 80 \cdot P(20 - P) \Rightarrow$
$30(20 - P) = 30P - 4P(20 - P) \Rightarrow 600 - 30P = 30P - 80P + 4P^2$
$\Rightarrow 4P^2 - 20P - 600 = 0 \Rightarrow P = 15$ ou $P = -10$ (não convém)

Resposta: D

Atividades para sala

1.

Considere que Magali gastou R$ 67,00 na compra de **x** lotes de maçã, **y** melões e quatro dúzias de bananas, resultando em um total de 89 unidades de frutas. Desse total, o número de unidades de maçãs comprado foi igual a

a) 24. b) 30. c) 36. d) 42. e) 48.

2. (ENEM) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes.

Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1 500 telhas ou 1 200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos.
b) 360 tijolos.
c) 400 tijolos.
d) 480 tijolos.
e) 600 tijolos.

3. **Casos de dengue sobem e capital paulista registra 5ª morte**

Até a décima quarta semana do ano o número de casos de dengue na cidade de São Paulo chegou a 20 764, aumento de 191,3% em relação a 2014.

Disponível em: <http://www.saude.estadao.com.br>. Acesso em: 23 abr. 2015. (adaptado)

De acordo com texto, o número de casos de dengue registrados no mesmo período de 2014 foi de, aproximadamente,

a) 10 854.
b) 9 716.
c) 8 324.
d) 7 928.
e) 7 128.

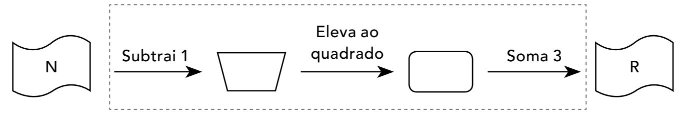
4. Uma companhia aérea oferece apenas um voo diário entre as cidades A e B. A quantidade de passageiros **y** que comparecem diariamente para esse voo relaciona-se com o preço **x** da passagem por meio de uma função do 1º grau. Quando o preço da passagem é R$ 200,00, comparecem 120 passageiros e, para cada aumento de R$ 10,00 no preço da passagem, há uma redução de 4 passageiros. Com o intuito de maximizar a receita de cada voo,

a) deve-se cobrar o preço da passagem a R$ 220,00.
b) deve-se cobrar o preço da passagem a R$ 250,00.
c) deve-se cobrar o preço da passagem a R$ 270,00.
d) deve-se cobrar o preço da passagem a R$ 290,00.
e) deve-se cobrar o preço da passagem a R$ 300,00.

5. Um grupo de **x** estudantes se juntou para comprar um *notebook* que custa R$ 3 250,00. Alguns dias depois, mais três pessoas se juntaram a eles, formando um novo grupo, com $x + 3$ pessoas. Ao fazer a divisão do valor do *notebook* pelo número de pessoas que estão compondo o novo grupo, verificou-se que cada pessoa pagaria R$ 75,00 a menos que o valor inicialmente programado para cada um no primeiro grupo. O número **x** de pessoas que formavam o primeiro grupo é

a) 9.
b) 10.
c) 11.
d) 12.
e) 13.

6. Luiz Fernando elaborou um programa para sua calculadora científica. Dessa forma, digitando um número N de entrada no programa, a calculadora efetua algumas operações e devolve na saída o número R. No esquema a seguir, estão ilustrados os comandos que Luiz colocou em seu programa.



Luiz Fernando, depois de testar vários números, observou que, ao digitar de entrada certo número N, o valor de saída R era igual ao dobro de N. Determine o número de entrada N que satisfaz à observação de Luiz Fernando.

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

Atividades propostas

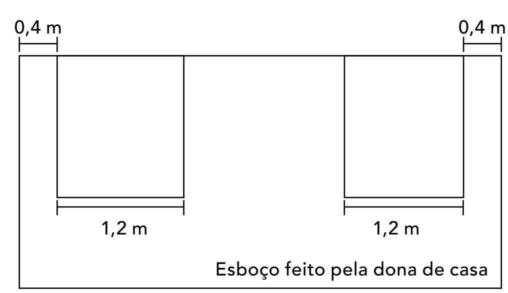
1. (ENEM) O salto triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada, ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Disponível em: <http://www.cbat.org.br>. (adaptado)

Um atleta da modalidade salto triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre

a) 4,0 m e 5,0 m.
b) 5,0 m e 6,0 m.
c) 6,0 m e 7,0 m.
d) 7,0 m e 8,0 m.
e) 8,0 m e 9,0 m.

2. (ENEM) Uma dona de casa pretende comprar uma escrivaninha para colocar entre as duas camas do quarto de seus filhos. Ela sabe que o quarto é retangular, de dimensões 4 m × 5 m, e que as cabeceiras das camas estão encostadas na parede de maior dimensão, onde ela pretende colocar a escrivaninha, garantindo uma distância de 0,4 m entre a escrivaninha e cada uma das camas, para circulação. Após fazer um esboço com algumas medidas, decidirá se comprará ou não a escrivaninha.



Após analisar o esboço e realizar alguns cálculos, a dona de casa decidiu que poderia comprar uma escrivaninha, de largura máxima igual a

a) 0,8 m.
b) 1,0 m.
c) 1,4 m.
d) 1,6 m.
e) 1,8 m.

3. Um casal que planejou uma viagem de férias para uma ilha, onde há um hotel com acomodações A e B, pagou antecipadamente **x** reais pelas diárias na acomodação A, que cobrava R$ 110,00 por dia. Ao chegar no hotel, eles optaram pela acomodação B, que cobrava R$ 100,00 pela diária, pois perceberam que, assim, eles poderiam ficar mais 2 dias hospedados neste hotel. Sabendo que, além dos **x** reais já pagos, eles ainda gastaram R$ 150,00 por dia com alimentação e que não houve outras despesas, a quantia que esse casal gastou nesse hotel é um número compreendido entre

a) 5 100 e 5 400.
b) 5 400 e 5 900.
c) 5 900 e 6 300.
d) 6 300 e 6 800.
e) 6 800 e 7 100.

4. (ENEM) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto, foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada, no acerto final, para cada uma das 55 pessoas?

a) R$ 14,00
b) R$ 17,00
c) R$ 22,00
d) R$ 32,00
e) R$ 57,00

5. O salário mensal de Marta é 30% superior ao salário mensal de Marcos na mesma função. A soma dos salários de Marcos e Marta é igual a R$ 2760,00. Considerando as afirmações anteriores, é correto afirmar que o salário mensal de Marta é de

a) R$ 1 560,00.
b) R$ 1 500,00.
c) R$ 1 280,00.
d) R$ 1 230,00.
e) R$ 1 200,00.

6. Um piscicultor cria alevinos em um tanque de 2 500 litros. Para garantir o desenvolvimento dos peixes, o piscicultor necessita que a salinidade da água do tanque seja de 18 gramas de sal por litro. Nesse tanque, foram misturadas água salobra, com 25,5 gramas de sal por litro, e água doce, com 0,5 grama de sal por litro. A quantidade, em litros, de água salobra e doce que deve estar presente no tanque é de, respectivamente,

a) 2 370 e 130.
b) 2 187,5 e 312,5.
c) 1 750 e 750.
d) 1 562,5 e 937,5.
e) 1 250 e 1 250.

7. Em um rali, um jipe tinha de percorrer 72 km com certa velocidade média. Por erro de cálculo, a primeira metade do percurso foi feita com velocidade de 3 km/h abaixo dessa velocidade, sendo o restante do percurso feito a uma velocidade de 3 km/h acima da velocidade estipulada. A distância total foi percorrida em 5 horas. Nessas condições, o jipe chegou

a) na hora prevista.
b) 12 minutos adiantado.
c) 6 minutos atrasado.
d) 12 minutos atrasado.
e) 6 minutos adiantado.

8. Muitas joias são constituídas por ligas feitas de uma mistura de ouro puro com outros metais. Uma joia é considerada de ouro **n** quilates se $\frac{n}{24}$ de sua massa for de ouro, sendo **n** um número inteiro, maior ou igual a 1 e menor ou igual a 24. Uma aliança de ouro 15 quilates tem massa igual a 4 g. Para transformar essa aliança em outra, de ouro 18 quilates, mantendo a quantidade dos outros metais, é necessário acrescentar, em sua liga, uma quantidade de gramas de ouro puro equivalente a

a) 1,0.
b) 1,5.
c) 2,0.
d) 3,0.
e) 3,5.

9. Carlinhos possui certa quantidade de bolinhas de gude e algumas latinhas onde as guarda. Ao colocar 4 bolinhas em cada lata, sobraram 2 bolinhas; mas, colocando 5 bolinhas em cada lata, a última ficou com apenas 2 bolinhas. Podemos afirmar que todas as latas ficariam com o mesmo número de bolinhas se ele tivesse

a) 36 bolinhas.
b) 42 bolinhas.
c) 49 bolinhas.
d) 55 bolinhas.
e) 63 bolinhas.

10. Uma pessoa, em seu antigo emprego, trabalhava uma quantidade **x** de horas por semana e ganhava R$ 60,00 pela semana trabalhada. Em seu novo emprego, essa pessoa continua ganhando os mesmos R$ 60,00 por semana. Trabalha, porém, 4 horas a mais por semana e recebe R$ 4,00 a menos por hora trabalhada. O valor de **x** é

a) 6.
b) 8.
c) 10.
d) 12.
e) 14.

11. Uma empreiteira destinou, originalmente, alguns operários para a construção de uma obra de 72 m^2. Como 4 deles foram demitidos antes do início da obra, os demais tiveram que trabalhar 9 m^2 a mais, cada um, para compensar.
Qual o número de operários originalmente designados para a obra?

a) 12
b) 10
c) 8
d) 6
e) 4

12. (ENEM) Uma fábrica utiliza sua frota particular de caminhões para distribuir as 90 toneladas de sua produção semanal. Todos os caminhões são do mesmo modelo e, para aumentar a vida útil da frota, adota-se a política de reduzir a capacidade máxima de carga de cada caminhão em meia tonelada. Com essa medida de redução, o número de caminhões necessários para transportar a produção semanal aumenta em 6 unidades, usando a capacidade máxima de carga de cada caminhão. Qual é o número atual de caminhões que essa fábrica usa para transportar a produção semanal, respeitando-se a política de redução de carga?

a) 36
b) 30
c) 19
d) 16
e) 10

Matemática 2

Neste livro:

Módulo 1: Geometria Plana I 13
Módulo 2: Geometria Plana II 21
Módulo 3: Geometria Plana III 29

Conhecimentos geométricos

C	2
H	7,8,9

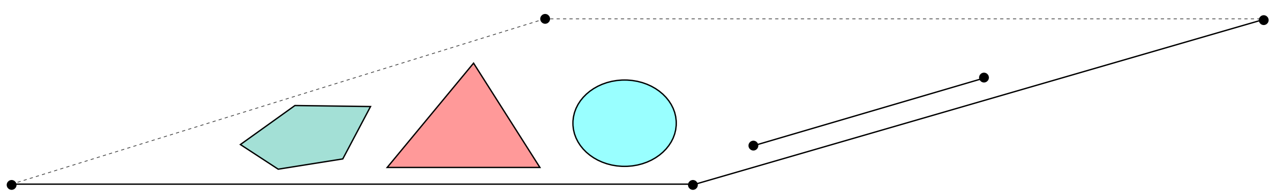
Módulo 1

Geometria Plana I

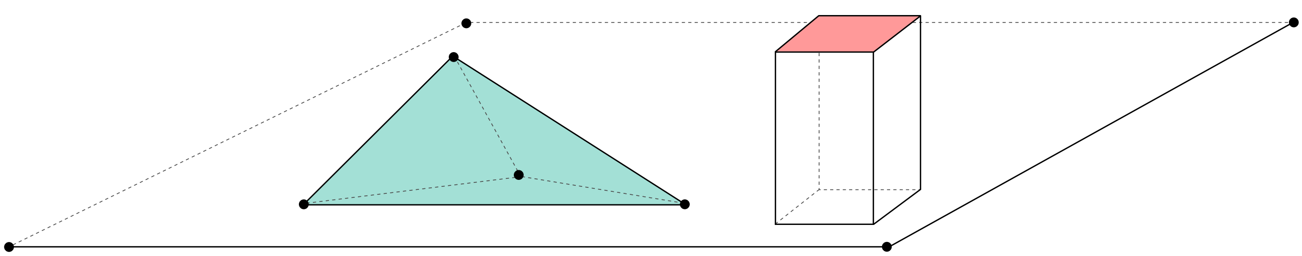
A Geometria é um ramo da Matemática que tem por objetivo estudar as características e as propriedades das figuras geométricas, independentemente de seus tamanhos.

O estudo da Geometria pode ser dividido em duas partes:

- **Geometria Plana –** Estuda as figuras cujos elementos estão contidos em um mesmo plano.



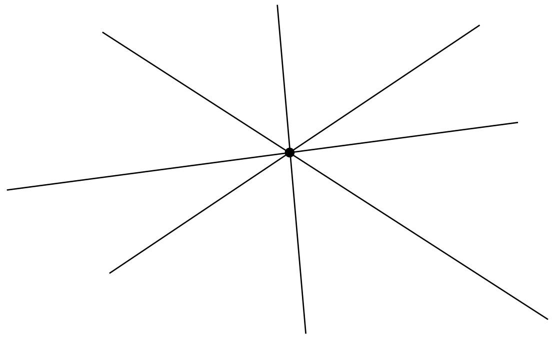
- **Geometria Espacial –** Estuda as figuras cujos elementos estão contidos em diferentes planos.



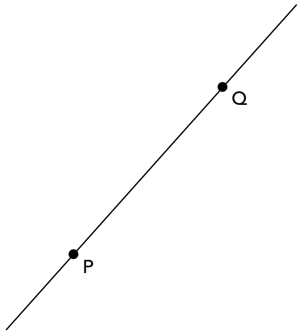
Em Geometria, existem fatos que se sustentam pelas evidências, sendo cientificamente indemonstráveis; esses são denominados **postulados** ou **axiomas**.

Exemplos:

Postulado 1: por um ponto, passam infinitas retas.



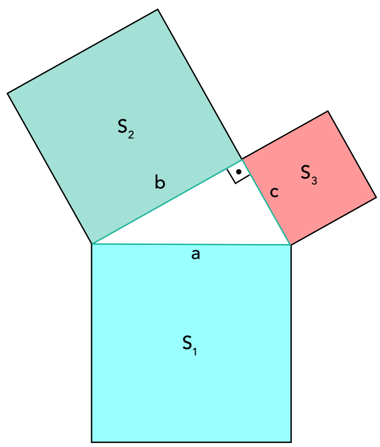
Postulado 2: por dois pontos distintos, passa uma única reta.



Por outro lado, existem os **teoremas**, que consistem em um conjunto de pressupostos e conclusões que podem ser devidamente comprovados. Uma propriedade muito requerida nas resoluções de diversos problemas de Geometria é o famoso Teorema de Pitágoras.

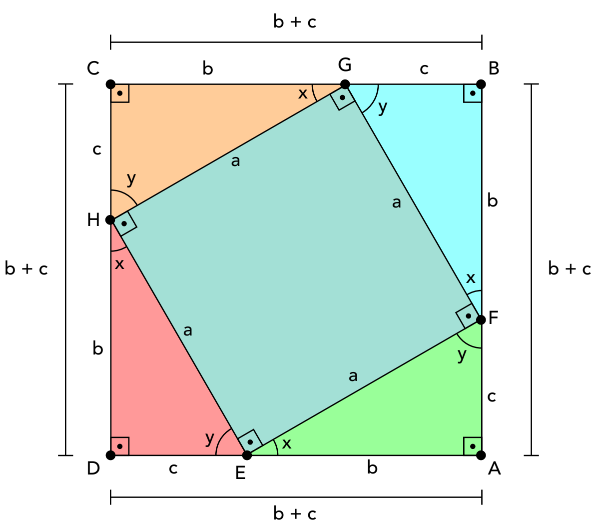
Teorema de Pitágoras

A área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é equivalente à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os seus catetos.



$S_1 = S_2 + S_3$

Demonstração:



Veja que o quadrado ABCD é composto por quatro triângulos retângulos congruentes de lados **a**, **b** e **c** e um quadrado de lado **a**.

Daí, tem-se:

Área (ABCD) = 4 · Área (FAE) + Área (EFGH)

Desenvolvendo a sentença anterior, encontra-se:

$$(b + c)^2 = 4 \cdot \left(\frac{cb}{2}\right) + a^2$$

$$b^2 + 2\,bc + c^2 = 2\,bc + a^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Portanto, conclui-se que:

$a^2 = b^2 + c^2$ (o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos).

Relembre, agora, alguns sistemas de medidas.

Sistemas de medidas

É bem verdade que medir uma grandeza é compará-la a outra grandeza de mesma espécie, denominada **unidade**.

No Sistema Internacional de Unidades, podem ser feitas as medições (comparações) demonstradas a seguir com as suas respectivas unidades.

Medição de comprimento

Medir um comprimento é verificar quantas vezes tal comprimento é maior que a unidade utilizada.

Além do metro (m), que é a unidade principal utilizada para medir comprimentos, tem-se ainda, no sistema métrico decimal:

Múltiplos do metro		
Decâmetro (dam)	→	1 dam = 10 m
Hectômetro (hm)	→	1 hm = 100 m
Quilômetro (km)	→	1 km = 1 000 m

Submúltiplos do metro		
Decímetro (dm)	→	1 dm = 0,1 m
Centímetro (cm)	→	1 cm = 0,01 m
Milímetro (mm)	→	1 mm = 0,001 m

Medição de superfície

Entende-se por superfície a parte externa dos corpos, enquanto a área é a medida dessa superfície.

Adotando um procedimento análogo àquele utilizado nas medições de comprimentos, é notável a possibilidade de medir superfícies. Para medir uma superfície plana, é necessário compará-la com outra, tomada como unidade padrão, e investigar o número de vezes que essa unidade padrão cabe na superfície que se deseja medir.

A unidade fundamental utilizada na medição de superfícies é o **metro quadrado**. Sabe-se que um metro quadrado ($1\ m^2$) corresponde à medida de uma superfície quadrada de 1 m de lado.

As demais unidades utilizadas, no sistema métrico decimal, para medir superfícies são:

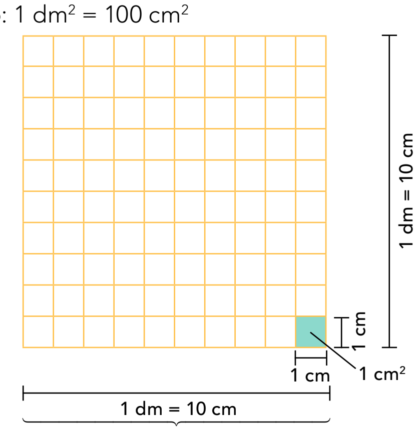
Múltiplos do metro quadrado (m^2)
Decâmetro quadrado (dam^2) ou are (a) → $1\ dam^2 = 100\ m^2$
Hectômetro quadrado (hm^2) ou hectare (ha) → $1\ hm^2 = 10000\ m^2$
Quilômetro quadrado (km^2) → $1\ km^2 = 1000000\ m^2$

Submúltiplos do metro quadrado
Decímetro quadrado (dm^2) → $1\ dm^2 = 0{,}01\ m^2$
Centímetro quadrado (cm^2) → $1\ cm^2 = 0{,}0001\ m^2$
Milímetro quadrado (mm^2) → $1\ mm^2 = 0{,}000001\ m^2$

Unidade agrária
Are (a): unidade principal
Centiare (ca): centésimo do are
Hectare (ha): 100 vezes o are

Nessas unidades de superfície, cada unidade é cem vezes maior que aquela imediatamente inferior.

Exemplo: $1\ dm^2 = 100\ cm^2$

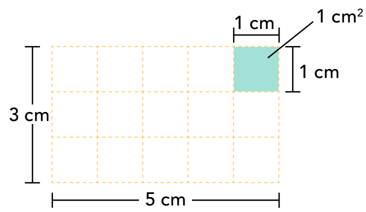


Comparando as medidas, tem-se que o decâmetro quadrado (ou are) é cem vezes maior que o metro quadrado, isto é, o m^2 é um centésimo do are, ou seja, um centiare ($1\ m^2 = 1$ ca).

Área do retângulo

Calcular a área de um retângulo, em cm^2, é compará-lo com uma superfície equivalente à de um quadrado de 1 cm de lado. Em outras palavras, é contar quantos quadrados de lado 1 cm cabem na superfície retangular que se quer medir.

Exemplo 1:

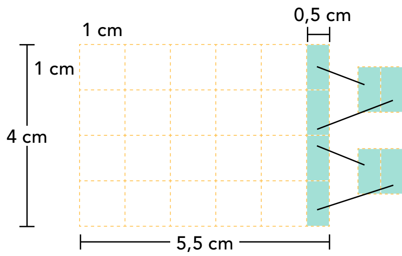


A área do retângulo de 5 cm de base e 3 cm de altura é $15 \cdot 1\ cm^2 = 15\ cm^2$.

Então, a medida da superfície desse retângulo é:

$$S_R = (5\ cm) \cdot (3\ cm) \Rightarrow S_R = 15\ cm^2$$

Exemplo 2:

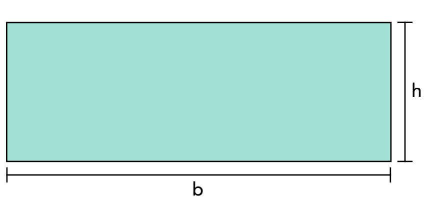


A área do retângulo de 5,5 cm de base e 4 cm de altura é $22 \cdot 1\ cm^2 = 22\ cm^2$.

Diz-se, então, que a medida da superfície desse retângulo é:

$$S_R = (5{,}5\ cm) \cdot (4\ cm) \Rightarrow S_R = 22\ cm^2$$

Em geral, dado um retângulo de base **b** e altura **h**, com **b** e **h** em uma mesma unidade de comprimento, sua área é calculada por:



$$A = b \cdot h$$

Medição de volume

Medir o volume de um corpo é determinar a medida do espaço que ele ocupa.

Sabe-se que a unidade fundamental usada para medir espaço é o **metro cúbico** (m^3), que corresponde ao espaço ocupado por um cubo de aresta igual a 1 m.

As outras unidades utilizadas, no sistema métrico decimal, para medir volumes são:

Múltiplos do metro cúbico (m^3)
Decâmetro cúbico (dam^3) → 1 000 m^3
Hectômetro cúbico (hm^3) → 1 000 000 m^3
Quilômetro cúbico (km^3) → 1 000 000 000 m^3

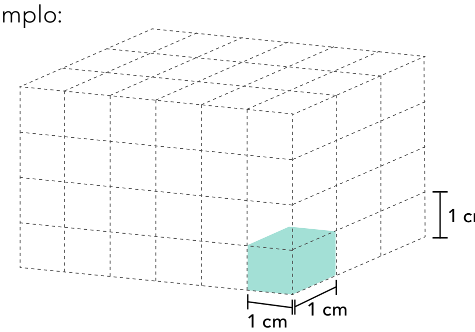
Submúltiplos do metro cúbico (m^3)
Decímetro cúbico (dm^3) → 0,001 m^3
Centímetro cúbico (cm^3) → 0,000001 m^3
Milímetro cúbico (mm^3) → 0,000000001 m^3

Nessas unidades de volume, cada unidade é mil vezes maior que aquela imediatamente inferior.

Volume do paralelepípedo retângulo

Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo, em cm^3, é compará-lo com o volume (espaço ocupado) de um cubo de aresta igual a 1 cm. Em outras palavras, é contar quantos cubos de aresta 1 cm cabem no paralelepípedo que se quer medir.

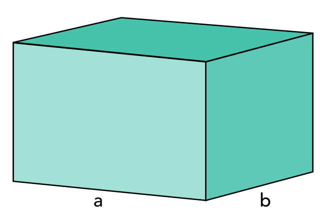
Exemplo:



Conclui-se que, na camada inferior, tem-se $6 \cdot 3 = 18$ cubos; e, na vertical, o paralelepípedo tem quatro camadas equivalentes. Então, o paralelepípedo ocupa um espaço equivalente ao espaço ocupado por $(6 \cdot 3) \cdot 4 = 72$ cubos.

Assim, o volume do paralelepípedo retângulo de comprimento 6 cm, largura 3 cm e altura 4 cm é 72 cm^3.

Em geral, para um paralelepípedo retângulo de comprimento **a**, largura **b** e altura **c**, com **a**, **b** e **c** em uma mesma unidade de comprimento, seu volume é dado por:



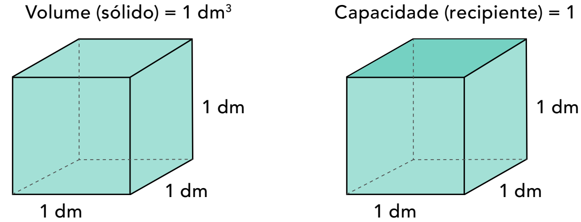
$$V = a \cdot b \cdot c$$

Medição de capacidade

A unidade fundamental usada para medir capacidade é o **litro** (L), que corresponde ao que cabe dentro de um recipiente cúbico de aresta 1 dm.

Dado um cubo de aresta 1 dm (10 cm), o seu volume (a medida do espaço ocupado pelo cubo) é 1 dm^3. No entanto, o que caberia dentro do recipiente cúbico (sua capacidade) é um litro (1 L).

Volume (sólido) = 1 dm^3 Capacidade (recipiente) = 1 L



Há, portanto, uma relação entre as unidades de volume e as de capacidade:

$1\ dm^3 = 1\ L$ $1\ m^3 = 1000\ L$ $1\ cm^3 = 1\ mL$

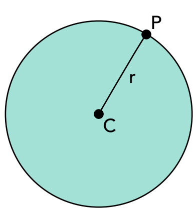
As demais unidades utilizadas, no sistema métrico decimal, para medir capacidades são:

Múltiplos do litro (L)
Decalitro (daL) → 1 daL = 10 L
Hectolitro (hL) → 1 hL = 100 L
Quilolitro (kL) → 1 kL = 1 000 L

Submúltiplos do litro (L)
Decilitro (dL) → 1 dL = 0,1 L
Centilitro (cL) → 1 cL = 0,01 L
Mililitro (mL) → 1 mL = 0,001 L

Circunferência

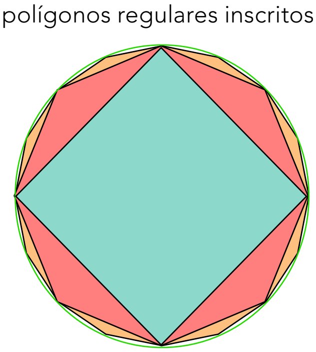
A circunferência é uma linha curva fechada, contida em um plano, tal que todos os seus pontos equidistam de um ponto fixo chamado centro.



C: centro
CP = r (raio)
P: pertence à circunferência

Comprimento da circunferência

Seu comprimento pode ser entendido como o limite dos perímetros dos polígonos regulares inscritos nela.



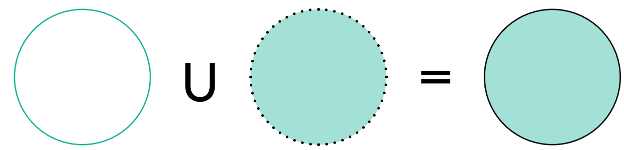
- Note que o perímetro do octógono é maior que o do quadrado, porém é menor que o comprimento da circunferência.
- Perceba que o perímetro do hexadecágono (16 lados) é maior que o do octágono, porém menor que o comprimento da circunferência, e assim por diante.
- Quanto mais for dobrado o número de lados, mais próximos ficam os perímetros do polígono e da circunferência.
- Dividindo a medida do comprimento de uma circunferência pela medida do seu diâmetro, sempre encontra-se a mesma constante irracional, denominada **π**.

$$\pi = 3{,}141592653589...$$

- O comprimento C de uma circunferência de raio **r** é dado por:

$$C = 2\,\pi r$$

- Círculo é a reunião da circunferência com o conjunto dos pontos interiores.



Circunferência (contorno) — Pontos interiores (interior) — Círculo (contorno U interior)

Área do círculo

Se, em uma circunferência, inscreve-se um polígono regular qualquer, sua área pode ser expressa da seguinte forma:

$$\text{Área} = \left[\frac{(\text{perímetro})\cdot(\text{apótema})}{2}\right] = \frac{2p\cdot a}{2} = p\cdot a$$

Se o número de lados for muito grande, admite-se que a área do polígono seja igual à área do círculo cuja circunferência é o perímetro desse polígono, e o raio, o apótema do mesmo polígono. Portanto, sendo $2\pi r$ o comprimento da circunferência, tem-se:

$$\text{Área do círculo} = \frac{2p\cdot a}{2} = \frac{2\pi r\cdot r}{2} = \pi r^2$$

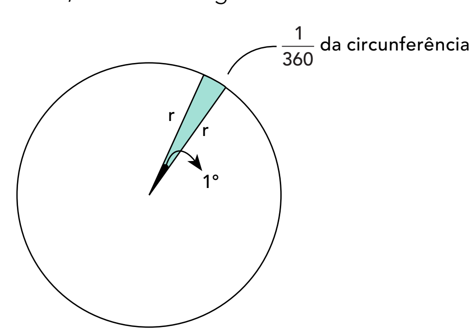
Sistema de medidas de ângulos

Medição de ângulos

Medir um ângulo é compará-lo com outro ângulo considerado padrão, isto é, que foi escolhido como unidade de medida.

Para medir ângulos, utilizam-se os sistemas a seguir:

- **Sistema sexagesimal (grau) –** Um grau, simbolizado por 1°, é a medida de um ângulo central associado a um arco cujo comprimento corresponde a $\frac{1}{360}$ de uma circunferência. Portanto, a medida angular da circunferência é 360°.

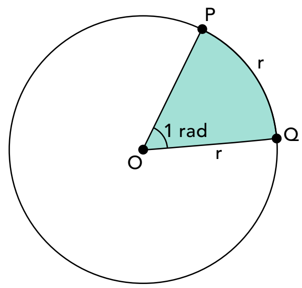


Subunidades do grau:

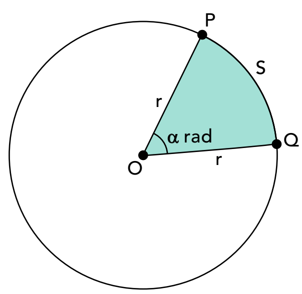
- $1' = \frac{1}{60}$ do grau (Lê-se: 1 minuto é $\frac{1}{60}$ do grau).
- $1'' = \frac{1}{60}$ do minuto (Lê-se: 1 segundo é $\frac{1}{60}$ do minuto).

- **Sistema natural (radiano) –** Um radiano, simbolizado por 1 rad, é a medida de um ângulo central associado a um arco cujo comprimento coincide com a medida do raio da circunferência que o contém.

  Portanto, a medida angular da circunferência é 2π rad.



Para completar, se S é o comprimento linear do arco $\overset{\frown}{PQ}$, determinado por um ângulo central de medida igual a **α** radianos em uma circunferência de raio **r**, então:

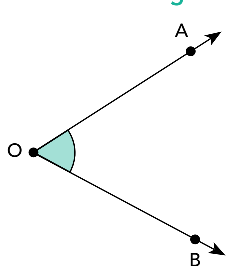


Logo:

$S = \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\right) \cdot 2\pi r \Rightarrow S = \alpha \cdot r$, em que **α** está em radianos

Ângulo

Duas semirretas de mesma origem O dividem o plano em duas regiões (interior e exterior); cada uma dessas regiões denomina-se **ângulo**.



$A\hat{O}B$ ou $\hat{O}$ é o ângulo formado pelas semirretas: $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

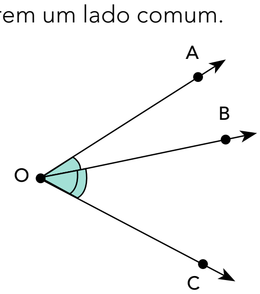
O é o vértice.

$\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são lados.

Usualmente, chama-se de medida de um ângulo a medida de sua abertura.

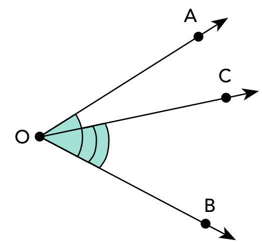
Ângulos consecutivos

Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, possuírem um lado comum.



São consecutivos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$

Lado comum: $\overrightarrow{OB}$

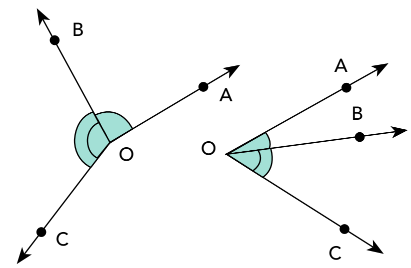


São consecutivos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$

Lado comum: $\overrightarrow{OB}$

Ângulos adjacentes

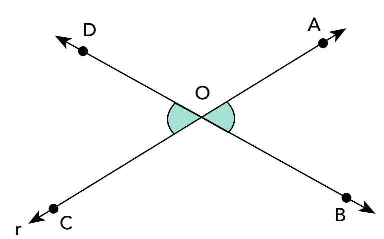
Dois ângulos são adjacentes se, e somente se, forem consecutivos e não possuírem pontos internos comuns.



$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes.

Ângulos opostos pelo vértice (O. P. V.)

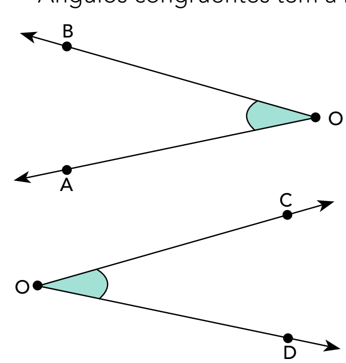
Ângulos opostos pelo vértice são ângulos compostos por duas retas, sendo que os lados de um são semirretas opostas dos lados do outro.



$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são O. P. V.

Congruência de ângulos

Ângulos congruentes têm a mesma medida.

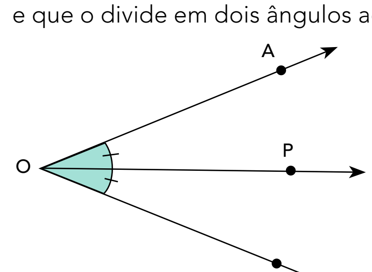


$A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$

$A\hat{O}B$ é congruente a $C\hat{O}D$.

Bissetriz de um ângulo

Semirreta interna a um ângulo com origem em seu vértice e que o divide em dois ângulos adjacentes e congruentes.

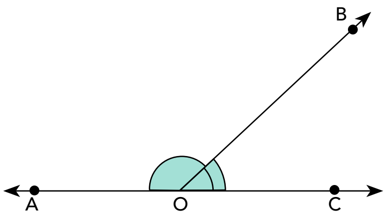


$\overrightarrow{OP}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$.

$A\hat{O}P \equiv P\hat{O}B$

Ângulos suplementares adjacentes

Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é 180°.

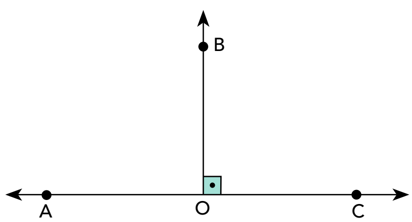


AÔB e BÔC são suplementares adjacentes.

AÔB + BÔC = 180°

Ângulo reto

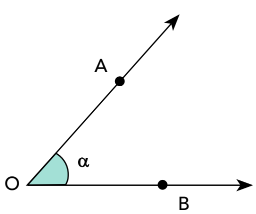
O ângulo reto é um ângulo cuja medida é 90°.



AÔB e BÔC são retos, pois são suplementares adjacentes.

Ângulo agudo

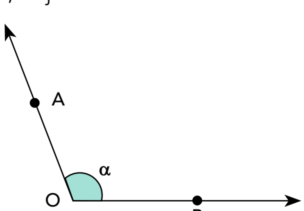
Ângulo agudo é um ângulo não nulo, menor que um ângulo reto (90°) e maior que 0°.



Med AÔB = α

Ângulo obtuso

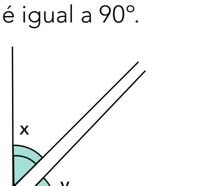
Ângulo obtuso é um ângulo não raso, maior que um ângulo reto, cuja medida está entre 90° e 180°.



$90° < \alpha < 180°$

Ângulos complementares

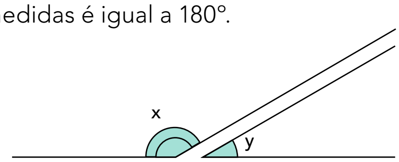
Os ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90°.



$x + y = 90°$

Ângulos suplementares

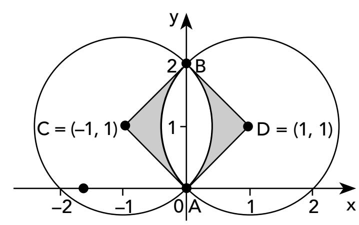
Os ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é igual a 180°.



$x + y = 180°$

Atividades para sala

1. Uma indústria de café desenvolveu uma logomarca inspirada na bandeira do Brasil, como ilustrado na figura a seguir.

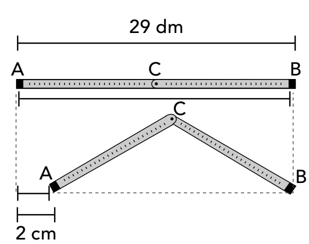


O idealizador esboçou duas circunferências em um plano cartesiano com unidades de medida em centímetros.

Com base nas informações presentes na figura, a área sombreada da logomarca é dada por

a) $(6 - \pi)$ cm².
b) $(5 - \pi)$ cm².
c) $(4 - \pi)$ cm².
d) $(8 - 2\pi)$ cm².
e) $(7 - 2\pi)$ cm².

2. Uma escada com 29 decímetros de comprimento e articulação central C possui a extremidade B fixa no chão e a extremidade A móvel, conforme a figura a seguir.



A escada, inicialmente estendida no chão, foi dobrada de tal forma que a extremidade A deslizou 2 centímetros. A quantos centímetros do chão ficou a articulação C?

a) 13
b) 15
c) 16
d) 17
e) 18

3. Com retângulos iguais, quadrados iguais e triângulos isósceles iguais, foram montadas as três figuras a seguir.

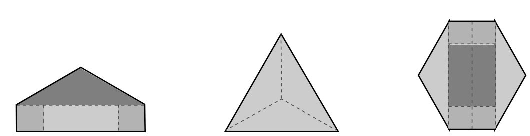
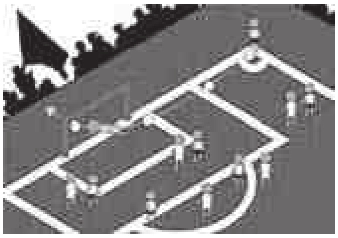


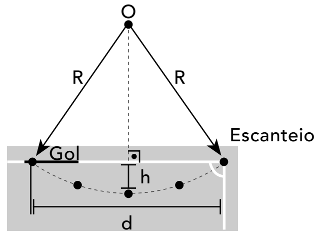
Figura 1 Figura 2 Figura 3

O contorno da figura 1 mede 200 cm e o da figura 2 mede 234 cm. Quanto mede o contorno da figura 3?

a) 244 cm
b) 300 cm
c) 332 cm
d) 334 cm
e) 468 cm

4. No futebol, um dos gols mais bonitos e raros de se ver é o chamado "gol olímpico", marcado como resultado da cobrança direta de um escanteio.





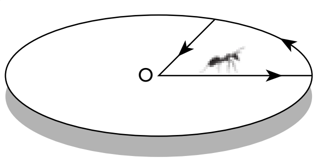
Suponha que nesse tipo de gol:

I. a projeção da trajetória da bola descreva um arco de circunferência no plano do gramado;
II. a distância (d) entre o ponto da cobrança do escanteio e o ponto do campo em que a bola entra no gol seja 40 m;
III. a distância máxima (h) da projeção da trajetória da bola à linha de fundo do campo seja 1 m.

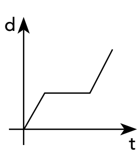
O raio da circunferência (R), em metros, do arco descrito pela trajetória da bola, com uma casa decimal de aproximação, é igual a

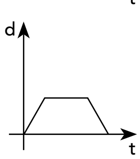
a) 192,5.
b) 194,5.
c) 196,5.
d) 198,5.
e) 200,5.

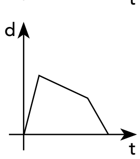
5. Uma formiga parte do centro de um círculo e percorre uma só vez, com velocidade constante, o trajeto ilustrado na figura a seguir.

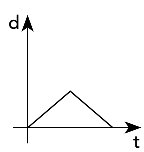


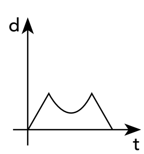
Qual dos gráficos a seguir representa a distância **d** da formiga ao centro do círculo em função do tempo **t**?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

6. Quando o comprimento da circunferência de uma peça metálica circular aumenta de 8 cm para 14 cm, o raio da circunferência aumenta

a) $\frac{\pi}{6}$ cm.
b) $\frac{3}{\pi}$ cm.
c) $\frac{\pi}{3}$ cm.
d) 1,5 cm.
e) 3 cm.

Atividades propostas

1. Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%. Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em

a) 4%.
b) 20%.
c) 24%.
d) 30%.
e) 36%.

2. A Geometria Fractal é uma linguagem criada pelo matemático polonês Benoît Mandelbrot, no começo da década de 1950. Mandelbrot criou essa geometria após observar padrões surgidos em diversas áreas, tais como na estrutura do ruído das comunicações telefônicas, na flutuação dos preços em operações do mercado financeiro e no estudo empírico da geometria dos litorais. As figuras a seguir ilustram os três primeiros passos da construção de um fractal a partir de um quadrado de lado ℓ, sendo que a figura 2 representa o padrão desse fractal.

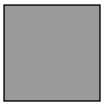


Figura 1

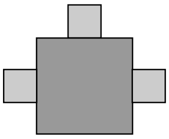


Figura 2

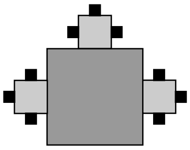


Figura 3

O procedimento pode ser escrito da seguinte maneira:
Passo 1: considere o quadro representado na figura 1.
Passo 2: dividindo-se três lados desse quadrado em três partes iguais, constrói-se três outros quadrados, conforme ilustra a figura 2.
Passo 3: repetindo o processo com os três quadrados obtidos no passo 2, obtém-se nove outros quadrados, conforme ilustra a figura 3.

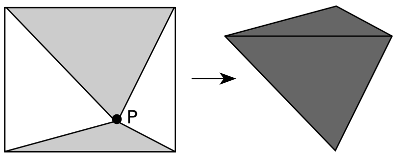
O processo pode ser repetido um número qualquer de vezes. Considerando $\ell = 5$ cm, determine, em cm^2, a área total da figura obtida no oitavo passo. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

a) 35
b) 37
c) 39
d) 41
e) 43

3. Considere um televisor *widescreen* de 36 polegadas (isso significa que o comprimento da diagonal de sua tela retangular é igual a 36 polegadas). Sabe-se que a proporção entre a largura e a altura da tela nos televisores *widescreen* é de 16 para 9. Admitindo que 1 polegada equivale a 2,5 centímetros e que $\sqrt{337} \cong 18$, é correto afirmar que a área da tela desse televisor, em cm^2, vale, aproximadamente,

a) 7 200.
b) 6 000.
c) 5 400.
d) 4 500.
e) 3 600.

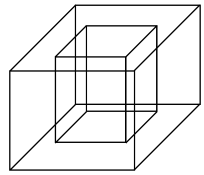
4. Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo com 12 cm de comprimento e 10 cm de largura. Ela escolheu um ponto P no interior do retângulo e recortou os triângulos destacados como na figura a seguir.



Com esses triângulos, ela montou o quadrilátero da direita. Qual é a área do quadrilátero?

a) 58 cm^2
b) 60 cm^2
c) 64 cm^2
d) 66 cm^2
e) 70 cm^2

5. (ENEM) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado ao lado.
O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



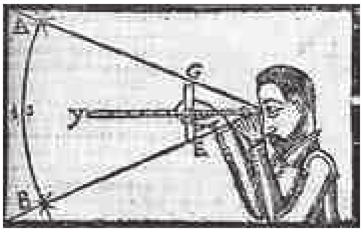
O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de

a) 12 cm^3.
b) 64 cm^3.
c) 96 cm^3.
d) 1 216 cm^3.
e) 1 728 cm^3.

6. (ENEM) Uma fábrica produz barras de chocolate no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura.
Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a

a) 5 cm.
b) 6 cm.
c) 12 cm.
d) 24 cm.
e) 25 cm.

7. A balestilha é um instrumento astronômico utilizado na época das Grandes Navegações para medir a altura de um astro ou a distância angular entre dois astros. Ela é constituída por uma régua graduada, de madeira de seção quadrada, denominada virote, onde se encaixa outra régua, a soalha, como pode ser observado na figura a seguir.

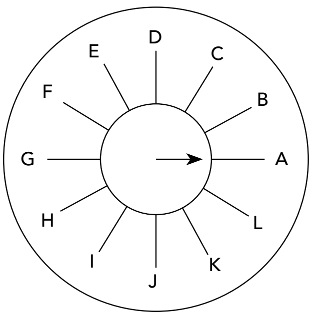


Chronografia (1603), de Manuel de Figueiredo.

Encontre o ângulo de observação onde a distância do observador até os astros seja 2 000 km e a medida do arco entre os astros seja de 1 200 km.

a) 0,30 rad
b) 0,45 rad
c) 0,60 rad
d) 1,2 rad
e) 2 rad

8. O dispositivo de segurança de um cofre tem o formato da figura a seguir, na qual as 12 letras (A, B, ..., L) estão igualmente espaçadas. O ângulo central entre duas letras vizinhas é o mesmo e a posição inicial da seta, quando o cofre se encontra fechado, é a indicada.



Para abrir o cofre, são necessárias três operações (o segredo), girando o disco menor (onde a seta está gravada), de acordo com as seguintes instruções, a partir da posição indicada.

I. $\frac{2}{3}\pi$ no sentido anti-horário.

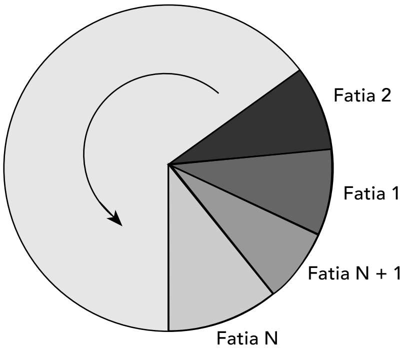
II. $\frac{3}{2}\pi$ no sentido horário.

III. $\frac{3}{4}\pi$ no sentido anti-horário.

Pode-se, então, afirmar corretamente que o cofre será aberto quando a seta estiver

a) no ponto médio entre L e A.
b) na posição B.
c) na posição K.
d) em algum ponto entre J e K.
e) na posição H.

9. Uma *pizza* circular será fatiada a partir do seu centro, em setores circulares. Se o arco de cada setor medir 0,8 radiano, obtém-se um número máximo N de fatias idênticas, sobrando, no final, uma fatia menor, que é indicada na figura por fatia N + 1.

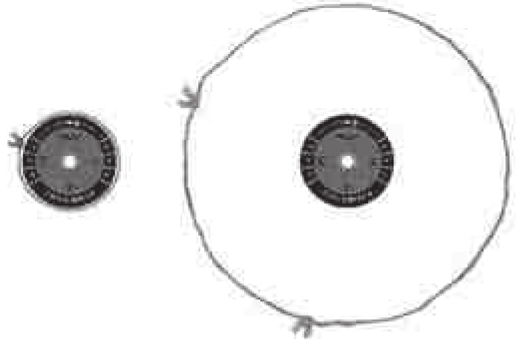


Considerando $\pi = 3{,}14$, o arco da fatia N + 1, em radiano, é

a) 0,74.
b) 0,72.
c) 0,68.
d) 0,56.
e) 0,34.

10. Um professor de Matemática fez, com sua turma, a seguinte demonstração:

- colocou um CD sobre uma mesa e envolveu-o completamente com um pedaço de barbante, de modo que o comprimento do barbante coincidisse com o perímetro do CD;
- em seguida, emendando ao barbante outro pedaço, de 1 metro de comprimento, formou uma circunferência maior que a primeira, concêntrica com o CD. Veja as figuras a seguir;

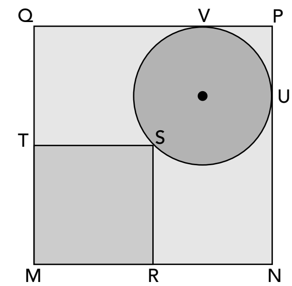


- calculou, então, a diferença entre as medidas do raio da circunferência maior e do raio do CD, chamando-a de **x**;
- logo após, imaginando um CD com medida do raio idêntica à do raio da Terra, repetiu, teoricamente, as etapas anteriores, chamando de **y** a diferença encontrada.

Assim, demonstrou que a seguinte relação entre essas diferenças, **x** e **y**, é expressa pela equação

a) $x + y = \pi^{-1}$.
b) $x + y = \pi^{-2}$.
c) $y - x = \pi^{-2}$.
d) $y - x = \pi^{-1}$.
e) $xy = \dfrac{1}{\pi}$.

11. Na figura a seguir, o quadrado MNPQ, com 20 m de lado, representa o terreno reservado à área de lazer da chácara de João. A região limitada pelo quadrado MRST, com 10 m de lado, está destinada ao salão de jogos e à churrasqueira. O círculo, contendo o ponto S e tangente ao quadrado MNPQ nos pontos U e V, representa a região destinada à construção da piscina.



A área da região que será ocupada pela piscina é

a) $50\pi \cdot (3 - 2\sqrt{2})\ m^2$.
b) $100\pi \cdot (3 - 2\sqrt{2})\ m^2$.
c) $150\pi \cdot (3 - 2\sqrt{2})\ m^2$.
d) $200\pi \cdot (3 - 2\sqrt{2})\ m^2$.
e) $250\pi \cdot (3 - 2\sqrt{2})\ m^2$.

12. Deseja-se marcar um terreno na forma de um setor circular com 100 metros de perímetro. O raio do círculo (correspondente ao setor) para que a área do terreno seja máxima deverá ser

a) 10 m.
b) 10,5 m.
c) 12,5 m.
d) 20 m.
e) 25 m.

Conhecimentos geométricos

C 2

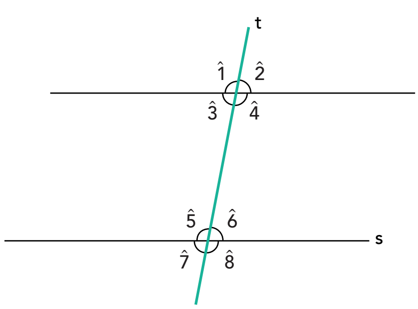
H 7,8,9

Módulo 2

Geometria Plana II

Paralelismo e suas propriedades

Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal



t: reta transversal
r e s: paralelas distintas

Ângulos correspondentes são iguais:
$\measuredangle 1 = \measuredangle 5$; $\measuredangle 2 = \measuredangle 6$; $\measuredangle 3 = \measuredangle 7$; $\measuredangle 4 = \measuredangle 8$

Ângulos alternos internos são iguais:
$\measuredangle 3 = \measuredangle 6$; $\measuredangle 4 = \measuredangle 5$

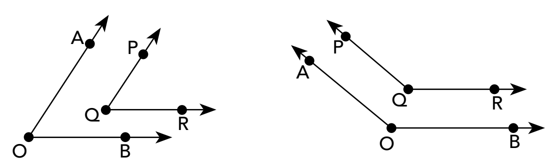
Ângulos alternos externos são iguais:
$\measuredangle 1 = \measuredangle 8$; $\measuredangle 2 = \measuredangle 7$

Ângulos colaterais internos são suplementares:
$\measuredangle 3 + \measuredangle 5 = 180°$; $\measuredangle 4 + \measuredangle 6 = 180°$

Ângulos colaterais externos são suplementares:
$\measuredangle 1 + \measuredangle 7 = 180°$; $\measuredangle 2 + \measuredangle 8 = 180°$

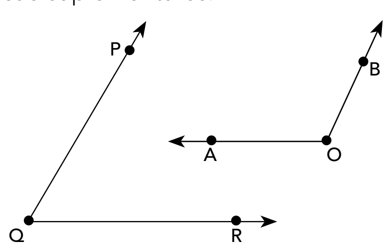
Ângulos de lados paralelos

Dois ângulos agudos ou dois ângulos obtusos, que têm seus lados paralelos, são iguais.



Se $\overline{OA} // \overline{QP}$ e $\overline{OB} // \overline{QR}$, então $\measuredangle AOB = \measuredangle PQR$.

Dois ângulos, um agudo e outro obtuso, que têm seus lados paralelos, são suplementares.

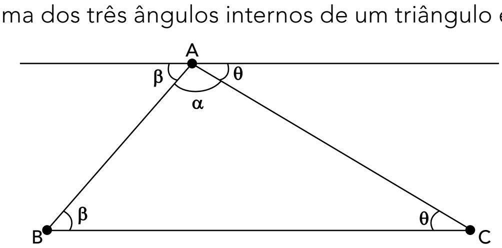


Veja que:
$\measuredangle PQR + \measuredangle BOA = 180°$

Algumas propriedades básicas

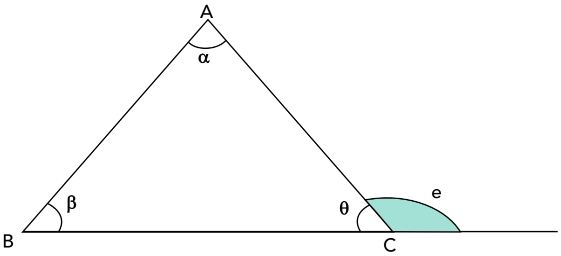
Considerando o que foi exposto até aqui, pode-se concluir que:

- A soma dos três ângulos internos de um triângulo é 180°.



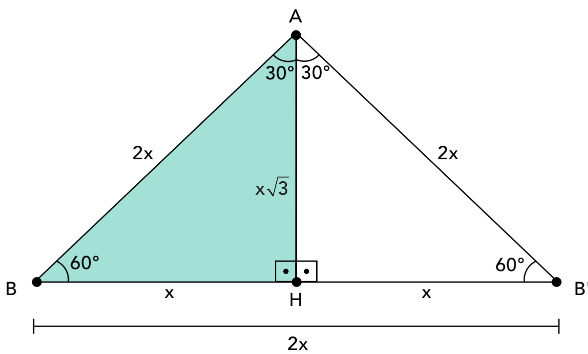
$r // \overline{BC} \Rightarrow \alpha + \beta + \theta = 180° \Rightarrow S_i = 180°$

- Cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.



$180° = \theta + e = \theta + \beta + \alpha \Rightarrow e = \beta + \alpha$
(Teorema do Ângulo Externo)

- Os triângulos de ângulos 30°, 60° e 90° têm lados proporcionais aos números 1, $\sqrt{3}$ e 2.



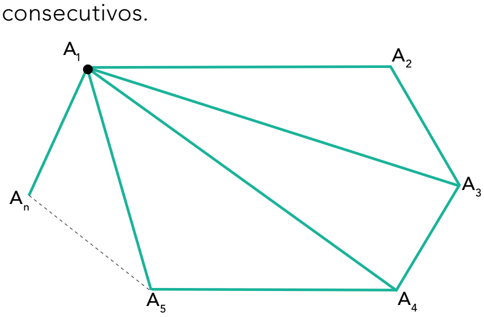
Observações:

- O ΔABB' representa a duplicidade do ΔABH.
- $(1, \sqrt{3}, 2)$ é uma terna pitagórica.
- O ΔABB' é equilátero de lado 2x e altura $x\sqrt{3}$.
- A área do $\Delta ABB' = \dfrac{2x \cdot x\sqrt{3}}{2} = x^2\sqrt{3}$.
- Se $2x = \ell \Rightarrow x = \dfrac{\ell}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{Altura do } \Delta \text{ equilátero} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}. \\ \text{Área do } \Delta \text{ equilátero} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

Definição de polígonos

Considere, em um plano, **n** pontos ($n \geq 3$), $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, ordenados de modo que três consecutivos sejam não colineares.

Chama-se **polígono** a figura formada pela união de **n** segmentos consecutivos.



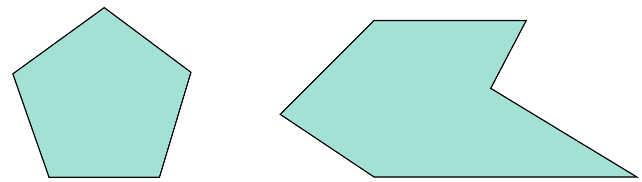
Elementos

- **Vértices do polígono –** $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n$.
- **Lados do polígono –** $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}$.
- **Perímetro (2p) –** É a soma dos comprimentos de todos os lados.
- **Gênero (n) de um polígono –** É o número de lados.
- **Vértices adjacentes –** Dois vértices P e Q são adjacentes se, e somente se, $\overline{PQ}$ é lado.
- **Diagonal de um polígono –** É o segmento de reta que une dois vértices não adjacentes.

Classificação dos polígonos

Quanto à região

Um polígono é convexo quando estiver todo contido em um mesmo semiplano determinado pela reta suporte de qualquer um de seus lados.



Convexo　　　Não convexo

Quanto ao gênero

De acordo com o gênero, os polígonos podem receber as denominações:

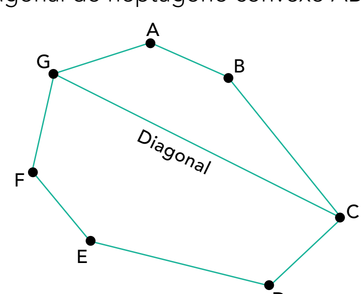
Triângulo	3 lados	Eneágono	9 lados
Quadrilátero	4 lados	Decágono	10 lados
Pentágono	5 lados	Undecágono	11 lados
Hexágono	6 lados	Dodecágono	12 lados
Heptágono	7 lados	Pentadecágono	15 lados
Octógono	8 lados	Icoságono	20 lados

Os demais são denominados: polígonos de **n** lados.

- Um polígono é **equilátero** quando seus lados forem congruentes.
- Um polígono é **equiângulo** quando seus ângulos internos forem congruentes.
- Um polígono é **regular** quando for equilátero e equiângulo.

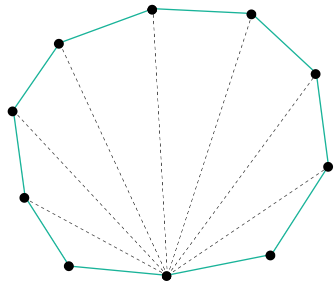
Diagonal de um polígono convexo

A diagonal de um polígono convexo é todo segmento que liga dois vértices não consecutivos. Na figura a seguir, $\overline{CG}$ é uma diagonal do heptágono convexo ABCDEFG.



Número de diagonais de um polígono convexo

Observe, na figura a seguir, que o número de diagonais que partem de cada vértice de um polígono convexo de **n** lados é igual a n – 3.



(10 – 3) diagonais

Como cada diagonal é comum a dois vértices, pode-se concluir que o número de diagonais é dado por:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}, \text{ em que } \mathbf{n} \text{ é o número de vértices.}$$

Veja os resultados relacionados a um polígono regular.
n = número de vértices.
d_t = total de diagonais.
d_{NC} = total de diagonais que não passam pelo centro.
d_C = total de diagonais que passam pelo centro.

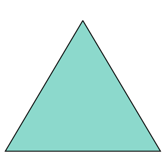
$$\underbrace{\text{Polígono regular}}_{\mathbf{n}\text{ par}} \begin{cases} d_t = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} \\ d_{NC} = \dfrac{n \cdot (n-4)}{2} \\ d_C = \dfrac{n}{2} \end{cases}$$

$$\underbrace{\text{Polígono regular}}_{\mathbf{n}\text{ ímpar}} \begin{cases} d_t = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} \\ d_{NC} = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} \\ d_C = \text{nenhuma} \end{cases}$$

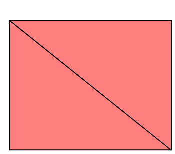
Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Notadamente, qualquer polígono convexo de **n** vértices pode ser decomposto em tantos triângulos quantos forem o número de vértices menos dois, isto é, em n – 2 triângulos.

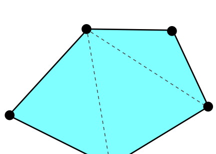
Veja.



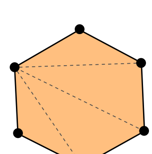
1 triângulo (3 – 2)



2 triângulos (4 – 2)



3 triângulos (5 – 2)



4 triângulos (6 – 2)

Para um n-ágono convexo, tem-se:

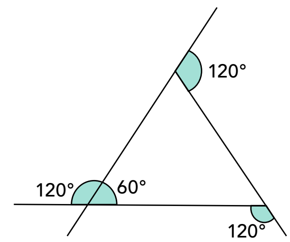
$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

Como os polígonos regulares são equiângulos, tem-se:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

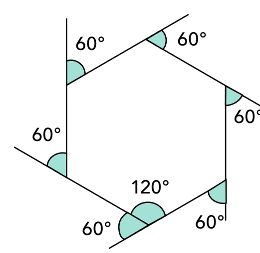
Soma dos ângulos externos de um polígono regular

Triângulo equilátero (n = 3)



$$a_i = 60° \Rightarrow a_e = 120° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_e = \frac{360°}{3}$$

Hexágono regular (n = 6)



$$6 \cdot 60° = 360°$$

$$a_i = 120° \Rightarrow a_e = 60° \Rightarrow a_e = \frac{360°}{6}$$

Do exposto, é possível concluir:

- $a_i + a_e = 180°$.
- a soma dos ângulos externos de um polígono regular é 360°:

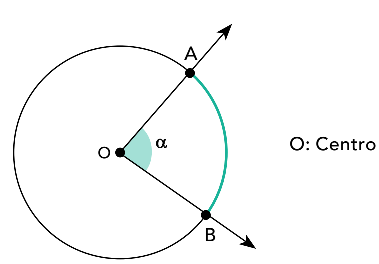
$$S_e = 360°$$

- o ângulo externo de um polígono regular é dado por:

$$a_e = \frac{360°}{n}$$

Ângulo central

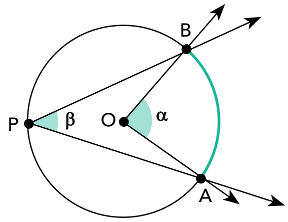
Ângulo central é aquele que tem o vértice no centro da circunferência.



Propriedade: $\alpha = m(\overset{\frown}{AB})$

Ângulo inscrito

Ângulo inscrito é aquele que tem o vértice na circunferência e tem por lados duas semirretas secantes.

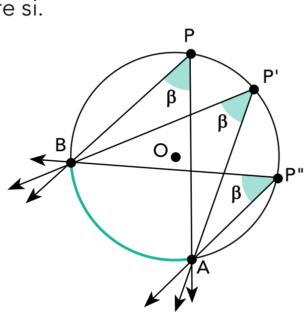


β: Ângulo inscrito
α: Central correspondente

Propriedade: $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$

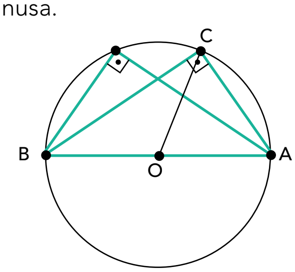
Resultados relevantes.

- Todos os ângulos inscritos associados a um mesmo arco são iguais entre si.



Propriedade: $\beta = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$

- Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo. Então, a mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da hipotenusa.

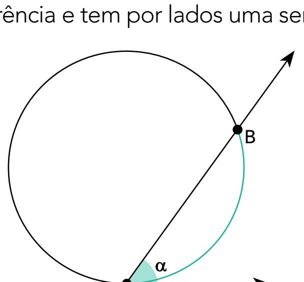


$\overline{OC}$: mediana = raio
$\overline{AB}$: hipotenusa = diâmetro

Logo: $OC = \dfrac{AB}{2}$

Ângulo de segmento

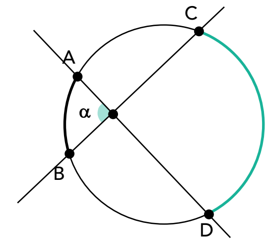
Ângulo de segmento é aquele que tem o vértice na circunferência e tem por lados uma semirreta secante e uma tangente.



Propriedade: $\alpha = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$

Ângulo de vértice interior

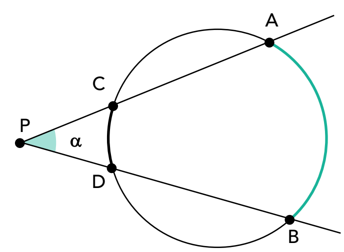
Se um ângulo formado por duas secantes tiver o vértice no interior da circunferência, a medida desse ângulo será igual à semissoma dos arcos compreendidos entre seus lados.



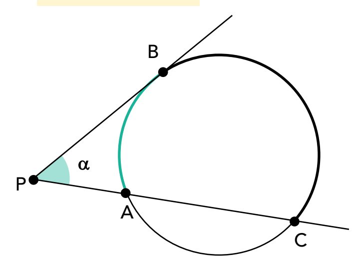
Propriedade: $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$

Ângulo de vértice exterior

Se o ângulo formado por duas secantes tiver o vértice no exterior da circunferência, a medida desse ângulo será igual à semidiferença dos arcos compreendidos entre seus lados.



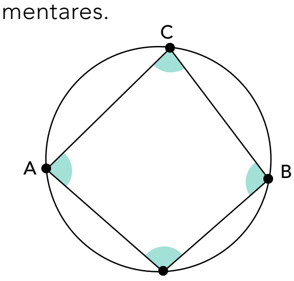
Propriedade: $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$



Propriedade: $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{CB} - \overset{\frown}{AB}}{2}$

Quadrilátero inscritível

Uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero convexo seja inscritível é que dois ângulos opostos sejam suplementares.

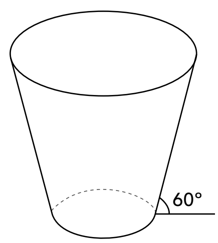


$\hat{A} + \hat{B} = 180°$ ou $\hat{C} + \hat{D} = 180°$

Atividades para sala

1. Uma empresa precisa comprar uma tampa para o seu reservatório, que tem a forma de um tronco de cone circular reto, conforme mostrado na figura.

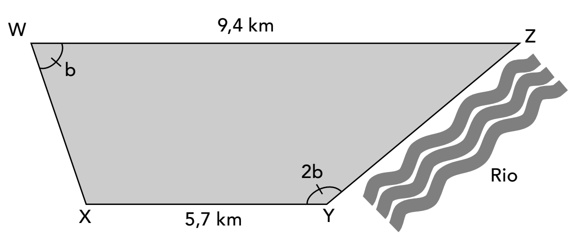
Considere que a base do reservatório tenha raio $r = 2\sqrt{3}$ m e que sua lateral faça um ângulo de 60° com o solo.



Se a altura do reservatório é 12 m, a tampa a ser comprada deverá cobrir uma área de

a) 12π m².
b) 108π m².
c) $(12 + 2\sqrt{3})^2\pi$ m².
d) 300π m².
e) $(24 + 2\sqrt{3})^2\pi$ m².

2. Certa propriedade rural tem o formato de um trapézio como na figura. As bases $\overline{WZ}$ e $\overline{XY}$ do trapézio medem 9,4 km e 5,7 km, respectivamente, e o lado $\overline{YZ}$ margeia um rio.

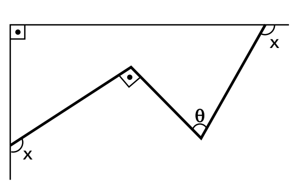


(Figura fora de escala)

Se o ângulo $X\hat{Y}Z$ é o dobro do ângulo $X\widehat{W}Z$, a medida, em km, do lado $\overline{YZ}$, que fica à margem do rio, é

a) 7,5.
b) 5,7.
c) 4,7.
d) 4,3.
e) 3,7.

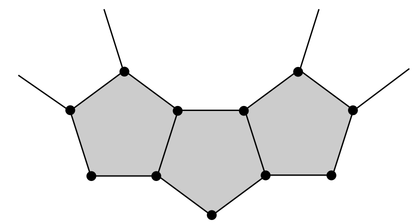
3. A figura a seguir representa parte um projeto de uma casa de veraneio, em que **θ** é a medida de um ângulo agudo.



O maior valor inteiro ímpar de **x** é igual a

a) 127°.
b) 129°.
c) 131°.
d) 133°.
e) 135°.

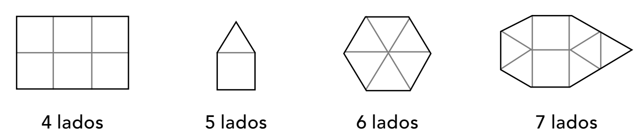
4. Arqueólogos encontraram um colar de ouro, feito de placas, no formato de pentágonos regulares. Cada uma dessas placas está conectada a outras duas placas, como ilustra a seguinte figura.



Quantas placas formam o colar?

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

5. Um polígono convexo é elegante quando pode ser decomposto na forma de triângulos equiláteros, de quadrados ou ambos, todos com lados de mesmo comprimento. A seguir, apresentam-se alguns polígonos elegantes, indicando para cada um deles uma decomposição e o número de lados.

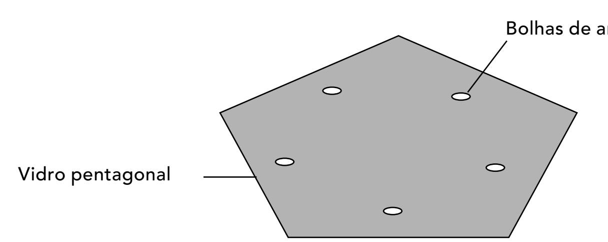


Quais são as possíveis medidas dos ângulos internos de um polígono elegante?

a) 30°, 60°, 90° e 120°.
b) 30°, 60°, 90° e 150°.
c) 60°, 75°, 90° e 120°.
d) 60°, 75°, 120° e 150°.
e) 60°, 90°, 120° e 150°.

6. Um artesão foi contratado para ornamentar os vitrais de uma igreja em fase final de construção. Para realizar o serviço, ele precisa de pedaços triangulares de vidro, os quais serão cortados a partir de um vidro pentagonal, com ou sem defeito, que possui **n** bolhas de ar (n = 0, 1, 2, ...).

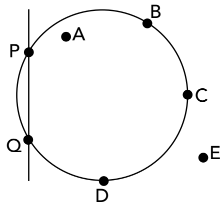
Sabendo que não há 3 bolhas de ar alinhadas entre si, nem 2 delas alinhadas com algum vértice do pentágono, nem 1 delas alinhada com dois vértices do pentágono, o artesão, para evitar bolhas de ar em seu projeto, cortou os pedaços de vidro triangulares com vértices coincidindo ou com uma bolha de ar, ou com um dos vértices do pentágono.



Nessas condições, determine a lei de formação do número máximo de triângulos T possíveis de serem cortados pelo artesão, em função do número **n** de bolhas de ar contidas no vidro utilizado.

a) T = 2n + 1
b) T = 2n + 2
c) T = 2n + 3
d) T = 2n + 4
e) T = 2n + 5

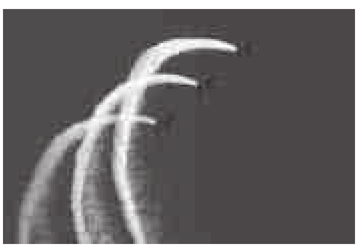
7. Na figura, os pontos P e Q representam as traves do gol de um campo de futebol.



Entre os pontos A, B, C, D e E, qual é o que enxerga o gol sob maior ângulo?

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

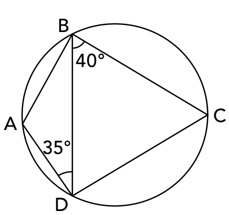
8. Em um espetáculo de acrobacias aéreas, um avião realiza um *loop* circular em um plano vertical α. De um ponto P do solo, pertencente ao plano α, observa-se o movimento do avião ao descrever um arco $\overset{\frown}{AB}$ de 60°.



Sabendo que $m(A\hat{P}B) = 45°$, calcule a medida do maior arco $\overset{\frown}{CD}$ descrito pelo avião, visto sob o mesmo ângulo ($A\hat{P}B$).

a) 90°
b) 105°
c) 120°
d) 135°
e) 150°

9. Em um terreno plano e horizontal, um arquiteto decidiu construir uma casa em que a planta tem a forma de um quadrilátero ABCD, inscritível. O arquiteto acha interessante que a medida do ângulo $\hat{A}$ seja o dobro da medida do ângulo $\hat{C}$ e que outras duas medidas angulares sejam 35° e 40°, conforme a figura ao lado.

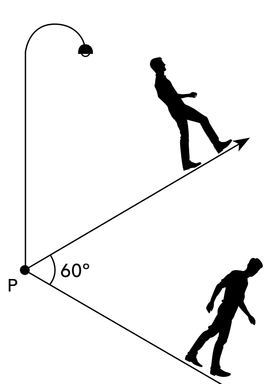


Nessas condições, as medidas dos ângulos $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$ deverão ser, respectivamente,

a) 10° e 95°.
b) 15° e 90°.
c) 20° e 85°.
d) 25° e 80°.
e) 30° e 75°.

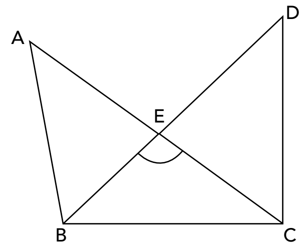
Atividades propostas

1. Dois amigos partem, ao mesmo tempo, do ponto P e se afastam em direções que formam um ângulo de 60°, conforme mostra a figura. Eles caminham em linha reta, ambos com velocidade de 6 km/h. Qual será a distância entre eles 1 minuto após a partida?



a) 80 m
b) 90 m
c) 95 m
d) 100 m
e) 105 m

2. Durante uma queda de luz, Carla e Sabrina resolveram brincar fazendo desenhos com as sombras das mãos. Para isso, pegaram duas lanternas diferentes, apontando os feixes de luz para a parede $\overline{BC}$. Márcio, que estava no andar superior, observou tudo. A figura a seguir mostra a visão que Márcio tinha da situação.

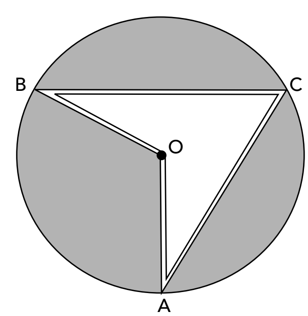


Sabe-se que o ângulo entre as duas paredes $\overline{CD}$ e $\overline{BC}$ é 90° e DC = BC, sendo D o ponto onde Carla está e A o ponto onde se encontra Sabrina. Também se sabe que $B\hat{E}C$ vale 75°.

Com base nas informações, é correto afirmar que

a) o ângulo $B\hat{A}C$ vale 75°.
b) o ângulo $B\hat{C}E$ vale 70°.
c) o ângulo $C\hat{E}D$ vale 115°.
d) o ângulo $A\hat{B}E$ vale 80°.
e) o ângulo $E\hat{C}D$ vale 30°.

3. Para fins beneficentes, foi organizado um desfile de moda em um salão em forma de círculo, com 20 metros de raio. A passarela foi montada de acordo com a figura a seguir, sendo as passarelas CA e CB lados que corresponderiam a um triângulo equilátero inscrito na circunferência. No espaço sombreado, ocupado pela plateia, foram colocadas cadeiras, à razão de uma cadeira por m^2 e um ingresso para cada cadeira.

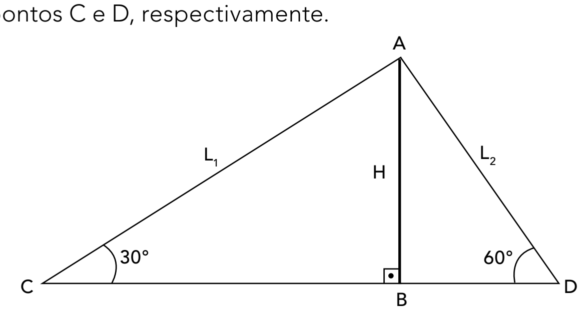


Calcule quantos ingressos foram vendidos para este evento, sabendo-se que todas as cadeiras foram ocupadas.

Dados: $\sqrt{3} = 1{,}73$; $\pi = 3{,}14$.

a) 870
b) 880
c) 890
d) 900
e) 910

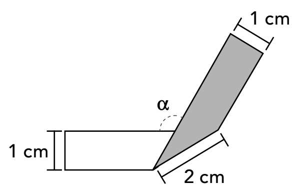
4. A figura a seguir representa uma torre de altura H equilibrada por dois cabos de comprimentos L_1 e L_2, fixados nos pontos C e D, respectivamente.



Entre os pontos B e C passa um rio, dificultando a medição das distâncias entre esses pontos. Apenas com as medidas dos ângulos C e D e a distância entre B e D, um engenheiro calculou a quantidade de cabo ($L_1 + L_2$) que usou para fixar a torre. O valor encontrado, usando $\sqrt{3} = 1{,}73$ e $\overline{BD} = 10$ m, é

a) 44,8 m.
b) 48,6 m.
c) 54,6 m.
d) 62,5 m.
e) 65 m.

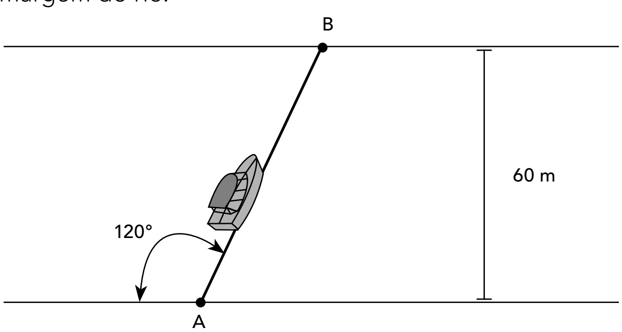
5. Uma tira de papel retangular, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura a seguir.



Qual é a medida do ângulo **α**?

a) 110°
b) 115°
c) 120°
d) 125°
e) 130°

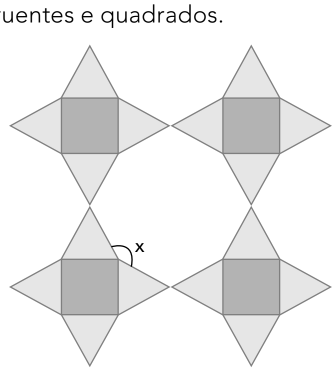
6. Um barco parte de A para atravessar o rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio.



Sendo a largura do rio 60 m, a distância percorrida pelo barco foi de

a) $40\sqrt{2}$ m.
b) $40\sqrt{3}$ m.
c) $45\sqrt{3}$ m.
d) $50\sqrt{3}$ m.
e) $60\sqrt{3}$ m.

7. Observe o mosaico a seguir, formado por triângulos equiláteros congruentes e quadrados.



A medida, em graus, do ângulo **x** assinalado é igual a

a) 105°.
b) 115°.
c) 120°.
d) 135°.
e) 150°.

8. A superfície superior da cabeça de um parafuso tem a forma de um polígono regular. A medida de um ângulo interno desse polígono é o dobro da medida de um ângulo externo.

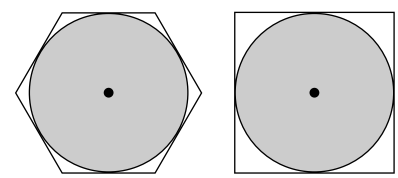
Essa superfície é

a) quadrangular.
b) pentagonal.
c) hexagonal.
d) heptagonal.
e) octogonal.

9. Considere **n** o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de n – 1 ângulos (internos) do polígono é 2004°, determine o número **n** de lados do polígono.

a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15

10. Dois amigos querem modificar as embalagens de sua pizzaria usando uma forma hexagonal, além do tradicional formato quadrado. As figuras mostram a forma hexagonal e a forma quadrada, cujos lados tangenciam as *pizzas*, supostas circulares, com 30 cm de diâmetro.

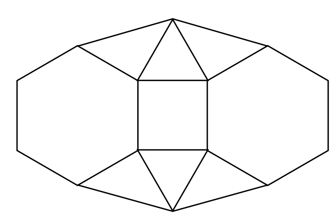


A medida aproximada, em centímetros, do perímetro da embalagem hexagonal é

Dados: $\pi = 3$; $\sqrt{3} = 1{,}7$.

a) 86.
b) 90.
c) 94.
d) 98.
e) 102.

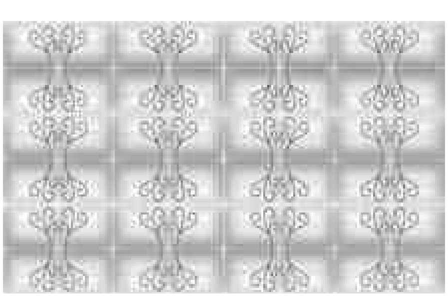
11. O decágono da figura a seguir foi dividido em 9 partes: 1 quadrado no centro, 2 hexágonos regulares, 2 triângulos equiláteros, todos com os lados congruentes ao do quadrado, e mais 4 outros triângulos.



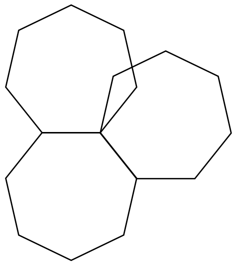
Sendo T a área de cada triângulo equilátero e Q a área do quadrado, pode-se concluir que a área do decágono é equivalente a

a) 14T + 3Q.
b) 14T + 2Q.
c) 18T + 3Q.
d) 18T + 2Q.
e) 20T + 2Q.

12. Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras a seguir.

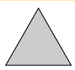
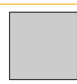
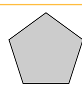
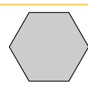
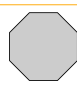
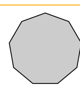


Ladrilhos retangulares pavimentando o plano.



Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição).

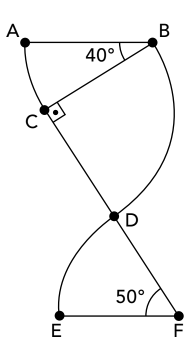
A tabela a seguir mostra a relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Figura	Ângulo interno
Triângulo		60°
Quadrado		90°
Pentágono		108°
Hexágono		120°
Octógono		135°
Eneágono		140°

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

a) triângulo.
b) quadrado.
c) pentágono.
d) hexágono.
e) eneágono.

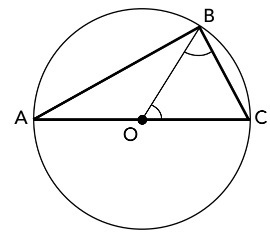
13. A figura a seguir ilustra um desenho artístico em que AB = BC = CD = DF = EF = 10 cm e $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$ e $\overset{\frown}{DE}$ são arcos de circunferência com centros em B, C e F, e $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{EF}$.



Se em todos os segmentos e arcos serão colados fios de arame, qual é o comprimento de arame, em centímetros, necessário para isso?

a) $10 \cdot (\pi + 5)$
b) $10 \cdot (5 - \pi)$
c) $20 \cdot (\pi + 5)$
d) $20 \cdot (5 - \pi)$
e) $5\pi + 1$

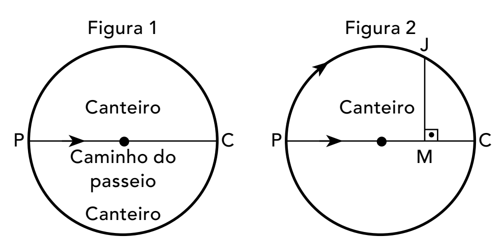
14. Um arquiteto vai construir um obelisco de base circular. Serão elevadas sobre essa base duas hastes triangulares, conforme a figura a seguir, em que o ponto O é o centro do círculo de raio 2 m e os ângulos $B\hat{O}C$ e $O\hat{B}C$ são iguais.



O comprimento do segmento $\overline{AB}$ é

a) 2 m.
b) 3 m.
c) $3\sqrt{2}$ m.
d) $2\sqrt{5}$ m.
e) $2\sqrt{3}$ m.

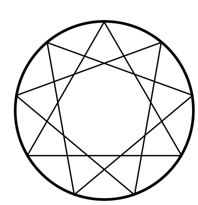
15. João e Maria costumavam namorar atravessando um caminho reto que passava pelo centro de um canteiro circular, cujo raio mede 5 m (figura 1). Certo dia, após uma desavença que tiveram no ponto de partida P, seguiram, ao mesmo tempo, para o ponto de chegada C. Maria caminhou pelo diâmetro do canteiro; João andou ao longo do caminho que margeava o canteiro (sobre o círculo), cuidando para estar sempre à altura de Maria, isto é, de modo que o segmento $\overline{MJ}$, formado por Maria e João, ficasse sempre perpendicular ao diâmetro do canteiro (figura 2).



Quando a medida do segmento $\overline{PM}$, percorrido por Maria, for igual a 7,5 m, o comprimento do arco de circunferência $\overset{\frown}{PJ}$, percorrido por João, será igual a

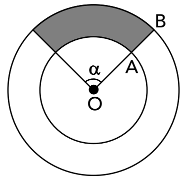
a) $\frac{10\pi}{3}$ m.
b) 2π m.
c) $\frac{5\pi}{3}$ m.
d) $\frac{2\pi}{3}$ m.
e) $\frac{\pi}{3}$ m.

16. No eneágono regular estrelado da figura a seguir, um dos ângulos não pode ser medido entre seus lados ou seus prolongamentos. Assinale a alternativa que apresenta esse ângulo.



a) 20°
b) 30°
c) 40°
d) 60°
e) 80°

17. A peça representada na figura tem o formato de uma coroa circular de centro O, cujo maior raio mede 20 cm. Sabe-se que o segmento $\overline{AB}$ mede 12 cm e que a região em destaque ocupa a sexta parte da área da coroa.



Nesse caso, é correto afirmar que a medida do ângulo central **α**, em radianos, é igual a

a) $\frac{\pi}{2}$.

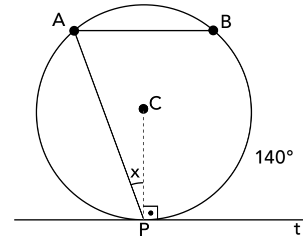
b) $\frac{\pi}{3}$.

c) $\frac{\pi}{4}$.

d) $\frac{\pi}{5}$.

e) $\frac{\pi}{6}$.

18. Na ilustração a seguir, tem-se uma piscina circular de centro C tangenciando a reta **t** no ponto P.



Se o arco $\overset{\frown}{PB}$ mede 140° e $\overline{AB}$ é paralelo a **t**, a medida **x** do ângulo assinalado é

a) 15°.

b) 20°.

c) 25°.

d) 30°.

e) 35°.

Conhecimentos geométricos

C 2

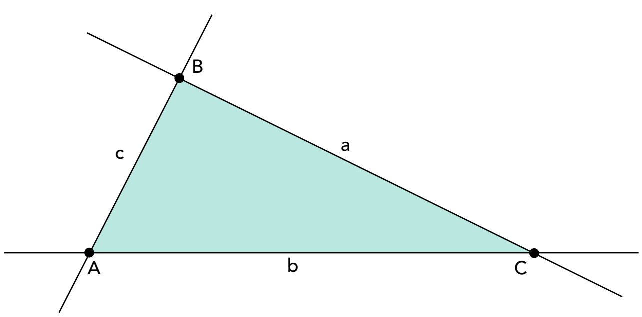
H 7,8,9

Módulo 3

Geometria Plana III

Triângulo

Triângulo é uma porção do plano geométrico limitada por três linhas que se cruzam duas a duas e não passam pelo mesmo ponto. Essa figura plana com três lados e três ângulos está representada, na ilustração a seguir, por ΔABC.

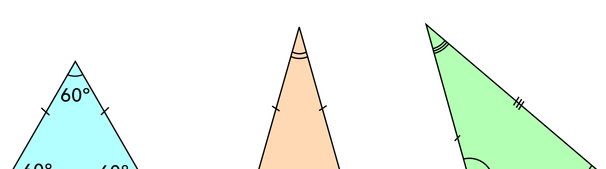


Elementos de um triângulo

- **Vértices –** São os pontos de interseção A, B e C das linhas que constituem o triângulo ABC.
- **Lados –** São os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ delimitados pelos vértices A, B e C.

Classificação de triângulos

Quanto aos lados

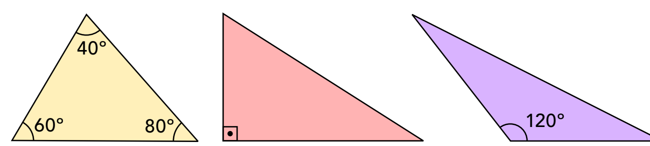


Equilátero
3 lados congruentes

Isósceles
2 lados congruentes

Escaleno
3 lados diferentes

Quanto aos ângulos

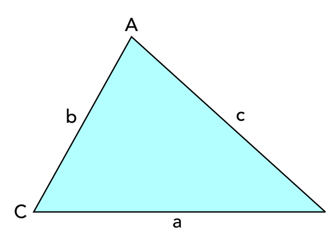


Acutângulo
(3 ângulos agudos)

Retângulo
(1 ângulo reto)

Obtusângulo
(1 ângulo obtuso)

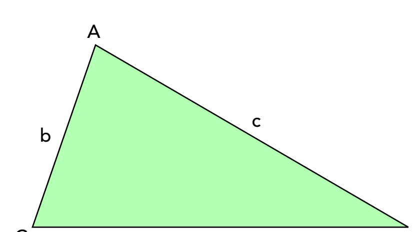
Condição de existência



Qualquer lado de um triângulo é sempre menor que a soma dos outros dois e maior que a diferença em módulo dos outros dois.

$$|b - c| < a < b + c$$

Reconhecimento de triângulos



Se **a** é o maior lado do triângulo, têm-se as seguintes relações:

- $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$ triângulo retângulo;
- $a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow$ triângulo acutângulo;
- $a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow$ triângulo obtusângulo.

Congruência de triângulos

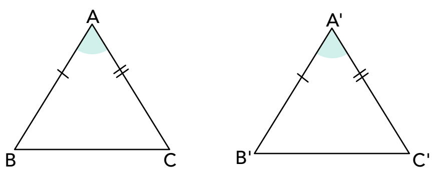
Dois triângulos são congruentes somente se seus lados e seus ângulos são ordenadamente congruentes.

Casos de congruência

1º caso – L.A.L.

Para que dois triângulos sejam congruentes, eles devem apresentar congruência entre dois lados correspondentes, bem como entre os ângulos formados por esses lados.

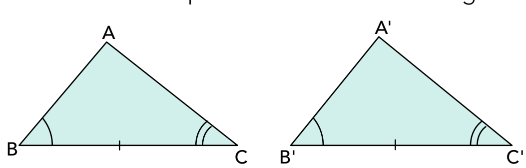
$$\begin{cases} AB = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ AC = A'C' \end{cases}$$



2º caso – A.L.A.

Para que dois triângulos sejam congruentes, eles devem apresentar congruência entre os dois ângulos correspondentes, bem como entre os lados compreendidos entre esses ângulos.

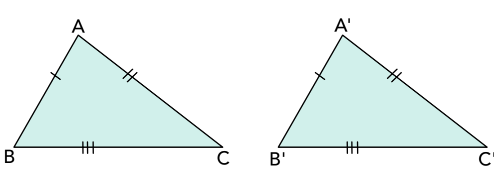
$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{B}' \\ BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$



3º caso – L.L.L.

Para que dois triângulos sejam congruentes, eles devem apresentar congruência entre todos os seus lados correspondentes.

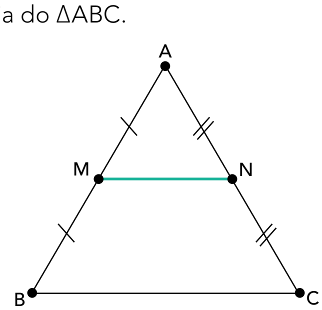
$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$$



Base média de um triângulo

Um segmento de reta é base média de um triângulo somente se esse segmento tiver as extremidades nos pontos médios de dois lados desse triângulo.

M e N são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$; $\overline{MN}$ é uma base média do ΔABC.



Propriedade

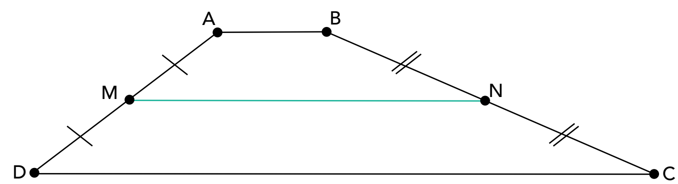
A base média de um triângulo é paralela à base desse triângulo e mede a metade dessa base.

Assim, na figura anterior, tem-se:

$$\overline{MN} \,//\, \overline{BC} \text{ e } MN = \frac{BC}{2}$$

Base média de um trapézio

Um segmento de reta é base média de um trapézio se, e somente se, esse segmento tiver as extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos.



Propriedade

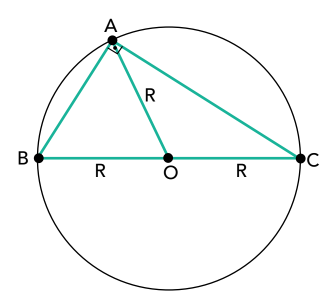
A base média de um trapézio é paralela às bases, e a sua medida é a média aritmética das medidas das bases.

Assim, tem-se:

$$\overline{MN} \,//\, \overline{AB} \,//\, \overline{CD} \text{ e } MN = \frac{AB + CD}{2}$$

Mediana relativa à hipotenusa

Em qualquer triângulo retângulo, o comprimento da mediana relativa à hipotenusa corresponde à metade da hipotenusa.



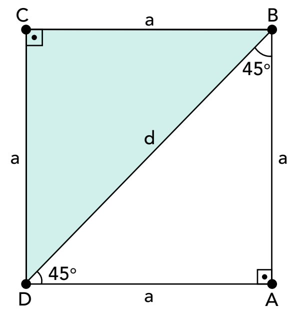
- O: centro da circunferência;
- $\overline{BC}$: diâmetro (hipotenusa);
- $\overline{OA}$: raio (mediana).

Propriedade: $OA = \dfrac{BC}{2}$

Triângulos retângulos notáveis

Embora muitos problemas de Geometria sejam frequentemente encarados de maneira trigonométrica, reforça-se que é possível, a partir dos fundamentos de congruência de triângulos, resolvê-los eficientemente.

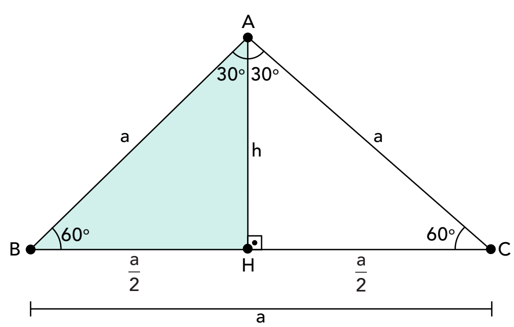
Triângulo retângulo – 45°, 45° e 90°.



Observe que:

- o ΔBCD representa a metade do quadrado ABCD;
- a hipotenusa é a diagonal do quadrado;
- aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:
  $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$

Triângulo retângulo – 30°, 60° e 90°.



Observe que:

- o ΔAHB representa a metade do ΔABC (equilátero);
- o cateto oposto ao ângulo de 30° equivale à metade da hipotenusa;
- aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

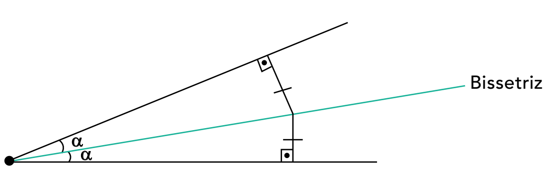
  $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (altura de um triângulo equilátero de lado **a**)

Lugares geométricos

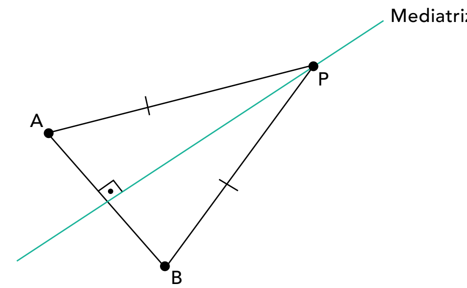
Lugar geométrico é um conjunto de pontos que satisfazem uma determinada condição (propriedade).

Exemplos:

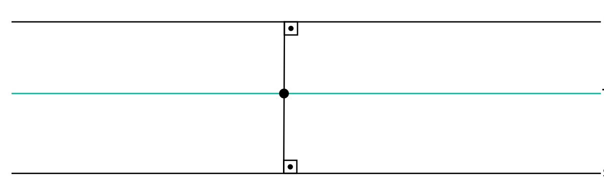
- O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dos lados de um ângulo é a bissetriz desse ângulo.



- O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de dois pontos A e B (distintos) é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.



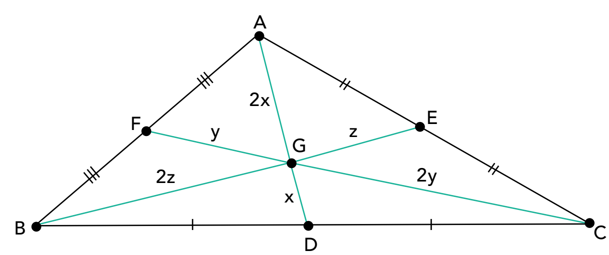
- O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de duas retas paralelas **r** e **s** é uma reta **t** paralela às duas e posicionadas à meia distância entre elas.



Pontos notáveis de um triângulo

Mediana

Mediana é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. As três medianas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, chamado **baricentro**, situado a dois terços de cada uma, a partir do vértice.



Medianas: $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$.

G: baricentro.

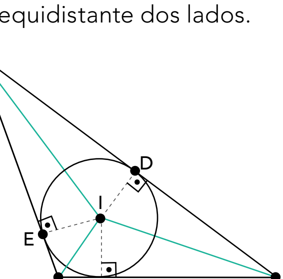
$AG = \frac{2}{3}$ de AD

$CG = \frac{2}{3}$ de CF

$BG = \frac{2}{3}$ de BE

Bissetriz

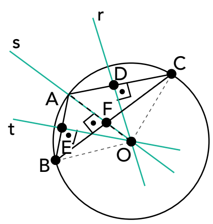
Bissetriz é a semirreta de origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes. As três bissetrizes internas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, chamado **incentro**, equidistante dos lados.



Bissetrizes: $\overline{AI}$, $\overline{BI}$, $\overline{CI}$.
I: incentro, centro da circunferência inscrita.
$\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF} =$ inraio, raio da circunferência inscrita.

Mediatriz

Mediatriz é a reta perpendicular no ponto médio de um segmento. As três mediatrizes de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, chamado **circuncentro**, equidistante dos seus três vértices.

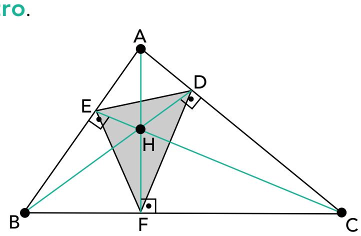


Mediatrizes: **r**, **s** e **t**.

O: circuncentro, centro da circunferência circunscrita.
$\overline{OC} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OA}$ (circunraio) raio da circunferência circunscrita.

Altura

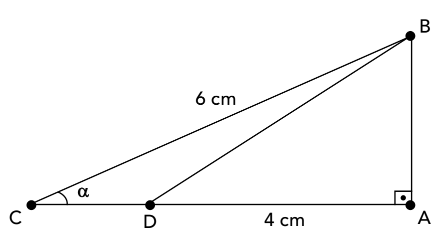
Altura é o segmento de reta perpendicular traçada de um vértice ao seu lado oposto ou ao seu prolongamento. As três alturas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, chamado **ortocentro**.



Alturas: $\overline{AF}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$.
H: ortocentro.
O triângulo DEF é chamado de órtico.

Atividades para sala

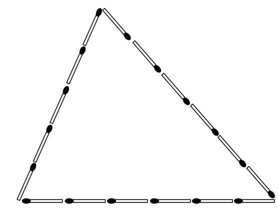
1. Na figura a seguir, tem-se um desenho feito por um arquiteto.



Sendo a medida do segmento $\overline{BD}$ um número inteiro, em cm, pode-se afirmar que o ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ mede

a) 30°.
b) 37°.
c) 45°.
d) 53°.
e) 60°.

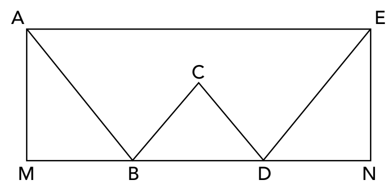
2. Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos, e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura a seguir ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

a) 3.
b) 5.
c) 6.
d) 8.
e) 10.

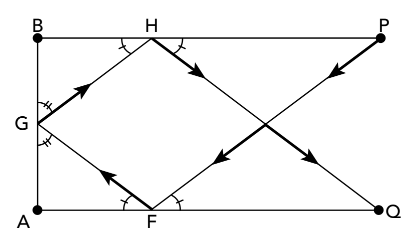
3. Um desfile de moda é feito sobre um palco retangular de comprimento MN = 24 m e de largura AM = 6 m. Uma modelo sai do ponto A, percorre a poligonal ABCDE e termina de desfilar no ponto E.



Considerando-se que MB = BD = DN e que o triângulo BCD é isósceles, BC = CD = 5 m, a distância, em metros, percorrida por essa modelo durante seu desfile é igual a

a) 30.
b) 38.
c) 40.
d) 44.
e) 48.

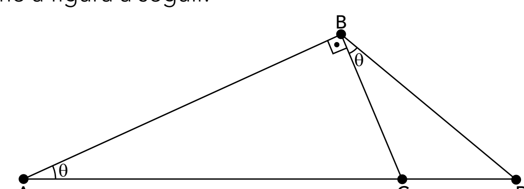
4. Em um aparelho experimental, um feixe *laser* emitido no ponto P reflete internamente três vezes e chega ao ponto Q, percorrendo o trajeto PFGHQ. Na figura a seguir, considere que o comprimento do segmento $\overline{PB}$ é de 6 cm, o de $\overline{AB}$ é de 3 cm, o polígono ABPQ é um retângulo e os ângulos de incidência e reflexão são congruentes, como se indica em cada ponto da reflexão interna.



Qual é a distância total percorrida pelo feixe luminoso no trajeto PFGHQ?

a) 12 cm
b) 15 cm
c) 16 cm
d) 18 cm
e) 20 cm

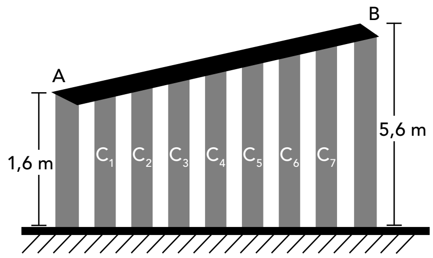
5. Quatro cidades A, B, C e D aparecem em um mapa, conforme a figura a seguir.



Sendo AC = 2 · BD, sobre a medida $\boldsymbol{\theta}$ do ângulo BÂC, podemos afirmar que

a) θ = 60°.
b) θ = 45°.
c) θ = 30°.
d) θ = 22°30'.
e) θ = 15°.

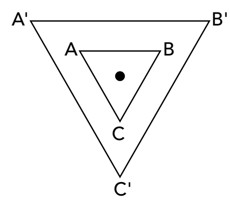
6. Um engenheiro deseja construir sete colunas igualmente espaçadas, entre duas fixas de alturas 1,6 m e 5,6 m, para suportar a viga AB, conforme a figura.



A média aritmética entre as alturas da terceira, quarta e quinta colunas, em metros, será de

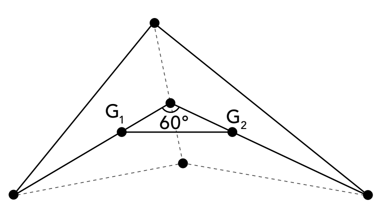
a) 2,1.
b) 2,6.
c) 3,1.
d) 3,6.
e) 4,2.

7. Na figura ao lado, têm-se duas chapas de aço homogêneas no formato de triângulos equiláteros ABC e A'B'C' que possuem o mesmo baricentro, tais que $\overline{AB} \,//\, \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \,//\, \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} \,//\, \overline{B'C'}$. Se a medida dos lados de ABC é igual a $3\sqrt{3}$ cm e a distância entre os lados paralelos mede 2 cm, então a medida das alturas de A'B'C' é igual a



a) 11,5 cm.
b) 10,5 cm.
c) 9,5 cm.
d) 8,5 cm.
e) 7,5 cm.

8. Duas chapas de aço no formato de triângulos regulares de lado $2\sqrt{3}$ dm têm um lado comum e estão situados em planos que formam um ângulo de 60°, conforme a figura a seguir.



Calcule a distância entre os centros de gravidade G_1 e G_2 destes dois triângulos.

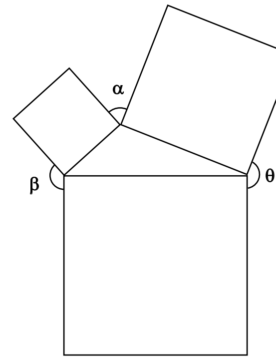
a) $\left(\frac{1}{3}\right)$ dm
b) $\left(\frac{1}{2}\right)$ dm
c) 1 dm
d) $\left(\frac{3}{2}\right)$ dm
e) 2 dm

9. São dados quatro pontos: A, B, C e D. Os pontos A, B e C são colineares, com AB = 5 cm, BC = 2 cm e B está entre A e C. Os pontos C e D pertencem a uma circunferência com centro em A. Traça-se uma reta **r** perpendicular ao segmento $\overline{BD}$ passando pelo seu ponto médio. Chama-se de P a interseção de **r** com $\overline{AD}$. Então, AP + BP vale

a) 4 cm.
b) 5 cm.
c) 6 cm.
d) 7 cm.
e) 8 cm.

Atividades propostas

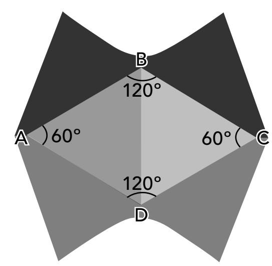
1. A estrutura representada a seguir é formada por um triângulo e três quadrados construídos sobre os seus lados.



De acordo com a ilustração, pode-se afirmar que

a) $\alpha + \theta + \beta = 90°$.
b) $\alpha + \theta + \beta = 180°$.
c) $\alpha + \theta + \beta = 270°$.
d) $\alpha + \theta + \beta = 300°$.
e) $\alpha + \theta + \beta = 360°$.

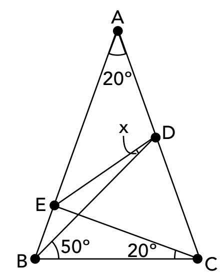
2. O retalho romboide é uma técnica frequentemente utilizada por cirurgiões em reparações cutâneas. O resultado final da técnica é uma sutura em forma de losango ABCD de ângulos internos de 60° e 120°, como indicado na figura.



Após o uso dessa técnica, a razão entre a diagonal maior e a diagonal menor do losango ABCD, nessa ordem, é igual a

a) $\sqrt{3}$.
b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
e) $\sqrt{2}$.

3. Na figura a seguir, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são congruentes.



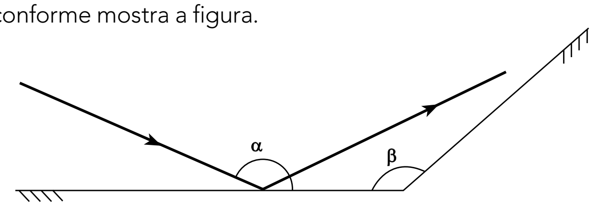
A medida do ângulo **x** é

a) 2°.
b) 4°.
c) 6°.
d) 8°.
e) 10°.

4. A medida, em metros, da altura **h** de uma torre vertical, sabendo-se que ela é vista sob um ângulo de 45° por uma pessoa localizada à distância d = 150 m da base da torre, é

a) 75.
b) $75\sqrt{2}$.
c) $75\sqrt{3}$.
d) 150.
e) $150\sqrt{2}$.

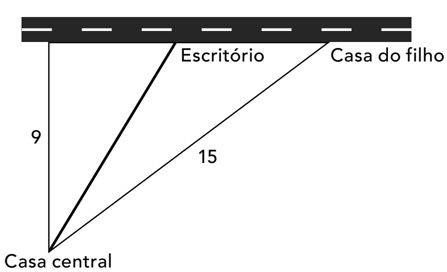
5. Dois espelhos são colocados lado a lado, de modo que o ângulo de medida $\boldsymbol{\beta}$, em graus, é formado entre as faces refletoras. Um raio de luz incide na superfície de um deles, formando com ela um ângulo obtuso de medida $\boldsymbol{\alpha}$, em graus, conforme mostra a figura.



A medida do ângulo obtuso que o raio refletido forma com o outro espelho é

a) $180° - \alpha + \beta$.
b) $180° + \alpha + \beta$.
c) $180° + \alpha - \beta$.
d) $90° - \alpha + \beta$.
e) $90° - \alpha - \beta$.

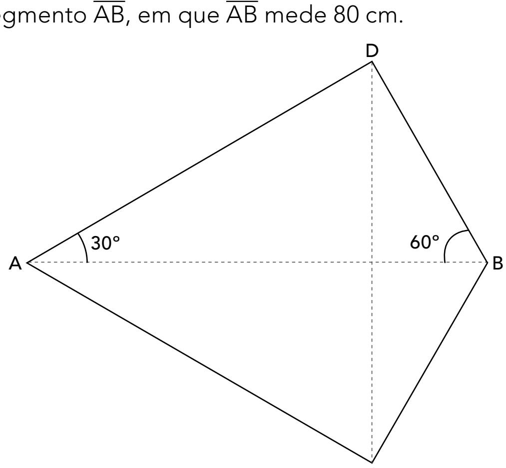
6. A casa central de uma fazenda situa-se a 9 km, contados ao longo de um caminho perpendicular à estrada reta que limita a fazenda. Na beira da estrada e a uma distância de 15 km da casa central, o fazendeiro construiu uma casa para seu filho. O fazendeiro agora quer construir, na beira da mesma estrada, um escritório que fique igualmente distanciado da casa do filho e da casa central.



A distância comum deverá ser

a) entre 8 e 9 km.
b) entre 9 e 10 km.
c) entre 11 e 12 km.
d) entre 12 e 13 km.
e) entre 13 e 14 km.

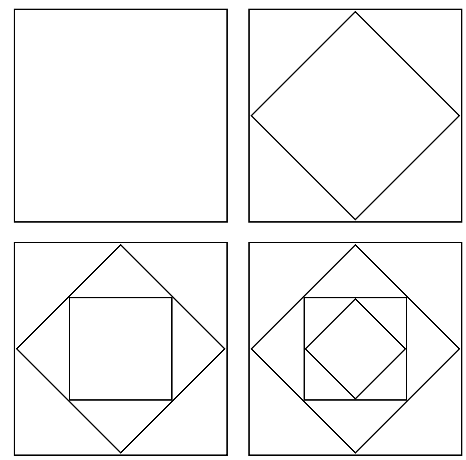
7. A figura a seguir representa uma pipa simétrica em relação ao segmento $\overline{AB}$, em que $\overline{AB}$ mede 80 cm.



Então, a área da pipa, em m², é de

a) $0{,}8\sqrt{3}$.
b) $0{,}16\sqrt{3}$.
c) $0{,}32\sqrt{3}$.
d) $1{,}6\sqrt{3}$.
e) $3{,}2\sqrt{3}$.

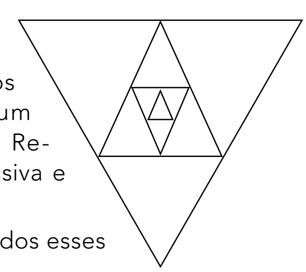
8. Na sequência de quadrados representada nas figuras a seguir, cada novo quadrado tem seus vértices nos pontos médios do quadrado que o antecede.



Se o perímetro do primeiro quadrado é P, e supondo que essa sequência continue indefinidamente, calcule o perímetro do enésimo quadrado.

a) $\dfrac{P}{\sqrt{2^{n-1}}}$
b) $\dfrac{P}{\sqrt{2^{n}}}$
c) $\dfrac{P}{\sqrt{2^{n+1}}}$
d) $\dfrac{P}{2^{n}}$
e) $\dfrac{P}{2^{n+1}}$

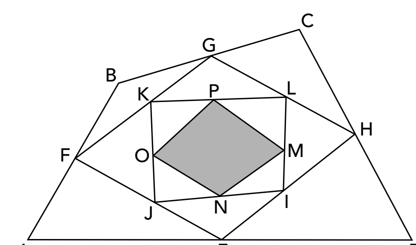
9. A medida do lado de um triângulo equilátero é 4 cm. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtém-se um novo triângulo equilátero. Repete-se esse processo sucessiva e infinitamente.



A soma dos perímetros de todos esses triângulos é

a) 36 cm.
b) 27,5 cm.
c) 24 cm.
d) 20,5 cm.
e) 18 cm.

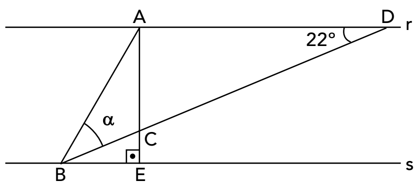
10. Uma grande área plana tinha a forma do quadrilátero ABCD. Após algumas negociações, teve sua superfície reduzida, passando a ter a forma do quadrilátero MNOP, conforme a figura a seguir.



Considerando que os vértices dos quadriláteros interiores são pontos médios e que, antes das negociações, a área do quadrilátero ABCD era de 2 560 m², é possível afirmar que a área do quadrilátero MNOP, em metros quadrados, é

a) 1 280.
b) 640.
c) 320.
d) 160.
e) 80.

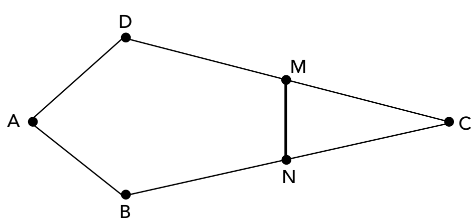
11. Na figura, r // s, $A\hat{E}B = 90°$ e CD = 2AB.



Sendo $A\hat{D}C = 22°$, a medida do ângulo $A\hat{B}C$ é

a) 30°.
b) 36°.
c) 42°.
d) 44°.
e) 48°.

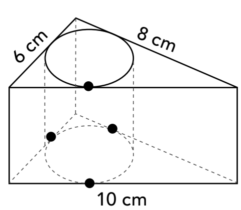
12. No quadrilátero ABCD a seguir, $A\hat{B}C = 150°$, AD = AB = 4 cm, BC = 10 cm, MN = 2 cm. Sendo M e N, respectivamente, os pontos médios de CD e BC.



A medida da área do triângulo BCD é

a) 10 cm².
b) 15 cm².
c) 20 cm².
d) 30 cm².
e) 40 cm².

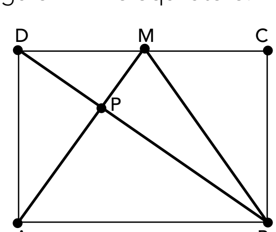
13. Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura ao lado.



O raio da perfuração da peça é igual a

a) 1 cm.
b) 2 cm.
c) 3 cm.
d) 4 cm.
e) 5 cm.

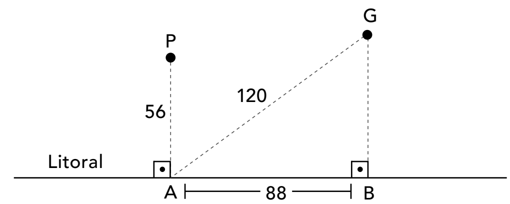
14. Na figura a seguir, ABCD é retângulo, M é o ponto médio de $\overline{CD}$, e o triângulo ABM é equilátero.



Sendo AB = 15 cm, a medida do segmento $\overline{AP}$ é igual a

a) 9 cm.
b) 10 cm.
c) 11 cm.
d) 12 cm.
e) 13 cm.

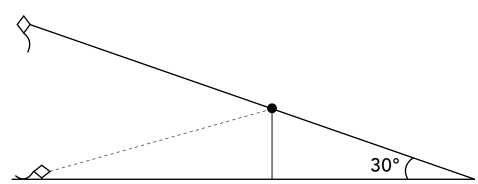
15. Os campos de petróleo Peroá (P) e Golfinho (G) distam, respectivamente, 56 km e 120 km de um ponto A do litoral, o qual supõe-se retilíneo (veja a figura a seguir). Os pontos A e B são os pontos do litoral que estão mais próximos, respectivamente, dos campos P e G. A distância do ponto A ao ponto B é de 88 km. Deseja-se construir no litoral um polo de gás que fique situado à mesma distância dos campos P e G.



Nessas condições, pode-se afirmar que o polo de gás deve ficar situado a

a) 74 km de A e a 14 km de B.
b) 64 km de A e a 24 km de B.
c) 44 km de A e a 44 km de B.
d) 24 km de A e a 64 km de B.
e) 14 km de A e a 64 km de B.

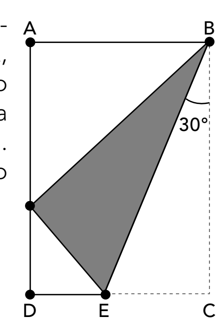
16. Um menino mantém uma pipa presa a um fio esticado de 90 m de comprimento, que vai perdendo altura, até que fica presa no alto de um poste de 10 m, formando com a horizontal um ângulo de 30°. A pipa atinge o solo ficando com a linha esticada, conforme a figura.



Desprezando-se a altura do menino, a distância final entre ele e a pipa, em metros, é igual a

a) 90.
b) $45\sqrt{3}$.
c) $50\sqrt{3}$.
d) $10\sqrt{3} + 60$.
e) $10\sqrt{3} + 78$.

17. Um pedaço de papel, em forma retangular, tem vértices nos pontos A, B, C e D conforme mostra a figura ao lado. Dobra-se o papel de tal forma que o vértice C fique sobre o lado $\overline{AD}$. Sabendo que AB = 6 cm, calcule o comprimento da dobra $\overline{BE}$.



a) 6 cm
b) 7 cm
c) 8 cm
d) 9 cm
e) 10 cm

18. Um poste P está localizado no interior de uma praça retangular, de modo que sua distância a um vértice da praça é 50 m, ao vértice oposto é 140 m e a um terceiro vértice é 100 m. A distância, em metros, de P ao quarto vértice é

a) 80.
b) 90.
c) 100.
d) 110.
e) 120.

Neste livro:

Módulo 1: Teoria dos conjuntos; Operações e problemas envolvendo conjuntos; Leis de De Morgan.....36
Módulo 2: Conjuntos numéricos; Relação binária; Conceito de função.....43
Módulo 3: Domínio, contradomínio e imagem de uma função; Função afim.....53

Conhecimentos numéricos

C 1

H 1,2,3

Módulo 1

Teoria dos conjuntos; Operações e problemas envolvendo conjuntos; Leis de De Morgan

Conjunto

Intuitivamente, conjunto pode ser definido como uma coleção de objetos. Os objetos que formam um conjunto são chamados de elementos, que podem ser pontos, pessoas, estados, países, números etc.

Normalmente, os conjuntos são representados por letras maiúsculas. Para os elementos, utilizam-se letras minúsculas ou seus nomes (números, palavras etc.).

Principais símbolos lógicos

$\in$	pertence
$\notin$	não pertence
$\subset$	contido
$\not\subset$	não contido
$\supset$	contém
$\not\supset$	não contém
$\cup$	união
$\cap$	interseção
$\vert$	tal que
$\forall$	para todo
$\exists$	existe um (ou pelo menos um)

$\exists\vert$	existe um único
$\nexists$	não existe
$=$	igual
$\neq$	desigual
$\cong$	aproximadamente
$\Rightarrow$	implicar
$\Leftrightarrow$	equivalente
$\wedge$	e
$\vee$	ou
$>$	maior que
$\geq$	maior ou igual a
$<$	menor que
$\leq$	menor ou igual a

Representação dos conjuntos

A seguir, estão listadas as formas mais comuns de representação dos conjuntos.

Tabular

Na representação tabular, as partes constituintes são enumeradas, de forma explícita, entre chaves e separadas por vírgula ou ponto e vírgula.

Exemplos:

A = {0, 3, 5, 7}
J = {e, f, g, i}
M = {janeiro, julho, dezembro}
Q = {(3, 5); (–1, 4); (7, 7)}

Na forma de uma propriedade

Os elementos são representados por propriedades exclusivas, de tal forma que não haja dúvida em sua identificação.

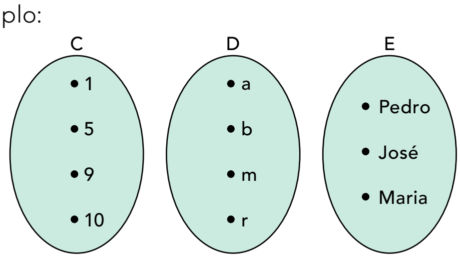
Exemplos:

B = {t | t é consoante}
S = {x | x é brasileiro}
T = {a | a é número natural par}

Diagramas de Venn

Idealizados pelo matemático John Venn (1834-1923), os conjuntos são representados por uma linha fechada em uma região plana (diagrama), e os elementos, por pontos em seu interior.

Exemplo:



Observações:

- Conjunto vazio é aquele que não possui elemento.
  Representação: ∅ ou { }.
- Conjunto unitário é aquele que possui um único elemento.
- Conjunto finito é aquele que possui uma quantidade numerável de elementos.
  Exemplos:
  A = { }
  B = {x | x é mês do ano}
  C = {7, 10, 25}
- Conjunto infinito é aquele que apresenta quantidade ilimitada de elementos.
  Exemplos:
  $\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, 3, 4,...}
  T = {$x \in \mathbb{R}$ | $1 < x \leq 2$}

Número de elementos de um conjunto

Se, por exemplo, um conjunto P possui 5 elementos, então diz-se que n(P) = 5.

Outros exemplos:
$A = \varnothing \Rightarrow n(A) = 0$
$B = \{4\} \Rightarrow n(B) = 1$
$C = \{2, 3, 5, 7, 11,...\} \Rightarrow n(C) = \infty$
$D = \{\varnothing\} \Rightarrow n(D) = 1$

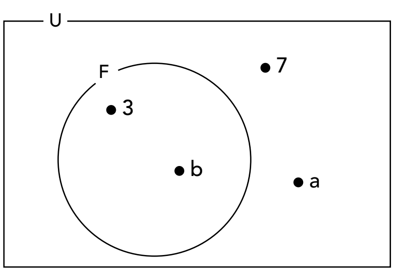
Tome nota

Lembre-se de que elementos repetidos não são considerados.
Exemplo:
$E = \{2, 3, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(E) = 5$.

Pertinência

Para indicar que um objeto é ou não elemento de um determinado conjunto, utilizam-se, respectivamente, o símbolo pertence ($\in$) e não pertence ($\notin$).

Exemplo:



$$\begin{cases} 3 \in F \\ a \notin F \end{cases}$$

Inclusão

Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B quando todos os elementos de A são também elementos de B. Nesse caso, utiliza-se o símbolo contido ($\subset$); do contrário, ou seja, se nem todo elemento de A for elemento de B, utiliza-se o símbolo de não contido ($\not\subset$).

Exemplo:

$$\begin{matrix} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \not\subset A \end{cases}$$

- Um conjunto M está contido em um conjunto N, e a recíproca é verdadeira se e somente se eles forem iguais, uma vez que possuem exatamente os mesmos elementos.
  Exemplo:
  $M = \{a, 2, b, 2\} \Rightarrow n(M) = 3$
  $N = \{b, 2, a\} \Rightarrow n(N) = 3$
  Note que:
  $$\left.\begin{matrix} M \subset N \\ N \subset M \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow M = N$$
- Se dado conjunto D é subconjunto de um outro conjunto F, pode-se representar essa situação por meio da sentença: $D \subset F$ (lê-se D está contido em F). Entretanto, uma forma equivalente de expressar a mesma ideia é: $F \supset D$ (lê-se F contém D).
  Exemplo:
  $D = \{a, 1\} \Rightarrow n(D) = 2$
  $F = \{1, a, 3\} \Rightarrow n(F) = 3$
  Note que $D \subset F$ ou $F \supset D$.

Obviamente que, se, de maneira análoga, determinado conjunto T não é subconjunto de um outro conjunto S, pode-se representar essa situação utilizando a sentença $T \not\subset S$ (lê-se T não está contido em S). É possível expressar a mesma ideia da seguinte maneira: $S \not\supset T$ (lê-se S não contém T).

Exemplo:

$T = \{1, 2, a\} \Rightarrow n(T) = 3$
$S = \{1, 2, b\} \Rightarrow n(S) = 3$

Note que $T \not\subset S$ ou $S \not\supset T$.

Tome nota

- O conjunto vazio é subconjunto de todo conjunto.
- Todo conjunto é subconjunto de si mesmo.

Número de subconjuntos

Seja um conjunto E, tal que $E = \{1, a, 7\}$. Os subconjuntos de E são (em ordem crescente de elementos):

$\varnothing$; $\{1\}$; $\{a\}$; $\{7\}$; $\{1, a\}$; $\{1, 7\}$; $\{a, 7\}$; $\{1, a, 7\} = E$

Verifica-se que cada um dos três elementos de E pertencem ou não a cada um de seus oito subconjuntos.

Portanto:

- **$\varnothing$** – nenhum dos três elementos pertence a esse subconjunto;
- **{1}** – o elemento 1 pertence, os outros dois elementos não pertencem a esse subconjunto;
- **{a}** – o elemento **a** pertence, os outros dois elementos não pertencem a esse subconjunto;

  ⋮
- **{1, 7}** – os elementos 1 e 7 pertencem, o elemento **a** não pertence a esse subconjunto;

  ⋮
- **{1, a, 7}** – todos os três elementos pertencem a esse subconjunto.

Dessa forma, é possível afirmar, pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo da Análise Combinatória, que a quantidade de subconjuntos do conjunto E é dada por:

$$\begin{matrix}\text{Número de} \\ \text{subconjuntos}\end{matrix} = \underset{\left(\begin{matrix}\text{Elemento 1} \\ \text{pertence ou} \\ \text{não a} \\ \text{um certo} \\ \text{subconjunto}\end{matrix}\right)}{\underline{\quad 2 \quad}} \cdot \underset{\left(\begin{matrix}\text{Elemento } \mathbf{a} \\ \text{pertence ou} \\ \text{não a} \\ \text{um certo} \\ \text{subconjunto}\end{matrix}\right)}{\underline{\quad 2 \quad}} \cdot \underset{\left(\begin{matrix}\text{Elemento 7} \\ \text{pertence ou} \\ \text{não a} \\ \text{um certo} \\ \text{subconjunto}\end{matrix}\right)}{\underline{\quad 2 \quad}}$$

Número de subconjuntos de $E = 2^3 = 8$.

Portanto, genericamente, é possível afirmar que um conjunto com **n** elementos possui 2^n subconjuntos.

Conjunto das partes de um conjunto

O conjunto das partes de um conjunto é aquele cujos elementos são subconjuntos de um outro conjunto. Observe o seguinte exemplo:

$F = \{\varnothing, 2, \{4\}\}$

São subconjuntos de F:

$\varnothing$; $\{\varnothing\}$; $\{2\}$; $\{\{4\}\}$; $\{\varnothing, 2\}$; $\{\varnothing, \{4\}\}$; $\{2, \{4\}\}$; $\{\varnothing, 2, \{4\}\} = F$

O conjunto das partes de F, cujo símbolo é P(F) é dado por:

P(F) = {∅; {∅}; {2}; {{4}}; {∅, 2}; {∅, {4}}; {2, {4}}; F}

Note que o número de subconjuntos de F é igual à quantidade de elementos do conjunto das partes de F.
Sintetizando:

Número de subconjuntos de F = n[P(F)] = $2^{n(F)}$

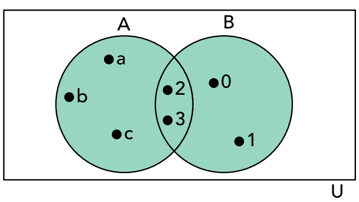
Operações e problemas envolvendo conjuntos

União (∪)

Conjunto união é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a, pelo menos, um dos conjuntos envolvidos na operação. Formalizando a ideia para dois conjuntos A e B, tem-se:

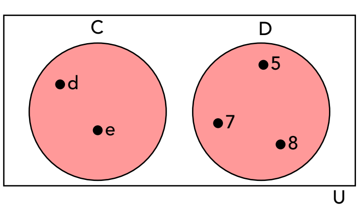
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Exemplo 1:



A = {a, b, c, 2, 3}
B = {0, 1, 2, 3}
A ∪ B = {a, b, c, 0, 1, 2, 3}

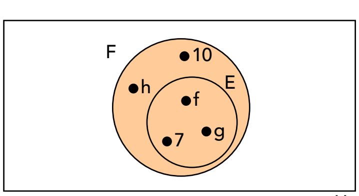
Exemplo 2:



C = {d, e}
D = {5, 7, 8}
C ∪ D = {d, e, 5, 7, 8}

Os conjuntos C e D são denominados disjuntos, uma vez que não possuem elementos comuns.

Exemplo 3:



E = {f, g, 7}
F = {7, f, g, h, 10}
E ∪ F = {7, f, g, h, 10) = F

Principais propriedades da união

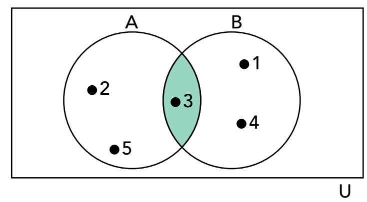
- A ∪ A = A
- A ∪ ∅ = A
- A ∪ B = B, se A ⊂ B
- A ∪ B = B ∪ A ⇒ propriedade comutativa

Interseção (∩)

Conjunto interseção é o conjunto formado por todos os elementos comuns a todos os conjuntos envolvidos na operação. Formalizando a ideia para dois conjuntos A e B, tem-se:

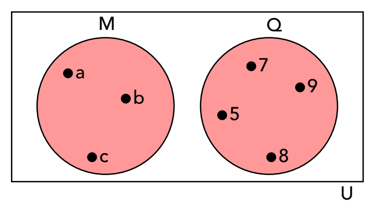
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

Exemplo 1:



A = {2, 3, 5}
B = {3, 1, 4}
A ∩ B = {3}

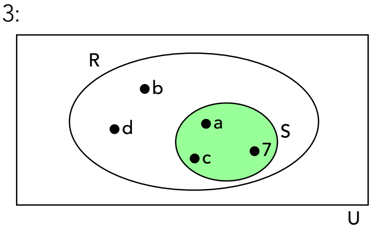
Exemplo 2:



M = {a, b, c}
Q = {5, 7, 9, 8}
M ∩ Q = { }

Lembre-se de que M e Q são conjuntos disjuntos, pois M ∩ Q = ∅.

Exemplo 3:



S = {a, 7, c}
R = {b, 7, c, d, a}
S ∩ R = {a, 7, c} = S

Principais propriedades da interseção

- A ∩ A = A
- A ∩ ∅ = ∅
- A ∩ B = A, se A ⊂ B
- A ∩ B = B ∩ A ⇒ propriedade comutativa
- A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) ⇒ propriedade distributiva da interseção em relação à união
- A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C) ⇒ propriedade distributiva da união em relação à interseção

Número de elementos de A × B

O conjunto A × B (lê-se A cartesiano B ou produto cartesiano de A com B) é o conjunto formado por todos os pares ordenados, de tal forma que a abscissa de cada par seja um elemento do conjunto A e a ordenada de cada par seja um elemento do conjunto B.

Exemplo:
$A = \{0, 1, 2\} \Rightarrow n(A) = 3$
$B = \{1, 3\} \Rightarrow n(B) = 2$
$A \times B = \{(0, 1); (0, 3); (1, 1); (1, 3); (2, 1); (2, 3)\}$

Como os elementos do conjunto A são as abscissas dos pares ordenados, e os elementos do conjunto B são as ordenadas, pelo Princípio Multiplicativo da Análise Combinatória, serão formados $3 \cdot 2 = 6$ pares ordenados. Assim, genericamente, tem-se a relação:

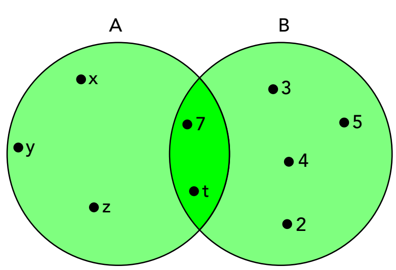
$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

Número de elementos da união

Para dois conjuntos A e B

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Exemplo:



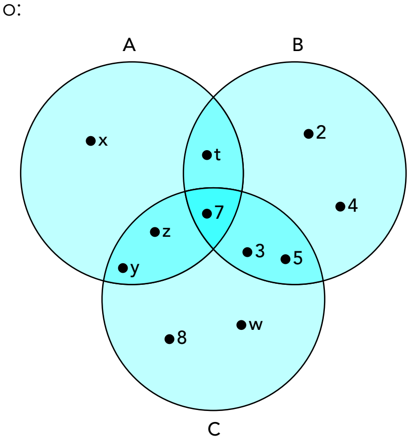
$A = \{x, y, z, t, 7\} \Rightarrow n(A) = 5$
$B = \{3, 5, 7, t, 2, 4\} \Rightarrow n(B) = 6$

Note que $n(A \cup B) = 5 + 6 - 2 \Rightarrow n(A \cup B) = 9$

Para três conjuntos A, B e C

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Exemplo:



$A = \{x, y, z, t, 7\} \Rightarrow n(A) = 5$
$B = \{3, 5, 7, t, 2, 4\} \Rightarrow n(B) = 6$
$C = \{7, 5, y, z, 3, w, 8\} \Rightarrow n(C) = 7$

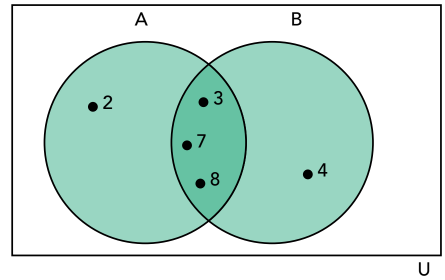
Note que: $n(A \cup B \cup C) = 5 + 6 + 7 - 2 - 3 - 3 + 1 \Rightarrow$
$n(A \cup B \cup C) = 11$

Subtração ou diferença entre conjuntos

O conjunto diferença entre dois conjuntos é aquele formado por todos os elementos que pertencem ao primeiro conjunto e não pertencem ao segundo. Formalizando, tem-se:

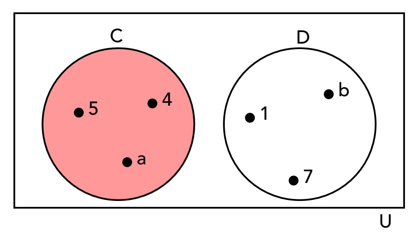
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplo 1:



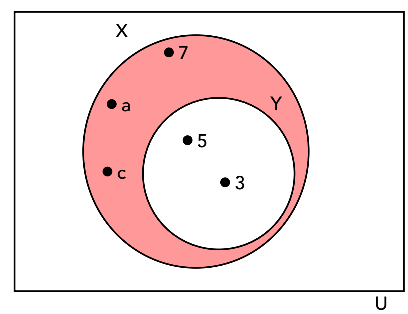
$A = \{2, 3, 7, 8\}$
$B = \{3, 4, 7, 8\}$
$A - B = \{2\}$

Exemplo 2:



$C = \{5, 4, a\}$
$D = \{1, b, 7\}$
$C - D = \{5, 4, a\} = C$

Exemplo 3:



$X = \{5, 3, 7, a, c\}$
$Y = \{5, 3\}$
$X - Y = \{7, a, c\}$

Tome nota

- $A - B \neq B - A$, ou seja, na operação diferença entre conjuntos, não se pode aplicar a propriedade comutativa.

  Portanto, para as situações apresentadas anteriormente, tem-se:

  Exemplo 1: $B - A = \{4\}$
  Exemplo 2: $D - C = \{1, b, 7\} = D$
  Exemplo 3: $Y - X = \varnothing$

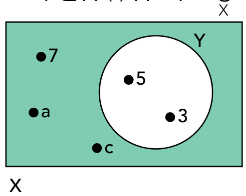
- Como visto no exemplo 3, não se trata somente de uma operação de diferença, mas também há um conjunto contido no outro. Veja novamente:

  $X = \{5, 3, 7, a, c\}$
  $Y = \{5, 3\}$
  $Y \subset X$

Nesse tipo de situação, surge o conjunto complementar, que é formado pela diferença entre dois conjuntos quando um deles está contido no outro.

Assim:

$Y \subset X \Leftrightarrow X - Y = C_X^Y = \{7, a, c\}$



C_X^Y (lê-se: complementar de Y em X ou complementar de Y em relação a X)

Outras simbologias adotadas:

$C_X^Y = X - Y = \overline{Y} = Y'$

Principais propriedades da diferença

- $A \cup \overline{A} = U$ (sendo U a representação do conjunto universo)
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $\overline{\overline{A}} = A$ (o complementar do conjunto complementar de A é igual ao próprio conjunto A)

Leis de De Morgan

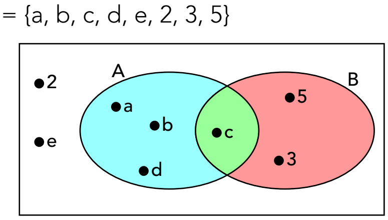
Augustus De Morgan nasceu na Índia e logo se mudou com seus pais para a Inglaterra, onde se tornou um respeitado matemático. Desenvolveu vários estudos no campo da Lógica Matemática e da Probabilidade. Entre esses estudos, está o das leis que levam seu nome e que são muito úteis para a Teoria dos Conjuntos, as quais serão apresentadas a seguir.

- "O complementar da união é igual à interseção dos complementares."

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Exemplo:

Sejam $A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{5, 3, c\}$
$U = \{a, b, c, d, e, 2, 3, 5\}$



Note que:
$A \cup B = \{a, b, c, d, 5, 3\}$
$\overline{A \cup B} = C_U^{(A \cup B)} = U - (A \cup B) = \{2, e\}$

Entretanto, tem-se:
$\overline{A} = \{2, 3, 5, e\}$
$\overline{B} = \{2, a, b, d, e\}$
$\overline{A} \cap \overline{B} = \{2, e\}$

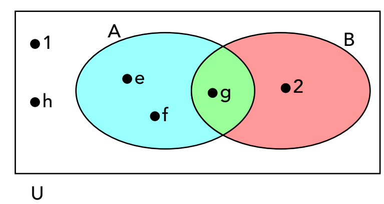
Iguais

- "O complementar da interseção é igual à união dos complementares."

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Exemplo:

Sejam $A = \{e, f, g\}$
$B = \{2, g\}$
$U = \{1, 2, e, f, g, h\}$



Note que:
$A \cap B = \{g\}$
$\overline{A \cap B} = \{1, 2, h, e, f\}$

Entretanto, tem-se:
$\overline{A} = \{1, h, 2\}$
$\overline{B} = \{1, e, f, h\}$
$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, h, e, f\}$

Iguais

Atividades para sala

1. Sejam **x** e **y** dois conjuntos quaisquer satisfazendo a seguinte propriedade: "A quantidade de subconjuntos de **x** é o dobro da quantidade de subconjuntos de **y**". Sendo n(x) o número de elementos do conjunto **x** e n(y) o número de elementos do conjunto **y**, é possível afirmar que

a) $n(x) = 2n(y)$.
b) $n(x) = 4n(y)$.
c) $n(x) = n(y) + 1$.
d) $n(x) = n(y) + 2$.
e) $n(x) = n(y) + 4$.

2. São considerados subconjuntos de $P = \{3; \varnothing; \{2\}\}$:

a) $\{2\}$ e $\varnothing$.
b) $\{\varnothing\}$ e $\{2\}$.
c) 3 e $\varnothing$.
d) $\{\{2\}\}$ e $\{\varnothing\}$.
e) $\{3\}$ e $\{2\}$.

3. Seja P(A) o conjunto das partes de A. Se M é um conjunto, tal que $M = \{\varnothing, 2\}$, é correto afirmar que P(M) possui exatamente

a) dois elementos.
b) três elementos.
c) quatro elementos.
d) seis elementos.
e) oito elementos.

4. Em uma enquete realizada com pessoas de idade superior a 30 anos, pesquisou-se as que estavam casadas ou não, e se tinham ou não filhos. Constatou-se que 45 pessoas não eram casadas, 49 não tinham filhos e 99 estavam casadas e com filhos.

Sabendo-se que 180 pessoas responderam a essa enquete, o número das que se declararam, simultaneamente, não casadas e sem filhos foi de

a) 12.
b) 13.
c) 14.
d) 15.
e) 16.

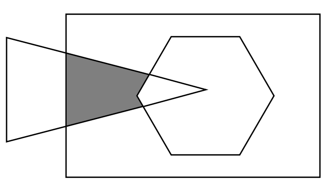
5. Em uma população de 400 pessoas foram realizados exames para detectar anemia e verminose. Dos resultados obtidos, observou-se que:

- 80% das pessoas que possuem anemia possuem também verminose;
- 50% das pessoas que possuem verminose possuem também anemia;
- 220 pessoas não possuem nem verminose e nem anemia.

Das 400 pessoas, a porcentagem que corresponde ao número de pessoas que possuem anemia é

a) 35%.
b) 32%.
c) 30%.
d) 27%.
e) 25%.

6. Na figura a seguir, R é um retângulo, T é um triângulo e H é um hexágono.



Então, é correto afirmar que a região destacada em cinza é dada por

a) $(H - T) \cap R$.
b) $T - H$.
c) $(R \cap T) - (T \cap H)$.
d) $(R \cap T)$.
e) $(R \cup T) - H$.

Atividades propostas

1. Seja o conjunto **x** tal que $x = \{2, \varnothing, \{b\}\}$; assim, $P(P(x))$ possui exatamente

a) 16 elementos.
b) 32 elementos.
c) 64 elementos.
d) 128 elementos.
e) 256 elementos.

2. Considere dois conjuntos A e B, tais que $A \subset B$, $A \cap B \neq \varnothing$ e $A \cup B \neq A$. Nessas condições, pode-se afirmar que

a) os conjuntos A e B são iguais, isto é: A = B.
b) o conjunto A possui a mesma quantidade de elementos que o conjunto B.
c) o conjunto A possui mais elementos que o conjunto B.
d) o conjunto A possui menos elementos que o conjunto B.
e) o conjunto A pode ser um conjunto vazio.

3. Sejam A e B dois conjuntos, tais que $n(A) = n(B) + 6$. Então, o valor de $\dfrac{n(P(A))}{n(P(B))}$ é igual a

a) 8.
b) 16.
c) 32.
d) 64.
e) 128.

4. Um auditório para 300 lugares possui cinco interruptores que ligam cinco sequências independentes de lâmpadas que iluminam todo o recinto. De quantas formas diferentes é possível iluminar esse auditório com pelo menos duas sequências de lâmpadas acesas?

a) 16
b) 20
c) 26
d) 31
e) 36

5. Atualmente, com o mundo cada vez mais globalizado, muitos países estão se associando em blocos comerciais, facilitando o fluxo de mercadorias, capitais e pessoas entre seus membros. Alguns desses blocos se destacam, como a União Europeia (bloco econômico de países europeus) e o NAFTA (que reúne Canadá, Estados Unidos e México). Alguns países da América do Sul – inclusive o Brasil – integram um bloco conhecido por Mercosul. Esse bloco incluía, em sua primeira formação, a Argentina, o Paraguai e o Uruguai, além do Brasil.

No mapa a seguir, é possível observar o conjunto de países do Mercosul.
Mercosul = {Argentina, Brasil, Paraguai, Uruguai, Venezuela}
Observando o mesmo mapa, pode ser definido outro conjunto, formado por todos os países situados na América do Sul.
América do Sul = {Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Equador, Guiana, Guiana Francesa, Paraguai, Peru, Suriname, Uruguai, Venezuela}.

CASTRO, Flávia Mensituri de. Equipe Técnica do CETEB. Projeto Piracema: *Geografia 3* – Ensino Médio. Distrito Federal: Editora CETEB, 2006. p. 57. (adaptado)

Considerando os conjuntos Mercosul e América do Sul, julgue verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmativas a seguir.

( ) A Argentina ∈, ao mesmo tempo, a dois conjuntos: ao conjunto de países da América do Sul e ao conjunto de países do Mercosul.

( ) A Colômbia ∈ ao conjunto de países da América do Sul mas ∉ ao conjunto de países do Mercosul.
( ) O México ∉ ao conjunto de países da América do Sul e ∈ ao conjunto de países do Mercosul.
( ) Como todos os países-membros do Mercosul estão na América do Sul, é possível afirmar que o conjunto de países da América do Sul ⊃ o conjunto de países do Mercosul. Em outras palavras, diz-se que o conjunto de países do Mercosul ⊂ no conjunto de países da América do Sul.

A ordem correta de preenchimento dos parênteses é

a) V, F, F, V.
b) V, V, F, F.
c) V, V, F, V.
d) F, V, F, V.
e) F, F, V, V.

6. Se n [P(P(A))] = $2^{4^{n-2}}$, sendo **n** o número de elementos de A e P(A) o seu conjunto das partes, pode-se afirmar que a quantidade de subconjuntos de A corresponde a

a) 2.
b) 4.
c) 8.
d) 16.
e) 32.

7. Uma empresa decidiu realizar uma pesquisa de mercado para o lançamento de um novo produto. Aos consumidores, foi perguntado o que é levado em consideração na hora de comprar um produto: preço (P) e/ou qualidade (Q). Cada consumidor entrevistado poderia escolher mais de um item da pesquisa, como mostra a tabela a seguir.

Característica do produto	Número de votos
P	60
Q	45
P e Q	35

Admitindo que todos os que foram entrevistados escolheram pelo menos um dos itens da pesquisa, o número de consumidores entrevistados foi de

a) 60.
b) 65.
c) 70.
d) 75.
e) 80.

8. Em uma escola que funciona em três períodos, 60% dos professores lecionam de manhã, 35% lecionam à tarde e 25% lecionam à noite. Nenhum professor da escola leciona tanto no período da manhã quanto no período da noite, mas todo professor leciona em pelo menos um período. Considerando-se apenas essas informações, assinale a alternativa em que os dados apresentados sobre esses professores são necessariamente verdadeiros.

	Professores da escola que lecionam somente no período da tarde representam, em relação ao total	Professores da escola que lecionam nos períodos da tarde e da noite representam, em relação ao total	Professores da escola que lecionam somente no período da noite representam, em relação ao total
a)	exatamente 15%	no máximo 20%	no mínimo 5%
b)	exatamente 15%	no mínimo 20%	no máximo 5%
c)	exatamente 20%	entre 5% e 15%	entre 10% e 20%
d)	exatamente 25%	no máximo 20%	no mínimo 5%
e)	exatamente 25%	no mínimo 20%	no máximo 5%

9. Um evento cultural ofereceu três atrações ao público: uma apresentação de dança, uma sessão de cinema e uma peça de teatro. O público total de participantes que assistiu a pelo menos uma das atrações foi de 200 pessoas. Sabe-se, também, que 115 pessoas compareceram ao cinema, 95 à dança e 90 ao teatro. Além disso, constatou-se que 40% dos que foram ao teatro não foram ao cinema, sendo que, destes, 25% foram apenas ao teatro. Outra informação levantada pela organização do evento foi que o público que assistiu a mais de uma atração é igual ao dobro dos que assistiram somente à apresentação de dança.

Se apenas duas pessoas compareceram a todas as atrações, então a quantidade de pessoas que assistiu a somente uma das atrações é

a) 98.
b) 102.
c) 114.
d) 120.
e) 152.

10. O número de alunos matriculados nas disciplinas Álgebra A, Cálculo II e Geometria Analítica é 120. Constatou-se que 6 deles cursam simultaneamente Cálculo II e Geometria Analítica e que 40 cursam somente Geometria Analítica. Os alunos matriculados em Álgebra A não cursam Cálculo II nem Geometria Analítica. Sabendo que a turma de Cálculo II tem 60 alunos, então o número de estudantes em Álgebra A é

a) 8.
b) 14.
c) 20.
d) 26.
e) 32.

11. Dentro de um grupo de tradutores de livros, todos os que falam alemão também falam inglês, mas nenhum que fala inglês fala japonês. Além disso, os dois únicos que falam russo também falam coreano. Sabendo que todo integrante desse grupo que fala coreano também fala japonês, pode-se concluir que, necessariamente,

a) todos os tradutores que falam japonês também falam russo.
b) todos os tradutores que falam alemão também falam coreano.
c) pelo menos um tradutor que fala inglês também fala coreano.
d) nenhum dos tradutores fala japonês e também russo.
e) nenhum dos tradutores fala russo e também alemão.

12. Uma ONG Antidrogas realizou uma pesquisa sobre o uso de drogas em uma cidade com 200 mil habitantes adultos. Os resultados mostraram que 11% dos entrevistados que vivem na cidade pesquisada são dependentes de álcool, 9% são dependentes de tabaco, 5% são dependentes de cocaína, 4% são dependentes de álcool e tabaco, 3% são dependentes de tabaco e cocaína, 2% são dependentes de álcool e cocaína e 1% dependente das três drogas mencionadas na pesquisa. O número de habitantes que não usa nenhum tipo de droga mencionada na pesquisa é

a) 146 000.
b) 150 000.
c) 158 000.
d) 160 000.
e) 166 000.

Conhecimentos numéricos

C	1
H	3,4,5

Módulo 2

Conjuntos numéricos; Relação binária; Conceito de função

Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

Os números naturais surgiram para suprir uma necessidade primária do ser humano: a da contagem. Desse modo, para quantificar, por exemplo, as cabeças de gado, os pés de milho ou as próprias pessoas, utilizam-se os números naturais.

Assim:

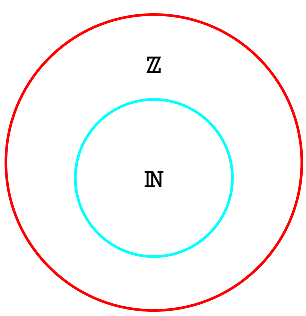
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Excluindo-se o zero, é formado o conjunto dos números naturais não nulos, indicados por $\mathbb{N}^*$, que é um subconjunto de $\mathbb{N}$.

O asterisco indica ausência do número zero no conjunto.

Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

Com o advento das operações de adição e subtração, surgiram os números inteiros. Em sua essência, representam possíveis ganhos (números positivos) ou perdas (números negativos), ou seja, somando ou subtraindo números inteiros, serão obtidos números inteiros.



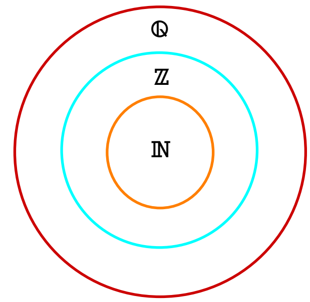
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

Devido, principalmente, ao surgimento da necessidade da operação de divisão, criaram-se os números racionais, uma vez que, ao dividir-se um número inteiro por outro, não se obtém, necessariamente, um número inteiro.

Além do conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) e do conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), também são subconjuntos especiais do conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$):

- Conjunto dos números racionais não nulos:
  $\mathbb{Q}^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \notin 0\}$
- Conjunto dos números racionais não negativos:
  $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$
- Conjunto dos números racionais positivos:
  $\mathbb{Q}_+^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$
- Conjunto dos números racionais não positivos:
  $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\}$
- Conjunto dos números racionais negativos:
  $\mathbb{Q}_-^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$)

Números como $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$, cuja representação decimal é infinita e não periódica, são chamados de números irracionais, isto é, não racionais. Sendo assim, não são inteiros nem razão de dois inteiros, mas podem representar medidas no mundo real, como a medida da diagonal do quadrado de lado igual a 1, por exemplo.

Veja outros exemplos de números irracionais:

- 0,1234567891011...
- 1,0100200030000400005...
- $\sqrt{3} = 1{,}7320508$
- $\pi = 3{,}141592...$

Esse último exemplo ($\pi = 3{,}141592...$) é o mais conhecido dos números irracionais. Esse número é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro (2R):

$$\frac{C}{2R} = \pi$$

Veja mais alguns exemplos de números irracionais.

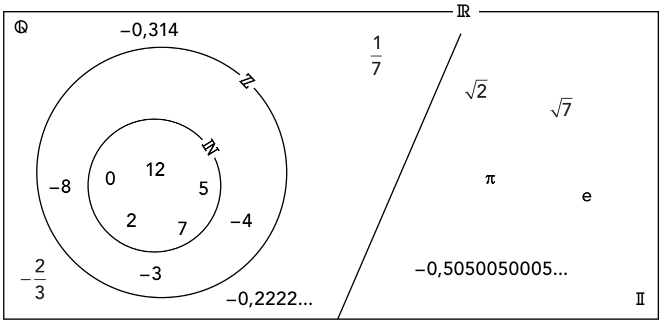
- 0,101001000...
- $e \cong 2{,}7182818284...$
- $\sqrt{5} \cong 2{,}2360679...$
- $\log 2 \cong 0{,}30103...$
- $\log 3 \cong 0{,}4771212...$
- $\log 5 \cong 0{,}69897...$

Considerando $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais (serão citados a seguir), tem-se que:

$$\mathbb{I} = C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{Q}}$$

Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

Todo número real ou é racional ou irracional. Observe os diagramas a seguir com alguns elementos em seus respectivos conjuntos numéricos.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Alguns subconjuntos de ℝ

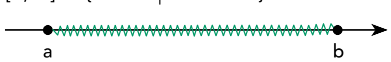
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (reais nulos)
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ (reais não negativos)
- $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ (reais não positivos)
- $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ (reais estritamente positivos)
- $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ (reais estritamente negativos)

Intervalos

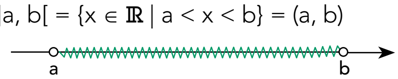
Denomina-se intervalo qualquer subconjunto dos números reais.

Intervalos finitos (a < b)

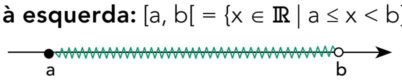
- **Fechado:** $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



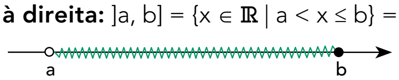
- **Aberto:** $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} = (a, b)$



- **Fechado à esquerda:** $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a, b)$



- **Fechado à direita:** $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} = (a, b]$

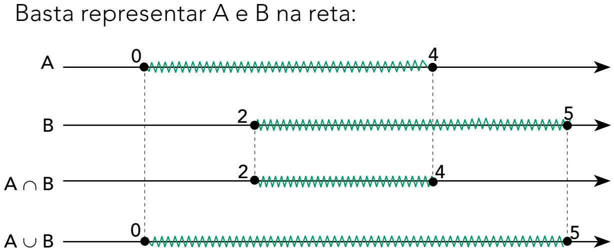


Exemplo 1:

Sendo $A = [0, 4]$ e $B = [2, 5]$, determine $A \cap B$ e $A \cup B$.

Resolução:

Basta representar A e B na reta:



Obtendo-se $A \cap B = [2, 4]$ e $A \cup B = [0, 5]$.

Portanto: $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\} = [2, 4]$

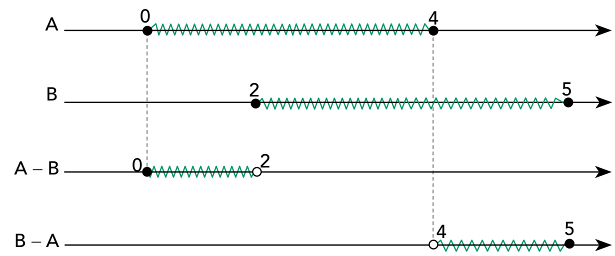
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\} = [0, 5]$

Exemplo 2:

Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$, determine $A - B$ e $B - A$.

Resolução:

Representação geométrica:



$A - B = [0, 2[$. Observe que o extremo direito $2 \notin (A - B)$, pois $2 \in B$.

$B - A =]4, 5]$. Observe que o extremo esquerdo $4 \notin (B - A)$, pois $4 \in A$.

Portanto: $A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\} = [0, 2[= [0, 2)$

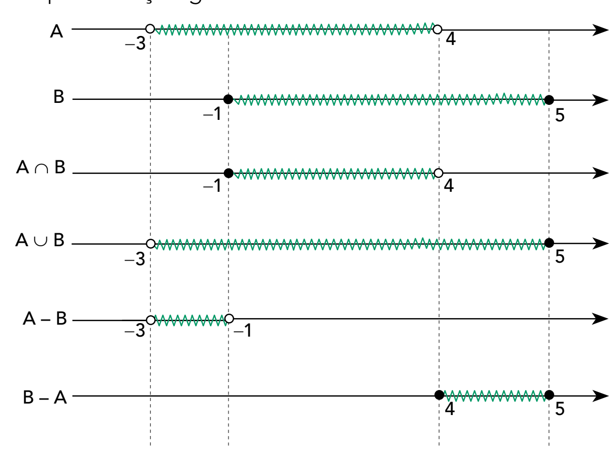
$B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 5\} =]4, 5] = (4, 5]$

Exemplo 3:

Sendo $A =]-3, 4[$ e $B = [-1, 5]$, determine $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ e $B - A$.

Resolução:

Representação geométrica:



Portanto: $A \cap B = [-1, 4[= [-1, 4)$

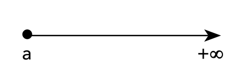
$A \cup B =]-3, 5] = (-3, 5]$

$A - B =]-3, -1[= (-3, -1)$

$B - A = [4, 5]$

Intervalos infinitos

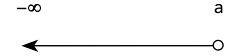
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = [a, +\infty) \Rightarrow$



- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} =]a, +\infty) \Rightarrow$

- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} = (-\infty, a] \Rightarrow$

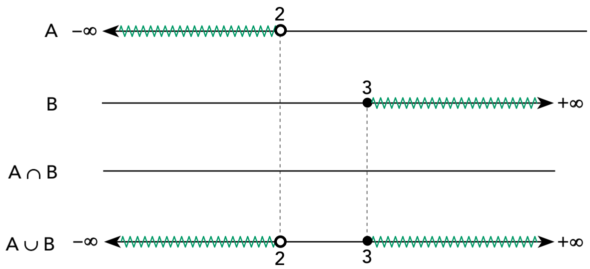
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} = (-\infty, a) \Rightarrow$



Exemplo 1:

Sendo $A = (-\infty, 2[$ e $B = [3, +\infty)$, determine $A \cap B$ e $A \cup B$.

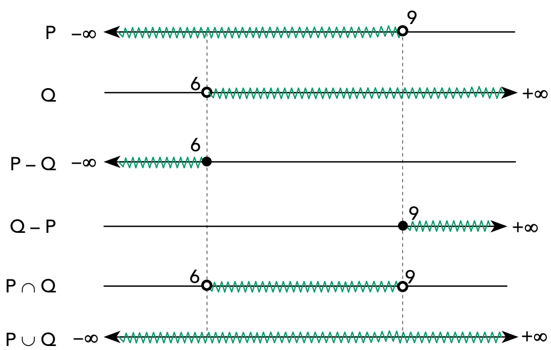
Resolução:
Representação geométrica:



Portanto: $A \cap B = \varnothing$
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x \geq 3\}$

Exemplo 2:
Sendo $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 9\}$ e $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$, determine $P - Q$, $Q - P$, $P \cap Q$ e $P \cup Q$.

Resolução:
Representação geométrica:



Portanto: $P - Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\} = (-\infty, 6]$
$Q - P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 9\} = [9, +\infty)$
$P \cap Q = \{x \in \mathbb{R} \mid 6 < x < 9\} = (6, 9)$
$P \cup Q = \{x \in \mathbb{R}\} =]-\infty, +\infty[= (-\infty, +\infty)$

Relação binária e conjuntos

Conjunto

Baseado no exemplo exposto anteriormente, pode-se entender conjunto como uma coleção de objetos quaisquer, enquanto os seus componentes são denominados **elementos**.

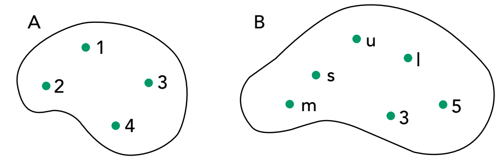
Exemplos:

- Conjunto das vogais da palavra **estudar** = {a, e, u}.
  Esse conjunto é formado pelos elementos **a**, **e** e **u**.
- Conjunto dos números primos menores que vinte = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}.
  Esse conjunto é formado pelos elementos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Representação de um conjunto

É bastante comum usar uma letra maiúscula para indicar um conjunto, mas também é possível representá-lo sob a forma:

- **Tabular (de tabela) –** Os elementos são colocados entre chaves e separados por vírgula.
  Exemplo: R = {a, m, t}
- **De uma propriedade –** Os elementos obedecem a uma determinada propriedade.
  Exemplo: $S = \{x \mid x$ é natural menor que seis$\}$
- **De diagrama –** Os elementos ficam dispostos no interior de uma curva fechada simples.
  Exemplo:



Conjuntos notáveis

- **Conjunto unitário –** Conjunto que possui apenas um elemento.
  Exemplo: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x$ é par e primo$\} = \{2\}$
- **Conjunto vazio –** Conjunto que não possui elemento algum.
  Exemplo: $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\} = \{\ \}$

Tome nota

- O conjunto vazio possui as notações { } ou ∅.
- A representação {∅} não indica conjunto vazio, e sim um conjunto unitário.

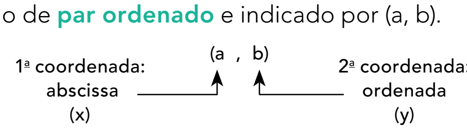
- **Conjunto solução ou conjunto verdade –** Conjunto cujos elementos verificam sentenças.
  Exemplo: a equação $x^2 - 7x + 12 = 0$ admite $x = 3$ ou $x = 4$ como solução. Então, diz-se que o conjunto solução (S) ou conjunto verdade dessa equação é {3, 4}.
- **Conjunto universo –** Conjunto que contém os possíveis conjuntos solução.
  Exemplo: $L = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x + 10 = 0\}$. O conjunto L é representado como {–5}, e $\mathbb{Z}$ é o conjunto universo da equação $2x + 10 = 0$.
- **Conjunto finito –** Conjunto que possui número finito de elementos.
  Exemplo: P = {1, 2, 3, ..., 100}. O conjunto P possui 100 elementos.
- **Conjunto infinito –** Conjunto que possui número infinito de elementos.
  Exemplo: $H = \{x \mid x$ é múltiplo positivo de $10\} = \{10, 20, 30, 40, ...\}$.

Igualdade de conjuntos

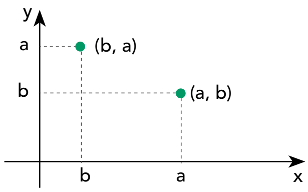
Considere os conjuntos A = {7, 3, m, u} e L = {m, 3, 7, u}. Veja que todos os elementos de A coincidem com todos os elementos de L. Por isso, A = L. Já no caso de M = {1, 2, 3} e N = {7, 1, 2, 3}, o elemento 7, que pertence a N, não pertence a M. Daí, $M \neq N$. Dois conjuntos são iguais se possuírem os mesmos elementos.

Par ordenado

Dados dois elementos, **a** e **b**, pode-se formar um conjunto com ambos de modo que a ordem influencie na sua formação. Tal conjunto ordenado formado por dois elementos é chamado de **par ordenado** e indicado por (a, b).



Os pares ordenados (a, b) e (b, a) são representados por meio de pontos no plano cartesiano da seguinte forma:



Convém lembrar que, se $a \neq b$, então $(a, b) \neq (b, a)$.

Igualdade de pares ordenados

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Produto cartesiano

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Chama-se de produto cartesiano de A por B (indicado por $A \times B$) o conjunto de todos os pares ordenados com o primeiro elemento em A e o segundo elemento em B, isto é:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Escreve-se $A \times B$, lê-se "A cartesiano B".

Propriedades

- $A \times \varnothing = \varnothing$
- $\varnothing \times B = \varnothing$
- Se $A \neq B$, $A \neq \varnothing$ e $B \neq \varnothing$, então $A \times B \neq B \times A$
- $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

Relação binária

Dados dois conjuntos A e B, chama-se de relação binária de A em B todo subconjunto R de $A \times B$.

$$R \text{ é relação binária de A em B} \Leftrightarrow R \subset A \times B$$

Propriedades

- Todo produto cartesiano $A \times B$ possui uma relação binária vazia ($\exists R = \varnothing$).
- Todo produto cartesiano $A \times B$ é relação binária de A em B ($\exists R = A \times B$).
- Número de relações binárias de A em B: $n(RA \to B) = 2^{(n(A) \cdot n(B))}$.

Domínio e imagem de uma relação

Sendo R uma relação de A em B, pode-se definir:

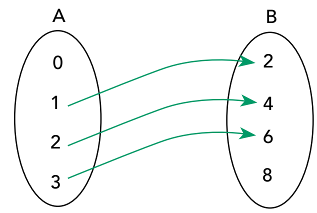
- **Domínio de R –** Conjunto D(R) de todos os primeiros elementos dos pares ordenados (x, y) que pertencem a R, ou seja, D(R) é o conjunto de todos os valores de **x** que foram usados. Note que $D(R) \subset A$.
- **Imagem de R –** Conjunto Im(R) de todos os segundos elementos dos pares ordenados (x, y) que pertencem a R, ou seja, Im(R) é o conjunto de todos os valores de **y** que foram usados. Note que $Im(R) \subset B$.

Exemplo:
Dados $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

Pode-se definir uma relação binária R tal que:

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$$

Representando essa relação em diagramas, tem-se:



Assim:
$D(R) = \{1, 2, 3\}$ e $Im(R) = \{2, 4, 6\}$

Relação inversa

Dada uma relação binária R de A em B, sua relação inversa R^{-1} é dada pelo conjunto formado pelos pares ordenados obtidos a partir dos pares ordenados de R, invertendo-se a ordem dos termos em cada par.

Assim:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

Exemplo:
Se $R = \{(1, 2); (3, 4)\}$, então $R^{-1} = \{(2, 1); (4, 3)\}$.

Conceito de função

Situação-problema

Um moderno avião é capaz de manter uma velocidade média de cruzeiro de aproximadamente 800 km/h.

Qual é a distância percorrida pelo avião em 30 minutos, uma hora e três horas?

Em quanto tempo o avião percorre 4 200 km?

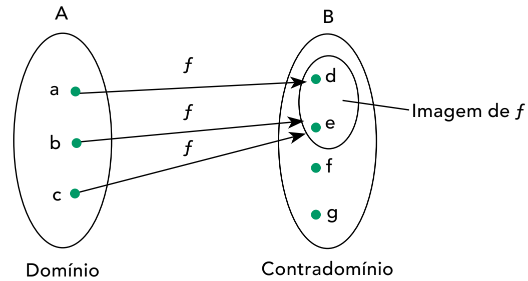
Dados os conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de função de A em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existir um único $y \in B$, tal que $(x, y) \in f$.

$$f \text{ é função de A em B} \Rightarrow (\forall x \in A, \exists| y \in B / (x, y) \in f)$$

Ressaltando as condições que devem ser satisfeitas para que uma relação f de A em B seja uma função, tem-se:

- É necessário que **todo elemento** $x \in A$ participe de, pelo menos, um par ordenado $(x, y) \in f$ (não pode haver exceções).
- É necessário que cada elemento $x \in A$ participe de **apenas um** par ordenado $(x, y) \in f$ (não pode haver ambiguidades).

Representação por meio de diagramas



- De **todo elemento** do domínio A parte uma seta em direção ao contradomínio B.
- De cada elemento do domínio A parte **uma única seta** em direção ao contradomínio B.
- Não é necessário que todos os elementos do contradomínio B sejam ponto de chegada de uma seta nem que a cada elemento do contradomínio B chegue uma única seta.

Funções definidas por regras ou fórmulas matemáticas

Grande parte das funções estudadas é determinada por fórmulas matemáticas.

Anteriormente, verificou-se uma correspondência entre a distância percorrida por um avião em função do número de horas (distância percorrida = 800 vezes o número de horas).

Essa função pode ser expressa pela seguinte fórmula matemática:

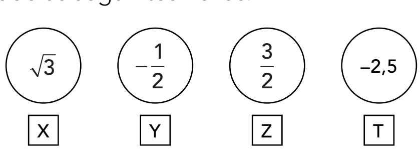
$$y = 800 \cdot x \text{ ou } f(x) = 800x$$

Veja outras funções expressas por fórmulas matemáticas:

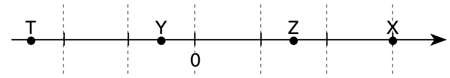
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada número real **x** associa ao seu dobro $\to f(x) = 2x$ ou $y = 2x$.
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada número real **x** associa ao seu cubo $\to f(x) = x^3$ ou $y = x^3$.
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada número real **x** associa ao seu triplo somado a 1 $\to f(x) = 3x + 1$ ou $y = 3x + 1$.

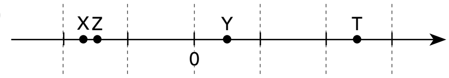
Atividades para sala

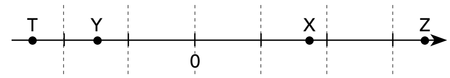
1. (ENEM) Em um jogo educativo, o tabuleiro é uma representação da reta numérica e o jogador deve posicionar as fichas contendo números reais corretamente no tabuleiro, cujas linhas pontilhadas equivalem a 1 (uma) unidade de medida. Cada acerto vale 10 pontos. Na sua vez de jogar, Clara recebe as seguintes fichas:

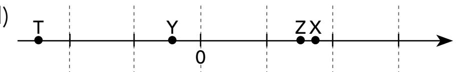


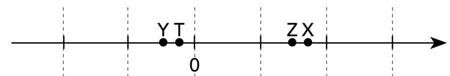
Para que Clara atinja 40 pontos nessa rodada, a figura que representa seu jogo, após a colocação das fichas no tabuleiro, é:

a)


b)


c)


d)


e)


2. Tendo como universo o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e, considerando os conjuntos $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, $\mathbb{Q}$ dos números racionais e $\mathbb{N}$ dos naturais, qual dos números não pertence ao conjunto $(\mathbb{Q} - \mathbb{N})^C \cup \mathbb{Z}$?

a) $\sqrt{2}$
b) 0
c) –1
d) π
e) 2,13

3. **Algarismos significativos**

Os algarismos significativos são os algarismos que têm importância na exatidão de um número, por exemplo, o número 2,67 tem três algarismos significativos. Se expressarmos o número como 2,6700, entretanto, temos cinco algarismos significativos, pois os zeros à direita dão maior exatidão para o número. Os exemplos a seguir têm quatro algarismos significativos:

56,00 – 0,2301 – 00000,00001000 – 1 034.

Todos os algarismos de um número que contenham potência de dez (notação científica, por exemplo), serão significativos, exceto a própria potência, veja por quê:

$$785{,}4 = 7{,}854 \cdot 10^2.$$

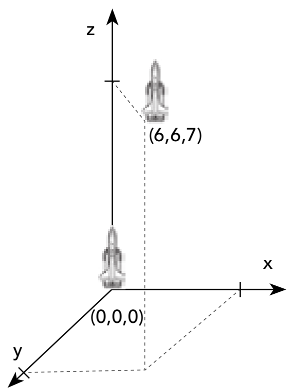
Ambos têm os algarismos 7854 seguidos; a potência de dez apenas moverá a vírgula, que não afeta a quantidade de algarismos significativos. Zeros à esquerda não são algarismos significativos, como em 000000000003 que possui apenas um algarismo significativo.

Lucas Martins. Bacharel em Sistemas de Informação pela Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: <http://www.infoescola.com>. Acesso em: 6 jun. 2014.

Uma reunião de engenheiros foi realizada e cada um deles recebeu um número de dois algarismos significativos distintos para participarem de um sorteio. Por um erro cometido na distribuição dos números, no sorteio, dois engenheiros foram contemplados, pois possuíam o mesmo número. Qual a quantidade mínima de engenheiros que participaram para garantir essa coincidência?

a) 79
b) 80
c) 81
d) 82
e) 83

4. (ENEM) Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e, após alguns segundos, atingiu a posição (6, 6, 7) no espaço, conforme mostra a figura. As distâncias são medidas em quilômetros.



Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente, na direção do eixo **x**; 3 km para trás, na direção do eixo **y**; e 11 km para frente, na direção do eixo **z**; então, o foguete atingiu a posição

a) (17, 3, 9).
b) (8, 3, 18).
c) (6, 18, 3).
d) (4, 9, –4).
e) (3, 8, 18).

Texto para a questão 5.

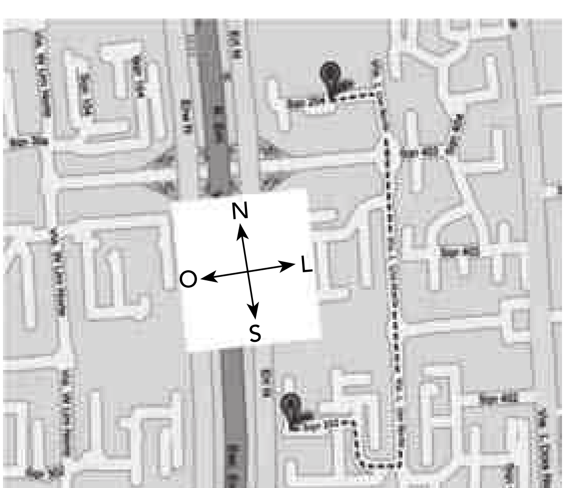
As atividades de comunicação humana são plurais e estão intimamente ligadas às necessidades de sobrevivência. O problema de contagem, por exemplo, se confunde com a própria história humana no decorrer dos tempos. [...] Os índios mundurucus, do sul do Pará, os uaimiris-atroaris, contam somente de um até cinco, adotando os seguintes vocábulos: *awynimi* é o número 1, *typytyna* é o 2, *takynima* é o 3, *takyninapa* é o 4, e, finalmente, *warenipa* é o 5.

ETNOMATEMÁTICA, *Scientific American Brasil*. Edição Especial, n. 35, 2001. (adaptado)

5. Considere A o conjunto formado pelos números utilizados no sistema de contagem dos uaimiris-atroaris, ou seja, A = {1, 2, 3, 4, 5}. Nessas condições, o número de elementos da relação $R_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid y \geq x\}$ é igual a

a) 5.
b) 10.
c) 15.
d) 20.
e) 25.

6. (ENEM) João é morador de Brasília, a capital do Brasil. Ele mora na SQN 202, trabalha na SQN 204 e percorre diariamente o trajeto indicado no mapa adiante, seguindo de A até B.

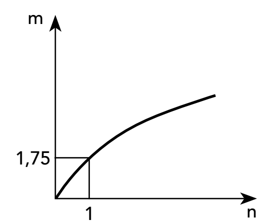


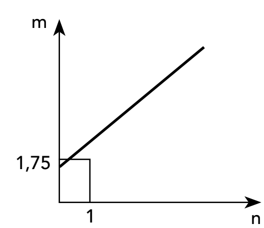
Orientando-se pelos pontos cardeais desenhados no mapa, qual é a orientação da trajetória que João deve seguir desde sua residência até seu local de trabalho?

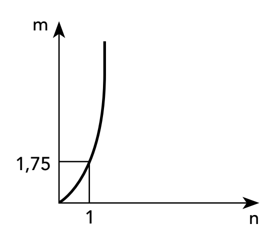
a) Oeste – Norte – Oeste
b) Oeste – Leste – Oeste
c) Leste – Leste – Norte – Oeste
d) Leste – Sul – Leste – Norte – Oeste
e) Oeste – Sul – Oeste – Norte – Oeste

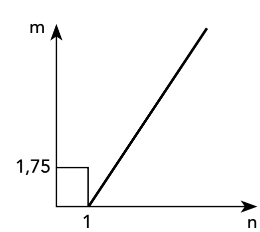
7. (ENEM) As frutas, que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independentemente da época ou da variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

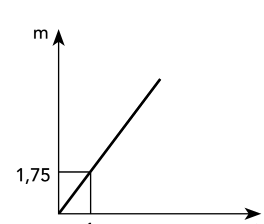
Dos gráficos a seguir, o que representa o preço **m** pago em reais pela compra de **n** quilogramas desse produto é

a)


b)


c)


d)


e)


8. (ENEM) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações a seguir:

- $Q_O = -20 + 4P$
- $Q_D = 46 - 2P$

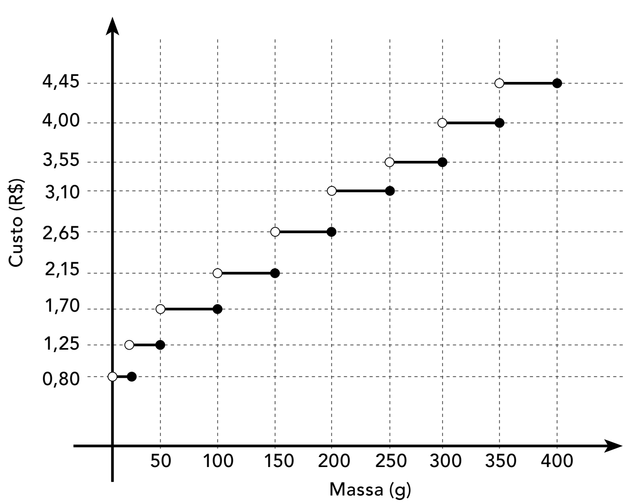
Q_O é a quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e P é o preço do produto.

Com base nessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontraram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam.

Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

a) 5
b) 11
c) 13
d) 23
e) 33

9. (ENEM) Deseja-se postar cartas não comerciais, sendo duas de 100 g, três de 200 g e uma de 350 g. O gráfico a seguir mostra o custo para enviar uma carta não comercial pelos Correios:



Disponível em: <http://www.correios.com.br>. Acesso em: 2 ago. 2012. (adaptado)

O valor total gasto, em reais, para postar essas cartas é de

a) 8,35.
b) 12,50.
c) 14,40.
d) 15,35.
e) 18,50.

Atividades propostas

1. Dados os conjuntos:

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é um número real}\}$
$\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ é um número racional}\}$
$\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ é um número natural}\}$
$\mathbb{P} = \{x \mid x \text{ é um número primo}\}$

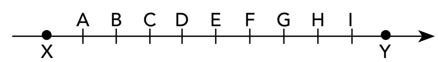
Agora considere as afirmações:

I. $\mathbb{P} \subset \mathbb{Q}$
II. $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$
III. $\mathbb{P} \supset \mathbb{Q}$
IV. $6 \in (\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} \cap \mathbb{N} \cap \mathbb{P})$
V. $5 \in (\mathbb{Q} \cap \mathbb{P})$

Estão corretas apenas

a) I e III.
b) II e V.
c) III e IV.
d) IV e V.
e) I e V.

2. O segmento XY, indicado na reta numérica a seguir, está dividido em dez segmentos congruentes pelos pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I.



Admita que X e Y representem, respectivamente, os números $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{2}$.

O número que é representado pelo ponto D é

a) $\frac{1}{5}$.
b) $\frac{6}{15}$.
c) $\frac{8}{15}$.
d) $\frac{17}{30}$.
e) $\frac{7}{10}$.

3. (ENEM) Um estudante se cadastrou numa rede social na internet que exibe o índice de popularidade do usuário. Esse índice é a razão entre o número de admiradores do usuário e o número de pessoas que visitam seu perfil na rede. Ao acessar seu perfil hoje, o estudante descobriu que seu índice de popularidade é 0,3121212... O índice revela que as quantidades relativas de admiradores do estudante e pessoas que visitam seu perfil são

a) 103 em cada 330.
b) 104 em cada 333.
c) 104 em cada 3333.
d) 139 em cada 330.
e) 1039 em cada 3330.

4. Sendo N o conjunto dos inteiros positivos, considere os seguintes conjuntos:

$$A = \left\{x \in N; \frac{12}{x} \in N\right\} \text{ e } B = \left\{x \in N; \frac{x}{3} \in N\right\}$$

É verdade dizer que

a) A possui mais elementos que B.
b) A e B não possuem elementos em comum.
c) A é um subconjunto de B.
d) B é um subconjunto de A.
e) A e B possuem exatamente três elementos em comum.

5. Para recepcionar os 37 novos funcionários de uma agência, foi criada uma brincadeira na qual os novos funcionários deveriam ser divididos em grupos iguais (mesmo número de integrantes) que poderiam ter 5, 7, 8, 9 ou 10 integrantes. Das cinco opções de tamanhos dos grupos, a que deixa menos funcionários sem grupo é aquela em que os grupos têm número de integrantes igual a

a) 5.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

6. Leia o texto a seguir para responder à questão.

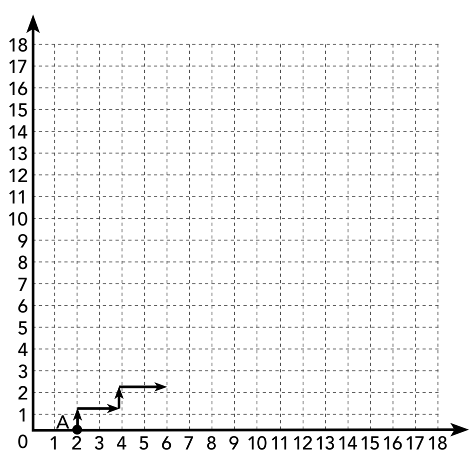
A produção de conhecimento que se materializa hoje nos currículos escolares é resultado dos estudos desenvolvidos e sistematizados ao longo de muitos anos. Um bom exemplo dessa realidade é o famoso Teorema de Pitágoras, descrito como: "O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos" (BOYER, 2010). Estreitamente ligado ao Teorema de Pitágoras está o problema de encontrar números inteiros **a**, **b** e **c** distintos que possam representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo, designado de terno pitagórico.

Disponível em: <http://www.univates.br/>. Acesso em: 23 maio 2016.

Considerando o texto e sendo $a = m$, $b = \frac{m^2 - 1}{2}$ e $c = \frac{m^2 + 1}{2}$, é correto afirmar que **a**, **b** e **c** constituem um terno pitagórico para qualquer

a) número inteiro **m** positivo.
b) número inteiro **m** ímpar.
c) número inteiro **m** positivo e par.
d) número inteiro **m** par maior do que 1.
e) número inteiro **m** ímpar maior do que 1.

7. (ENEM) O gráfico a seguir mostra o início da trajetória de um robô que parte do ponto A (2, 0), movimentando-se para cima ou para a direita, com velocidade de uma unidade de comprimento por segundo no plano cartesiano. O gráfico exemplifica uma trajetória desse robô, durante 6 segundos.



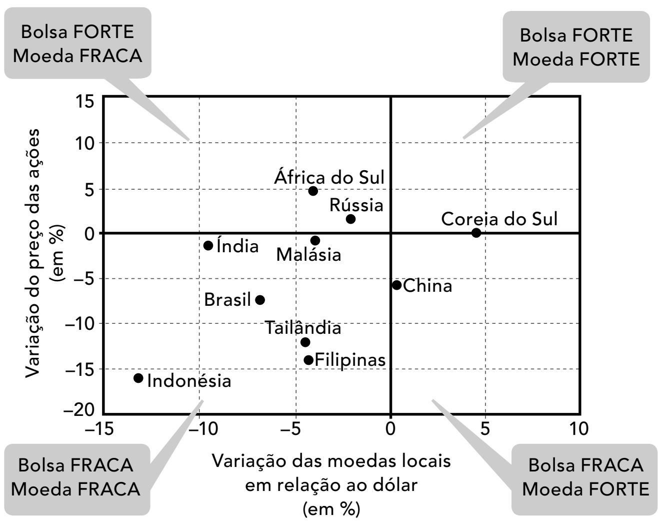
Supondo que esse robô continue essa mesma trajetória, qual será sua coordenada após 18 segundos de caminhada, contando o tempo a partir do ponto A?

a) (0,18)
b) (18,2)
c) (18,0)
d) (14,6)
e) (6,14)

8. Os conjuntos A e B têm, respectivamente, $5 - x$ e $3x$ elementos e $A \times B$ tem $8x + 2$ elementos. Então, pode-se admitir como verdadeiro que

a) A tem 5 elementos.
b) B tem 4 elementos.
c) B tem 6 elementos.
d) A tem mais de 6 elementos.
e) B tem menos de 3 elementos.

9. O gráfico a seguir mostra um cenário após uma crise financeira mundial em que se apresentam posições de diversos países relacionando-os com a variação de suas moedas locais em relação ao dólar e o preço das ações nas bolsas de valores.

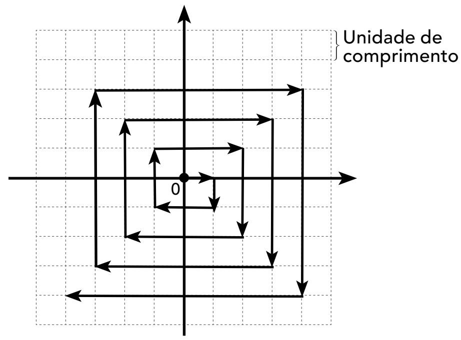


Exame, 13 nov. 2013.

Mediante os parâmetros mencionados,

a) a Rússia foi o país que melhor resistiu à crise, uma vez que a variação de sua moeda superou em muito a desvalorização no preço de suas ações.
b) o país que melhor resistiu à referida crise financeira foi a Coreia do Sul, pois sua moeda valorizou quase 5% em relação ao dólar, enquanto a variação do preço de suas ações se manteve inalterada.
c) o Brasil foi quem melhor resistiu à crise, pois ganhou tanto na valorização de sua moeda ante ao dólar quanto no preço de suas ações.
d) a China foi quem melhor resistiu à crise, pois teve leve alta em relação à sua moeda e boa valorização no preço de suas ações.
e) a África do Sul foi o país que melhor resistiu à crise, uma vez que a valorização no preço de suas ações superou em muito a perda da variação de sua moeda.

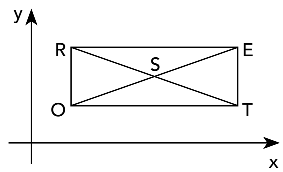
10. Uma formiga se desloca em espiral sobre um plano cartesiano, partindo da origem e indo de um ponto de coordenadas inteiras a outro, como mostra a figura, gastando um segundo para percorrer uma unidade de comprimento.



Após 3 minutos de deslocamento, sem nenhuma parada, a formiga estará no ponto

a) (–5, –7).
b) (–5, 7).
c) (7, 5).
d) (7, –4).
e) (7, –5).

11. No primeiro quadrante de um sistema de coordenadas cartesianas, foi desenhado o retângulo RETO, não quadrado, em que S é o encontro de suas diagonais, e seus lados são paralelos aos eixos, como mostra a figura a seguir.



Para cada um desses cinco pontos, calcula-se a razão $\frac{y}{x}$ entre a sua ordenada e a sua abscissa. Para qual desses pontos essa razão é a menor?

a) R
b) E
c) T
d) O
e) S

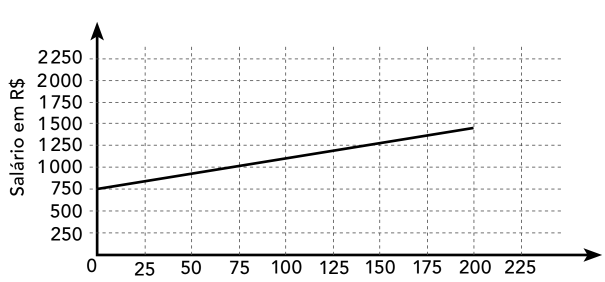
12. Os habitantes de um planeta chamado *Jumpspace* locomovem-se saltando. Para isto, realizam apenas um número inteiro de saltos de dois tipos, o *slow jump* (SJ) e o *quick jump* (QJ). Ao executarem um SJ, saltam sempre 20 u.d. (unidade de distância) para leste e 30 u.d. para norte. Já no QJ, saltam sempre 40 u.d. para oeste e 80 u.d. para sul. Um habitante desse planeta deseja chegar exatamente a um ponto situado 204 u.d. a leste e 278 u.d. ao norte de onde se encontra. Neste caso, é correto afirmar que o habitante

a) conseguirá alcançar seu objetivo, realizando 13 saltos SJ e 7 QJ.
b) conseguirá alcançar seu objetivo, realizando 7 saltos SJ e 13 QJ.
c) conseguirá alcançar seu objetivo, realizando 13 saltos SJ.
d) não conseguirá alcançar seu objetivo, pois não há número inteiro de saltos que lhe permita isso.
e) conseguirá alcançar seu objetivo, realizando 7 saltos QJ.

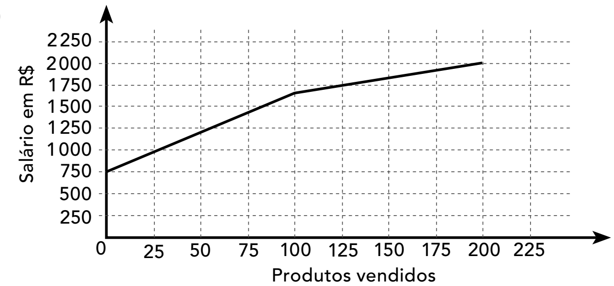
13. (ENEM) Certo vendedor tem seu salário mensal calculado da seguinte maneira: ele ganha um valor fixo de R$ 750,00, mais uma comissão de R$ 3,00 para cada produto vendido. Caso ele venda mais de 100 produtos, sua comissão passa a ser de R$ 9,00 para cada produto vendido, a partir do 101º produto vendido.

Com essas informações, o gráfico que melhor representa a relação entre o salário e o número de produtos vendidos é

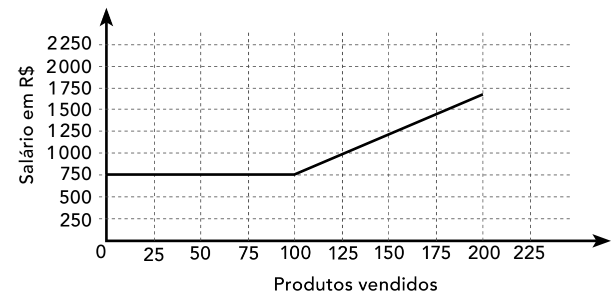
a)



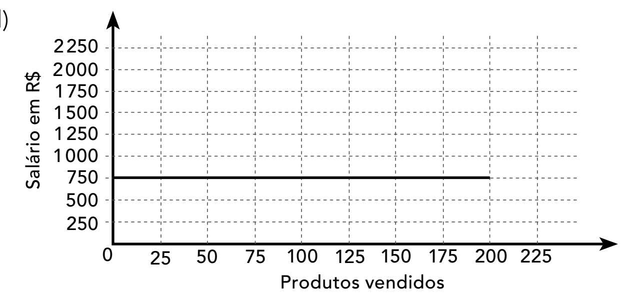
b)



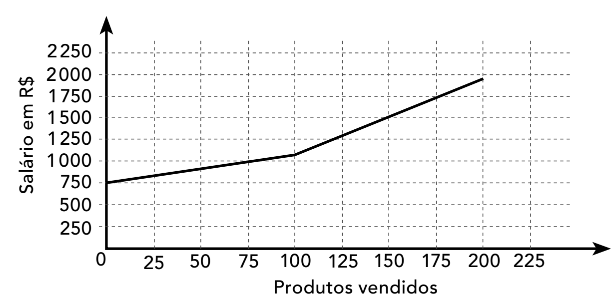
c)



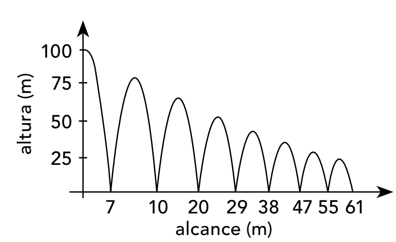
d)



e)



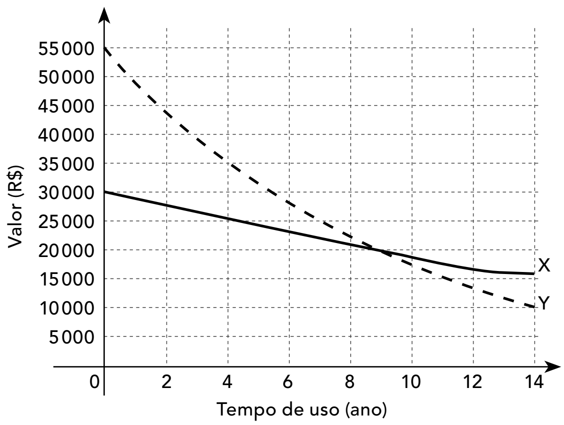
14. A trajetória de uma bola de pingue-pongue, após ter sido jogada do alto de um prédio de 100 metros de altura, está mostrada na figura a seguir.



Quantas vezes, ao longo de seu percurso, a bola atingiu a altura de 30 metros antes de alcançar 35 metros?

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

15. (ENEM) Alguns brasileiros têm o hábito de trocar de carro a cada um ou dois anos, mas essa prática nem sempre é um bom negócio, pois o veículo desvaloriza com o uso. Esse fator é chamado de depreciação, sendo maior nos primeiros anos de uso. Uma pessoa realizou uma pesquisa sobre o valor de mercado dos dois veículos (X e Y) que possui. Colocou os resultados obtidos em um mesmo gráfico, pois os veículos foram comprados juntos.



Após a pesquisa, ela decidiu vender os veículos no momento em que completaram quatro anos de uso.

Disponível em: <http://www.carrosnaweb.com.br>. Acesso em: 3 ago. 2012. (adaptado)

Considerando somente os valores de compra e de venda dos veículos por essa pessoa, qual a perda, em reais, que ela terá?

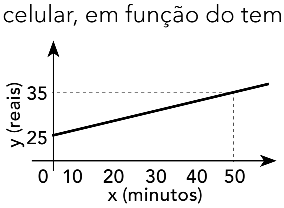
a) 10 000,00
b) 15 000,00
c) 25 000,00
d) 35 000,00
e) 45 000,00

16. (ENEM) De acordo com os números divulgados pela Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), já há no país 91 celulares em cada grupo de 100 pessoas. Entre as várias operadoras existentes, uma propõe o seguinte plano aos seus clientes: R$ 25,00 mensais para até 40 minutos de conversação mensal e R$ 1,00 por minuto que excede o tempo estipulado.

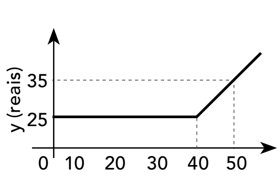
Disponível em: <http://www.economia.ig.com.br>. Acesso em: 28 abr. 2010. (adaptado)

Qual dos gráficos a seguir corresponde aos possíveis gastos mensais (y), em reais, de um cliente dessa operadora de celular, em função do tempo (x) utilizado, em minutos?

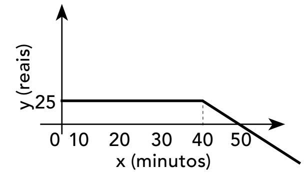
a)



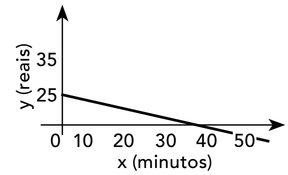
b)



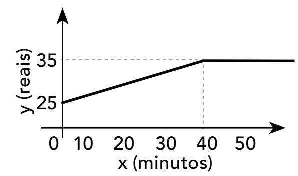
c)



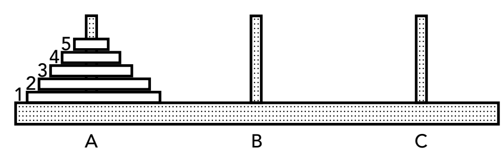
d)



e)



17. (ENEM) A torre de Hanói é um jogo que tem o objetivo de mover todos os discos de uma haste para outra, utilizando o menor número possível de movimentos, respeitando-se as regras.



As regras são:

1. Um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor.
2. Pode-se mover um único disco por vez.
3. Um disco deve estar sempre em uma das três hastes ou em movimento.

Disponível em: <http://www.realidadevirtual.com.br>. Acesso em: 28 abr. 2010. (adaptado)
Disponível em: <http://www.imeusp.br>. Acesso em: 28 abr. 2010. (adaptado)

Usando a torre de Hanói e baseando-se nas regras do jogo, podemos montar uma tabela entre o número de peças (X) e o número mínimo de movimentos (Y):

Número de peças	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15

A relação entre X e Y é

a) $Y = 2^X - 1$.
b) $Y = 2^{X-1}$.
c) $Y = 2^X$.
d) $Y = 2X - 1$.
e) $Y = 2X - 4$.

18. O salário mensal de um vendedor é de R$ 750,00 fixos mais 2,5% sobre o valor total, em reais, das vendas que ele efetuar durante o mês. Em um mês em que suas vendas totalizarem **x** reais, o salário do vendedor será dado pela expressão

a) 750 + 2,5x.
b) 750 + 0,25x.
c) 750,25x.
d) 750 · (0,25x).
e) 750 + 0,025x.

Conhecimentos algébricos

C	5,6
H	19,20,21,24,25

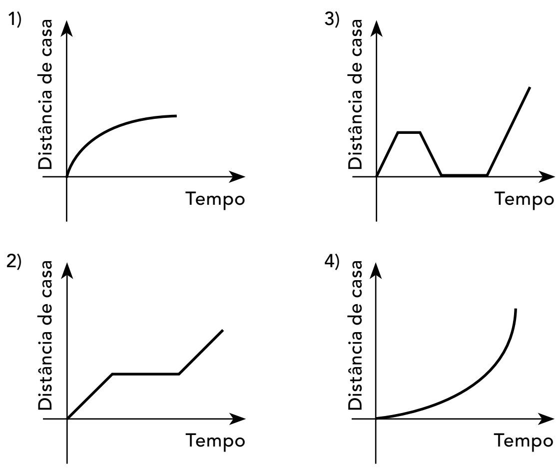
Módulo 3

Domínio, contradomínio e imagem de uma função; Função afim

Situação-problema

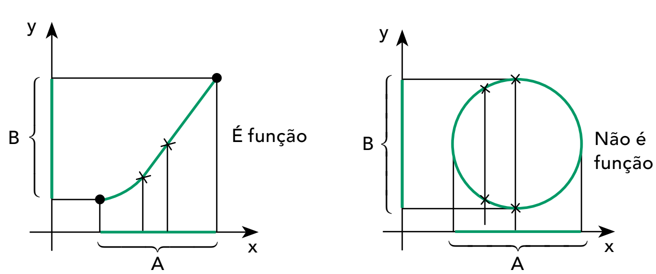
Relacione, adequadamente, um gráfico a cada situação relatada.

a) Eu tinha acabado de sair de casa quando percebi que havia esquecido meus livros, então eu voltei para buscá-los.
b) Tudo ia bem, até que o pneu furou.
c) Eu iniciei a caminhada calmamente, mas aumentei a velocidade quando me dei conta de que ia me atrasar.
d) Saí rapidamente de casa, mas comecei a andar mais lentamente para poder apreciar as vitrines das lojas.



Representação no plano cartesiano

Observe os seguintes gráficos de relações de A em B (R : A → B):



Tais relações só representam uma função de A em B (f: A → B) quando toda reta vertical que passar por um ponto de A (domínio de $\boldsymbol{f}$) cortar o gráfico em um só ponto. Assim, apenas o 1º gráfico representa uma função.

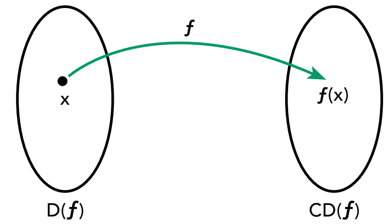
Domínio de uma função

O **domínio de uma função** é o conjunto formado por todo **x**, ou seja, por todas as abscissas dos pares ordenados da função. Assim, considerando-se f: A → B, tem-se:

$$D(f) = \{x \in A \mid (x, y) \in f\} = A$$

O domínio é o conjunto de existência da função, isto é, o conjunto em que se define a função.

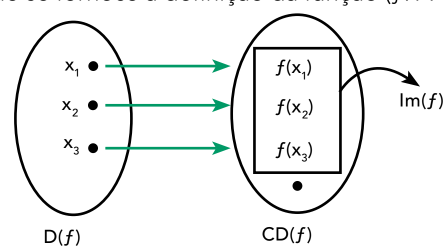
- Em diagramas ⇒ domínio = conjunto de partida das setas.



- Em gráficos ⇒ domínio = conjunto das projeções de $\boldsymbol{f}$ sobre o eixo **x**.

Contradomínio e imagem de uma função

Quando se define uma função f: A → B, identifica-se o conjunto B como o conjunto que contém as possíveis respostas da função. Denomina-se isso de **contradomínio da função** representando-o por **CD(f)**. O contradomínio não pode ser identificado no gráfico da função, mas é facilmente determinado quando se representa uma função no diagrama ou quando se fornece a definição da função (f: A → B).

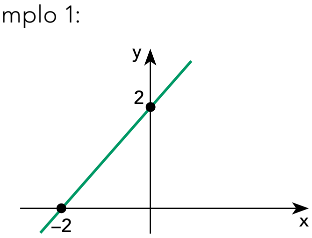


Quando se define uma função, não é necessário que todos os elementos do contradomínio sejam usados. Para identificar os elementos do contradomínio que foram efetivamente usados pela função, cria-se um conjunto formado por esses elementos que recebe o nome de **imagem da função** e é representado por **Im(f)**.

A imagem de uma função é o conjunto de todas as ordenadas **y** dos pares ordenados que fazem parte da função. Note que a imagem de uma função é sempre subconjunto do seu contradomínio e, para que se identifique a imagem, utiliza-se os seguintes procedimentos:

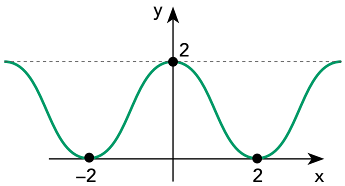
- Em diagramas ⇒ é o conjunto de chegada das setas.
- Em gráficos ⇒ é o conjunto das projeções de $\boldsymbol{f}$ sobre o eixo y.

Exemplo 1:



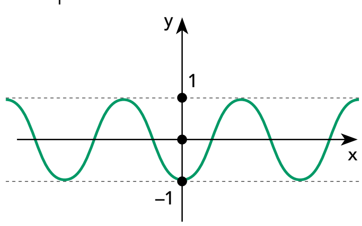
$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ Im(f) = \mathbb{R} \end{cases}$$

Exemplo 2:



$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mathbin{/} 0 \le y \le 2\} \end{cases}$$

Exemplo 3:



$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ Im(f) = [-1,1] \end{cases}$$

Funções iguais

Duas funções, ***f*** de A em B e **g** de C em D, são iguais se, e somente se, A = C, B = D e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Funções monótonas

Função estritamente crescente

Uma função $f(x)$ é dita estritamente crescente em um intervalo contido em $D(f)$ se, para todo x_1 e x_2, desse intervalo ocorrer:

$$\forall\ x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Função estritamente decrescente

Uma função $f(x)$ é dita estritamente decrescente num intervalo contido em $D(f)$ se para todo x_1 e x_2 desse intervalo ocorrer:

$$\forall\ x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Função afim

Situação-problema

A escala N de temperaturas foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em Nova Iguaçu. A correspondência com a escala Celsius é a seguinte:

°N	°C
0	18
100	43

A que temperatura ferve a água na escala N?

Definição

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes **a**, **b** $\in \mathbb{R}$, tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- A **função identidade** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim. Também são afins as **translações** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$.
- São ainda casos particulares de funções afins as **funções lineares**, $f(x) = ax$, e as **funções constantes**, $f(x) = b$.
- A taxa de variação da função afim é constante e igual ao coeficiente angular da função: $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

Representação gráfica

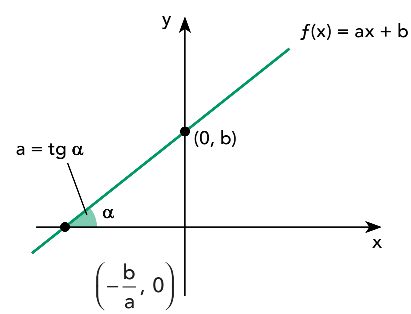
O gráfico de uma função afim é uma reta. Dessa forma, para que esse gráfico seja traçado, basta que se determine dois dos seus pontos.

No entanto, pode-se dar uma interpretação geométrica aos coeficientes da função do 1º grau para determinar o seu gráfico. Assim:

$f(x) = a \cdot x + b$

Coeficiente linear: representa o valor da ordenada do ponto em que a reta toca o eixo **y**. O gráfico da função sempre passa pelo ponto (0, b).

Coeficiente angular: indica a inclinação da reta; $a = tg\ \alpha$, em que α = ângulo formado com o eixo **x**.



Pode-se, ainda, definir **zero** ou **raiz de uma função** como o valor de **x** no ponto em que a reta toca o eixo **x**. Note que, nesse caso, tem-se $f(x) = 0$, ou seja:

x_1 é raiz de uma função $\Leftrightarrow$
- $(x_1, 0)$ é o ponto em que o gráfico de ***f*** toca o eixo **x**
- $f(x_1) = 0$

Na função polinomial do 1º grau, a raiz é dada por:

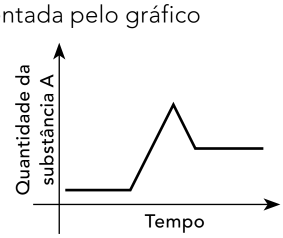
$$f(x) = ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

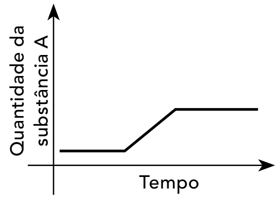
Atividades para sala

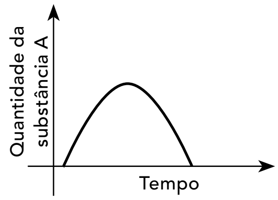
1. (ENEM) Muitas vezes, o objetivo de um remédio é aumentar a quantidade de uma ou mais substâncias já existentes no corpo do indivíduo para melhorar as defesas do organismo. Depois de alcançar o objetivo, essa quantidade deve voltar ao normal.

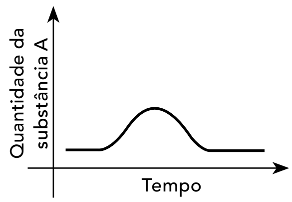
Se uma determinada pessoa ingere um medicamento para aumentar a concentração da substância A em seu organismo, a quantidade dessa substância no organismo da pessoa, em relação ao tempo, pode ser melhor representada pelo gráfico

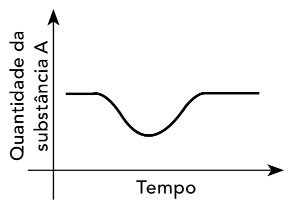
a)



b) 

c) 

d) 

e) 

2. (ENEM) Em uma cidade, o valor total de conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Contribuição para Custeio da Iluminação Pública (Cosip), conforme a expressão:

Valor do kWh (com títulos) · consumo (em kWh) + Cosip

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo. A tabela a seguir mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	Valor da Cosip (R$)
Até 80	0,00
Superior a 80 e até 100	2,00
Superior a 100 e até 140	3,00
Superior a 140 e até 200	4,50

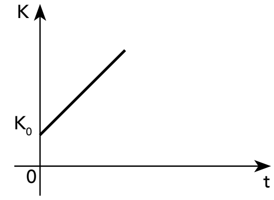
Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

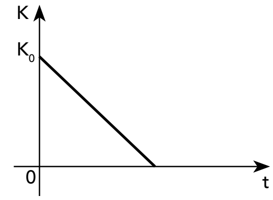
Quanto deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

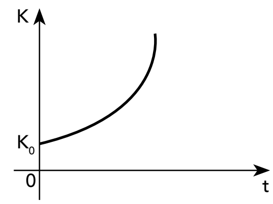
a) 134,1
b) 135,0
c) 137,1
d) 138,6
e) 143,1

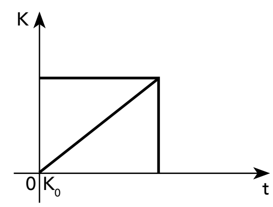
3. Uma escola necessita enviar documentos aos pais de seus alunos. Devido à exigência de comprovação de recebimento, os documentos serão entregues pessoalmente aos pais pelos funcionários da escola. O planejamento realizado é de entregar diariamente 50 documentos.

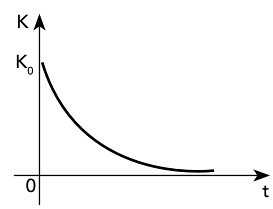
Considerando K_0 a quantidade inicial de documentos, qual dos gráficos seguintes representa a evolução do número de documentos (K) em mão dos funcionários da escola em função do tempo (t)?

a) 

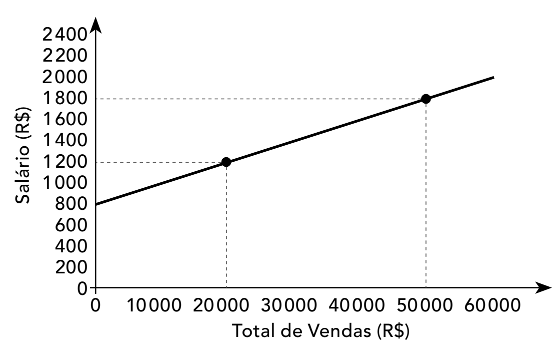
b) 

c) 

d) 

e) 

4. (ENEM) No comércio é comumente utilizado o salário mensal comissionado. Além de um valor fixo, o vendedor tem um incentivo, geralmente um percentual sobre as vendas. Considere um vendedor que tenha salário comissionado, sendo sua comissão dada pelo percentual do total de vendas que realizar no período. O gráfico a seguir expressa o valor total de seu salário, em reais, em função do total de vendas realizadas, também em reais.



Qual o valor percentual da sua comissão?

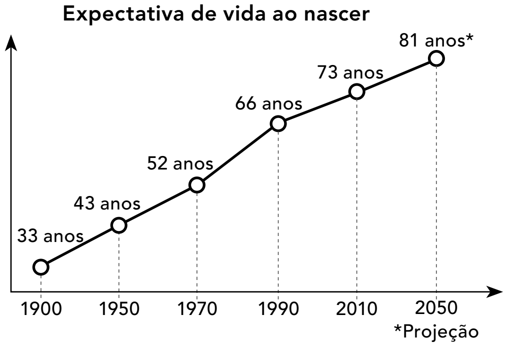
a) 2,0%
b) 5,0%
c) 16,7%
d) 27,7%
e) 50,0%

5. Uma pesquisa mostra que os ativos sessentões brasileiros estão forjando um novo conceito sobre essa fase da vida.

Viver mais e melhor

Os brasileiros que cruzaram a fronteira dos 60 anos têm a perspectiva de uma vida longeva

Expectativa de vida ao nascer



IBGE. Revista *Veja*, 1º set. 2010. (adaptado)

Considerando o período 2010-2050, em que a expectativa de vida ao nascer cresça de forma linear, a idade projetada para o ano de 2035 é

a) 74 anos.
b) 75 anos.
c) 76 anos.
d) 77 anos.
e) 78 anos.

6. (ENEM) Os procedimentos de decolagem e pouso de uma aeronave são os momentos mais críticos de operação, necessitando de concentração total da tripulação e da torre de controle dos aeroportos. Segundo levantamento da Boeing, realizado em 2009, grande parte dos acidentes aéreos com vítimas ocorre após iniciar-se a fase de descida da aeronave. Dessa forma, é essencial para procedimentos adequados de segurança monitorar-se o tempo de descida da aeronave.

A tabela mostra a altitude **y** de uma aeronave registrada pela torre de controle, **t** minutos após o início dos procedimentos de pouso.

Tempo t (em minutos)	0	5	10	15	20
Altitude y (em metros)	10000	8000	6000	4000	2000

Considere que, durante todo o procedimento de pouso, a relação entre **y** e **t** é linear.

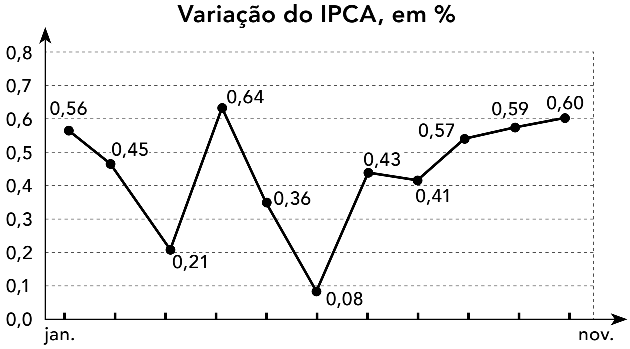
Disponível em: <http://www.meioaereo.com>.

De acordo com os dados apresentados, a relação entre **y** e **t** é dada por

a) $y = -400t$.
b) $y = -2000t$.
c) $y = 8000 - 400t$.
d) $y = 10000 - 400t$.
e) $y = 10000 - 2000t$.

Atividades propostas

1. **Variação do IPCA, em %**

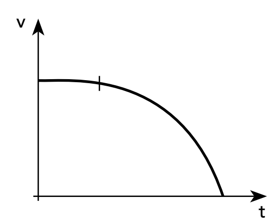


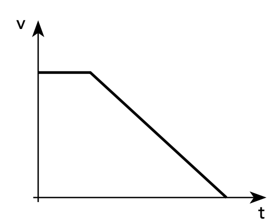
Folha de S.Paulo, 10 dez. 2012.

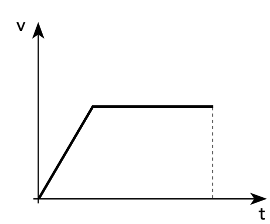
O gráfico anterior mostra a variação do Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) no período de janeiro a novembro de 2012. Em valores absolutos, a maior queda desse índice foi registrada entre os meses de

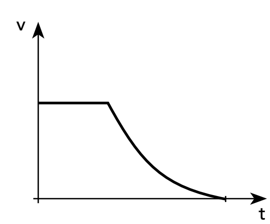
a) janeiro a fevereiro.
b) fevereiro a março.
c) abril a maio.
d) junho a julho.
e) julho a agosto.

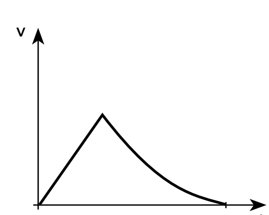
2. Um carro se desloca com velocidade constante em um referencial fixo no solo. O motorista percebe que o sinal está vermelho e faz o carro parar. O tempo de reação do motorista é de frações de segundo. Tempo de reação é o tempo decorrido entre o instante em que o motorista vê o sinal vermelho e o instante em que ele aplica os freios. A velocidade dessa reação está associada ao tempo que o cérebro leva para processar as informações e ao tempo que levam os impulsos nervosos para percorrer as células nervosas que conectam o cérebro aos membros do corpo. Considere que o carro adquire uma aceleração negativa constante até parar. O gráfico que pode representar o módulo da velocidade do carro (v) em função do tempo (t), desde o instante em que o motorista percebe que o sinal está vermelho até o instante em que o carro atinge o repouso, é

a)


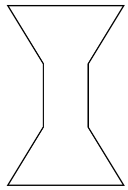
b)


c)


d)


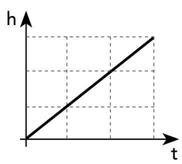
e)


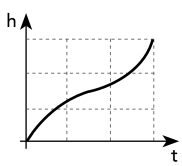
3. (ENEM) Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projetou uma escultura transparente e oca, cujo formato foi inspirado em uma ampulheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura a seguir é a vista frontal dessa escultura.

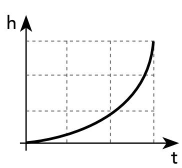


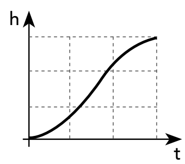
No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água para dentro dela com vazão constante.

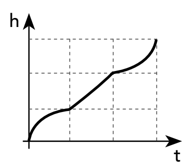
O gráfico que expressa a altura (h) da água na escultura em função do tempo (t) decorrido é

a)


b)


c)


d)


e)


4. A Receita Federal apresenta a tabela a seguir para o cálculo do imposto de renda a ser pago pelos contribuintes em 2012, na qual a base de cálculo é a renda líquida.

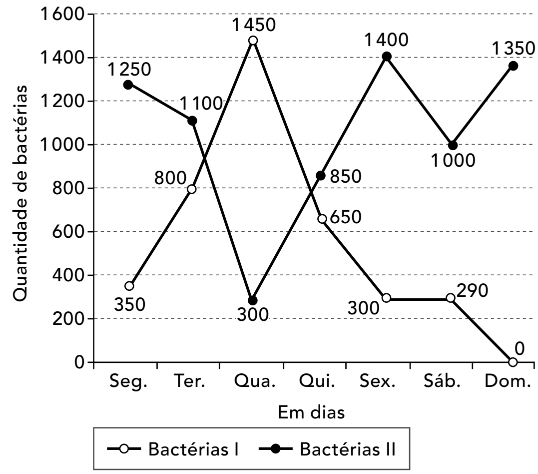
Imposto de Renda – 2012		
Base de cálculo (em reais)	**Alíquota**	**Parcela a reduzir (em reais)**
Até 1 637,11	–	Isento
1 637,12 a 2 453,50	7,5%	122,78
2 453,51 a 3 271,38	15%	306,80
3 271,39 a 4 087,65	22,5%	552,15
Acima de 4 087,65	27,5%	756,53

Um contribuinte com renda líquida **x** no intervalo [3 271,39; 4 087,65] deve calcular o imposto a pagar, **y**, pela fórmula

a) y = 22,5x – 552,15.
b) y = 22,5x + 552,15.
c) y = 2,25x – 552,15.
d) y = 0,225x + 552,15.
e) y = 0,225x – 552,15.

5. (ENEM) Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 350 bactérias da espécie I e 1 250 bactérias da espécie II. O gráfico a seguir representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.

Bactérias das espécies I e II

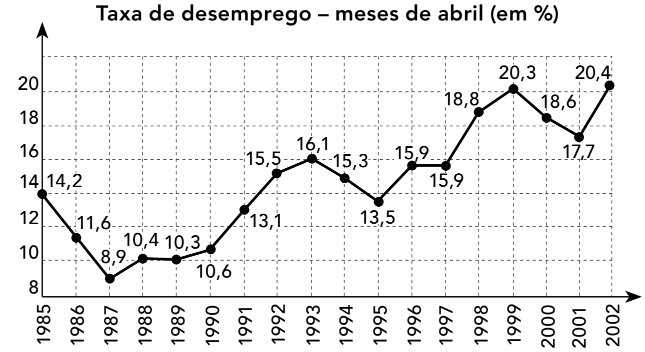


Em que dia dessa semana a quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima?

a) Terça-feira.
b) Quarta-feira.
c) Quinta-feira.
d) Sexta-feira.
e) Domingo.

6. O gráfico a seguir representa a taxa de desemprego na grande São Paulo, medida nos meses de abril, segundo o Dieese.

Recorde na Grande São Paulo
Taxa de desemprego – meses de abril (em %)

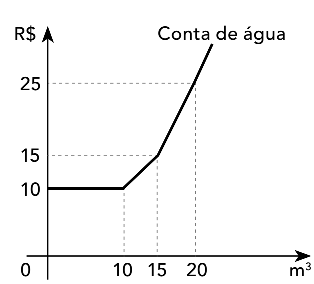


Carta Capital, 5 jun. 2002.

Analisando o gráfico anterior, pode-se afirmar que a maior variação na taxa de desemprego na grande São Paulo ocorreu no período de

a) abril de 1985 a abril de 1986.
b) abril de 1995 a abril de 1996.
c) abril de 1996 a abril de 1997.
d) abril de 1997 a abril de 1998.
e) abril de 2001 a abril de 2002.

7. (ENEM) Certo município brasileiro cobra a conta de água de seus habitantes de acordo com o gráfico. O valor a ser pago depende do consumo mensal em m³.



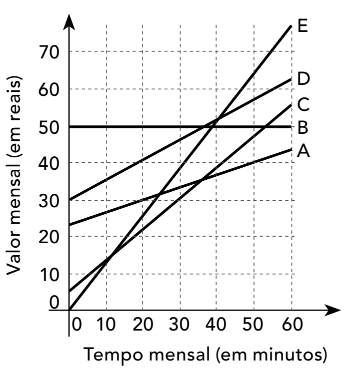
Se um morador pagar uma conta de R$ 19,00, isso significa que ele consumiu

a) 16 m³ de água.
b) 17 m³ de água.
c) 18 m³ de água.
d) 19 m³ de água.
e) 20 m³ de água.

8. A loja Calce Bem estabelece uma meta de pagamento dos salários aos seus vendedores, isto é, ele tem um ganho fixo de R$ 810,00, mais uma comissão de R$ 2,50 para cada produto vendido. Caso ele venda mais de 120 produtos, sua comissão passa a ser de R$ 8,00 para cada produto vendido, que excede o número de produtos estipulados. Se **y** é o valor recebido em reais por esse vendedor e **x** o número de produtos vendidos, qual a expressão que permite calcular, em reais, o salário de um funcionário que vendeu mais de 120 produtos?

a) $y = 8x + 120$
b) $y = 8x + 2070$
c) $y = 8x + 150$
d) $y = 8x - 120$
e) $y = 8x + 960$

9. (ENEM) No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone.

Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

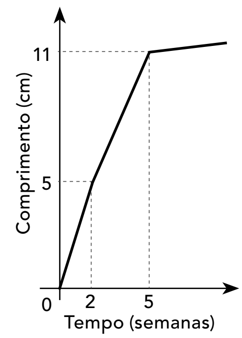
10. As atividades de comunicação humana são plurais e estão intimamente ligadas às suas necessidades de sobrevivência. O problema de contagem, por exemplo, confunde-se com a própria história humana no decorrer dos tempos. Assim como para os índios mundurucus, do sul do Pará, os *waimiri atroari* contam somente de um até cinco, adotando os seguintes vocábulos: *awynimi* é o número 1, *typytyna* é o 2, *takynima* é o 3, *takyninapa* é o 4, e, finalmente, *warenipa* é o 5.

FERREIRA, E. S. Racionalidade dos índios brasileiros. *Scientific American Brasil*, São Paulo, Edição especial Etnomatemática, n. 11, 2005. p.90-93. (adaptado)

Considere as funções polinomiais do primeiro grau **f** e **g** definidas de A em A conjunto formado pelos números utilizados no sistema de contagem dos *waimiri atroari*, ou seja, A = {1, 2, 3, 4, 5}. Se os pares ordenados (1, 1) e (5, 5) pertencem a **f**, e os pares ordenados (1, 5) e (5, 1) pertencem a **g**, então é correto afirmar que

a) não existe nenhum par ordenado de A × A que satisfaz **f** e **g** simultaneamente.
b) existe um único par ordenado de A × A que satisfaz **f** e **g** simultaneamente.
c) existem dois pares ordenados de A × A que satisfazem **f** e **g** simultaneamente.
d) existem três pares ordenados de A × A que satisfazem **f** e **g** simultaneamente.
e) existem quatro pares ordenados de A × A que satisfazem **f** e **g** simultaneamente.

11. (ENEM) Um administrador de um campo de futebol deseja recobri-lo com um tipo de grama que, em condições normais, cresce de acordo com o gráfico a seguir.



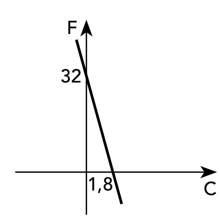
Ele precisa ter o campo pronto no dia 11 de junho de 2012, e o comprimento mínimo da grama nesse dia deve ser igual a 7 cm.

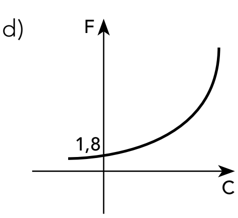
Supondo-se que o crescimento da grama se dê em condições normais, a grama deve ser plantada, no máximo, até o dia

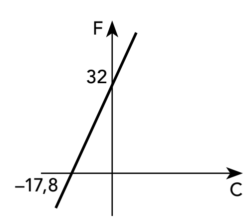
a) 17 de maio de 2012.
b) 21 de maio de 2012.
c) 23 de maio de 2012.
d) 8 de junho de 2012.
e) 9 de junho de 2012.

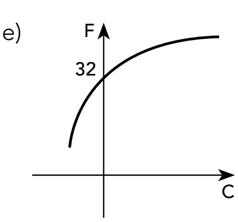
12. (ENEM) No Brasil, costuma-se medir temperaturas utilizando a escala Celsius. Os países de língua inglesa utilizam a escala Fahrenheit. A relação entre essas duas escalas é dada pela expressão $F = C \cdot 1,8 + 32$, em que F representa a medida da temperatura na escala Fahrenheit e C a medida da temperatura na escala Celsius.

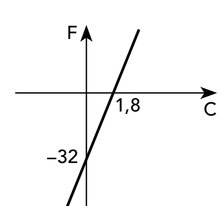
O gráfico que representa a relação entre essas duas grandezas é

a)


d)


b)


e)


c)


Neste livro:

Módulo 1: Análise de dados I – Noções de estatística 59
Módulo 2: Análise de dados – Interpretação de gráficos: linhas, colunas, setores, histograma, polígono de frequência, cartograma e pictograma 64
Módulo 3: Medidas de tendência central – Média 72

Conhecimentos de estatística e probabilidade

C 7

H 28,29,30

Módulo 1

Análise de dados I – Noções de estatística

Estatística é a ciência da análise de dados que trabalha com elementos de pesquisa ou com modelos probabilísticos. A estatística é a responsável pela coleta, organização e análise de dados e é utilizada com o propósito de se obter conclusões válidas para uma posterior tomada de decisão.

A estatística pode ser dividida em dois ramos:

- **Estatística descritiva –** Responsável pelas etapas iniciais do processo estatístico.

Coleta de dados → Crítica dos dados → Apresentação dos dados → Tabelas / Gráficos

- **Estatística inferencial –** Responsável pela etapa final do processo estatístico.

Análise dos dados → Tomada de decisões

Conceitos básicos

- **População –** É qualquer conjunto (finito ou infinito) de elementos que tenham, entre si, pelo menos uma característica comum. Um conjunto de pessoas, de coisas ou de objetos, por exemplo, representa uma população (ou universo estatístico) em determinado estudo.
- **Amostra –** Constitui-se, basicamente, de uma redução da população a dimensões menores, sem perda das características essenciais (subconjunto da população).

Chamam-se **parâmetros** os valores obtidos em uma população. Já os valores obtidos em amostras são chamados de **estatísticas**.

- **Variável –** É a característica que se estuda em uma população.

  As variáveis podem ser:

  - **Qualitativas:** expressas por atributos.
    Exemplos: estado civil, grau de escolaridade.
  - **Quantitativas:** expressas por números.
    Exemplos: salário, idade.
  - **Quantitativas discretas:** são as variáveis que, em determinado intervalo, podem assumir somente valores inteiros.
    Exemplos: número de nascimentos, óbitos, acidentes em uma rodovia, alunos de uma sala de aula etc.
  - **Quantitativas contínuas:** são as variáveis que, em determinado intervalo, podem assumir qualquer valor, seja ele fracionário ou inteiro.
    Exemplos: idade, altura, peso, temperatura etc.
  - **Dados brutos:** é o conjunto dos dados numéricos obtidos após crítica dos valores coletados.
  - **Rol:** é a disposição dos dados brutos em ordem crescente ou decrescente.

Distribuição de frequência

Distribuição de frequência é o arranjo dos valores e de suas respectivas frequências.

Distribuição de frequências para dados discretos

A tabela é composta por dois tipos de informação, que dizem respeito, respectivamente, às possíveis ocorrências e à quantidade de vezes que cada uma ocorreu.

Exemplo:

15 alunos são entrevistados sobre as notas que tiveram na prova de Física. Suponha que os resultados obtidos sejam os da tabela a seguir.

Dados brutos	7	5	5	4	4	5	7	6	4	8	6	5	4	6	7
Rol	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8

Construindo a tabela de frequência, tem-se:

Notas observadas (X_i)	Frequência observada (f_i)
4	4
5	4
6	3
7	3
8	1
	Total = 15

Na 1ª coluna, estão os valores da variável (notas dos alunos), e, na 2ª coluna, o número de vezes que cada variável ocorreu na pesquisa. A soma da coluna 2 tem valor igual ao total de observações do experimento.

Distribuição de frequências para dados contínuos

A organização dos dados contínuos normalmente é feita usando-se tabelas de distribuição de frequência com intervalos de classes.

Exemplo:

Suponha uma amostra com a massa corporal de 20 pessoas.

Classes	Frequência (f_i)
45 ⊢— 55	3
55 ⊢— 65	6
65 ⊢— 75	7
75 ⊢— 85	3
85 ⊢— 95	1
	Total = 20

Isso quer dizer que, na 1ª classe, cuja frequência absoluta é 3, há pessoas com massa maior ou igual a 45 kg e menor que 55 kg. Na 2ª classe, há 6 pessoas com massa maior ou igual a 55 kg e menor que 65 kg e assim por diante.

O número de classes (k) vai depender do tamanho da amostra. Se **n** (número de elementos da amostra) for menor que 25, adotam-se 5 classes. Caso contrário, será igual a $\sqrt{n}$.

A amplitude das classes (h) é a diferença entre o limite superior e o limite inferior da classe. O seu valor, para uma distribuição com classes de mesma amplitude, é obtido dividindo-se a amplitude total (R) da amostra pelo número de classes (k). Então: $h = \frac{R}{k}$

Exemplo:

Supondo uma amostra de 60 elementos, em que o menor valor é 12 e o maior valor é 100, qual deverá ser a amplitude das classes?

Resolução:

$R = 100 - 12 = 88$

$n > 25 \Rightarrow k = \sqrt{n} = \sqrt{60} \cong 7{,}75 \cong 8$

$h = \frac{R}{k} = \frac{88}{8} = 11$

Existem quatro tipos de **intervalos de classes**.

Exemplo:

Supondo o limite inferior = **a** e o limite superior = **b**.

Intervalo	Pode ser representado por
Fechado à esquerda e fechado à direita	a ⊢⊣ b ou [a, b]
Fechado à esquerda e aberto à direita	a ⊢— b ou [a, b[
Aberto à esquerda e fechado à direita	a —⊣ b ou]a, b]
Aberto à esquerda e aberto à direita	a — b ou]a, b[

a ⊢— b é o intervalo fechado em **a** e aberto em **b**, ou seja, **a** pertence ao intervalo, e **b** não pertence ao intervalo.

- **Ponto médio de uma classe –** É a média aritmética entre os limites inferior e superior de cada classe.

Elementos da distribuição de frequências

- **Frequência absoluta (f_i) –** É a quantidade de vezes que cada valor é observado.
- **Frequência relativa (F_i) –** Indica a comparação entre a frequência absoluta e o total pesquisado.

$$F_i = \frac{f_i}{n}$$

- **Frequência absoluta acumulada (f_{ac}) –** Corresponde à soma de cada frequência absoluta com as frequências absolutas anteriores.
- **Frequência relativa acumulada (F_{ac}) –** Corresponde à soma de cada frequência relativa com as frequências relativas anteriores.

Atividades para sala

1. Um questionário foi aplicado a cinco funcionários do setor administrativo do Sistema Ari de Sá, fornecendo os dados apresentados na tabela.

Nome	Curso (completo)	Idade (anos)	Tempo de serviço
João	Superior	25	2 anos
Larissa	Médio	23	3 anos
Gabriela	Superior	28	3 anos
Nayane	Médio	26	1 ano
Débora	Médio	23	1 ano

Assinale a alternativa que apresenta as variáveis quantitativas.

a) Nome e curso.
b) Tempo de serviço e nome.
c) Idade e tempo de serviço.
d) Idade e nome.
e) Curso e tempo de serviço.

2. Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual.

O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

O empresário decidiu comprar a empresa

a) F.
b) G.
c) H.
d) M.
e) P.

3. (ENEM) O Ministério da Saúde e as unidades federadas promovem frequentemente campanhas nacionais e locais de incentivo à doação voluntária de sangue, em regiões com menor número de doadores por habitante, com o intuito de manter a regularidade de estoques nos serviços hemoterápicos. Em 2010, foram recolhidos dados sobre o número de doadores e o número de habitantes de cada região, conforme o quadro seguinte.

Taxa de doação de sangue, por região, em 2010			
Região	**Doadores**	**Número de habitantes**	**Doadores/ habitantes**
Nordeste	820 959	53 081 950	1,5%
Norte	232 079	15 864 454	1,5%
Sudeste	1 521 766	80 364 410	1,9%
Centro-Oeste	362 334	14 058 094	2,6%
Sul	690 391	27 386 891	2,5%
Total	3 627 529	190 755 799	1,9%

Os resultados obtidos permitiram que estados, municípios e o governo federal estabelecessem as regiões prioritárias do país para a intensificação das campanhas de doação de sangue.

A campanha deveria ser intensificada nas regiões em que o percentual de doadores por habitantes fosse menor ou igual ao do país.

Disponível em: <http://bvsms.saude.gov.br>. Acesso em: 2 ago. 2013. (adaptado)

As regiões brasileiras onde foram intensificadas as campanhas na época são

a) Norte, Centro-Oeste e Sul.
b) Norte, Nordeste e Sudeste.
c) Nordeste, Norte e Sul.
d) Nordeste, Sudeste e Sul.
e) Centro-Oeste, Sul e Sudeste.

4. (ENEM) A tabela compara o consumo mensal, em kWh, dos consumidores residenciais e dos de baixa renda, antes e depois da redução da tarifa de energia no estado de Pernambuco.

Como fica a tarifa?			
Residencial			
Consumo mensal (kWh)	**Antes**	**Depois**	**Economia**
140	R$ 71,04	R$ 64,75	R$ 6,29
185	R$ 93,87	R$ 85,56	R$ 8,32
350	R$ 177,60	R$ 161,86	R$ 15,74
500	R$ 253,72	R$ 231,24	R$ 22,48
Baixa renda			
Consumo mensal (kWh)	**Antes**	**Depois**	**Economia**
30	R$ 3,80	R$ 3,35	R$ 0,45
65	R$ 11,53	R$ 10,04	R$ 1,49
80	R$ 14,84	R$ 12,90	R$ 1,94
100	R$ 19,31	R$ 16,73	R$ 2,59
140	R$ 32,72	R$ 28,20	R$ 4,53

Diário de Pernambuco, 28 abr. 2010. (adaptado)

Considere dois consumidores: um que é de baixa renda e gastou 100 kWh, e outro do tipo residencial, que gastou 185 kWh. A diferença entre o gasto desses consumidores com 1 kWh, depois da redução da tarifa de energia, mais aproximada é de

a) R$ 0,27.
b) R$ 0,29.
c) R$ 0,32.
d) R$ 0,34.
e) R$ 0,61.

5. (ENEM) A taxa de fecundidade é um indicador que expressa a condição reprodutiva média das mulheres de uma região, e é importante para uma análise da dinâmica demográfica dessa região. A tabela apresenta os dados obtidos pelos Censos de 2000 e 2010, feitos pelo IBGE, com relação à taxa de fecundidade no Brasil.

Ano	Taxa de fecundidade no Brasil
2000	2,38
2010	1,90

Disponível em: <http://www.saladeimprensa.ibge.gov.br>. Acesso em: 31 jul. 2013.

Suponha que a variação percentual relativa na taxa de fecundidade no período de 2000 a 2010 se repita no período de 2010 a 2020.

Nesse caso, em 2020, a taxa de fecundidade no Brasil estará mais próxima de

a) 1,14.
b) 1,42.
c) 1,52.
d) 1,70.
e) 1,80.

6. (ENEM) Uma cooperativa de radiotáxis tem como meta atender, em no máximo 15 minutos, a pelo menos 95% das chamadas que recebe. O controle dessa meta é feito, ininterruptamente, por um funcionário que utiliza um equipamento de rádio para monitoramento. A cada 100 chamadas, ele registra o número acumulado de chamadas que não foram atendidas em 15 minutos. Ao final de um dia, a cooperativa apresentou o seguinte desempenho:

Total acumulado de chamadas	100	200	300	400	482
Número acumulado de chamadas não atendidas em 15 minutos	6	11	17	21	24

Esse desempenho mostra que, nesse dia, a meta estabelecida foi atingida

a) nas primeiras 100 chamadas.
b) nas primeiras 200 chamadas.
c) nas primeiras 300 chamadas.
d) nas primeiras 400 chamadas.
e) ao final do dia.

Atividades propostas

1. Uma pesquisa mostrou que, a uma semana das inscrições para os principais vestibulares, muitos candidatos ainda estavam indecisos em relação ao curso pretendido, como mostra a tabela a seguir.

Forma de decisão sobre o curso	
Respostas	**%**
Já decidiu	86,8
Pesquisando melhor sobre cursos	4,9
Não sabe	4,0
Decidirá na hora da inscrição	1,3
Teste vocacional (aptidão)	1,3
Pesquisando mercado de trabalho	0,9
Decidirá em conjunto com os pais	0,4
Guia do vestibulando	0,4

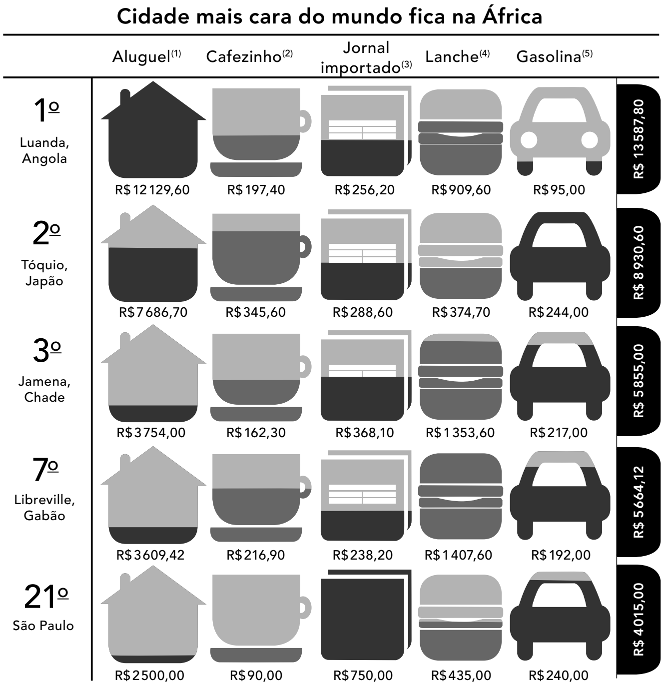
O Popular. Goiânia, 15 set. 2003. p. 4. (adaptado)

De acordo com os dados, o número de candidatos que decidirá pelo curso por meio de teste vocacional representa, entre os indecisos,

a) 1,3%.
b) 9,85%.
c) 10,15%.
d) 11,9%.
e) 13,2%.

2. A revista *Superinteressante* trouxe uma reportagem sobre o custo de vida em diferentes cidades do mundo. A tabela mostra o *ranking* de cinco das 214 cidades pesquisadas pela empresa americana Mercer LLC, em 2010.

Cidade mais cara do mundo fica na África



(1) Apartamento de dois quartos em um bairro de classe média alta;
(2) 30 cafezinhos;
(3) 30 exemplares do *The New York Times*;
(4) 30 lanches do McDonald's;
(5) 100 litros.

Superinteressante, jan. 2001. (adaptado)

Observando as informações contidas na tabela, pode-se afirmar que

a) o custo do aluguel em Tóquio é o mais alto do mundo.
b) o custo do cafezinho em São Paulo é o mais alto do mundo.
c) o custo do jornal importado em São Paulo é o mais alto do mundo.
d) o custo do lanche em Luanda é o mais alto do mundo.
e) o custo da gasolina em Libreville é o mais alto do mundo.

3. A Secretaria de Trabalho e Ação Social de certa cidade fez uma pesquisa com um grupo de desempregados com o objetivo de avaliar as relações entre nível de escolaridade e respectivas faixas etárias, obtendo os resultados da tabela a seguir.

Nível de escolaridade	Número de desempregados (separados por faixa etária)			
	18 a 21 anos	22 a 25 anos	26 a 30 anos	Acima de 30 anos
Analfabeto	10	9	13	23
Fundamental incompleto	6	9	11	14
Fundamental completo	4	8	12	16
Médio incompleto	3	5	7	10
Médio completo	5	4	4	2
Superior incompleto	2	3	5	5
Superior completo	0	2	3	5

Com base nos dados da tabela, identifique a afirmativa correta.

a) A pesquisa foi realizada com 210 desempregados.
b) 35% dos desempregados tinham idade inferior a 26 anos.
c) 15% dos desempregados tinham nível de escolaridade acima do Ensino Médio completo.
d) 48 desempregados eram analfabetos e tinham idade acima de 21 anos.
e) 85% dos desempregados tinham nível de escolaridade não superior ao Ensino Médio completo.

4. Supondo uma amostra de 100 elementos, em que o menor valor é 20 e o maior valor é 180, qual deverá ser a amplitude das classes?

a) 16 b) 14 c) 12 d) 10 e) 8

5. A precipitação pluviométrica média mensal em Belém, entre os anos de 1961 e 1990, está representada na tabela a seguir, com valores em mm.

Jan.	366,5	**Jul.**	152,1
Fev.	417,5	**Ago.**	131,1
Mar.	436,2	**Set.**	140,8
Abr.	360	**Out.**	116,1
Maio	304,4	**Nov.**	111,8
Jun.	140,2	**Dez.**	216,4

Considerando os dados da tabela, é correto afirmar que

a) não existe um período de alta precipitação pluviométrica.
b) a soma das três médias mensais de maior precipitação corresponde a mais de 50% da média da precipitação total.
c) as quatro médias mensais de menor precipitação correspondem a menos de 20% da precipitação total.

d) a soma das médias mensais dos seis meses de menores precipitações corresponde a menos de um quarto da precipitação média anual.
e) apenas quatro das médias mensais ficam acima de um doze avos da precipitação média anual.

6. Uma das características das maiores usinas hidrelétricas do Brasil é a formação de grandes lagos através de barragens para a geração de energia, conforme se visualiza na tabela a seguir.

Brasil: usinas hidrelétricas por área alagada e potência gerada – 2009		
Usina	**Área alagada (km²)**	**Potência (MV)**
Tucuruí	2430	4200
Sobradinho	4214	1050
Itaipu	1350	12600
Ilha Solteira	1077	3330
Furnas	1450	1320

Aneel, 2009.

De acordo com a tabela, é correto afirmar que

a) Ilha Solteira e Furnas, em conjunto, alagam uma área superior a 2500 km² e geram, juntas, $\frac{2}{3}$ da energia produzida por Tucuruí.
b) em relação à área alagada e à produção de energia, a usina de Itaipu apresenta o melhor custo-benefício.
c) a usina de Sobradinho possui a maior área alagada, sendo a terceira colocada em produção de energia.
d) a proporção de geração de energia da usina de Tucuruí é de exatamente 2 MV/km².
e) em relação à área alagada e à produção de energia, a usina de Sobradinho apresenta o melhor custo-benefício.

7. A tabela a seguir fornece os dados sobre a produção de alumínio primário no Brasil, importante componente da produção industrial do estado do Pará, e apresenta, além disso, a porcentagem da produção exportada.

Ano	Quantidade de alumínio (ton.)	Exportação (%)
1973	111700	1
1978	186365	2,1
1983	400744	44,5
1989	887432	61,5
2000	1271400	71,4
2004	1457000	71,3

Alguns críticos destacam a importância da produção de alumínio primário na exportação de energia elétrica, devido ao grande consumo dessa forma de energia na produção industrial. Considerando que o consumo de energia dependa linearmente da quantidade de alumínio produzida, é possível afirmar que, comparando os anos de 1983 e 2004, o crescimento da quantidade exportada de energia elétrica presente na produção de alumínio primário foi de, aproximadamente,

a) 60%.
b) 160%.
c) 263%.
d) 363%.
e) 482%.

8. A propagação do vírus H1N1, causador da gripe A, foi preocupação mundial em 2009. Quatro meses após a eclosão dos casos da gripe nos Estados Unidos e no México, foi feita uma avaliação dos danos causados pela moléstia, com a utilização de dados de 28 países. As tabelas a seguir apresentam os países onde haviam ocorrido mais óbitos até aquela data e as maiores taxas de mortalidade, por 100 mil habitantes.

A moléstia no mundo				
País	**Óbitos**		**País**	**Taxa de mortalidade***
Brasil	557		Argentina	1,08
EUA	522		Chile	0,75
Argentina	439		Costa Rica	0,67
México	179		Uruguai	0,65
Austrália	132		Austrália	0,61
Chile	128		Paraguai	0,61
Tailândia	119		Brasil	0,29
Peru	80		Peru	0,27
Canadá	71		Malásia	0,24
Malásia	69		Canadá	0,21

*Por 100 mil habitantes

Com base nessas informações, é correto afirmar que, naquela data,

a) o Uruguai havia registrado mais de 70 óbitos.
b) a taxa de mortalidade no Peru era de 27%.
c) a população da Austrália era maior que a população do Paraguai.
d) a população da Argentina era superior a 50 milhões de habitantes.
e) o Brasil era o país mais populoso dentre os citados.

9. Uma prova era composta de 3 testes. O primeiro valia 1 ponto, o segundo valia 2 pontos, e o terceiro, 4 pontos, não sendo considerados acertos parciais. A tabela seguinte mostra a quantidade de alunos que obtiveram cada uma das notas possíveis.

Nota obtida	0	1	2	3	4	5	6	7
Nº de alunos	2	3	1	5	7	2	3	1

O número de alunos que acertaram o segundo teste foi

a) 10. b) 1. c) 12. d) 13. e) 14.

10. Em uma área de preservação ambiental, pesquisadores estudaram uma população de macacos-prego. A área em questão é de 84 ha (1 ha = 10000 m²). Considere o tamanho inicial da população como 750 indivíduos (no início de 2006) e os dados de cinco anos após esse período, que estão registrados na tabela a seguir.

Determinantes populacionais	Ano				
	2006	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**
Natalidade	200	250	320	450	510
Mortalidade	70	93	57	108	122
Imigração	7	28	65	70	48
Emigração	10	15	32	83	139

Nessas condições, a densidade da população, no final do ano de 2010, foi de, aproximadamente,

a) 20,44 macacos-prego/ha.
b) 23,44 macacos-prego/ha.
c) 26,74 macacos-prego/ha.

d) 28,44 macacos-prego/ha.
e) 30,74 macacos-prego/ha.

11. A tabela a seguir apresenta o percentual de candidatos por faixa de pontuação na prova discursiva de Matemática do PSS/UFPB de determinado ano.

Pontos	%
0	10,1
de 1 a 4	36,3
de 5 a 8	31,3
de 9 a 12	13,2
de 13 a 16	5,6
de 17 a 20	2,6
de 21 a 24	0,9

Com base nesses dados, é correto afirmar que

a) mais de 10% obtiveram, no mínimo, 13 pontos.
b) no máximo 40% obtiveram até 4 pontos.
c) mais de 70% obtiveram, no máximo, 8 pontos.
d) mais de 3% obtiveram de 17 a, no máximo, 20 pontos.
e) mais de 4% obtiveram de 17 a 24 pontos.

12. As mensalidades dos planos de saúde são estabelecidas por faixa etária. A tabela a seguir fornece os valores das mensalidades do plano X.

Faixa etária	Mensalidade (R$)
Até 15 anos	120,00
de 16 a 30 anos	180,00
de 31 a 45 anos	260,00
de 46 a 60 anos	372,00
61 anos ou mais	558,00

Considerando o salário mínimo como R$510,00, pode-se afirmar que o comprometimento do salário de uma pessoa com 32 anos, que ganha dois salários mínimos, é, aproximadamente,

a) 20%.
b) 25,5%.
c) 30%.
d) 30,5%.
e) 51%.

Conhecimentos de leitura de gráficos e tabelas
C 6
H 24,25,26

Módulo 2

Análise de dados – Interpretação de gráficos: linhas, colunas, setores, histograma, polígono de frequência, cartograma e pictograma

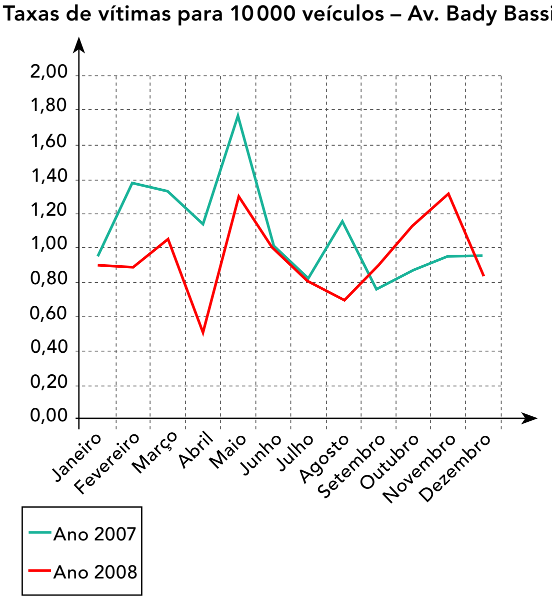
Gráficos estatísticos

O gráfico estatístico é uma forma de apresentação dos dados estatísticos, cujo objetivo é o de causar uma impressão mais rápida e dinâmica do fenômeno em estudo.

Tipos de gráficos

- **Gráficos em linhas ou segmentos –** Esse tipo de gráfico usa uma linha poligonal para representar a série estatística. Exemplo:

Taxas de vítimas para 10 000 veículos – Av. Bady Bassitt

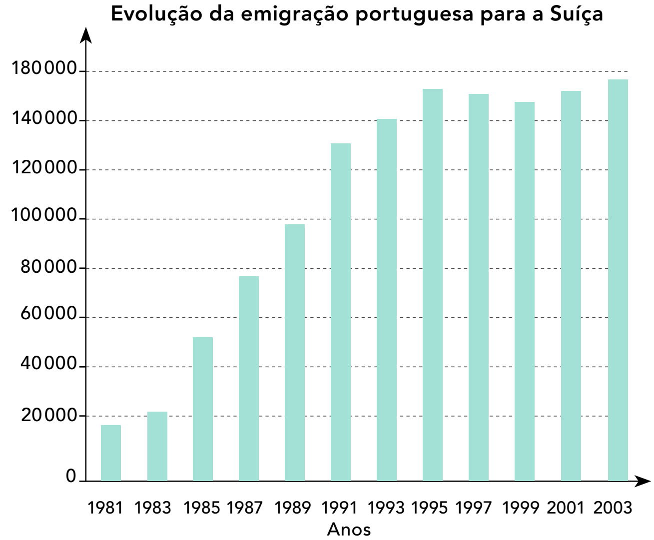


- **Gráficos em colunas ou em barras –** Esse tipo de gráfico utiliza colunas para representar a série estatística. Podem ser verticais ou horizontais e conter barras múltiplas.

Exemplos:

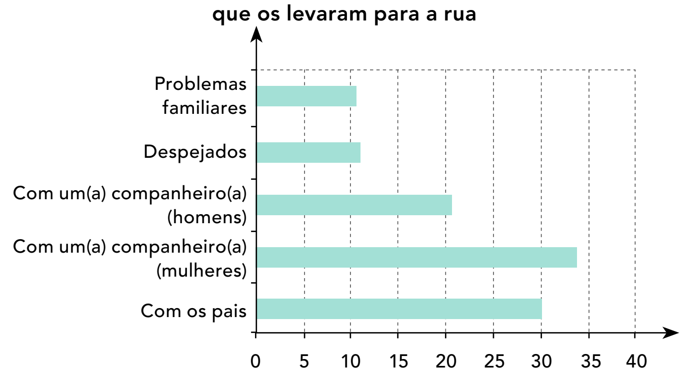
- **Barras verticais**

Evolução da emigração portuguesa para a Suíça



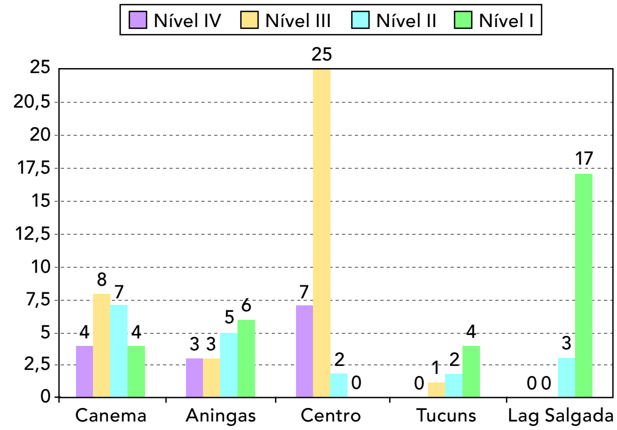
- **Barras horizontais**

Com quem viviam os sem-abrigo razões que os levaram para a rua



- **Barras múltiplas**

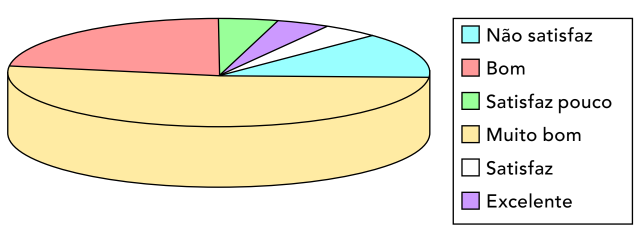
Gráfico do desenvolvimento das habilidades musicais das escolas participantes do Projeto Música na Escola – 2008



Gráficos em setores – Esse tipo de gráfico é usado quando se pretende comparar a representatividade de cada categoria da série. Também chamado, popularmente, de "gráfico de pizza".

Exemplo:

Ficha da Língua Portuguesa



Saiba mais

Sabe-se que o círculo tem 360° e que, para se calcular o número de graus do setor correspondente a uma determinada categoria, basta estabelecer uma simples proporção. Assim, "a quantidade da categoria está para X graus, assim como o total está para 360°".

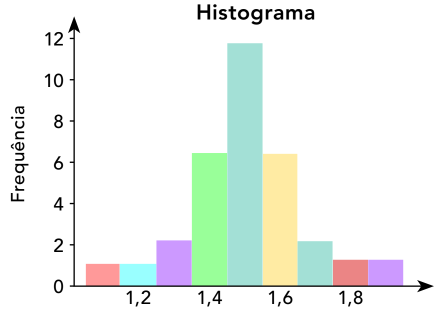
Histograma e polígono de frequência

O histograma é a representação gráfica de uma distribuição de frequências por meio de retângulos justapostos, quando os dados são apresentados em intervalos de classes iguais. O polígono de frequência é obtido unindo-se os pontos médios das classes.

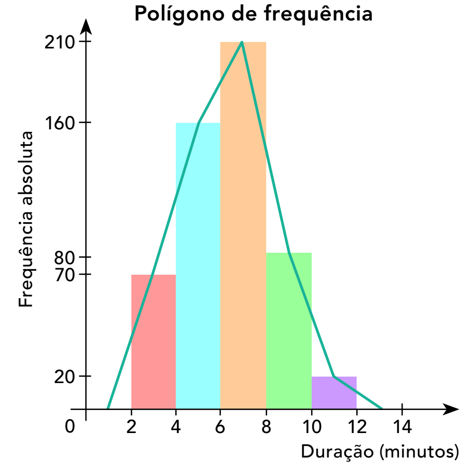
A área do histograma é proporcional à soma das frequências.

Exemplos:

Histograma



Polígono de frequência

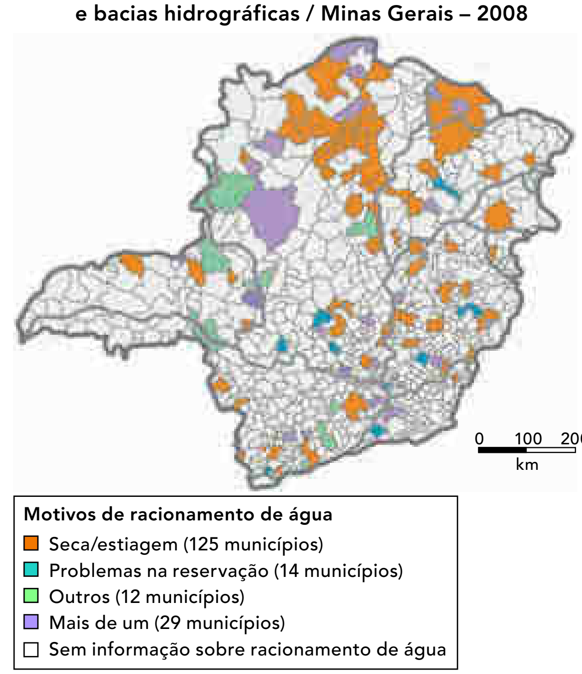


Cartograma

O cartograma é a representação sobre uma carta geográfica. Esse tipo de gráfico é empregado quando o objetivo é o de figurar os dados estatísticos diretamente relacionados com áreas geográficas ou políticas.

Exemplo:

Motivos de racionamento de água, segundo municípios e bacias hidrográficas / Minas Gerais – 2008



Pictograma

O pictograma é a apresentação de uma série estatística por meio de símbolos representativos do fenômeno. O pictograma constitui um dos processos gráficos que melhor fala ao público, por conta de sua forma, ao mesmo tempo atraente e sugestiva. Na representação gráfica, constam figuras.

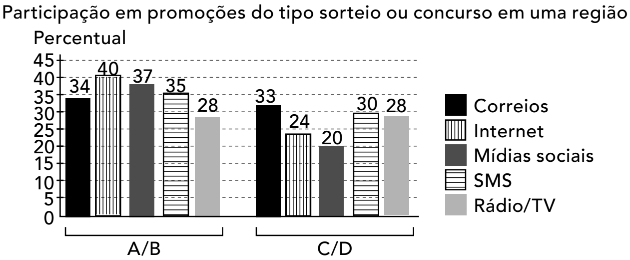
Exemplo:

Vendas mensais de livros

Atividades para sala

1. (ENEM) Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no *site* da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/TV.

Participação em promoções do tipo sorteio ou concurso em uma região



Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D). De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via

a) Correios e SMS.
b) internet e Correios.
c) internet e internet.
d) internet e mídias sociais.
e) rádio/TV e rádio/TV.

2. (ENEM) Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R$ 400 000,00, distribuídos de acordo com o gráfico 1. No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no gráfico 2.

Distribuição da folha salarial

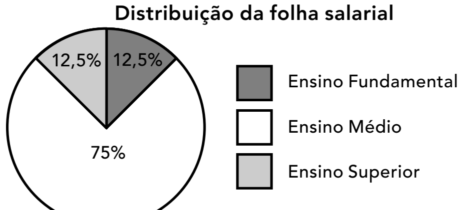


Gráfico 1

Número de funcionários por grau de instrução

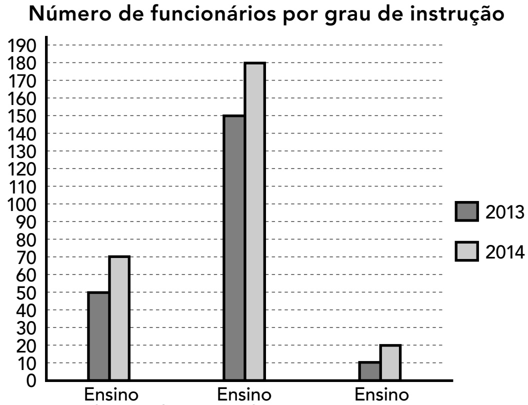


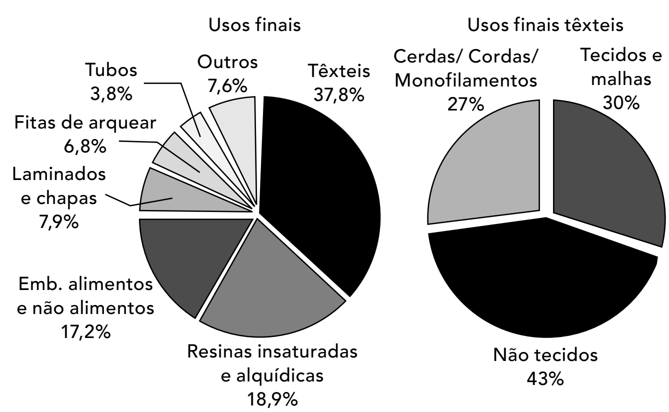
Gráfico 2

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

a) R$ 114 285,00
b) R$ 130 000,00
c) R$ 160 000,00
d) R$ 210 000,00
e) R$ 213 333,00

3. (ENEM) O polímero de PET (politereftalato de etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).

PET reciclado – 2010



Disponível em: <http://www.abipet.org.br>. Acesso em: 12 jul. 2012 (adaptado)

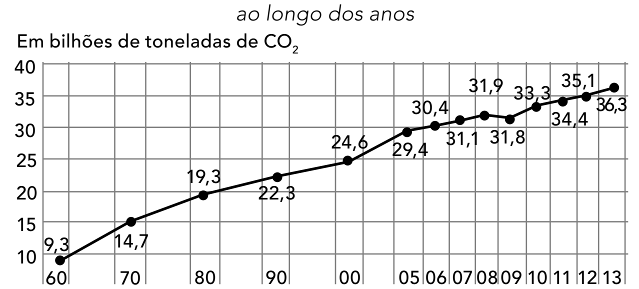
De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de

a) 16,0.
b) 22,9.
c) 32,0.
d) 84,6.
e) 106,6.

4. O gráfico a seguir apresenta a evolução da emissão de dióxido de carbono ao longo dos anos.

Emissões por queima de combustível fóssil

Veja a evolução das emissões globais de dióxido de carbono ao longo dos anos

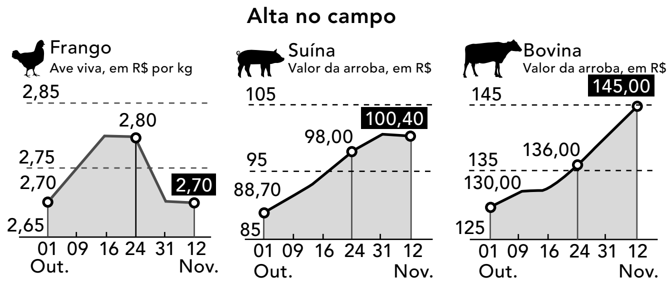


Fonte: CDIAC

Com base nos dados do gráfico, assinale a alternativa correta.

a) Ao longo do período, a emissão de dióxido de carbono apresentou crescimento constante.
b) Em relação a 1980, o ano de 1990 apresentou emissão de dióxido de carbono 30% maior.
c) O ano de 2009 apresentou menor valor de emissão de dióxido de carbono da primeira década do século XXI.
d) De 2000 a 2013, houve crescimento percentual de 11,7% na emissão de dióxido de carbono.
e) Em relação a 2000, o ano de 2013 apresentou emissão de dióxido de carbono aproximadamente 50% maior.

5.



Folha de S.Paulo, 13 nov. 2014.

Os gráficos indicam o preço no campo das carnes de frango, suína e bovina. Sabendo que uma arroba equivale a 15 quilogramas e considerando os preços indicados em 12 de novembro de 2014, pode-se afirmar que o preço do quilograma

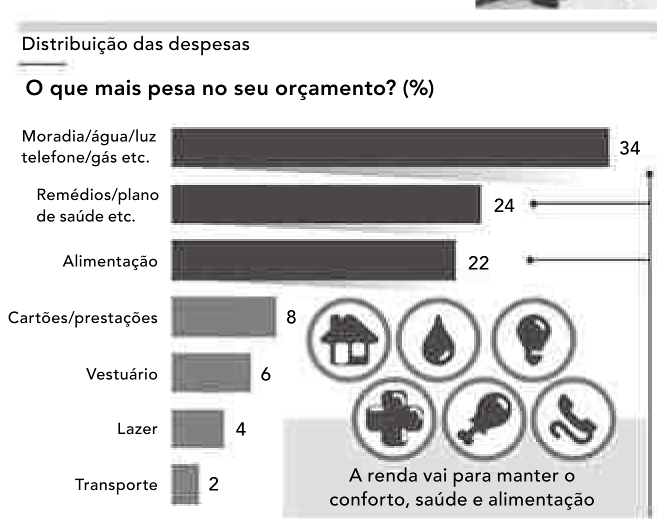
a) suíno é 147% maior que o quilograma do frango.
b) bovino é 220% maior que o quilograma do frango.
c) suíno é 144% maior que o quilograma bovino.
d) bovino é 357% maior que o quilograma do frango.
e) suíno é 119% maior que o quilograma do frango.

6. **Terceira idade compra mais do que investe**

Pesquisa revela, no entanto, que há uma parcela do segmento que prefere poupar parte do que ganha

46% dos idosos pesquisados afirmaram que investem parte do que recebem na poupança, 34%, em imóveis, e em fundos, 6%.

Marcos Santos/USP Imagens

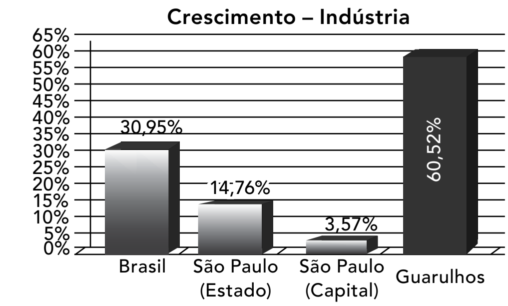


Diário do Nordeste, 5 nov. 2012. (adaptado)

Se um idoso recebe mensalmente uma aposentadoria de R$ 2750,00, então, de acordo com o gráfico, o seu gasto com alimentação e vestuário é

a) R$ 880,00.
b) R$ 865,00.
c) R$ 770,00.
d) R$ 605,00.
e) R$ 165,00.

7. (ENEM) A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.

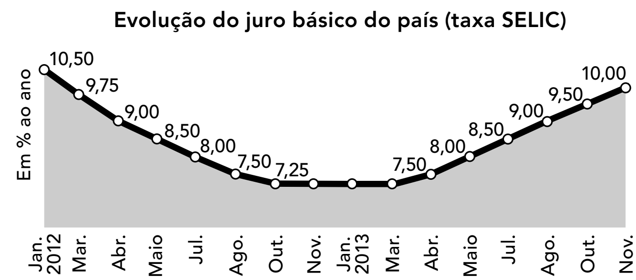


IBGE, 2002-2008. (adaptado)

Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

a) 75,28
b) 64,09
c) 56,95
d) 45,76
e) 30,07

8.

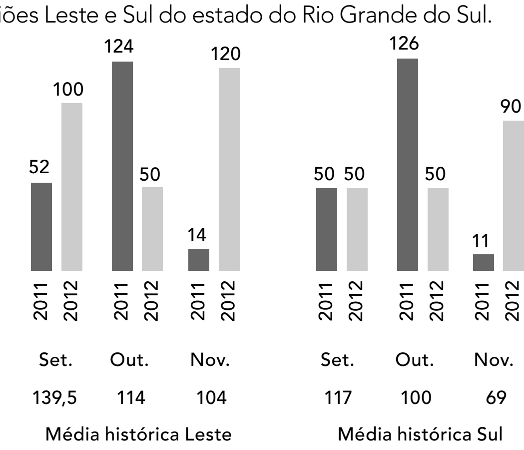


Banco Central.
Folha de S.Paulo, 2 dez. 2013. (adaptado)

O gráfico mostra, em percentuais, a evolução da taxa básica de juros de janeiro de 2012 a novembro de 2013. A partir do mês de abril de 2013, o gráfico assemelha-se a uma função

a) constante.
b) linear decrescente.
c) linear crescente.
d) exponencial.
e) quadrática com a concavidade voltada para cima.

9. O gráfico e os dados a seguir mostram a precipitação de chuva que ocorreu nos meses de setembro, outubro e novembro no ano de 2011 e a previsão para esses meses em 2012. Também apresentam a média histórica dessa precipitação, para as regiões Leste e Sul do estado do Rio Grande do Sul.



Zero Hora, 8 set. 2012. p. 20. (adaptado)

Com base nesses dados, é correto afirmar que

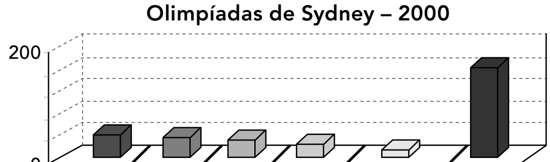
a) a previsão de chuvas para o mês de novembro de 2012, na Região Leste, é exatamente 25% superior à média histórica da região.

b) a quantidade de chuvas, na Região Sul, foi igual à média histórica da região, nos meses de setembro dos anos de 2011 e 2012.
c) a previsão de chuvas para a Região Leste, no mês de outubro de 2012, é 60% da quantidade de chuvas, na mesma região, no mesmo mês de 2011.
d) a quantidade de chuvas na Região Sul, em outubro de 2011, superou a média histórica da região em 26%.
e) a quantidade de chuvas prevista para o mês de novembro de 2012, na Região Leste, supera exatamente em 150% a quantidade de chuvas da região, no mesmo mês, em 2011.

Atividades propostas

1. (ENEM) As Olimpíadas são uma oportunidade para o congraçamento de um grande número de países, sem discriminação política ou racial, ainda que seus resultados possam refletir características culturais, socioeconômicas e étnicas. Em 2000, nos Jogos Olímpicos de Sydney, o total de 300 medalhas de ouro conquistadas apresentou a seguinte distribuição entre os 196 países participantes, como mostra o gráfico a seguir.

Distribuição das medalhas de ouro
Olimpíadas de Sydney – 2000



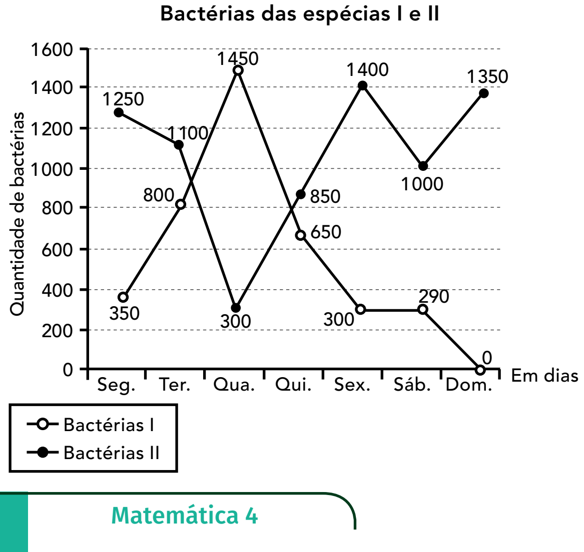
	EUA	Rússia	China	Áustria	Alemanha	Outros
Número de medalhas	40	32	28	15	13	171

Esses resultados mostram que, na distribuição das medalhas de ouro em 2000,

a) cada país participante conquistou pelo menos uma.
b) cerca de um terço foi conquistado por apenas três países.
c) os cinco países mais populosos obtiveram os melhores resultados.
d) os cinco países mais desenvolvidos obtiveram os melhores resultados.
e) cerca de um quarto foi conquistado pelos Estados Unidos.

2. (ENEM) Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 350 bactérias da espécie I e 1 250 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.

Bactérias das espécias I e II

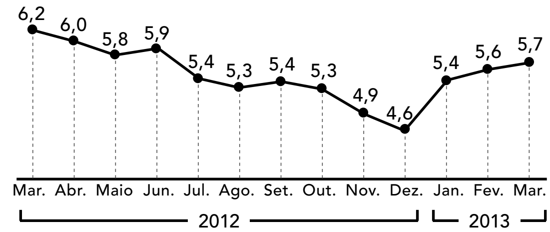


Em que dia dessa semana a quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima?

a) Terça-feira.
b) Quarta-feira.
c) Quinta-feira.
d) Sexta-feira.
e) Domingo.

3.

Taxa mensal de desemprego, em %
Comparação com mês imediatamente anterior



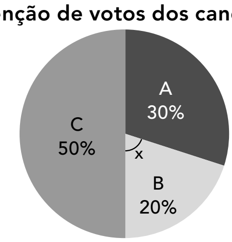
IBGE.
Folha de S.Paulo, 29 abr. 2013. (adaptado)

O gráfico mostra a taxa de desemprego no Brasil, no período de março de 2012 a março de 2013. O maior crescimento absoluto dessa taxa foi encontrado no período de

a) maio/2012 a jun/2012.
b) ago/2012 a set/2012.
c) dez/2012 a jan/2013.
d) jan/2013 a fev/2013.
e) fev/2013 a mar/2013.

4. Em uma eleição, estão concorrendo os candidatos A, B e C. Realizada uma pesquisa de intenção de voto com 1 000 eleitores, obteve-se o seguinte resultado, ilustrado no gráfico de setores a seguir.

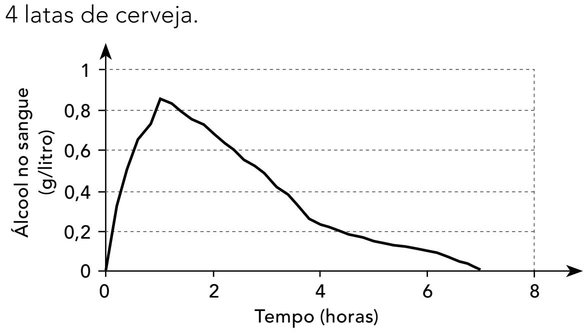
Intenção de votos dos candidatos



O valor do ângulo **x** do gráfico de setores é

a) 18 graus.
b) 36 graus.
c) 60 graus.
d) 72 graus.
e) 84 graus.

5. O gráfico a seguir mostra o processo de absorção e eliminação do álcool imediatamente após o indivíduo ingerir 4 latas de cerveja.



Considere as seguintes afirmativas, feitas a partir das informações contidas nesse gráfico.

I. O álcool é absorvido pelo organismo muito mais lentamente do que é eliminado.
II. Cerca de 60 minutos após a ingestão de 4 latas de cerveja, o indivíduo tem mais de 0,8 gramas de álcool por litro de sangue em seu organismo.
III. Se uma pessoa toma 4 latas de cerveja em um curto intervalo de tempo, o álcool contido nessa bebida só é completamente eliminado por seu organismo após se passarem cerca de 7 horas da ingestão.

O número de afirmativas falsas é

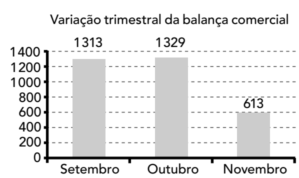
a) 0. b) 1. c) 2. d) 3.

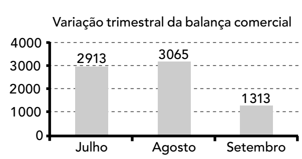
6. Analise o quadro seguinte, que apresenta o saldo da balança comercial brasileira em 2009. Os dados estão em milhões de dólares.

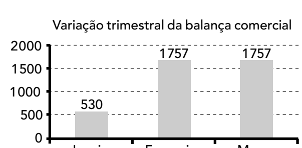
Meses	Valores em US$ milhões
Janeiro	530
Fevereiro	1 761
Março	1 757
Abril	3 695
Maio	2 626
Junho	4 604
Julho	2 913
Agosto	3 065
Setembro	1 313
Outubro	1 329
Novembro	613
Dezembro	2 177

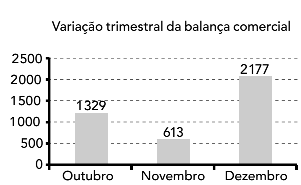
BRASIL. Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior. Disponível em: <http://www.mdic.org.br>. Acesso em: 21 ago. 2013. (adaptado)

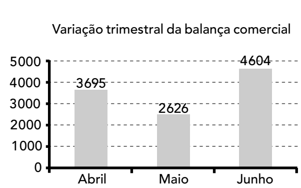
O gráfico que representa a análise da balança comercial no segundo trimestre de 2009, de acordo com os dados apresentados no quadro, é:

a)


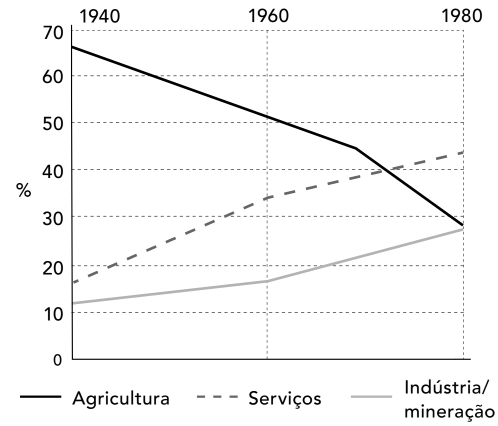
b)


c)


d)


e)


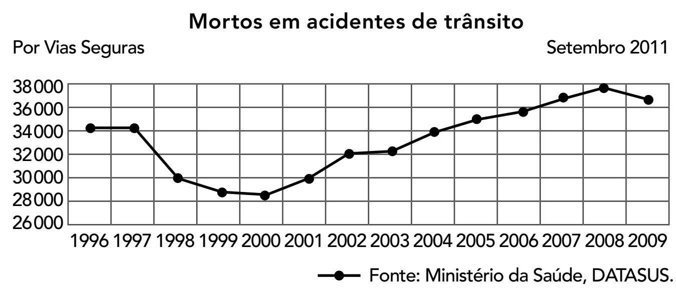
7. (ENEM) O gráfico mostra a porcentagem da força de trabalho brasileira em 40 anos, com relação aos setores agrícola, de serviços e industrial/mineral.



A altura do gráfico permite constatar que

a) em 40 anos, o Brasil deixou de ser essencialmente agrícola para se tornar uma sociedade quase que exclusivamente industrial.
b) a variação da força de trabalho agrícola foi mais acentuada no período de 1940 a 1960.
c) por volta de 1970, a força de trabalho agrícola tornou-se equivalente à industrial e de mineração.
d) em 1980, metade dos trabalhadores brasileiros constituía a força de trabalho do setor agrícola.
e) de 1960 a 1980, foi equivalente o crescimento percentual de trabalhadores nos setores industrial/mineral e de serviços.

8. (ENEM)

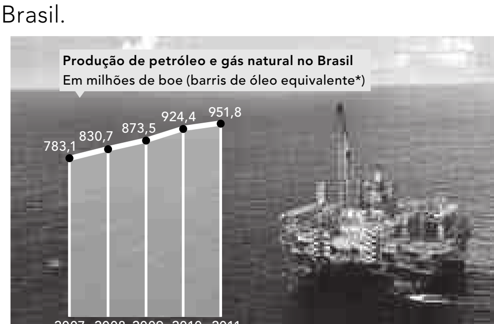


Disponível em: <http://www.vias-seguras.com>. Acesso em: 28 fev. 2012.

O gráfico divulgado pela Associação Por Vias Seguras traça objetivamente, a partir de dados do Ministério da Saúde, um histórico do número de vítimas fatais em decorrência de acidentes de trânsito no Brasil ao longo de catorze anos. As informações nele dispostas demonstram que o número de vítimas fatais

a) aumentou de forma progressiva ao longo do período.
b) teve sua maior redução no final da década de noventa.
c) se estabilizou nos cinco primeiros anos do século XXI.
d) sofreu mais redução que aumento ao longo do período.
e) se estabilizou na passagem do século XX ao século XXI.

9. Observe o gráfico da produção de petróleo e gás natural no Brasil.

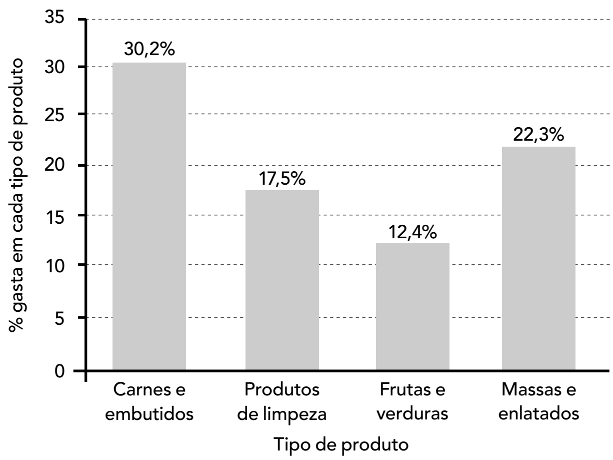


Plataforma P-51, da Petrobras, no campo de Marlim Sul, localizado na bacia de Campos. *Une as medidas de petróleo e gás em uma só. **Até julho. ANP. *Folha de S.Paulo*, 19 set. 2012.

Levando em consideração que, a partir de 2010, o crescimento da produção se manterá linearmente, pode-se concluir que a produção de petróleo e gás natural no Brasil, em milhões de "boe", no ano de 2018, será

a) 1 171,0. c) 1 120,1. e) 1 088,8.
b) 1 143,6. d) 1 116,2.

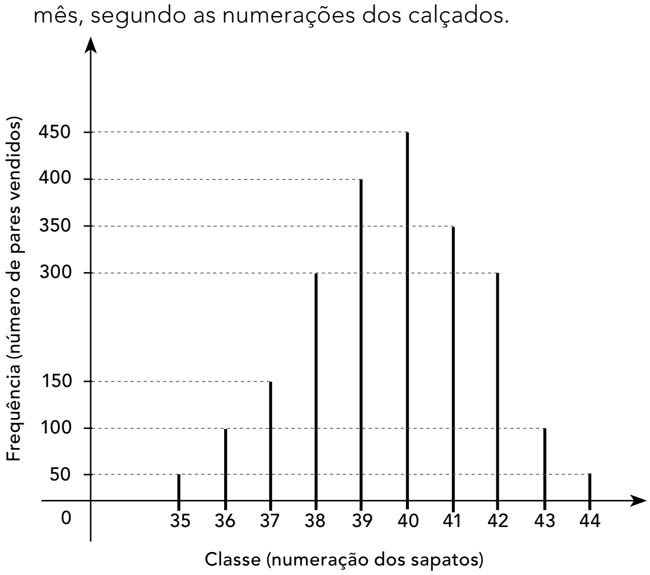
10. (ENEM) Uma dona de casa vai ao supermercado fazer a compra mensal. Ao concluir a compra, observa que ainda lhe restaram R$ 88,00. Seus gastos foram distribuídos conforme mostra o gráfico. As porcentagens apresentadas no gráfico são referentes ao valor total, em reais, reservado para a compra mensal.



Qual o valor total, em reais, reservado por essa dona de casa para a compra mensal?

a) 106,80 c) 412,00 e) 588,00
b) 170,40 d) 500,00

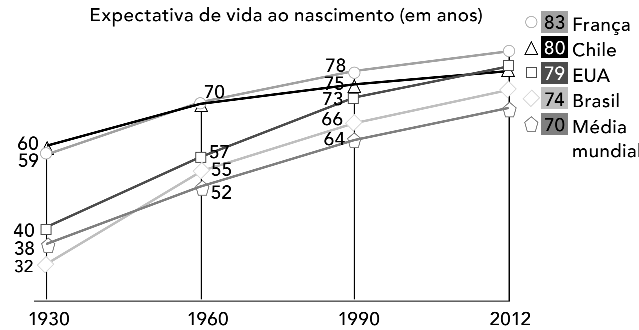
11. O gráfico a seguir corresponde à distribuição de frequência dos pares de sapatos vendidos por uma fábrica em certo mês, segundo as numerações dos calçados.



A frequência relativa da classe 40, isto é, da numeração 40 dos sapatos, é

a) 10%.
b) 12%.
c) 20%.
d) 24%.
e) 25%.

12.

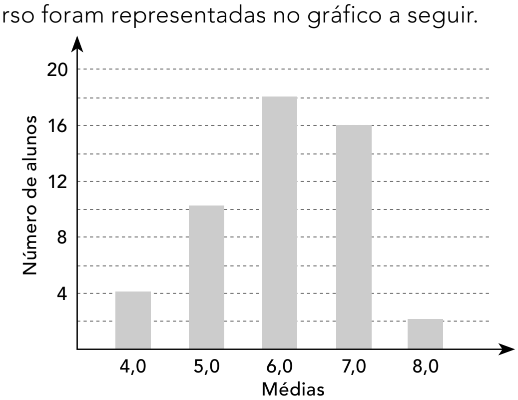


Folha de S.Paulo, 22 nov. 2014.

O gráfico apresentado mostra o crescimento da expectativa de vida em quatro países e a média mundial. Admitindo que não haja crescimento na taxa dos demais países e que, a partir de 1990, o crescimento do índice brasileiro seja linear, então, no ano de 2023, a expectativa de vida do Brasil

a) se aproximará da dos Estados Unidos.
b) passará a dos Estados Unidos, mas não alcançará a do Chile.
c) passará a do Chile, mas não alcançará a da França.
d) será 10 anos superior à média mundial.
e) será 12 anos superior à média mundial.

13. (ENEM) Considere que as médias finais dos alunos de um curso foram representadas no gráfico a seguir.

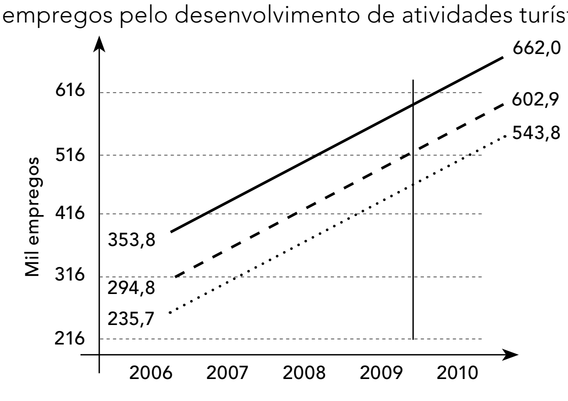


Sabendo que a média para aprovação nesse curso era maior ou igual a 6,0, qual foi a porcentagem de alunos aprovados?

a) 18% c) 36% e) 72%
b) 21% d) 50%

14. (ENEM) A importância do desenvolvimento da atividade turística no Brasil relaciona-se especialmente com os possíveis efeitos na redução da pobreza e das desigualdades por meio da geração de novos postos de trabalho e da contribuição para o desenvolvimento sustentável regional.

No gráfico a seguir, são mostrados três cenários – pessimista, previsível e otimista – a respeito da geração de empregos pelo desenvolvimento de atividades turísticas.



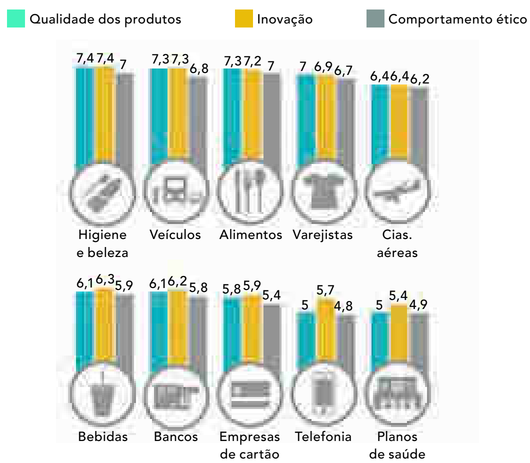
De acordo com o gráfico, em 2009, o número de empregos gerados pelo turismo será superior a

a) 602 900 no cenário previsível.
b) 660 000 no cenário otimista.
c) 316 000 e inferior a 416 000 no cenário previsível.
d) 235 700 e inferior a 353 800 no cenário pessimista.
e) 516 000 e inferior a 616 000 no cenário otimista.

15.

Bem na foto

Pesquisa avalia imagem corporativa de segmentos, nota média em escala de 0 a 10*



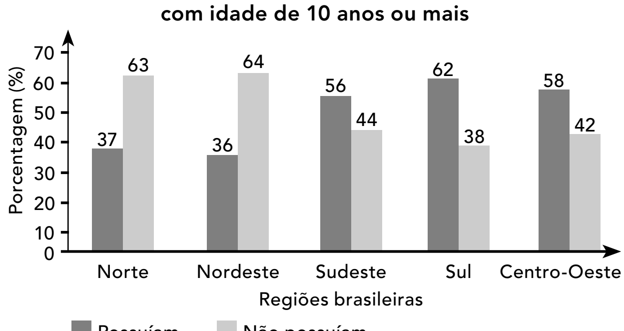
Folha de S.Paulo, 14 out. 2014.

Uma pesquisa apontou a imagem de diversos setores da economia brasileira. Considerando a média aritmética dos itens pesquisados de cada segmento, então,

a) para o consumidor, o setor de veículos é mais bem avaliado do que o setor de alimentos.
b) para o consumidor, o setor de planos de saúde é mais bem avaliado do que o setor de telefonia.
c) para o consumidor, o setor de alimentos é mais bem avaliado do que o setor de varejistas.
d) para o consumidor, o setor de bancos é mais bem avaliado do que o setor de bebidas.
e) para o consumidor, o setor de varejistas é mais bem avaliado do que o setor de higiene e beleza.

16. (ENEM) Os dados do gráfico foram coletados por meio da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios.

Estudantes que possuem telefone móvel celular com idade de 10 anos ou mais



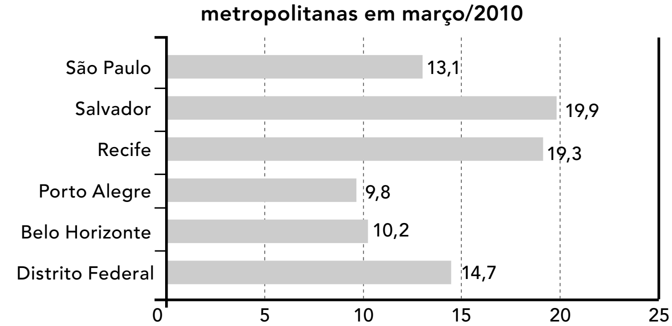
IBGE.

Supondo que, no Sudeste, 14 900 estudantes foram entrevistados nessa pesquisa, quantos deles possuíam telefone móvel celular?

a) 5 513
b) 6 556
c) 7 450
d) 8 344
e) 9 536

17. (ENEM) Os dados do gráfico seguinte foram gerados com base em dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).

Taxas de desemprego nas regiões metropolitanas em março/2010

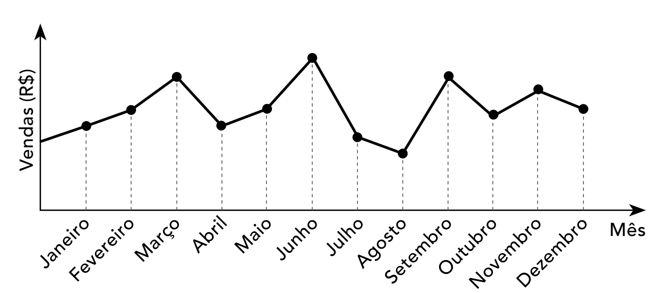


Disponível em: <http://www.g1.globo.com>. Acesso em: 28 abr. 2010. (adaptado)

Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250 000, o número de desempregados em março de 2010, nessa região, foi de

a) 24 500.
b) 25 000.
c) 220 500.
d) 223 000.
e) 227 500.

18. (ENEM) O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico mostrado a seguir, que apresenta a evolução do total de vendas (em reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.



De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absoluta em 2011 foram

a) março e abril.
b) março e agosto.
c) agosto e setembro.
d) junho e setembro.
e) junho e agosto.

Conhecimentos de estatística e probabilidade

C	7
H	27

Módulo 3

Medidas de tendência central – Média

As medidas de tendência central são aquelas que possibilitam representar, resumidamente, um conjunto de dados relativos à observação de determinado fenômeno, pois orientam quanto à posição da distribuição no eixo das abscissas, viabilizando a comparação dos dados entre si pelo confronto desses números. As principais medidas de tendência central são: **média**, **moda** e **mediana**.

Neste módulo, serão estudados os conceitos e as propriedades das médias.

- **Média de um conjunto –** É um número capaz de representar todo o conjunto em operações matemáticas e obter resultados satisfatórios.
- **Média aritmética simples –** Quando se tratar de dados isolados, a média $\overline{X}$ será a soma de todos os valores (X_i) observados dividida pelo número de observações.

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X_i}{n}$$

Em que:
ΣX_i = soma dos valores observados.
n = número de observações.
Exemplo:
Determine a média aritmética simples do seguinte conjunto de valores: 5, 6, 7 e 10.

$$\overline{X} = \frac{5+6+7+10}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

- **Média aritmética ponderada –** Quando se tratar de dados agrupados, a média $\overline{X}$ será a soma do produto dos valores observados pela frequência absoluta (peso) com que esses ocorrem dividida pela soma das frequências absolutas (pesos) da distribuição.

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X_i \cdot F_i}{\Sigma F_i} = \frac{\Sigma X_i \cdot P_i}{\Sigma P_i}$$

Em que:

$\Sigma X_i F_i$ = soma dos produtos de cada valor observado pela sua respectiva frequência absoluta;
$\Sigma X_i P_i$ = soma dos produtos de cada valor observado pelo seu respectivo peso;
ΣF_i = soma das frequências absolutas;
ΣP_i = soma dos pesos.

Exemplo:
Uma pesquisa revelou as idades dos moradores de determinada comunidade de jovens. O resultado é mostrado na tabela a seguir.

Idade (anos)	Número de moradores
15	20
16	10
17	10
18	30
19	10

De acordo com os dados da tabela, determine a média de idade dos moradores dessa comunidade.

$$\overline{X} = \frac{15(20)+16(10)+17(10)+18(30)+19(10)}{20+10+10+30+10} = \frac{1\,360}{80} = 17$$

Tome nota

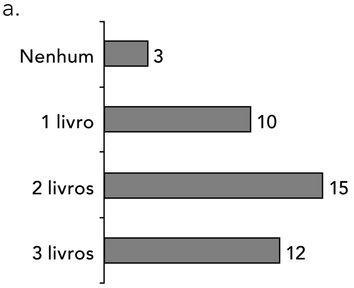
- A média é utilizada quando se deseja obter a medida de posição que possui a maior estabilidade.
- Se os dados estiverem agrupados em intervalos de classe, deve-se considerar como X_i o ponto médio de cada um desses intervalos.

Propriedades

- **P_1 –** A média de uma constante é a própria constante.
- **P_2 –** Se for adicionada uma constante **k** a todos os valores de uma variável, a média do conjunto também ficará adicionada de **k**.
- **P_3 –** Se forem multiplicados por uma constante **k** todos os valores de uma variável, a média do conjunto também ficará multiplicada por **k**.

Atividades para sala

1. O gráfico a seguir apresenta informações sobre os números de livros lidos no mês passado pelos alunos de determinada turma.



Sabendo-se que a informação de todos os alunos consta nesse gráfico e que não há aluno que leu mais de 3 livros, a média do número de livros lidos no mês passado por essa turma é, exatamente,

a) 2,6.
b) 1,5.
c) 1,9.
d) 2,05.
e) 1,73.

2. (ENEM) A participação dos estudantes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aumenta a cada ano. O quadro a seguir indica o percentual de medalhistas de ouro, por região, nas edições da OBMEP de 2005 a 2009.

Região	2005	2006	2007	2008	2009
Norte	2%	2%	1%	2%	1%
Nordeste	18%	19%	21%	15%	19%
Centro-Oeste	5%	6%	7%	8%	9%
Sudeste	55%	61%	58%	66%	60%
Sul	21%	12%	13%	9%	11%

Disponível em: <http://www.obmep.org.br>. Acesso em: abr. 2010. (adaptado)

Em relação às edições de 2005 a 2009 da OBMEP, qual o percentual médio de medalhistas de ouro da Região Nordeste?

a) 14,6%
b) 18,2%
c) 18,4%
d) 19,0%
e) 21,0%

3. (ENEM) Ao final de uma competição de Ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas Química e Física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de Química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas.

O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	x	25
III	21	18

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de Química para vencer a competição é

a) 18. b) 19. c) 22. d) 25. e) 26.

4. (ENEM) Brasil e França têm relações comerciais há mais de 200 anos. Enquanto a França é a 5ª nação mais rica do planeta, o Brasil é a 10ª, e ambas se destacam na economia mundial. No entanto, devido a uma série de restrições, o comércio entre esses dois países ainda não é adequadamente explorado, como mostra a tabela seguinte, referente ao período 2003-2007.

Investimentos bilaterais (em milhões de dólares)		
Ano	Brasil na França	França no Brasil
2003	367	825
2004	357	485
2005	354	1 458
2006	539	744
2007	280	1 214

Disponível em: <http://www.cartacapital.com.br>. Acesso em: 7 jul. 2009.

Os dados da tabela mostram que, no período considerado, os valores médios dos investimentos da França no Brasil foram maiores que os investimentos do Brasil na França em um valor

a) inferior a 300 milhões de dólares.
b) superior a 300 milhões de dólares, mas inferior a 400 milhões de dólares.
c) superior a 400 milhões de dólares, mas inferior a 500 milhões de dólares.
d) superior a 500 milhões de dólares, mas inferior a 600 milhões de dólares.
e) superior a 600 milhões de dólares.

5. (ENEM) Um concurso é composto por cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

Candidato	Média nas quatro primeiras etapas	Pontuação na quinta etapa
A	90	60
B	85	85
C	80	95
D	60	90
E	60	100

A ordem de classificação final desse concurso é

a) A, B, C, E, D.
b) B, A, C, E, D.
c) C, B, E, A, D.
d) C, B, E, D, A.
e) E, C, D, B, A.

6. Vivian estuda em determinado colégio e, para que ela seja aprovada sem prova final, é necessário que a média das três certificações que compõem o sistema de avaliação de sua escola seja maior ou igual a 7. A tabela a seguir mostra as notas obtidas por Vivian em Matemática e o peso atribuído a cada uma das certificações.

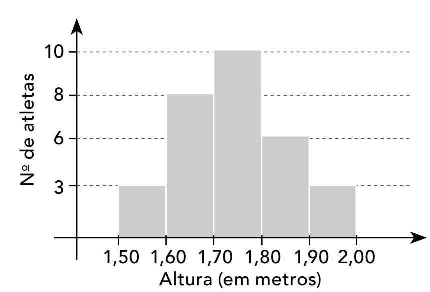
Certificações	Notas	Peso
Primeira	6,2	3
Segunda	7,4	3
Terceira	?	4

A nota mínima que Vivian precisa tirar na terceira certificação para ser aprovada sem prova final é

a) 7,0.
b) 7,3.
c) 7,4.
d) 7,6.
e) 7,8.

Atividades propostas

1. O histograma a seguir apresenta as alturas de trinta atletas de uma equipe de futebol.



Com esses dados, pode-se concluir que a média das alturas dos atletas é, aproximadamente,

a) 1,58.
b) 1,65.
c) 1,74.
d) 1,81.
e) 1,92.

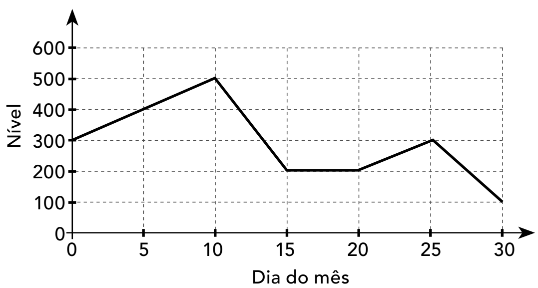
2. (ENEM) Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3	Reagente 4	Reagente 5
Experi-mento 1	1	0	2	2	1
Experi-mento 2	6	6	3	4	2
Experi-mento 3	6	7	8	7	9
Experi-mento 4	6	6	10	8	10
Experi-mento 5	11	5	11	12	11

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

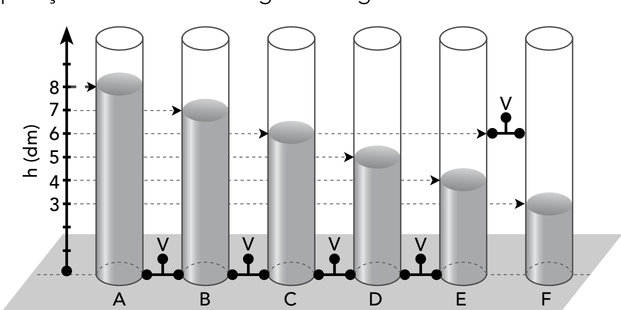
3. O gráfico a seguir mostra o nível de água no reservatório de uma cidade, em centímetros.



Considerando o mês inteiro, o nível médio de água no reservatório é igual a

a) 225 centímetros.
b) 250 centímetros.
c) 275 centímetros.
d) 300 centímetros.
e) 325 centímetros.

4. Seis reservatórios cilíndricos, superiormente abertos e idênticos (A, B, C, D, E e F), estão apoiados sobre uma superfície horizontal plana e ligados por válvulas (V) nas posições indicadas na figura a seguir.



Com as válvulas V fechadas, cada reservatório contém água até o nível **h** indicado na figura. Todas as válvulas são, então, abertas, o que permite a passagem livre da água entre os reservatórios, até que se estabeleça o equilíbrio hidrostático.

Nessa situação final, o nível da água, em dm, será igual a

a) 6,0 nos reservatórios de A a E e 3,0 no reservatório F.
b) 5,5 nos reservatórios de A a E e 3,0 no reservatório F.
c) 6,0 em todos os reservatórios.
d) 5,5 em todos os reservatórios.
e) 5,0 nos reservatórios de A a E e 3,0 no reservatório F.

5. (ENEM) Cinco amigos marcaram uma viagem à praia em dezembro. Para economizar, combinaram de ir em um único carro. Cada amigo anotou quantos quilômetros seu respectivo carro fez, em média, por litro de gasolina, nos meses de setembro, outubro e novembro. Ao final desse trimestre, calcularam a média dos três valores obtidos para escolherem o carro mais econômico, ou seja, o que teve a maior média. Os dados estão representados na tabela a seguir.

Carro	Desempenho médio mensal (km/litro)		
	Setembro	Outubro	Novembro
I	6,2	9,0	9,3
II	6,7	6,8	9,5
III	8,3	8,7	9,0
IV	8,5	7,5	8,5
V	8,0	8,0	8,0

Qual carro os amigos deverão escolher para a viagem?

a) I b) II c) III d) IV e) V

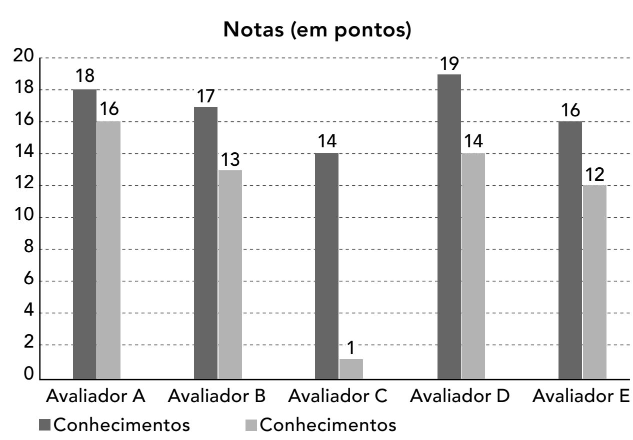
6. Para que fosse feito um levantamento sobre o número de infrações de trânsito, foram escolhidos 50 motoristas. O número de infrações cometidas por esses motoristas, nos últimos cinco anos, produziu a tabela apresentada a seguir.

Nº de infrações	Nº de motoristas
De 1 a 3	7
De 4 a 6	10
De 7 a 9	15
De 10 a 12	13
De 13 a 15	5
Maior ou igual a 16	0

Pode-se, então, afirmar que, para esse grupo, a média do número de infrações, por motorista, nos últimos cinco anos, está entre

a) 6,9 e 9,0.
b) 7,2 e 9,3.
c) 7,5 e 9,6.
d) 7,8 e 9,9.
e) 8,1 e 10,2.

7. (ENEM) As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribui duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é

a) 0,25 ponto maior.
b) 1,00 ponto maior.
c) 1,00 ponto menor.
d) 1,25 ponto maior.
e) 2,00 pontos menor.

8. (ENEM) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas em uma tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4×4 e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando o produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida com base na tabela por:

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

9. (ENEM) A tabela a seguir mostra a evolução da receita bruta anual, calculada em milhares de reais, nos três últimos anos de cinco microempresas (ME) que se encontram à venda.

ME	2009	2010	2011
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Um investidor deseja comprar duas das empresas listadas na tabela. Para tal, ele calcula a média da receita bruta anual dos últimos três anos (de 2009 até 2011) e escolhe as duas empresas de maior média anual.

As empresas que esse investidor deve comprar são

a) Balas W e Pizzaria Y.
b) Chocolates X e Tecelagem Z.
c) Pizzaria Y e Alfinetes V.
d) Pizzaria Y e Chocolates X.
e) Tecelagem Z e Alfinetes V.

10. A Universidade Estadual de Goiás mudou seu sistema de avaliação, e uma das modificações foi o cálculo da média final, que passou a ser dado por $\frac{2 \cdot N_1 + 3 \cdot N_2}{5}$, sendo N_1 e N_2 a primeira e a segunda nota do aluno, respectivamente. Se um aluno obtiver 5,0 e 7,0 na primeira e na segunda nota, respectivamente, a média final desse aluno será

a) 6,3. b) 6,2. c) 6,1. d) 6,0. e) 5,8.

11. As tabelas a seguir mostram o tempo de escolaridade de candidatos a uma vaga de vendedor de uma empresa nos anos de 2011 e 2012.

2011	
Número de candidatos	Tempo de escolaridade (anos)
8	4
4	8
5	11
3	15

2012	
Número de candidatos	Tempo de escolaridade (anos)
10	4
5	8
10	11
12	15

De 2011 a 2012, o tempo médio de escolaridade entre os candidatos à vaga de vendedor dessa empresa

a) permaneceu constante.
b) decresceu 1,8%.
c) decresceu 10%.
d) cresceu 1,8%.
e) cresceu 22%.

12. A tabela a seguir mostra as quantidades de alunos que acertaram e que erraram as 5 questões de uma prova aplicada em duas turmas. Cada questão valia dois pontos.

Questão	Turma A		Turma B	
	Acertos	Erros	Acertos	Erros
1	32	8	42	18
2	28	12	48	12
3	36	4	48	12
4	16	24	24	36
5	20	20	30	30

Nessa prova, a média dos alunos da turma A e a média da turma B foram, respectivamente,

a) 6,80 e 6,20.
b) 6,60 e 6,40.
c) 6,40 e 6,60.
d) 6,20 e 6,80
e) 6,00 e 7,00.

Matemática 5

Matemática e suas Tecnologias

Neste livro:

Módulo 1: Trigonometria I ... 76
Módulo 2: Trigonometria II ... 83
Módulo 3: Trigonometria III ... 91

Conhecimentos geométricos

C	2
H	7,8,9

Módulo 1

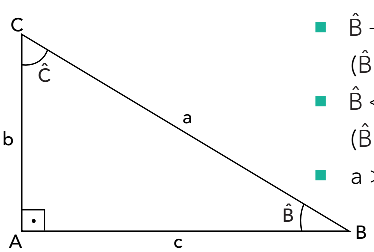
Trigonometria I

Etimologicamente, a palavra **trigonometria** significa "medida dos triângulos". Essa área da Matemática ocupava-se, inicialmente, em relacionar as medidas de um triângulo (lados, ângulos etc.), e assim obter os demais elementos. Para isso, definiram-se funções que associam, para cada ângulo, números reais. São as chamadas funções trigonométricas, as quais se mostraram bastante úteis para a Trigonometria e para diversos outros ramos da Matemática, da Física e da Engenharia.

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

Considere o triângulo retângulo ABC, retângulo em A, como mostra a figura. Observe que:



- $\hat{B} + \hat{C} = 90°$
  ($\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares)
- $\hat{B} < 90°$ e $\hat{C} < 90°$
  ($\hat{B}$ e $\hat{C}$ são agudos)
- $a > b$ e $a > c$

Assim, para um ângulo ($\hat{B}$ ou $\hat{C}$) de um triângulo retângulo ABC, tem-se que:

$\text{sen } \hat{B} = \dfrac{b}{a}$ (quociente do cateto oposto a $\hat{B}$ pela hipotenusa).

$\cos \hat{B} = \dfrac{c}{a}$ (quociente do cateto adjacente a $\hat{B}$ pela hipotenusa).

$\text{tg } \hat{B} = \dfrac{b}{c}$ (quociente do cateto oposto a $\hat{B}$ pelo cateto adjacente a $\hat{B}$).

Analogamente, define-se:

$\text{sen } \hat{C} = \dfrac{c}{a}$, $\cos \hat{C} = \dfrac{b}{a}$ e $\text{tg } \hat{C} = \dfrac{c}{b}$

Observe que $\text{sen } \hat{B} = \cos \hat{C}$ e $\text{sen } \hat{C} = \cos \hat{B}$. De um modo geral, $\boxed{\text{sen } x = \cos(\underbrace{90° - x}_{\text{Ângulos complementares}})}$

Outras relações fundamentais (cossecante, secante e cotangente)

A partir de $\text{sen } \hat{B} = \dfrac{b}{a}$, $\cos \hat{B} = \dfrac{c}{a}$ e $\text{tg } \hat{B} = \dfrac{b}{c}$, são definidas $\text{cossec } \hat{B} = \dfrac{a}{b}$, $\sec \hat{B} = \dfrac{a}{c}$ e $\text{cotg } \hat{B} = \dfrac{c}{b}$, ou seja:

$\text{cossec } \hat{B} = \dfrac{1}{\text{sen } \hat{B}}$, $\text{sen } \hat{B} \neq 0$; $\sec \hat{B} = \dfrac{1}{\cos \hat{B}}$, $\cos \hat{B} \neq 0$;

$\text{cotg } \hat{B} = \dfrac{1}{\text{tg } \hat{B}}$, $\text{tg } \hat{B} \neq 0$.

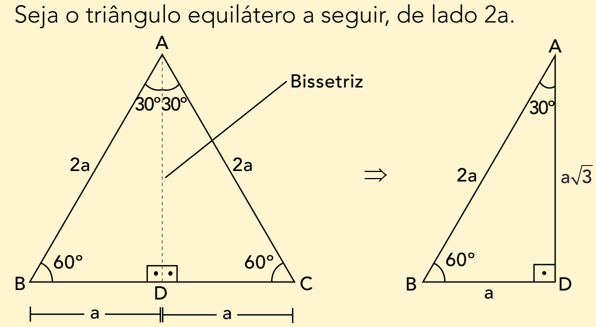
Observe que:

$$\frac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \text{tg } \hat{B};\ \text{e}\ \frac{\cos \hat{B}}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = \text{cotg } \hat{B}$$

A partir disso, conclui-se que:

$\text{tg } \hat{B} = \dfrac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}}$, $\cos \hat{B} \neq 0$; $\text{cotg } \hat{B} = \dfrac{\cos \hat{B}}{\text{sen } \hat{B}}$, $\cos \hat{B} \neq 0$.

Seja o triângulo equilátero a seguir, de lado 2a.



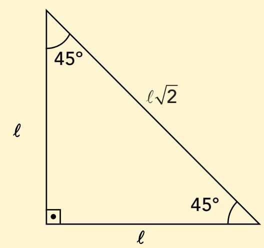
Note que, para o ΔABD, tem-se:

I. $\overline{BD} = a \Rightarrow$ vale metade da hipotenusa e está oposto ao ângulo de 30°.

II. $\overline{AD} = a\sqrt{3} \Rightarrow$ está oposto ao ângulo de 60°.

III. Dividindo-se todos os lados por **a**, será obtido um triângulo retângulo de lados 1, $\sqrt{3}$ e 2, que corresponde a uma "terna pitagórica", bastante útil na resolução de questões.

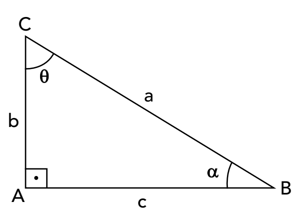
Seja o triângulo retângulo isósceles de lado ℓ:



Note que o lado que se opõe ao ângulo de 90°, nesse triângulo, mede $\ell\sqrt{2}$.

Ângulos complementares

Observando a figura a seguir, é possível concluir que:



$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} = \cos\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{a} = \text{sen } \theta$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{c} = \text{cotg } \theta$$

$$\sec\alpha = \frac{a}{c} = \text{cossec } \theta$$

$$\text{cossec } \alpha = \frac{a}{b} = \sec\theta$$

Mas, $\alpha + \theta + 90° = 180° \Rightarrow \alpha + \theta = 90° \Rightarrow \alpha$ e θ são ângulos complementares. Assim, diz-se que cofunções de ângulos complementares são iguais.

Exemplos:

sen 20° = cos 70°

tg 40° = cotg 50°

sec 80° = cossec 10°

Dessa forma:

$\text{sen } \alpha = \cos(90° - \alpha)$

$\text{tg } \alpha = \text{cotg }(90° - \alpha)$

$\sec\alpha = \text{cossec }(90° - \alpha)$

São cofunções:

- seno e cosseno;
- tangente e cotangente;
- secante e cossecante.

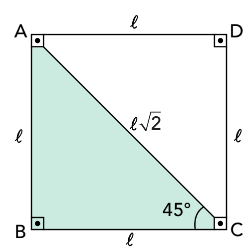
Valores notáveis

Os valores dos senos, dos cossenos e das tangentes de alguns ângulos podem ser calculados sem auxílio de uma tabela de senos e cossenos. Alguns desses ângulos são: 30°, 45° e 60° (os mais comuns). Outros como 15°, 18°, 22°30', 36°, 72° e 75° são ângulos cujos senos e cossenos podem ser calculados geometricamente.

Seno, cosseno e tangente de 45°

Considere um quadrado ABCD de lado ℓ. Sabe-se que a diagonal $\overline{AC}$ mede $\ell\sqrt{2}$ e forma ângulo de 45° com os lados.

Pela definição aplicada no triângulo retângulo ABC, é possível verificar as seguintes igualdades:



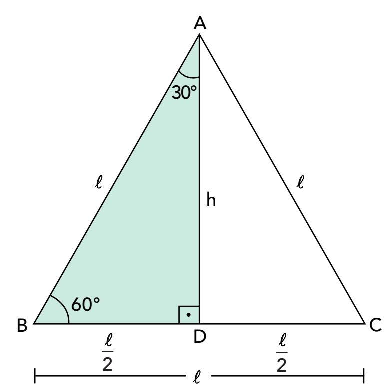
$$\text{sen } 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\ell}{\ell} = 1 \Rightarrow \boxed{\text{tg } 45° = 1}$$

Seno, cosseno e tangente dos ângulos 30° e 60°

Considere um triângulo equilátero ABC de lado ℓ. Sabe-se que os ângulos internos medem 60° e que a sua altura **h** mede $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Usando a definição no triângulo retângulo ABD:



$$\text{sen } 30° = \cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Rightarrow \boxed{\text{sen } 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}}$$

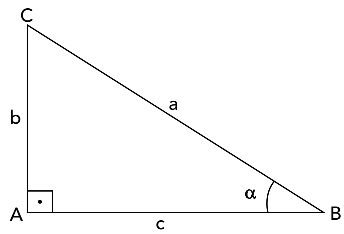
$$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} \Rightarrow \boxed{\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{h} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\text{tg } 60° = \sqrt{3}}$$

Relação fundamental da Trigonometria

Dado o triângulo a seguir, tem-se:



$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$$

Como o triângulo ABC é retângulo, então: $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras). Dividindo ambos os membros da igualdade por $\mathbf{a^2}$, será obtido:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$, ou seja:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Essa relação foi deduzida para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, mas é válida para todo $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$.

Relações trigonométricas derivadas da relação fundamental

- $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\div\, \text{sen}^2\alpha} \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}$

$$1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{\text{sen } \alpha}\right)^2 \Rightarrow \boxed{1 + \text{cotg}^2 \alpha = \text{cossec}^2 \alpha}$$

- $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\div\, \cos^2 \alpha} \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$$\left(\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha}$$

Atividades para sala

1. Um topógrafo, querendo conhecer a altura de um penhasco, mediu a distância do ponto A até a beira do rio (ponto E), obtendo 20 metros. A largura do rio (EB) é desconhecida. A figura a seguir mostra os ângulos $B\hat{A}C = 30°$ e $B\hat{E}C = 60°$. A altura do penhasco encontrada pelo topógrafo foi

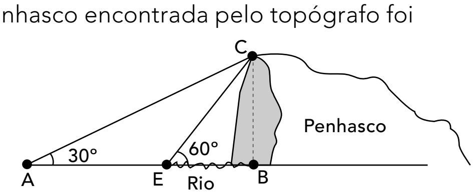
a) $10\sqrt{3}$ m.

b) $12\sqrt{3}$ m.

c) $15\sqrt{3}$ m.

d) $20\sqrt{3}$ m.

e) $40\sqrt{3}$ m.



2. Um soldado, sua sombra e a trajetória do Sol estão em um mesmo plano perpendicular ao solo onde o soldado se encontra. O soldado está de sentinela em um quartel quando os raios solares formam ângulos de 60° e 30° com o solo, respectivamente, no início e no final de sua missão. Nessas condições, pode-se afirmar que a medida da sombra do soldado no final de sua missão é

a) a metade da medida de sua sombra no início da missão.

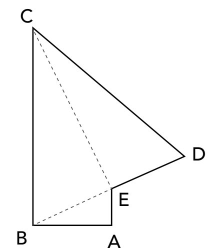
b) o dobro da medida de sua sombra no início da missão.

c) o triplo da medida de sua sombra no início da missão.

d) o quádruplo da medida de sua sombra no início da missão.

e) um terço da medida de sua sombra no início da missão.

3. Um metalúrgico confeccionou uma chapa de aço ABCDEA, conforme a ilustração a seguir.



Dados da peça:

- $\overline{AB} = 3$ cm;
- Os pontos B, E e D estão alinhados;
- $A\hat{B}C = B\hat{E}C = B\hat{A}E = 90°$;
- $B\hat{C}E = D\hat{C}E$;
- $E\hat{B}A = 30°$.

Pode-se afirmar que o perímetro da peça, em centímetros, é igual a

a) $2 + 10\sqrt{3}$.

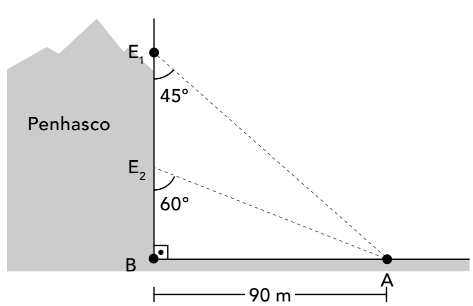
b) $11 + \sqrt{3}$.

c) $11 + 3\sqrt{3}$.

d) $3 + 11\sqrt{3}$.

e) $10 + 2\sqrt{3}$.

4. Observe a figura a seguir. Nela, um observador (ponto A), de altura desprezível, distante 90 m da base de um penhasco (ponto B), observa dois escaladores, E_1 e E_2.



A distância entre os escaladores é **x**. Já a distância entre o escalador E_2 e o solo é **y**. Pode-se afirmar que as medidas, em metros, de **y** e de **x**, respectivamente, são iguais a

a) $30(\sqrt{3} - 1)$ e 90.

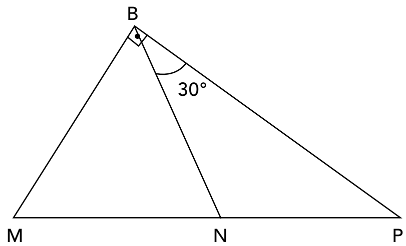
b) $30(3 - \sqrt{3})$ e 30.

c) 30 e $30(\sqrt{3} - 1)$.

d) $30\sqrt{3}$ e $30\sqrt{3}$.

e) $30\sqrt{3}$ e $30(3 - \sqrt{3})$.

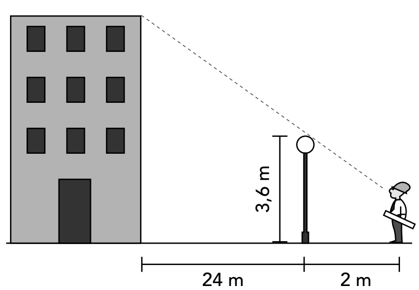
5. Um metalúrgico pretende construir uma peça metálica na forma do triângulo MBP a seguir. Logo depois, ele fará um corte segundo a linha reta BN, conforme a figura.



Sabendo-se que BP = 2 dm e que BM = $\sqrt{3}$ dm, é correto afirmar que o comprimento BN, em decímetros, corresponde a

a) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$.
b) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$.
c) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$.
d) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$.
e) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

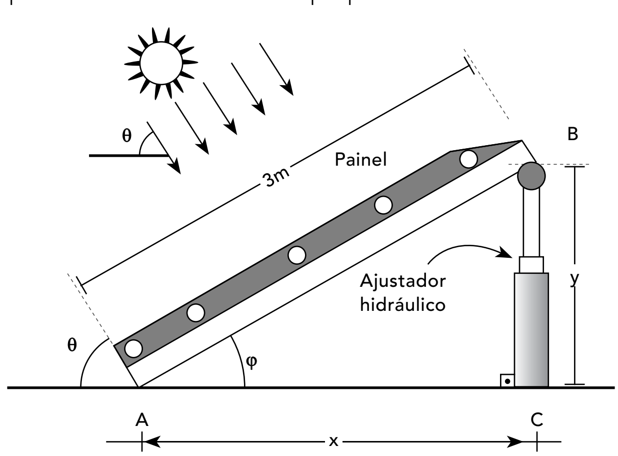
6. Para medir a altura de um edifício de três andares, um engenheiro situou-se a 2 m do poste e tomou as medidas indicadas na figura. Assim, ele pôde medir a altura do edifício: 26 m.



A distância do chão até os olhos do engenheiro, em metros, pertence ao intervalo

a) [1,60; 1,65[.
b) [1,65; 1,70[.
c) [1,70; 1,75[.
d) [1,75; 1,80[.
e) [1,80; 1,85[.

7. A figura a seguir mostra um painel solar de 3 m de largura equipado com um ajustador hidráulico. À medida que o Sol se eleva, o painel é ajustado automaticamente, de modo que os raios solares incidam perpendicularmente nele.



O valor de **y**, em metros, em função de **θ** é

a) y = 3 · sen θ.
b) y = 3 · sen θ+ 3.
c) y = 3 · tg θ.
d) y = 3 · cos θ.
e) y = 3 · cos θ+ 3.

8. Utilizando três arames de comprimento **x**, em que **x** é um número inteiro e positivo, um garoto construiu um triângulo conforme a figura 1. Em seguida, unindo aos arames duas cordas de comprimento 3 cada uma e outra de comprimento 8, ele construiu o triângulo da figura 2.

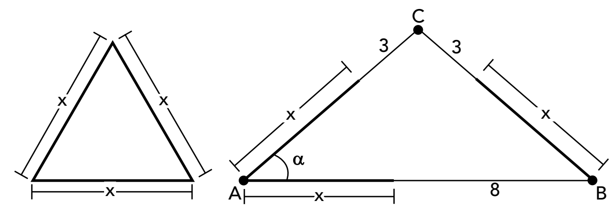


Figura 1　　Figura 2

O garoto sabe que uma das maneiras de se calcular a área do triângulo da figura 2 é utilizando a fórmula área = $\frac{AC \cdot AB \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$. Se cos α = $\frac{3}{5}$, a área desse triângulo corresponde a

a) 900.
b) 800.
c) 600.
d) 400.
e) 300.

9. (ENEM) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas em uma avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical, e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento $\overline{AB}$). Essas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada, e uma delas pode ser observada na imagem.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

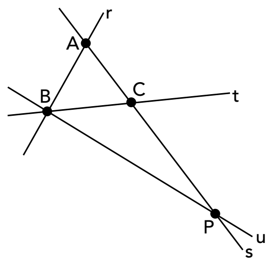
a) menor que 100 m².
b) entre 100 m² e 300 m².
c) entre 300 m² e 500 m².
d) entre 500 m² e 700 m².
e) maior que 700 m².

Atividades propostas

1. Um observador, estando a **x** metros da base de uma torre, vê o topo sob um ângulo de 60°. Afastando-se 100 m em linha reta, passa a vê-lo sob um ângulo de 30°. A altura da torre corresponde, em metros, a

a) 40.
b) $40\sqrt{3}$.
c) $50\sqrt{2}$.
d) $50\sqrt{3}$.
e) 50.

2. Um engenheiro analisa um projeto no qual quatro rodovias (**r**, **s**, **t**, **u**) se cruzam, conforme a figura a seguir. Ele precisa calcular a distância do ponto P (cruzamento das rodovias **s** e **u**) até a rodovia **t**. Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 4$ km e $\overline{CP} = 6$ km.



O engenheiro conclui, corretamente, que a distância procurada, em km, corresponde a

a) $2\sqrt{3}$.
b) $3\sqrt{2}$.
c) $3\sqrt{3}$.
d) $4\sqrt{2}$.
e) $4\sqrt{3}$.

3. Na figura a seguir, está representado um muro (BD) de 6 m de altura em que está apoiada uma escada representada por AC, que faz um ângulo **α** com a horizontal. Sabe-se que a parte da escada indicada pelo segmento $\overline{AB}$ corresponde a $\frac{2}{3}$ do seu comprimento. Em um determinado momento do dia, os raios de sol fazem com a vertical um ângulo também de valor **α**, projetando no ponto F a sombra da extremidade C da escada.

Dados: sen $\alpha = \frac{3}{5}$; cos $\alpha = \frac{4}{5}$.

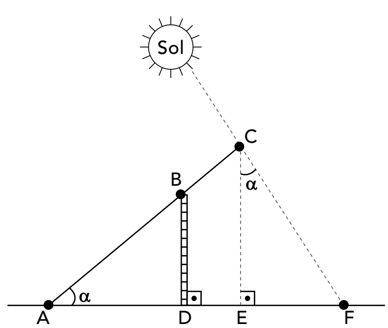
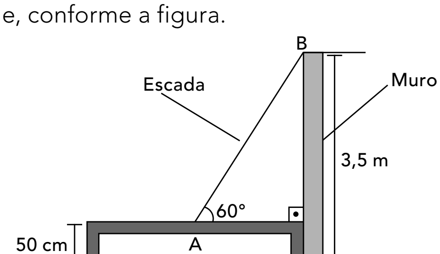


Figura fora de escala.

Assim, considerando desprezível a espessura do muro, a medida do segmento $\overline{DF}$ que corresponde à parte da sombra da escada que está além do muro, nesse instante, é igual a

a) 6,75 m.
b) 10,75 m.
c) 14,75 m.
d) 18,75 m.
e) 22,75 m.

4. Dois garotos, tentando pular um muro, precisaram encostar um banco de 50 cm de altura no muro e colocar uma escada sobre ele, conforme a figura.



O pé da escada precisou ser colocado no ponto A, para que a extremidade superior dela atingisse o topo do muro, no ponto B. O comprimento AB dessa escada, em metros, é

Dado: $\sqrt{3} = 1,7$.

a) 1,7.
b) 2,4.
c) 3,2.
d) 3,4.
e) 4,0.

5. A extremidade A de uma planta aquática encontra-se 10 cm acima da superfície da água de um lago (figura 1). Quando a brisa a faz balançar, essa extremidade toca a superfície da água no ponto B, situado a $10\sqrt{3}$ cm do local em que sua projeção ortogonal C, sobre a água, encontrava-se inicialmente (figura 2). Considere $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{BC}$ segmentos de retas e o arco $\overset{\frown}{AB}$ uma trajetória do movimento da planta.

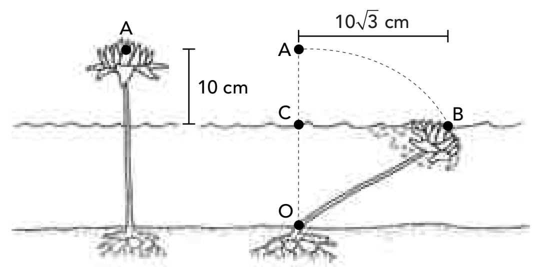


Figura 1 Figura 2

Pode-se afirmar que a profundidade do lago no ponto O, em que se encontra a raiz da planta, em centímetros, é

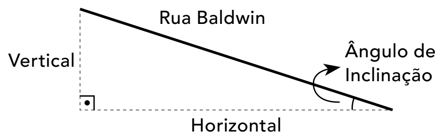
a) 9.
b) $9\sqrt{2}$.
c) 10.
d) $10\sqrt{2}$.
e) 11.

6. A inclinação das vias públicas é um problema para o transporte. Na cidade de Dunedin, na Nova Zelândia, está localizada a Rua Baldwin, que, em seu trecho inferior, tem uma rampa de inclinação moderada e, em seu trecho superior, tem uma rampa extremamente íngreme. O trecho com maior inclinação apresenta uma taxa de 1 : 2,86, o que significa que, para cada 2,86 metros percorridos horizontalmente, é necessário vencer 1 metro na vertical.

Disponível em: <http://tinyurl.com/nxluef7>.
Acesso em: 22 fev. 2015. (adaptado)

Considere que:

- o ângulo de inclinação de uma rampa é medido entre a horizontal e a rampa;
- a inclinação de uma rampa é expressa pela tangente do seu ângulo de inclinação;
- o triângulo retângulo da figura a seguir representa parte do trecho com maior inclinação da Rua Baldwin.



Dados:

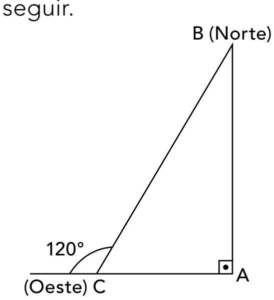
Ângulo	Tangente
12°	0,213
15°	0,268
19°	0,344
21°	0,384
24°	0,445

Nessas condições, o ângulo de inclinação desse trecho da Rua Baldwin é mais próximo de

a) 12°.
b) 15°.
c) 19°.
d) 21°.
e) 24°.

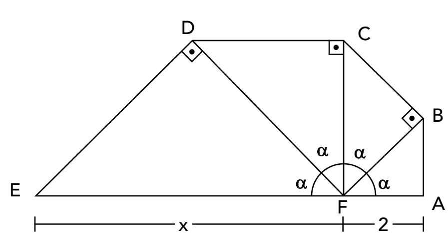
7. Um pequeno avião deveria partir de uma cidade A rumo a uma cidade B, ao norte, distante 60 quilômetros de A. Por um problema de orientação, o piloto seguiu erradamente rumo ao oeste. Ao perceber o erro, ele corrigiu a rota, fazendo um giro de 120° à direita em um ponto C, de modo que o seu trajeto, juntamente com o trajeto que deveria ter sido seguido, formaram, aproximadamente, um triângulo retângulo ABC, como aparece a seguir.

Com base na figura, a distância em quilômetros que o avião voou, partindo de A até chegar a B, é



a) $30\sqrt{3}$.
b) $40\sqrt{3}$.
c) $60\sqrt{3}$.
d) $80\sqrt{3}$.
e) $90\sqrt{3}$.

8. Um arquiteto projetou uma escultura chamada de “espiral estilizado”, conforme a figura a seguir.



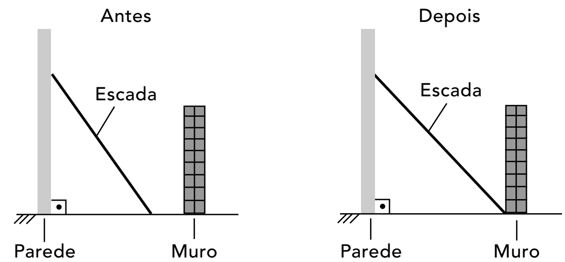
Sabendo-se que os pontos E, F e A estão alinhados, pode-se concluir que **x** corresponde a

a) $4\sqrt{2}$.
b) 6.
c) 8.
d) $6\sqrt{2}$.
e) 10.

9. Um cabo de aço de 18 m de comprimento é esticado do nível do solo (suposto horizontal) ao topo de um poste vertical. Sabendo que o ângulo formado pelo cabo com o poste é de 60°, marque a opção que corresponde, em metros, à altura do poste.

a) 4,5
b) 7
c) 9
d) 18
e) 36

10. Para trocar uma lâmpada, Paula encostou uma escada na parede de sua casa, de forma que o topo da escada ficou a uma altura de aproximadamente $\sqrt{14}$ m. Enquanto Paula subia os degraus, a base da escada escorregou por 1 m, indo tocar o muro paralelo à parede, conforme ilustração a seguir. Refeita do susto, Paula reparou que, após deslizar, a escada passou a fazer um ângulo de 45° com a horizontal.

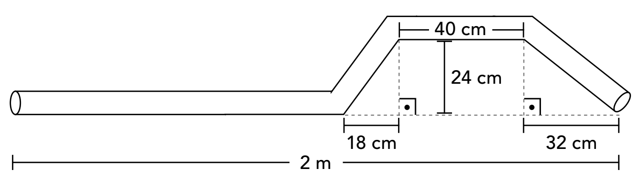


Pode-se afirmar que o comprimento da escada, em metros, vale, aproximadamente,

Dado: $\sqrt{2} \cong 1,4$.

a) 4,4.
b) 4,2.
c) 4,0.
d) 3,8.
e) 3,6.

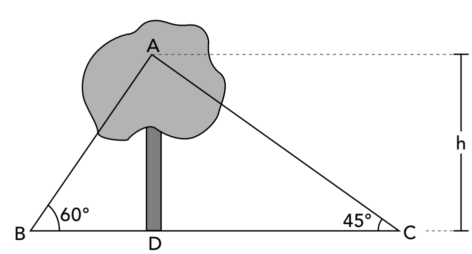
11. Um engenheiro mecânico pretende calcular o comprimento total do tubo da figura a seguir.



Desprezando o diâmetro do cano, o comprimento procurado, em metros, corresponde a

a) 2,2.
b) 2,4.
c) 2,6.
d) 2,8.
e) 3,0.

12. Duas crianças (uma na posição B e outra na posição C) e uma árvore (localizada em D) estão em um mesmo alinhamento. Cada criança observa uma mesma fruta, que está a uma altura **h**, segundo ilustração a seguir.

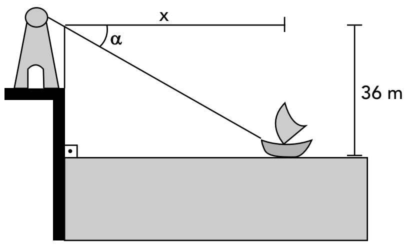


Desprezando as alturas das crianças e sabendo que $\overline{AB}$ = 20 m, pode-se afirmar que a distância, em metros, entre as duas crianças vale

Dado: $\sqrt{3} = 1,7$.

a) 17.
b) 22.
c) 27.
d) 32.
e) 37.

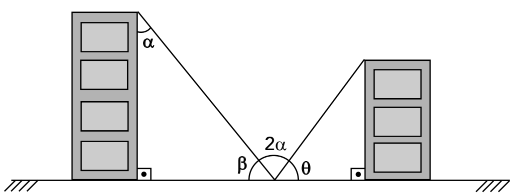
13. Um farol, localizado a 36 m acima do nível do mar, é avistado por um barco a uma distância **x** da base do farol, a partir de um ângulo **α**, conforme a figura a seguir.



Admitindo-se que $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{3}{5}$, pode-se afirmar corretamente que o valor de **x**, em metros, corresponde a

a) 50.
b) 48.
c) 42.
d) 38.
e) 34.

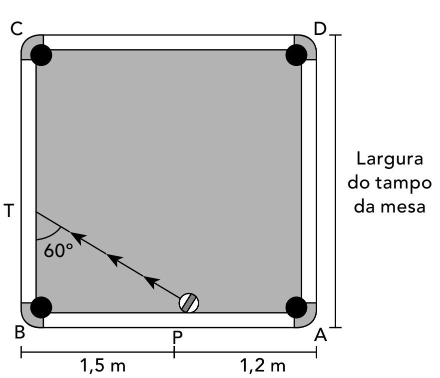
14. Um engenheiro faz várias medições de ângulos, como mostrado na figura a seguir.



Ele conclui que, para quaisquer **α** e **β**, o seno do ângulo **θ** é sempre igual a

a) $\cos \beta$.
b) $\text{sen}\ 2\alpha$.
c) $\text{sen}\ 2\beta$.
d) $\cos \alpha$.
e) $\cos 2\beta$.

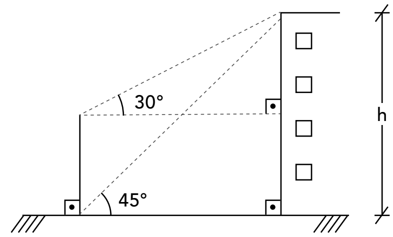
15. A figura representa a vista superior do tampo plano e horizontal de uma mesa de bilhar retangular ABCD, com caçapas em A, B, C e D. O ponto P, localizado em $\overline{AB}$, representa a posição de uma bola de bilhar, sendo PB = 1,5 m e PA = 1,2 m. Após uma tacada na bola, ela se desloca em linha reta colidindo com $\overline{BC}$ no ponto T, sendo a medida do ângulo $P\hat{T}B$ igual a 60°. Após essa colisão, a bola segue, em trajetória reta, diretamente até a caçapa D.



Admitindo-se uma colisão elástica entre a bola e a lateral BC e adotando $\sqrt{3} = 1{,}7$, a largura do tampo da mesa, em metros, corresponde a

a) 2,38.
b) 2,47.
c) 2,56.
d) 2,65.
e) 2,74.

16. Da base de um poste de 9 m de altura, avista-se o topo de um edifício sob um ângulo de elevação de 45°. Do topo do mesmo poste, avista-se o topo do edifício sob um ângulo de elevação de 30°.



A altura do edifício corresponde a

a) $\dfrac{3(9+\sqrt{3})}{2}$ m.

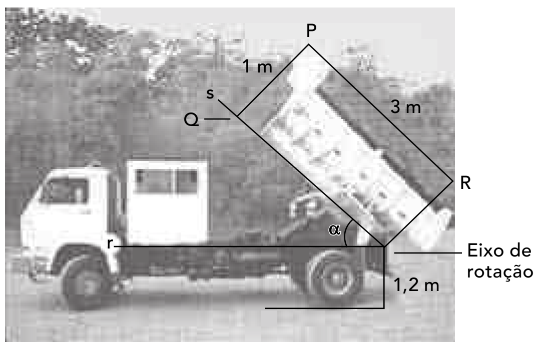
b) $\dfrac{6(9-\sqrt{3})}{2}$ m.

c) $\dfrac{9(6-\sqrt{3})}{3}$ m.

d) $\dfrac{9(3+\sqrt{3})}{3}$ m.

e) $\dfrac{9(3+\sqrt{3})}{2}$ m.

17. A caçamba de um caminhão basculante possui as dimensões $\overline{PR} = 3$ m e $\overline{PQ} = 1$ m, conforme ilustra a figura a seguir. Quando na posição horizontal, isto é, quando **s** coincide com **r,** a base do fundo da caçamba fica a 1,2 m do solo. Ela pode girar, no máximo, **α** graus em torno de seu eixo de rotação, localizado na parte traseira inferior.

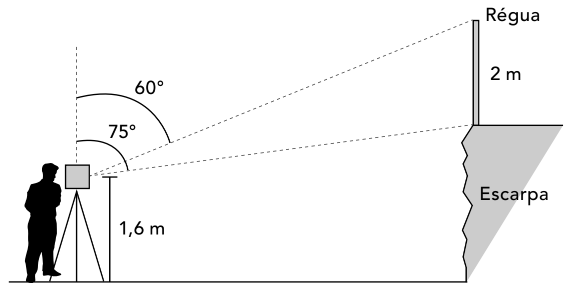


A altura, em metros, atingida pelo ponto P, em relação ao solo, quando o ângulo de giro **α** for máximo, é

Dado: $\cos \alpha = 0{,}8$.

a) 3,8.
b) 4,0.
c) 4,4.
d) 4,8.
e) 5,0.

18. De uma praia, um topógrafo observa uma pequena escarpa sobre a qual foi colocada, na vertical, uma régua de 2 m de comprimento. Usando seu teodolito, o topógrafo constatou que o ângulo formado entre a reta vertical que passa pelo teodolito e o segmento de reta que une o teodolito ao topo da régua é de 60°, enquanto o ângulo formado entre a mesma reta vertical e o segmento que une o teodolito à base da régua é de 75°.



Sabendo que o teodolito está a uma altura de 1,6 m do nível da base da escarpa, marque a opção que corresponde à altura da escarpa em metros.

Dados: $\sqrt{3} = 1{,}73$; $\text{tg } 75° = \sqrt{3} + 2$.

a) 2,13
b) 2,53
c) 2,83
d) 3,33
e) 3,53

Conhecimentos algébricos

C	5
H	19,20,21,22

Módulo 2

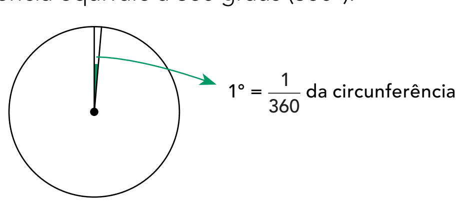
Trigonometria II

Ciclo trigonométrico e simetria de arcos I

Unidades de medida

Grau (°)

Um grau (1°) é a medida angular que corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência. Dessa forma, a abertura angular de toda a circunferência equivale a 360 graus (360°).

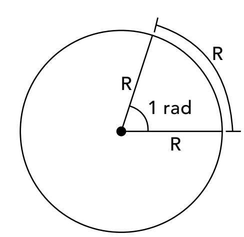


- **Um minuto (1') equivale a $\frac{1}{60}$ de um grau, ou seja, $1' = \frac{1}{60} \cdot 1°$.**
- **Um segundo (1") equivale a $\frac{1}{60}$ de um minuto, ou seja, $1'' = \frac{1}{60} \cdot 1'$.**
- **Dessa forma, tem-se:**
  - 1° = 60'
  - 1' = 60"
  - 1° = 3600"
  - A abertura angular de toda a circunferência corresponde a 21 600 minutos (21 600') ou 1 296 000 segundos (1 296 000").

Radiano (rad)

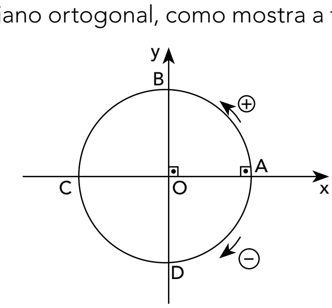
Um radiano (1 rad) é um arco cujo tamanho é igual ao comprimento do raio da circunferência.

- 2π rad = 360°
- π rad = 180°
- 1 rad ≅ 57,3°



Ciclo ou circunferência trigonométrica

Na trigonometria, é comum fazer a medição de ângulos em uma circunferência de raio unitário cujo centro é a origem do sistema cartesiano ortogonal, como mostra a figura a seguir.



Assim, pode-se afirmar que:

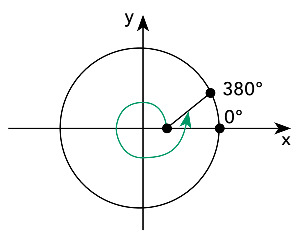
- A é a origem da circunferência.
- ângulos medidos sobre $\overset{\frown}{AB}$ estão situados no 1º quadrante.
- ângulos medidos sobre $\overset{\frown}{BC}$ estão situados no 2º quadrante.
- ângulos medidos sobre $\overset{\frown}{CD}$ estão situados no 3º quadrante.
- ângulos medidos sobre $\overset{\frown}{DA}$ estão situados no 4º quadrante.

Convenciona-se que os arcos, a partir de A, serão positivos, quando tomados no sentido anti-horário, e negativos, no sentido horário. Normalmente, os ângulos são medidos em graus (°) ou em radianos (rad).

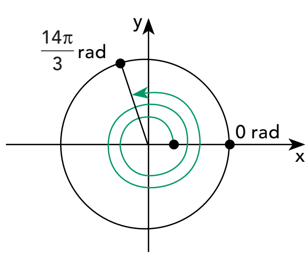
Arcos ou ângulos com medida superior a uma volta na circunferência trigonométrica

É possível um determinado arco (ângulo) medir mais que 1 volta (360° ou 2π rad), seja no sentido horário ou no anti-horário. Confira nos exemplos a seguir.

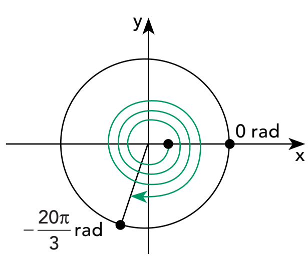
380° equivalem, no sentido anti-horário, a uma volta completa (360°) mais 20°.



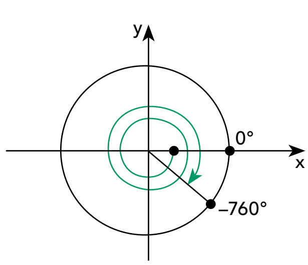
$\frac{14\pi}{3}$ equivalem, no sentido anti-horário, a duas voltas completas (4π rad) mais $\frac{2\pi}{3}$ rad.



$-\frac{20\pi}{3}$ equivalem, no sentido horário, a três voltas completas (6π rad) mais $\frac{2\pi}{3}$ rad.



–760° equivalem, no sentido horário, a duas voltas completas (720°) mais 40°.



Dessa forma, fica estabelecido que os ângulos medidos no sentido anti-horário:

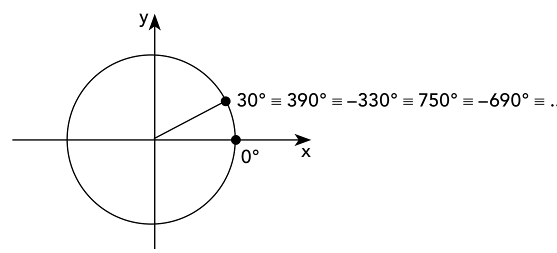
- pertencem à primeira determinação positiva, quando situados na primeira volta;
- pertencem à segunda determinação positiva, quando situados na segunda volta e assim por diante.

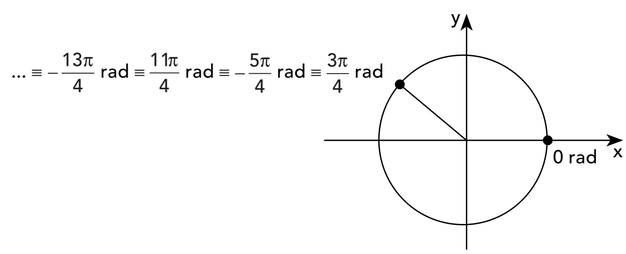
Quanto aos ângulos medidos no sentido horário, tem-se o seguinte:

- pertencem à primeira determinação negativa, quando situados na primeira volta;
- pertencem à segunda determinação negativa, quando situados na segunda volta, e assim por diante.

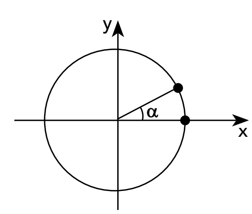
Ângulos côngruos

Levado em consideração o exposto anterior, é inevitável que existam ângulos que possuam mesmas origem (0° ou 0 rad) e extremidade (onde encerra a medição do ângulo). Tais ângulos são denominados ângulos côngruos.





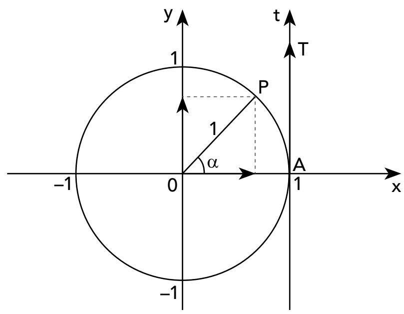
De um modo geral, para um ângulo **α** qualquer, tem-se o seguinte.



Nº de voltas	Ângulo (graus)	Ângulo (radianos)	Determinação
⋮	⋮	⋮	⋮
n = k	α° + k · 360°	α rad + 2kπ rad	(k+1)ª positiva
⋮	⋮	⋮	⋮
n = 2	α° + 2 · 360°	α rad + 4π rad	3ª positiva
n = 1	α° + 360°	α rad + 2π rad	2ª positiva
n = 0	**α°**	**α rad**	**1ª positiva**
n = –1	α° – 360°	α rad – 2π rad	1ª negativa
n = –2	α° – 2 · 360°	α rad – 4π rad	2ª negativa
⋮	⋮	⋮	⋮
n = –k	α° – k · 360°	α rad – 2kπ rad	kª negativa
⋮	⋮	⋮	⋮

Seno, cosseno e tangente de um arco AP

Considere a seguinte figura.

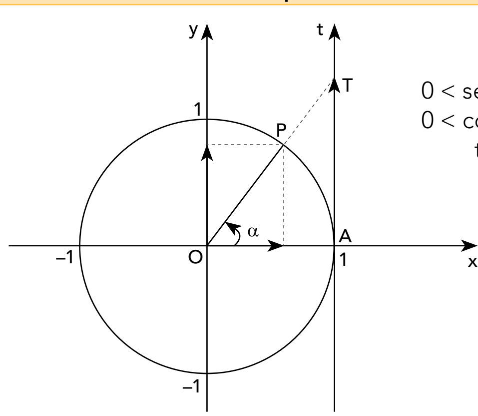


Sendo **α** a medida do arco $\overset{\frown}{AP}$, define-se:

- cos α = abscissa de P.
- sen α = ordenada de P.
- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$ = ordenada de T sobre o eixo **t**, desde que $cos\ \alpha \neq 0$.

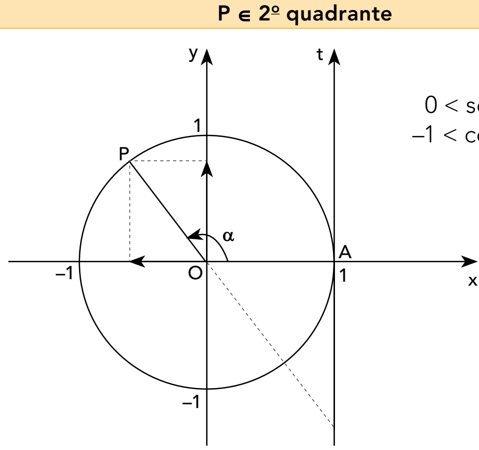
Com base nas definições anteriores, conclui-se que o seno, o cosseno e a tangente têm sinais que dependem do quadrante em que se situa o ponto P.

P ∈ 1º quadrante



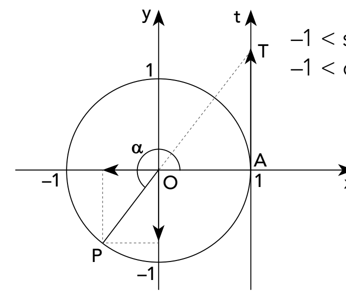
$0 < sen\ \alpha < 1$
$0 < cos\ \alpha < 1$
$tg\ \alpha > 0$

P ∈ 2º quadrante



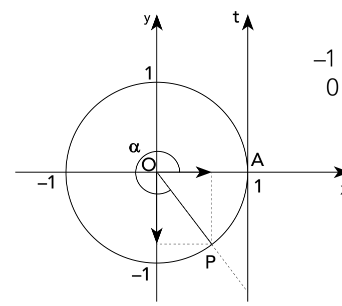
$0 < sen\ \alpha < 1$
$-1 < cos\ \alpha < 0$
$tg\ \alpha < 0$

P ∈ 3º quadrante



$-1 < sen\ \alpha < 0$
$-1 < cos\ \alpha < 0$
$tg\ \alpha > 0$

P ∈ 4º quadrante

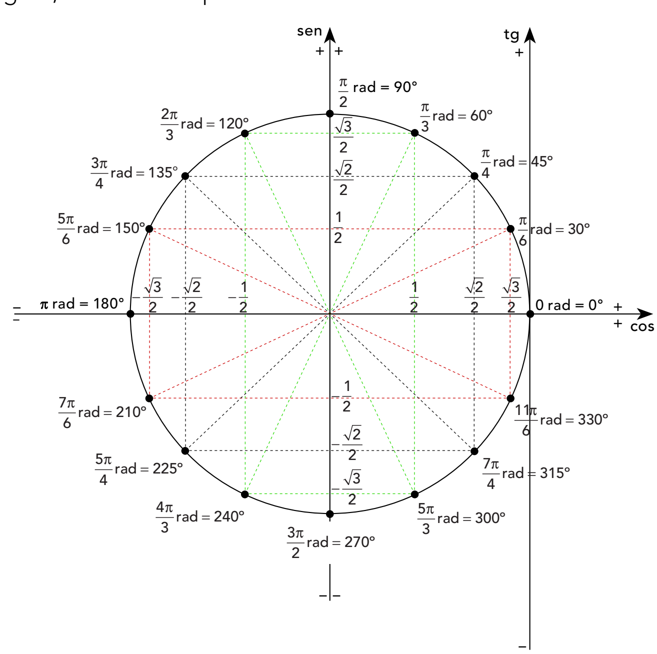


$-1 < sen\ \alpha < 0$
$0 < cos\ \alpha < 1$
$tg\ \alpha < 0$

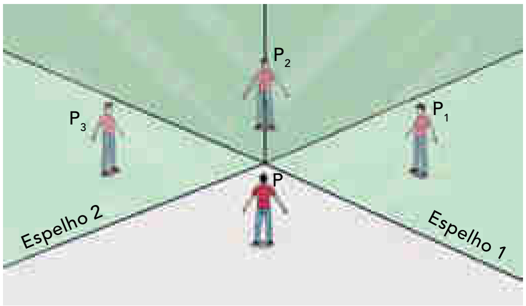
A partir das definições destacadas, observa-se que:

sen 0° = 0	cos 0° = 1	tg 0° = 0
sen 90° = 1	cos 90° = 0	∄ tg 90°
sen 180° = 0	cos 180° = –1	tg 180° = 0
sen 270° = –1	cos 270° = 0	∄ tg 270°
sen 360° = 0	cos 360° = 1	tg 360° = 0

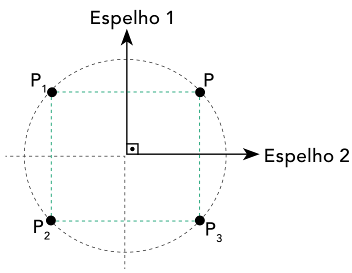
A seguir, observe o ciclo trigonométrico contendo os principais ângulos notáveis da primeira determinação positiva, ou seja, da primeira volta, no sentido anti-horário, a partir da origem, além dos respectivos valores dos senos e cossenos.



Ciclo trigonométrico e simetria de arcos II



Você já se imaginou dentro de um quarto cujas paredes fossem cobertas por espelhos planos, como mostrado na figura anterior? A pessoa P observaria três imagens (P_1, P_2 e P_3). Essa situação, quando vista de cima para baixo, assemelha-se ao ciclo trigonométrico.



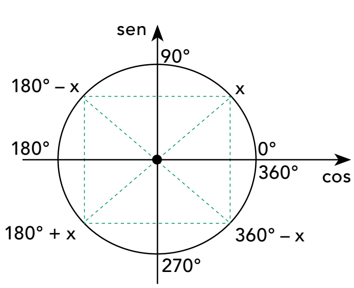
Dada essa situação, nota-se que:

- a pessoa P está no 1º quadrante;
- as imagens P_1, P_2 e P_3 estão situadas nos 2º, 3º e 4º quadrantes;
- as posições das imagens dependem da posição da pessoa, por isso, no ciclo trigonométrico, tem-se ângulos nos 2º, 3º e 4º quadrantes (imagens P_1, P_2 e P_3, respectivamente) que possuem uma relação definida com um determinado ângulo no 1º quadrante (pessoa P).

Redução de quadrantes

Para reduzir um arco pertencente ao 2º, 3º ou 4º quadrante, para um arco correspondente no 1º quadrante, deve-se:

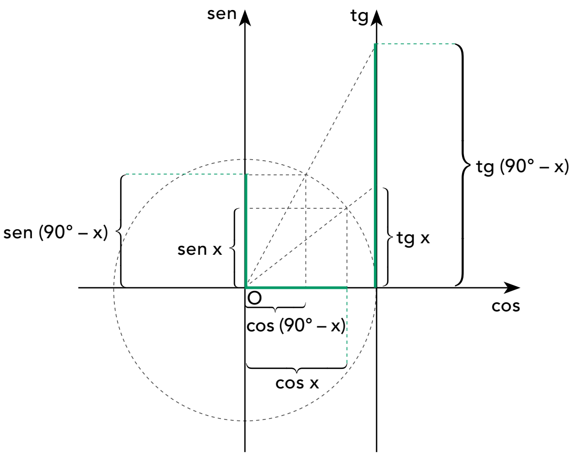
- localizar o quadrante em que está o arco a ser reduzido;
- verificar o sinal da razão trigonométrica no referido quadrante;
- fazer a redução do arco conforme a figura a seguir.



Exemplos:

- $\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg } 130° = -\text{tg } 50°$
- $\text{sen } 210° = -\text{sen } 30° = -\dfrac{1}{2}$
- $\cos 300° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg } 250° = \text{tg } 70°$

Arcos com extremidades no primeiro quadrante (complementares)



- $\text{sen } (90° - x) = \cos x$
- $\cos (90° - x) = \text{sen } x$
- $\text{tg } (90° - x) = \text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x}$

Exemplos:

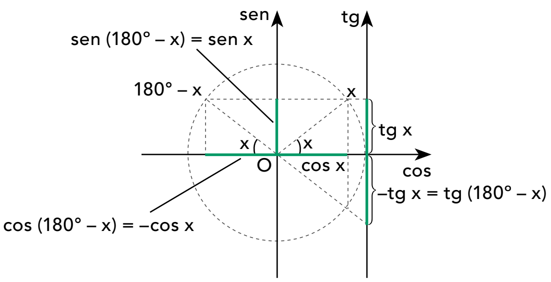
$\text{sen } 60° = \cos 30°$

$\cos 70° = \text{sen } 20°$

$\text{tg } 10° = \text{cotg } 80° = \dfrac{1}{\text{tg } 80°}$

Redução ao 1º quadrante

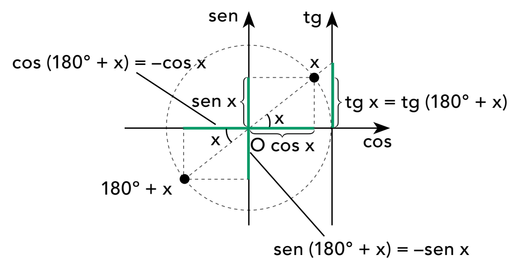
Dos arcos com extremidades no segundo quadrante (suplementares)



- sen (180° – x) = sen x
- cos (180° – x) = –cos x
- tg (180° – x) = –tg x

Exemplos:
sen 140° = sen 40°
cos 150° = –cos 30°
tg 120° = –tg 60°

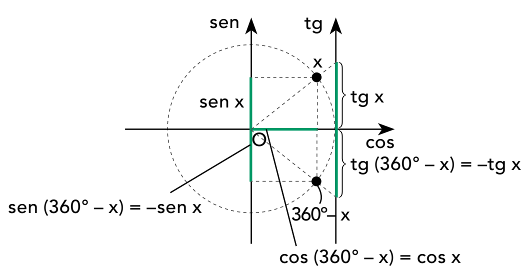
Dos arcos com extremidades no terceiro quadrante (explementares)



- sen (180° + x) = –sen x
- cos (180° + x) = –cos x
- tg (180° + x) = tg x

Exemplos:
sen 220° = –sen 40°
cos 210° = –cos 30°
tg 240° = tg 60°

Dos arcos com extremidades no quarto quadrante (replementares)

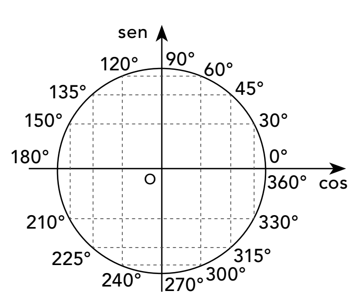


- sen (360° – x) = –sen x
- cos (360° – x) = cos x
- tg (360° – x) = –tg x

Exemplos:
sen 320° = –sen 40°
cos 330° = cos 30°
tg 300° = –tg 60°

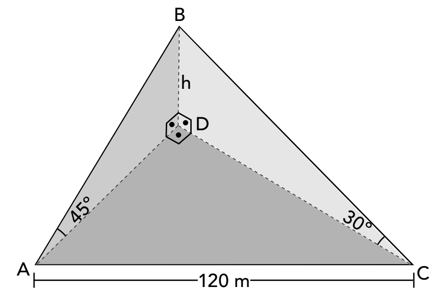
Aplicando a redução aos arcos notáveis de 30°, 45° e 60°

Aplicando a simetria em relação aos eixos ou ao centro do ciclo trigonométrico, pode-se obter, por meio dos arcos notáveis de 30°, 45° e 60°, seno, cosseno e tangente de outros arcos. Observe a figura a seguir.



Atividades para sala

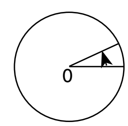
1. Para calcular a altura de uma montanha (cujo pico encontra-se em B) desde um plano horizontal que contém os pontos A, D e C, um observador mede o ângulo BÂD = 45°, desloca-se depois para C, distante 120 m de A, obtendo o ângulo BĈD = 30°.

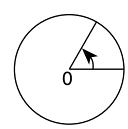


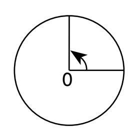
A altura **h** da montanha, em metros, equivale a

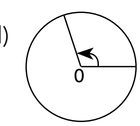
a) 30.
b) 45.
c) 60.
d) 75.
e) 90.

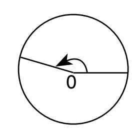
2. Entre as alternativas a seguir, assinale aquela cujo desenho representa o ângulo que tem medida mais próxima de 1 radiano.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

3. Todos os arcos no ciclo trigonométrico possuem determinações, isto é, têm origem e extremidade. Dois ou mais arcos podem ter a mesma determinação, mas não se pode garantir que eles possuam o mesmo comprimento, pois podem ter um número inteiro de voltas completas diferentes. Nesse caso, deve ser aplicada uma definição geral para representar arcos e todos os seus côngruos. Se um arco mede $\boldsymbol{\alpha}$ graus, todos os arcos côngruos a ele podem ser representados da seguinte forma: $\alpha + 360° \cdot k, k \in \mathbb{Z}$. Caso a medida do ângulo do arco seja dada em radianos, representa-se por $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. A determinação principal de um arco que mede $\boldsymbol{\alpha}$ (graus ou radianos) é dada de acordo com as definições: $0° \leq \alpha < 360°$ ou $0 \leq \alpha < 2\pi$. No caso de um ângulo maior que 360°, é feita a divisão por 360° e considera-se o resto do valor da determinação principal. O resultado da divisão mostrará quantas voltas o arco realizou.

Sendo assim, a determinação principal do ângulo 4 200° é

a) 150°.
b) 210°.
c) 240°.
d) 300°.
e) 330°.

4. Considerando $n \in \mathbb{Z}$ na igualdade

$$N = \text{sen}\left[(8n+1)\cdot\frac{\pi}{4}\right] + \cos\left[(12n+1)\cdot\frac{\pi}{3}\right],$$

pode-se concluir corretamente que o valor de N corresponde a

a) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

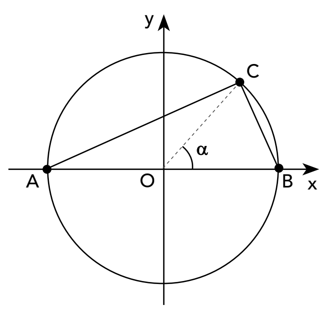
b) $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$.

c) $\frac{\sqrt{3}-3}{2}$.

d) $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$.

e) $\frac{\sqrt{2}-3}{2}$.

5. A figura mostra a circunferência trigonométrica, cujo raio mede 1, e o triângulo ABC, de área $\frac{2}{3}$, inscrito na circunferência.



Nessas condições, o valor de $\cos\alpha$ é

a) $\frac{1}{3}$.

b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

6. Simplificando-se a expressão $\frac{\text{sen}\,(\pi - x)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}$, obtém-se

a) -1.

b) $-\frac{1}{2}$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) 1.

e) $\sqrt{3}$.

7. Sabendo que $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{5\pi}{6}$ e que $M = 2\cdot(\text{sen}\,x)_{\text{máx.}} - (\cos x)_{\text{mín.}}$, pode-se afirmar que o valor de M corresponde a

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

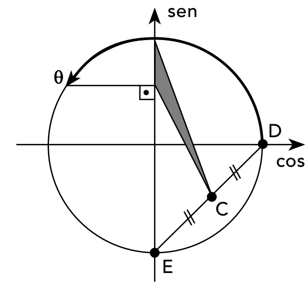
b) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

c) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

d) $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$.

e) $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$.

8. Considerando-se que, na circunferência trigonométrica ao lado, a área sombreada corresponda a 0,125 u.a. (unidades de área), pode-se concluir corretamente que $\boldsymbol{\theta}$ mede



Dado: CE = CD.

a) 120°.

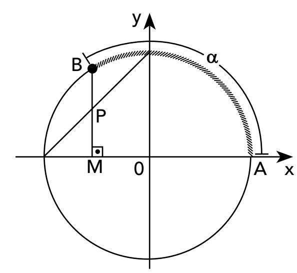
b) 135°.

c) 140°.

d) 145°.

e) 150°.

9. No ciclo trigonométrico de raio unitário indicado na figura, o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede $\boldsymbol{\alpha}$.



Assim, PM é igual a

a) $-1 - \text{tg}\,\alpha$.

b) $1 - \cos\alpha$.

c) $1 + \cos\alpha$.

d) $1 + \text{sen}\,\alpha$.

e) $-1 + \text{cotg}\,\alpha$.

Atividades propostas

1. O valor de cos (2280°) corresponde a

a) $-\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{2}$.

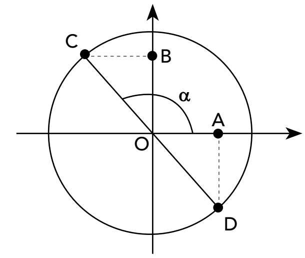
c) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

d) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. No ciclo trigonométrico da figura a seguir, tem-se $\alpha = 120°$. O valor da $\overline{OA}\cdot\overline{OB}$ é

Dado: os pontos C, O e D estão alinhados.



a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{4}$.

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3. Sabe-se que $\alpha \in [1, \pi[$; $\beta \in \left[2, \frac{4\pi}{3}\right]$ e $\theta \in \left[5, \frac{13\pi}{6}\right]$. Dado que os ângulos estão em radianos, os sinais das expressões $\text{sen}\ \alpha \cdot \cos\beta$, $\text{sen}\ \alpha \cdot \cos\theta$ e $\cos\beta \cdot \cos\theta$ correspondem, respectivamente, a

a) (–); (+); (+).
b) (+); (+); (–).
c) (–); (+); (–).
d) (+); (–); (–).
e) (–); (–); (+).

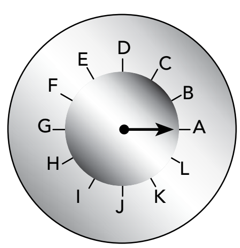
4. Seja $E = \dfrac{\cos(-540°) \cdot \text{sen}(450°) + \text{sen}(630°)}{\text{sen}(-450°) + \cos(540°)}$, o valor de E corresponde a

a) –2.
b) $-\frac{1}{2}$.
c) 0.
d) 1.
e) 2.

5. O dispositivo de segurança de um cofre (segredo) tem o formato da figura a seguir, na qual as posições A, B, ..., L estão igualmente espaçadas, e a posição inicial da seta, quando o cofre está fechado, é a indicada.

Para abrir esse cofre, são necessárias cinco operações, girando o dispositivo de modo que a seta seja colocada nos seguintes ângulos:

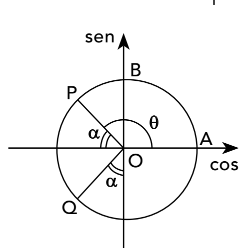
I. $\frac{2\pi}{3}$ no sentido anti-horário;
II. $\frac{3\pi}{2}$ no sentido horário;
III. $\frac{5\pi}{3}$ no sentido anti-horário;
IV. $\frac{3\pi}{4}$ no sentido horário;
V. $\frac{\pi}{3}$ no sentido anti-horário.



Pode-se, então, afirmar que o cofre será aberto quando a seta estiver indicando

a) o ponto médio entre G e H.
b) algum ponto entre J e K.
c) o ponto médio entre C e D.
d) a posição I.
e) a posição L.

6. Na circunferência trigonométrica mostrada a seguir, a distância entre os pontos P e Q corresponde a

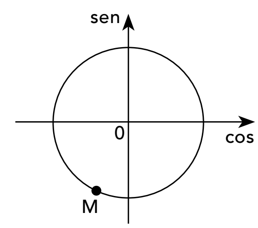


a) $\cos\theta$.
b) $\text{sen}\ \alpha$.
c) $\sqrt{2}$.
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
e) 1.

7. Seja $E = \cos\frac{635\pi}{6} \cdot \text{sen}\frac{427\pi}{4} \cdot \text{tg}\frac{907\pi}{3}$. É correto afirmar que o valor de E corresponde a

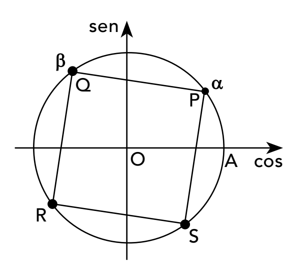
a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
b) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.
c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
d) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.
e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

8. Na circunferência a seguir, o ponto M representa a imagem de um arco de medida, em radianos. Dentre as opções a seguir, assinale a única que pode corresponder ao valor de M.



a) $-\frac{56\pi}{3}$
b) $-\frac{7\pi}{4}$
c) $\frac{5\pi}{6}$
d) $\frac{21\pi}{5}$
e) $-\frac{31\pi}{3}$

9. Na figura a seguir, em que o quadrado PQRS está inscrito na circunferência trigonométrica, $\overset{\frown}{AP}$ e $\overset{\frown}{APQ}$ têm medidas iguais a **α** e **β**, respectivamente, com $0 < \alpha < \beta < \pi$.



Sabendo que $\cos\alpha = 0{,}8$, pode-se concluir que o valor de $\cos\beta$ é

a) –0,8.
b) 0,8.
c) –0,6.
d) 0,6.
e) –0,2.

10. Se $M = \cos 3980°$, então M é igual a

a) cos 11°.
b) –cos 20°.
c) sen 70°.
d) tg 20°.
e) cos 70°.

11. Quanto ao arco 4 555°, é correto afirmar que

a) pertence ao segundo quadrante e tem como côngruo o ângulo de 55°.
b) pertence ao primeiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 75°.
c) pertence ao terceiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 195°.
d) pertence ao quarto quadrante e tem como côngruo o ângulo de 3 115°.
e) pertence ao terceiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 4 195°.

12. Para todo **x** real, é verdade que a expressão

$$E = \frac{\operatorname{sen}(51\pi + x) + \operatorname{sen}(28\pi - x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$$

equivale a

a) –2.
b) –1.
c) 0.
d) 1.
e) 2.

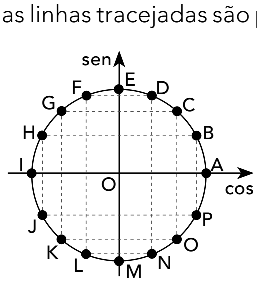
13. Dados os pontos A (0; 1) e B (5; 6) do plano cartesiano, considere os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AB'}$, em que $\overline{AB'}$ é o simétrico de $\overline{AB}$ em relação ao eixo y. Para sobrepor o segmento $\overline{AB'}$ ao segmento $\overline{AB}$, pode-se aplicar ao primeiro uma rotação de

a) 180°, em qualquer sentido, em torno do ponto A.
b) 240°, no sentido horário, em torno do ponto A.
c) 270°, no sentido horário, em torno do ponto A.
d) 240°, no sentido anti-horário, em torno do ponto A.
e) 270°, no sentido anti-horário, em torno do ponto A.

14. O professor de Matemática de Artur e Bia pediu aos alunos que colocassem suas calculadoras científicas no modo "radianos" e calculassem o valor de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$. Tomando um valor aproximado, Artur digitou em sua calculadora o número 1,6 e, em seguida, calculou o seu seno, encontrando o valor de A. Já Bia calculou o seno de 1,5, obtendo o valor de B. Considerando que $\frac{\pi}{2}$ vale, aproximadamente, 1,5708, assinale a alternativa que traz a correta ordenação dos valores A, B e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$.

a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} < A < B$
b) $A < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} < B$
c) $A < B < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$
d) $B < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} < A$
e) $B < A < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

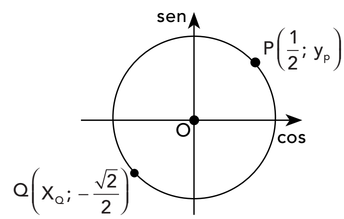
15. Na figura a seguir, o arco $\overset{\frown}{AB} = 30°$, $\overset{\frown}{AC} = 45°$ e $\overset{\frown}{AD} = 60°$. Considere que as linhas tracejadas são paralelas aos eixos.



O valor de $\cos\frac{7\pi}{4} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \cdot \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ equivale a

a) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.
b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. A seguir, tem-se uma circunferência trigonométrica.



O valor de $y_P \cdot x_Q$ corresponde a

a) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$.
b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
c) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.
d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.
e) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

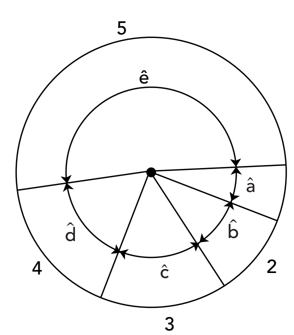
17. Se y = sen(–2 280°), então **y** é igual a

a) cos 60°.
b) cos 30°.
c) –cos 30°.
d) –cos 60°.
e) sen 120°.

18. Em certo país, uma pequena porcentagem da arrecadação das loterias destina-se aos esportes.

O gráfico de setores a seguir representa a distribuição dessa verba, segundo os dados da tabela seguinte.

Setor	Destinação	Valor (R$)
1	Projetos de fomento	3 240 000,00
2	Esporte universitário	4 590 000,00
3	Esporte escolar	6 750 000,00
4	Manutenção do Comitê Olímpico	9 180 000,00
5	Confederações	30 240 000,00
	Total	54 000 000,00



Quanto aos ângulos assinalados no diagrama, é verdade que

a) $\frac{1}{2} < \operatorname{sen} a < \frac{(\sqrt{2})}{2}$.
b) $\frac{(\sqrt{2})}{2} < \cos b < \frac{(\sqrt{3})}{2}$.
c) $\frac{(\sqrt{3})}{2} < \operatorname{tg} c < 1$.
d) $\frac{(\sqrt{2})}{2} < \operatorname{sen} d < \frac{(\sqrt{3})}{2}$.
e) $1 < \operatorname{tg} e < 2$.

Conhecimentos algébricos

C 5

H 19,20,21,22

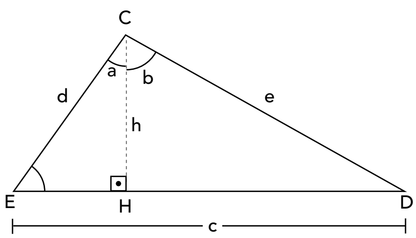
Módulo 3

Trigonometria III

Transformações trigonométricas

Adição e subtração de arcos

Seja o triângulo CDE a seguir:



Em que:

- **h** é altura relativa à base **c**;
- **a** e **b** são agudos.

Seno da soma

Utilizando o triângulo anterior, tem-se:
Área (CEH) + Área (CDH) = Área (CDE)

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\, d \cdot h \cdot \text{sen } a + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\, e \cdot h \cdot \text{sen } b = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\, d \cdot e \cdot \text{sen } (a + b)$$

: (d · e)

$$\frac{h}{e}\,\text{sen } a + \frac{h}{d}\,\text{sen } b = \text{sen } (a + b) \text{ ou}$$

$$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a \quad \text{(I)}$$

Seno da diferença

Ainda de acordo com o triângulo anterior:
$\text{sen } (a - b) = \text{sen } [a + (-b)] = \text{sen } a \cdot \cos (-b) + \text{sen } (-b) \cdot \cos a$

Logo:

$$\text{sen } (a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a \quad \text{(II)}$$

Cosseno da soma

Lembrando que $\cos \alpha = \text{sen } (90° - \alpha)$, tem-se:

$$\begin{aligned}\cos (a + b) &= \text{sen } [90° - (a + b)] \\ &= \text{sen } [(90° - a) - (b)] \\ &= \text{sen } (90° - a) \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos (90° - a)\end{aligned}$$

Logo:

$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \text{sen } a \quad \text{(III)}$$

Cosseno da diferença

$$\begin{aligned}\cos (a - b) &= \cos [a + (-b)] \\ &= \cos a \cdot \cos (-b) - \text{sen } (-b) \cdot \text{sen } a\end{aligned}$$

Logo:

$$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \text{sen } a \quad \text{(IV)}$$

Tangente da soma

$$\text{tg } (a+b) = \frac{\text{sen } (a+b)}{\cos (a+b)} = \frac{\text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\dfrac{\cos a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\dfrac{\text{sen } a}{\cos a} + \dfrac{\text{sen } b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\text{sen } a}{\cos a} \cdot \dfrac{\text{sen } b}{\cos b}}$$

Logo:

$$\text{tg } (a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b} \quad \text{(V)}$$

Tangente da diferença

$$\text{tg } (a-b) = \frac{\text{sen } (a-b)}{\cos (a-b)} = \frac{\text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\dfrac{\cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\dfrac{\text{sen } a}{\cos a} - \dfrac{\text{sen } b}{\cos b}}{1 + \dfrac{\text{sen } a}{\cos a} \cdot \dfrac{\text{sen } b}{\cos b}}$$

Logo:

$$\text{tg } (a-b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b} \quad \text{(VI)}$$

Arco duplo e arco metade

- $\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

  Fazendo $a = b = \alpha$, tem-se:

  $\text{sen } (\alpha + \alpha) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha + \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$

  Logo:

  $$\text{sen } (2\alpha) = 2 \text{ sen } \alpha \cdot \cos \alpha$$

- $\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

  Fazendo $a = b = \alpha$, tem-se

  $\cos (\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \alpha$

  Logo:

  $$\cos (2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

- $\text{tg } (a+b) = \dfrac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

  Fazendo $a = b = \alpha$, tem-se

  $$\text{tg } (\alpha + \alpha) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg } \alpha + \text{tg } \alpha}.$$

Logo:

$$\text{tg}\,(2\alpha) = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\,\alpha}$$

Sabendo que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, então:

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \text{(I)}$$

Substituindo (I) em $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$, tem-se:

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha$

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

Fazendo $2\alpha = x$, tem-se $\alpha = \frac{x}{2}$.

Logo:

$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$

$2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$

$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Considerando que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, então:

$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$, tem-se:

$\cos(2\alpha) = 1 - \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

$\cos(2\alpha) = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$

Fazendo $2\alpha = x$, tem-se $\alpha = \frac{x}{2}$.

Logo:

$\cos x = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2\frac{x}{2}$

$2\,\text{sen}^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$

$$\text{sen}\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

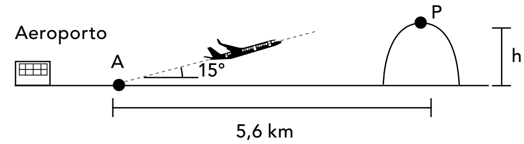
Desse modo:

$$\text{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{\text{sen}\,\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} \Rightarrow \text{tg}\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1-\cos x}{\cancel{2}}}{\frac{1+\cos x}{\cancel{2}}}}$$

$$\text{tg}\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Atividades para sala

1. Ao decolar, um avião deixa o solo com um ângulo constante de 15°. A 5,6 km do ponto de decolagem (A), existe uma serra de altura **h**, conforme ilustra a figura (fora de escala) a seguir.



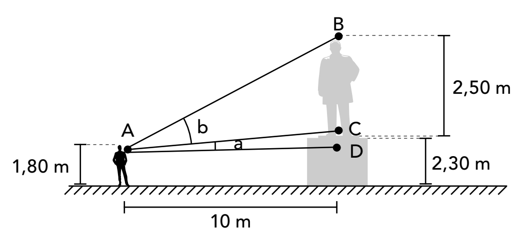
Considere que, mantido o ângulo de decolagem, a aeronave passe tangenciando a serra em P. A distância entre os pontos A e P, em km, corresponde a

a) $5,6 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})$.
b) $5,6 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})$.
c) $5,6 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{3})$.
d) $5,6 \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})$.
e) $5,6 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

2. Simplificando-se a expressão $\frac{\text{sen}\,(x - \theta) + \text{sen}\,(x + \theta)}{\cos(x - \theta) + \cos(x + \theta)}$, obtém-se

a) tg x.
b) sen x.
c) cos x.
d) tg $(x - \theta)$.
e) tg $(x + \theta)$.

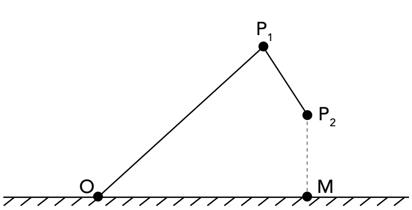
3. Em uma praça, uma pessoa com 1,80 m de altura observa um monumento que está a 10 m de distância, conforme a figura a seguir. A estátua e o pedestal possuem 2,50 m e 2,30 m de altura, respectivamente.



Tem-se que AD é paralelo ao plano do chão. Pode-se afirmar corretamente que tg b corresponde a

a) $\frac{90}{200}$.
b) $\frac{60}{204}$.
c) $\frac{50}{203}$.
d) $\frac{70}{205}$.
e) $\frac{80}{210}$.

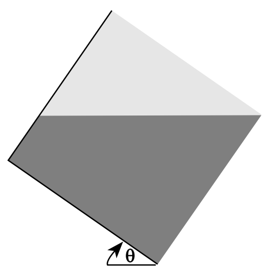
4.



Um guindaste instalado em um terreno plano tem dois braços articulados que se movem em um plano vertical, perpendicular ao plano do chão. Na figura anterior, os pontos O, P_1 e P_2 representam, respectivamente, a articulação de um dos braços com a base, a articulação dos dois braços e a extremidade livre do guindaste. O braço $\overline{OP_1}$ tem comprimento 6 e o braço P_1P_2 tem comprimento 2. Em um dado momento, a altura de P_2 é 2; P_2 está a uma altura menor que P_1, e a distância de O a P_2 é $2\sqrt{10}$. Sendo M o pé da perpendicular de P_2 ao plano do chão, pode-se concluir que o seno de $P_1\widehat{O}M$ equivale a

a) $\frac{2}{5}$.
b) $\frac{3}{4}$.
c) $\frac{3}{5}$.
d) $\frac{1}{4}$.
e) $\frac{1}{5}$.

5. Um recipiente cúbico de aresta **a** e sem tampa, apoiado em um plano horizontal, contém água até a altura $\frac{3}{4}$a. Inclina-se lentamente o cubo, girando-o em um ângulo **θ** em torno de uma das arestas da base, como está representado na figura a seguir.



Supondo que $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{4}\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, o valor numérico da expressão cos (2θ) – sen (2θ) corresponde a

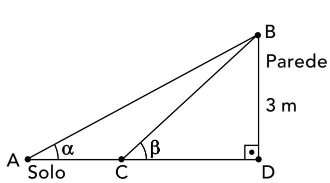
a) $\frac{4}{17}$.
b) $\frac{5}{17}$.
c) $\frac{6}{17}$.
d) $\frac{7}{17}$.
e) $\frac{8}{17}$.

6. Se $\cos\theta = \frac{1}{8}$, em que $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, é correto afirmar que $\cos\frac{\theta}{2}$ é igual a

a) $-\frac{1}{4}$.
b) $\frac{3}{4}$.
c) $-\frac{3}{8}$.
d) $\frac{1}{4}$.
e) $-\frac{3}{4}$.

Atividades propostas

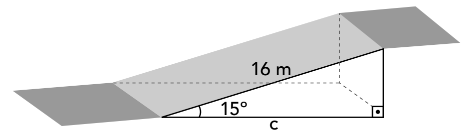
1. Duas vigas, $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$, escoram uma parede vertical de modo que os pontos A e C estão em uma reta horizontal que passa por um ponto D da parede, conforme mostra a figura a seguir, sendo $\overline{AC}$ = 3 m e $\overline{CD}$ = 6 m.



A soma das medidas **α** e **β**, ângulos que as vigas formam com o solo, em graus, é

a) 45°.
b) 50°.
c) 35°.
d) 60°.
e) 65°.

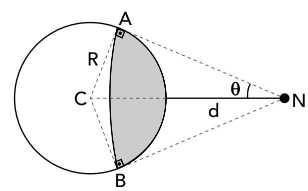
2. Para melhorar as condições de acessibilidade a uma clínica médica, foi construída uma rampa, conforme indicado na figura a seguir.



O comprimento horizontal **c** da rampa, em metros, pode ser expresso por

a) $\sqrt{2}(\sqrt{3}+4)$.
b) $\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$.
c) $4\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$.
d) $4\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$.
e) $\sqrt{3}(\sqrt{2}+4)$.

3. Suponha que o planeta Terra seja uma esfera de centro C e raio R. Na figura a seguir, está representado o planeta Terra e uma nave espacial N. A fração visível da superfície da Terra por um astronauta na nave N é dada em função do ângulo **θ**, mostrado na figura a seguir pela expressão $f(\theta) = \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{2}$.

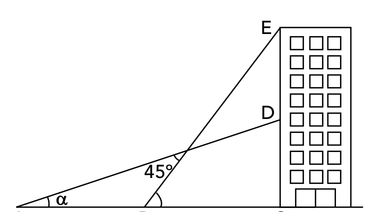


Se um astronauta, em uma nave a uma distância **d** da Terra, avista a superfície do planeta com ângulo θ = 15°, marque a opção que corresponde à fração visível da superfície da Terra pelo astronauta.

Dados: $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{6} = 2{,}4$.

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{3}{8}$
c) $\frac{5}{12}$
d) $\frac{6}{15}$
e) $\frac{8}{21}$

4. Para combater um incêndio, os bombeiros utilizaram duas escadas, $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$, que formavam entre si um ângulo de 45°, conforme mostra a figura a seguir.



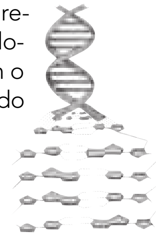
A altura $\overline{CE}$ do prédio é igual a

Dados: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{17}$ e as distâncias $\overline{AC}$ = 17 m e $\overline{BC}$ = 5 m.

a) 10 m.
b) 11 m.
c) 12 m.
d) 13 m.
e) 14 m.

Texto para a questão 5.

Nos últimos 50 anos, a genética sofreu uma reviravolta e deu espaço a uma nova ciência, a biologia molecular. Descobertas nessa área permitiram o avanço acelerado da biotecnologia, em virtude do desenvolvimento de técnicas de engenharia genética, também denominada de DNA recombinante. O modelo da molécula de DNA utilizado atualmente é o de Watson e Crick, ilustrado na figura ao lado.



Considere que uma das fitas da molécula de DNA demonstradas na figura em destaque possa ser descrita pelo conjunto de equações a seguir.

$x(t) = a \cdot \cos(wt)$; $y(t) = a \cdot \text{sen}(wt)$; $z(t) = bt$

Na qual **t** é um parâmetro em unidades de comprimento, e **a**, **b** e **ω** são constantes para as quais as condições I a III a seguir são satisfeitas.

I. $x(0) = 12$

II. $x(6) = 6$, $y(6) = 6\sqrt{3}$ e $z(6)=18$

III. $\omega \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

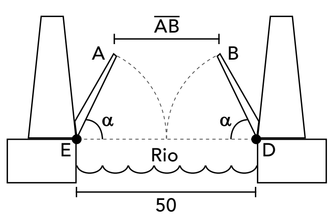
5. O valor de a + b é

a) 15. b) 18. c) 21. d) 24. e) 27.

Texto para a questão 6.

A figura ao lado representa a vista lateral de uma ponte levadiça.

Considere que os pontos A e B têm alturas iguais, independentemente do valor de **α**.



6. O tempo gasto para girar a ponte em 1° equivale a 30 segundos. Os pontos A e B atingem uma mesma distância de 12,5 m em relação ao segmento $\overline{ED}$, em um tempo **t**. Pode-se afirmar que **t** corresponde a

a) 13 min e 40 segundos.
b) 14 min.
c) 14 min e 20 segundos.
d) 15 min.
e) 15 min e 30 segundos.

7. Sabendo-se que $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ e $\text{sen}(x) = -\dfrac{1}{3}$, é correto afirmar que sen (2x) é

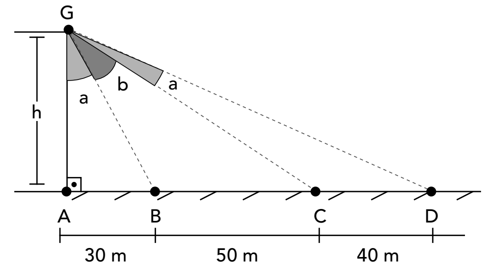
a) $-\dfrac{2}{3}$. b) $-\dfrac{1}{6}$. c) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. d) $\dfrac{1}{27}$. e) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$.

8. Um caminhão sobe uma ladeira com inclinação de 15°. A diferença entre a altura final e a altura inicial de um determinado ponto do caminhão, depois de percorridos 100 m da ladeira, será de, aproximadamente,

Dados: $\sqrt{2} = 1{,}41$; $\sqrt{3} = 1{,}73$.

a) 22 m.
b) 24 m.
c) 26 m.
d) 28 m.
e) 30 m.

9. Do alto de uma encosta íngreme de altura **h**, um guarda florestal G observa três focos de incêndio em B, C e D, conforme a figura a seguir.



A altura **h** da encosta, em metros, corresponde a

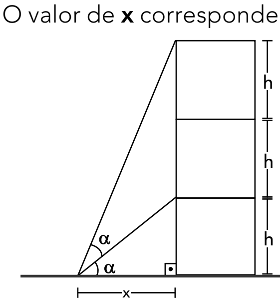
a) $\dfrac{120\sqrt{2}}{2}$.
b) $\dfrac{120\sqrt{3}}{2}$.
c) $\dfrac{120\sqrt{3}}{3}$.
d) $120\sqrt{2}$.
e) $120\sqrt{3}$.

10. Se $\text{sen}(x) = \dfrac{2}{3}$, $\cos(2x) \cdot \text{sen}(-x)$ é

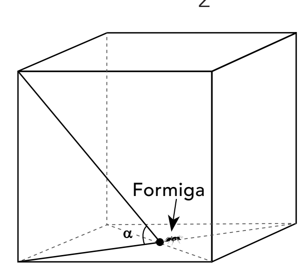
a) $\dfrac{2}{9}$.
b) $\dfrac{2}{27}$.
c) $-\dfrac{2}{9}$.
d) $-\dfrac{2}{27}$.
e) $-\dfrac{9}{27}$.

11. Um edifício possui todos os seus andares com uma mesma altura **h**. De um ponto do chão a uma distância **x** do edifício, observa-se a parte superior do 1º andar sob um ângulo de elevação **α**, conforme a figura a seguir. O 2º e o 3º andar são vistos sob o mesmo ângulo **α**. O valor de **x** corresponde a

a) h.
b) $\sqrt{2}$h.
c) $\sqrt{3}$h.
d) 2h.
e) 2,5h.



12. Uma formiga encontra-se no centro do piso de um formigueiro, que possui uma forma cúbica, como mostra a figura a seguir. Ela observa um dos vértices com um ângulo de elevação **α**. Assim, o valor da $\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$ corresponde a



a) $\sqrt{1-\sqrt{3}}$.
b) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
c) $\sqrt{3-\sqrt{3}}$.
d) $\sqrt{1+\sqrt{3}}$.
e) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

MATEMÁTICA

Matemática e suas Tecnologias

MATEMÁTICA 1

Módulo 1

1. E	2. D	3. C	4. D	5. E
6. A	7. C	8. D	9. B	10. C
11. D	12. D			

Módulo 2

1. C	2. B	3. D	4. C	5. C
6. D	7. B	8. C	9. E	10. E
11. E	12. C			

Módulo 3

1. D	2. B	3. B	4. D	5. A
6. C	7. D	8. C	9. D	10. A
11. C	12. A			

MATEMÁTICA 2

Módulo 1

1. E	2. B	3. E	4. B	5. D
6. B	7. C	8. A	9. C	10. A
11. D	12. E			

Módulo 2

1. D	2. E	3. E	4. C	5. C
6. B	7. E	8. C	9. D	10. E
11. A	12. B	13. A	14. E	15. A
16. B	17. B	18. B		

Módulo 3

1. E	2. A	3. E	4. D	5. A
6. B	7. B	8. A	9. C	10. C
11. D	12. C	13. B	14. B	15. B
16. C	17. C	18. D		

MATEMÁTICA 3

Módulo 1

1. E	2. D	3. D	4. C	5. C
6. D	7. C	8. A	9. B	10. C
11. E	12. E			

Módulo 2

1. E	2. E	3. A	4. E	5. D
6. E	7. D	8. C	9. B	10. E
11. C	12. D	13. E	14. B	15. C
16. B	17. A	18. E		

Módulo 3

1. C	2. B	3. D	4. E	5. A
6. D	7. B	8. C	9. C	10. B
11. B	12. B			

MATEMÁTICA 4

Módulo 1

1. B	2. C	3. B	4. A	5. C
6. B	7. E	8. C	9. A	10. B
11. C	12. B			

Módulo 2

1. B	2. A	3. C	4. D	5. B
6. E	7. E	8. B	9. B	10. D
11. C	12. A	13. E	14. E	15. C
16. D	17. A	18. E		

Módulo 3

1. C	2. B	3. D	4. A	5. C
6. A	7. B	8. E	9. D	10. B
11. E	12. B			

MATEMÁTICA 5

Módulo 1

1. D	2. C	3. B	4. D	5. C
6. C	7. C	8. C	9. C	10. B
11. A	12. C	13. B	14. D	15. A
16. E	17. A	18. D		

Módulo 2

1. A	2. E	3. C	4. D	5. C
6. C	7. B	8. A	9. C	10. C
11. E	12. D	13. E	14. E	15. A
16. A	17. C	18. B		

Módulo 3

1. A	2. C	3. B	4. C	5. A
6. D	7. E	8. C	9. D	10. D
11. C	12. B			

Utilize um leitor de QR Code do seu *tablet* ou *smartphone* e faça *download* do aplicativo SAS App.

Utilize um leitor de QR Code ou acesse www.portalsas.com.br para visualizar os gabaritos.

Referências

Constam, em nosso material didático, atividades escolhidas dos exames vestibulares das seguintes instituições de ensino:

AFA – Academia da Força Aérea Brasileira
CEFET-AL – Centro Federal de Educação Tecnológica de Alagoas
CEFET-MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
CEFET-PE – Centro Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
CEFET-PR – Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná
CESGRANRIO – Centro de Ensino Superior do Grande Rio
CN – Colégio Naval
CPS – Centro de Políticas Sociais
EEM-SP – Escola de Engenharia Mauá
EFOA-MG – Escola de Farmácia e Odontologia de Alfenas
ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio
EPUSP-SP – Escola Politécnica da USP de São Paulo
ESAF – Escola de Administração Fazendária
ESPM – Escola Superior de Propaganda e Marketing
ETFC – Escola Técnica Federal do Ceará
FAAP – Fundação Armando Álvares Penteado
FAFI-MG – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Sete Lagoas
FAMECA – Faculdade de Medicina de Catanduva
FATEC-SP – Faculdade de Tecnologia de São Paulo
FCC – Fundação Carlos Chagas
FCM-MG – Faculdade de Ciências Médicas
FCT – Faculdade de Ciências e Tecnologia
FEI – Faculdade de Engenharia Industrial
FESP-PE – Fundação de Ensino Superior de Pernambuco
FFCMPA – Fundação Faculdade Federal de Ciências Médicas de Porto Alegre
FGV – Fundação Getúlio Vargas
FIUBE-MG – Faculdades Integradas de Uberaba
FMJ – Faculdade de Medicina de Jundiaí
FMU/FIAM-SP – Faculdades Metropolitanas Unidas/Faculdades Integradas Alcântara Machado
FRF – Fundação Ricardo Franco
FURG – Universidade Federal do Rio Grande
FUVEST – Fundação Universitária para o Vestibular
GE – Guia do Estudante
IBMEC – Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais
IFCE – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
IFMG – Instituto Federal Minas Gerais
IME – Instituto Militar de Engenharia
INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
INSPER – Instituto de Ensino e Pesquisa
ITA – Instituto Tecnológico da Aeronáutica
MACKENZIE – Universidade Presbiteriana Mackenzie
OBF – Olimpíada Brasileira de Física
OPF – Olimpíada Paulista de Física
OSEC – Organização Santamarense de Educação e Cultura
POLI – Escola Politécnica
PUCCAMP – Pontifícia Universidade Católica de Campinas/SP
PUC-MG – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-PR – Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
UDESC – Universidade do Estado de Santa Catarina
UEAM – Universidade Estadual do Amazonas
UECE – Universidade Estadual do Ceará
UEFS-BA – Universidade Estadual de Feira de Santana
UEG – Universidade Estadual de Goiás
UEL – Universidade Estadual de Londrina
UEMG – Universidade Estadual de Minas Gerais
UEMS – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
UEM – Universidade Estadual de Maringá
UEPB – Universidade Estadual da Paraíba
UEPG – Universidade Estadual de Ponta Grossa
UERJ – Universidade Estadual do Rio de Janeiro
UESPI – Universidade Estadual do Piauí
UFABC – Universidade Federal do ABC
UFAC – Universidade Federal do Acre
UFAL – Universidade Federal de Alagoas
UFAM – Universidade Federal do Amazonas
UFBA – Universidade Federal da Bahia
UFC – Universidade Federal do Ceará
UFES – Universidade Federal do Espírito Santo
UFF-RJ – Universidade Federal Fluminense
UFG – Universidade Federal de Goiás
UFJF – Universidade Federal de Juiz de Fora
UFLA-MG – Universidade Federal de Lavras
UFMA – Universidade Federal do Maranhão
UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
UFPA – Universidade Federal do Pará
UFPB – Universidade Federal da Paraíba
UFPE – Universidade Federal de Pernambuco
UFPEL-RS – Universidade Federal de Pelotas
UFPI – Universidade Federal do Piauí
UFPR – Universidade Federal do Paraná
UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFRR – Universidade Federal de Roraima
UFRRJ – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina
UFSCAR – Universidade Federal de São Carlos
UFSJ-MG – Universidade Federal de São João Del Rei
UFSM-RS – Universidade Federal de Santa Maior
UFSS-SC – Universidade Federal de Fronteira Sul do Estado de Santa Catarina
UFTPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
UFU-MG – Universidade Federal de Uberlândia
UFV-JM – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
UFV-MG – Universidade Federal de Viçosa
UNAERP – Universidade de Ribeirão Preto
UNB – Universidade de Brasília
UNCISAL – Universidade Estadual de Ciências da Saúde de Alagoas
UNEB – Universidade do Estado da Bahia
UNEMAT – Universidade do Estado de Mato Grosso
UNESP – Universidade Estadual Paulista
UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas
UNIFAL-MG – Universidade Federal de Alfenas
UNIFESP – Universidade Federal de São Paulo
UNIFOR – Universidade de Fortaleza
UNIMAR-SP – Universidade de Marília
UNIMES – Universidade Metropolitana de Santos
UNIPA-MG – Universidade de Porto Alegre
UNIRIO – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
UNISINOS-RJ – Universidade do Vale do Rio dos Sinos
UNITAU-SP – Universidade de Taubaté
UNIVALI-SC – Universidade do Vale do Itajaí
UPE – Universidade de Pernambuco
USJT-SP – Universidade de São Judas Tadeu
USP – Universidade de São Paulo
UTF-PR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
UVA – Universidade Estadual do Vale do Acaraú
VUNESP – Vestibular da Universidade Federal Paulista