



conecte
L I V E

RICARDO HELOU DOCA
RONALDO FOGO
NEWTON VILLAS BÔAS

TÓPICOS DE

Física

1

PARTE 2

 **Editora
Saraiva**

plurall

Sumário

Parte II

Unidade 2 – Dinâmica

Tópico 4 – Gravitação 339

Bloco 1 340

1. Introdução 340

2. As Leis de Kepler 345

3. Universalidade das Leis de Kepler 348

Bloco 2 352

4. Lei de Newton da Atração das Massas 352

5. Satélites 353

Bloco 3 363

6. Estudo do campo gravitacional
de um astro 363

7. Variação aparente da intensidade da
aceleração da gravidade devido
à rotação do astro 368

Tópico 5 – Movimentos em campo gravitacional uniforme 380

Bloco 1 381

1. Campo gravitacional uniforme 381

2. Movimento vertical 382

3. Movimento balístico 384

Bloco 2 396

4. Lançamento horizontal 396

Tópico 6 – Trabalho e potência 409

Bloco 1 410

1. Energia e trabalho 410

2. Trabalho de uma força constante 411

3. Sinais do trabalho 412

4. Casos particulares importantes 412

5. Cálculo gráfico do trabalho 414

Bloco 2 418

6. Trabalho da força peso 418

7. Trabalho da força elástica 419

8. O Teorema da Energia Cinética 420

9. Trabalho no erguimento de um corpo 422

Bloco 3 430

10. Introdução ao conceito de potência 430

11. Potência média 430

Bloco 4 434

12. Potência instantânea 434

13. Relação entre potência
instantânea e velocidade 434

14. Propriedade do gráfico da potência
em função do tempo 435

15. Rendimento 436

Tópico 7 – Energia mecânica e sua conservação 455

Bloco 1 456

1. Princípio de conservação –
Intercâmbios energéticos 456

2. Unidades de energia 459

3. Energia cinética 460

4. Energia potencial 461

Bloco 2 467

5. Cálculo da energia mecânica 467

6. Sistema mecânico conservativo 468

7. Princípio de Conservação da
Energia Mecânica 469

Apêndice: Energia potencial gravitacional 490

Tópico 8 – Quantidade de movimento e sua conservação 493

Bloco 1 494

1. Impulso de uma força constante 494

2. Cálculo gráfico do valor algébrico
do impulso 495

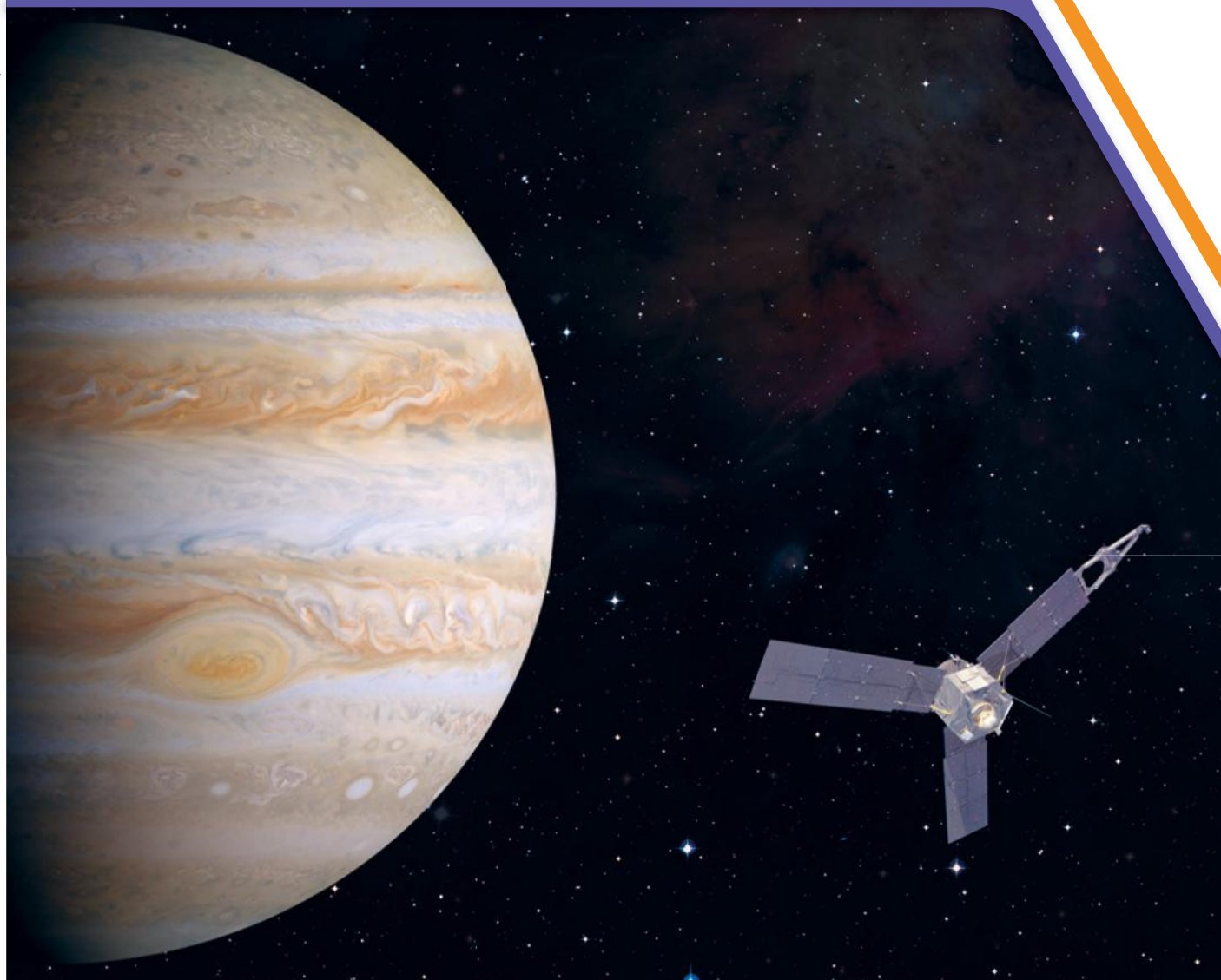
3. Quantidade de movimento 496

4. O Teorema do Impulso 498

Bloco 2	507	12. Máquina simples	582
5. Sistema mecânico isolado	507	13. Alavancas	583
6. O Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento	507	14. A talha exponencial	585
Bloco 3	519	Tópico 2 – Estática dos fluidos	606
7. Introdução ao estudo das colisões mecânicas	519	Bloco 1	607
8. Quantidade de movimento e energia mecânica nas colisões	519	1. Três teoremas fundamentais	607
9. Velocidade escalar relativa	520	2. Massa específica ou densidade absoluta (μ)	607
10. Coeficiente de restituição ou de elasticidade (e)	522	3. Densidade de um corpo (d)	609
11. Classificação das colisões quanto ao valor de e	522	4. Densidade relativa	609
Apêndice: Centro de massa	545	5. O conceito de pressão	610
Unidade 3 – Estática	552	Bloco 2	614
Tópico 1 – Estática dos sólidos	554	6. Pressão exercida por uma coluna líquida	614
Bloco 1	555	7. Forças exercidas nas paredes de um recipiente por um líquido em equilíbrio	615
1. Introdução	555	8. O Teorema de Stevin	616
2. Conceitos fundamentais	556	9. Consequências do Teorema de Stevin	617
Bloco 2	569	10. A pressão atmosférica e o experimento de Torricelli	618
3. Momento escalar de uma força	569	Bloco 3	625
4. Binário ou conjugado	571	11. O Teorema de Pascal	625
5. Equilíbrio estático de um corpo extenso	573	12. Consequência do Teorema de Pascal	626
6. Teorema das Três Forças	573	13. Pressão absoluta e pressão efetiva	627
7. Centro de gravidade	575	14. Vasos comunicantes	628
8. Centro de gravidade e centro de massa	576	15. Prensa hidráulica	630
9. Equilíbrio dos corpos suspensos	579	Bloco 4	635
10. Equilíbrio dos corpos apoiados	579	16. O Teorema de Arquimedes	635
11. A relação entre equilíbrio e energia potencial	581	17. Uma verificação da Lei do Empuxo	637
		Apêndice: Dinâmica dos fluidos	655
		Respostas	668

Gravitação

muratai/Shutterstock



// Representação artística da sonda Juno na vizinhança de Júpiter.

Depois de cinco anos de viagem, a sonda espacial norte-americana Juno, propulsionada essencialmente por energia solar, chegou, em 2016, às vizinhanças de Júpiter, o maior planeta do sistema solar. Júpiter é um planeta gasoso em torno do qual gravitam 79 satélites, sendo os quatro maiores denominados luas de Galileu por terem sido catalogados originalmente, em 1610, por esse notável cientista italiano. São eles: Io, Europa, Ganimedes e Calisto, em ordem crescente de distância em relação ao astro. A partir das imagens enviadas pela nave Juno, muitos dados foram obtidos pelos astrônomos a respeito desse colossal planeta gasoso, dono de um verdadeiro "sistema planetário particular". As leis de Kepler e de Newton que veremos neste tópico aplicam-se também à gravitação das luas de Júpiter em torno desse "pequeno Sol sem luz própria".

1. Introdução

Gravitação é o estudo das forças de atração entre massas (forças de campo gravitacional) e dos movimentos de corpos submetidos a essas forças.



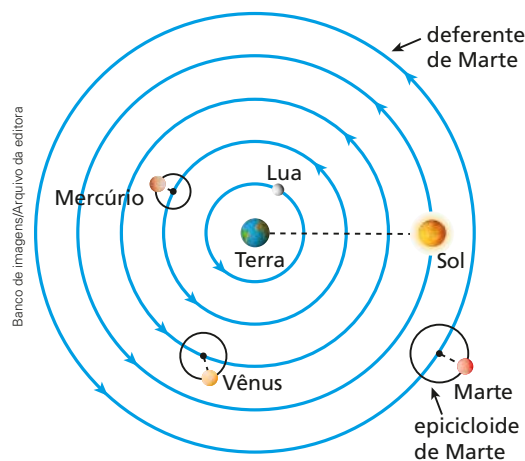
Photo Researchers/Diomedea

// Retrato de Ptolomeu.

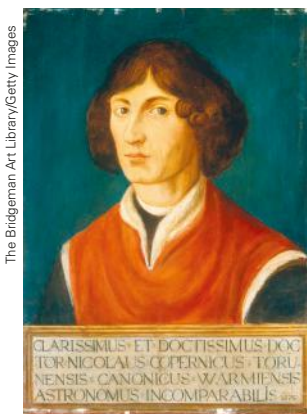
Muitas teorias se sucederam até que chegássemos à concepção atual do sistema solar a que pertencemos. De início, o misticismo e a religião dissociavam as ideias sobre o Universo do caráter científico.

Foram os antigos gregos os fundadores da ciência modernamente conhecida por Astronomia. No século II d.C., Cláudio **Ptolomeu** (c.100-c.170), matemático, geógrafo e astrônomo, propôs um modelo planetário em que a Terra era o centro do sistema solar, de modo que todos os astros conhecidos, inclusive o Sol e a Lua, deveriam gravitar ao seu redor. Esse modelo – **geocêntrico**, pois tinha a Terra como centro – foi aceito por mais de quinze séculos, sobretudo por ser coerente com a filosofia e os valores correntes.

No século XVI, o monge polonês Nicolau **Copérnico** (1473-1543), estudioso de Medicina, Matemática e Astronomia, apresentou uma concepção revolucionária para o sistema solar. Segundo ele, o Sol, e não a Terra, seria o centro em torno do qual deveriam gravitar em órbitas circulares a Terra e todos os planetas conhecidos. Embora mais simples que o de Ptolomeu, o modelo de Copérnico – **heliocêntrico**, pois admitia o Sol como centro do sistema – encontrou grandes obstáculos para sua aceitação, já que se contrapunha aos preceitos antropocêntricos da Igreja.



// No modelo ptolomaico do sistema solar, cada planeta realizava dois movimentos circulares concomitantemente. Marte, por exemplo, descrevia um epiciclo, cujo centro realizava uma deferente ao redor da Terra. Contudo, isso não acontecia com a Lua e com o Sol, que descreviam apenas a deferente. Neste tópico, todos os esquemas representativos de trajetórias estão com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores fantasia.



The Bridgeman Art Library/Getty Images

// Retrato de Nicolau Copérnico.

A obra mais importante de Nicolau Copérnico, *Das revoluções dos mundos celestes*, escrito originalmente em latim (*De Revolutionibus Orbium Coelestium*), conforme a tradição da época, constitui um dos mais importantes marcos da evolução dos conceitos referentes à situação da Terra diante do panorama universal. Copérnico recebeu o primeiro exemplar de seu livro no dia de sua morte (25 de maio de 1543), em Frauenburg, na Polônia. Nessa obra, ele propunha a **Teoria Heliocêntrica**, além de explicar os fundamentos do movimento de rotação da Terra, responsável pela sucessão dos dias e das noites. Por contestar o dogma de que o ser humano, obra-prima da criação divina, deveria ocupar juntamente com a Terra o centro do Universo, esse livro foi imediatamente incluído no *Index* – relação das leituras proibidas pela Igreja.

Um importante adepto do pensamento copernicano foi o físico e astrônomo italiano Galileu Galilei (1564-1642). Devido às necessidades de suas observações astronômicas, Galileu construiu diversas lunetas. Com elas, ele descobriu os satélites de Júpiter, os anéis de Saturno, as manchas solares e detalhes da Lua. Além disso, elaborou mapas celestes de rara precisão para a época.

Seus estudos o levaram a também concordar com a ideia de que o Sol, e não a Terra, deveria ser o centro do sistema solar. Por essa razão, foi perseguido e preso pela Inquisição e, sob pressão, negou perante um tribunal as teses que defendia.

A crescente controvérsia entre as proposições de Ptolomeu e Copérnico levou os astrônomos a estudos mais acurados. Foi o astrônomo alemão Johannes **Kepler** (1571-1630) quem conseguiu descrever de modo preciso os movimentos planetários.

Atualmente, o modelo aceito para o sistema solar é basicamente o de Copérnico, feitas as correções sugeridas por Kepler e por cientistas que o sucederam.

Sabe-se que oito planetas gravitam em torno do Sol, descrevendo órbitas elípticas. Na ordem crescente de distâncias ao Sol, são eles: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.



Photo Researchers/Diomedea

// Modelo de luneta utilizada por Galileu.

NOTA!

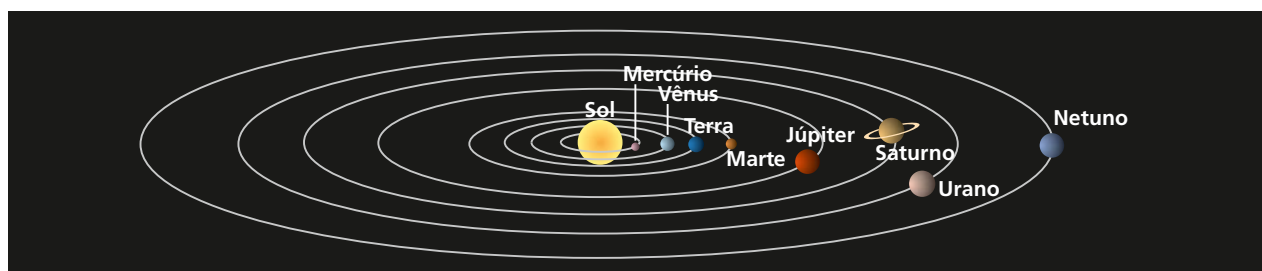
Na época de Kepler (por volta de 1600), eram conhecidos apenas seis planetas: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno, todos observáveis a olho nu, e Terra. A presença de Urano, Netuno e Plutão (planeta-anão) só foi constatada com a evolução de equipamentos de observação, como lunetas e telescópios, além de teorias e cálculos mais avançados.

Johannes Kepler foi autor de uma obra extensa que inclui vários opúsculos e livros, como *Epitome Astronomiae Copernicanae* e *Harmonice Mundi*, em que ratifica e amplia as teorias de Copérnico, descrevendo de maneira precisa os movimentos dos planetas em torno do Sol. Para elaborar seus trabalhos, Kepler fundamentou-se em suas observações do planeta Marte, em correspondências com Galileu Galilei e, sobretudo, em dados e medidas astronômicos obtidos pelo seu mestre dinamarquês, Tycho **Brahe** (1546-1601), com quem trabalhou durante algum tempo.



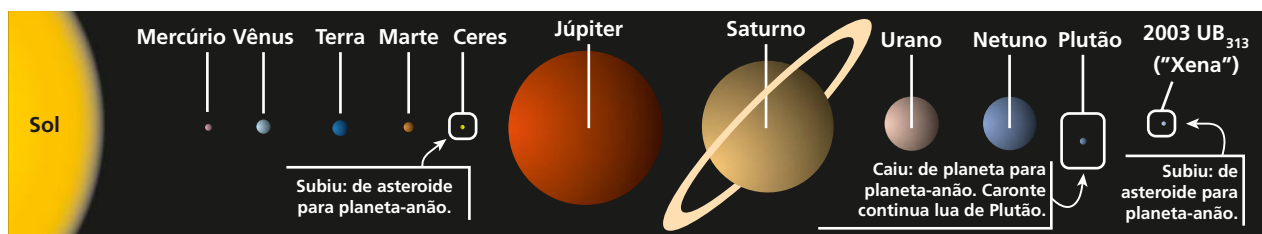
Album/fak-images / i.istock

// Retrato de Johannes Kepler.



Banco de imagens/Arquivo da editora

// Na figura, temos um aspecto das órbitas planetárias em torno do Sol. Observe que as trajetórias descritas pelos planetas pertencem praticamente a um mesmo plano. A órbita de Mercúrio é a mais elíptica, sendo as demais aproximadamente circulares. (Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores fantasia.)



Banco de imagens/Arquivo da editora

// Depois das deliberações da União Astronômica Internacional (UAI), em 2006, esta é a situação atual do sistema solar.

Onde vamos parar?

Ao contemplar o céu em noite sem nebulosidade, podemos observar a olho nu até 6 000 corpos celestes: nebulosas (galáxias), estrelas, planetas, satélites, etc. Com sofisticados equipamentos astronômicos, contudo, o que inclui o supertelelescópio Hubble, esse número se estende a fronteiras inimagináveis, conduzindo o pensamento a devaneios e suposições.

A saga humana rumo à conquista do espaço teve início em 1957, quando a então União Soviética colocou em órbita da Terra o satélite artificial Sputnik. No período da Guerra Fria seguiram-se muitas outras missões, inclusive as viagens à Lua, componentes do Projeto Apollo, da Nasa (Administração Nacional de Aeronáutica e Espaço, órgão do governo federal dos Estados Unidos), de 1961 a 1972, o que possibilitou, em 20 de julho de 1969, ao primeiro ser humano – o astronauta Neil Armstrong – colocar o pé em solo lunar.

Na jornada humana pela exploração espacial, um dos objetivos é prospectar a existência de vida em outros astros, ainda que em formas embrionárias. E o corpo celeste mais próximo e promissor, capaz de descortinar essa possibilidade, é o planeta Marte, nosso vizinho imediato, mais distante do Sol que a Terra. Várias sondas foram enviadas ao planeta vermelho, com destaque para a norte-americana Mars Science Laboratory, que fez pousar em solo marciano, em 2012, um veículo “espião” denominado Curiosity. Também a Organização Indiana de Pesquisas Espaciais colocou em órbita do planeta, em 2013, a nave Mars Orbiter Mission, que já enviou à Terra muitas e preciosas informações.



MSSS/JPL/Caltech/NASA

Curiosity em solo marciano: imagens detalhadas do ambiente do planeta vermelho.

A exploração de Marte está em franco andamento e a essa altura muito se sabe a respeito desse planeta, especialmente sobre as condições adversas à habitabilidade humana, como a pequena aceleração da gravidade local (cerca de $4,0 \text{ m/s}^2$), a baixíssima pressão atmosférica, o reduzido nível de insolação, o que o torna as temperaturas ambientes próximas de $-100 \text{ }^\circ\text{C}$, as severas tempestades de areia com ventos de até 170 km/h e, o que é pior, a altíssima incidência de raios cósmicos repletos de radiações ionizantes – de alta energia – nocivas ao corpo humano. Com isso, possíveis bases humanas em Marte deverão ser subterrâneas ou inseridas dentro de redomas imunes a todas essas intempéries.

Na busca por conhecer melhor o sistema solar, fomos a Saturno, o planeta gasoso dos anéis, somente menor do que Júpiter. Depois de percorrer cerca de 3,5 bilhões de quilômetros, uma nave produzida por um consórcio norte-americano-europeu – a Cassini-Huygens – orbitou Saturno, enviando à Terra detalhadíssimas imagens do seu polo norte, bem como das luas Titã (onde pousou a sonda Huygens) e Encélado.

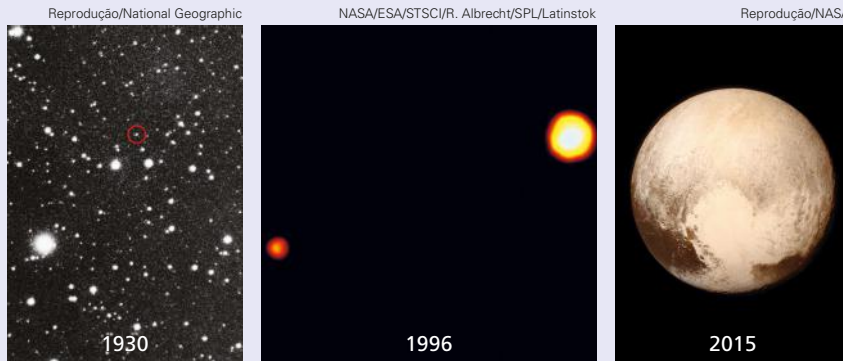
Mas já fomos mais longe, realmente aos confins do nosso sistema planetário. A primeira nave espacial não tripulada feita pelo homem – a New Horizons – se avizinhou de Plutão, corpo celeste rebaixado à condição de planeta-anão, entre todos os planetas, o mais distante do Sol (seu raio médio de órbita tem cerca de 39,29 UA, em que 1,00 UA, ou uma Unidade Astronômica, é a distância média entre a Terra e o Sol: 150 milhões de quilômetros). A viagem durou ao todo 9 anos e 6 meses, tendo a New Horizons – corpo do tamanho de um piano de cauda – percorrido algo próximo de 5 bilhões de quilômetros. Depois de ganhar velocidade por meio do “estilingue gravitacional” proporcionado por Júpiter, a nave seguiu “dormente” até ser “despertada” já na aproximação de Plutão. A 12 500 km do astro, a sonda produziu uma série de fotografias em alta definição que permitirão aos cientistas avaliarem muitas características do planeta-anão e de sua principal Lua, Caronte.

A imagem a seguir é uma das muitas centenas de fotos enviadas à Nasa pela New Horizons. Nela, aparecem Plutão (em primeiro plano) e a lua Caronte (ao fundo), satélite natural com centro distante cerca de 19 600 quilômetros do centro de Plutão e com massa próxima de 15% da massa de Plutão. Na realidade, Plutão-Caronte é considerado um astro binário, já que os dois corpos celestes giram em torno do centro de massa do sistema com velocidade angular estimada em 1,0 rad/dia.

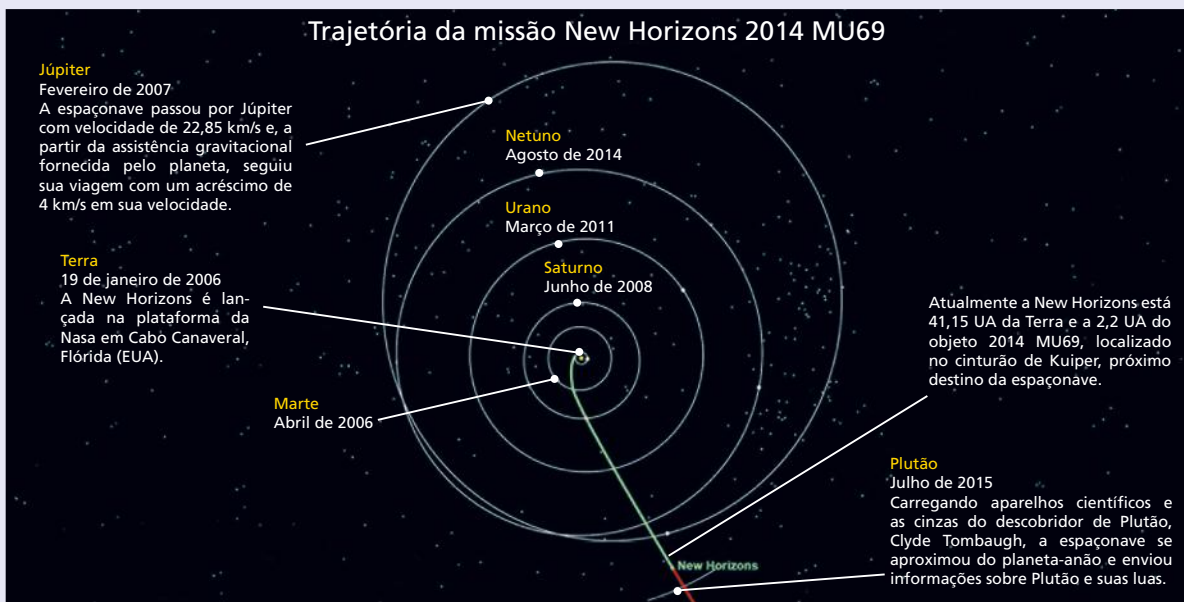


SWRI/JHU/APL/NASA

Plutão-Caronte em uma das imagens enviadas à Terra pela New Horizons. O trânsito do sinal eletromagnético entre a espaçonave e a Nasa, região de vácuo sideral, tem duração próxima de cinco horas.



Aqui, da primeira à mais recente imagem de Plutão: a tecnologia proporciona notáveis avanços.



NASA Image Collection/Alamy/Fotografia

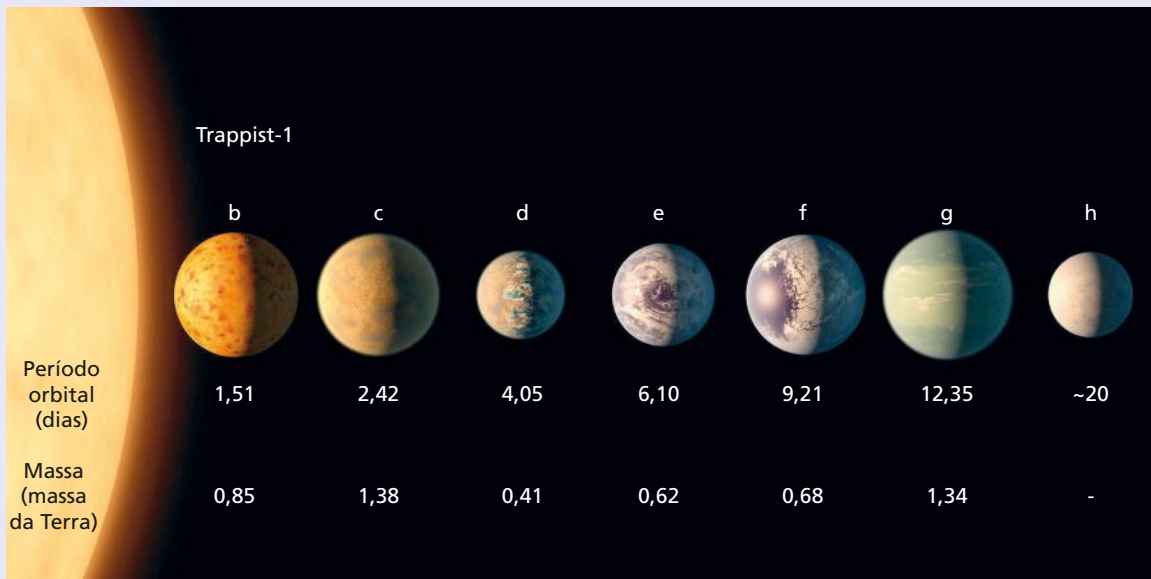
A aventura da New Horizons: cerca de 5 bilhões de quilômetros em 9,5 anos. Dados disponíveis em: <<http://pluto.jhuapl.edu/Mission/Where-is-New-Horizons/Passing-Planets-Jupiter.php>>. Acesso em: 2 ago. 2018.

É consensual na comunidade científica que o sistema solar deverá entrar em colapso daqui a cerca de 5 bilhões de anos, pondo fim ao nosso planeta e toda sorte de vida encontrada por aqui. Por isso, visando-se preservar especialmente a raça humana, tornou-se imperativo prospectar-se no Universo alternativas de habitabilidade similares à Terra – exoplanetas.

No momento, o que há de mais promissor na Via Láctea – a nossa galáxia – é um sistema recém-descoberto situado a 39 anos-luz, constituído de uma pequena estrela – a Trappist-1 – que tem sete planetas rochosos a gravitar em órbitas praticamente circulares ao seu redor. Esses planetas, em ordem de distâncias crescentes ao seu “sol”, foram chamados provisoriamente de **b, c, d, e, f, g e h**, respectivamente. As temperaturas nesses astros variam entre 0 °C e 100 °C, o que possibilita a existência de água no estado líquido em suas superfícies.



O infográfico a seguir traz algumas estimativas já elaboradas em relação aos planetas da Trappist-1, comparadas com parâmetros da Terra.



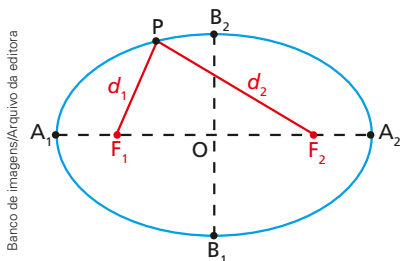
NASA Image Collection/Alamy/Fotoarena

// Trappist-1: o futuro *habitat* da humanidade?

A aventura humana pelo espaço deverá buscar, porém, antes de tudo, naves mais velozes que tornem mais breve a permanência de “terráqueos” embarcados. Isso nos leva a considerar veículos que possam se deslocar a velocidades da ordem da velocidade da luz no vácuo: 300 000 km/s. Esses *space shuttles* utilizariam “dobras” no espaço-tempo, cuja existência é justificada pela Teoria da Relatividade Geral.

Antes de seguirmos nosso estudo, é importante que você saiba o que é uma elipse.

Elipse é o conjunto de pontos de um plano para os quais a soma das distâncias d_1 e d_2 , respectivamente a dois pontos fixos, denominados focos, F_1 e F_2 pertencentes a esse plano, permanece constante.



Banco de imagens/Arquivo da editora

// Qualquer que seja o ponto **P** considerado na elipse, tem-se $d_1 + d_2 = \text{constante}$.

Observando a figura ao lado, note que uma elipse é composta dos seguintes elementos geométricos:

- F_1 e F_2 são os focos;
- $OA_1 = OA_2$ são os semieixos maiores;
- $OB_1 = OB_2$ são os semieixos menores.

Façamos $OA_1 + OA_2 = E$ (eixo maior da elipse) e $OF_1 + OF_2 = f$ (distância entre os focos da elipse). Chama-se **excentricidade da elipse** a grandeza adimensional e dada por:

$$e = \frac{f}{E} \quad (0 \leq e < 1)$$

Se $f = 0$, F_1 e F_2 serão coincidentes e a elipse assumirá a forma particular de uma circunferência com o centro localizado em $F_1 \equiv F_2$. Se f tender a E , porém, a excentricidade e se aproximará de 1 e a elipse ficará semelhante a um segmento de reta.

Faça você mesmo

Elipses

Desenhar uma elipse é uma tarefa relativamente simples.

Material necessário

- 2 pregos;
- 1 barbante;
- 1 giz ou lápis.

Procedimento

- I. Fixe os dois pregos em dois pontos F_1 e F_2 de uma superfície plana, de modo que a distância entre eles seja menor que o comprimento do barbante.
- II. Em cada prego, amarre uma das extremidades do barbante (figura 1).
- III. Coloque o giz em contato com o barbante (de modo que este permaneça esticado) e, com ele, vá riscando a superfície (figura 2).
- IV. A figura obtida será uma elipse, de acordo com a definição apresentada, com os pregos situados em seus respectivos focos.



figura 1

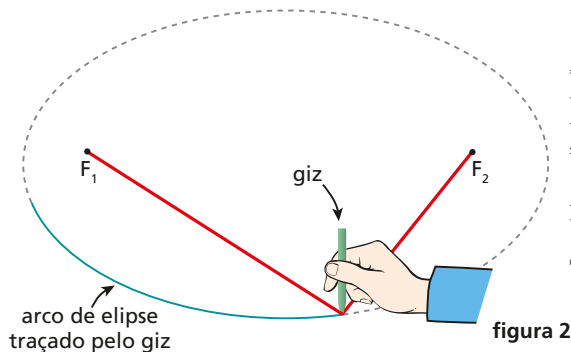


figura 2

Banco de imagens/Arquivo da editora

Desenvolvimento

Analise o seguinte fato: se o local onde estão os pregos fosse alterado, continuaria se formando uma elipse?

2. As Leis de Kepler

Foi por intermédio de Kepler que a Astronomia se desencilhou da Teologia para se ligar definitivamente à Física.

Dono de uma personalidade indagadora e obstinada, esse professor de Matemática e Astronomia, conhecedor das teorias de Copérnico, herdou um grande acervo de informações e medidas. Esses ingredientes ajudaram-no a verificar que existem notórias regularidades nos movimentos planetários, de modo que ele pôde formular, mesmo sem demonstrar matematicamente, três generalizações, conhecidas como **Leis de Kepler**.

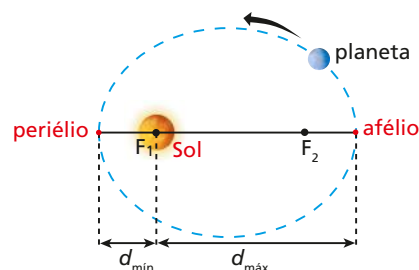
1ª Lei – Lei das órbitas

Em relação a um referencial no Sol, os planetas movimentam-se descrevendo **órbitas elípticas**, ocupando o Sol um dos focos da elipse.



Thinkstock/Getty Images

// Ainda hoje, mesmo dispo do superteleoscópio Hubble, visto aqui em representação artística, e de outros artefatos de exploração espacial, não temos teorias definitivas sobre o Universo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O ponto da órbita mais próximo do Sol é denominado **periélio**, e o mais afastado, **afélio**.

Chamando de $d_{\text{mín}}$ e $d_{\text{máx}}$ as distâncias do periélio e do afélio ao centro do Sol, respectivamente, definimos **raio médio da órbita** (R) do planeta como a média aritmética entre $d_{\text{mín}}$ e $d_{\text{máx}}$:

$$R = \frac{d_{\text{mín}} + d_{\text{máx}}}{2}$$

De acordo com a definição acima, podemos concluir que o raio médio da órbita é o semieixo maior da elipse.

Entre os planetas do sistema solar, Mercúrio é o que descreve órbita de maior excentricidade. Os demais planetas, inclusive a Terra, realizam órbitas praticamente circulares, como pode ser observado na tabela ao lado, em que apresentamos o valor da excentricidade da órbita de cada planeta.

O fato de existirem órbitas praticamente circulares não invalida, contudo, a 1ª Lei de Kepler, já que a circunferência é um caso particular de elipse que tem os focos coincidentes.

Uma evidência de que a órbita da Terra é praticamente circular é que, quando observamos o Sol, ele nos aparenta ter o mesmo “tamanho” em qualquer época do ano. Se a órbita terrestre fosse uma elipse de grande excentricidade, visualizaríamos o Sol muito grande quando o planeta percorresse a região do periélio e muito pequeno quando o planeta percorresse a região do afélio. Além disso, na passagem da Terra pela região do periélio, sentiríamos um calor imenso, ficando sujeitos a marés devastadoras. Na passagem da Terra pela região do afélio, porém, nos submeteríamos a fenômenos opostos: sentiríamos um frio glacial e as marés seriam amenas, provocadas quase que exclusivamente pela influência da Lua.

Planeta	Excentricidade da elipse
Mercúrio	0,205
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,094
Júpiter	0,049
Saturno	0,057
Urano	0,046
Netuno	0,011

Fonte: <<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>>.
Acesso em: 22 jul. 2018.

2ª Lei – Lei das áreas

As áreas varridas pelo vetor-posição de um planeta em relação ao centro do Sol são **diretamente proporcionais** aos respectivos intervalos de tempo gastos.

Sendo A a área e Δt o correspondente intervalo de tempo, podemos escrever que:

$$A = v_a \Delta t$$

A constante de proporcionalidade v_a denomina-se **velocidade areolar** e caracteriza a rapidez com que o vetor-posição do planeta, que tem origem no centro do Sol e extremidade no centro do planeta, varre as respectivas áreas.

Também podemos enunciar a Lei das áreas da seguinte maneira:

O vetor-posição de um planeta em relação ao centro do Sol varre **áreas iguais em intervalos de tempo iguais**.

Considere a figura ao lado, que ilustra um planeta em quatro instantes consecutivos do seu movimento orbital em torno do Sol. Nela, estão representados os vetores-posição \vec{r}_A , \vec{r}_B , \vec{r}_C e \vec{r}_D associados aos instantes t_A , t_B , t_C e t_D respectivamente.

Representamos por A_1 e A_2 as áreas varridas pelo vetor-posição do planeta nos intervalos $\Delta t_1 = t_B - t_A$ e $\Delta t_2 = t_D - t_C$:

Conforme propõe a 2ª Lei de Kepler, temos:

Se $\Delta t_1 = \Delta t_2$, então $A_1 = A_2$.

É importante reforçar que a velocidade areolar para um dado planeta do sistema solar é **constante**. Isso não significa, porém, que o movimento do planeta ao longo de sua órbita seja uniforme.

Admitamos que, na figura ao lado, as áreas A_1 e A_2 sejam varridas em intervalos de tempo iguais. Com base na Lei das áreas, concluímos que $A_1 = A_2$ e que, devido à excentricidade da órbita, o espaço percorrido pelo planeta na região do periélio (deslocamento escalar) é maior que o espaço percorrido pelo planeta na região do afélio ($\Delta s_1 > \Delta s_2$).

Ora, se na região do periélio, num intervalo de tempo de mesma duração, o planeta percorre um espaço maior que o percorrido na região do afélio, podemos dizer que sua velocidade escalar média de translação é maior na região do periélio que na do afélio.

No periélio, o planeta tem velocidade de translação com intensidade **máxima**, enquanto no afélio ele tem velocidade de translação com intensidade **mínima**.

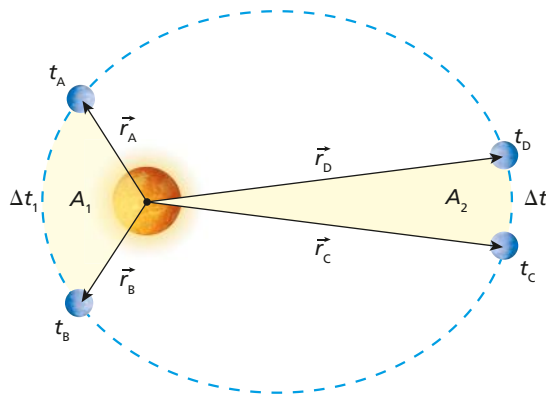
Isso nos mostra que o movimento de um planeta que descreve órbita elíptica em torno do Sol **não é uniforme**. Do afélio para o periélio, o movimento é **acelerado**, e, do periélio para o afélio, o movimento é **retardado**.

A explicação para esse mecanismo está na **força de atração gravitacional** que o Sol exerce no planeta. Essa força, que está sempre dirigida para o centro de massa do Sol, foi descrita por Newton, como veremos detalhadamente no Bloco 2 deste tópico.

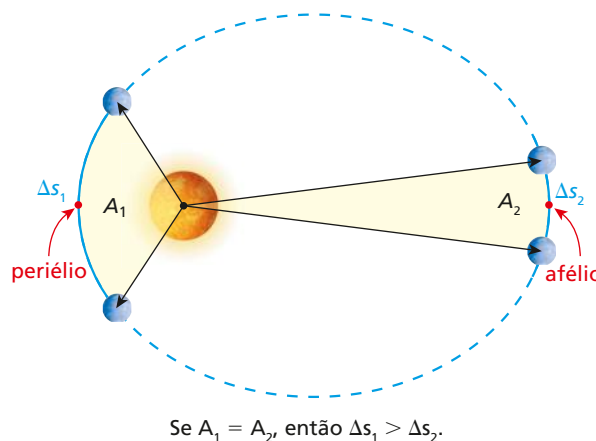
Observe na figura ao lado que, do afélio para o periélio, a força gravitacional admite uma componente tangencial no sentido da velocidade, ocorrendo o contrário do periélio para o afélio.

Destacamos que:

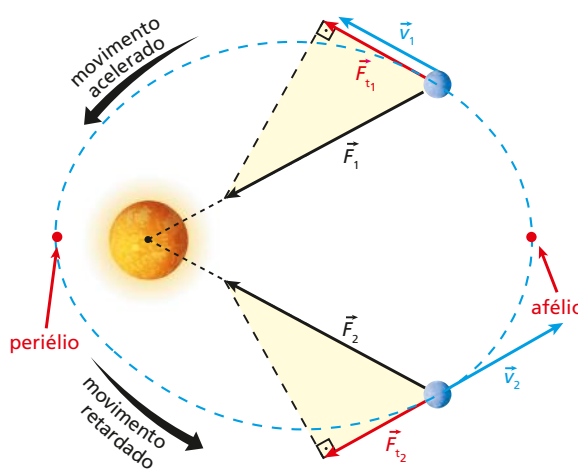
O movimento será **uniforme** no caso particular de planetas descrevendo órbitas circulares.



Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

3ª Lei – Lei dos períodos

Para qualquer planeta do sistema solar, é **constante** o quociente do cubo do raio médio da órbita, R^3 , pelo quadrado do período de revolução (ou translação), T^2 , em torno do Sol.

$$\frac{R^3}{T^2} = K_p$$

A constante K_p denomina-se **constante de Kepler** e seu valor depende apenas da massa do Sol e das unidades de medida.

Na tabela abaixo, estão relacionados os oito planetas do sistema solar com seus respectivos raios médios de órbita (R) e períodos de revolução (T). Na coluna à direita, aparecem os valores do quociente $\frac{R^3}{T^2}$ para cada caso.

Planeta	Raio médio da órbita (UA)	Período de revolução (dias)	$\frac{R^3}{T^2}$ (UA ³ /dias ²)
Mercúrio	0,387	88,0	$7,48 \cdot 10^{-6}$
Vênus	0,723	224,70	$7,48 \cdot 10^{-6}$
Terra	1,000	365,25	$7,49 \cdot 10^{-6}$
Marte	1,524	687	$7,50 \cdot 10^{-6}$
Júpiter	5,200	4331	$7,49 \cdot 10^{-6}$
Saturno	9,580	10747	$7,61 \cdot 10^{-6}$
Urano	19,195	30589	$7,55 \cdot 10^{-6}$
Netuno	30,055	59800	$7,59 \cdot 10^{-6}$

Fonte: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/planet_table_ratio.html>. Acesso em: 22 jul. 2018.

Note que o período de revolução cresce com o raio médio da órbita descrita pelo planeta em torno do Sol. Mercúrio é o planeta mais próximo do Sol e, por isso, é o que tem o menor ano (88 dias terrestres). Netuno é o planeta mais afastado do Sol e, por isso, é o que tem maior ano (aproximadamente 164 anos terrestres).

3. Universalidade das Leis de Kepler

As três Leis de Kepler apresentadas até aqui são **universais**, isto é, valem para o sistema solar a que pertencemos e também para qualquer outro sistema do Universo em que exista uma grande massa central em torno da qual gravitem massas menores. O planeta Júpiter e seus setenta e nove satélites, por exemplo, constituem um sistema desse tipo. O mesmo ocorre com Marte e seus satélites Deimos e Fobos.

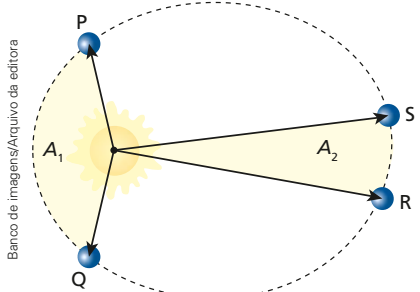
Em torno da Terra, gravitam a Lua e centenas de satélites artificiais, além de muita sucata espacial. Nessa situação, podemos aplicar as três leis de Kepler, com a Terra fazendo o papel de “Sol” e os citados corpos, o papel de “planetas”.

/// Nesta imagem, uma espaçonave coloca um satélite em órbita da Terra. Quanto maior for o raio médio da órbita do satélite, maior será seu período de revolução ao redor do planeta.

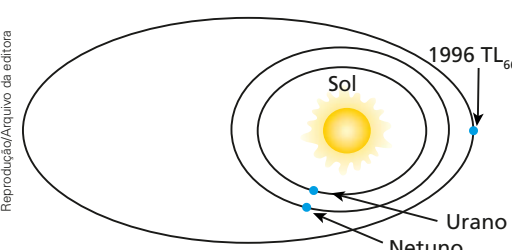


Photo Researchers/Diomedea

Exercícios Nível 1

- Adotando o Sol como referencial, aponte a alternativa que condiz com a 1ª Lei de Kepler da Gravitação (Lei das órbitas):
 - As órbitas planetárias são quaisquer curvas, desde que fechadas.
 - As órbitas planetárias são espiraladas.
 - As órbitas planetárias não podem ser circulares.
 - As órbitas planetárias são elípticas, com o Sol ocupando o centro da elipse.
 - As órbitas planetárias são elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse.
- Na figura a seguir, está representada a órbita elíptica de um planeta em torno do Sol:
 

- Se os arcos de órbita **PQ** e **RS** são percorridos em intervalos de tempo iguais, qual a relação entre as áreas A_1 e A_2 ?
- Em que lei física você se baseou para responder ao item **a**?

- (PUC-MG) A figura abaixo representa o Sol, três astros celestes e suas respectivas órbitas em torno do Sol: Urano, Netuno e o objeto recentemente descoberto [década de 1990], de nome 1996 TL₆₆.
 

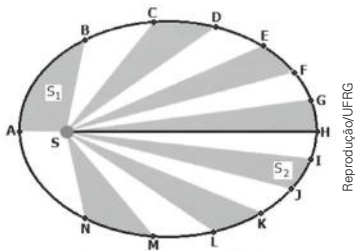
Analise as afirmativas a seguir:

- Essas órbitas são elípticas, estando o Sol em um dos focos dessas elipses.

- Os três astros representados executam movimento uniforme em torno do Sol, cada um com um valor de velocidade diferente dos outros.
- Dentre os astros representados, quem gasta menos tempo para completar uma volta em torno do Sol é Urano.

Indique:

- se todas as afirmativas são corretas.
- se todas as afirmativas são incorretas.
- se apenas as afirmativas I e II são corretas.
- se apenas as afirmativas II e III são corretas.
- se apenas as afirmativas I e III são corretas.

- (UFRGS-RS) A elipse, na figura abaixo, representa a órbita de um planeta em torno de uma estrela S. Os pontos ao longo da elipse representam posições sucessivas do planeta, separadas por intervalos de tempo iguais. As regiões alternadamente coloridas representam as áreas varridas pelo raio vetor da trajetória nesses intervalos de tempo. Na figura, em que as dimensões dos astros e o tamanho da órbita não estão em escala, o segmento de reta \overline{SH} , de comprimento p , representa a distância do afélio ao foco da elipse.
 

Considerando-se que a única força atuante no sistema estrela-planeta seja a força gravitacional, são feitas as seguintes afirmações.

- As áreas S_1 e S_2 , varridas pelo raio vetor da trajetória, são iguais.
- O período da órbita é proporcional a p^3 .
- As velocidades tangenciais do planeta nos pontos **A** e **H**, V_A e V_H , são tais que $V_A > V_H$.

Quais estão corretas?

- Apenas I.
- Apenas I e II.
- Apenas I e III.
- Apenas II e III.
- I, II e III.

5. O astrônomo alemão Johannes Kepler apresentou três generalizações a respeito dos movimentos planetários em torno do Sol, conhecidas como Leis de Kepler.

Fundamentado nessas leis, analise as proposições a seguir:

(01) O quociente do cubo do raio médio da órbita pelo quadrado do período de revolução é constante para qualquer planeta do sistema solar.

(02) Quadruplicando-se o raio médio da órbita, o período de revolução de um planeta em torno do Sol octuplica.

(04) Quanto mais próximo do Sol (menor raio médio de órbita) gravitar um planeta, maior será seu período de revolução.

(08) No sistema solar, o período de revolução dos planetas em torno do Sol cresce de Mercúrio para Netuno.

(16) Quando a Terra está mais próxima do Sol (região do periélio), a estação predominante no planeta é o verão.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

6. A **Estação Espacial Internacional (EEI)**, ou em inglês International Space Station (ISS), é um laboratório espacial completamente concluído,

cujas montagens em órbita começaram em 1998 e acabou oficialmente em 8 de junho de 2011. A estação encontra-se em órbita baixa, em altitude próxima de 345 km, o que possibilita ser vista da Terra a olho nu. A espaçonave viaja a uma velocidade escalar média de 27 700 km/h, completando 15,77 órbitas por dia, o que significa um período de translação em torno da Terra de aproximadamente 1h 31 min 18 s.



DPL/Alamy/Fotoarena

// Representação artística da EEI.

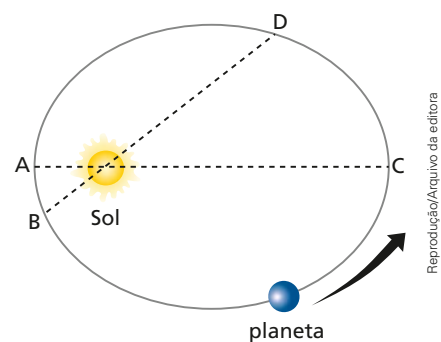
À medida que foi sendo montada em pleno espaço por meio de sucessivas missões americanas, russas e europeias, a EEI foi adquirindo maior massa. Supondo-se que o raio de órbita do laboratório não tenha sido alterado, que modificação no período de translação dessa base sua montagem acarretou?

Exercícios Nível 2

7. Com relação às Leis de Kepler, podemos afirmar que:

- não se aplicam ao estudo da gravitação da Lua em torno da Terra;
- só se aplicam ao sistema solar a que pertencemos;
- aplicam-se à gravitação de quaisquer corpos em torno de uma grande massa central;
- contrariam a Mecânica de Newton;
- não preveem a possibilidade da existência de órbitas circulares.

8. (Unicamp-SP) A figura a seguir representa a órbita descrita por um planeta em torno do Sol. O sentido de percurso está indicado pela seta. Os pontos **A** e **C** são colineares com o Sol, o mesmo ocorrendo com os pontos **B** e **D**. O ponto **A** indica o local de maior aproximação do planeta em relação ao Sol e o ponto **C**, o local de maior afastamento.

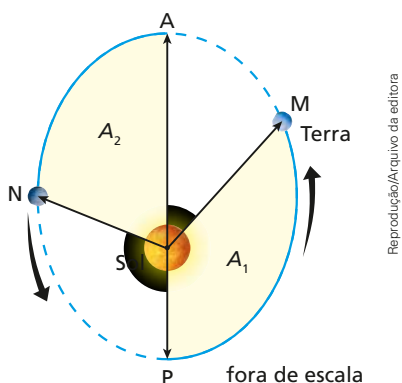


Reprodução/Arquivo da editora

- Em que ponto da órbita o planeta tem velocidade de translação com intensidade máxima? E em que ponto sua velocidade de translação tem intensidade mínima?
- Segundo Kepler, a linha imaginária que liga o planeta ao centro do Sol "varre" áreas iguais em intervalos de tempo iguais. Fundamentado

nessa informação, coloque em **ordem crescente** os intervalos de tempo necessários para o planeta realizar os seguintes percursos: **ABC**, **BCD**, **CDA** e **DAB**.

9. (Unifae-SP) O periélio da órbita de um planeta ao redor do Sol é o ponto dessa órbita em que o planeta está o mais próximo possível do Sol. O afélio é o ponto de maior afastamento do planeta em relação ao sol.



Em 2014, a Terra passou pelo periélio, ponto **P** na figura, no início de janeiro e pelo afélio, ponto **A**, seis meses depois.

Considerando-se que a Terra se move no sentido indicado pelas setas na figura, que as áreas A_1 e A_2 são iguais e que, em 2014, a Terra passou pelo ponto **M** no início do mês de maio é correto afirmar que, nesse mesmo ano, ela passou pelo ponto **N** no início do mês de

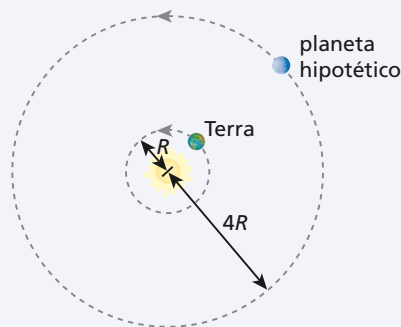
- a) setembro.
- b) dezembro.
- c) novembro.
- d) agosto.
- e) outubro.

10. Considere um planeta hipotético gravitando **ER** em órbita circular em torno do Sol. Admita que o raio da órbita desse planeta seja o quádruplo do raio da órbita da Terra. Nessas condições, qual o período de translação do citado planeta, expresso em anos terrestres?

Resolução:

Sejam:

- r_T : raio da órbita da Terra ($r_T = R$);
- r_H : raio da órbita do planeta hipotético ($r_H = 4R$);
- T_T : período de translação da Terra (ano da Terra);
- T_H : período de translação do planeta hipotético (ano do planeta).



Banco de imagens/Arquivo da editora

Aplicando a 3ª Lei de Kepler (Lei dos períodos) para os dois planetas, temos:

$$\frac{r^3}{T^2} = K_p \text{ (constante de Kepler)}$$

Assim:

- para o planeta hipotético: $\frac{r_H^3}{T_H^2} = K_p$ (I)
- para a Terra: $\frac{r_T^3}{T_T^2} = K_p$ (II)

Comparando (I) e (II), segue que:

$$\frac{r_H^3}{T_H^2} = \frac{r_T^3}{T_T^2} \Rightarrow T_H^2 = \left(\frac{r_H}{r_T}\right)^3 T_T^2$$

Como estabelecemos que $r_H = 4R$ e $r_T = R$, temos:

$$T_H^2 = \left(\frac{4R}{R}\right)^3 T_T^2 \Rightarrow T_H^2 = 64T_T^2 \Rightarrow T_H = 8T_T$$

Logo:

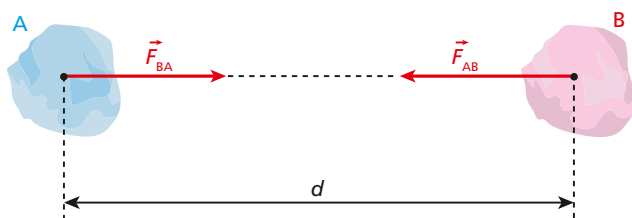
O ano do planeta hipotético é oito vezes o terrestre.

11. Em torno de um planeta fictício gravitam, em órbitas circulares e coplanares, dois satélites naturais: Taurus e Centaurus. Sabendo que o período de revolução de Taurus é 27 vezes o de Centaurus e que o raio da órbita de Centaurus vale R , determine:
- a) o raio da órbita de Taurus;
 - b) o intervalo de valores possíveis para a distância que separa os dois satélites durante seus movimentos em torno do planeta.
12. Admita que o período de revolução da Lua em torno da Terra seja de 27 dias e que o raio da sua órbita valha $60R$, sendo R o raio da Terra. Considere um satélite geoestacionário, desses utilizados em telecomunicações. Em relação ao referido satélite, responda:
- a) Qual o período de revolução?
 - b) Qual o raio de órbita?

4. Lei de Newton da Atração das Massas

No ano de 1665, uma grande epidemia de peste assolou a Inglaterra. Buscando refugiar-se, Isaac Newton interrompeu suas atividades na Universidade de Cambridge, que foi fechada na ocasião, e retornou a Woolsthorpe, localidade em que seus familiares mantinham uma pequena propriedade rural. Foi nesse momento, na tranquilidade do campo, que Newton viveu, aos 23 anos, uma das fases mais fecundas de sua vida como homem de ciência. Apoiado nos trabalhos de seus antecessores (Copérnico, Galileu e Kepler), ele enunciou uma lei de âmbito universal, que trouxe nova luz ao conhecimento da época. A Lei de Newton da Atração das Massas é um dos mais prodigiosos trabalhos de seu autor, constituindo-se em um dos instrumentos que deu sustentação matemática às teorias da Mecânica Clássica.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Considere a figura ao lado, em que os corpos **A** e **B**, de massas m_A e m_B , respectivamente, têm seus centros de gravidade separados por uma distância d .

Newton verificou que os dois corpos se atraem mutuamente, trocando forças de **ação** e **reação**. O corpo **A** age no corpo **B** com uma força \vec{F}_{AB} , enquanto **B** reage em **A** com uma força \vec{F}_{BA} , de mesma intensidade que \vec{F}_{AB} .

Temos, então, que:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad (\text{vetorialmente})$$

$$F_{AB} = F_{BA} \quad (\text{em módulo})$$

As forças trocadas por **A** e **B** têm a mesma natureza daquela responsável pela manutenção da Lua em sua órbita em torno da Terra e também daquela responsável pela queda de corpos nas vizinhanças de um astro: são forças atrativas de **origem gravitacional**.

As intensidades de \vec{F}_{AB} e \vec{F}_{BA} são diretamente proporcionais ao produto das massas m_A e m_B , mas inversamente proporcionais ao quadrado da distância d . Representando por F a intensidade de \vec{F}_{AB} ou de \vec{F}_{BA} , podemos escrever que:

$$F = G \frac{m_A m_B}{d^2}$$

A constante G denomina-se **Constante da Gravitação** e seu valor numérico, num mesmo sistema de unidades, **independe do meio** em que os corpos se encontram.

Foi o físico e químico inglês Henry Cavendish (1731-1810) quem, em 1798, obteve a primeira medida precisa para a Constante da Gravitação. Utilizando uma balança de torção, ele mediu a intensidade da força atrativa entre dois pares de corpos de massas conhecidas e, a partir dos dados obtidos, calculou o valor de G .

Atualmente, o valor aceito para G é:

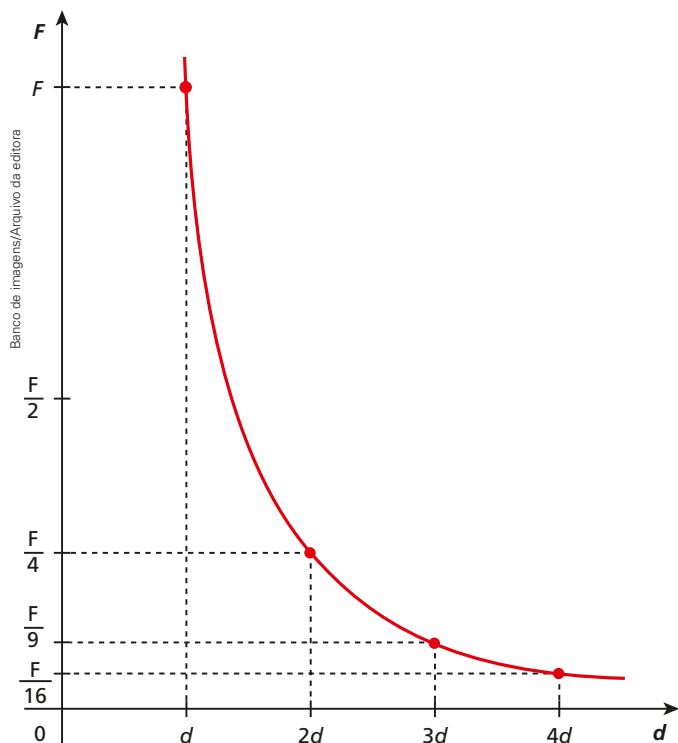
$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

Vamos agora estudar como varia a intensidade (F) da força de atração gravitacional entre dois corpos de massas M e m em função da distância d entre seus centros de gravidade.

Levando em consideração que F é inversamente proporcional ao quadrado de d , temos a tabela:

Distância	d	$2d$	$3d$	$4d$
Força	F	$\frac{F}{4}$	$\frac{F}{9}$	$\frac{F}{16}$

A variação de F em função de d pode ser observada no diagrama abaixo.



// A Terra e a Lua atraem-se gravitacionalmente trocando forças de ação e reação. É devido à força recebida da Terra que a Lua mantém-se em órbita ao seu redor, realizando uma volta completa em, aproximadamente, 27 dias.

NOTA!

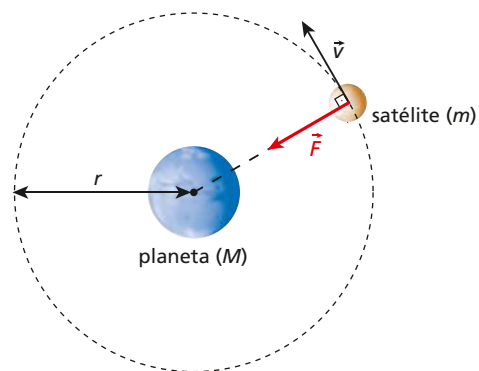
Dois corpos quaisquer sempre interagem gravitacionalmente, atraindo-se. Entretanto, pelo fato de o valor de G ser muito pequeno ($6,67 \cdot 10^{-11}$ no SI), a intensidade da força atrativa só se torna apreciável se pelo menos uma das massas for consideravelmente grande. É por isso que duas pessoas, por exemplo, se atraem gravitacionalmente, mas com forças de intensidade tão pequena que seus efeitos passam despercebidos. A força de atração gravitacional adquire intensidade considerável quando um dos corpos é, por exemplo, um planeta e, além disso, a distância envolvida é relativamente pequena.

5. Satélites

Estudo do movimento de um satélite genérico

Considere a figura ao lado, em que um satélite genérico de massa m gravita em órbita circular em torno de um planeta de massa M . Representemos por r o raio da órbita e por G a Constante da Gravitação.

Como prevê, por exemplo, a **2ª Lei de Kepler**, se a órbita descrita pelo satélite é circular, seu movimento é **uniforme**.



Determinação da velocidade orbital (v)

A força gravitacional que o satélite recebe do planeta é a **resultante centrípeta** no seu movimento circular e uniforme.

$$F = F_{cp}$$

Mas:
$$F = G \frac{Mm}{r^2} \text{ e } F_{cp} = \frac{mv^2}{r}$$

Assim:
$$G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Logo:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Observe que v independe da massa do satélite, sendo inversamente proporcional à raiz quadrada de r .

Determinação do período de revolução (T)

Como o satélite realiza movimento circular e uniforme, temos que:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$$

Sendo $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, segue que:

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^2}{\frac{GM}{r}}}$$

Donde:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Note que T também independe da massa do satélite, sendo proporcional à raiz quadrada do cubo de r . Se um outro satélite, com massa diferente do primeiro, descrevesse a mesma órbita, esta seria percorrida com o mesmo período de revolução.

Ao formular a Lei da Atração das Massas, Newton pôde demonstrar matematicamente a 3ª Lei de Kepler. Seguindo um raciocínio semelhante ao que desenvolvemos para obter a equação do período de revolução, ele confirmou que, para qualquer corpo em órbita de uma grande massa central, o quociente $\frac{r^3}{T^2}$ é **constante**. A constante, denominada constante de Kepler no caso do sistema solar, nada mais é que o quociente $\frac{GM}{4\pi^2}$ e, de fato, só depende da massa central (M).

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow \text{constante}$$

Determinação da velocidade areolar (v_a)

Quando o satélite realiza uma volta completa em sua órbita, seu vetor-posição em relação ao centro do planeta varre uma área $A = \pi r^2$ durante um intervalo de tempo $\Delta t = T$.

Da **2ª Lei de Kepler**, sabemos que:

$$A = v_a \Delta t \Rightarrow v_a = \frac{A}{\Delta t}$$

Com $A = \pi r^2$ e $\Delta t = T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$, calculemos v_a :

$$v_a = \frac{A}{\Delta t} \Rightarrow v_a = \frac{\pi r^2}{2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}}$$

Logo:

$$v_a = \frac{1}{2} \sqrt{GM/r}$$

Da mesma forma que v e T , a velocidade areolar v_a independe da massa do satélite, mas depende do raio da órbita (r) e da massa do planeta (M) que, no caso, faz o papel de "Sol".

Lançamento horizontal com entrada em órbita

Sabe-se que Newton unificou as ideias de Galileu e Kepler ao identificar a órbita da Lua como equivalente ao movimento de um projétil. O raciocínio de Newton foi o seguinte: imagine um canhão no topo de uma montanha muito alta, como mostrado esquematicamente, fora de escala, na figura ao lado.

A trajetória de um projétil disparado pelo canhão vai depender de sua velocidade inicial. Na ausência de gravidade ou resistência do ar, o movimento do projétil seria uma linha reta com velocidade constante, conforme determinado pelo princípio da inércia; mas a gravidade deflete a trajetória do projétil, fazendo-o cair com aceleração radial. Se sua velocidade inicial for pequena, o projétil cairá perto da base da montanha (trajetória **A**). De acordo com essas ideias, é possível imaginar que, se aumentássemos a potência do canhão, no final o projétil teria uma velocidade horizontal suficiente para, simplesmente, "continuar caindo". Embora esteja sendo atraído continuamente para baixo pela força gravitacional, ele nunca vai bater no chão. Ou seja, o projétil entraria em órbita (trajetória **C**), e viraria um satélite da Terra.

Considerando um corpo de massa m em órbita rasante (raio da órbita praticamente igual ao raio R terrestre), calculemos a intensidade v da velocidade de lançamento.

O peso faz o papel de resultante centrípeta, logo:

$$P = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv^2}{R}$$

Daí:

$$v = \sqrt{gR}$$

Sendo $g \cong 10 \text{ m/s}^2$ a aceleração da gravidade nas proximidades da Terra e $R \cong 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ o raio do planeta, vem:

$$v = \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \therefore v = 8,0 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 8,0 \text{ km/s}$$

Em km/h, a velocidade calculada fica expressa por:

$$v = 8,0 \cdot 10^3 \cdot 3,6 \therefore v = 28800 \text{ km/h}$$

A velocidade determinada tem a denominação de **velocidade cósmica primeira**.

Observe que essa velocidade independe da massa do corpo.

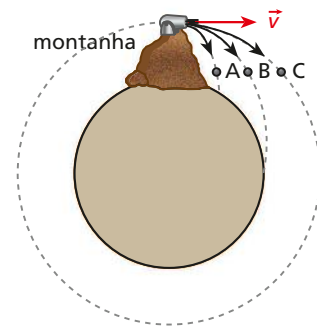
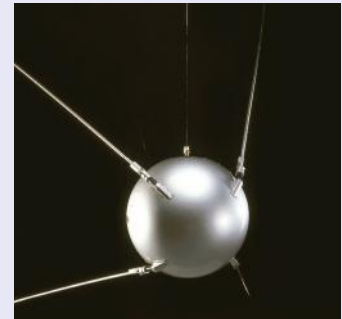


Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala.

Satélites estacionários

A saga dos satélites artificiais teve início em 4 de outubro de 1957 quando foi colocado em órbita o Sputnik, fabricado pela então União Soviética. Esse artefato deu início à corrida espacial, que envolveu as duas superpotências da época, Estados Unidos e União Soviética. A busca pela supremacia espacial, que incluiu o desenvolvimento de satélites “espiões”, exacerbou a “guerra fria” entre as duas nações.

Idealizados por Herman Potočnik (1892-1929) e popularizados por Arthur C. Clarke (1917-2008), inventor e autor de ficção científica inglês, em um artigo de 1945, os satélites estacionários – ou geoestacionários – são utilizados essencialmente para observação de pontos específicos da Terra e em telecomunicações, prestando-se, sobretudo, à telefonia e à transmissão de sinais de TV. Recebem e transmitem micro-ondas de frequências compreendidas entre 1 GHz e 10 GHz. Essas radiações têm a propriedade de atravessar facilmente a ionosfera, tanto em direção ao satélite como no retorno, rumo a antenas captadoras na superfície do planeta.



Science Museum, London / Diomedea

// O Sputnik foi o pioneiro. Lançado pelos soviéticos, esse satélite, de formato esférico, permaneceu 22 dias em órbita baixa e obteve dados importantes a respeito das altas camadas da atmosfera terrestre.

Satélite: a Física nas comunicações

Os satélites estacionários descrevem órbitas circulares contidas no plano equatorial, no mesmo sentido da rotação da Terra, e recebem esse nome por permanecerem sempre parados em relação ao solo. Por exemplo, um satélite geoestacionário sobre a cidade de Macapá, situada na linha do equador, quando visualizado por alguém naquela localidade, sempre será observado imóvel e no zênite (a pino).

O período de translação desses satélites deve ser igual ao período de rotação da Terra, isto é $T = 1 \text{ dia} = 24 \text{ h} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$. Pode-se dizer também que os satélites estacionários deslocam-se em sua órbita com velocidade angular ω igual à velocidade angular de rotação do planeta.

Para permanecer parado em relação à superfície terrestre, um satélite estacionário deve descrever uma órbita de raio R bastante específica. É a chamada órbita Clarke.

Considerando-se a massa da Terra $M \cong 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ e a constante da Gravitação $G \cong 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$, determinemos o raio R da órbita dos satélites estacionários.

A força de atração gravitacional exercida pela Terra desempenha o papel de resultante centrípeta no movimento circular e uniforme do satélite.

$$F = F_{cp} \Rightarrow G \frac{Mm}{R^2} = m \omega^2 R \Rightarrow G \frac{M}{R^2} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R$$

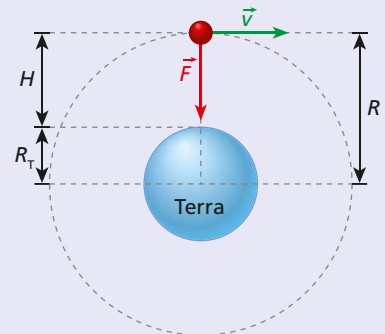
Da qual:

$$R = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}}$$



Mike Agliolo/Latinstock

// Vivemos hoje a era das comunicações. Esse novo tempo é possibilitado pela tecnologia, que coloca à nossa disposição a telefonia, a televisão e a internet. O tráfego de dados eletrônicos é feito em grande parte “via satélite”, como sugere a ilustração acima (com tamanhos e distâncias fora de escala). Ondas eletromagnéticas contendo informações são transmitidas para satélites estacionários que as devolvem para a Terra, dirigindo-as aos locais de recepção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Adotando-se $\pi \cong 3,14$ e substituindo-se os valores de T , G e M , vem:

$$R = \sqrt[3]{\frac{[8,64 \cdot 10^4]^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{4 \cdot (3,14)^2}} \therefore R \cong 42\,265 \text{ km}$$

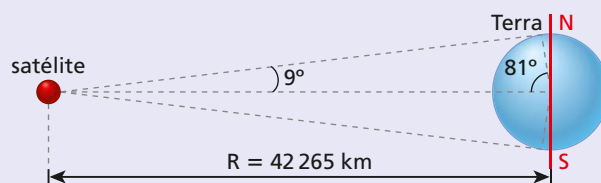
Observando-se que o raio da Terra é $R_T \cong 6\,370 \text{ km}$, a altura do satélite estacionário em relação à superfície terrestre é $H = R - R_T$. Dessa forma, o valor de H fica determinado por:

$$H \cong 42\,265 - 6\,370 \therefore H \cong 35\,895 \text{ km}$$

Tendo em conta os dados oferecidos, calcule em km/h a intensidade da velocidade de translação \vec{v} do satélite estacionário. Verifique que essa velocidade é próxima de 11 059 km/h.

O telescópio Hubble, que descreve uma órbita praticamente circular em torno da Terra, a aproximadamente 600 km de altitude em relação ao solo, desloca-se em sua trajetória com que velocidade em km/h? Utilize os dados disponíveis neste texto, faça os cálculos e verifique que a citada velocidade é cerca de 27 233 km/h.

Levando-se em consideração aspectos puramente geométricos, cada satélite estacionário pode cobrir uma vasta região da superfície terrestre, como pode ser observado na ilustração ao lado, elaborada fora de escala, mas de acordo com os valores mencionados e determinados acima. O território brasileiro, por exemplo, poderia ser abrangido por um único satélite posicionado sobre a região amazônica.



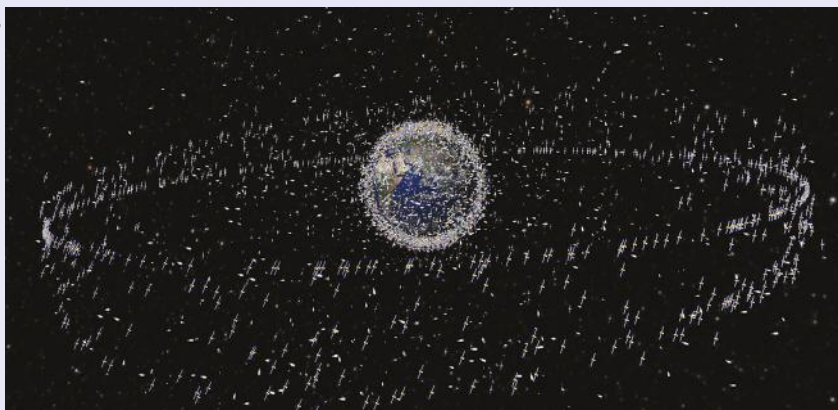
Banco de imagens/Arquivo da editora

Na órbita dos satélites estacionários há mais de uma centena de artefatos em operação, pertencentes a vários países e corporações. Como todos trafegam no mesmo sentido e com a mesma velocidade linear, não ocorrem colisões entre eles. Pequenas correções de órbita podem ser realizadas por meio de autopropulsão controlada – geralmente minifoguetes acoplados a cada equipamento.

Mas satélites em geral têm vida útil determinada. Depois de esgotarem suas baterias e outros sistemas se deteriorarem, transformam-se em lixo espacial.

Atualmente, gravitam ao redor da Terra cerca de 700 000 objetos, que vão de ferramentas e pequenas peças largadas por astronautas da Estação Espacial Internacional até grandes corpos, como satélites e antigas bases espaciais. Alguns desses corpos acabam despencando, acelerados e atraídos pelo campo gravitacional do planeta, mas, para sorte da população, desintegram-se ao adentrar a atmosfera, e os pequenos fragmentos que não se desmancham caem em grande número nos oceanos, mares e regiões desabitadas.

Newscom/Glow Images



/// Nesta ilustração, representa-se o lixo espacial que gravita ao redor da Terra: cerca de 700 000 objetos. Fragmentos de tamanho avantajado, com velocidades da ordem de 10^4 km/h , constituem perigo iminente a satélites e para astronautas em missão fora das respectivas naves espaciais.

Para saber mais:

<www.geocities.ws/saladefisica5/leituras/satelites.html>. Acesso em: 17 jun. 2018.

A Estação Espacial Internacional (EEI)

O fim da Guerra Fria provocou sensíveis distensões nas relações entre Estados Unidos e Rússia, os quais passaram a adotar políticas de cooperação mútua e parcerias tecnológicas. O sonho norte-americano de construir uma base espacial maior e mais moderna que a soviética *Mir*, colocada em órbita em 1986 e notabilizada por abrigar astronautas por longos períodos de tempo, de um ano ou mais, ganhou contornos concretos, já que o ideal envolveu e agregou também outros rincões do planeta.

Associaram-se às duas nações outros quatorze países – o Canadá, o Japão, o Brasil (único país em desenvolvimento a integrar o consórcio) e onze países da Europa –, cada qual com direito de utilização proporcional aos investimentos financeiros aplicados e às contribuições tecnológicas propostas. O grupo elaborou, então, um ambicioso projeto, orçado em cerca de 100 bilhões de dólares, prevendo a construção de uma gigantesca base a ser montada em etapas, denominada Estação Espacial Internacional (EEI). Em novembro de 1998, foram lançados os primeiros módulos, iniciando-se assim uma sucessão de acoplagens e conexões em pleno espaço. Em julho de 2011, a montagem da EEI foi encerrada, restando a partir daí apenas serviços de manutenção e reposição de alguns equipamentos.

A EEI tem cerca de 420 toneladas e abrange uma área equivalente a quase dois campos de futebol, com 110 m de comprimento por 73 m de largura. Ela pode ser vista da Terra, inclusive durante o dia, constituindo-se no corpo mais brilhante no céu depois do Sol e da Lua. Sua órbita, que tem altura média de 407 km em relação à superfície terrestre, é percorrida a cada 1 h 30 min a uma velocidade próxima de 28 000 km/h, o que lhe possibilita percorrer a distância entre Rio de Janeiro e Paris em apenas 20 min.

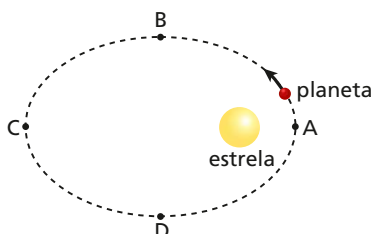
A EEI pode servir de ponto de partida para outras missões de exploração do cosmo. Em razão de sua inclinação de 51,6 graus em relação ao equador, é um posto privilegiado de observação da Terra, já que praticamente a totalidade do planeta (85% da sua área superficial) pode ser visualizada e monitorada. Fenômenos meteorológicos podem ser mais bem avaliados. Cientistas dos países signatários do ousado empreendimento podem realizar experimentos em ambiente de microgravidade, verificando o comportamento de substâncias e organismos vivos – até do próprio ser humano – submetidos a essas condições, o que torna possível o desenvolvimento de novos materiais, procedimentos técnicos, terapias e medicamentos. Será possível criar no futuro próximo tecnologias mais avançadas para diversas áreas, como robótica, computação e telecomunicações.



/// Fotomontagem da EEI elaborada pela Nasa. A estação é um superlaboratório que comporta até sete astronautas de cada vez. Nesta imagem, ela está passando sobre o estreito de Gibraltar.

Exercícios Nível 1

13. (UFRGS-RS) Um planeta descreve trajetória elíptica em torno de uma estrela que ocupa um dos focos da elipse, conforme indica a figura abaixo. Os pontos **A** e **C** estão situados sobre o eixo maior da elipse e os pontos **B** e **D**, sobre o eixo menor.



Reprodução/Arquivo da editora

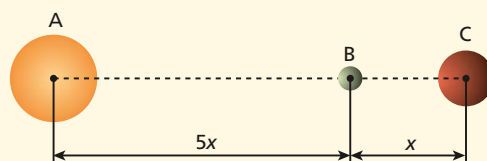
Se t_{AB} e t_{BC} forem os intervalos de tempo para o planeta percorrer os respectivos arcos de elipse, e se \vec{F}_A e \vec{F}_B forem, respectivamente, as forças resultantes sobre o planeta nos pontos **A** e **B**, pode-se afirmar que:

- $t_{AB} < t_{BC}$ e que \vec{F}_A e \vec{F}_B apontam para o centro da estrela.
 - $t_{AB} < t_{BC}$ e que \vec{F}_A e \vec{F}_B apontam para o centro da elipse.
 - $t_{AB} = t_{BC}$ e que \vec{F}_A e \vec{F}_B apontam para o centro da estrela.
 - $t_{AB} = t_{BC}$ e que \vec{F}_A e \vec{F}_B apontam para o centro da elipse.
 - $t_{AB} > t_{BC}$ e que \vec{F}_A e \vec{F}_B apontam para o centro da estrela.
14. Duas partículas de massas respectivamente iguais a M e m estão no vácuo, separadas por uma distância d . A respeito das forças de interação gravitacional entre as partículas, podemos afirmar que:
- têm intensidade inversamente proporcional a d .
 - têm intensidade diretamente proporcional ao produto Mm .
 - não constituem entre si um par ação-reação.
 - podem ser atrativas ou repulsivas.
 - teriam intensidade maior se o meio fosse o ar.

15. (Unifor-CE) A força de atração gravitacional entre dois corpos de massas M e m , separados de uma distância d , tem intensidade F . Então, a força de atração gravitacional entre dois outros corpos de massas $\frac{M}{2}$ e $\frac{m}{2}$, separados de uma distância $\frac{d}{2}$, terá intensidade:

- $\frac{F}{4}$
- $\frac{F}{2}$
- F
- $2F$
- $4F$

16. Considere uma estrela **A** e dois planetas **B** e **C** alinhados em determinado instante, conforme indica a figura. A massa de **A** vale $200M$ e as massas de **B** e **C**, M e $2M$, respectivamente.

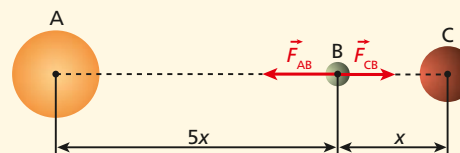


Banco de imagens/Arquivo da editora

Sendo dada a distância x e a Constante da Gravitação (G), calcule, no instante da figura, a intensidade da força resultante das ações gravitacionais de **A** e **C** sobre **B**.

Resolução:

O planeta **B** é atraído gravitacionalmente pela estrela **A** e pelo planeta **C**, recebendo, respectivamente, as forças \vec{F}_{AB} e \vec{F}_{CB} , representadas no esquema abaixo:



Banco de imagens/Arquivo da editora

As intensidades de \vec{F}_{AB} e de \vec{F}_{CB} ficam determinadas pela Lei de Newton da Atração das Massas.

$$F_{AB} = G \frac{200M \cdot M}{(5x)^2} \Rightarrow F_{AB} = 8G \frac{M^2}{x^2}$$

$$F_{CB} = G \frac{2M \cdot M}{x^2} \Rightarrow F_{CB} = 2G \frac{M^2}{x^2}$$

A intensidade (F) da força resultante das ações gravitacionais de **A** e **C** sobre **B** é calculada por:

$$F = F_{AB} - F_{CB} \Rightarrow F = 8G \frac{M^2}{x^2} - 2G \frac{M^2}{x^2}$$

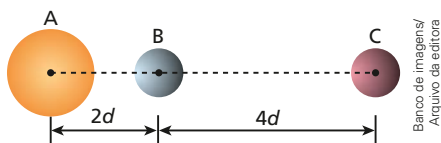
Logo:

$$F = 6G \frac{M^2}{x^2}$$

Nota:

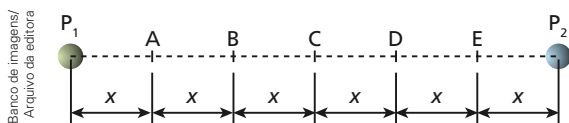
- A força resultante calculada é dirigida para a estrela **A**.

17. Em determinado instante, três corpos celestes **A**, **B** e **C** têm seus centros de massa alinhados e distanciados, conforme mostra o esquema abaixo:



Sabendo que as massas de **A**, **B** e **C** valem, respectivamente, $5M$, $2M$ e M , determine a relação entre as intensidades das forças gravitacionais que **B** recebe de **A** e de **C**.

18. Na situação esquematizada na figura, os corpos **P**₁ e **P**₂ estão fixos nas posições indicadas e suas massas valem $8M$ e $2M$ respectivamente.



Deve-se fixar no segmento que une **P**₁ a **P**₂ um terceiro corpo **P**₃, de massa M , de modo que a força resultante das ações gravitacionais dos dois primeiros sobre este último seja **nula**. Em que posição deve-se fixar **P**₃?

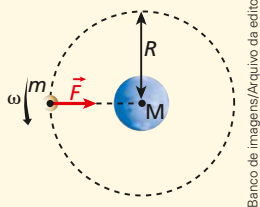
- a) **A** b) **B** c) **C** d) **D** e) **E**

19. Um satélite de massa m descreve uma órbita circular de raio R em torno de um planeta de massa M . Sendo G a Constante da Gravitação, responda:

- a) Qual a velocidade escalar angular ω do satélite em seu movimento de translação em torno do planeta?
b) O valor de ω depende de m ?

Resolução:

- a)



A força gravitacional \vec{F} desempenha a função de **resultante centrípeta** no movimento circular e uniforme do satélite.

$$F = F_{cp}$$

Sendo $F = G \frac{Mm}{R^2}$ e $F_{cp} = m\omega^2 R$, vem:

$$G \frac{Mm}{R^2} = M\omega^2 R \Rightarrow \frac{GM}{R^3} = \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

- b) O valor de ω **independe** de m .

Nota:

- Satélites diferentes percorrendo uma mesma órbita circular não colidem entre si, já que suas velocidades escalares angulares são iguais.

20. Saturno é o sexto planeta do sistema solar, em ordem de distâncias crescentes ao Sol, e o segundo maior em dimensões, perdendo apenas para Júpiter. Hoje, são conhecidos mais de sessenta satélites naturais de Saturno – luas –, sendo que o maior deles, Titã, está a uma distância média de 1 200 000 km de Saturno e tem um período de translação de aproximadamente 16 dias terrestres ao redor do planeta.



// Ilustração fora de escala e em cores fantasia.

Tétis é outro dos maiores satélites naturais de Saturno, apresentando-se a uma distância média de 300 000 km do planeta.

Considerando-se os dados contidos no texto, responda às duas questões a seguir:

- a) Qual o período de translação aproximado de Tétis ao redor de Saturno, em dias terrestres?
b) Sendo v_{Te} o módulo da velocidade tangencial de Tétis ao longo de sua órbita em torno de Saturno e v_{Ti} o módulo da velocidade tangencial de Titã, qual o valor da relação $\frac{v_{Te}}{v_{Ti}}$?

21. (Fuvest-SP) Um satélite artificial move-se em órbita circular ao redor da Terra, ficando permanentemente sobre a cidade de Macapá.

- a) Qual o período de revolução do satélite em torno da Terra?
b) Por que o satélite não cai sobre a cidade?

- 22.** Sabemos que a Constante da Gravação vale, **E.R.** aproximadamente, $6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$. Nessas condições, qual é a ordem de grandeza, em newtons, da força de atração gravitacional entre dois navios de 200 toneladas de massa cada um, separados por uma distância de 1,0 km?
 a) 10^{-11} b) 10^{-6} c) 10^{-1} d) 10^5 e) 10^{10}

Resolução:

De acordo com a Lei de Newton da Atração das Massas, a intensidade da força de atração gravitacional entre os dois navios é dada por:

$$F = G \frac{Mm}{d^2} \Rightarrow F = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{(200 \cdot 10^3)^2}{(1,0 \cdot 10^3)^2}$$

Da qual:

$$F = 2,68 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Portanto, a ordem de grandeza da força de atração gravitacional é 10^{-6} .

Resposta: alternativa **b**.

- 23.** Leia o texto a seguir.

[...]

Durante o Congresso Espacial Mundial, que começou na última quinta-feira e vai até sábado, em Houston, EUA, a agência espacial americana apresentou o próximo item em sua lista de prioridades aeronáuticas: uma nova base no espaço.

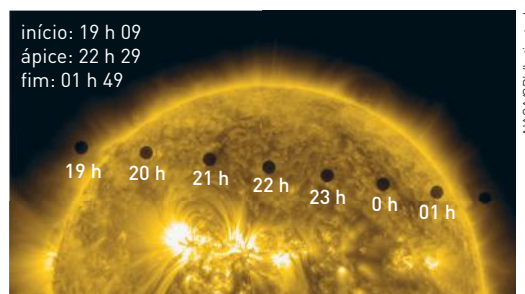
[...]

A base, apelidada de L_1 Gateway, ficaria mais de 800 vezes mais distante da Terra que a ISS. Sua localização seria no primeiro dos cinco pontos de Lagrange do sistema Terra-Lua (daí o “ L_1 ” do nome). O ponto de Lagrange (ou de liberação), nesse caso, é um local do espaço em que a gravidade da Terra e da Lua se compensam, fazendo com que um objeto ali localizado fique mais ou menos no mesmo lugar (com relação à Terra e à Lua) o tempo todo.

NOGUEIRA, S. Nasa quer construir base próxima à Lua. Disponível em: <www1.folha.uol.com.br/fsp/ciencia/fe1510200201.htm>. Acesso em: 06 jul. 2018.

Considere que a massa da Terra seja cerca de 81 vezes a massa da Lua. Sendo D a distância entre os centros de massa desses dois corpos celestes, a distância d entre o local designado para a base L_1 Gateway e o centro da Terra deve corresponder a que porcentagem de D ?

- 24.** No dia 5 de junho de 2012 pôde-se observar de determinadas regiões da Terra o fenômeno celeste denominado **Trânsito de Vênus**, cuja próxima ocorrência, conforme previsões astronômicas, se dará somente em 2117. Tal fenômeno só é possível devido às órbitas de Vênus e da Terra em torno do Sol serem praticamente coplanares e porque o raio da órbita de Vênus (0,724 UA) é menor que o raio da órbita da Terra (1,000 UA).



Admitindo-se circulares as órbitas de Vênus e da Terra em torno do Sol e considerando-se que a Terra percorre sua órbita com velocidade tangencial e módulo muito próximo de 30,0 km/s, com base também nas informações da ilustração, pede-se determinar:

- o módulo da velocidade tangencial com que Vênus percorre sua órbita;
- o comprimento do arco de órbita percorrido por Vênus em seu trânsito diante do Sol. Despreze nesse cálculo os efeitos de paralaxe inerentes ao movimento orbital da Terra.

- 25.** Considere o raio médio da órbita de Plutão **E.R.** (planeta-anão) cem vezes o raio médio da órbita de Mercúrio e 40 vezes o raio médio da órbita da Terra. Sabendo que a duração aproximada do ano de Mercúrio é de três meses terrestres e que a velocidade orbital da Terra tem intensidade igual a 30 km/s, determine:
 a) a duração do ano de Plutão expressa em anos terrestres;
 b) a intensidade da velocidade orbital de Plutão.

Resolução:

a) Sejam:

R_T : raio médio da órbita da Terra;

R_M : raio médio da órbita de Mercúrio;

R_p : raio médio da órbita de Plutão

($R_p = 100R_M$ e $R_p = 40R_T$);

T_T : período orbital da Terra;

T_M : período orbital de Mercúrio

$$\left(T_M = \frac{T_T}{4} = \frac{1}{4} \text{ ano} \right);$$

T_p : período orbital de Plutão.

Aplicando a **3ª Lei de Kepler**, temos:

$$\frac{R_p^3}{T_p^2} = \frac{R_M^3}{T_M^2} \Rightarrow T_p^2 = \left(\frac{R_p}{R_M} \right)^3 T_M^2$$

$$T_p^2 = \left(\frac{100R_M}{R_M} \right)^3 \left(\frac{1}{4} \right)^2 \therefore T_p = 250 \text{ anos}$$

Logo:

O ano de Plutão é 250 vezes o terrestre.

- b) A velocidade orbital v_p de Plutão (de massa m_p) é obtida igualando a resultante centrípeta à força gravitacional exercida pelo Sol (de massa M):

$$F_{cp} = F \Rightarrow m_p \frac{v_p^2}{R_p} = G \frac{Mm_p}{R_p^2} \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{GM}{R_p}}$$

O mesmo raciocínio pode ser empregado para obter a velocidade orbital da Terra:

$$F_{cp} = F \Rightarrow m_T \frac{v_T^2}{R_T} = G \frac{Mm_T}{R_T^2} \Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{GM}{R_T}}$$

Dividindo as duas expressões e sabendo que a velocidade orbital da Terra é 30 km/s, temos:

$$\frac{v_p}{v_T} = \frac{\sqrt{\frac{GM}{R_p}}}{\sqrt{\frac{GM}{R_T}}} \Rightarrow v_p = v_T \sqrt{\frac{R_T}{R_p}}$$

$$v_p = 30 \cdot \sqrt{\frac{R_T}{40R_T}} \therefore v_p \cong 4,7 \text{ km/s}$$

26. (UFRJ) A tabela a seguir ilustra uma das leis do movimento dos planetas: a razão entre o cubo da distância média D de um planeta ao Sol e o quadrado do seu período de revolução T em torno do Sol é constante (3ª Lei de Kepler). O período é medido em anos e a distância em unidades astronômicas (UA). A unidade astronômica é igual à distância média entre o Sol e a Terra. Suponha que o Sol esteja no centro comum das órbitas circulares dos planetas.

Planeta	T^2	D^3
Mercúrio	0,058	0,058
Vênus	0,378	0,378
Terra	1,00	1,00
Marte	3,5	3,5
Júpiter	141	141
Saturno	868	868

Um astrônomo amador supõe ter descoberto um novo planeta no sistema solar e o batiza como planeta **X**. O período estimado do planeta **X** é de 125 anos. Calcule:

- a distância do planeta **X** ao Sol em UA;
- a razão entre o módulo da velocidade orbital do planeta **X** e o módulo da velocidade orbital da Terra.

27. (Fuvest-SP) Um anel de Saturno é constituído por partículas girando em torno do planeta em órbitas circulares.

- Em função da massa M do planeta, da Constante da Gravitação Universal G e do raio de órbita r , calcule a intensidade da velocidade orbital de uma partícula do anel.
- Sejam R_i o raio interno e R_e o raio externo do anel. Qual a razão entre as velocidades angulares ω_i e ω_e de duas partículas, uma da borda interna e outra da borda externa do anel?

28. Nos Estados Unidos, é possível simular dentro de um avião a sensação de imponderabilidade – ausência aparente de peso – como a sentida por astronautas da EEI em movimento orbital em torno da Terra. Para isso, foi adaptada uma aeronave que realiza uma subida vertiginosa e, ao atingir determinada altura, é projetada em uma trajetória praticamente parabólica, semelhante à de um pequeno objeto lançado obliquamente sob a ação exclusiva da gravidade. Durante a descida, que dura alguns poucos segundos, privilegiados (ou ousados) passageiros flutuam dentro do avião como se, subitamente, o campo gravitacional tivesse sido “desligado”. Veja a imagem a seguir.



Navespaça/Air Zero

Como você explica essa “levitação”?

6. Estudo do campo gravitacional de um astro

Linhas de força do campo gravitacional

De acordo com os preceitos da Física Clássica, toda massa tem capacidade de criar em torno de si um campo de forças, denominado **campo gravitacional**. Uma estrela, por exemplo, tem ao seu redor um campo gravitacional, o mesmo ocorrendo com um simples asteroide.

A intensidade do campo gravitacional em determinado ponto aumenta com a massa geradora do campo e diminui com a distância até essa massa, como verificaremos mais adiante em nosso estudo.

O campo gravitacional é **atrativo**, já que partículas submetidas exclusivamente aos seus efeitos são “puxadas” para junto da massa geradora.

Linhas de força de um campo gravitacional são linhas que representam, em cada ponto, a orientação da força que atua em uma partícula (massas de prova) submetida exclusivamente aos efeitos desse campo.

Se o astro considerado for esférico e homogêneo, as linhas de força do seu campo gravitacional terão a direção do raio da esfera em cada ponto (linhas radiais), sendo orientadas para o centro do astro, como representa a figura ao lado.

A grandeza física que caracteriza um campo gravitacional é o **vetor aceleração da gravidade** (\vec{g}), que é a aceleração adquirida por uma partícula deixada exclusivamente aos efeitos do campo.

A aceleração da gravidade tem a mesma direção e o mesmo sentido das linhas de força, isto é, é radial ao astro e dirigida para o seu centro.

Cálculo da intensidade da aceleração da gravidade num ponto externo ao astro

Vamos admitir um astro esférico e homogêneo de raio R e massa M . Nesse caso, podemos considerar toda a sua massa concentrada em seu centro geométrico.

Um corpo de massa m , situado a uma altura h em relação à sua superfície, receberá uma força de atração gravitacional \vec{F} , conforme representa a figura ao lado.

Sendo G a Constante da Gravitação, podemos expressar a intensidade de \vec{F} pela **Lei de Newton da Atração das Massas**:

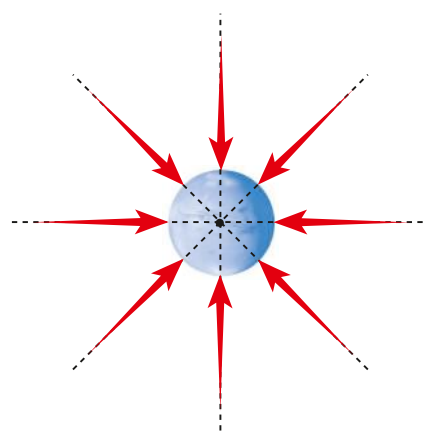
$$F = G \frac{Mm}{d^2} \Rightarrow F = G \frac{Mm}{(R + h)^2} \quad (I)$$

Representando, porém, por g a intensidade da aceleração da gravidade no ponto em que o corpo se encontra, também podemos expressar a intensidade de \vec{F} por:

$$F = mg \quad (II)$$

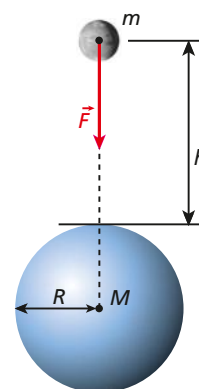
Comparando (II) e (I), temos:

$$mg = G \frac{Mm}{(R + h)^2} \Rightarrow g = G \frac{M}{(R + h)^2}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

/// Nesta ilustração, a redução na espessura das linhas de força representa a diminuição da intensidade do campo gravitacional com o aumento da distância à massa geradora.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O resultado anterior evidencia que g **independe da massa de prova** (m), dependendo apenas da massa geradora do campo (M) e da distância $d = R + h$, como mencionamos anteriormente.

Como exemplo, observe, na tabela abaixo, a variação da intensidade da aceleração da gravidade na Terra em função da altitude.

NOTA!

O valor $0,00274 \text{ m/s}^2$, na altitude de $380\,000\,000 \text{ m}$, corresponde aproximadamente, à intensidade da aceleração da gravidade terrestre nas vizinhanças da Lua.

Altitude (m)	$g \text{ (m/s}^2\text{)}$	Altitude (m)	$g \text{ (m/s}^2\text{)}$
0	9,806	32 000	9,71
1 000	9,803	100 000	9,60
4 000	9,794	500 000	8,53
8 000	9,782	1 000 000	7,41
16 000	9,757	380 000 000	0,00271

Cálculo da intensidade da aceleração da gravidade na superfície do astro

Retomemos a expressão anterior:

$$g = G \frac{M}{(R + h)^2}$$

Desprezando os efeitos ligados à rotação e observando que sobre a crosta do astro $h = 0$, a intensidade da aceleração da gravidade na superfície (g_0) fica dada por:

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}$$

Na tabela ao lado, estão relacionados os valores aproximados das acelerações da gravidade nas superfícies dos planetas do sistema solar.

Na superfície do Sol, g_0 vale $274,568 \text{ m/s}^2$ e na superfície da Lua, $1,667 \text{ m/s}^2$.

Planeta	$g_0 \text{ (m/s}^2\text{)}$
Mercúrio	3,78
Vênus	8,6
Terra	9,78
Marte	3,72
Júpiter	22,88
Saturno	9,05
Urano	7,7
Netuno	11,0

Fonte: <www.if.ufrgs.br/oei/solar/solar04/solar04.html>. Acesso em: 23 jul. 2018.

Ampliando o olhar

A humanidade pisa na Lua

O dia 20 de julho de 1969 entrou para a história como um marco nas conquistas espaciais. Pela primeira vez um ser humano, representado pelo astronauta norte-americano Neil Armstrong, colocava os pés na Lua, coroando uma era de ousadia e evoluções. O próprio Armstrong reverenciou a importância daquele momento, proferindo uma frase lapidar: “Este é um pequeno passo para um homem, mas um grande passo para a humanidade”. Na Lua, a aceleração da gravidade tem valor igual a um sexto do valor registrado na Terra, aproximadamente, o que permitiu aos astronautas suportarem seus trajes e equipamentos com tranquilidade. Há registros em vídeo de alguns deles saltitando com extrema leveza, como que desfrutando de forma descontraída da baixa gravidade.



Neil Armstrong saindo do módulo, instantes antes de pisar em solo lunar.

Brasileiro foi ao espaço

O tenente-coronel aviador Marcos César Pontes tornou-se o primeiro brasileiro a ir ao espaço. Em março de 2006, após cerca de oito anos em treinamento divididos entre a Agência Espacial Norte-Americana (Nasa) e a Agência Espacial Russa (Roscosmos), ele foi conduzido à EEI pela nave russa Soyuz TMA-8.

O astronauta executou oito experimentos científicos solicitados por universidades e institutos de pesquisa, cujos resultados iniciais foram apresentados em seminário realizado em novembro do mesmo ano.

Mais informações em: <www.marcospontes.com>.



Tuca Vieira/Folhapress

Cálculo da intensidade da aceleração da gravidade num ponto interno ao astro

A intensidade da aceleração da gravidade num ponto interno, distante r do centro do astro, é calculada admitindo-se que esse ponto pertença a uma superfície esférica de raio r . Essa superfície envolve uma massa m , evidentemente, menor que a massa M do astro.

Sobre a superfície de raio r , temos:

$$g = G \frac{m}{r^2} \quad (I)$$

Suponha que o astro tenha massa específica uniforme e igual a μ . Sendo V o volume da esfera de raio r , podemos escrever que:

$$\mu = \frac{m}{V}$$

O volume V , porém, é expresso por $V = \frac{4}{3} \pi r^3$. Logo:

$$\mu = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi r^3} \Rightarrow m = \frac{4}{3} \pi \mu r^3 \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$g = \frac{G}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi \mu r^3 \Rightarrow g = \frac{4}{3} \pi \mu G r$$

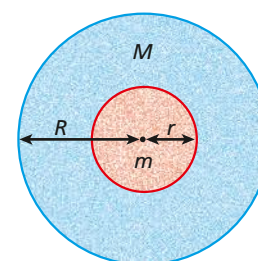
Fazendo $\frac{4}{3} \pi \mu G = K$, em que K é uma constante, segue que:

$$g = K r$$

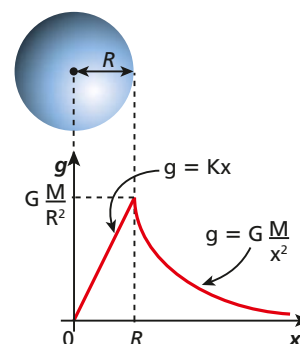
Concluimos, então, que, para pontos internos ao astro, o valor de g é **diretamente proporcional** à distância do ponto considerado ao centro do astro.

Gráfico de g em função de x

A intensidade da aceleração da gravidade varia em função da distância x ao centro do astro, conforme representa o gráfico ao lado.



Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

Por que estrelas e planetas são praticamente esféricos?

Imagine uma situação na qual você utilize um pouco de massa de modelar, que geralmente é embalada em forma de bastões cilíndricos, para fazer uma bola maciça. Como você deverá proceder para deixar o aglomerado de massa com formato que pareça o máximo possível com uma esfera?

Certamente, você irá comprimir o material em todas as direções, sempre exercendo esforços radiais, no sentido do centro do objeto em forma de esfera que pretende compor. Serão essas forças de pressão que tornarão a pelota “redondinha”, com formato razoavelmente esférico.

Com estrelas e planetas, ocorre efeito semelhante. A diferença é que as forças que tornam esses corpos praticamente esféricos têm origem gravitacional. Os astros de grande porte – estrelas, planetas, satélites, etc. – são muito massivos e criam ao seu redor campos gravitacionais intensos, capazes de reter qualquer incremento de massa. A massa incorporada é puxada em direção ao centro gravitacional, o que dá a esses astros sua forma esférica peculiar, de menor energia.

Observe na imagem ao lado um eclipse total ou anular do Sol, situação em que a Lua se coloca entre o Sol e a Terra, obstruindo a visualização plena da estrela. O halo luminoso em torno do círculo negro é a coroa solar que se estende muito além da superfície do Sol. A forma esférica manifestada pela Lua é fruto da ação de forças gravitacionais do próprio astro que atraem toda a sua massa radialmente no sentido de compactá-la no centro de gravidade.

Corpos celestes menores, como cometas e asteroides, não apresentam formato esférico por não terem

massa suficiente para produzir campos gravitacionais expressivos. Suas formas dependem do material rochoso que os constitui, da temperatura em que foram formados, além de outros fatores.

O asteroide Ida, por exemplo, é um dos maiores do sistema solar. Sua forma não esférica se deve principalmente à sua pequena massa, se comparada à dos grandes corpos celestes. O campo gravitacional desse asteroide é insuficiente para moldar um formato esférico.

Buracos negros

O termo **Universo** é a chave que remete nossa imaginação a uma imensidão sem fim, em que pontos e regiões brilhantes se sobressaem, contrastando com um fundo negro ilimitado que alguns chamam de infinito.

Os pontos brilhantes que adornam o céu escuro são, na maioria, estrelas, que apresentam um ciclo natural semelhante ao dos seres vivos, de nascimento, vida e morte.

Nuvens de gases e poeira cósmica, constituídas principalmente por hidrogênio, começam a se aglomerar movidas por forças de atração gravitacional. É nesse momento que tem início o surgimento de uma nova estrela, cujo núcleo vai adquirindo temperaturas elevadíssimas, da ordem de milhões de graus Celsius. Essa elevação da temperatura desencadeia o processo de fusão nuclear que transforma o hidrogênio em hélio. Dessa forma, quantidades fantásticas de energia radiante são lançadas no espaço, propagando-se com a velocidade da luz ($c = 300\,000\text{ km/s}$).

A Terra recebe do Sol, a estrela mais próxima, uma quantidade de energia equivalente, em média, a 1,92 caloria por minuto por centímetro quadrado de área perpendicular aos raios solares. Só para se ter uma ideia da energia liberada pelo Sol, seriam necessárias todas as reservas de petróleo, gás natural e carvão da Terra para fornecer um milionésimo do que o Sol produz em 1 segundo.

CHEN HAYING/XINHUA/AP



/// Eclipse total do Sol. Longyearbyen, Noruega. Março de 2015.



/// Asteroide Ida e sua “lua” em miniatura observados pela sonda Galileu.

NASA

Essa energia radiante, entretanto, é emanada pelas estrelas durante um intervalo de tempo limitado. Quando o combustível nuclear – o hidrogênio – se esgota, elas passam a se compactar, desabando sobre si mesmas, pela ação de forças de origem gravitacional, e concentrando suas enormes massas em volumes extremamente pequenos, se comparados aos volumes originais.

Dependendo de sua massa, uma estrela poderá transformar-se em um **buraco negro** – um corpo hipercompactado, que tem sua gigantesca quantidade de matéria aglomerada em um volume muito reduzido.

O Sol tem uma massa muito pequena para se transformar em um buraco negro. Seu colapso como estrela, previsto para daqui a 5 bilhões de anos, deverá conduzi-lo à condição de anã branca, que é outro tipo de corpo estelar. Os buracos negros mais comuns têm massa equivalente à de dez sóis.

Recordemos que a intensidade da aceleração da gravidade na superfície de um astro (g), desprezada sua rotação, é dada em função de sua massa (M) e de seu raio (R) por:

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

em que G é a Constante da Gravitação.

Como no caso dos buracos negros M é muito grande e R é muito pequeno, g resulta muito grande, o que produz em torno desses corpos campos gravitacionais extremamente intensos, que influem significativamente em todas as massas das proximidades, inclusive na luz, que é sensivelmente desviada pela sua atração.

Quando lançamos uma pedra verticalmente para cima, a partir da superfície de um astro, ela atinge determinada altura máxima e, depois de certo intervalo de tempo, retorna praticamente ao ponto de partida. Se repetirmos o lançamento imprimindo à pedra uma velocidade inicial maior, ela se elevará a uma altura maior, mas ainda voltará ao solo, atraída gravitacionalmente pelo astro. Se lançarmos a pedra sucessivamente com velocidades cada vez maiores, chegaremos a situações em que ela “escapará da gravidade do astro”, não mais retornando à sua superfície.

A velocidade de escape na Lua, por exemplo, é de 2,4 km/s; na Terra, de 11,2 km/s, e no Sol, de 620 km/s. Nos buracos negros, a velocidade de escape supera a barreira dos 300 000 km/s; por isso, nem mesmo a luz consegue escapar da sua atração. É por esse motivo que esses corpos celestes são invisíveis, tendo sua presença registrada por evidências observacionais indiretas, como sua expressiva influência gravitacional manifestada nos arredores.

Se o Sol tivesse volume igual ao da Terra, a velocidade de escape desse astro fictício seria de 6500 km/s. Para que a Terra se transformasse em um buraco negro, sua massa deveria ser compactada até volumes comparáveis aos de uma bola de gude.

Apesar de ser um tema muito discutido nos dias de hoje, os buracos negros já vêm sendo estudados desde o século XVIII: o astrônomo inglês John **Michell** (1724-1793) analisou a possibilidade da existência desses corpos, o mesmo ocorrendo com o matemático francês Pierre-Simon de **Laplace** (1749-1827).

Atualmente, todas as teorias astronômicas utilizam essa concepção, dotando o Universo desses polos invisíveis, verdadeiros sorvedouros de matéria, que desafiam a imaginação e levam o ser humano a se questionar em busca de explicações.

// Galáxia espiral Messier 101. Essa imagem na verdade é resultado de uma fotomontagem composta de 51 fotografias individuais obtidas pelo telescópio Hubble e elementos de imagens obtidas a partir do solo terrestre. As galáxias são repletas de buracos negros.



SPL /Diomedea

7. Variação aparente da intensidade da aceleração da gravidade devido à rotação do astro

Considere um astro esférico e homogêneo de raio R e massa M em rotação uniforme em torno de um eixo imaginário yy' , com velocidade angular igual a ω .

Um corpo de prova de massa m , colocado sobre a superfície do astro em um ponto A de latitude φ , descreverá uma circunferência de raio r e centro no eixo yy' , com velocidade angular ω .

Em A , o corpo de prova ficará sujeito à força de atração gravitacional \vec{F} , que admite duas componentes, \vec{F}_{cp} e \vec{P} , conforme representa a figura ao lado.

A componente \vec{F}_{cp} é a **força centrípeta** necessária para que o corpo realize o movimento circular e uniforme acompanhando a rotação do astro.

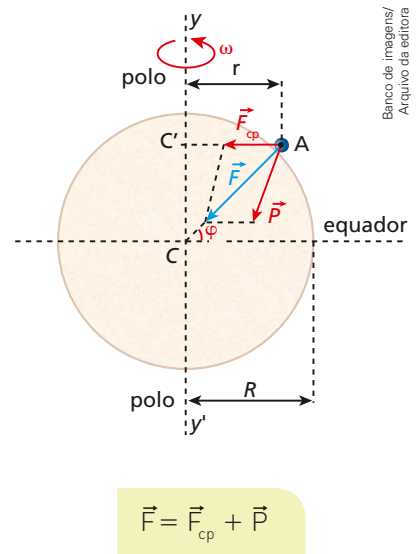
Como vimos no Tópico 3 desta unidade, a intensidade de \vec{F}_{cp} é dada por:

$$F_{cp} = m\omega^2 r$$

A componente \vec{P} , por sua vez, traduz o **peso aparente** do corpo, isto é, a indicação que seria fornecida por um dinamômetro situado no ponto A , caso o corpo de prova fosse depurado nesse aparelho.

$$P = mg$$

em que g é o valor aparente da aceleração da gravidade no ponto A .



Corpo de prova no equador do astro (latitude $\varphi = 0^\circ$)

Neste caso, $r = R$ e a intensidade da força centrípeta será **máxima**. Isso significa que o peso aparente terá intensidade **mínima**, já que a força de atração gravitacional tem intensidade constante.

Vamos calcular, então, o valor aparente da aceleração da gravidade no equador do astro (g_e):

$$\vec{F} = \vec{F}_{cp} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{F} - \vec{F}_{cp}$$

Como nesse caso os vetores \vec{F} , \vec{F}_{cp} e \vec{P} têm mesma direção e mesmo sentido, vem:

$$F = F_{cp} + P \Rightarrow P = F - F_{cp}$$

$$mg_e = G \frac{Mm}{R^2} - m\omega^2 R$$

Cancelando m , obtemos:

$$g_e = G \frac{M}{R^2} - \omega^2 R$$

Destaquemos que, se o valor de ω for aumentado, g_e **diminuirá**.

Se o astro for a Terra, por exemplo, pode-se verificar que, se a velocidade angular de rotação do planeta fosse aproximadamente 17 vezes a atual, os corpos situados na linha do equador aparentariam **peso nulo**.

Corpo de prova nos polos do astro (latitude $\varphi = 90^\circ$ norte ou 90° sul)

Neste caso, $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ e a força centrípeta será **nula**. Isso significa que o peso aparente terá intensidade **máxima**, igual à intensidade da força de atração gravitacional.

Vamos calcular, então, o valor aparente da aceleração da gravidade nos polos do astro (g_p):

$$\vec{P} = \vec{F}$$

Ou, em módulo: $P = F \Rightarrow mg_p = G \frac{Mm}{R^2}$

Donde: $g_p = G \frac{M}{R^2}$

Nos polos, como não há influência do movimento de rotação do astro, podemos dizer que o valor aparente da aceleração da gravidade **coincide com o valor real**.

Devido à forma não esférica da Terra, e também por causa da rotação do planeta, a aceleração da gravidade em sua superfície sofre variações. Na tabela abaixo, aparecem alguns valores de g medidos ao nível do mar em pontos de diferentes latitudes.

Latitude (graus)	g (m/s ²)	Latitude (graus)	g (m/s ²)
0	9,780	50	9,811
10	9,782	60	9,819
20	9,786	70	9,826
30	9,793	80	9,831
40	9,802	90	9,832

Fonte: <www.if.ufrgs.br/mpef/mef008/mef008_02/Paulo/Trabalho/campo.html>. Acesso em: 23 jul. 2018.

Exercícios Nível 1

29. Leia com atenção os quadrinhos:



Considere as proposições apresentadas a seguir:

- (01) Num planeta em que a aceleração da gravidade for menor que a da Terra, o gato Garfield apresentará um peso menor.
 - (02) Num planeta em que a aceleração da gravidade for menor que a da Terra, o gato Garfield apresentará uma massa menor.
 - (04) Num planeta de massa maior que a da Terra, o gato Garfield apresentará um peso maior.
 - (08) Num planeta de raio maior que o da Terra, o gato Garfield apresentará um peso menor.
 - (16) Num planeta de massa duas vezes a da Terra e de raio duas vezes o terrestre, o gato Garfield apresentará um peso equivalente à metade do apresentado na Terra.
 - (32) O peso do gato Garfield será o mesmo, independentemente do planeta para onde ele vá.
- Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

30. Sabe-se que a massa da Terra é cerca de 81 vezes a massa da Lua e que o raio da Terra é aproximadamente 3,7 vezes o da Lua. Desprezando os efeitos ligados à rotação, calcule o módulo da aceleração da gravidade na superfície da Lua (g_L) em função do módulo da aceleração da gravidade na superfície da Terra (g_T).

Resolução:

Podemos calcular g_L por:

$$g_L = G \frac{M_L}{R_L^2} \quad (I)$$

Podemos calcular g_T por:

$$g_T = G \frac{M_T}{R_T^2} \quad (II)$$

Dividindo as equações (I) e (II), vem:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{G \frac{M_L}{R_L^2}}{G \frac{M_T}{R_T^2}} \Rightarrow \frac{g_L}{g_T} = \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{R_L} \right)^2$$

Sendo $M_T = 81M_L$ e $R_T = 3,7R_L$, vem:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{1}{81} (3,7)^2 \Rightarrow g_L \cong \frac{1}{6} g_T$$

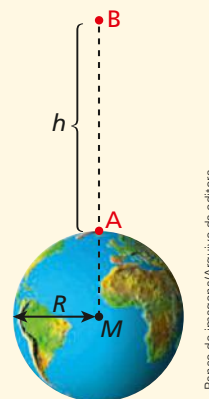
Na superfície lunar, o módulo da aceleração da gravidade é aproximadamente um sexto daquele determinado na superfície terrestre.

31. Em um planeta **X**, onde a aceleração da gravidade tem intensidade $4,0 \text{ m/s}^2$, uma pessoa pesa 240 N. Adotando para a aceleração da gravidade terrestre o valor 10 m/s^2 , responda: qual a massa e qual o peso da pessoa na Terra?

32. Um planeta hipotético tem massa um décimo da terrestre e raio um quarto do da Terra. Se a aceleração da gravidade nas proximidades da superfície terrestre vale 10 m/s^2 , a aceleração da gravidade nas proximidades da superfície do planeta hipotético é de:

- a) 20 m/s^2
- b) 16 m/s^2
- c) 10 m/s^2
- d) $6,0 \text{ m/s}^2$
- e) $4,0 \text{ m/s}^2$

33. Admita que, na superfície terrestre, desprezados os efeitos ligados à rotação do planeta, a aceleração da gravidade tenha intensidade g_0 . Sendo R o raio da Terra, a que altitude a aceleração da gravidade terá intensidade $\frac{g_0}{16}$?



Resolução:

No ponto A: $g_0 = G \frac{M}{R^2} \quad (I)$

No ponto B: $\frac{g_0}{16} = G \frac{M}{(R+h)^2} \quad (II)$

Substituindo (I) em (II):

$$\frac{1}{16} G \frac{M}{R^2} = G \frac{M}{(R+h)^2}$$

$$\left(\frac{R+h}{R} \right)^2 = 16 \Rightarrow R+h = 4R \Rightarrow h = 3R$$

34. (Ufal) Para que a aceleração da gravidade num ponto tenha intensidade de $1,1 \text{ m/s}^2$ (cerca de um nono da registrada na superfície da Terra), a distância desse ponto à superfície terrestre deve ser:

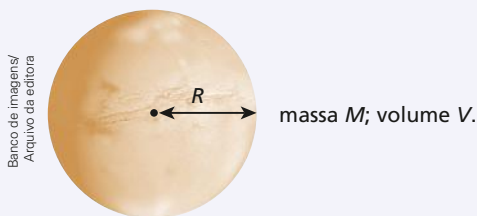
- a) igual ao raio terrestre.
- b) o dobro do raio terrestre.
- c) o triplo do raio terrestre.
- d) o sêxtuplo do raio terrestre.
- e) nove vezes o raio terrestre.

35. Admita que, na superfície terrestre, desprezados os efeitos ligados à rotação do planeta, a aceleração da gravidade tenha intensidade 10 m/s^2 . Sendo o raio da Terra aproximadamente igual a 6400 km, a que altitude a aceleração da gravidade terá intensidade $0,40 \text{ m/s}^2$?

36. Um planeta perfeitamente esférico **A** tem raio **ER** R_A e densidade absoluta μ_A , enquanto outro planeta **B**, também perfeitamente esférico, tem raio $5R_A$ e densidade absoluta $2\mu_A$. Sendo g_A o módulo da aceleração da gravidade na superfície de **A** e g_B o módulo da aceleração da gravidade na superfície de **B**, calcule a relação g_B/g_A . Despreze os efeitos ligados às rotações de **A** e de **B**.

Resolução:

Considere um planeta esférico genérico de massa M , raio R , volume V e densidade absoluta μ .



A densidade absoluta do planeta pode ser expressa por:

$$\mu = \frac{M}{V}$$

Sendo $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (volume da esfera), vem:

$$\mu = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow M = \frac{4}{3}\pi \mu R^3 \quad (I)$$

O módulo da aceleração da gravidade na superfície do planeta é calculado por:

$$g = G \frac{M}{R^2} \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$g = G \frac{\frac{4}{3}\pi \mu R^3}{R^2} \Rightarrow g = \frac{4}{3}\pi \mu GR$$

Para o planeta **B**, temos que:

$$g_B = \frac{4}{3}G\pi 2\mu_A 5R_A \quad (III)$$

Para o planeta **A**, temos que:

$$g_A = \frac{4}{3}G\pi \mu_A R_A \quad (IV)$$

Dividindo (III) por (IV), obtemos:

$$\frac{g_B}{g_A} = \frac{\frac{4}{3}G\pi 2\mu_A 5R_A}{\frac{4}{3}G\pi \mu_A R_A} \Rightarrow \frac{g_B}{g_A} = 10$$

37. A aceleração da gravidade na superfície de um planeta hipotético, suposto esférico, vale 16 m/s^2 . Se o volume do planeta for multiplicado por oito, mantida a mesma massa, qual será a nova aceleração da gravidade na sua superfície? Despreze os efeitos ligados à rotação.

38. Dois planetas esféricos **P**₁ e **P**₂ têm raios respectivamente iguais a R e $5R$. Desprezados os efeitos ligados às rotações, verifica-se que a intensidade da aceleração da gravidade na superfície de **P**₁ é g_0 e na superfície de **P**₂ é $10 g_0$. Qual a relação entre as densidades absolutas de **P**₁ e **P**₂?

39. Uma espaçonave não tripulada descreve uma órbita circular rasante em torno de um planeta esférico e homogêneo, isento de atmosfera, com período de translação igual a T . Sendo G a constante da Gravitação Universal, pede-se determinar a densidade absoluta do planeta, ρ , em função de T e de G .

40. (Fuvest-SP) Recentemente Plutão foi “rebaixado”, perdendo sua classificação como planeta. Para avaliar os efeitos da gravidade em Plutão, considere suas características físicas, comparadas com as da Terra, que estão apresentadas, com valores aproximados, no quadro a seguir.

Massa da Terra (M_T) = $500 \times$ massa de Plutão (M_P)
 Raio da Terra (R_T) = $5 \times$ raio de Plutão (R_P)

Note e adote:

$$F = \frac{GMm}{R^2} \quad \text{Peso} = mg$$

Intensidade da aceleração da gravidade na Terra: $g_T = 10 \text{ m/s}^2$

- a) Determine o peso, na superfície de Plutão (P_P), de uma massa que na superfície da Terra pesa 40 N ($P_T = 40 \text{ N}$).
- b) Estime a altura máxima H , em metros, que uma bola, lançada verticalmente com velocidade V , atingiria em Plutão. Na Terra, essa mesma bola, lançada com a mesma velocidade, atinge uma altura $h_T = 1,5 \text{ m}$.

Resolução:

a) Desprezando-se os efeitos de rotação, temos:

$$P = F \Rightarrow mg = \frac{GMm}{R^2}$$

Assim: $g = G \frac{M}{R^2}$

Em Plutão: $g_P = G \frac{M_P}{R_P^2}$ (I)

Na Terra: $g_T = G \frac{M_T}{R_T^2}$ (II)

Dividindo (I) e (II) membro a membro

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{G \frac{M_P}{R_P^2}}{G \frac{M_T}{R_T^2}} \Rightarrow \frac{g_P}{g_T} = \frac{M_P}{M_T} \left(\frac{R_T}{R_P} \right)^2$$

$$\frac{g_P}{10} = \frac{M_P}{500 M_P} \left(\frac{5R_P}{R_P} \right)^2$$

Logo: $g_P = 0,5 \text{ m/s}^2$

Em Plutão: $P_P = mg_P$ (III)

Na Terra: $P_T = mg_T$ (IV)

Dividindo-se (III) e (IV) membro a membro:

$$\frac{P_P}{P_T} = \frac{mg_P}{mg_T} \Rightarrow \frac{P_P}{P_T} = \frac{g_P}{g_T} \Rightarrow \frac{P_P}{40} = \frac{0,5}{10}$$

Logo: $P_P = 2,0 \text{ N}$

b) Movimento uniformemente variado:

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha \Delta s$$

Na subida: $0 = v_0^2 + 2(-g)H$

$$H = \frac{v_0^2}{2g}$$

Em Plutão: $H_P = \frac{v_0^2}{2g_P}$ (V)

Na Terra: $H_T = \frac{v_0^2}{2g_T}$ (VI)

Dividindo-se (V) e (VI) membro a membro:

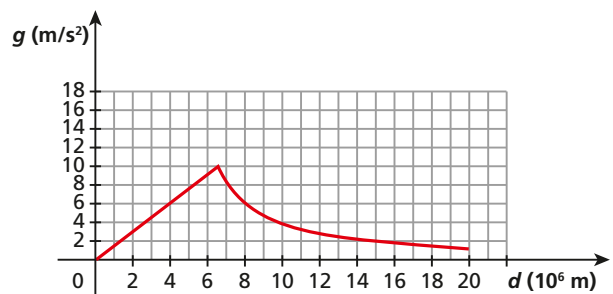
$$\frac{H_P}{H_T} = \frac{\frac{v_0^2}{2g_P}}{\frac{v_0^2}{2g_T}} \Rightarrow \frac{H_P}{H_T} = \frac{g_T}{g_P} \Rightarrow \frac{H_P}{1,5} = \frac{10}{0,5}$$

Da qual: $H_P = 30 \text{ m}$

41. (IME-RJ) Um astronauta com seu traje espacial e completamente equipado pode dar pulos verticais e atingir, na Terra, alturas máximas de 0,50 m. Determine as alturas máximas que esse mesmo astronauta poderá atingir pulando num outro planeta de diâmetro igual a um quarto do da Terra e massa específica equivalente a dois terços da terrestre. Admita que nos dois planetas o astronauta imprima aos saltos a mesma velocidade inicial.

42. Um meteorito adentra o campo gravitacional terrestre e, sob sua ação exclusiva, passa a se mover de encontro à Terra, em cuja superfície a aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s^2 . Calcule o módulo da aceleração do meteorito quando ele estiver a uma altitude de nove raios terrestres.

43. (Fuvest-SP) O gráfico da figura a seguir representa a aceleração da gravidade g da Terra em função da distância d ao seu centro.



Considere uma situação hipotética em que o valor do raio R_T da Terra seja diminuído para R' , sendo $R' = 0,8R_T$, e em que seja mantida (uniformemente) sua massa total. Nessas condições, os valores aproximados das acelerações da gravidade g_1 à distância R' e g_2 a uma distância igual a R_T do centro da "Terra Hipotética" são, respectivamente:

	$g_1 \text{ (m/s}^2\text{)}$	$g_2 \text{ (m/s}^2\text{)}$
a)	10	10
b)	8	6,4
c)	6,4	4,1
d)	12,5	10
e)	15,6	10

44. Admita que a aceleração da gravidade nos polos da Terra tenha intensidade 10 m/s^2 e que o raio terrestre valha $6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$. Chame-mos de ω_0 a velocidade angular de rotação do planeta nas circunstâncias atuais. Se a velocidade angular de rotação da Terra começasse a crescer a partir de ω_0 , estabelecer-se-ia um valor ω para o qual os corpos situados na linha do equador apresentariam peso nulo.

- a) Qual o valor de ω ? Responda em função de ω_0 .
- b) Qual seria a duração do dia terrestre caso a velocidade angular de rotação do planeta fosse igual a ω ?

Resolução:

a) O período atual de rotação da Terra é $T_0 = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$.

Logo:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{86400}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{\pi}{43200} \text{ rad/s}} \quad (I)$$

A intensidade (aparente) da aceleração da gravidade na linha do equador é g_e , dada por:

$$g_e = G \frac{M}{R^2} - \omega^2 R \quad \text{ou} \quad g_e = g_0 - \omega^2 R$$

No caso em que g_e anula-se, vem:

$$0 = g_0 - \omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$$

Sendo $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$ e $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$, calculemos ω .

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{6,4 \cdot 10^6}} \quad \therefore \quad \boxed{\omega = \frac{1}{800} \text{ rad/s}} \quad (II)$$

De (I) e (II), temos:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\frac{1}{800}}{\frac{\pi}{43200}}$$

$$\boxed{\omega \cong 17\omega_0}$$

$$b) \omega \cong 17\omega_0 \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \cong 17 \cdot \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T \cong \frac{T_0}{17}$$

$$T \cong \frac{24 \text{ h}}{17} \Rightarrow \boxed{T \cong 1,4 \text{ h} \cong 1 \text{ h } 25 \text{ min}}$$

45. Em ordem crescente de distâncias ao Sol, Marte é o quarto planeta do sistema solar. Esse astro se notabiliza pelo codinome Planeta Vermelho, justificado pelo tom ocre que manifesta quando observado da Terra. Isso se deve, principalmente, à abundância de óxido de ferro em sua superfície e às severas tempestades de areia, provocadas por fortes ventos que podem chegar a 170 km/h . Dessa forma, a fina atmosfera marciana, constituída, sobretudo, por dióxido de carbono, nitrogênio e argônio, fica impregnada de partículas sólidas em suspensão, o que corrobora com essa característica avermelhada.



Thinkstock/Getty Images

/// Marte, o Planeta Vermelho.

Ignorando o movimento de rotação dos planetas e sabendo-se que a massa da Terra é cerca de dez vezes a de Marte e o raio terrestre corresponde aproximadamente ao dobro do marciano e considerando-se, ainda, que a intensidade da aceleração da gravidade na superfície da Terra seja de $10,0 \text{ m/s}^2$, responda:

- a) Qual a intensidade da aceleração da gravidade na superfície de Marte?
- b) Se na Terra um pequeno objeto lançado verticalmente para cima atinge uma altura máxima de $2,0 \text{ m}$, que altura máxima atingiria um outro objeto se fosse lançado verticalmente para cima em Marte, em idênticas condições? Despreze o efeito atmosférico sobre os movimentos.

46. Chamemos de I_1 e I_2 as indicações de um dinamômetro ideal para o peso de um mesmo corpo no Equador e no polo sul, respectivamente.

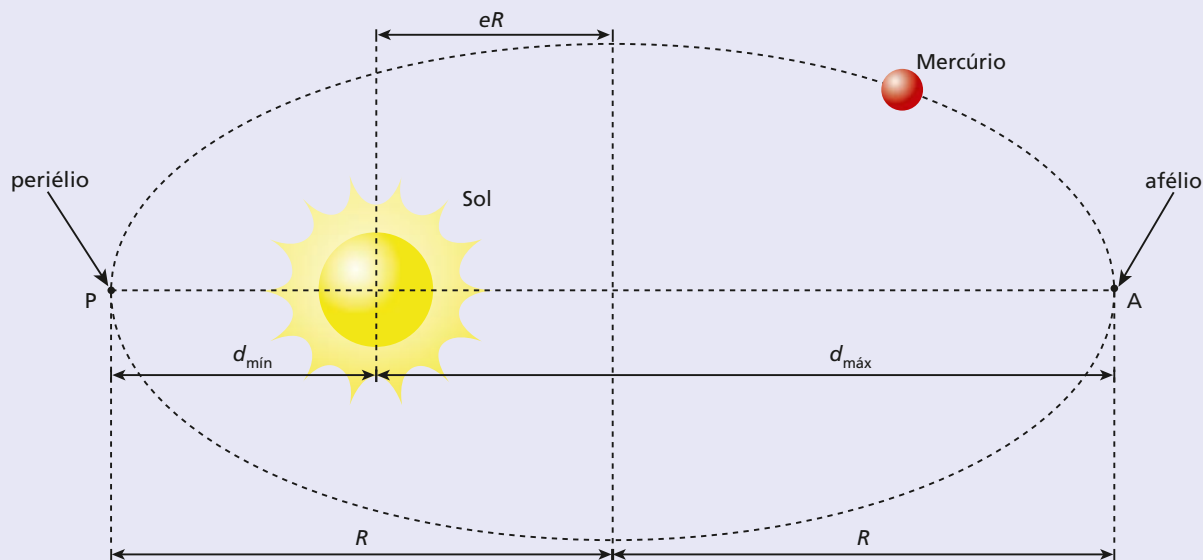
Nas duas medições, o corpo é dependurado no dinamômetro e o conjunto é mantido em repouso em relação ao solo.

Supondo conhecidos o raio da Terra (R), sua velocidade angular de rotação (ω) e a massa do corpo (m), calcule o valor da diferença $I_2 - I_1$.

Uma teoria consistente

A Gravitação newtoniana, embora sabidamente limitada diante dos conhecimentos atuais, é bastante eficaz para resolver problemas como o que apresentamos a seguir.

Consideremos a órbita elíptica de Mercúrio em torno do Sol, cuja excentricidade e é a maior entre os planetas de nosso sistema solar. Para esse caso, $e = 0,20$. O semieixo maior (ou raio médio) R da trajetória descrita por Mercúrio é de $0,389$ UA, o que equivale aproximadamente a $5,8 \cdot 10^{10}$ m. Sejam d_{\min} e d_{\max} , respectivamente, as distâncias mínima e máxima do citado planeta em relação ao centro do Sol, como está indicado, fora de escala, no esquema a seguir.



// Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores fantasia.

É possível determinar, por meio da Lei de Newton da Atração das Massas, a relação entre as intensidades da velocidade orbital de Mercúrio nos pontos **P** (periélio) e **A** (afélio) da órbita.

I. Cálculo da d_{\min} :

$$d_{\min} = R - eR \Rightarrow d_{\min} = R(1 - e)$$

$$d_{\min} = 5,8 \cdot 10^{10} (1 - 0,20) \quad \therefore \quad \boxed{d_{\min} \cong 4,6 \cdot 10^{10} \text{ m}}$$

II. Cálculo da d_{\max} :

$$d_{\max} = R + eR \Rightarrow d_{\max} = R(1 + e)$$

$$d_{\max} = 5,8 \cdot 10^{10} (1 + 0,20) \quad \therefore \quad \boxed{d_{\max} \cong 6,9 \cdot 10^{10} \text{ m}}$$

III. A elipse é uma figura simétrica, por isso seu raio de curvatura em **P** e **A** é o mesmo. Chamando esse raio de r , a Constante da Gravitação de G , a massa do Sol de M e a massa de Mercúrio de m , e observando ainda que a força gravitacional, dada pela Lei de Newton, desempenha o papel de resultante centrípeta em **P** e **A**, já que nesses locais ela é perpendicular à velocidade vetorial, podemos obter as intensidades da velocidade orbital de Mercúrio em **P** (v_P) e em **A** (v_A), fazendo:

$$\text{no periélio (P): } F_P = F_{c_{pp}} \Rightarrow G \frac{Mm}{d_{\min}^2} = \frac{mv_P^2}{r}$$

Da qual: $v_P = \frac{\sqrt{GMr}}{d_{\min}} \Rightarrow v_P = \frac{\sqrt{GMr}}{4,6 \cdot 10^{10}}$

no afélio (**A**): $F_A = F_{cp_A} \Rightarrow G \frac{Mm}{d_{\max}^2} = \frac{mv_A^2}{r}$

Da qual: $v_A = \frac{\sqrt{GMr}}{d_{\max}} \Rightarrow v_A = \frac{\sqrt{GMr}}{6,9 \cdot 10^{10}}$

Dividindo os valores de v_P e v_A , temos:

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{\sqrt{GMr}}{4,6 \cdot 10^{10}} \cdot \frac{6,9 \cdot 10^{10}}{\sqrt{GMr}} \Rightarrow \frac{v_P}{v_A} = \frac{3}{2}$$

Da qual:

$$v_P = 1,5v_A$$

Observe que a relação obtida confirma que, de fato, no periélio a velocidade de translação do planeta tem intensidade maior que no afélio.

Como duvidar, então, da Gravitação newtoniana se os resultados previstos por ela condizem com a maioria das observações experimentais?

Algumas distorções teóricas, como as previstas na Teoria da Relatividade Geral, de Albert Einstein, porém, levaram os astrônomos a rever certos resultados, o que corroborou com a adoção da Gravitação de contornos mais amplos, como a que explica a atração entre massas por meio de deformações do chamado espaço-tempo.

DESCUBRA MAIS

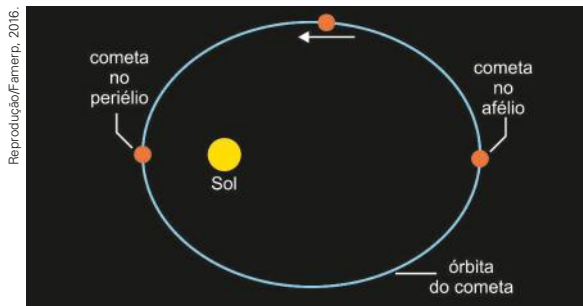
1. O experimento realizado por Henry Cavendish em 1798 utilizando uma balança de torção para a determinação da Constante da Gravitação (G) também presente na Lei de Newton da Atração das Massas ($F = G \frac{Mm}{d^2}$, com $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$) é considerado um dos dez mais importantes da Física.
Pesquise sobre esse experimento.
2. Há vários satélites estacionários, de diversas nacionalidades, inclusive brasileira, em órbita ao redor da Terra servindo às telecomunicações. Todos eles percorrem uma mesma órbita, aproximadamente circular, num mesmo sentido. Como se justifica o fato de não ocorrerem colisões entre esses satélites?
3. Na Terra, além do campo gravitacional terrestre, somos influenciados por campos gravitacionais de outros astros, como o Sol e a Lua. A participação mais ou menos intensa desses campos na formação de um campo gravitacional resultante é determinante para a ocorrência de muitos fenômenos na Terra, como o das marés, por exemplo. Dê uma explicação mais substanciada para esse fenômeno.
4. Uma possibilidade que aterroriza a todos é a de que um asteroide colida com a Terra, o que provocaria um cataclismo de proporções inimagináveis. O que tem sido feito pela comunidade científica para impedir esse tipo de ocorrência?

47. (Famerp-SP)

Cometa e Rosetta atingem ponto mais próximo do Sol

O cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko e a sonda Rosetta, que o orbita há mais de um ano, chegaram ao ponto de maior aproximação do Sol. O periélio, a cerca de 186 milhões de quilômetros do Sol, foi atingido pelo cometa em agosto de 2015. A partir daí, o cometa começou mais uma órbita elíptica, que durará 6,5 anos. O afélio da órbita desse cometa está a cerca de 852 milhões de quilômetros do Sol. Espera-se que Rosetta o monitore, pelo menos, mais um ano.

(www.inovacaotecnologica.com.br. Adaptado.)



De acordo com as informações, é correto afirmar que

- a) o cometa atingirá sua maior distância em relação ao Sol aproximadamente em agosto de 2017.
- b) a órbita elíptica do cometa está de acordo com o modelo do movimento planetário proposto por Copérnico.
- c) o cometa atingiu sua menor velocidade escalar de transição ao redor do Sol em agosto de 2015.
- d) o cometa estava em movimento acelerado entre os meses de janeiro e julho de 2015.
- e) a velocidade escalar do cometa será sempre crescente, em módulo, após agosto de 2015.

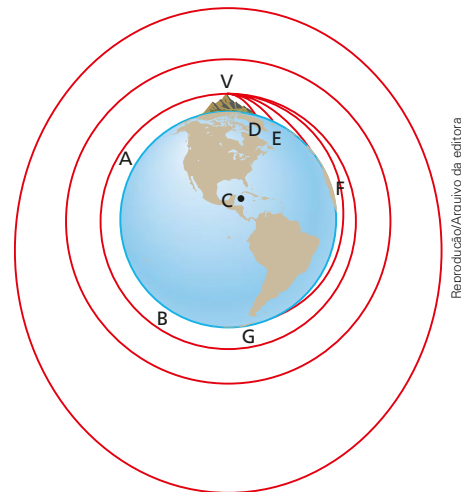
48. (FMJ-SP) O planeta Saturno apresenta um grande número de satélites naturais. Dois deles são Encélado e Titan. Os raios de suas órbitas podem ser medidos em função do raio de Saturno, R_S . Dessa forma, o raio da órbita de Titan vale $20R_S$, enquanto o de Encélado vale $4R_S$. Sendo $T(e)$ e $T(t)$, respectivamente, os intervalos de tempo que Encélado e Titan levam para dar uma volta completa ao redor de Saturno, é correto afirmar que a razão $\frac{T(t)}{T(e)}$ é, aproximadamente, igual a

a) 11,2 b) 8,4 c) 5,0 d) 0,8 e) 0,2

49. (OBF) Considere que a órbita da Terra em torno do Sol seja circular e que esse movimento possua período T . Sendo t o tempo médio que a luz do Sol leva para chegar à Terra e c o módulo da velocidade da luz no vácuo, o valor estimado da massa do Sol é:

- a) $\frac{G}{4\pi^2} \frac{(ct)^3}{T^2}$
- b) $\frac{4\pi^2}{G} \frac{(ct)^3}{T^2}$
- c) $\frac{G}{4\pi^2} \frac{(cT)^3}{t^2}$
- d) $\frac{4\pi^2}{G} \frac{(cT)^3}{t^2}$
- e) $\frac{G}{4\pi^2} \frac{(ct)^2}{T^3}$

50. (Fame-SP) A ilustração a seguir foi usada por Isaac Newton para explicar como um objeto entra em órbita.

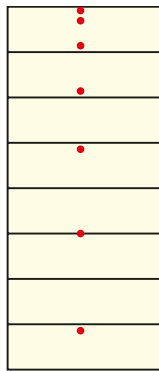


Segundo Newton, se pedras fossem lançadas horizontalmente do alto de uma montanha, a distância percorrida por elas antes de atingir o solo dependeria da velocidade de lançamento: velocidades maiores implicariam distâncias maiores. Existiria, então, uma velocidade em que a queda da pedra seria compensada pela curvatura da Terra e ela nunca atingiria o solo, permanecendo em órbita ao redor da Terra. A resistência do ar impede que isso seja realizado na prática.

Desprezando-se a resistência do ar, considerando-se o raio da Terra no ponto de lançamento igual a $6,4 \cdot 10^6$ m e a aceleração da gravidade com módulo igual a 10 m/s^2 , a velocidade horizontal de lançamento da pedra, para que ela entre em órbita circular rasante à Terra tem módulo igual a:

- a) $4,0 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
- b) $8,0 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
- c) $3,2 \cdot 10^4 \text{ m/s}$
- d) $6,4 \cdot 10^4 \text{ m/s}$
- e) $8,0 \cdot 10^4 \text{ m/s}$

51. (Faap-SP) Em um planeta, um astronauta faz o seguinte experimento: abandona uma bola na frente de uma tela vertical, que possui marcadas linhas horizontais, separadas por 50 cm; simultaneamente, é acionada uma máquina fotográfica de *flash*-múltiplo, sendo o intervalo entre os *flashes* de 0,10 s. A partir da fotografia da queda da bola, indicada na figura, o astronauta calcula a razão entre a massa do planeta e a da Terra, pois ele sabe que o raio do planeta é o triplo do terrestre. Qual é o valor encontrado?



Reprodução/Arquivo da editora

Dado: aceleração da gravidade na Terra = 10 m/s^2 .

52. (UFF-RJ) Antoine de Saint-Exupéry gostaria de ter começado a história do Pequeno Príncipe dizendo: "Era uma vez um pequeno príncipe que habitava um planeta pouco maior que ele, e que tinha necessidade de um amigo..."

Considerando-se que o raio médio da Terra é um milhão de vezes o raio médio do planeta do Pequeno Príncipe, assinale a opção que indica a razão entre a densidade do planeta do Pequeno Príncipe, ρ_p , e a densidade da Terra, ρ_T , de modo que as acelerações da gravidade nas superfícies dos dois planetas sejam iguais.



Editora Agir

- a) $\frac{\rho_p}{\rho_T} = 10^{12}$ c) $\frac{\rho_p}{\rho_T} = 10^{18}$ e) $\frac{\rho_p}{\rho_T} = 10^2$
 b) $\frac{\rho_p}{\rho_T} = 10^6$ d) $\frac{\rho_p}{\rho_T} = 10^3$

53. (Unicamp-SP) A Lua tem sido responsabilizada por vários fenômenos na Terra, tais como apressar o parto dos seres humanos e dos demais animais e aumentar o crescimento de cabelos e plantas. Sabe-se que a aceleração gravitacional da Lua em sua própria superfície é praticamente $\frac{1}{6}$ daquela da Terra ($g_T = 10 \text{ m/s}^2$) e que a distância entre a superfície da Terra e o centro da Lua é da ordem de 200 raios lunares. Para estimar os efeitos gravitacionais da Lua na superfície da Terra, calcule:

- a) a intensidade da aceleração gravitacional provocada pela Lua em um corpo na superfície da Terra.
 b) a variação no peso de um bebê de 3,0 kg devido à ação da Lua.

54. (IME-RJ) Um objeto foi achado por uma sonda espacial durante a exploração de um planeta distante. Essa sonda possui um braço ligado a uma mola ideal presa a garras especiais. Ainda naquele planeta, observou-se no equilíbrio uma deformação $x_p = 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ na mola, com o objeto totalmente suspenso. Retornando à Terra, repetiu-se o experimento, observando-se uma deformação $x_T = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Ambas as deformações estavam na faixa linear da mola. Determine a razão entre o raio do planeta distante e o raio da Terra.

Dados:

- 1) a massa do planeta é 10% da massa da Terra;
 2) módulo da aceleração da gravidade terrestre: $10,0 \text{ m/s}^2$.

55. (Unicamp-SP) Plutão é considerado um planeta anão, com massa $M_p = 1,0 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, bem menor que a massa da Terra. O módulo da força gravitacional entre duas massas m_1 e m_2 é dado por $F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, em que r é a distância entre as massas e G é a constante gravitacional. Em situações que envolvem distâncias astronômicas, a unidade de comprimento comumente utilizada é a Unidade Astronômica (UA).

- a) Considere que, durante a sua aproximação a Plutão, a sonda se encontra em uma posição que está $d_p = 0,15 \text{ UA}$ distante do centro de Plutão e $d_T = 30 \text{ UA}$ distante do centro da Terra.

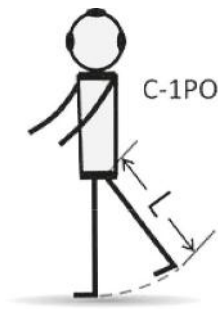
Calcule a razão $\left(\frac{F_{g_T}}{F_{g_p}} \right)$ entre o módulo da força

gravitacional com que a Terra atrai a sonda e o módulo da força gravitacional com que Plutão atrai a sonda. Caso necessário, use a massa da Terra $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

- b) Suponha que a sonda New Horizons estabeleça uma órbita circular com velocidade escalar orbital constante em torno de Plutão com um raio de $r_p = 1 \cdot 10^{-4} \text{ UA}$. Obtenha o módulo da velocidade orbital nesse caso. Se necessário, use a constante gravitacional $G = 6 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. Caso necessário, use $1 \text{ UA (Unidade Astronômica)} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$.

56. (Fuvest-SP) Foram identificados, até agora, aproximadamente 4000 planetas fora do sistema solar, dos quais cerca de 10 são provavelmente rochosos e estão na chamada região habitável, isto é, orbitam sua estrela a uma distância compatível com a existência de água líquida, tendo talvez condições adequadas à vida da espécie humana. Um deles, descoberto em 2016, orbita *Proxima Centauri*, a estrela mais próxima da Terra. A massa, M_p , e o raio, R_p , desse planeta são diferentes da massa, M_T , e do raio, R_T , do planeta Terra, por fatores α e β : $M_p = \alpha M_T$ e $R_p = \beta R_T$.

a) Qual seria a relação entre α e β se ambos os planetas tivessem a mesma densidade? Imagine que você participe da equipe encarregada de projetar o robô C-1PO, que será enviado em uma missão não tripulada a esse planeta. Características do desempenho do robô, quando estiver no planeta, podem ser avaliadas a partir de dados relativos entre o planeta e a Terra.



Reprodução/Fuvest, 2017

Nas condições do item **a**, obtenha, em função de β ,
b) a razão $r_g = \frac{g_p}{g_T}$ entre o valor da aceleração da gravidade, g_p , que será sentida por C-1PO na

superfície do planeta e o valor da aceleração da gravidade, g_T , na superfície da Terra;

- c) a razão $r_t = \frac{t_p}{t_T}$ entre o intervalo de tempo, t_p , necessário para que C-1PO dê um passo no planeta e o intervalo de tempo, t_T , do passo que ele dá aqui na Terra (considere que cada perna do robô, de comprimento L , faça um movimento como o de um pêndulo simples de mesmo comprimento);
d) a razão $r_v = \frac{v_p}{v_T}$ entre os módulos das velocidades do robô no planeta, v_p , e na Terra, v_T .

Note e adote:

A Terra e o planeta são esféricos.

O módulo da força gravitacional F entre dois corpos de massas M_1 e M_2 , separados por uma distância r , é dado por $F = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$ em que G é a constante de gravitação universal.

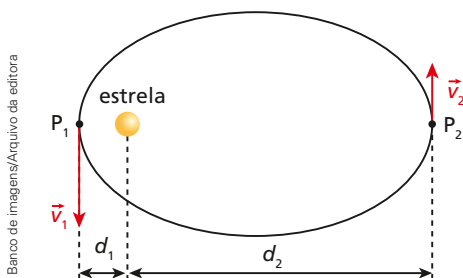
O período de um pêndulo simples de comprimento L é dado por $T = 2\pi \left(\frac{L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$, em que g

é a aceleração local da gravidade.

Os passos do robô têm o mesmo tamanho na Terra e no planeta.

Para raciocinar um pouco mais

57. Um planeta descreve uma órbita elíptica em torno de uma estrela, conforme representa o esquema. Os pontos P_1 e P_2 indicados correspondem ao periélio e ao afélio, respectivamente, e, nesses pontos, o planeta apresenta velocidades vetoriais de intensidades v_1 e v_2 .



Banco de imagens/Arquivo da editora

Supondo conhecidas as distâncias de P_1 e P_2 ao Sol (d_1 e d_2), mostre que $d_1 v_1 = d_2 v_2$.

58. Considere o planeta Marte com raio R e densidade absoluta média igual a μ . Supondo que o satélite Fobos descreva em torno de Marte uma órbita circular de raio r e representando por G a Constante da Gravitação, calcule o período de revolução de Fobos.
59. Admita que a Terra tenha raio R e densidade absoluta média μ e descreva em torno do Sol uma órbita circular de raio r , com período de revolução igual a T . Calcule, em função desses dados, a intensidade da força de atração gravitacional que o Sol exerce sobre a Terra.

60. Seja G a Constante da Gravitação e T o período de rotação de um planeta imaginário denominado Planton. Sabendo que no equador de Planton um dinamômetro de alta sensibilidade dá indicação nula para o peso de qualquer corpo dependurado na sua extremidade, calcule a densidade média desse planeta.

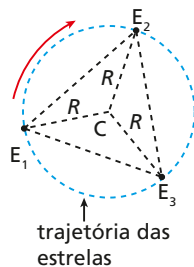
61. [OBF] Em seu trabalho sobre gravitação universal, Newton demonstrou que uma distribuição esférica homogênea de massa surte o mesmo efeito que uma massa concentrada no centro da distribuição. Se no centro da Terra fosse recortado um espaço oco esférico com metade do raio da Terra, o módulo da aceleração da gravidade na superfície terrestre diminuiria para [g é o módulo da aceleração da gravidade na superfície terrestre sem a cavidade]:

- a) $\frac{3}{8}g$. b) $\frac{1}{2}g$. c) $\frac{5}{8}g$. d) $\frac{3}{4}g$. e) $\frac{7}{8}g$.

62. [Olimpíada Ibero-Americana de Física] Uma estrela tripla é formada por três estrelas de mesma massa M que gravitam em torno do centro de massa C do sistema.

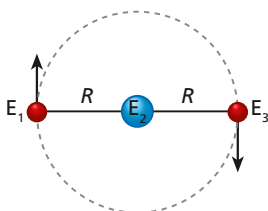
As estrelas estão localizadas nos vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência que corresponde à trajetória por elas descrita, conforme ilustra a figura.

Considerando-se como dados a massa M de cada estrela, o raio R da circunferência que elas descrevem e a constante de gravitação universal G , determine o período T no movimento orbital de cada estrela.



Reprodução/Arquivo da editora

63. Historicamente, teria sido Ptolomeu (século II d.C.) o primeiro a observar estrelas duplas ou binárias, um tanto comuns no Universo, às quais denominou *Eta Sagittarii*. Já estrelas triplas são mais raras, devido à sua grande instabilidade. Considere uma estrela tripla, constituída das estrelas E_1 , E_2 e E_3 , de massas respectivamente iguais a M , $2M$ e M . A estrela E_2 é o centro do sistema e E_1 e E_3 gravitam em torno de E_2 com velocidades lineares de mesma intensidade, conforme ilustra o esquema:



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Considerando que os centros de E_1 e E_3 mantêm-se sempre alinhados com o centro de E_2 , à distância R do centro desta estrela, e sendo G a constante da Gravitação, determine o período dos movimentos de E_1 e E_3 .

64. Estrelas como o Sol, classificadas de anãs amarelas, são comumente encontradas na observação astronômica. Na outra ponta da escala estelar estão as azuis gigantes, muito raras no Universo. Na semana passada, um grupo de astrônomos europeus anunciou a descoberta de nada menos que sete astros desse tipo, entre eles a estrela com a maior massa já encontrada. Batizada de R136a1, ela é colossal mesmo para os padrões das azuis gigantes. Sua descoberta deve levar os cientistas a rever seus cálculos sobre os limites da massa das estrelas. Até agora, achava-se impossível que existissem astros com massa superior a 150 vezes a do Sol. A R136a1 tem quase o dobro, brilha com intensidade 10 milhões de vezes maior e é sete vezes mais quente.

(SALVADOR, Alexandre. Um raro achado no cosmo. Veja, São Paulo, ano 43, n. 30, p. 94, 28 jul. 2010.)

Considerando que a massa da estrela R136a1 é 265 vezes a massa do Sol, pode-se afirmar que, se ela fosse a estrela do sistema solar em vez do Sol e se, mesmo assim, a Terra descrevesse sua órbita com o mesmo raio médio, o ano terrestre teria a duração mais próxima de

- a) 3 horas.
b) 3 dias.
c) 3 semanas.
d) 3 meses.
e) 3 anos.

65. Considere a situação hipotética conjecturada a seguir. Imagine que a Terra, de massa inicial M , e a Lua, de massa inicial m , se mantenham em repouso no espaço, com seus centros de massa separados por uma distância constante d . Suponha que porções sucessivas de massa da Terra sejam, de alguma maneira, transportadas para a Lua, de modo que os dois astros mantenham sempre sua forma esférica. Sendo x a massa levada da Terra para a Lua num determinado instante, pede-se:

- a) esboçar o gráfico da intensidade da força de atração gravitacional entre a Terra e a Lua, F , em função de x ;
b) estabelecer a relação entre as massas da Terra e da Lua para que o valor de F seja máximo.

Movimentos em campo gravitacional uniforme



Voodymyr Burdiak/Shutterstock

// Na imagem, vemos um chafariz que lança jatos de água obliquamente. No pequeno deslocamento escalar que o líquido realiza até retornar ao tanque, as forças de resistência do ar podem ser negligenciadas, permitindo-se que os movimentos das gotas sejam estudados como se estas estivessem sob a ação exclusiva do campo gravitacional.

Lançou, disparou, chutou? Deixa que, sozinha, a gravidade faz o resto! É o que ocorreria se não intervissem as forças de resistência do ar...

Para percursos relativamente curtos, no entanto, as ações atmosféricas podem ser, via de regra, desprezadas, e tudo se passa como se bolas, dardos, projéteis e outros objetos lançados ao ar se deslocassem livres, sob a ação única da gravidade.

Desenvolveremos neste tópico o estudo dos movimentos de corpos sob a ação exclusiva de um campo gravitacional uniforme, abrangendo os deslocamentos verticais, bem como os lançamentos oblíquos e horizontais. Estudaremos as grandezas relevantes ao assunto, como o tempo de voo, a altura máxima atingida e o alcance horizontal.

1. Campo gravitacional uniforme

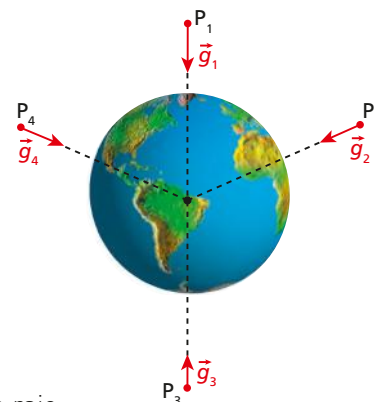
Como vimos no Tópico 4, Gravação, astros em geral criam ao seu redor uma região de influências – teoricamente infinita – capaz de impor a massas aí inseridas forças de atração de natureza gravitacional. Essa região é denominada **campo gravitacional** do astro.

A Terra tem em torno de si seu campo gravitacional – o campo gravitacional terrestre –, caracterizado pelo vetor de campo \vec{g} , chamado **aceleração da gravidade**. Como foi visto, nas vizinhanças do nosso planeta e em pequenas altitudes, o vetor \vec{g} tem intensidade próxima de 10 m/s^2 .

O vetor \vec{g} , contudo, é **variável**. Sua direção se modifica à medida que se circunda a Terra, já que \vec{g} é radial à “esfera” terrestre. A intensidade de \vec{g} também se altera, decrescendo com a distância à superfície do planeta.

Veja a ilustração ao lado.

Sendo G a constante da gravação, M e R , respectivamente, a massa e o raio da Terra, e h a altitude, pela expressão $g = G \frac{M}{(R + h)^2}$ podemos verificar que, aumentando-se h , a intensidade g da aceleração da gravidade diminui.

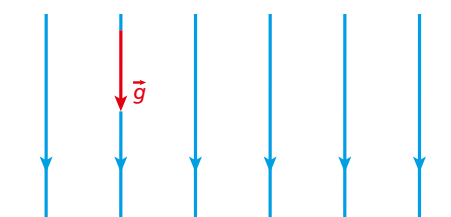


Banco de imagens/Arquivo da editora

Chamamos de **campo gravitacional uniforme** todo aquele em que o vetor \vec{g} (aceleração da gravidade) é **constante** em toda a extensão do campo, isto é, esse vetor tem módulo, direção e sentido invariáveis em toda a região analisada.

Em ambientes de pequenas dimensões, como o interior de uma sala de aula ou um campo de futebol, o campo gravitacional pode ser considerado uniforme. Isso significa que em qualquer ponto desses locais o vetor \vec{g} será vertical, dirigido perpendicularmente ao solo (admitido horizontal), orientado para baixo e com intensidade próxima de 10 m/s^2 .

Mesmo em grandes cidades ou regiões relativamente extensas, o campo gravitacional pode ser considerado uniforme, já que eventuais variações no vetor \vec{g} são imperceptíveis.



// Representação de algumas linhas de força de um campo gravitacional uniforme.

Banco de imagens/Arquivo da editora

NOTA!

Em um campo gravitacional uniforme, as linhas de força (tangentes ao vetor \vec{g} em cada ponto) são retas paralelas equidistantes.

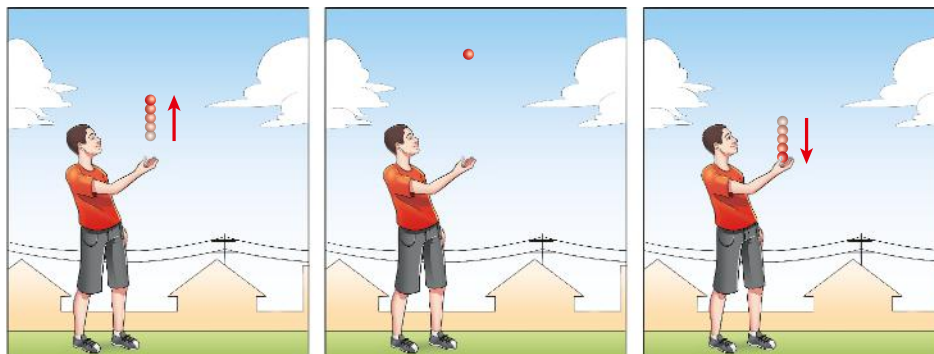
// Nesta imagem da cidade de São Paulo, tirada com uma lente angular, as setas amarelas representam o vetor \vec{g} em diversos locais. Veja que essas setas têm o mesmo comprimento (indicação de intensidade), a mesma direção e o mesmo sentido, sugerindo um campo gravitacional praticamente uniforme nesse local.



Tales Azzi/Pulsar Imagens

2. Movimento vertical

Um ato bastante corriqueiro consiste em lançarmos pequenos objetos verticalmente para cima, como indica a ilustração abaixo. Nesses casos, o corpo lançado sobe e depois desce, percorrendo praticamente um mesmo segmento de reta vertical.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Se não levarmos em conta as forças de resistência do ar, depois de deixar o agente lançador – no caso da tirinha, a mão do garoto –, o corpo jogado para cima ficará sob a ação exclusiva de seu peso, que vai impor como aceleração a **aceleração da gravidade**, praticamente constante e traduzida pelo vetor \vec{g} , vertical e dirigido para baixo.

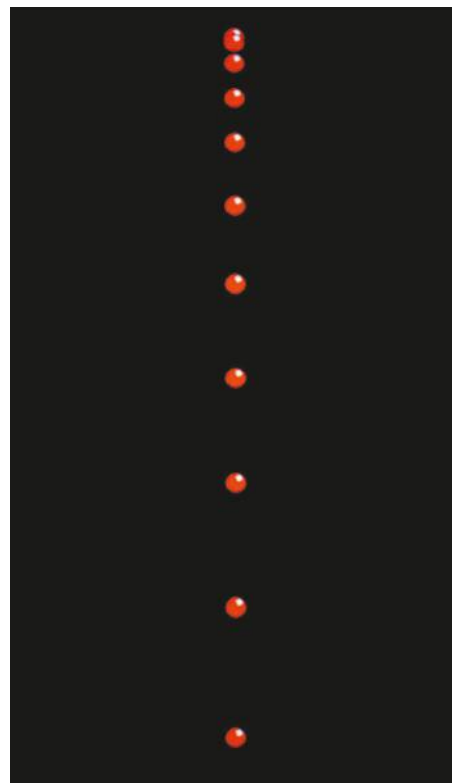
É importante lembrar que, nesse caso idealizado, a aceleração verificada será \vec{g} , independentemente da massa do corpo, conforme conclusão de **Galileu Galilei**, já comentada em Cinemática escalar.

Assim é que, corpos sujeitos exclusivamente à ação do campo gravitacional (suposto uniforme), terão, todos, aceleração \vec{g} , não importando suas massas, materiais ou formas.

Na subida, o corpo descreverá um movimento uniformemente retardado, dando uma paradinha instantânea no ponto de altura máxima. Já na descida – queda livre –, realizará um movimento uniformemente acelerado, em ambos os casos, com a aceleração da gravidade, de intensidade $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Como vimos no tópico referente ao movimento uniformemente variado, o tempo de subida será igual ao tempo de descida ao local de lançamento e, em um mesmo ponto da trajetória, o corpo passará subindo e depois descendo com o mesmo módulo de velocidade escalar.

// Foto estroboscópica do movimento de queda de uma pequena bola. Como o trecho percorrido pelo objeto é relativamente curto, as forças de resistência do ar não influenciam significativamente e o movimento pode ser considerado uniformemente acelerado, com aceleração de intensidade igual à de \vec{g} .



Kenneth Edward/Science Source/Getty Images

C.U./Zapp/Arquivo da editora

// Desprezada a influência do ar, ao deixar a mão da pessoa, a pedra ficará sujeita à ação exclusiva do seu peso \vec{P} e, independentemente de sua massa, a aceleração adquirida por esse corpo será a da gravidade, \vec{g} .

Levando-se em conta a resistência do ar

E se levarmos em conta a presença da atmosfera?

Afinal, este é um meio fluido essencial e corpos em movimento através dele ficam sujeitos a forças de oposição ao avanço, que determinam um efeito resultante denominado simplesmente **força de resistência do ar**.

A força de resistência do ar depende de características do corpo, como material e forma, bem como de parâmetros da própria atmosfera. Sua intensidade cresce com a velocidade, já que se intensificam as colisões de moléculas de ar contra partes do corpo expostas a esse bombardeio.

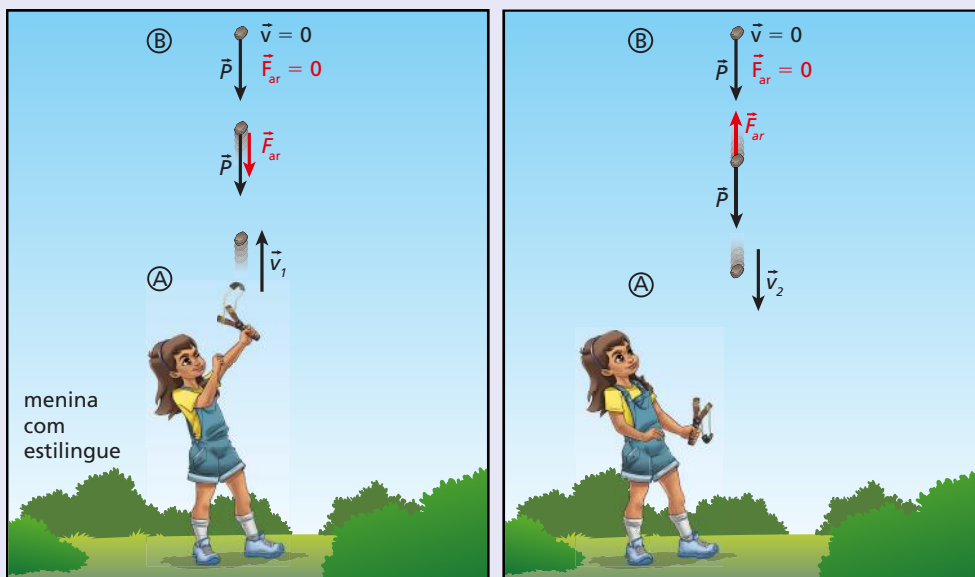
Em geral, a intensidade da força de resistência do ar, F_{ar} , é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade, v , conforme uma expressão do tipo:

$$F_{ar} = kv^2$$

Em que k é uma constante que depende da forma do corpo (aerodinâmica), da densidade do ar e da maior área de uma seção do objeto perpendicular à direção do movimento.

Consideremos a situação ilustrada abaixo, em que uma garota vai disparar com seu estilingue, verticalmente para cima, uma pedra de massa m .

A pedra vai subir do ponto **A** até o ponto **B** de altura máxima e vai retornar ao ponto de partida, **A**.



No ponto **B**, ocorre inversão do sentido do movimento. A velocidade instantânea da pedra é nula e a força de resistência do ar também vale zero. Nos outros pontos da trajetória, porém, essa força não é nula e sua intensidade será tanto maior quanto maior for o módulo da velocidade.

Além de \vec{F}_{ar} , atua também na pedra durante todo o trajeto – subida e descida – a força peso, \vec{P} , como está representado nos esquemas.

Seja g a intensidade da aceleração da gravidade local.

No movimento de subida, aplicando-se a 2ª Lei de Newton, tem-se, em cada instante:

$$P + F_{ar} = ma_{subida} \Rightarrow a_{subida} = \frac{mg + F_{ar}}{m}$$

Da qual:

$$a_{subida} = g + \frac{F_{ar}}{m}$$

Dessa expressão depreende-se que $a_{\text{subida}} > g$. Isso ocorre mesmo com F_{ar} decrescendo na subida. Já no movimento de descida, aplicando-se também a 2ª Lei de Newton, tem-se, em cada instante:

$$P - F_{\text{ar}} = ma_{\text{descida}} \Rightarrow a_{\text{descida}} = \frac{mg - F_{\text{ar}}}{m}$$

Da qual:

$$a_{\text{descida}} = g - \frac{F_{\text{ar}}}{m}$$

Dessa expressão conclui-se que $a_{\text{descida}} < g$. Isso ocorre mesmo com F_{ar} crescendo – pelo menos a princípio – na descida.

Afinal, deve-se ter em conta que se a pedra atingir uma grande altura no lançamento, poderá ocorrer, na descida, a nulidade da aceleração. Nesse caso, F_{ar} deixa de crescer, assumindo um valor constante. Isso acontecerá a partir do instante em que $\frac{F_{\text{ar}}}{m} = g$ e, nessa situação, a pedra percorrerá o trecho final do seu caminho de volta em movimento retilíneo e uniforme, com velocidade terminal limite.

Sendo a desaceleração de subida mais intensa que a aceleração de descida e a distância percorrida na subida igual à percorrida na descida, infere-se que **o intervalo de tempo de subida é menor que o de descida** ($\Delta t_{\text{AB}} < \Delta t_{\text{BA}}$).



S.F./Shutterstock

// Um dos cartões-postais da cidade de Genebra, na Suíça, é o *Jet d'eau* (Jato de água, em francês), instalado no meio do lago Genève. Trata-se de um fortíssimo esguicho vertical de água, capaz de elevar o líquido a alturas em torno de 140 m (um prédio de aproximadamente 45 andares). Devido à presença da atmosfera, as gotas sofrem um forte retardamento na subida e uma aceleração pouco intensa na descida e, por isso, demoram mais para descer do que para subir.

3. Movimento balístico

Foi ponto ou não foi?

Muitos esportes, como tênis, futebol, basquete, vôlei, golfe, lançamento de dardo, salto em distância, etc. constituem um excelente cenário para estudarmos o chamado **movimento balístico**. Esta é uma denominação genérica que se atribui ao deslocamento de bolas e outros corpos lançados ao ar em trajetórias praticamente parabólicas.

Tiros balísticos foram aprimorados com fins militares. Armas cada vez mais potentes e eficazes, capazes de arremessar seus projéteis cada vez mais longe e com melhor precisão de pontaria, definiram a supremacia de exércitos e provocaram a submissão de povos rivais.

Adam Vilimek/Shutterstock



Uma breve história da balística

“Ao longo da História, em muitas situações, interesses econômicos nortearam o pensamento científico. Quando a pólvora, que já era usada na China há muito tempo, ficou conhecida na Europa, teve início um rápido desenvolvimento das armas de fogo: no século XIII, os árabes usavam artilharia pesada em suas investidas e, em meados do século XIV, as armas de fogo já faziam parte do arsenal bélico de todos os países da Europa oriental, meridional e central.



Jack Searin/Stockphoto/Getty Images

No século XV, canhões foram aperfeiçoados e projéteis de pedra substituídos pelos de ferro, de modo que atingissem maiores velocidades de lançamento. No século XVI, foram desenvolvidas tabelas que forneciam o alcance horizontal dos projéteis para diversos ângulos de lançamento.

Entretanto, em meados do século XVII, esses conhecimentos empíricos de tiro mostraram-se insuficientes, pois não se apoiavam em princípios balísticos bem fundamentados. Disso decorreu a intervenção dos grandes físicos da época na história do desenvolvimento bélico, havendo evidências da relação de seus trabalhos com os interesses da artilharia. Galileu, por exemplo, investigou a queda vertical dos corpos e, com isso, reconheceu a forma parabólica da trajetória dos projéteis sem considerar a influência do ar em seus movimentos. Já Torricelli, Newton, Bernoulli e Euler investigaram a forma real da trajetória dos projéteis, isto é, sua forma modificada em virtude da influência do ar. Para tanto, tiveram de estudar, dentre outros assuntos, a relação entre a intensidade da resistência do ar e a velocidade do projétil.

Podemos dizer, então, que o estudo do lançamento de corpos não se deu simplesmente pelo desejo de se conhecer algo mais sobre a natureza, mas pela necessidade de sua aplicação em benefício do aprimoramento bélico e do cumprimento de interesses econômicos.”

(HESSSEN, Borís. *Las raíces socioeconómicas de la Mecánica de Newton*. Havana: Editorial Academia, 1985.)

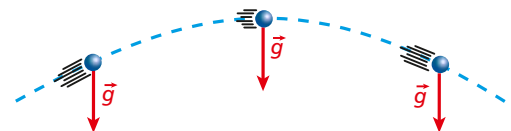
Ignoremos no estudo a seguir os efeitos do ar.

Lançando-se obliquamente um projétil qualquer, este vai descrever uma trajetória em forma de arco de parábola em relação a um referencial fixo no solo terrestre, como demonstraremos no final deste item.

Na subida, o movimento será retardado e na descida, acelerado, sob a ação exclusiva da aceleração da gravidade, isto é, ao longo de todo o voo, a força resultante no projétil será seu peso \vec{P} e a aceleração vetorial será igual a \vec{g} .

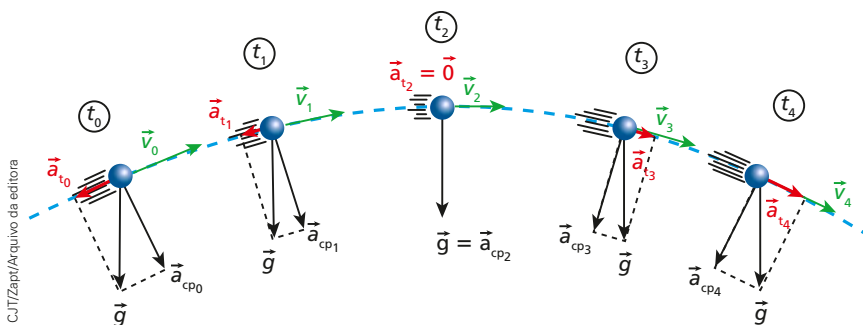
Na subida, o vetor \vec{g} admite uma componente tangencial com magnitude **decrecente** até zero, de sentido contrário ao da velocidade vetorial. Já na descida, o vetor \vec{g} admite uma componente tangencial com magnitude **crescente** a partir de zero, no mesmo sentido da velocidade vetorial.

A aceleração escalar do projétil é, portanto, variável, tanto na subida como na descida, o que torna o movimento balístico variado, mas **não uniformemente**.



// A aceleração vetorial do projétil é \vec{g} em todos os pontos da trajetória.

CJT/Zapt/Arquivo da editora



CJT/Zapt/Arquivo da editora

// O movimento de subida é retardado e o de descida, acelerado, mas não uniformemente. No ponto de altura máxima, a velocidade tem intensidade mínima, **não nula**. Como a trajetória é curvilínea (parabólica), a aceleração vetorial \vec{g} deve admitir também uma componente centrípeta em cada ponto, de modo que $\vec{a}_i + \vec{a}_{cp} = \vec{g}$.

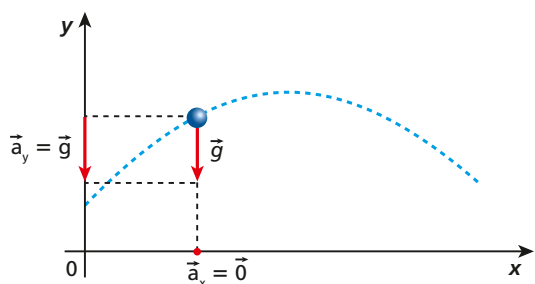
Como o movimento balístico é variado sem ser uniformemente variado, somos forçados a buscar modelos familiares que nos propiciem uma melhor compreensão e condições de estudo mais adequadas desse assunto.

Considerando-se um referencial cartesiano Oxy , como nos esquemas a seguir, pode-se notar que a aceleração vetorial \vec{g} projetada no eixo horizontal Ox é um ponto. Isso significa que nessa direção a aceleração vetorial (e escalar) é nula, o que implica **movimento uniforme**.

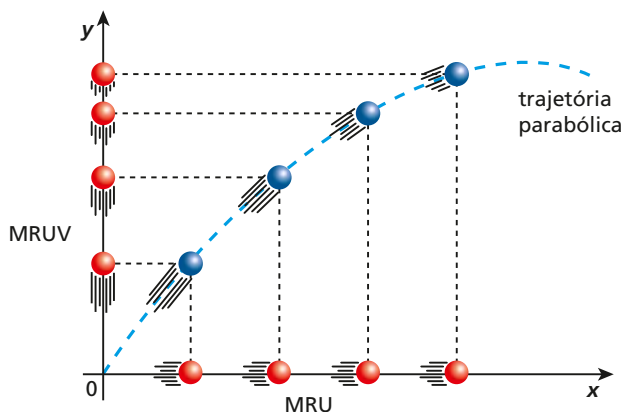
Por outro lado, a aceleração vetorial \vec{g} projetada no eixo vertical Oy aparece em verdadeira grandeza, isto é, surge como o próprio vetor \vec{g} . Por isso, nessa direção, a aceleração vetorial (e escalar) é constante e não nula, o que implica **movimento uniformemente variado**.

Diante do exposto, podemos inferir que o movimento parabólico sob a ação exclusiva do campo gravitacional é a **composição de dois movimentos** parciais mais simples: um horizontal, **retilíneo e uniforme**, e outro vertical, **retilíneo e uniformemente variado**, retardado na subida e acelerado na descida.

CJT/Zapp/Arquivo da editora



CJT/Zapp/Arquivo da editora



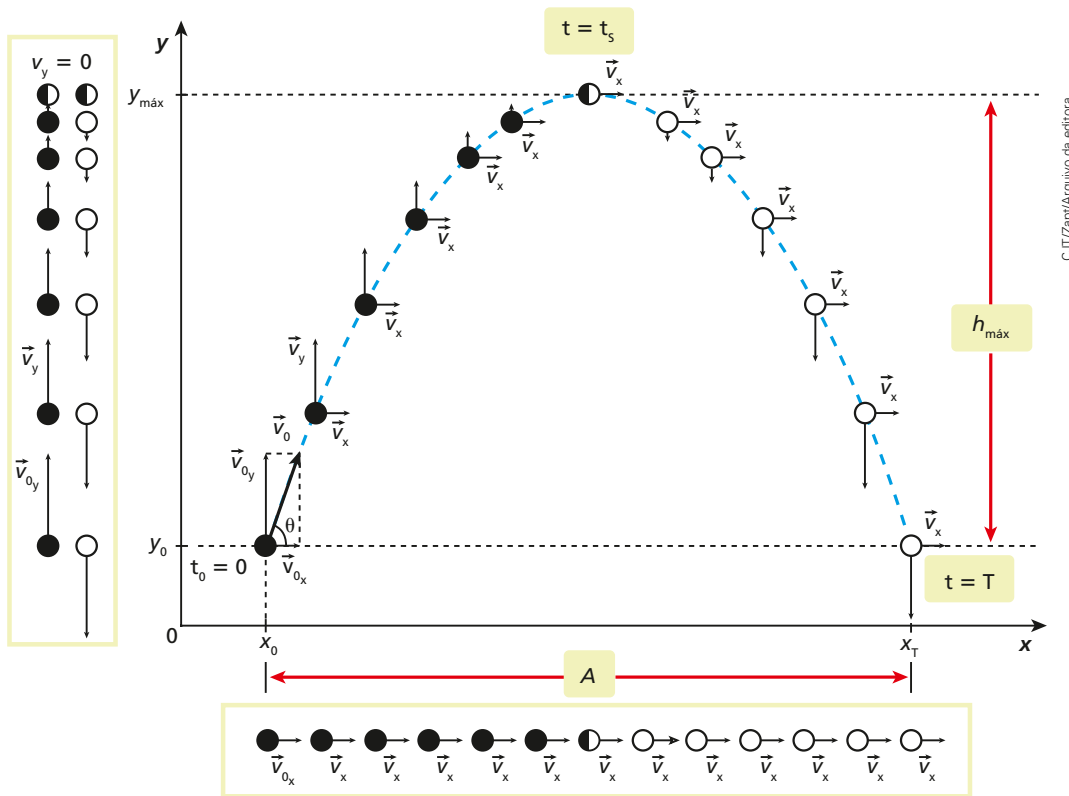
// Nesta ilustração reforçamos que o movimento balístico é composto de um **movimento retilíneo e uniforme (MRU) na horizontal** e um **movimento retilíneo e uniformemente variado (MRUV) na vertical**, retardado na subida e acelerado na descida.



Dean Clarke/Shutterstock

// Desprezada a resistência do ar, enquanto a bola descreve uma trajetória parabólica, sua sombra projetada ortogonalmente sobre o solo plano e horizontal segue em movimento retilíneo com velocidade escalar constante.

Vamos considerar a ilustração abaixo, em que uma bolinha descreve um voo balístico em relação ao referencial cartesiano **Oxy**, fixo no solo, sob a ação exclusiva da aceleração da gravidade, suposta constante, com intensidade g .



Repare alguns detalhes importantes nesse esquema que podem reforçar a compreensão do fenômeno:

- No instante de lançamento, $t_0 = 0$, a velocidade vetorial da bolinha, \vec{v}_0 , tem duas componentes, \vec{v}_{0y} e \vec{v}_{0x} , respectivamente, nas direções vertical e horizontal. As intensidades dessas componentes em função da intensidade de \vec{v}_0 e do ângulo de tiro θ ficam determinadas por:

$$\text{sen } \theta = \frac{v_{0y}}{v_0} \Rightarrow v_{0y} = v_0 \text{ sen } \theta \quad \text{cos } \theta = \frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v_{0x} = v_0 \text{ cos } \theta$$

- A intensidade da velocidade horizontal permanece constante, indicando que nessa direção o movimento é uniforme.
- No instante $t = t_s$, a bolinha atinge o ponto de altura máxima e sua velocidade vetorial é horizontal e **não nula**. É importante observar que nesse instante a velocidade vetorial da bolinha nada mais é do que \vec{v}_{0x} .
- No ponto de altura máxima, a componente vertical da velocidade vetorial é nula. Este é o ponto de inversão do sentido do movimento vertical.
- A intensidade da velocidade vetorial vertical diminui uniformemente na subida, indicando que o movimento é uniformemente retardado, e aumenta uniformemente na descida, indicando que o movimento é uniformemente acelerado. Como o eixo **Oy** está orientado para cima, a aceleração escalar na vertical é $\alpha_y = -g$.
- Em pontos de mesma altura em relação do nível de lançamento, a intensidade da velocidade vetorial na subida é igual à intensidade da velocidade vetorial na descida (simetria).

Cálculo do tempo de voo (T)

No caso da bolinha do esquema anterior, analisando-se o movimento uniformemente retardado de subida vertical, tem-se:

$$v_y = v_{0y} + \alpha_y t$$

Lembrando-se de que $v_{0y} = v_0 \sin \theta$ e que no instante $t = t_s$ a bolinha atinge a altura máxima, com $v_y = 0$, vem:

$$0 = v_0 \sin \theta - g t_s \Rightarrow g t_s = v_0 \sin \theta$$

Da qual:

$$t_s = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

Devido à simetria entre as situações ocorridas nas lombadas esquerda e direita da trajetória parabólica, podemos dizer que o tempo de descida é igual ao de subida. Assim, o tempo de voo, T , é o dobro do tempo t_s , isto é:

$$T = 2t_s \Rightarrow T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

NOTA!

Para uma mesma intensidade de \vec{v}_0 e em um mesmo local, T é diretamente proporcional a $\sin \theta$. Isso significa que quanto maior for o ângulo de tiro θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), maior será o tempo de voo do projétil.

NOTA!

Para uma mesma intensidade de \vec{v}_0 e em um mesmo local, $h_{\text{máx}}$ é diretamente proporcional ao quadrado de $\sin \theta$. Isso significa que quanto maior for o ângulo de tiro θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), maior será a altura máxima atingida pelo projétil.

Cálculo da altura máxima atingida ($h_{\text{máx}}$)

Apliquemos, agora, a **Equação de Torricelli** ao movimento uniformemente retardado de subida vertical.

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2\alpha_y \Delta y$$

Observando-se que $v_{0y} = v_0 \sin \theta$ e que no ponto em que $\Delta y = h_{\text{máx}}$, tem-se $v_y = 0$, segue-se que:

$$0 = (v_0 \sin \theta)^2 + 2(-g)h_{\text{máx}} \Rightarrow 2gh_{\text{máx}} = v_0^2 \sin^2 \theta$$

De onde se obtém:

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Cálculo do alcance horizontal (A)

Estudando-se o movimento uniforme da bolinha na horizontal, tem-se:

$$\Delta x = v_{0x} t$$

Lembrando-se de que $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ e que ocorre $\Delta x = A$ no instante $t = T$, isto é, em $t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$, vem:

$$A = v_0 \cos \theta \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

Da qual:

$$A = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \theta \cos \theta$$

A identidade trigonométrica $2 \sin \theta \cos \theta$ é bastante conhecida em Matemática:

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

e a expressão anterior também pode ser grafada na forma:

$$A = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

Alcance horizontal máximo ($A_{\text{máx}}$)

Em muitos movimentos balísticos, como nos esportes – nas modalidades de lançamento de disco, dardo ou martelo, ou mesmo em salto em distância –, há uma grande preocupação com o alcance horizontal do projétil, que deve ser o maior possível.

Qual deve ser o ângulo de tiro para que um projétil sob a ação exclusiva da gravidade obtenha o máximo alcance horizontal?

Vejamos.

Com base na última expressão do alcance horizontal e fazendo-se uma análise meramente matemática com v_0 e g constantes, teremos $A_{\text{máx}}$ quando $\text{sen } 2\theta$ for máximo. Como o maior seno existente é igual a 1, segue-se que:

$$A_{\text{máx}} \Leftrightarrow (\text{sen } 2\theta)_{\text{máx}} = 1$$

Daí, decorre que:

$$2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Para uma mesma intensidade de velocidade inicial e em um mesmo local, o ângulo de tiro que proporciona o **alcance horizontal máximo** é 45° .

Alexander Hassenstein/Getty Images



// O arremesso de disco provavelmente seja uma das modalidades olímpicas mais antigas. Supõe-se que tenha sido originada na Grécia, no ano 708 a.C. Nesse esporte, um disco de aço com massa próxima de 2 kg deve ser lançado o mais longe possível. Admitindo-se que o arremesso seja feito com a mesma intensidade da velocidade inicial e em um mesmo local, será obtido o alcance horizontal máximo quando o disco for disparado com um ângulo de tiro igual a 45° .

Alcance horizontal para ângulos complementares

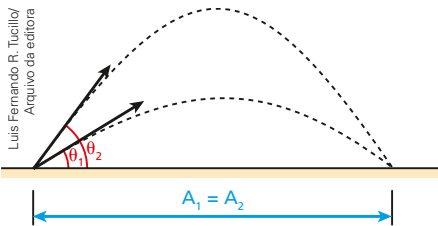
Recordemos que dois ângulos **são complementares** quando a soma de suas medidas totaliza um ângulo reto.

Se θ_1 e θ_2 são complementares:

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$$

Ora, sabemos porém que, para ângulos complementares, o seno de um deles é igual ao cosseno do outro, como ocorre, por exemplo, com 30° e 60° .

$$\text{sen } 30^\circ = \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \text{cos } 30^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



// No esquema acima, dois projéteis foram disparados de um mesmo ponto em condições ideais. As intensidades das velocidades iniciais foram iguais e os ângulos de tiro foram complementares, isto é, $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$. Nesse caso, os dois projéteis caíram em um mesmo local, manifestando **alcances horizontais iguais**, isto é, $A_1 = A_2$.

Diante disso, tendo-se em conta a primeira expressão que obtivemos para o alcance horizontal, $A = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \theta \cos \theta$, poderemos concluir que:

Para uma mesma intensidade de velocidade inicial e em um mesmo local, disparando-se obliquamente com **ângulos de tiro complementares** ($\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$), obtêm-se **alcances horizontais iguais**.

Equação da trajetória

Retomemos a situação da bolinha lançada obliquamente que utilizamos como base na dedução das fórmulas anteriores.

Desejamos obter aqui uma função $y = f(x)$ relacionando a abscissa x com a ordenada y da bolinha no referencial **Oxy**. Essa função é denominada **equação da trajetória** e serve, entre outras coisas, para comprovar que a trajetória de um projétil lançado obliquamente em condições ideais é um arco de parábola.

Para simplificar, consideraremos que a bolinha tenha sido lançada da origem do referencial. Diante disso, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$.

(I) Analisando-se o movimento uniforme na direção **Ox**:

$$x = v_{0x}t \Rightarrow x = v_0 \cos \theta t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \theta} \quad (1)$$

(II) Estudando-se, agora, o movimento uniformemente variado na direção **Oy**:

$$y = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow y = v_0 \sin \theta t - \frac{g}{2}t^2 \quad (2)$$

Substituindo-se a equação (1) na equação (2), segue-se que:

$$y = v_0 \sin \theta \frac{x}{v_0 \cos \theta} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2$$

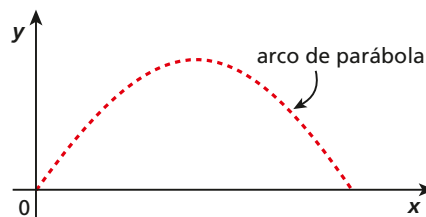
De onde se obtém:

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$

Trata-se de uma função do 2º grau em que o coeficiente do termo em x^2 é um número negativo. Isso significa, portanto, que a trajetória é um **arco de parábola** com concavidade voltada para baixo, como ilustramos a seguir.

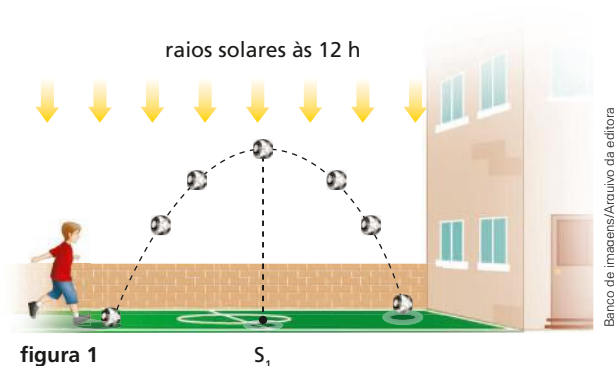


// Festival de arcos de parábola.

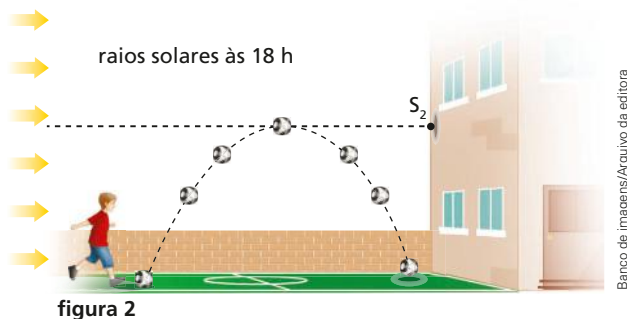


Exercícios Nível 1

1. Gael é um jovem que domina bem os fundamentos do futebol. Chutando sua bola às 12 h, como representa a figura 1, ele observa a sombra da “pelota” projetada pelos raios do sol a pino, S_1 , percorrer em linha reta o solo plano e horizontal.



Chutando a bola às 18 h, como representa a figura 2, ele observa a sombra da “pelota” projetada pelos raios do sol poente, S_2 , percorrer em linha reta a parede lateral de um prédio vertical.



Desprezando-se a resistência do ar no movimento da bola, é correto afirmar que Gael vê de sua posição:

- S_1 se afastar em movimento uniforme e S_2 subir e descer também em movimento uniforme.
 - S_1 se afastar em movimento uniformemente acelerado e S_2 subir em movimento uniforme e descer em movimento uniformemente acelerado.
 - S_1 se afastar em movimento uniforme e S_2 subir em movimento uniformemente retardado e descer em movimento uniformemente acelerado.
 - S_1 se afastar em movimento uniformemente acelerado e S_2 subir em movimento uniformemente retardado e descer em movimento uniformemente acelerado.
2. Uma equipe de futebol ensaia um lance que **ER** consiste de uma cobrança de falta com dois jogadores, **A** e **B**, posicionados lado a lado. O jogador **A** chuta a bola obliquamente sem muita força e, nesse mesmo instante, o jogador **B** se põe a correr em movimento retilíneo e uniforme de modo a interceptar a bola exatamente no instante em que esta atinge o gramado, admitido plano e horizontal. Supondo-se que numa determinada partida essa jogada tenha sido praticada com êxito, com o jogador **A** disparando a bola com velocidade vetorial \vec{v}_0 de intensidade 5,0 m/s, inclinada $\theta = 53^\circ$ em relação ao solo, adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\text{sen } 53^\circ = 0,8$ e $\text{cos } 53^\circ = 0,6$ e desprezando-se a influência do ar, pede-se determinar:
- a intensidade da velocidade vetorial desenvolvida pelo jogador **B**;
 - a altura máxima atingida pela bola em relação ao campo de jogo.

Resolução:

- A velocidade vetorial constante desenvolvida pelo jogador **B**, \vec{v}_B , foi igual à componente horizontal, \vec{v}_{0x} , da velocidade inicial \vec{v}_0 da bola.

$$v_B = v_{0x} \Rightarrow v_B = v_0 \cos \theta$$

$$v_B = 5,0 \cdot \cos 53^\circ$$

$$v_B = 5,0 \cdot 0,6$$

Da qual:

$$v_B = 3,0 \text{ m/s}$$

- A altura máxima atingida pela bola em relação ao campo de jogo, H , fica determinada estudando-se o movimento vertical uniformemente variado da bola.

Equação de Torricelli:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2\alpha_y \Delta y$$

Lembrando-se de que

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta = 5,0 \sin 53^\circ = 5,0 \cdot 0,8 = 4,0 \text{ m/s}$$

e que $\alpha_y = -g = -10 \text{ m/s}^2$ (a trajetória foi orientada para cima) e que no ponto de altura máxima $v_y = 0$, determina-se o valor de H .

$$0 = (4,0)^2 + 2(-10)H \Rightarrow 20H = 16$$

De onde se obtém:

$$H = 0,8 \text{ m} = 80 \text{ cm}$$

3. O tênis de mesa – às vezes chamado de pingue-pongue para desespero de muitos jogadores – é um esporte de lances super-rápidos, que exigem dos praticantes bastante agilidade, com tempos de reação extremamente curtos.



Lucas Uebel/Getty Images

Admita que na fotografia acima o jogador de costas na imagem golpee a bolinha no exato momento em que esta atinge a altura máxima logo depois de haver quicado na mesa de jogo. Nesse instante, a velocidade da bolinha tem intensidade $1,5 \text{ m/s}$ e este corpo está elevado de 20 cm em relação à superfície horizontal da mesa. Sendo \vec{v}_0 a velocidade vetorial da bolinha imediatamente depois de quicar na mesa para receber a raquetada e θ o ângulo de inclinação dessa velocidade em relação à direção horizontal, desprezando-se a resistência do ar e adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, pede-se determinar:

- a) o módulo de \vec{v}_0 ; b) o seno do ângulo θ .
4. Nos esportes em geral, várias são as modalidades em que corpos são disparados obliquamente, descrevendo trajetórias praticamente parabólicas. É o caso, por exemplo, do futebol, do basquete, do vôlei e do golfe, além dos lançamentos de dardos, discos e martelos.

Nestes últimos casos, almeja-se que o projétil disparado vá o mais longe possível, isto é, consiga o máximo alcance horizontal.



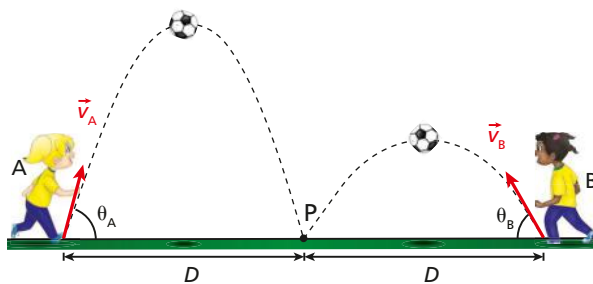
Andy Lyons/Getty Images

- // O lançamento de dardos faz parte do atletismo e constitui modalidade olímpica.

Se não levarmos em conta a resistência do ar e admitirmos que todos os objetos serão lançados com a mesma intensidade de velocidade inicial e em um mesmo estádio, os técnicos dos lançamentos de discos, dardos e martelos deverão orientar seus atletas a fazerem os disparos com um ângulo de tiro, em relação à direção horizontal, igual a:

a) 30° b) 45° c) 60° d) 75° e) 90°

5. No esquema abaixo, duas garotas **A** e **B** posicionadas nos locais indicados conseguem atingir, chutando duas bolas, uma pequena lata posicionada em um ponto **P**, equidistante das duas jovens. As velocidades com que as bolas são disparadas, \vec{v}_A e \vec{v}_B , têm intensidades iguais, mas são direcionadas segundo ângulos de tiro diferentes, respectivamente θ_A e θ_B , de modo que a bola de **A** vai mais alto que a de **B**.

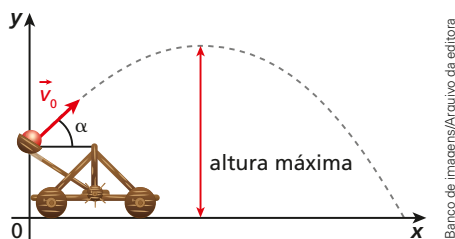


Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesse contexto, o campo gravitacional é uniforme e a resistência do ar pode ser ignorada. Sendo assim, é necessariamente correto que:

- a) $\theta_A = \theta_B = 45^\circ$
b) $\theta_A = 60^\circ$ e $\theta_B = 30^\circ$
c) $\theta_A = 53^\circ$ e $\theta_B = 37^\circ$
d) $\theta_A + \theta_B = 60^\circ$
e) $\theta_A + \theta_B = 90^\circ$

6. Uma catapulta de brinquedo dispara uma bolinha com velocidade vetorial \vec{v}_0 , que descreve a trajetória esboçada abaixo, definida em relação ao referencial cartesiano Oxy .



Se a bolinha se desloca sob a ação exclusiva do campo gravitacional, dentre os vetores abaixo, o que mais bem representa sua variação de velocidade vetorial entre o ponto de lançamento e o ponto de altura máxima é:

- a) b) c) d)

7. Indignado com uma tampinha de garraga PET jogada na calçada plana e horizontal, Felipe dá um chute nesse objeto, levando-o diretamente ao interior de uma caçamba estacionada na rua, rente ao meio-fio. A tampinha é disparada com velocidade inicial \vec{v}_0 de intensidade $7,5 \text{ m/s}$, inclinada de $\theta = 53^\circ$ em relação à superfície da calçada e atinge o contêiner já em seu movimento descendente. Desprezando-se a resistência do ar e adotando-se $\sin 53^\circ = 0,8$, $\cos 53^\circ = 0,6$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, pede-se determinar:

- a) a intensidade da velocidade da tampinha no ponto de altura máxima de sua trajetória;
b) a altura máxima atingida pela tampinha em relação à superfície da calçada.

8. Um dos armamentos ainda utilizados pelo Exército Brasileiro é o Obuseiro 155 mm M 114 AR, como o da imagem abaixo, com alcance horizontal máximo estimado em $14,6 \text{ km}$.



CPC Collection/Alamy/Fotorena

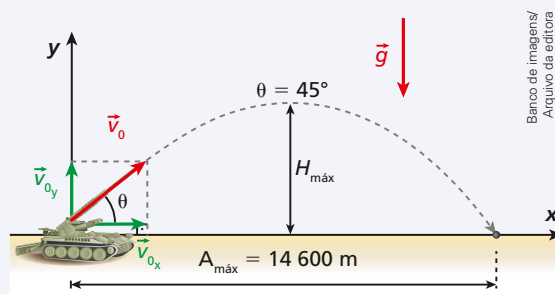
Admita que em uma manobra militar esse obuseiro seja disparado em um terreno plano e horizontal com vistas a atingir um alvo posicionado no ponto de alcance máximo do armamento.

Desprezando-se o efeito do ar no movimento do projétil e adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, responda:

- a) Qual a intensidade da velocidade com que o projétil deixa o obuseiro?
b) Qual a altura máxima atingida pelo projétil nesse disparo?

Resolução:

Devemos recordar inicialmente que o máximo alcance horizontal ocorre quando o ângulo de tiro é $\theta = 45^\circ$, como representa o esquema abaixo.



Cálculo das intensidades das componentes vertical e horizontal da velocidade inicial de lançamento do projétil, \vec{v}_0 , respectivamente, \vec{v}_{0x} e \vec{v}_{0y} . Sendo $\theta = 45^\circ$, decorre que:

$$v_{0y} = v_{0x} = v_0 \sin 45^\circ \Rightarrow v_{0y} = v_{0x} = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- a) (I) O tempo total de voo, T , pode ser obtido analisando-se o movimento uniformemente variado do projétil na direção vertical.

Com a trajetória vertical orientada para cima, tem-se $\alpha_y = -g$ e, na chegada do projétil ao solo no ponto de alcance máximo, $v_y = -v_{0y}$.

Logo:

$$v_y = v_{0y} + \alpha_y t \Rightarrow -v_{0y} = v_{0y} - gT \Rightarrow gT = 2v_{0y}$$

$$T = \frac{2v_{0y}}{g} \Rightarrow T = \frac{2v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}}{10} \Rightarrow T = \frac{v_0 \sqrt{2}}{10} \quad (1)$$

(II) O alcance horizontal máximo do projétil, $A_{\text{máx}}$, fica determinado estudando-se o movimento uniforme na direção horizontal.

$$\Delta x = v_{0x} t \Rightarrow A_{\text{máx}} = v_{0x} T \quad (2)$$

Lembrando-se que $A_{\text{máx}} = 14\,600\text{ m}$,

$$v_{0x} = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e substituindo-se (1) em}$$

(2), segue-se que:

$$14\,600 = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{v_0 \sqrt{2}}{10} \Rightarrow v_0^2 = 146\,000 \text{ (SI)}$$

De onde se obtém:

$$v_0 \cong 382 \text{ m/s}$$

b) A altura máxima atingida pelo projétil nesse disparo, $H_{\text{máx}}$, fica determinada analisando-se o movimento uniformemente variado na vertical:

Equação de Torricelli:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2\alpha_y \Delta y$$

Lembrando-se de que o ponto de altura máxima $v_y = 0$, segue-se que:

$$0 = v_{0y}^2 + 2(-g)H_{\text{máx}} \Rightarrow H_{\text{máx}} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

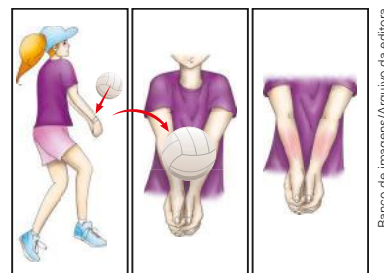
$$\text{Com } v_{0y} = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = 382 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m/s} \cong 270 \text{ m/s}$$

e $g = 10 \text{ m/s}^2$, vem:

$$H_{\text{máx}} \cong \frac{(270)^2}{2 \cdot 10} \therefore H_{\text{máx}} \cong 3\,645 \text{ m}$$

9. O líbero, no vôlei, é um atleta especializado nos fundamentos que são realizados com mais frequência no fundo da quadra, isto é, na recepção e na defesa. Essa função foi introduzida pela Federação Internacional de Voleibol (FIVB) em 1998, com o propósito de permitir disputas mais longas de pontos e tornar o jogo mais atraente para o público.

Esse jogador deve ser muito bom nas “manchetes”, ilustradas no esquema a seguir, muito utilizadas na recepção de saques e jogadas de ataque do time adversário.

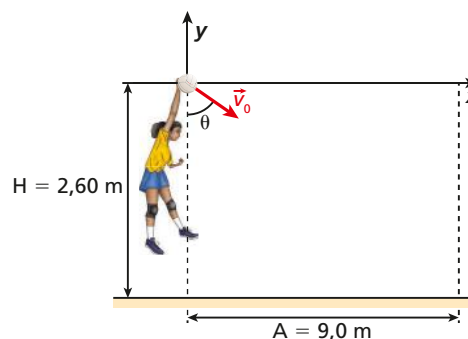


Banco de imagens/Arquivo da editora

Suponha que na defesa de um violento saque o líbero de uma equipe tenha devolvido a bola, praticamente do nível do solo, quase da linha de fundo, para o outro lado da rede, utilizando uma manchete espetacular. Admita que a bola tenha sido rebatida com velocidade \vec{v}_0 de intensidade 10 m/s , inclinada 53° em relação à superfície da quadra. Desprezando-se os efeitos do ar, considerando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\text{sen } 53^\circ = 0,8$ e $\text{cos } 53^\circ = 0,6$, pede-se determinar:

- a altura máxima, H , atingida pela bola;
- a distância horizontal, A , percorrida pela bola até tocar o piso da quadra adversária, caracterizando um precioso ponto.

10. Uma jogadora de voleibol salta no bloqueio e rebate uma bola na linha da rede, a uma altura $H = 2,60 \text{ m}$, com velocidade inicial \vec{v}_0 formando um ângulo θ com a direção vertical, como representa o esquema. Nesse contexto, a influência do ar pode ser desprezada e adota-se $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

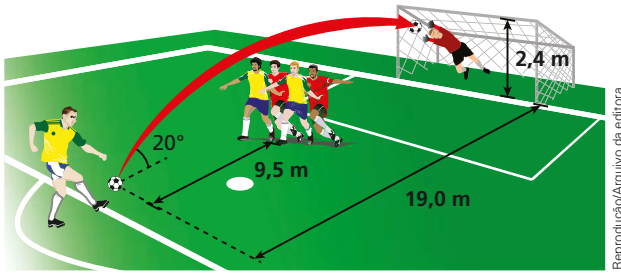


Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo-se que a distância horizontal entre a linha da rede e a linha de fundo da quadra é $A = 9,0 \text{ m}$ e considerando-se que a bola leva exatos $0,20 \text{ s}$ para voar no plano da figura e atingir esta marca, pede-se determinar a tangente do ângulo θ .

11. (PUC-SP) Considere a figura a seguir, na qual um jogador chuta a bola com velocidade de módulo 72 km/h em um ângulo de 20° em relação à horizontal. A distância inicial entre a bola e a barreira é de $9,5 \text{ m}$ e entre a bola e a linha do gol, 19 m . A trave superior do gol encontra-se a $2,4 \text{ m}$ do solo. Considere desprezível o trabalho de forças dissipativas sobre a bola.

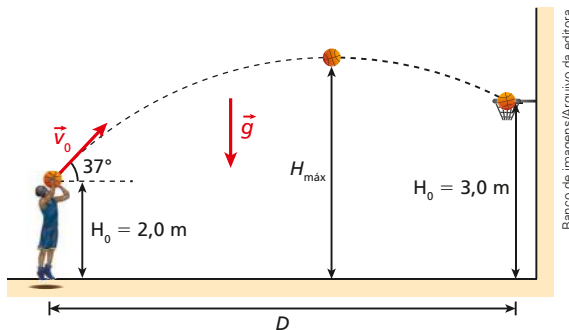
Dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$; $\text{sen } 20^\circ = 0,35$ e $\text{cos } 20^\circ = 0,95$.



- Determine qual é a máxima altura que a barreira pode ter para que a bola a ultrapasse.
- Determine a distância entre a trave superior e a bola, no instante em que ela entra no gol.

12. (OBC) Uma pequena esfera é lançada obliquamente do solo horizontal com velocidade vetorial de módulo $v_0 = 10 \text{ m/s}$. O ângulo de tiro em relação ao solo é θ , tal que $\text{sen } \theta = 0,6$ e $\text{cos } \theta = 0,8$. Despreze os atritos e considere $g = 10 \text{ m/s}^2$. Nos instantes em que as alturas atingidas pela esfera em relação ao plano de lançamento são iguais a $1,6 \text{ m}$, quais as distâncias desse corpo à vertical do ponto de lançamento?

13. O astro da NBA (Associação Nacional de Basquete dos Estados Unidos), Stephen Curry, do Golden State Warriors, é um grande pontuador, especialmente em cestas de três pontos, quando a bola é arremessada de fora da linha semicircular correspondente a essa pontuação. Suponhamos que Curry tenha arremessado uma bola com velocidade inicial \vec{v}_0 formando um ângulo $\theta = 37^\circ$ em relação à horizontal, conforme ilustra o esquema a seguir. Consideremos desprezível a resistência do ar e adotemos para a intensidade da aceleração da gravidade o valor $g = 10 \text{ m/s}^2$.



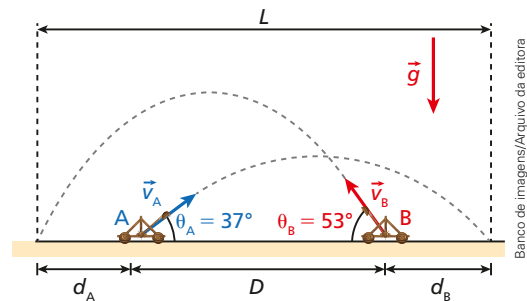
Sabendo-se que a bola atingiu a cesta decorrido, a partir do lançamento, um intervalo de tempo $T = 1,0 \text{ s}$, adotando-se $\text{sen } \theta = 0,6$ e $\text{cos } \theta = 0,8$ e levando-se em conta os dados indicados no esquema, pede-se determinar:

- o módulo de \vec{v}_0 ;

b) a distância horizontal D ;

c) a altura máxima, $H_{\text{máx}}$, atingida pela bola em relação ao piso da quadra.

14. Admita que em uma batalha ao estilo medieval duas catapultas **A** e **B** disparem simultaneamente enormes pedras, uma contra a outra, com velocidades vetoriais \vec{v}_A e \vec{v}_B , ambas com igual intensidade $v_0 = 50 \text{ m/s}$, mas inclinadas $\theta_A = 37^\circ$ e $\theta_B = 53^\circ$, respectivamente, em relação ao solo plano e horizontal. As armas estão distanciadas de $D = 180 \text{ m}$ e as pedras, lançadas por **A** e **B**, ultrapassam seus respectivos alvos, atingindo o solo a uma distância d_B da catapulta **B** e a uma distância d_A da catapulta **A**, como representa, fora de escala, o esquema a seguir:



Desprezando-se os efeitos do ar, adotando-se para a aceleração da gravidade o valor $g = 10 \text{ m/s}^2$ e fazendo-se $\text{sen } 37^\circ = \text{cos } 53^\circ = 0,6$ e $\text{sen } 53^\circ = \text{cos } 37^\circ = 0,8$, pede-se determinar:

- a distância L entre os pontos de impacto contra o solo das pedras disparadas por **A** e **B**;
- o intervalo de tempo T decorrido entre esses impactos.

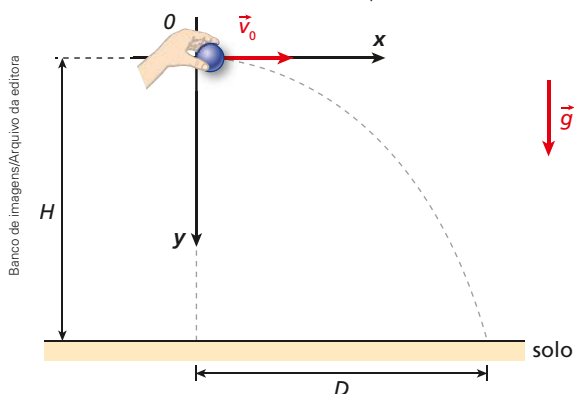
15. Inconformado pelo fato de o árbitro haver marcado uma falta violenta sua contra um atacante da equipe adversária em uma partida de futebol, o zagueiro Pedreira chutou a bola obliquamente para cima no instante $t_0 = 44 \text{ min}$ do segundo tempo de jogo, o que lhe rendeu um cartão amarelo mais uma advertência verbal.

Admita que a bola tenha sido disparada do nível do gramado com velocidade inicial \vec{v}_0 de intensidade 72 km/h , inclinada de 53° em relação ao solo. Desprezando-se a resistência do ar, adotando-se para a aceleração da gravidade módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e considerando-se $\text{sen } 53^\circ = 0,8$ e $\text{cos } 53^\circ = 0,6$, pede-se determinar:

- a altura h_1 da bola em relação ao gramado no instante $t_1 = 44 \text{ min } 2,0 \text{ s}$;
- a intensidade v_2 da velocidade da bola no instante $t_2 = 44 \text{ min } 2,1 \text{ s}$.

4. Lançamento horizontal

Admitamos a situação a seguir em que um objeto será lançado horizontalmente com velocidade de intensidade v_0 de uma altura H em relação ao solo, plano e horizontal.



Desprezando-se os efeitos ao ar, o objeto vai descrever um arco de parábola em movimento acelerado, mas não uniformemente.

Trata-se de um semimovimento balístico para o qual também se aplicam os conceitos citados no bloco anterior; isto é, na horizontal, o movimento é retilíneo e uniforme e, na vertical, é retilíneo e uniformemente variado (acelerado).

Para este caso sugerimos a utilização de um referencial Oxy com origem no ponto de lançamento, eixo Ox orientado no sentido da velocidade inicial e eixo Oy orientado para baixo. Com isso, a aceleração escalar na vertical fica positiva, isto é, $\alpha_y = g$.

Cálculo do tempo de queda (t_q)

Analisando-se o movimento uniformemente acelerado na vertical, vem:

$$\Delta y = v_{0y} t + \frac{\alpha_y}{2} t^2$$

Observando-se que no ato do lançamento a velocidade do objeto é horizontal e, conseqüentemente, $v_{0y} = 0$ e que, para $t = t_q$, tem-se $\Delta y = H$, segue-se:

$$H = \frac{g}{2} t_q^2 \Rightarrow t_q^2 = \frac{2H}{g}$$

Da qual:

$$t_q = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

NOTA!

O tempo de queda t_q é diretamente proporcional à raiz quadrada da altura H . Isso significa que, quadruplicando-se H , t_q duplica.

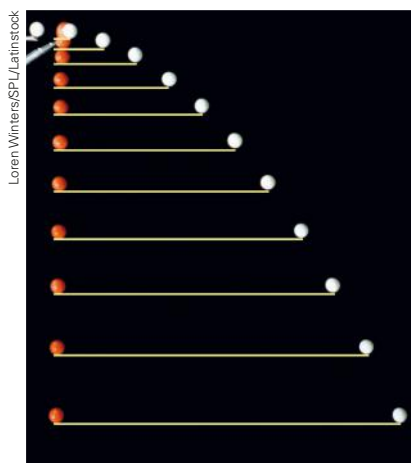
É importante destacar que:

O tempo de queda **independe** da velocidade horizontal de lançamento.

Isso quer dizer que, com pequeno v_0 ou grande v_0 , o tempo de voo do objeto até o solo será sempre o mesmo. Tal fato pode ser explicado com base no **Princípio da Independência dos Movimentos**, de Galileu: o movimento vertical ocorre independentemente, como se o movimento horizontal não existisse.

Na imagem ao lado, temos uma foto estroboscópica em que uma partícula foi lançada horizontalmente para a direita no mesmo instante em que outra foi largada do repouso da mesma altura em relação ao solo.

Acompanhe os fotogramas e observe que as duas partículas atingem o nível mais baixo juntas, depois do mesmo tempo de queda.



Cálculo do alcance horizontal (D)

Deveremos examinar agora o movimento uniforme na horizontal:

$$\Delta x = v_0 t$$

Com $t = t_q$, ou seja, $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, obtém-se $\Delta x = D$.

Assim:

$$D = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

NOTA!

O alcance horizontal desse lançamento é diretamente proporcional à intensidade da velocidade horizontal de lançamento. Dobrando-se v_0 , por exemplo, D também dobra e o objeto vai "o dobro mais longe".

JÁ PENSOU NISTO?

O canhão que nunca atirou

O Tsar Pushka, ou simplesmente o canhão do Czar (imperador da Rússia), é um armamento de proporções desconhecidas. Construído em 1586 por Andrey Tchokov (c.1545-1629), o canhão tem massa próxima de 40 toneladas, comprimento igual a 5,34 metros, calibre de 890 mm e diâmetro externo de 1 200 mm. É considerado pelo Guinness Book o maior canhão por calibre do mundo, sendo uma grande atração turística de Moscou.

Este canhão, concebido para defender o Kremlin moscovita em tempos de guerra, possui a capacidade de atirar balas de 800 kg. Apesar de seu grande poderio militar, o canhão nunca foi utilizado em combate, o que leva a crer que na verdade tenha sido construído apenas como uma demonstração simbólica do poderio militar e da engenharia russa.

Suponhamos que esse imenso canhão esteja instalado no topo de um elevado penhasco vertical como arma de proteção costeira. Admitamos que ele dispare horizontalmente uma de suas balas esféricas rumo ao mar e que no mesmo instante outra bala seja colocada em queda vertical do mesmo ponto do disparo. Desprezando-se a resistência do ar, é de constatação teórica que, quando a bala disparada pelo canhão atingir a água, o mesmo acontecerá com a outra bala, já que ambas terão movimentos verticais idênticos.



raeika108/Shutterstock

Ampliando o olhar

Você é bom de mira?

Imaginemos a situação hipotética de um parque de diversões que dispõe da seguinte atração: um desafio de pontaria.

Você é informado previamente de que no exato instante em que acionar o gatilho de uma espingarda lançadora de dardos, uma latinha será desprendida magneticamente de uma estrutura de sustentação, passando a cair ao longo de um segmento de reta vertical.

Desprezemos as influências atmosféricas nos movimentos do dardo e da latinha e admitamos que o alcance horizontal do dardo nas condições do desafio seja maior que a distância d entre a saída do cano da arma e a vertical que passa pela latinha. Seja, ainda, g a intensidade da aceleração da gravidade.

Veja o esquema a seguir e, com base nessas informações, responda:

A linha de mira da espingarda no momento do disparo deverá estar dirigida para cima da posição inicial da latinha, diretamente para a posição inicial da latinha ou para baixo dessa posição?

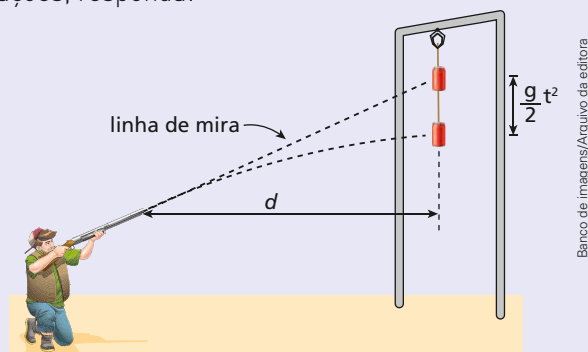
E a resposta a essa questão é: a linha de mira da espingarda deverá estar dirigida exatamente para a posição inicial da latinha.

Isso deverá ocorrer porque, em cada instante t , tanto o dardo como a latinha apresentarão o mesmo afastamento vertical em relação à linha de mira indicada

no esquema, isto é $\frac{g}{2}t^2$, já que, em relação a essa linha, ambos estarão dotados de deslocamentos verticais iguais e simultâneos sob a ação exclusiva da gravidade.

Outra explicação para o fato é a seguinte: como o dardo e o projétil têm aceleração vetorial igual a \vec{g} , **a aceleração relativa entre esses dois corpos é nula.**

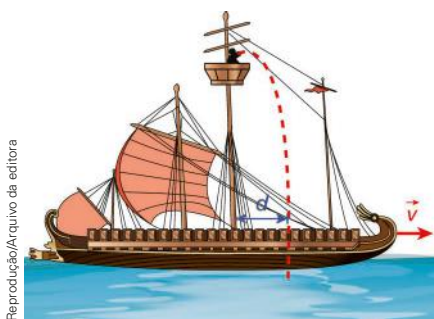
Nesse caso, “um não enxerga a ação da gravidade sobre o outro” e tudo se passa como se a latinha permanecesse em repouso, “flutuando” em sua posição inicial, e o projétil seguisse em movimento retilíneo e uniforme, mantendo sua velocidade inicial, adquirida no ato do disparo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Exercícios Nível 1

16. (Vunesp) Um marinheiro, situado no cesto de uma embarcação que se move com velocidade horizontal constante \vec{v} , lança horizontalmente um objeto na mesma direção e sentido em que a embarcação se move. O objeto cai a uma distância d da base do mastro que suporta o cesto, conforme mostra a figura.



Reprodução/Arquivo da editora

Desprezando-se os efeitos da resistência do ar, se a velocidade da embarcação fosse $2\vec{v}$, a distância da base do mastro a que o objeto cairia ao ser lançado nas mesmas condições anteriores

- seria a mesma da anterior.
- seria a metade da anterior.
- seria um quarto da anterior.
- dependeria da altura do cesto.
- seria o dobro da anterior.

17. Uma figura lendária do cinema é Rambo, imortalizado pelo ator e cineasta norte-americano Sylvester Stallone. Numa das cenas antológicas da série de películas, o personagem dispara uma metralhadora horizontalmente.



TriStar Pictures/Everett Collection/Fotoarena

Vamos imaginar que a resistência do ar pudesse ser desprezada no local dos disparos, realizados em um imenso terreno plano e horizontal. Suponhamos ainda que as cápsulas deflagradas tivessem deixado lateralmente a arma, a partir do repouso, no mesmo instante em que os respectivos projéteis foram expelidos.

Sobre esse contexto, é correto afirmar:

- Uma cápsula deflagrada atingiu o solo antes do respectivo projétil;

- b) Uma cápsula deflagrada atingiu o solo depois do respectivo projétil;
- c) Uma cápsula deflagrada atingiu o solo no mesmo instante do respectivo projétil;
- d) Uma cápsula deflagrada atingiu o solo, mas o respectivo projétil seguiu em linha reta, sem jamais ter atingido o solo;
- e) Tanto a trajetória da cápsula deflagrada como a do respectivo projétil foram parabólicas, em relação a Rambo.

18. Um garoto lança uma bolinha de papel horizontalmente da janela de sua casa, a 3,2 m de altura em relação ao solo do terreno externo, plano e horizontal, com velocidade de intensidade igual a 2,5 m/s. Desprezando-se a resistência do ar e adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, pede-se determinar a que distância do pé da vertical da janela a bolinha atinge o solo.

Resolução:

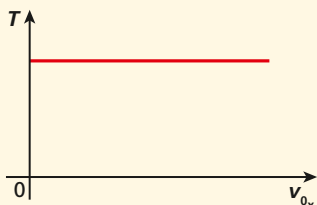
(I) A bolinha vai realizar até o solo dois movimentos parciais: o vertical, retilíneo e uniformemente acelerado pela ação da gravidade, e o horizontal, retilíneo e uniforme. Analisando-se o movimento vertical, calcula-se o tempo de queda, T , da bolinha.

$$\Delta y = v_{0y}t + \frac{a_y}{2}t^2 \Rightarrow H = \frac{g}{2}T^2$$

Da qual:

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (1)$$

Nota: T independe de v_{0x} .



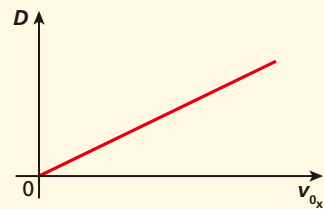
(II) O alcance horizontal do lançamento, D , fica determinado estudando-se o movimento uniforme horizontal.

$$\Delta x = v_{0x}t \Rightarrow D = v_{0x}T \quad (2)$$

Substituindo-se a equação (1) em (2), segue-se que:

$$D = v_{0x} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Nota: D é diretamente proporcional a v_{0x} .



Sendo $v_{0x} = 2,5 \text{ m/s}$, $H = 3,2 \text{ m}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcula-se D :

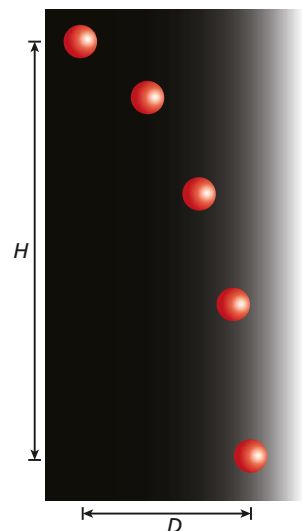
$$D = 2,5 \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2}{10}}$$

De onde se obtém:

$$D = 2,0 \text{ m}$$

19. Depois de localizar um grupo de naufragos a deriva em um pequeno bote em alto-mar, o piloto de um avião em voo horizontal, à altitude $H = 500 \text{ m}$ e com velocidade de módulo $v_0 = 288 \text{ km/h}$, ordena a um tripulante que seja largado da escotilha da aeronave um pacote flutuante contendo suprimentos e insumos básicos de sobrevivência de modo que este caia o mais próximo possível do bote. Sabendo-se que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando-se a resistência do ar, que distância será percorrida horizontalmente pelo pacote até cair na água?

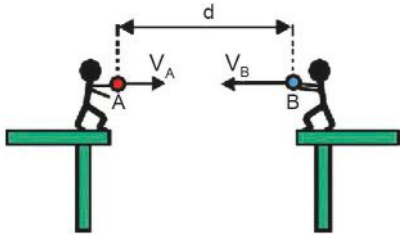
20. Na foto estroboscópica ao lado, uma bolinha foi lançada horizontalmente com velocidade de módulo igual a 60 cm/s, voando sob a ação exclusiva da gravidade de intensidade igual a 10 m/s^2 .



Sabendo-se que o intervalo de tempo entre dois fotografamas consecutivos observados na imagem foi $T = 0,10 \text{ s}$, pede-se determinar, em centímetros:

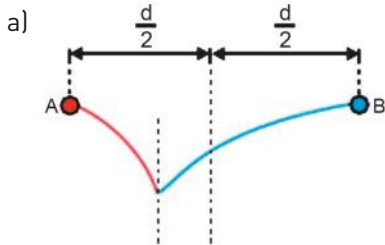
- a) o desnível H entre a primeira e a última imagem da bolinha;
- b) a distância horizontal D entre a primeira e a última imagem da bolinha.

21. (Facisb-SP) Dois garotos estão em repouso sobre plataformas elevadas e arremessam, simultaneamente e em sentidos opostos, duas bolas, **A** e **B**, com velocidades iniciais horizontais de módulos, V_A e V_B com $V_A < V_B$. As bolas se movem, então, em um mesmo plano vertical que também contém os garotos, livres de resistência do ar.

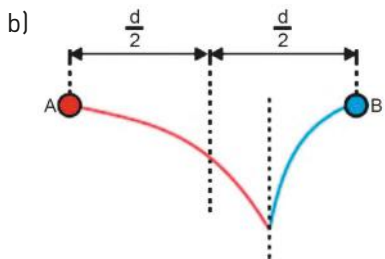


Reprodução/Facisb, 2016.

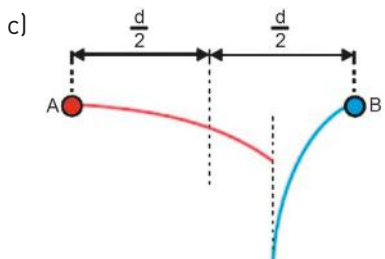
A figura que representa, corretamente, as trajetórias das bolas depois dos arremessos é



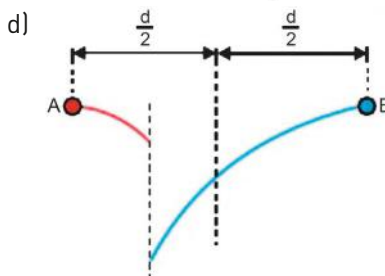
Reprodução/Facisb, 2016.



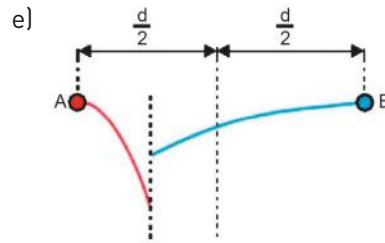
Reprodução/Facisb, 2016.



Reprodução/Facisb, 2016.

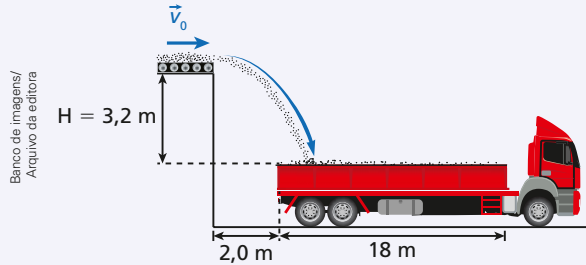


Reprodução/Facisb, 2016.



Reprodução/Facisb, 2016.

22. Uma esteira transportadora lança minério horizontalmente com velocidade \vec{v}_0 . Considere desprezível a influência do ar e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Determine o intervalo das intensidades de \vec{v}_0 para que o minério caia dentro da carroceria do caminhão.
- Se o desnível H fosse maior, o intervalo citado no item anterior aumentaria, diminuiria ou permaneceria o mesmo?

Resolução:

- a) Deve-se impedir que o minério colida contra as bordas da carroceria do caminhão e, para isso, o alcance horizontal de lançamento desse material, d , deverá ser tal que:

$$2,0 \text{ m} < d < 20 \text{ m}$$

Lembrando-se de que as grandezas $H = 3,2 \text{ m}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$ são constantes, vem:

$$(I) d_1 = v_{01} \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow 2,0 = v_{01} \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2}{10}}$$

$$v_{01} = 2,5 \text{ m/s}$$

$$(II) d_2 = v_{02} \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow 20 = v_{02} \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2}{10}}$$

$$v_{02} = 25 \text{ m/s}$$

Sendo v_0 e d diretamente proporcionais, decorre que:

$$2,5 \text{ m/s} < v_0 < 25 \text{ m/s}$$

b) Como comentamos no item anterior, $2,0 \text{ m} < d < 20 \text{ m}$.

Mas, sendo $d = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$, vem:

$$2,0 < v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} < 20$$

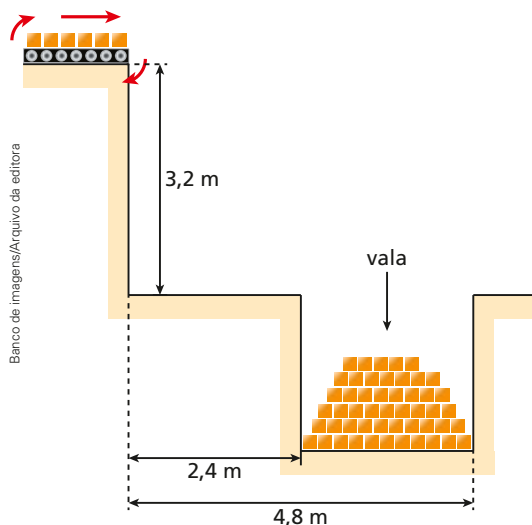
Multiplicando-se os termos dessa desigualdade por $\sqrt{\frac{g}{2H}}$, segue-se que:

$$2,0 \sqrt{\frac{g}{2H}} < v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} \sqrt{\frac{g}{2H}} < 20 \sqrt{\frac{g}{2H}}$$

$$2,0 \sqrt{\frac{g}{2H}} < v_0 < 20 \sqrt{\frac{g}{2H}}$$

Analisando-se a última expressão, depreende-se que, se aumentarmos o desnível H , seriam reduzidas tanto a intensidade da velocidade menor como a intensidade da velocidade maior. Dessa forma, o intervalo de velocidades determinado anteriormente seria "estreitado", reduzindo-se de $\cong 22,5 \text{ m/s}$ para algo menor que isso.

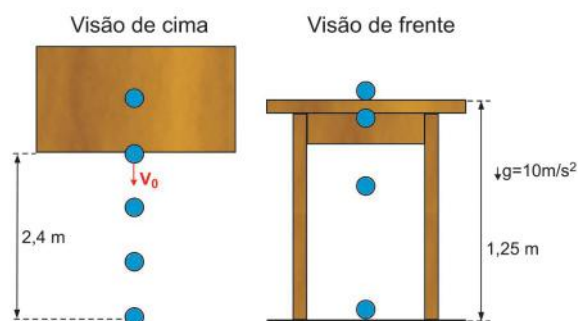
23. Uma indústria descarta alguns de seus rejeitos lançando-os em uma vala que é posteriormente aterrada. Esses rejeitos são acondicionados em pequenas caixas herméticas que são lançadas por uma esteira transportadora na horizontal, conforme representa o esquema.



O operador do equipamento pode regular a intensidade v_0 da velocidade de arrastamento das caixas de modo a preencher a vala da maneira mais uniforme possível, mas tudo deve ocorrer sem que as caixas escorreguem em relação à esteira. Adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando-se a resistência do ar, pede-se determinar o intervalo de valores admissíveis para v_0 tal que nenhuma caixa fique fora da vala.

24. (Olimpíada Peruana de Física) Um avião de treinamento militar voa horizontalmente, em linha reta, a uma altitude relativa ao solo de 500 m, com velocidade escalar constante de módulo 180 km/h. Seu piloto solta um artefato no instante em que está exatamente na vertical de um jipe que trafega no solo plano e horizontal, em linha reta e no mesmo sentido do avião, em movimento uniformemente acelerado, mas com velocidade escalar de módulo 72 km/h no instante da soltura do artefato. Desprezando-se a resistência do ar e adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, qual deverá ser a aceleração escalar do veículo para que este seja atingido no solo pelo artefato?

25. (Famerp-SP) Uma bola rola sobre uma bancada horizontal e a abandona com velocidade \vec{v}_0 , caindo até o chão. As figuras representam a visão de cima e a visão de frente desse movimento, mostrando a bola em instantes diferentes durante sua queda, até o momento em que ela toca o solo.



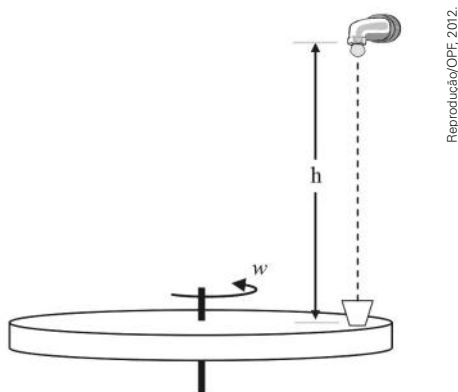
Desprezando a resistência do ar e considerando-se as informações das figuras, o módulo de \vec{v}_0 é igual a

- 2,4 m/s.
- 0,6 m/s.
- 1,2 m/s.
- 4,8 m/s.
- 3,6 m/s.

Reprodução/Famerp, 2017.

26. (Olimpíada Peruana de Física) Um vaso se encontra preso a uma plataforma circular a 60 cm de seu centro e está girando com velocidade escalar constante de 18 m/s.

No instante em que o vaso se encontra na vertical da boca da torneira, desprende-se uma gota d'água que cai livremente a partir do repouso acertando o vaso no exato instante em que este completa uma volta.

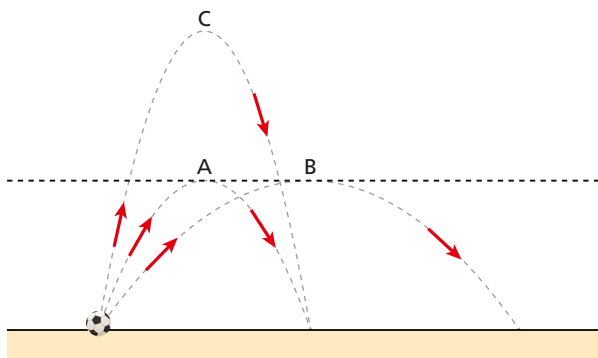


Reprodução/OPF, 2012.

Despreze o efeito do ar e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\pi = 3$. A altura h em que se encontra a torneira é mais próxima de:

- a) 5 cm c) 15 cm e) 25 cm
b) 10 cm d) 20 cm

27. (Ceperj) Durante um treino num campo de futebol, um jogador bate faltas, ora com o objetivo de encobrir uma barreira, ora com o objetivo de fazer um lançamento a grande distância. Para cada um desses objetivos, é necessário chutar a bola de maneira diferente, de modo que ela percorra trajetórias também diferentes. Na figura abaixo, estão representadas três trajetórias, **A**, **B** e **C** da bola, correspondentes a três chutes, supondo-se a resistência do ar desprezível.

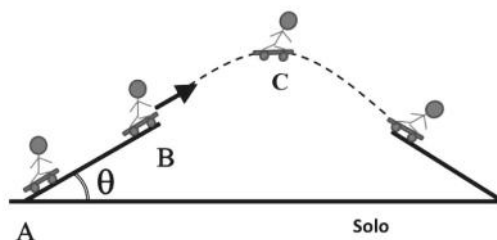


Reprodução/Arquivo da editora

Sejam Δt_A , Δt_B e Δt_C os intervalos de tempo decorridos entre o instante do chute e o instante em que a bola retorna ao solo, depois de percorrer as trajetórias **A**, **B** e **C**, respectivamente. Esses intervalos são tais que:

- a) $\Delta t_A = \Delta t_C < \Delta t_B$ d) $\Delta t_A = \Delta t_B < \Delta t_C$
b) $\Delta t_A < \Delta t_B < \Delta t_C$ e) $\Delta t_A = \Delta t_B > \Delta t_C$
c) $\Delta t_A < \Delta t_C < \Delta t_B$

28. (IJSO) Um jovem com seu skate sobe uma rampa de comprimento 5,0 m e inclinada de um ângulo θ tal que $\sin \theta = 0,8$ e $\cos \theta = 0,6$. Após passar pelo ponto **B**, com velocidade de módulo 20 m/s, fica sob ação exclusiva da gravidade. Seja $g = 10 \text{ m/s}^2$ o módulo da aceleração da gravidade.

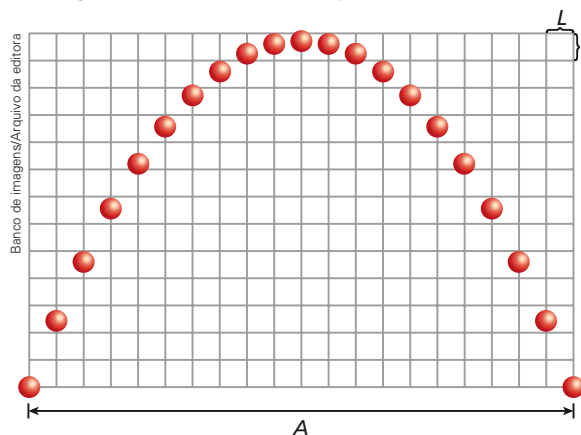


Reprodução/IJSO, 2013.

A altura máxima que ele atinge, em relação ao solo, é igual a:

- a) 12,6 m c) 16,8 m e) 23,0 m
b) 14,4 m d) 17,9 m

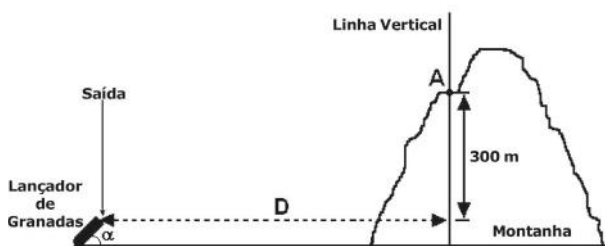
29. A figura abaixo representa a foto estroboscópica do movimento de uma bola que realizou um voo balístico em um plano vertical. A influência do ar pode ser desprezada, no local, e adota-se $g = 10,0 \text{ m/s}^2$. O intervalo de tempo que intercalou dois fotogramas consecutivos foi de 0,13 s e cada quadrícula que serve de base para a imagem tem lado de comprimento L .



Chamando-se de v_{0x} e v_{0y} , respectivamente, as intensidades das componentes horizontal e vertical da velocidade da bola no primeiro fotograma – embaixo e à esquerda da imagem –, pede-se determinar:

- o alcance horizontal A do voo da bola;
- os valores de v_{0x} e v_{0y} .

30. (Aman-RJ) Um lançador de granadas deve ser posicionado a uma distância D da linha vertical que passa por um ponto **A**. Este ponto está localizado em uma montanha a 300 m de altura em relação à extremidade de saída da grama, conforme o desenho, fora de escala, abaixo.



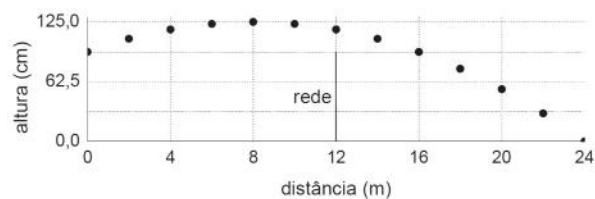
A velocidade da granada, ao sair do lançador, é de 100 m/s e forma um ângulo α com a horizontal; a aceleração da gravidade é igual a 10 m/s² e todos os atritos são desprezíveis. Para que a granada atinja o ponto **A**, somente após a sua passagem pelo ponto de maior altura possível de ser atingido por ela, a distância D deve ser de:

Dados: $\cos \alpha = 0,6$ e $\sin \alpha = 0,8$.

- 240 m
- 360 m
- 480 m
- 600 m
- 960 m

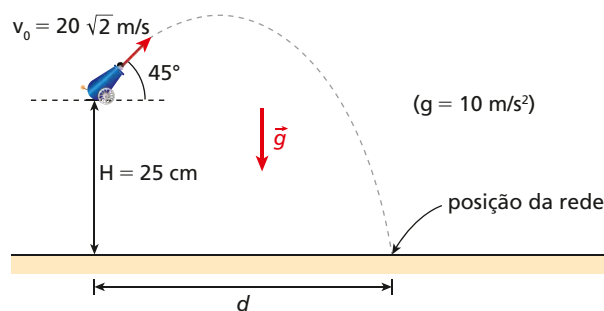
31. (Unicamp-SP) Uma bola de tênis rebatida numa das extremidades da quadra descreve a trajetória parabólica representada na figura a seguir, atingindo o chão na outra extremidade da quadra. O comprimento da quadra é de 24 m.

- Calcule o tempo de voo da bola, antes de atingir o chão. Desconsidere a resistência do ar nesse caso e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- Qual é o módulo da velocidade horizontal da bola no caso acima?
- Quando a bola é rebatida com efeito, aparece uma força \vec{F}_e , vertical, de cima para baixo e igual a 3 vezes o peso da bola de modo que a aceleração vertical da bola passa a ser $4\vec{g}$ em que \vec{g} é a aceleração da gravidade. Qual será o módulo da velocidade horizontal da bola, rebatida com efeito para uma trajetória idêntica à da figura?



Reprodução/Unicamp, 2004.

32. (Olimpíada de Física da Unicamp) Um acrobata muito corajoso estava planejando seu número de homem-bala, em que ele seria lançado por um canhão, a uma grande velocidade. A diferença do seu plano em relação aos congêneres é que o canhão estaria a uma altura de 25 m da rede onde ele cairia, o que aumentaria o alcance e sua velocidade final (despreze forças dissipativas).



Reprodução/Arquivo da editora

- Considerando-se que o acrobata ajustou o ângulo do canhão em 45° e estimou o módulo de sua velocidade inicial como sendo $20\sqrt{2}$ m/s, calcule o tempo que ele levará desde o seu lançamento até cair na rede.
- A que distância d do canhão a rede deve ser posicionada para que o acrobata termine seu número em segurança?

33. **Anita Wlodarczyk quebra o recorde mundial de lançamento de martelo feminino na Rio 2016**

A atleta polonesa obteve a marca histórica de 82,3 m ao disparar o martelo de uma altura em torno de 50 cm em relação ao gramado do Engenhão sob um ângulo de tiro próximo de 45°.



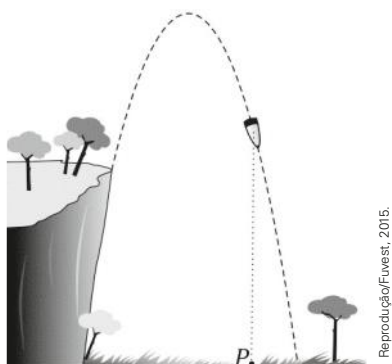
Alexander Hassenstein/Getty Images

- Na Olimpíada do Rio de Janeiro, em 2016, a atleta polonesa Anita Wlodarczyk superou o recorde mundial.

Adotando-se $\sqrt{2} \cong 1,4$, desprezando-se a resistência do ar e considerando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, pede-se determinar:

- o tempo de voo do martelo, T ;
- a intensidade da velocidade de disparo do objeto, v_0 ;
- a altura máxima atingida pelo martelo em relação ao solo, $H_{\text{máx}}$.

34. (Fuvest-SP) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura. O ponto **P** sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por **P**, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?



Reprodução/Fuvest, 2015.

Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 60
- 90
- 120
- 150
- 180

35. Coisa de criança?



EyeEm/Getty Images

Na imagem, um garoto arremessou uma pedra em forma de disco rumo à superfície tranquila da água e observou, eufórico, o objeto ricochetear diversas vezes antes de soçobrar em direção ao fundo do lago.

Admita que a pedra tenha sido lançada horizontalmente da vertical que contém a borda do lago, de uma altura igual a 0,80 m em relação à super-

fície líquida, com velocidade de 54 km/h. Suponha também que a velocidade vertical de subida do objeto imediatamente após sua primeira colisão tenha sido de 3,6 km/h.

Considere:

A resistência do ar ao movimento da pedra deve ser desprezada.

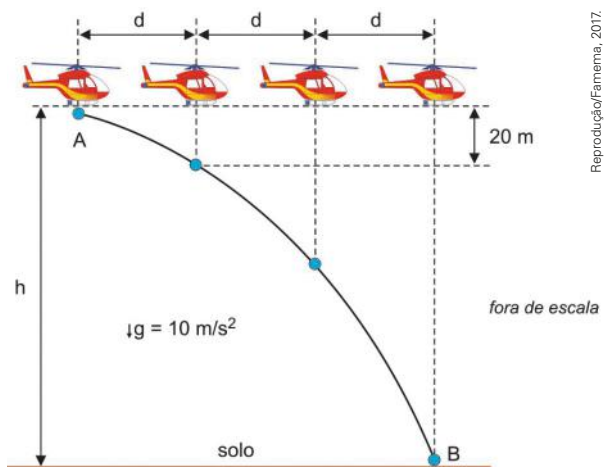
Nas colisões entre a pedra e a superfície líquida, admitidas instantâneas, o atrito entre o objeto e a água deve ser desprezado.

A velocidade de propagação (v) de uma onda em uma superfície líquida depende da profundidade (h), conforme a expressão aproximada $v = \sqrt{gh}$, em que g é a intensidade da aceleração da gravidade. Intensidade da aceleração da gravidade local: 10 m/s^2 .

Sabendo-se que o lago tem profundidade constante igual a 1,6 m, pede-se determinar:

- o alcance horizontal do primeiro voo balístico da pedra, antes de sua primeira colisão contra a superfície da água;
- o tempo de voo da pedra entre a primeira e a segunda colisão;
- o intervalo de tempo que intercalou a chegada, junto à borda do lago, das duas primeiras ondas provocadas pelo impacto da pedra contra a superfície da água, respectivamente, na primeira e na segunda colisão.

36. (Famema-SP) Um helicóptero sobrevoa horizontalmente o solo com velocidade constante e, no ponto **A**, abandona um objeto de dimensões desprezíveis que, a partir desse instante, cai sob ação exclusiva da força peso e toca o solo plano e horizontal no ponto **B**. Na figura, o helicóptero e o objeto são representados em quatro instantes diferentes.

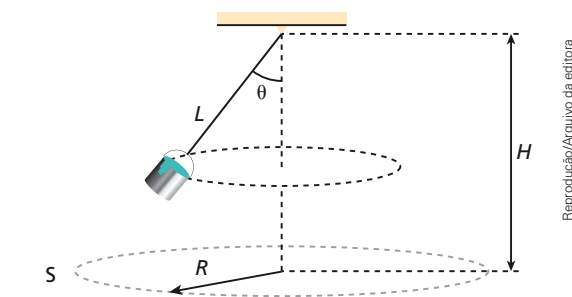


Reprodução/Famema, 2017.

Considerando-se as informações fornecidas, é correto afirmar que a altura h de sobrevoos desse helicóptero é igual a

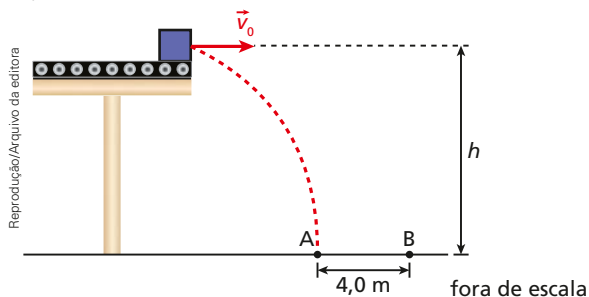
- a) 200 m. c) 240 m. e) 180 m.
 b) 220 m. d) 160 m.

37. (EsPCEX-SP) Um pequeno balde contendo água é preso a um leve e inextensível fio de comprimento L , tal que $L = 0,50$ m, sendo afixado a uma altura (H) de 1,0 m do solo (**S**), como mostra a figura. À medida que o balde gira numa circunferência horizontal com velocidade constante, gotas de água que dele vazam atingem o solo formando um círculo de raio R . Considerando 10 m/s^2 o módulo da aceleração devida à gravidade e $\theta = 60^\circ$, o valor de R será, em metros:



- a) $\frac{\sqrt{17}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{18}}{4}$ e) $\frac{4}{5}$
 b) $\frac{\sqrt{11}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{21}}{4}$

38. (Unifae-SP) Uma esteira rolante lança objetos horizontalmente de uma altura h com velocidade constante de módulo v_0 . Os objetos tocam o solo horizontal no ponto **A** indicado na figura. Sabe-se que, se aumentarmos o módulo da velocidade da esteira em 2,0 m/s, os objetos passam a cair no ponto **B**, 4,0 m à frente de **A**.

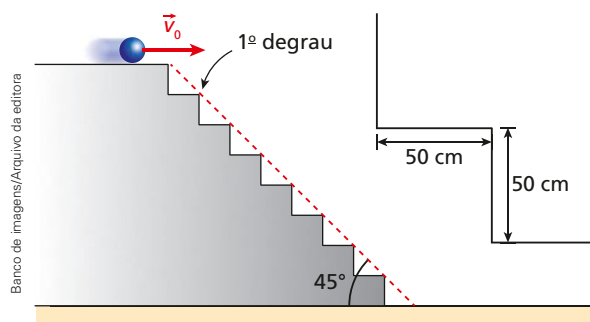


Desprezando-se a resistência do ar e adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, é correto afirmar que a altura h , em metros, de onde os objetos são lançados é igual a

- a) 5,0. c) 15. e) 25.
 b) 10. d) 20.

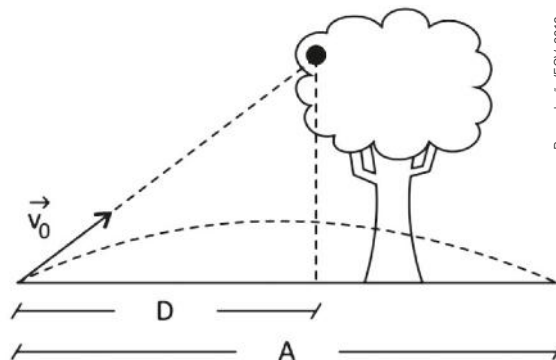
39. (OBF) Fernando está parado nas margens de um lago observando o movimento de um barco, de comprimento 2,0 m, que se desloca para a sua esquerda. Em determinado instante, a partir da parte central do barco, um marinheiro lança verticalmente para cima uma bola que alcança a altura de 5,0 m. Fernando constata que a bola, ao descer, bate a ponta direita do barco (atrás do barco). No momento em que a bola foi lançada, o barco estava com uma velocidade de módulo igual a 2,0 m/s. Qual a aceleração escalar do barco, suposta constante? Despreze a resistência do ar e a resistência da água. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

40. Uma bolinha é lançada horizontalmente do topo da escada esquematizada a seguir com velocidade \vec{v}_0 de intensidade igual a 4,0 m/s. No local, a resistência do ar é desprezível e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Levando-se em conta as dimensões indicadas, contra que degrau a bolinha irá colidir primeiro?

41. (FGV-SP) Atira-se uma pedra, a partir do solo, com uma velocidade \vec{v}_0 , apontando para uma fruta que pende de uma árvore. A velocidade \vec{v}_0 é tal que o alcance A do lançamento da pedra é maior do que a distância D , medida sobre o solo horizontal entre o ponto de lançamento da pedra e a vertical tirada da fruta ao solo, como ilustra a figura a seguir.



Desprezando-se a resistência do ar, se no exato instante em que a pedra é lançada a fruta se desprender da árvore e cair verticalmente, a pedra

- passará por cima da fruta se $D < \frac{A}{2}$.
- passará por baixo da fruta se $D < \frac{A}{2}$.
- passará por cima da fruta se $D > \frac{A}{2}$.
- passará por baixo da fruta se $D > \frac{A}{2}$.
- atingirá a fruta para qualquer valor de $D \leq A$.

42. Um paraquedista radical, de $M = 80,0$ kg, juntamente com os seus equipamentos, se deixa cair, no instante $t_0 = 0$, da borda de uma ponte a uma altura H acima da superfície da água de um rio em um local em que $g = 10,0$ m/s². Com o paraquedas fechado, o paraquedista despenca ao longo de 45,0 m praticamente sem sofrer os efeitos do ar. Ao fim desse percurso, o paraquedas é aberto, o que impõe ao sistema uma força de resistência do ar de intensidade $F = 960$ N, que é mantida constante até a chegada do paraquedista à água, com velocidade de módulo 2,0 m/s, no instante $t = T$.

Com base nessas informações, faça o que se pede:

- determine o valor de T ;
- esboce o gráfico da velocidade escalar do paraquedista em função do tempo no intervalo de $t_0 = 0$ a $t = T$;
- calcule a altura H .

43. A figura 1 abaixo ilustra a situação inicial de dois blocos de massas respectivamente iguais a M e $m = 2,50$ kg. Sobre o bloco de massa M , que está apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito, está afixado um recipiente de massa desprezível que contém uma pequena esfera de massa $m_E = 0,50$ kg.

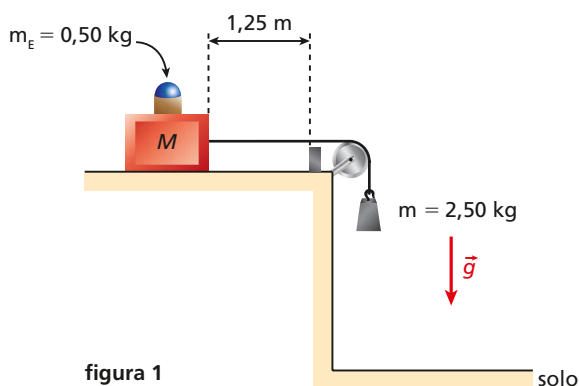


figura 1

O sistema é abandonado à ação da gravidade ($g = 10,0$ m/s²) de modo que, depois de percorrer uma distância $D = 1,25$ m sobre a superfície horizontal, o bloco de massa M para instantaneamente devido a uma colisão contra uma estrutura existente logo antes de uma roldana ideal, conforme representa a figura 2.

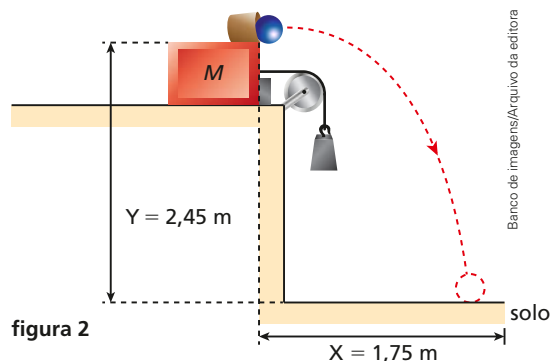


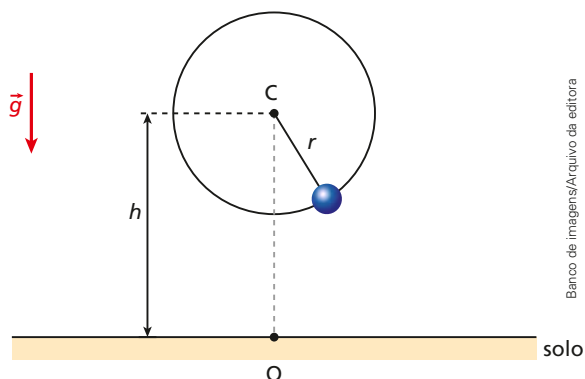
figura 2

Devido ao choque mecânico, a esfera é lançada horizontalmente, deixando seu alojamento com velocidade de intensidade v .

Sabendo-se que no voo balístico até o solo, a esfera percorre os comprimentos $X = 1,75$ m na horizontal e $Y = 2,45$ m na vertical, desprezando-se a resistência do ar, calcule:

- o valor de v ;
- a intensidade da aceleração, a , do sistema enquanto o bloco de massa M se desloca sobre a superfície horizontal;
- o valor da massa M .

44. Uma pequena esfera de massa $m = 1,0$ kg é posta a girar no sentido anti-horário em um plano vertical ao redor do ponto **C** indicado na figura abaixo. Esse corpo está preso a um fio inextensível de comprimento $r = 1,0$ m, que suporta uma força de tração de intensidade máxima $T_{\text{máx}} = 46$ N. No local a influência do ar pode ser desprezada e adota-se $g = 10$ m/s².



Sabendo-se que o ponto **C** está a uma altura $h = 6,0$ m em relação ao solo, responda:

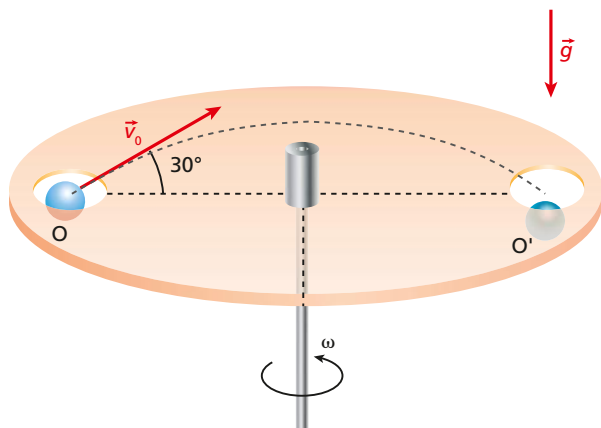
- Que velocidade angular, ω , deve ter a esfera para provocar o rompimento do fio?
- Com o fio rompido, a que distância d do ponto **O** a esfera atinge o solo?

45. Pretende-se lançar obliquamente determinado objeto na Terra e em um planeta **P** de modo que em ambos os disparos sejam obtidos al-

cances horizontais iguais. O ângulo de tiro em relação à direção horizontal será o mesmo nos dois casos. Sabendo-se que a massa da Terra é o quádruplo da de **P** e o raio da Terra é o sêxtuplo do de **P**, pede-se determinar a relação $\frac{v_P}{v_T}$ entre as intensidades das velocidades de lançamento desse objeto em **P** e na Terra, respectivamente. Despreze possíveis resistências atmosféricas.

Para raciocinar um pouco mais

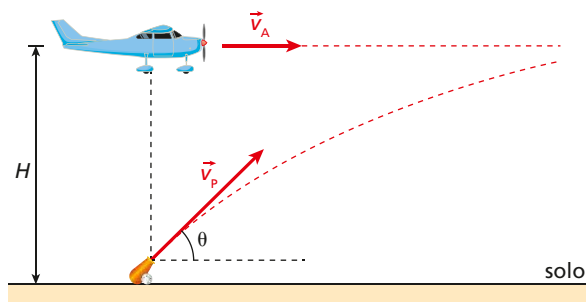
46. Um disco circular disposto horizontalmente, dotado de um orifício **O** próximo à sua borda, é colocado em rotação em torno de um eixo vertical com velocidade angular constante ω . Subitamente, com o disco na posição indicada na figura, dispara-se uma bolinha através de **O** com velocidade \vec{v}_0 de intensidade igual a 10 m/s inclinada de 30° em relação à superfície do disco, como se representa.



Verifica-se que a bolinha, depois de realizar um voo balístico sob a ação exclusiva da gravidade ($g = 10 \text{ m/s}^2$), trespassa o disco pelo mesmo orifício **O**, porém situado em uma posição diametralmente oposta em relação à inicial. Adotando-se $\pi \cong 3$, pede-se determinar os valores de ω que viabilizam a situação proposta.

47. O esquema a seguir representa um avião que voa a uma altitude constante H em relação ao solo, considerado plano e horizontal, em movimento retilíneo e uniforme com velocidade de intensidade v_A . Mostra-se também um ca-

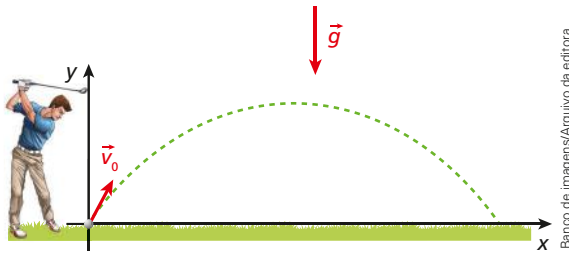
nhão antiaéreo que deverá disparar um projétil obliquamente contra o avião no exato instante em que este passar pela vertical do armamento. A velocidade do projétil terá intensidade v_p e o ângulo de tiro será igual a θ em relação à horizontal, tal que $0^\circ < \theta < 90^\circ$.



Desprezando-se a resistência do ar sobre o movimento do projétil e adotando-se para a aceleração da gravidade intensidade g , pede-se determinar as condições da magnitude v_p para que o projétil acerte a aeronave. Não considere as dimensões do canhão nem do avião.

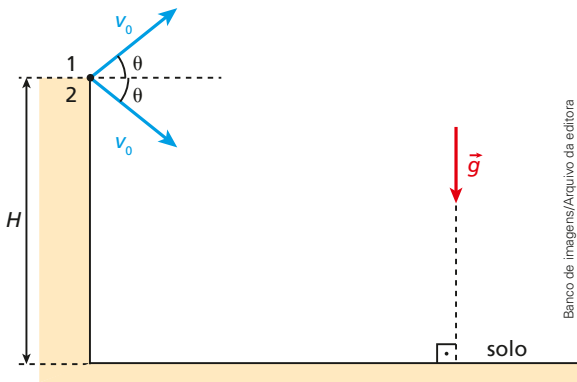
48. É de fato instigante a trajetória curva descrita por uma bola de golfe disparada obliquamente no ar!

A compreensão dos conceitos sobre lançamentos balísticos, necessários também em assuntos de ordem militar, só ocorreu em bases científicas depois dos estudos de Galileu (1564-1642) sobre a queda livre dos corpos. Posteriormente, Torricelli (1608-1647), Newton (1642-1727), Bernoulli (1700-1782) e Euler (1707-1783) introduziram elementos que permitiram analisar o fenômeno levando-se em conta a resistência do ar.



// Desprezando-se os efeitos do ar, a bola de golfe descreve em relação ao solo uma trajetória parabólica de modo que na direção vertical, y , seu movimento é uniformemente variado com aceleração igual à da gravidade, \vec{g} , enquanto na direção horizontal, x , o movimento é uniforme.

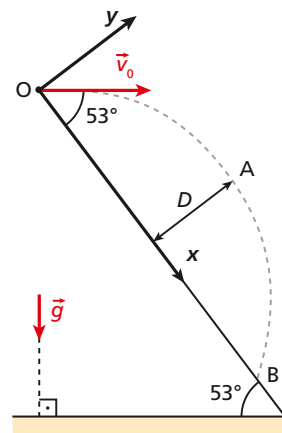
Considere o esquema a seguir em que duas partículas 1 e 2 serão disparadas simultaneamente do topo de um penhasco de altura H . As velocidades vetoriais terão a mesma intensidade, v_0 , porém estarão inclinadas respectivamente de um mesmo ângulo θ para cima e para baixo em relação à horizontal. No local, a influência do ar é desprezível e a aceleração da gravidade tem módulo g .



Admitindo-se o solo plano e horizontal, responda:

- Qual é a distância D entre as partículas quando ambas tiverem colidido de modo totalmente inelástico contra o solo?
- O valor máximo de D ocorre para que ângulo α entre as velocidades iniciais de lançamento das partículas 1 e 2?
- Qual é o intervalo de tempo Δt que intercala as colisões das partículas contra o solo?
- Os valores de D e Δt dependem de H ?

49. Uma partícula foi disparada horizontalmente com velocidade de intensidade $v_0 = 30 \text{ m/s}$ a partir do ponto O de um plano inclinado de 53° em relação à horizontal, conforme ilustra a figura. No local, o efeito do ar é desprezível e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$.

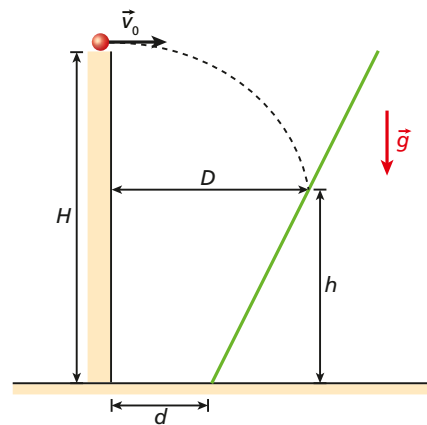


O referencial Oxy indicado, com origem no ponto O , foi utilizado na observação do voo balístico da partícula.

Adotando-se $\sin 53^\circ = \cos 37^\circ = 0,8$ e $\cos 53^\circ = \sin 37^\circ = 0,6$, pede-se determinar:

- o valor do máximo afastamento D da partícula em relação à superfície do plano inclinado;
- a distância $X = BO$ entre o ponto B onde a partícula atinge o plano inclinado e o ponto O , de onde foi disparada.

50. Lança-se horizontalmente do alto de uma torre de altura $H = 85 \text{ m}$ uma pequena bola de borracha com velocidade \vec{v}_0 de intensidade igual a $5,0 \text{ m/s}$. Depois de realizar um voo balístico sem sofrer influências do ar, a bola colide com uma estrutura sólida e inclinada na razão de uma unidade de comprimento na horizontal por 8 unidades de comprimento na vertical. A base dessa estrutura dista $d = 10 \text{ m}$ da base da torre, conforme indica a figura, fora de escala, abaixo.



Adotando-se para o módulo da aceleração da gravidade o valor $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- o comprimento vertical h ;
- o comprimento horizontal D .

Trabalho e potência

Mikko Hyvärinen/Shutterstock



// A decolagem de um avião, como as aeronaves da imagem acima, é sempre um fato espetacular. Como um corpo de massa da ordem de 10^2 ou 10^3 toneladas alcança altitudes de 10 000 m ou mais, atingindo velocidades próximas de 1 000 km/h ou superiores?

Responsáveis pela propulsão das aeronaves, as turbinas “sugam” o ar à sua frente e o expõem vigorosamente para trás. Para tanto, as potências associadas a essas máquinas são muito grandes quando comparadas às potências desenvolvidas por carros, até mesmo os esportivos.

Neste tópico exploraremos a definição de potência, não sem antes abordarmos o conceito de trabalho de uma força e a fundamental relação entre trabalho e energia mecânica. Veremos também como as noções de potência e velocidade estão relacionadas.

1. Energia e trabalho

... E a luz de mais um dia estimula a fotossíntese, provocando uma verdadeira revolução bioquímica nos vegetais, o que lhes permite cumprir seu ciclo virtuoso de crescimento, viço e morte. Os animais, incluindo o homem, nutrem-se de acordo com sua posição na cadeia alimentar, o que lhes faculta crescer, andar, correr, reproduzir e lutar pela própria subsistência.

Mas que elixir é esse que movimentava a fantástica máquina da vida, tornando nossa Terra um planeta tão singular? Trata-se do mesmo substrato primordial, responsável por fazer operar todas as máquinas, dos automóveis aos caminhões, dos tratores aos guindastes, dos aviões às naves espaciais. Essa substância imponderável que possibilita o funcionamento de todos os organismos – vivos ou não – recebe o nome de **energia**.

As usinas hidrelétricas são acionadas pela energia da água represada em grandes reservatórios; as instalações termelétricas queimam derivados de petróleo, carvão ou outros materiais; as usinas nucleares baseiam-se na fissão de núcleos de urânio, do qual são extraídas quantidades fantásticas de energia. Todo esse intercâmbio energético visa iluminar cidades, acionar fábricas e fazer funcionar geladeiras, fornos de micro-ondas, computadores, bem como todos os dispositivos que tornam a vida humana mais segura e confortável.

A energia comporta-se como um camaleão fugaz que surge e ressurgue sob os mais variados matizes e mantos. Verifica-se em todas as estruturas – das micro às macro – uma verdadeira simbiose em que uma determinada quantidade de energia se pulveriza em doses menores sempre, porém de totalização idêntica à porção original. A energia térmica obtida na combustão da gasolina no motor de um carro, por exemplo, transforma-se parcialmente em energia de movimento do veículo, mais energia térmica e acústica, geradas de várias formas, inclusive pelo atrito entre as peças.

Isaac Newton (1642-1727) não conjecturou em suas teorias o conceito de energia. Para ele, toda a Mecânica era estruturada na noção de força. Foi o matemático, cientista e filósofo alemão Gottfried Wilhelm von **Leibniz** (1646-1716) quem esboçou as primeiras ideias sobre energia, afirmando que o ímpeto de movimento manifestado por alguns corpos se devia a uma espécie de “força viva” intrínseca ao corpo, ao que ele chamou de *vis viva*, expressão extraída do latim. Leibniz também teria sido o descobridor do Cálculo Diferencial e Integral, que abriu imensas possibilidades à ciência formal a partir do século XVII. Há, no entanto, controvérsias quanto à paternidade do Cálculo, já que Newton apresentou na mesma época trabalhos importantes sobre o assunto. O físico e médico suíço Daniel **Bernoulli** (1700-1782) aprimorou a noção de energia ao publicar seus estudos sobre escoamento de fluidos. Ele notou que, em situações de pressão constante, um aumento na velocidade de certos líquidos ocorria sempre à custa da diminuição na altura da tubulação em relação a um nível de referência determinado. Mas quem estabeleceu os contornos definitivos do conceito foi o cientista inglês James Prescott **Joule** (1818-1889) ao analisar manifestações e conservação de energia em sistemas termodinâmicos.

Definir amplamente energia de modo axiomático ou verbal é tarefa muito difícil. Por isso pretendemos introduzir essa noção de forma gradual, contando com o bom senso, a intuição e a vivência do leitor em cada contexto.



Pealé Zuppani/Pulsar Imagens

/// Pôr do sol no rio Paraguai na Estação Ecológica de Taiamã, em Mato Grosso. A energia solar, constituída essencialmente de luz e calor, é o item preponderante na matriz energética terrestre.

A palavra energia tem origem grega – *ergos* – e significa **trabalho**. O conceito de trabalho que desenvolveremos neste capítulo difere da noção de ocupação, ofício ou profissão. Realizar trabalho em Física implica a transferência de energia de um sistema para outro e, para que isso ocorra, são necessários uma **força** e um **deslocamento** adequados.

A força que um halterofilista exerce sobre um haltere, por exemplo, no ato de seu levantamento, realiza trabalho. Nessa operação, o atleta transfere energia de seu corpo para o haltere, utilizando a força como veículo dessa transferência.

O mesmo não ocorre, porém, se ele apenas mantiver o haltere suspenso sobre sua cabeça, sem apresentar movimento algum. Nesse caso, o atleta exerce uma força para manter o “peso” em equilíbrio, porém o fato de não haver deslocamento determina a não transferência de energia mecânica e, conseqüentemente, a não realização de trabalho.



Fotos: Image Source/Glow Images

// As forças exercidas pelo halterofilista realizam trabalho no ato de erguer o “peso”.

// O trabalho das forças do halterofilista para manter o “peso” suspenso, em repouso, é nulo.

2. Trabalho de uma força constante

Consideremos a figura ao lado, em que uma partícula é deslocada de **A** até **B**, ao longo da trajetória indicada. Várias forças, não representadas, estão atuando na partícula, incluindo \vec{F} , que é constante, isto é, tem intensidade, direção e sentido invariáveis.

Seja \vec{d} o deslocamento vetorial da partícula de **A** até **B** e θ o ângulo formado por \vec{F} e \vec{d} .

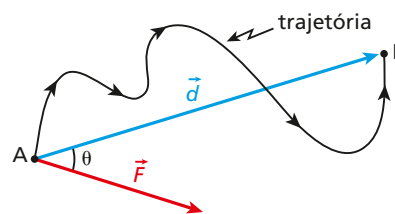
O trabalho (τ) da força \vec{F} no deslocamento de **A** a **B** é a grandeza escalar dada por:

$$\tau = |\vec{F}| |\vec{d}| \cos \theta$$

ou, em notação mais simples:

$$\tau = F d \cos \theta$$

No Sistema Internacional (SI), o trabalho é medido em **joule (J)**, em homenagem a James Prescott Joule.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

NOTAS!

- O produto $|\vec{d}| \cos \theta$ é a projeção de \vec{d} na direção de \vec{F} . Assim, podemos dizer que o trabalho de uma força constante é calculado pelo produto da intensidade da força pela projeção do deslocamento na direção da força.
- O produto $|\vec{F}| \cos \theta$, por sua vez, é a projeção de \vec{F} na direção de \vec{d} . Assim, podemos dizer também que o trabalho de uma força constante é calculado pelo produto do módulo do deslocamento pela projeção da força na direção do deslocamento.
- Se \vec{F} ou \vec{d} forem nulos, teremos $\tau = 0$.
- O deslocamento vetorial \vec{d} tem origem no ponto de partida e extremidade no ponto de chegada da partícula. Veja o mapa ao lado.
 - // Independentemente da trajetória seguida, o deslocamento vetorial de um carro que viaja de São Paulo a Presidente Prudente é o vetor \vec{d} , de origem em São Paulo e extremidade em Presidente Prudente.

Deslocamento São Paulo-Presidente Prudente



Fonte: ÍSOLA, Leda; CALDINI, Vera. *Atlas geográfico Saraiva*. São Paulo: Saraiva, 2004.

Banco de Imagens/Arquivo da editora

3. Sinais do trabalho

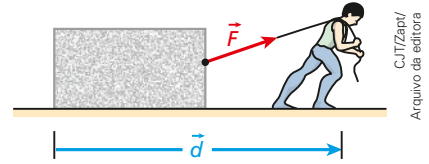
O trabalho é uma grandeza algébrica, isto é, admite valores positivos e negativos. O que impõe o sinal do trabalho é o $\cos \theta$, já que $|\vec{F}|$ e $|\vec{d}|$ são quantidades sem sinal.

Trabalho motor

Para $0 \leq \theta < 90^\circ$, temos $\cos \theta > 0$ e, por isso, $\tau > 0$. Nesse caso, o trabalho é denominado **motor**.

O trabalho de uma força é motor quando esta é “favorável” ao deslocamento.

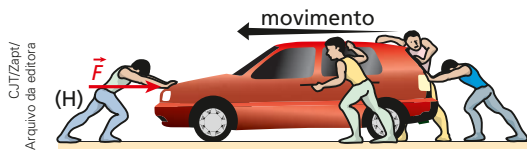
// Neste exemplo, a força, \vec{F} , que o homem exerce na caixa por meio da corda realiza trabalho motor (positivo). Isso ocorre pelo fato de \vec{F} ser “favorável” ao deslocamento \vec{d} .



Trabalho resistente

Para $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$, temos $\cos \theta < 0$ e, por isso, $\tau < 0$. Nesse caso, o trabalho é denominado **resistente**.

O trabalho de uma força é resistente quando esta é “desfavorável” ao deslocamento.



// Neste exemplo, o trabalho da força exercida pelo homem **H** sobre o carro é resistente (negativo). Isso ocorre pelo fato de a referida força ser “desfavorável” ao deslocamento do carro (para a esquerda).



// Nesta fotografia, um guindaste ergue um contêiner verticalmente. O trabalho das forças exercidas pelos cabos de aço no contêiner é motor (positivo), enquanto o trabalho do peso do contêiner é resistente (negativo).

4. Casos particulares importantes

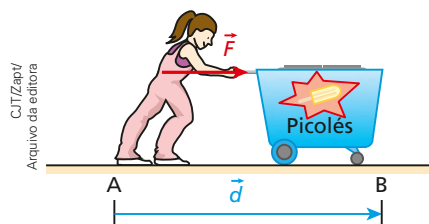
\vec{F} e \vec{d} têm mesma direção e mesmo sentido

Neste caso, $\theta = 0^\circ$ e $\cos \theta = 1$. Assim, o trabalho é calculado por:

$$\tau = F d \cos \theta \Rightarrow \tau = F d (1)$$

ou $\tau = F d$

Esse é o caso em que a força realiza seu trabalho **máximo**.



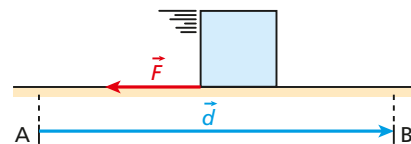
// Neste exemplo, a força \vec{F} (constante) que a vendedora de sorvetes exerce em seu carrinho tem a mesma direção e o mesmo sentido que o deslocamento vetorial \vec{d} de **A** até **B**. O trabalho de \vec{F} pode ser calculado por $\tau = Fd$.

\vec{F} e \vec{d} têm mesma direção e sentidos opostos

Neste caso, $\theta = 180^\circ$ e $\cos \theta = -1$. Assim, o trabalho é calculado por:

$$\tau = Fd \cos \theta \Rightarrow \tau = Fd(-1)$$

ou $\tau = -Fd$



// Neste exemplo, o bloco desloca-se de **A** para **B** ao longo de um plano horizontal áspero. Nesse deslocamento (\vec{d}), o bloco sofre a ação da força de atrito \vec{F} (admitida constante), cujo trabalho pode ser calculado por $\tau = -Fd$.

\vec{F} e \vec{d} são perpendiculares entre si

Neste caso, $\theta = 90^\circ$ e $\cos \theta = 0$. Assim, o trabalho é calculado por:

$$\tau = Fd \cos \theta \Rightarrow \tau = Fd(0)$$

ou $\tau = 0$

Sempre que a força e o deslocamento forem perpendiculares entre si, a força não realizará trabalho.

JÁ PENSOU NISTO?

Um eficiente modal de transporte urbano: o monotrilho

A composição que aparece na imagem a seguir não é um novo modelo de montanha-russa.

É o monotrilho de São Paulo, nova alternativa que promete revolucionar o transporte público da capital paulista. A previsão é que o sistema entre em plena operação até 2020, transportando diariamente cerca de 1 milhão de passageiros.

O monotrilho é fabricado em alumínio e isso o torna 30% mais leve que versões similares feitas de aço. Essa maior leveza permite deslocamentos mais suaves e velozes. O comboio é totalmente elétrico, o que colabora para a obtenção de índices praticamente nulos de poluição.

Uma novidade é que o veículo opera sem condutor. Seu controle é feito remotamente por um sistema de computadores existente em uma central. Para deslocamentos horizontais, tem-se que a força da gravidade (peso) e a força vertical recebida da estrutura de sustentação (força normal) não realizam trabalho. Isso ocorre porque essas forças são perpendiculares ao deslocamento.

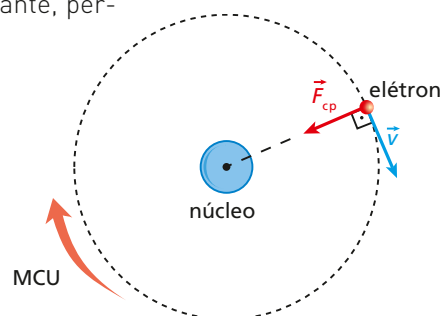


Jales Valquer/Fotoarena

// Teste com monotrilho de São Paulo. Dezembro de 2015.

Outro caso interessante é o da força centrípeta. Conforme vimos no Tópico 3 (Resultantes tangencial e centrípeta), a força centrípeta é, a cada instante, perpendicular à velocidade vetorial. Por isso, para intervalos de tempo elementares (extremamente pequenos), a força centrípeta é perpendicular aos respectivos deslocamentos elementares sofridos pela partícula, o que nos permite afirmar que:

A força centrípeta nunca realiza trabalho; seu trabalho é sempre nulo.



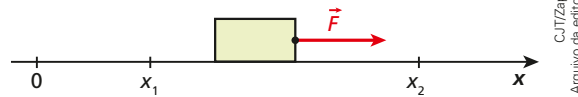
CJT/Zapt/Arquivo da editora

$$\tau_{(\vec{F}_{cp})} = 0$$

// Nesta figura, tem-se a representação clássica do átomo de hidrogênio, em que apenas um elétron realiza movimento circular e uniforme em torno do núcleo. A resultante centrípeta que mantém o elétron em sua órbita é a força de atração eletrostática recebida do núcleo. Essa resultante não realiza trabalho, pois, a cada intervalo elementar de tempo, ela é perpendicular à direção do respectivo deslocamento.

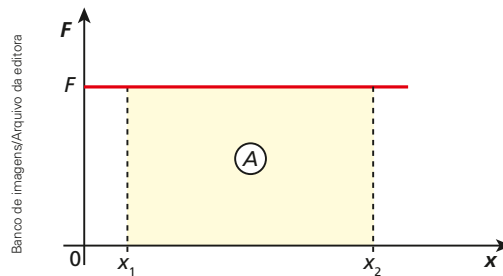
5. Cálculo gráfico do trabalho

No esquema a seguir temos um bloco percorrendo o eixo **Ox**. Ele se desloca sob a ação exclusiva da força \vec{F} , paralela ao eixo.



CIT/Zap/Arquivo da editora

Façamos o gráfico do valor algébrico de \vec{F} em função de x . O **valor algébrico** de \vec{F} é o valor dessa força com relação ao eixo **Ox**. Esse valor é **positivo** quando \vec{F} atua no sentido do eixo e **negativo** quando \vec{F} atua em sentido oposto ao do eixo. Considerando que \vec{F} é constante, obtemos:



Tomemos a "área" A, destacada no diagrama. Teria essa "área" algum significado especial? Sim, ela fornece uma medida do valor algébrico do trabalho da força \vec{F} ao longo do deslocamento do bloco, do ponto de abscissa x_1 ao ponto de abscissa x_2 .

De fato, isso pode ser verificado fazendo-se:

$$A = F(x_2 - x_1),$$

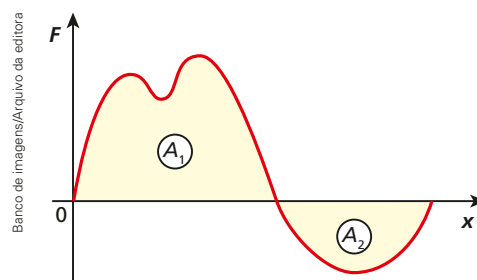
mas $x_2 - x_1 = d$, em que d é o módulo do deslocamento vetorial do bloco. Logo:

$$A = Fd$$

Recordando que o produto Fd corresponde ao trabalho de \vec{F} , obtemos:

$$A = \tau$$

Embora a última propriedade tenha sido apresentada com base em uma situação simples e particular, sua validade estende-se também ao caso de forças paralelas ao deslocamento, porém de valor algébrico variável. Entretanto, para esses casos, sua verificação requer um tratamento matemático mais elaborado.



$$A_1 + A_2 = \tau$$

(soma algébrica)

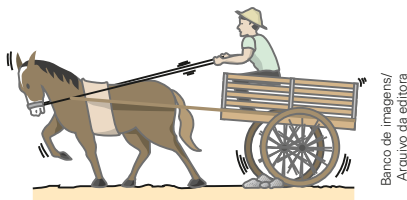
F é o valor algébrico da força responsável pelo trabalho.

Em termos gerais, podemos enunciar que:

Dado um diagrama do valor algébrico da força atuante em uma partícula em função de sua posição, a "área" compreendida entre o gráfico e o eixo das posições expressa o valor algébrico do trabalho da força. No entanto, a força considerada deve ser paralela ao deslocamento da partícula.

Exercícios Nível 1

1. Na figura abaixo, embora puxe a carroça com uma força horizontal de $1,0 \cdot 10^3$ N, o cavalo não consegue tirá-la do lugar devido ao entrave de uma pedra:



Qual é o trabalho da força do cavalo sobre a carroça?

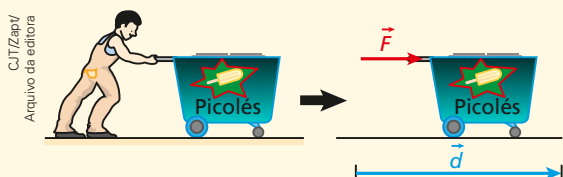
2. No SI, a unidade de trabalho pode ser expressa por:

- a) $\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ c) $\text{kg}^2 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ e) $\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$
 b) $\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ d) $\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3. Um homem empurra um carrinho ao longo de uma estrada plana, comunicando a ele uma força constante, paralela ao deslocamento, e de intensidade $3,0 \cdot 10^2$ N. Determine o trabalho realizado pela força aplicada pelo homem sobre o carrinho, considerando um deslocamento de 15 m.

Resolução:

A situação descrita está representada a seguir:



Sendo \vec{F} e \vec{d} de mesma direção e mesmo sentido, o trabalho de \vec{F} fica dado por:

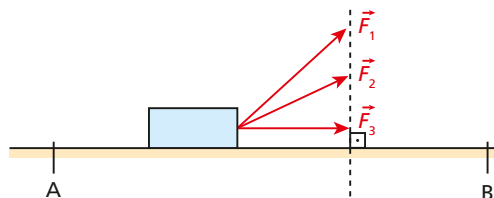
$$\tau_{(\vec{F})} = Fd$$

Como $F = 3,0 \cdot 10^2$ N e $d = 15$ m, vem:

$$\tau_{(\vec{F})} = 3,0 \cdot 10^2 \cdot 15 \therefore \tau_{(\vec{F})} = 4,5 \cdot 10^3 \text{ J}$$

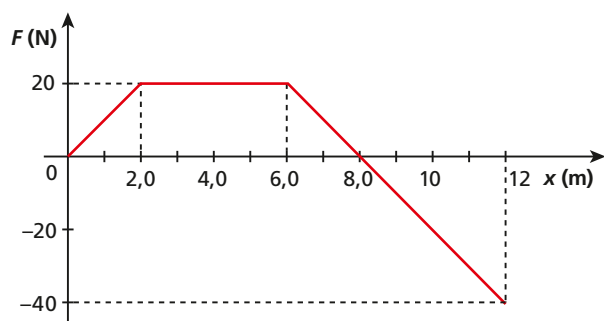
4. Uma força de intensidade 20 N atua em uma partícula na mesma direção e no mesmo sentido do seu movimento retilíneo, que acontece sobre uma mesa horizontal. Calcule o trabalho da força, considerando um deslocamento de 3,0 m.

5. No esquema da figura, uma mesma caixa é arrastada três vezes ao longo do plano horizontal, deslocando-se do ponto **A** até o ponto **B**:



Na primeira vez, é puxada pela força \vec{F}_1 , que realiza um trabalho τ_1 ; na segunda, é puxada pela força \vec{F}_2 , que realiza um trabalho τ_2 ; e na terceira é puxada por uma força \vec{F}_3 , que realiza um trabalho τ_3 . Supondo os comprimentos dos vetores da figura proporcionais às intensidades de \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 , aponte a alternativa correta.

- a) $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$ d) $\tau_1 = \tau_2 = 0$
 b) $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ e) $\tau_1 = \tau_2 < \tau_3$
 c) $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$
6. Considere um garoto de massa igual a 50 kg em uma roda-gigante que opera com velocidade angular constante de 0,50 rad/s. Supondo que a distância entre o garoto e o eixo da roda-gigante seja de 4,0 m, calcule:
- a) a intensidade da força resultante no corpo do garoto;
 b) o trabalho realizado por essa força ao longo de meia volta.
7. A intensidade da resultante das forças que agem em uma partícula varia em função de sua posição sobre o eixo **Ox**, conforme o gráfico a seguir:



Calcule o trabalho da força para os deslocamentos:

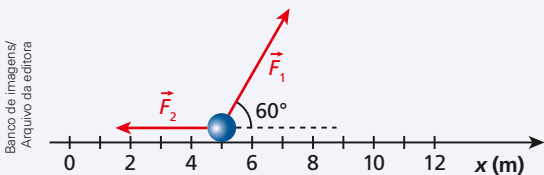
- a) de $x_1 = 0$ a $x_2 = 8,0$ m;
 b) de $x_2 = 8,0$ m a $x_3 = 12$ m;
 c) de $x_1 = 0$ a $x_3 = 12$ m.

8. (UCG-GO) Uma força constante \vec{F} , horizontal, de intensidade 20 N, atua durante 8,0 s sobre um corpo de massa 4,0 kg que estava em repouso apoiado em uma superfície horizontal perfeitamente sem atrito. Não se considera o efeito do ar. Qual o trabalho realizado pela força \vec{F} no citado intervalo de tempo?

9. (Fuvest-SP) Um carregador em um depósito empurra, sobre o solo horizontal, uma caixa de massa 20 kg, que inicialmente estava em repouso. Para colocar a caixa em movimento, é necessária uma força horizontal de intensidade 30 N. Uma vez iniciado o deslizamento, são necessários 20 N para manter a caixa movendo-se com velocidade constante. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- Determine os coeficientes de atrito estático e cinético entre a caixa e o solo.
- Determine o trabalho realizado pelo carregador ao arrastar a caixa por 5 m.
- Qual seria o trabalho realizado pelo carregador se a força horizontal aplicada inicialmente fosse de 20 N? Justifique sua resposta.

10. Uma partícula percorre o eixo Ox indicado, deslocando-se da posição $x_1 = 2 \text{ m}$ para a posição $x_2 = 8 \text{ m}$:



Sobre ela, agem duas forças constantes, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , de intensidades respectivamente iguais a 80 N e 10 N. Calcule os trabalhos de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 no deslocamento de x_1 a x_2 .

Resolução:

O trabalho de \vec{F}_1 é motor (positivo), sendo calculado por:

$$\tau_{(\vec{F}_1)} = F_1 d \cos \theta_1$$

Tendo-se $\vec{F}_1 = 80 \text{ N}$, $d = x_2 - x_1 = 8 \text{ m} - 2 \text{ m} = 6 \text{ m}$ e $\theta_1 = 60^\circ$, vem:

$$\tau_{(\vec{F}_1)} = 80 \cdot 6 \cdot \cos (60^\circ) \therefore \tau_{(\vec{F}_1)} = 240 \text{ J}$$

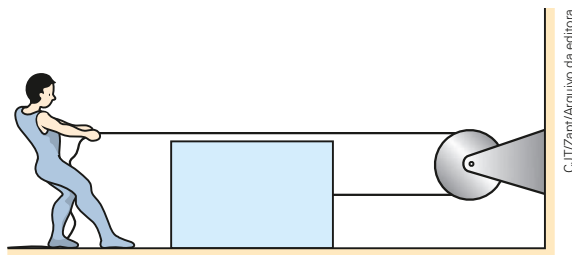
O trabalho de \vec{F}_2 é resistente (negativo), sendo calculado por:

$$\tau_{(\vec{F}_2)} = F_2 d \cos \theta_2$$

Tendo-se $F_2 = 10 \text{ N}$, $d = 6 \text{ m}$ e $\theta_2 = 180^\circ$, vem:

$$\tau_{(\vec{F}_2)} = 10 \cdot 6 \cdot \cos (180^\circ) \therefore \tau_{(\vec{F}_2)} = -60 \text{ J}$$

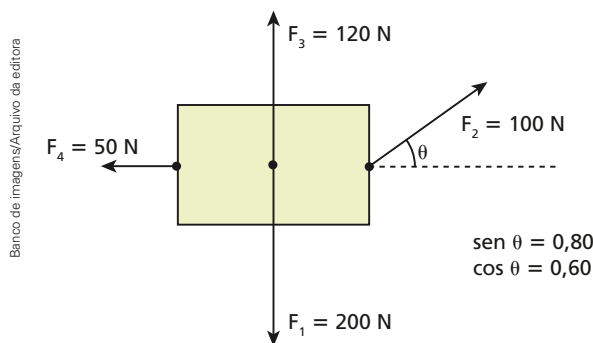
11. Na figura, Alex puxa a corda com uma força constante, horizontal e de intensidade $1,0 \cdot 10^2 \text{ N}$, fazendo com que o bloco sofra, com velocidade constante, um deslocamento de 10 m ao longo do plano horizontal.



Desprezando a influência do ar e considerando o fio e a polia ideais, determine:

- o trabalho realizado pela força que Alex exerce na corda;
- o trabalho da força de atrito que o bloco recebe do plano horizontal de apoio.

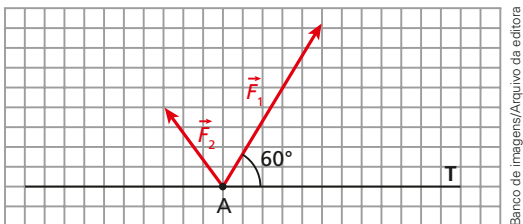
12. O bloco da figura acha-se inicialmente em repouso, livre da ação de forças externas. Em dado instante, aplica-se sobre ele o sistema de forças indicado, constituído por \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 e \vec{F}_4 , de modo que \vec{F}_1 e \vec{F}_3 sejam perpendiculares a \vec{F}_4 :



$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= 0,80 \\ \text{cos } \theta &= 0,60 \end{aligned}$$

Sendo τ_1 , τ_2 , τ_3 e τ_4 , respectivamente, os trabalhos de \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 e \vec{F}_4 para um deslocamento de 5,0 m, calcule τ_1 , τ_2 , τ_3 e τ_4 .

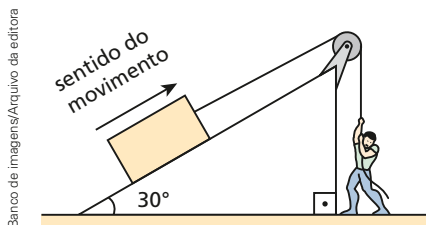
13. Na figura, estão representadas em escala duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , aplicadas em um anel que pode se movimentar ao longo de um trilho horizontal **T**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Admitindo que a intensidade de \vec{F}_1 seja 10 N e que o anel sofra um deslocamento de 2,0 m da esquerda para a direita, calcule:

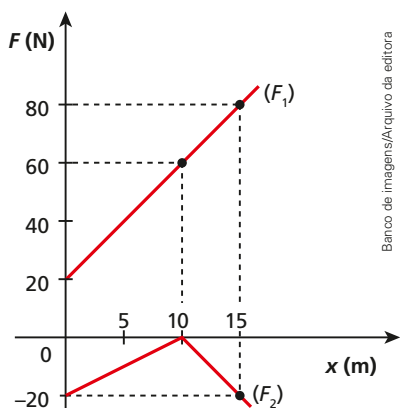
- a intensidade de \vec{F}_2 ;
 - os trabalhos de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 no deslocamento referido.
14. O esquema a seguir ilustra um homem que, puxando a corda verticalmente para baixo com força constante, arrasta a caixa de peso $4,0 \cdot 10^2$ N em movimento uniforme, ao longo do plano inclinado:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Desprezando os atritos e a influência do ar e admitindo que a corda e a roldana sejam ideais, calcule o trabalho da força exercida pelo homem ao provocar na caixa um deslocamento de 3,0 m na direção do plano inclinado.

15. O gráfico abaixo representa a variação do valor algébrico das duas únicas forças que agem em um corpo que se desloca sobre um eixo **Ox**. As forças referidas têm a mesma direção do eixo.

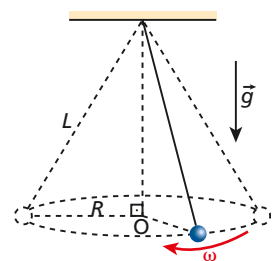


Banco de imagens/Arquivo da editora

Calcule:

- o trabalho da força \vec{F}_1 , enquanto o corpo é arrastado nos primeiros 10 m;
- o trabalho da força \vec{F}_2 , enquanto o corpo é arrastado nos primeiros 10 m;
- o trabalho da força resultante para arrastar o corpo nos primeiros 15 m.

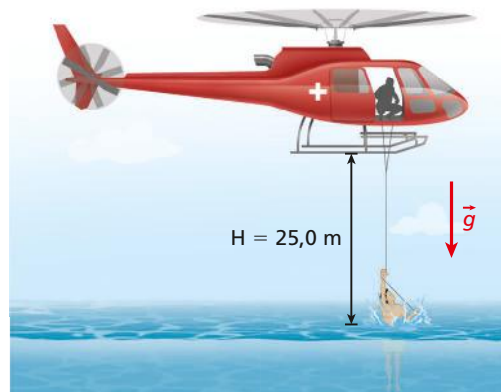
16. Na situação representada na figura, uma pequena esfera de massa $m = 2,4$ kg realiza movimento circular e uniforme com velocidade angular ω em torno do ponto **O**. A circunferência descrita pela esfera tem raio $R = 30$ cm e está contida em um plano horizontal. O barbante que prende a esfera é leve e inextensível e seu comprimento é $L = 50$ cm. Sabendo que no local a influência do ar é desprezível e que $g = 10$ m/s², determine:



CJT/Zapri/Arquivo da editora

- a intensidade da força de tração no barbante;
- o valor de ω ;
- o trabalho da força que o barbante exerce sobre a esfera em uma volta.

17. No esquema abaixo, um naufrago de massa $m = 70,0$ kg é içado por um cabo vertical, inextensível e de massa desprezível, manejado pelos tripulantes de um helicóptero em repouso em relação à água do mar. Nesse resgate, a influência do ar sobre o movimento do naufrago, que é acelerado para cima com intensidade $a = 0,20$ m/s², deve ser desprezada.



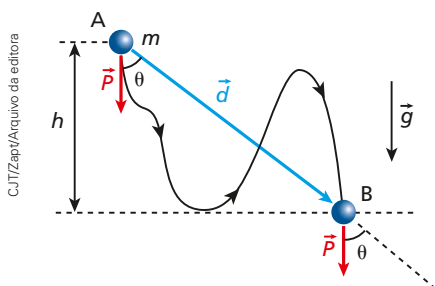
Banco de imagens/Arquivo da editora

Sendo $H = 25,0$ m a altura a que o naufrago deverá ser erguido e $g = 10,0$ m/s² a intensidade da aceleração da gravidade, determine:

- a intensidade da força de tração no cabo;
- o trabalho da força resultante sobre o naufrago nesse resgate.

6. Trabalho da força peso

Consideremos a partícula da figura abaixo, inicialmente situada no ponto **A**. Sob a ação de diversas forças, incluindo de seu peso \vec{P} , ela sofre o deslocamento \vec{d} , atingindo o ponto **B**. De **A** até **B**, a partícula percorre a trajetória indicada:

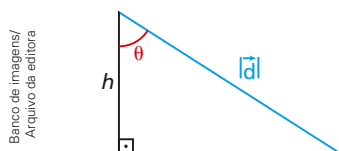


em que θ é o ângulo entre \vec{P} e \vec{d} ;
 m é a massa da partícula;
 g é a intensidade da aceleração da gravidade;
 h é o desnível (diferença de alturas) entre **A** e **B**.

Admitindo que, de **A** até **B**, \vec{g} seja constante, temos, como consequência, \vec{P} constante. Diante disso, o trabalho de \vec{P} pode ser calculado por:

$$\tau_{\vec{P}} = |\vec{P}||\vec{d}| \cos \theta \quad (I)$$

Entretanto, observando a geometria da figura, notamos que:



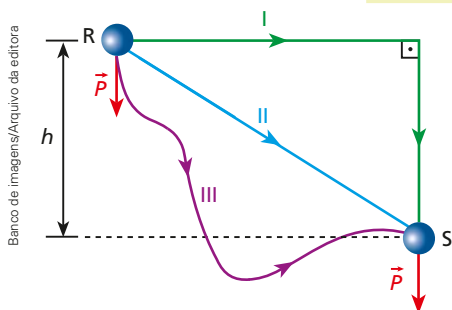
$$h = |\vec{d}| \cos \theta \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$\tau_{\vec{P}} = |\vec{P}|h \quad \text{ou} \quad \tau_{\vec{P}} = Ph = mgh$$

Como $\tau_{\vec{P}}$ só depende de \vec{P} e de h , concluímos que:

O trabalho da força peso é independente da trajetória descrita pela partícula.



// Em qualquer uma das trajetórias, I, II ou III, o trabalho de \vec{P} vale: $\tau_{\vec{P}} = Ph = mgh$.

Isso significa que, no caso da figura ao lado, qualquer que seja a trajetória descrita pela partícula ao se deslocar do ponto **R** ao ponto **S**, o trabalho de seu peso será o mesmo.

Suponhamos agora que a partícula do exemplo acima faça o deslocamento oposto, isto é, saia de **B** e atinja **A**.

O trabalho de \vec{P} fica determinado ao se fazer:

$$\tau_{\vec{P}} = |\vec{P}||\vec{d}| \cos (180^\circ - \theta)$$

Observando que $\cos (180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ (ângulos suplementares têm cossenos opostos), vem:

$$\tau_{\vec{P}} = -|\vec{P}||\vec{d}| \cos \theta$$

Como $h = |\vec{d}| \cos \theta$, obtém-se:

$$\tau_{\vec{P}} = -|\vec{P}|h \quad \text{ou} \quad \tau_{\vec{P}} = -Ph = -mgh$$

Generalizando, podemos escrever que:

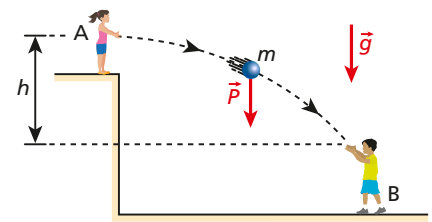
$$\tau_{\vec{P}} = \pm Ph = \pm mgh$$

Exemplo 1

A garota **A** joga a bola para o garoto **B**. Na descida, o trabalho do peso da bola é motor (positivo):

$$\tau_{\vec{p}} = +mgh$$

O trabalho do peso é **positivo** na descida.



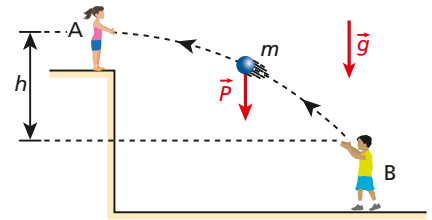
CJT/Zapt/Arquivo da editora

Exemplo 2

O garoto **B** joga a bola para a garota **A**. Na subida, o trabalho do peso da bola é resistente (negativo):

$$\tau_{\vec{p}} = -mgh$$

O trabalho do peso é **negativo** na subida.



CJT/Zapt/Arquivo da editora

Exemplo 3

Na fotografia ao lado, um pêndulo oscila em um plano vertical sem ser influenciado significativamente pelo ar. Seja m a massa pendular, g a intensidade da aceleração da gravidade e h o desnível entre as posições mais alta e mais baixa ocupadas pelo corpo pendente da haste de peso desprezível. O trabalho da força peso é dado por mgh na descida e por $-mgh$ na subida do sistema. Entre as posições de inversão do sentido do movimento, o trabalho da força peso é nulo, já que essas duas posições estão no mesmo nível horizontal.

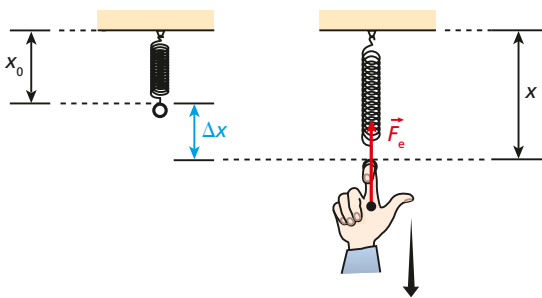


Thales Trigo / Acervo da editora

7. Trabalho da força elástica

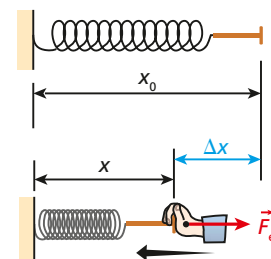
Admitamos uma mola sendo deformada em regime elástico pela mão de um operador. Nesse caso, a mola e a mão trocam, na região de contato, forças de ação e reação.

Chamemos de **força elástica** (\vec{F}_e) a força aplicada pela mola na mão do operador. Essa força sempre “aponta” para a posição em que estaria a extremidade livre da mola, caso esta não estivesse deformada. Por isso, é denominada **força de restituição**.



CJT/Zapt/Arquivo da editora

// À medida que a mão do operador é deslocada verticalmente para baixo, provocando alongamento na mola, ela recebe a força elástica (\vec{F}_e) dirigida verticalmente para cima.



CJT/Zapt/Arquivo da editora

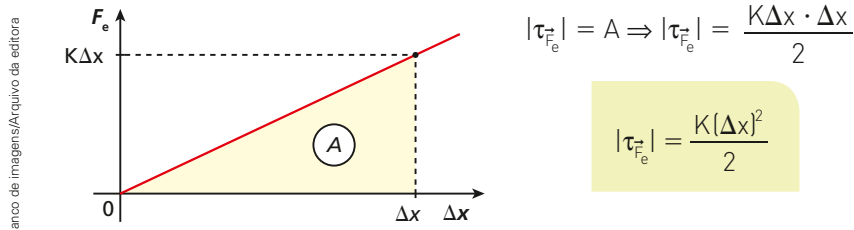
// À medida que a mão do operador é deslocada horizontalmente para a esquerda, provocando compressão na mola, ela recebe a força elástica (\vec{F}_e) dirigida horizontalmente para a direita.

A intensidade de \vec{F}_e pode ser calculada pela Lei de Hooke, vista no Tópico 1, Os princípios da Dinâmica, desta unidade:

$$F_e = K\Delta x$$

em que K é a constante elástica da mola e Δx é a deformação da mola (alongamento ou compressão).

Calculamos o trabalho de \vec{F}_e , traçando, inicialmente, o gráfico da intensidade de \vec{F}_e em função de Δx (o módulo do trabalho de \vec{F}_e é dado pela “área” A , destacada no diagrama).



Levando em conta que $\tau_{\vec{F}_e}$ pode ser motor (+) ou resistente (−), escrevemos:

$$|\tau_{\vec{F}_e}| = \pm \frac{K(\Delta x)^2}{2}$$

O trabalho da força elástica é motor (+) na fase em que a mola está retornando ao seu comprimento natural e é resistente (−) na fase em que ela é deformada (alongada ou comprimida).

O trabalho da força elástica independe da trajetória de seu ponto de aplicação.

Analisemos, a título de exemplo, o caso de um garoto que vai lançar uma pedra utilizando um estilingue.

Na fase de tracionamento, em que as tiras de borracha do dispositivo são esticadas, as forças elásticas realizam sobre a mão do garoto um trabalho **resistente** (negativo). No ato do lançamento, entretanto, essas forças realizam sobre a pedra um trabalho **motor** (positivo).

Uma força é denominada **conservativa** quando seu trabalho, entre duas posições, independe da trajetória descrita por seu ponto de aplicação.

Diante disso, temos que a força peso e a força elástica são conservativas. Entretanto, nem toda força satisfaz à definição anterior. A força de atrito, a força de resistência do ar e a força de resistência viscosa exercida pelos líquidos, por exemplo, têm trabalhos dependentes da trajetória, o que as torna não conservativas.

8.0 Teorema da Energia Cinética

Energia cinética

Consideremos uma partícula de massa m que, em dado instante, tem, em relação a um determinado referencial, velocidade escalar v . Pelo fato de estar em movimento, dizemos que a partícula está energizada, ou seja, dizemos que ela está dotada de uma forma de energia denominada **cinética**. A **energia cinética** (E_c) é a modalidade de energia associada aos movimentos, sendo quantificada pela expressão:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

Os carros de Fórmula 1 são equipados com motores muito potentes, que lhes permitem deslocamentos com altíssimas velocidades, em comparação com os carros comuns. Em alguns circuitos, é possível alcançar marcas da ordem de 300 km/h. Quando em movimento, esses carros são dotados de energia cinética. A energia cinética depende da massa e da velocidade, sendo diretamente proporcional à massa e ao quadrado da velocidade.



O estilingue, ainda utilizado em brincadeiras infantis, é um ótimo exemplo para compreender os conceitos de trabalho resistente e motor.



O teorema

O trabalho total, das forças internas e externas, realizado sobre um corpo é igual à variação de sua energia cinética.

$$\tau_{\text{total}} = \Delta E_c = E_{c_{\text{final}}} - E_{c_{\text{inicial}}}$$

Demonstração para um caso particular

Na figura ao lado, temos uma pequena esfera maciça sujeita à ação da **força resultante** constante \vec{F} , paralela ao deslocamento. Sejam \vec{a} a aceleração comunicada por \vec{F} , \vec{v}_0 a velocidade da esfera no ponto **A** e \vec{v} sua velocidade no ponto **B**.

Seja, ainda, \vec{d} o deslocamento da esfera de **A** até **B**.

O trabalho de \vec{F} no deslocamento de **A** até **B** (τ_{total}) é dado por:

$$\tau_{\text{total}} = Fd \quad (\text{I})$$

Do Princípio Fundamental da Dinâmica, podemos escrever que:

$$F = ma \quad (\text{II})$$

Nas condições descritas, a esfera realiza um movimento uniformemente variado.

Aplicando a Equação de Torricelli, vem:

$$v^2 = v_0^2 + 2ad$$

Daí:

$$d = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad (\text{III})$$

Substituindo (II) e (III) em (I), segue:

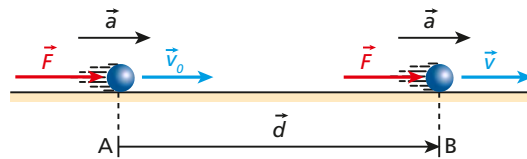
$$\tau_{\text{total}} = ma \frac{(v^2 - v_0^2)}{2a} \Rightarrow \tau_{\text{total}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Como $\frac{mv^2}{2} = E_{c_{\text{final}}}$ e $\frac{mv_0^2}{2} = E_{c_{\text{inicial}}}$, temos:

$$\tau_{\text{total}} = \Delta E_c = E_{c_{\text{final}}} - E_{c_{\text{inicial}}}$$

Embora tenhamos demonstrado o Teorema da Energia Cinética com base em uma situação simples e particular, sua aplicação é geral, estendendo-se ao cálculo do trabalho total de forças constantes ou variáveis, conservativas ou não. O trabalho expresso pelo Teorema da Energia Cinética inclui também os trabalhos de forças internas, como as forças exercidas pela musculatura de uma pessoa que caminha ou aquelas decorrentes do funcionamento dos mecanismos de um carro.

Por exemplo, o trabalho total realizado sobre ciclistas em movimento em pistas horizontais é dado pela soma (algébrica) do trabalho motor (útil) realizado pelas forças musculares (forças internas) com o trabalho resistente das forças exercidas pelo ar e das forças de atrito nos eixos da bicicleta. É fundamental observar que, na hipótese de não haver derrapagens, as forças de atrito trocadas entre as rodas das bicicletas e o solo **não realizam trabalho**, já que essas forças são do tipo estático e não produzem deslocamento em seu ponto de aplicação (em cada instante, o ponto de contato do pneu com a pista apresenta velocidade nula).



CJTZap/Arquivo da editora



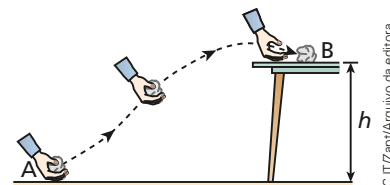
Thinkstock/Getty Images

// Ciclistas em movimento sobre pista horizontal: o trabalho motor provém das forças musculares internas.

Considerando que trabalho é igual à variação de energia cinética, trabalho e energia são grandezas físicas de iguais dimensões, isto é, que podem ser medidas nas mesmas unidades. Assim, a unidade de energia no Sistema Internacional (SI) também é o **joule (J)**.

9. Trabalho no erguimento de um corpo

No esquema ao lado, um corpo de massa m , inicialmente em repouso no ponto **A** do solo, é erguido por um operador, sendo deixado também em repouso no ponto **B** de uma mesa de altura h . No local, a intensidade da aceleração da gravidade é g .



CJT/Zapt/Arquivo da editora

Na subida, desprezando a influência do ar, só duas forças agem no corpo: a exercida pelo operador e a da gravidade (peso).

Pretendemos calcular o trabalho (τ_{oper}) da força exercida pelo operador durante o erguimento do corpo.

$$\tau_{\text{total}} = \tau_{\text{oper}} + \tau_{\text{peso}} \quad (\text{I})$$

Mas, pelo Teorema da Energia Cinética:

$$\tau_{\text{total}} = E_{c_B} - E_{c_A} \quad (\text{II})$$

Comparando (I) e (II), temos:

$$\tau_{\text{oper}} + \tau_{\text{peso}} = E_{c_B} - E_{c_A} \quad (\text{III})$$

Na subida, o trabalho do peso é resistente (negativo), sendo dado por: $\tau_{\text{peso}} = -mgh$

Temos, ainda: $E_{c_B} = \frac{mv_B^2}{2}$ e $E_{c_A} = \frac{mv_A^2}{2}$.

Substituindo em (III), obtemos:

$$\tau_{\text{oper}} - mgh = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$$

Entretanto, $v_A = v_B = 0$, pois o corpo partiu do repouso em **A** e foi deixado em repouso em **B**. Logo:

$$\tau_{\text{oper}} - mgh = 0 \Rightarrow \tau_{\text{oper}} = mgh$$

JÁ PENSOU NISTO?

Realizamos trabalho ao subir escadas?

O Corpo de Bombeiros dispõe de um equipamento fundamental para combater incêndios em edifícios altos: é a **escada Magirus**. Acoplada a um caminhão, essa escada permite que soldados levem mangueiras e outros instrumentos até a altura de onde provêm as chamas. Supondo que na subida a variação de energia cinética seja nula, podemos dizer que o trabalho das forças musculares de um bombeiro (forças internas) é dado pelo produto mgh , em que m é a massa erguida, g é a intensidade da aceleração da gravidade e h é a elevação vertical do centro de massa do sistema em relação ao nível inicial.

// Corpo de Bombeiros combatendo incêndio no Museu da Língua Portuguesa. São Paulo, dezembro de 2015.



Ricardo Bastos/Fotoarena

Um jogo estranho, mas divertido!

O *curling* é um esporte bastante antigo, criado no século XVI nos lagos congelados da Escócia, sendo anterior ao futebol. Seu nome deriva do verbo *curl*, que em inglês significa enrolar ou encaracolar. Atualmente, faz parte dos Jogos de Inverno e os locais com mais tradição na prática desse esporte estão na Escandinávia, Suíça e Canadá. O Brasil, que não tem lagos congelados naturais, também já entrou na era do *curling*, figurando atualmente em algumas competições internacionais.

Com o objetivo de atingir um determinado alvo, o lançador dispara horizontalmente um bloco de granito de base plana e circular, com cerca de 20 kg, sobre uma pista de gelo horizontal. Antes do lançamento, porém, provoca-se um gotejamento de água sobre a pista, e o líquido, ao entrar em contato com o piso em baixa temperatura, congela-se, tornando o solo mais áspero e irregular. Dois jogadores da equipe do lançador podem alisar a pista em frente ao bloco e, para isso, utilizam apetrechos semelhantes a vassouras, o que reduz o atrito, permitindo que o bloco percorra distâncias maiores até parar.

Suponhamos que na situação da fotografia abaixo, à direita, o jogador lance horizontalmente o bloco de granito com velocidade de intensidade v_0 sobre uma pista de gelo horizontal. Seja μ_c o coeficiente de atrito dinâmico, admitido constante, entre o granito e o gelo e g a intensidade da aceleração da gravidade.



Desprezando-se a resistência do ar e utilizando-se o Teorema da Energia Cinética, pode-se calcular a distância d que o bloco percorre até parar.

$$\tau_{F_{\text{at}}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow F_{\text{at}} d (\cos 180^\circ) = 0 - \frac{mv_0^2}{2}$$

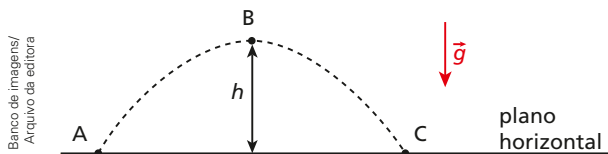
$$-\mu_c mg d = -\frac{mv_0^2}{2}$$

Da qual:

$$d = \frac{v_0^2}{2\mu_c g}$$

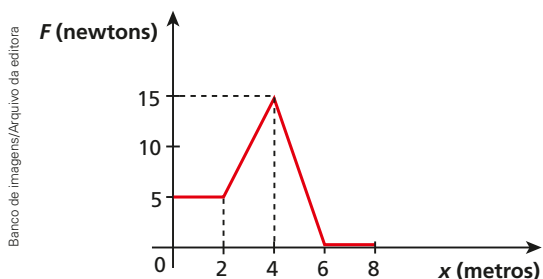
Se o lançador atirasse o bloco de granito horizontalmente com o dobro de v_0 , por qual fator ficaria multiplicada a distância d ? Além disso, se a massa do bloco fosse maior, isso afetaria a distância d ?

18. Um projétil de massa m é lançado obliquamente no vácuo, descrevendo a trajetória indicada abaixo:



A altura máxima atingida é h e o módulo da aceleração da gravidade vale g . Os trabalhos do peso do projétil nos deslocamentos de **A** até **B**, de **B** até **C** e de **A** até **C** valem, respectivamente:

- $0, 0$ e 0 .
 - mgh, mgh e $2mgh$.
 - $-mgh, mgh$ e 0 .
 - $mgh, -mgh$ e 0 .
 - Não há dados para os cálculos.
19. O trabalho total realizado sobre uma partícula de massa $8,0$ kg foi de 256 J. Sabendo que a velocidade inicial da partícula era de $6,0$ m/s, calcule a velocidade final.
20. Uma partícula sujeita a uma força resultante de intensidade $2,0$ N move-se sobre uma reta. Sabendo que entre dois pontos **P** e **Q** dessa reta a variação de sua energia cinética é de $3,0$ J, calcule a distância entre **P** e **Q**.
21. Uma partícula de massa 900 g, inicialmente em repouso na posição $x_0 = 0$ de um eixo **Ox**, submete-se à ação de uma força resultante paralela ao eixo. O gráfico abaixo mostra a variação da intensidade da força em função da abscissa da partícula:



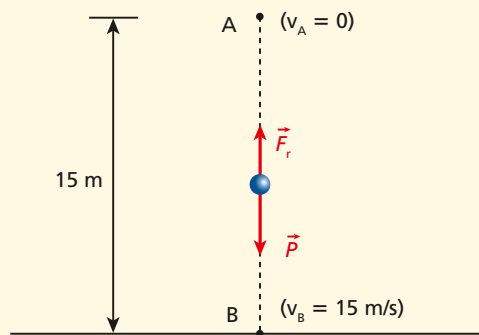
Determine:

- o trabalho da força de $x_0 = 0$ a $x_1 = 6$ m;
- a velocidade escalar da partícula na posição $x_2 = 8$ m.

22. Um pequeno objeto de massa $2,0$ kg, abandonado de um ponto situado a 15 m de altura em relação ao solo, cai verticalmente sob a ação da força peso e da força de resistência do ar. Sabendo que sua velocidade ao atingir o solo vale 15 m/s, calcule o trabalho da força de resistência do ar.

Dado: $g = 10$ m/s².

Resolução:



Aplicando o Teorema da Energia Cinética, temos:

$$\tau_{\text{total}} = E_{cB} - E_{cA}$$

$$\tau_P + \tau_{F_r} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$$

$$mgh + \tau_{F_r} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$$

Sendo $m = 2,0$ kg, $g = 10$ m/s², $h = 15$ m, $v_A = 0$ e $v_B = 15$ m/s, calculemos o trabalho da força de resistência do ar (τ_{F_r}):

$$2,0 \cdot 10 \cdot 15 + \tau_{F_r} = \frac{2,0 \cdot (15)^2}{2}$$

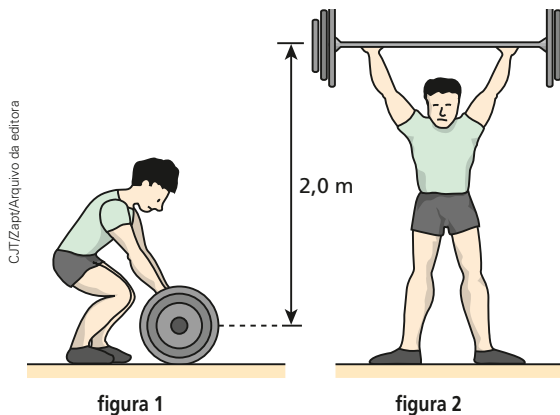
$$300 + \tau_{F_r} = 225$$

$$\tau_{F_r} = -75 \text{ J}$$

O resultado negativo refere-se a um trabalho **resistente**.

23. (Ufal) Um corpo de massa $6,0$ kg é abandonado de uma altura de $5,0$ m num local em que $g = 10$ m/s². Sabendo que o corpo chega ao solo com velocidade de intensidade $9,0$ m/s, calcule a quantidade de calor gerada pelo atrito com o ar.

24. Na situação esquematizada, um halterofilista levanta 80 kg num local em que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e mantém o haltere erguido, como representa a figura 2, durante 10 s.



Os trabalhos das forças musculares durante o levantamento do haltere e durante sua manutenção no alto valem, respectivamente:

- a) 800 J e 800 J. d) 1 600 J e zero.
 b) 1 600 J e 1 600 J. e) 1 600 J e 800 J.
 c) 800 J e zero.

25. (UFSC) Um helicóptero suspenso no ar, em repouso em relação ao solo, ergue por meio de um cabo de aço, mantido vertical, uma caixa de massa igual a 200 kg que se desloca com velocidade constante ao longo de um percurso de 10 m. No local, $g = 10 \text{ m/s}^2$. Sabendo que no deslocamento citado as forças de resistência do ar realizam sobre a caixa um trabalho de $-1 400 \text{ J}$, calcule o trabalho da força aplicada pelo cabo de aço sobre a caixa.

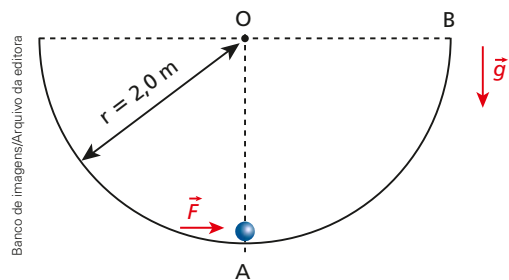
Exercícios Nível 2

26. (Vunesp) Uma parcela significativa da população residente nas cidades do ABC paulista gosta de passar os finais de semana e feriados no litoral, porque se trata de um passeio agradável e de curto deslocamento. Entre as duas regiões, há um desnível médio de 800 m, que pode ser realizado basicamente por duas rodovias: a Anchieta, com uma extensão maior no trecho de serra, e a Imigrantes que, por ser dotada de uma série de túneis, constitui um caminho mais curto no mesmo trecho.

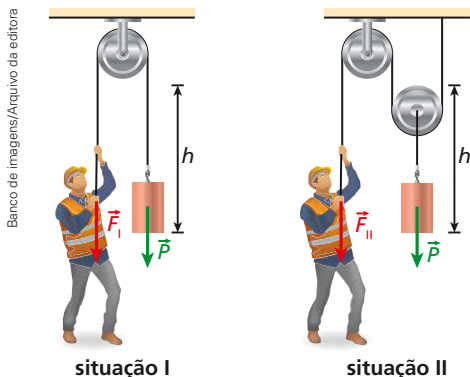
Considere um carro lotado de 4 passageiros, com 1 400 kg de massa total, descendo no sentido do litoral, e a aceleração da gravidade com módulo igual a 10 m/s^2 . Os trabalhos realizados pela força peso e pela força normal na descida da serra valem, em J, respectivamente,

- a) $1,12 \cdot 10^7$ e zero, qualquer que seja a rodovia escolhida para a viagem.
 b) $1,12 \cdot 10^7$ e zero, apenas se a estrada escolhida for a mais curta.
 c) $1,12 \cdot 10^7$ e zero, apenas se a estrada escolhida for a mais comprida.
 d) $1,12 \cdot 10^6$ e $1,12 \cdot 10^6$, qualquer que seja a estrada escolhida para a viagem.
 e) zero e $1,12 \cdot 10^6$, qualquer que seja a estrada escolhida para a viagem.

27. Uma partícula, inicialmente em repouso no ponto **A**, é levada ao ponto **B** da calha contida em um plano vertical, de raio igual a 2,0 m, indicada na figura. Uma das forças que agem sobre a partícula é \vec{F} , horizontal, dirigida sempre para a direita e de intensidade igual a 10 N. Considerando a massa da partícula igual a 2,0 kg e assumindo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:



- a) o trabalho de \vec{F} ao longo do deslocamento **AB**;
 b) o trabalho do peso da partícula ao longo do deslocamento referido no item anterior.
28. Um operário tem a incumbência de elevar uma carga de peso com módulo P à mesma altura h em duas situações distintas, I e II, com velocidade constante. Na situação I são utilizadas uma polia fixa e uma corda. Já na situação II, além da polia fixa e da corda, é também utilizada uma polia móvel.



As massas das polias são desprezíveis, bem como suas dimensões. A corda é ideal e não sofre interações de atrito com as polias.

Sendo F_I e F_{II} as intensidades das forças aplicadas pelo trabalhador na corda e τ_I e τ_{II} os trabalhos de F_I e F_{II} , respectivamente, nas situações I e II, é correto afirmar que:

- a) $F_{II} = \frac{F_I}{2}$ e $\tau_{II} = \frac{\tau_I}{2}$ c) $F_{II} = F_I$ e $\tau_{II} = \tau_I$
 b) $F_{II} = \frac{F_I}{2}$ e $\tau_{II} = \tau_I$ d) $F_{II} = F_I$ e $\tau_{II} = \frac{\tau_I}{2}$

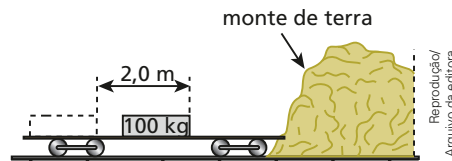
29. (Unicamp-SP) O primeiro satélite geoestacionário brasileiro foi lançado ao espaço em 2017 e será utilizado para comunicações estratégicas do governo e na ampliação da oferta de comunicação de banda larga. O foguete que levou o satélite ao espaço foi lançado do Centro Espacial de Kourou, na Guiana Francesa. A massa do satélite é constante desde o lançamento até a entrada em órbita e vale $m = 6,0 \cdot 10^3$ kg. O módulo de sua velocidade orbital é igual a $v_{or} = 3,0 \cdot 10^3$ m/s. Desprezando a velocidade inicial do satélite em razão do movimento de rotação da Terra, o trabalho da força resultante sobre o satélite para levá-lo até a sua órbita é igual a

- a) 2 MJ. c) 27 GJ.
 b) 18 MJ. d) 54 GJ.

30. (Fuvest-SP) Considere um bloco de massa $M = 10$ kg que se move sobre uma superfície horizontal com uma velocidade inicial de 10 m/s. No local, o efeito do ar é desprezível e adota-se $|\vec{g}| = 10$ m/s².

- a) Qual o trabalho realizado pela força de atrito para levar o corpo ao repouso?
 b) Supondo que o coeficiente de atrito cinético seja $\mu = 0,10$, qual o intervalo de tempo necessário para que a velocidade do bloco seja reduzida à metade do seu valor inicial?

31. (Vunesp) Um vagão, deslocando-se lentamente com velocidade v num pequeno trecho plano e horizontal de uma estrada de ferro, choca-se com um monte de terra e para abruptamente. Em virtude do choque, uma caixa de madeira, de massa 100 kg, inicialmente em repouso sobre o piso do vagão, escorrega e percorre uma distância de 2,0 m antes de parar, como mostra a figura.



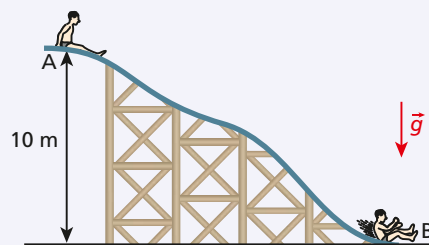
Considerando $g = 10$ m/s² e sabendo que o coeficiente de atrito dinâmico entre a caixa e o piso do vagão é igual a 0,40, calcule:

- a) a velocidade v do vagão antes de se chocar com o monte de terra;
 b) a energia cinética da caixa antes de o vagão se chocar com o monte de terra e o trabalho realizado pela força de atrito que atuou na caixa enquanto ela escorregava.

32. Um projétil de 10 g de massa atinge horizontalmente uma parede de alvenaria com velocidade de 120 m/s, nela penetrando 20 cm até parar. Determine, em newtons, a intensidade média da força resistente que a parede opõe à penetração do projétil.

33. (UPM-SP) Um corpo de massa 2,0 kg é submetido à ação de uma força cuja intensidade varia de acordo com a equação $F = 8,0x$. F é a força medida em newtons e x é o deslocamento dado em metros. Admitindo que o corpo estava inicialmente em repouso, qual a intensidade da sua velocidade após ter-se deslocado 2,0 m?

34. Jobson, de massa 40 kg, partiu do repouso no ponto **A** do tobogã da figura a seguir, atingindo o ponto **B** com velocidade de 10 m/s.



Admitindo $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando o efeito do ar, calcule o trabalho das forças de atrito que agiram no corpo de Jobson de **A** até **B**.

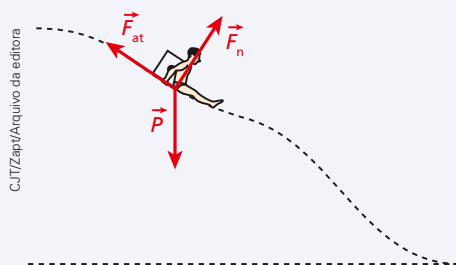
Resolução:

Durante a descida, três forças agem no corpo de Jobson:

\vec{P} = força da gravidade (peso);

\vec{F}_n = reação normal do tobogã;

\vec{F}_{at} = força de atrito.



O trabalho total, de todas as forças, é dado por:

$$\tau_{total} = \tau_{\vec{P}} + \tau_{\vec{F}_{at}} + \tau_{\vec{F}_n}$$

A parcela $\tau_{\vec{F}_n}$ é nula, pois \vec{F}_n é, a cada instante, perpendicular à trajetória. Assim:

$$\tau_{total} = \tau_{\vec{P}} + \tau_{\vec{F}_{at}} \quad (I)$$

Conforme o Teorema da Energia Cinética, temos:

$$\tau_{total} = E_{cB} - E_{cA}$$

$$\tau_{total} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$$

Como $v_A = 0$ (Jobson partiu do repouso), vem:

$$\tau_{total} = \frac{mv_B^2}{2} \quad (II)$$

Comparando (I) e (II), obtém-se:

$$\tau_{\vec{P}} + \tau_{\vec{F}_{at}} = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow mgh + \tau_{\vec{F}_{at}} = \frac{mv_B^2}{2}$$

$$\tau_{\vec{F}_{at}} = \frac{mv_B^2}{2} - mgh$$

Sendo $m = 40 \text{ kg}$, $v_B = 10 \text{ m/s}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, calculemos $\tau_{\vec{F}_{at}}$:

$$\tau_{\vec{F}_{at}} = \frac{40 \cdot (10)^2}{2} - 40 \cdot 10 \cdot 10$$

$$\tau_{\vec{F}_{at}} = -2,0 \cdot 10^3 \text{ J}$$

35. Em situações de emergência, bombeiros se dirigem muito rapidamente às viaturas de combate a incêndios deslocando-se, a princípio, de um andar ao outro, utilizando um cano vertical. Eles descem por esse tradicional utensílio, sob a ação de seu peso e da força de atrito, que é ajustada ao longo do percurso visando evitar colisões traumáticas contra o solo.



Admita que um bombeiro de massa $m = 70 \text{ kg}$ parta do repouso e escorregue verticalmente para baixo ao longo de um cano que interliga dois andares, cujos pisos são desnivelados por $5,0 \text{ m}$. Adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$ e sabendo-se que o bombeiro atinge o andar inferior com velocidade de intensidade $2,0 \text{ m/s}$, determine o valor algébrico do trabalho das forças de atrito sobre seu corpo.

36. Um corpo de massa m é abandonado de uma altura h acima de um solo coberto de neve.

ER.

O corpo penetra verticalmente uma distância d na neve até parar.

Despreze o efeito do ar na queda e denote g o módulo da aceleração da gravidade.



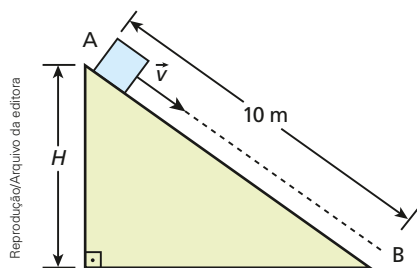
Determine em função de m , g , h e d a intensidade da força média de retardamento imposta pela neve ao corpo.

Resolução:

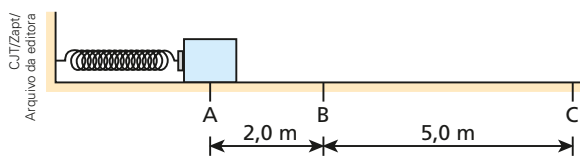
Temos, pelo Teorema da Energia Cinética, que o trabalho corresponde à variação de energia cinética do corpo:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{total}} &= \Delta E_c \\ \tau_p + \tau_{F_m} &= 0 \\ mg(h + d) - F_m d &= 0 \\ \boxed{F_m} &= \frac{mg(h + d)}{d}\end{aligned}$$

37. (Fuvest-SP) Um bloco de massa 2,0 kg é lançado do topo de um plano inclinado, com velocidade escalar de 5,0 m/s, conforme indica a figura. Durante a descida, atua sobre o bloco uma força de atrito constante de intensidade 7,5 N, que faz o bloco parar após deslocar-se 10 m. Calcule a altura H , desprezando o efeito do ar e adotando $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



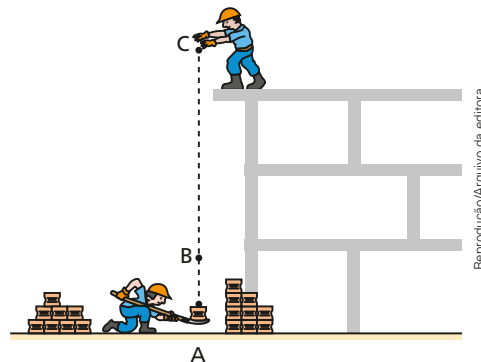
38. Na situação esquematizada na figura, a mola tem massa desprezível, constante elástica igual a $1,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$ e está inicialmente travada na posição indicada, contraída de 50 cm. O bloco, cuja massa é igual a 1,0 kg, está em repouso no ponto **A**, simplesmente encostado na mola. O trecho **AB** do plano horizontal é perfeitamente polido e o trecho **BC** é áspero.



Em determinado instante, a mola é destravada e o bloco é impulsionado, atingindo o ponto **B** com velocidade de intensidade v_B . No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$. Sabendo que o bloco para ao atingir o ponto **C**, calcule:

- o valor de v_B ;
 - o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano de apoio no trecho **BC**.
39. (OBF) Um servente de pedreiro, empregando uma pá, atira um tijolo verticalmente para cima para o

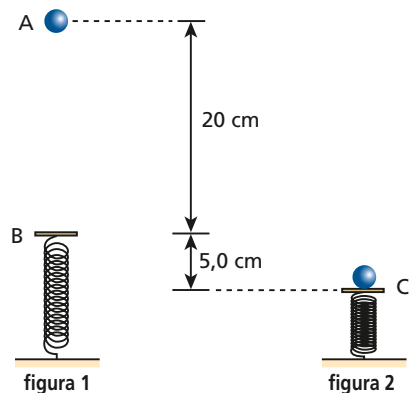
mestre de obras, que está em cima da construção. Veja a figura. Inicialmente, utilizando a ferramenta, ele acelera o tijolo uniformemente de **A** para **B**; a partir de **B**, o tijolo se desliga da pá e prossegue em ascensão vertical, sendo recebido pelo mestre de obras com velocidade praticamente nula em **C**.



Considerando-se como dados o módulo da aceleração da gravidade, g , a massa do tijolo, M , e os comprimentos, $AB = h$ e $AC = H$, e desprezando-se a influência do ar, determine:

- a intensidade F da força com a qual a pá impulsiona o tijolo;
- o módulo a da aceleração do tijolo ao longo do percurso **AB**.

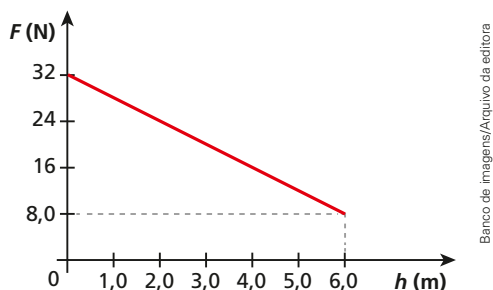
40. Na situação representada nas figuras 1 e 2, a mola tem massa desprezível e está fixa no solo com o seu eixo na vertical. Um corpo de pequenas dimensões e massa igual a 2,0 kg é abandonado da posição **A** e, depois de colidir com o aparador da mola na posição **B**, aderindo a ele, desce e para instantaneamente na posição **C**.



Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando o efeito do ar e a energia mecânica dissipada no ato da colisão, calcule:

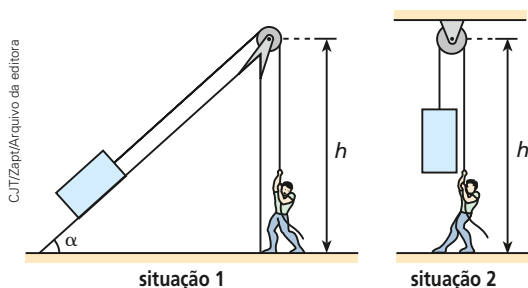
- o trabalho do peso do corpo no percurso **AC**;
- o trabalho da força aplicada pela mola sobre o corpo no percurso **BC**;
- a constante elástica da mola.

41. Uma partícula de massa 2,0 kg, inicialmente em repouso sobre o solo, é puxada verticalmente para cima por uma força \vec{F} , cuja intensidade varia com a altura h , atingida pelo seu ponto de aplicação, conforme mostra o gráfico:



No local, $|\vec{g}| = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e despreza-se a influência do ar. Considerando a ascensão da partícula de $h_0 = 0$ a $h_1 = 6,0 \text{ m}$, determine:

- a altura em que a velocidade tem intensidade máxima;
 - a intensidade da velocidade para $h_1 = 6,0 \text{ m}$.
42. Nas duas situações representadas abaixo, uma mesma carga de peso P é elevada a uma mesma altura h :



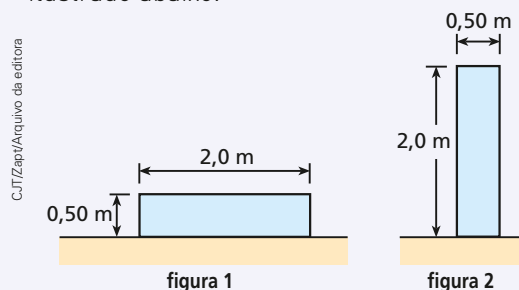
Nos dois casos, o bloco parte do repouso, parando ao atingir a altura h . Desprezando todas as forças passivas, analise as proposições seguintes:

- Na situação 1, a força média exercida pelo homem é menos intensa que na situação 2.
- Na situação 1, o trabalho realizado pela força do homem é menor que na situação 2.
- Em ambas as situações, o trabalho do peso da carga é calculado por $-Ph$.
- Na situação 1, o trabalho realizado pela força do homem é calculado por Ph .

Responda mediante o código:

- Todas são corretas.
- Todas são incorretas.
- Somente II e III são corretas.
- Somente I, III e IV são corretas.
- Somente III é correta.

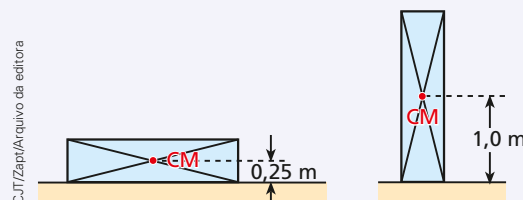
43. Considere um corpo de massa 20 kg, homogêneo, em forma de paralelepípedo, como ilustrado abaixo.



O corpo, inicialmente apoiado sobre sua maior face (figura 1), é erguido por um operador, ficando apoiado sobre sua menor face (figura 2). Sendo $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, calcule o trabalho da força do operador no erguimento do corpo.

Resolução:

Observe que este é um corpo extenso, de dimensões não desprezíveis. Para efeito de cálculo vamos considerar o seu centro de massa, ou seja, o ponto **CM**, onde se admite concentrada toda a massa do sistema.

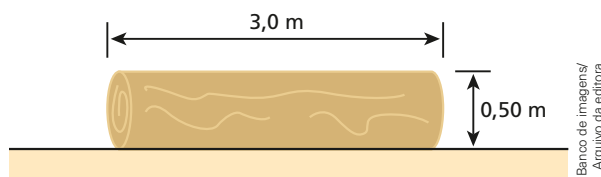


Sendo $m = 20 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $h = 1,0 - 0,25 = 0,75 \text{ m}$, calculamos o trabalho pedido (τ_{oper}):

$$\tau_{\text{oper}} = mgh \Rightarrow \tau_{\text{oper}} = 20 \cdot 10 \cdot 0,75$$

$$\tau_{\text{oper}} = 1,5 \cdot 10^2 \text{ J}$$

44. Considere uma tora de madeira de massa igual a $2,0 \cdot 10^2 \text{ kg}$, cilíndrica e homogênea, posicionada sobre o solo, conforme indica a figura.



Adotando $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, calcule o trabalho realizado pelas forças aplicadas por um grupo de pessoas para colocar a tora com o eixo longitudinal na vertical, apoiada sobre sua base.

10. Introdução ao conceito de potência

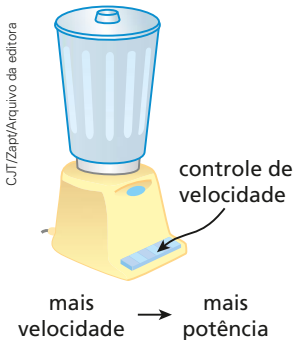
Na maioria dos casos práticos, não basta dizer apenas que certo dispositivo é capaz de cumprir determinada função. Às vezes é mais importante definir em quanto tempo ele executa essa função.

Tomemos, por exemplo, o caso de um guindaste. Suponhamos que ele erga uma viga de 1 tonelada a uma altura de 10 metros. Uma pergunta importante que deve ser feita nesse problema é: em quanto tempo o guindaste ergue a viga?

Do ponto de vista geral, a **potência** de um sistema consiste na rapidez com que ele realiza suas atribuições. A potência é tanto maior quanto menor é o intervalo de tempo utilizado na execução de uma mesma tarefa.

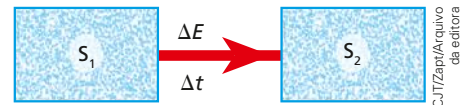
Dependendo do sistema em estudo, a potência recebe especificações diferentes. Falamos, por exemplo, de potência elétrica nos geradores, de potência térmica nos aquecedores e de potência mecânica quando estudamos a viabilidade de uma cachoeira para a instalação de um sistema de conversão hidrelétrica.

Quanto maior for a velocidade de rotação das facas de um liquidificador, por exemplo, menor será o intervalo de tempo que ele levará para triturar uma mesma quantidade de certo tipo de alimento. Assim, aumentando a velocidade de rotação das facas, estaremos aumentando a potência do sistema.



11. Potência média

Vamos considerar, agora, um sistema mecânico S_1 que, durante um intervalo de tempo Δt , transfere para um sistema mecânico S_2 uma quantidade de energia ΔE .



Nesse processo, define-se **potência média** (Pot_m) como o quociente da energia transferida (ΔE) pelo intervalo de tempo (Δt) em que essa transferência ocorreu:

$$Pot_m = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Essa energia transferida equivale a um trabalho τ . Assim, a potência mecânica média também pode ser dada por:

$$Pot_m = \frac{\tau}{\Delta t}$$

A unidade de potência é obtida pelo quociente da unidade de trabalho (ou energia) pela unidade de tempo:

$$\text{unid. (Pot)} = \frac{\text{unid. } (\tau)}{\text{unid. (t)}}$$

No Sistema Internacional (SI):

$$\text{unid. } (\tau) = \text{joule (J)}$$

$$\text{unid. (t)} = \text{segundo (s)}$$

Logo:

$$\text{unid. (Pot)} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{watt (W)}$$

Um múltiplo muito usado do watt é o **quilowatt (kW)**:

$$1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$$

Outros múltiplos também usados com frequência, principalmente quando se fala de geração e transmissão de energia elétrica, são o **megawatt (MW)** e o **gigawatt (GW)**:

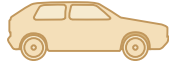



$$1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W}$$

$$1 \text{ GW} = 10^9 \text{ W}$$

Embora não pertencentes ao Sistema Internacional (SI), são também muito empregadas as seguintes unidades de potência:

- cavalo-vapor (cv): $1 \text{ cv} \cong 735,5 \text{ W}$
- horse-power (hp): $1 \text{ hp} \cong 745,7 \text{ W}$

No quadro a seguir, fornecemos os valores aproximados das potências máximas disponibilizadas por quatro tipos de veículo automotor: um carro popular, um carro de padrão médio, um carro esportivo e um carro de Fórmula 1.

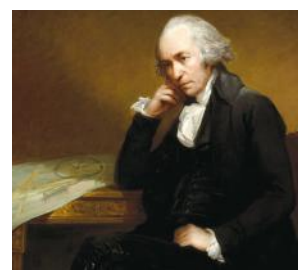
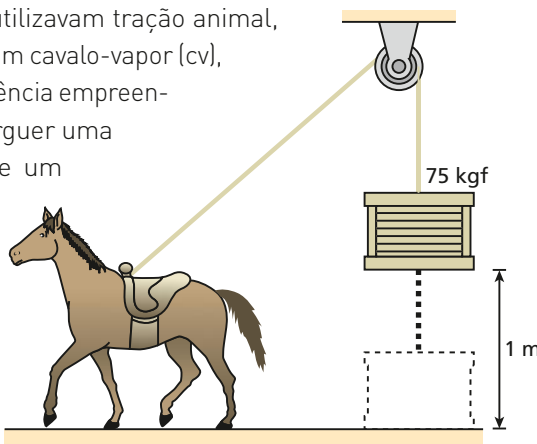
Categoria do veículo	Desenho básico	Potência máxima disponibilizada, em cavalos-vapor (cv)
Carro popular		60
Carro de padrão médio		110
Carro esportivo		400
Carro de Fórmula 1		750

James Watt (1736-1819) foi um engenheiro escocês de fundamental importância no desenvolvimento e aprimoramento de máquinas térmicas, que constituíram a essência tecnológica de um dos períodos mais notáveis da história: a Revolução Industrial. Os mecanismos mais importantes projetados por ele eram acionados por vapor de água em alta pressão, obtido a partir da ebulição do líquido em caldeiras. Outros engenhos, porém, utilizavam tração animal, rodas-d'água e moinhos de vento. Um cavalo-vapor (cv), como foi definido por Watt, era a potência empreendida por um cavalo robusto para erguer uma carga de 75 kgf a uma altura de um metro durante um segundo.

$$Pot_m = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t}$$

$$Pot_m = \frac{75 \text{ kg} \cdot 9,807 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m}}{1 \text{ s}}$$

$Pot_m \cong 735,5 \text{ W}$

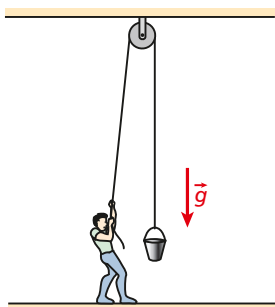


Retrato de James Watt, pintado por Carl Frederik von Breda em 1792. Science Museum, Londres.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Exercícios Nível 1

45. Na figura, um operário ergue um balde cheio de concreto, de 20 kg de massa, com velocidade constante. A corda e a polia são ideais e, no local, $g = 10 \text{ m/s}^2$. Considerando um deslocamento vertical de 4,0 m, que ocorre em 25 s, determine:



CJTZap/Arquivo da editora

- a) o trabalho realizado pela força do operário;
b) a potência média útil na operação.
46. (PUC-SP) Uma pessoa de massa 80 kg sobe uma escada de 20 degraus, cada um com 20 cm de altura.

- a) Calcule o trabalho que a pessoa realiza contra a gravidade (adote $g = 10 \text{ m/s}^2$).
b) Se a pessoa subir a escada em 20 segundos, ela se cansará mais do que se subir em 40 segundos. Como se explica isso, já que o trabalho realizado é o mesmo nos dois casos?

47. (Fuvest-SP) Dispõe-se de um motor com potência útil de 200 W para erguer um fardo de massa de 20 kg à altura de 100 m em um local onde $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Supondo que o fardo parte do repouso e volta ao repouso, calcule:

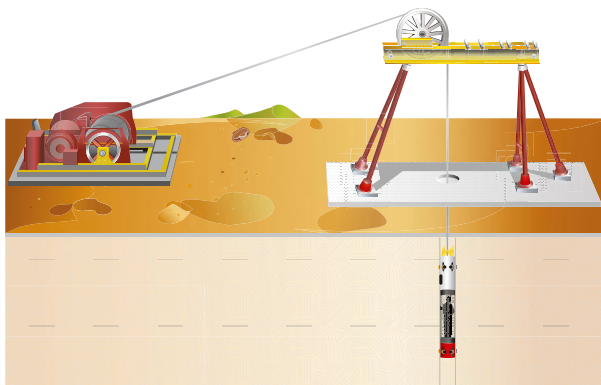
- a) o trabalho desenvolvido pela força aplicada pelo motor;
b) o intervalo de tempo gasto nessa operação.

48. Entre as unidades seguintes, aponte aquela que não pode ser utilizada na medição de potências.

- a) $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ c) cavalo-vapor e) $\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$
b) $\text{N} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$ d) quilowatt-hora

Exercícios Nível 2

49. (UFRGS-RS) O resgate de trabalhadores presos em uma mina subterrânea no norte do Chile foi realizado através de uma cápsula introduzida numa perfuração do solo até o local em que se encontravam os mineiros, a uma profundidade da ordem de 600 m. Um motor com potência total aproximadamente igual a 200 kW puxava a cápsula de 250 kg contendo um mineiro de cada vez.



Reprodução/Arquivo da editora

Considere que, para o resgate de um mineiro de 70 kg de massa a cápsula gastou 10 minutos para completar o percurso e suponha que a aceleração da gravidade local tenha módulo igual a 10 m/s^2 . Não se computando a potência necessária para compensar as perdas por atrito, a potência efetivamente fornecida pelo motor para içar a cápsula foi de:

- a) 686 W c) 3200 W e) 41160 W
b) 2450 W d) 18816 W

50. (Fuvest-SP) Uma esteira rolante transporta 15 caixas de bebida por minuto de um depósito no subsolo até o andar térreo. A esteira tem comprimento de 12 m, inclinação de 30° com a horizontal e move-se com velocidade constante. As caixas a serem transportadas já são colocadas com a mesma velocidade da esteira. Se cada caixa pesa 200 N, o motor que aciona esse mecanismo deve fornecer a potência de:

- a) 20 W c) $3,0 \cdot 10^2 \text{ W}$ e) $1,0 \cdot 10^3 \text{ W}$
b) 40 W d) $6,0 \cdot 10^2 \text{ W}$

51. (Unicamp-SP)

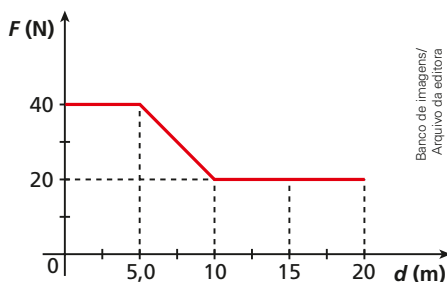
Um carro recentemente lançado pela indústria brasileira tem aproximadamente 1,5 tonelada e pode acelerar, sem derrapagens, do repouso até uma velocidade escalar de 108 km/h, em 10 segundos.

Fonte: Revista Quatro Rodas.

Despreze as forças dissipativas e adote 1 cavalo-vapor (cv) = 750 W.

- Qual o trabalho realizado, nessa aceleração, pelas forças do motor do carro?
- Qual a potência média do motor do carro, em cv?

52. O gráfico a seguir mostra a variação da intensidade de uma das forças que agem em uma partícula em função de sua posição sobre uma reta orientada. A força é paralela à reta. Sabendo que a partícula tem movimento uniforme com velocidade de 4,0 m/s, calcule, para os 20 m de deslocamento descritos no gráfico abaixo:



- o trabalho da força;
- sua potência média.

53. A usina hidrelétrica de Itaipu é uma obra conjunta do Brasil e do Paraguai que envolve números gigantescos. A potência média teórica chega a 12600 MW quando 18 unidades geradoras operam conjuntamente, cada qual com uma vazão próxima de 700 m^3 por segundo. Suponha que a água da represa adentre as tubulações que conduzem o líquido às turbinas com velocidade praticamente nula e admita que os geradores aproveitem 100% da energia hídrica disponível. Adotando-se para a aceleração da gravidade o valor 10 m/s^2 e sabendo-se que a densidade da água é igual a $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, determine o desnível entre as bocas das tubulações e suas bases, onde estão instaladas as turbinas das unidades geradoras.

Resolução:

A potência elétrica disponibilizada em cada unidade geradora é calculada fazendo-se:

$$Pot_m = \frac{12600}{18} \therefore Pot_m = 700 \text{ MW} = 7,0 \cdot 10^8 \text{ W}$$

Sendo $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$; $Z = 7,0 \cdot 10^2 \text{ m}^3/\text{s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, calculamos o desnível h :

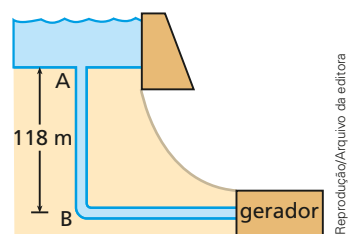
$$Pot_m = \mu Z g h$$

$$7,0 \cdot 10^8 = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 7,0 \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot h$$

Logo:

$$h = 100 \text{ m}$$

54. (UFPE) As águas do rio São Francisco são represadas em muitas barragens, para o aproveitamento do potencial hidrográfico e transformação de energia potencial gravitacional em outras formas de energia. Uma dessas represas é Xingó, responsável por grande parte da energia elétrica que consumimos. A figura a seguir representa a barragem e uma tubulação, que chamamos de tomada d'água, e o gerador elétrico. Admita que, no nível superior do tubo, a água está em repouso, caindo a seguir até um desnível de 118 m, onde encontra o gerador de energia elétrica. O volume de água que escoar, por unidade de tempo, é de $5,0 \cdot 10^2 \text{ m}^3/\text{s}$. Considere a densidade da água igual a $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e admita que não haja dissipação de energia mecânica.



Calcule, em MW, a potência hídrica na entrada do gerador.

55. (UnB-DF) Um automóvel de massa m é acelerado uniformemente pelo seu motor. Sabe-se que ele parte do repouso e atinge a velocidade v_0 em t_0 segundos. Então, a potência que o motor desenvolve após transcorridos t segundos da partida é:

a) $\frac{mv_0^2}{2t_0^3} t^2$

c) $\frac{mv_0^2}{t^2} t_0$

b) $\frac{mv_0^2}{t_0^2} t$

d) $\frac{2mv_0^2}{t_0^2} t$

12. Potência instantânea

NOTA!

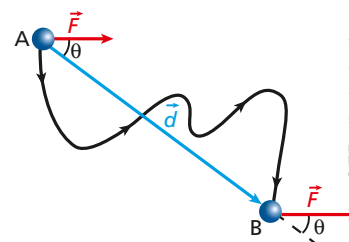
Em uma situação em que a potência é constante, o valor instantâneo iguala-se ao médio.

Definimos a potência média em um intervalo de tempo Δt . Se fizermos esse intervalo de tempo tender a zero, teremos, no limite, a **potência instantânea**, que pode ser expressa matematicamente por:

$$Pot = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} Pot_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tau}{\Delta t}$$

13. Relação entre potência instantânea e velocidade

Em vários problemas de Mecânica, há interesse em se relacionar a potência com a velocidade. Conhecendo, por exemplo, a intensidade da velocidade de um veículo em certo instante, podemos determinar a potência útil fornecida por seu motor no instante considerado.



Estudemos a situação ao lado, em que uma partícula é deslocada de **A** para **B** ao longo da trajetória indicada, sob a ação da força \vec{F} (constante), entre outras forças.

Sejam \vec{d} o deslocamento vetorial de **A** a **B**, θ o ângulo entre \vec{F} e \vec{d} e Δt o intervalo de tempo gasto no trajeto. O trabalho de \vec{F} de **A** até **B** pode ser calculado por:

$$\tau = |\vec{F}||\vec{d}| \cos \theta \quad (I)$$

A potência média de \vec{F} nesse deslocamento é:

$$Pot_m = \frac{\tau}{\Delta t} \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), segue:

$$Pot_m = \frac{|\vec{F}||\vec{d}| \cos \theta}{\Delta t}$$

O quociente $\frac{|\vec{d}|}{\Delta t}$, entretanto, é o módulo da velocidade vetorial média (\vec{v}_m) da partícula.

Assim:

$$Pot_m = |\vec{F}||\vec{v}_m| \cos \theta$$

A potência instantânea de \vec{F} é obtida passando-se o último resultado ao limite, para o intervalo de tempo tendendo a zero ($\Delta t \rightarrow 0$):

$$Pot = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} Pot_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (|\vec{F}||\vec{v}_m| \cos \theta)$$

Diante desse limite, os valores médios transformam-se em instantâneos e obtemos:

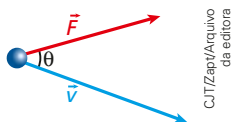
$$Pot = |\vec{F}||\vec{v}| \cos \theta$$

ou, em notação mais simples:

$$Pot = Fv \cos \theta$$

NOTA!

Observe na expressão ao lado que θ é o ângulo formado entre \vec{F} e \vec{v} :



Caso particular importante: $\theta = 0^\circ$

Nesse caso, \vec{F} e \vec{v} têm a mesma orientação, isto é, mesma direção e sentido.

$$Pot = Fv \cos \theta$$

Se $\theta = 0^\circ \Rightarrow \cos \theta = 1$, levando-nos a concluir que:

$$Pot = Fv$$

Os foguetes russos Soyuz, lançados do cosmódromo de Baikonur, no Cazaquistão, são atualmente os veículos responsáveis pelo envio de astronautas à Estação Espacial Internacional (EEI ou ISS), superbase-laboratório terrestre em órbita ao redor do planeta. A força propulsora (F) recebida pelo veículo tem a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade (v), razão pela qual a potência Pot dessa força fica determinada em cada instante pelo produto $Pot = |F||v|$.

Vera Larina/Shutterstock



14. Propriedade do gráfico da potência em função do tempo

Admitamos uma situação em que a potência de uma força seja constante no decorrer do tempo. O gráfico ao lado corresponde a esse caso.

Teria a "área" A destacada algum significado especial? Sim, pois ela fornece uma medida algébrica do trabalho da força durante o intervalo de tempo considerado.

Isso pode ser verificado fazendo-se:

$$A = Pot (t_2 - t_1)$$

Sendo $t_2 - t_1 = \Delta t$ (intervalo de tempo), temos:

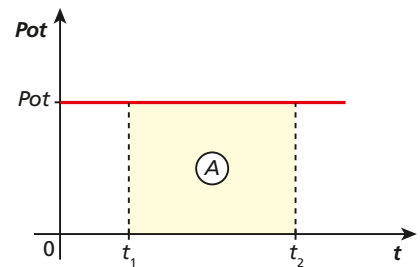
$$A = Pot \Delta t \quad (I)$$

Entretanto,

$$Pot = \frac{\tau}{\Delta t} \Rightarrow \tau = Pot \Delta t \quad (II)$$

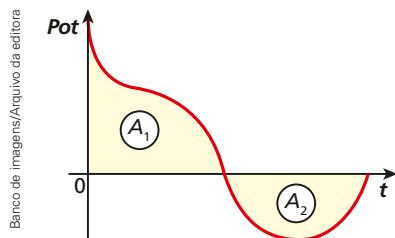
Comparando (I) e (II), concluímos que:

$$A = \tau$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Apresentamos essa propriedade a partir de um caso particular, isto é, partimos da suposição de que a potência era constante. Entretanto, sua validade estende-se também aos casos em que a potência é variável. Nessas situações, a demonstração requer o uso de elementos de Cálculo Diferencial e Integral, o que foge ao escopo deste curso.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$A_1 + A_2 = \tau$$

(soma algébrica)

De modo geral, podemos enunciar que:

Dado um diagrama da potência em função do tempo, a "área" compreendida entre o gráfico e o eixo dos tempos expressa o valor algébrico do trabalho ou da energia transferida.

Haja gasolina!

Muitas vezes nos surpreendemos com o aumento de consumo de combustível apresentado por um veículo que faz uma determinada viagem em alta velocidade. É completar o trajeto, mandar encher o tanque e ter a surpresa.

— Esse carro está bebendo demais!!!

Isso se explica porque, quanto maior for a velocidade, maior será a solicitação de potência do motor e maior será, conseqüentemente, o consumo de combustível.

Imaginemos uma situação em que a intensidade da força total de resistência ao movimento (F_r) seja proporcional ao quadrado da intensidade da velocidade do veículo (v). Sendo k a constante da proporcionalidade, podemos escrever que:

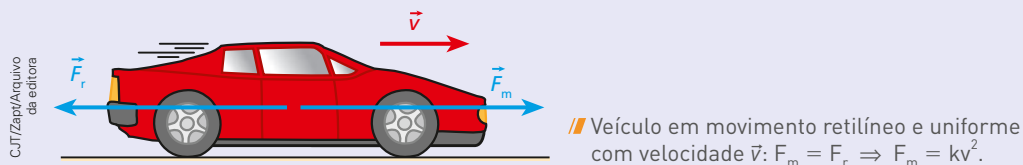
$$F_r = kv^2 \quad (I)$$

Supondo o veículo em movimento retilíneo e uniforme, deslocando-se em uma pista horizontal, a intensidade da força motriz que atua sobre ele (F_m) é igual à intensidade da força total de resistência ao movimento (F_r), já que essas duas forças se equilibram mutuamente.

$$F_m = F_r \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), vem:

$$F_m = kv^2 \quad (III)$$



Como a força motriz tem a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade, sua potência instantânea (Pot) é determinada por:

$$Pot = F_m v \quad (IV)$$

Substituindo (III) em (IV), temos:

$$Pot = kv^2 \cdot v$$

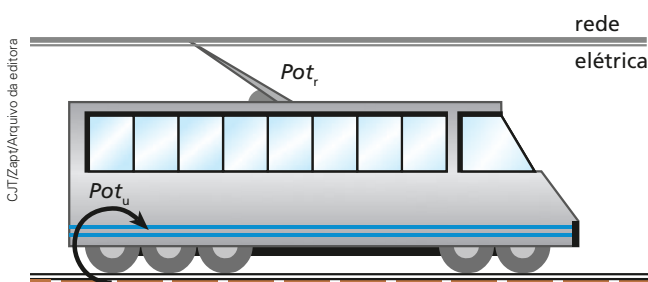
Daí:

$$Pot = kv^3$$

Observe que a potência (Pot) é diretamente proporcional ao cubo da velocidade (v). Isso significa que, dobrando-se v , por exemplo, o valor da Pot fica multiplicado por oito.

Então podemos concluir que um pequeno aumento na velocidade implica um grande aumento na potência solicitada do motor, o que acarreta, entre outros efeitos, maior consumo de combustível.

15. Rendimento



A noção de rendimento é largamente utilizada em diversos segmentos da atividade humana, sobretudo nas áreas técnicas. Fala-se, por exemplo, que o rendimento de um carro não está bom. Até nos esportes é comum mencionar que um determinado atleta não está rendendo como de costume.

Tome como exemplo a figura ao lado, em que uma locomotiva elétrica se encontra em movimento para a direita.

Suponhamos que ela receba da rede uma potência Pot_r . Será que toda a potência recebida é utilizada no movimento? Claro que não! Uma parte é dissipada, perdendo-se por efeito de atritos: aquecimento, ruídos, entre outros.

Se Pot_u a potência útil (utilizada no movimento) e Pot_d a potência dissipada, temos:

$$Pot_u = Pot_r - Pot_d$$

O rendimento (η) da locomotiva, por sua vez, é calculado pelo quociente da potência útil (Pot_u) pela potência recebida (Pot_r). Veja:

$$\eta = \frac{Pot_u}{Pot_r}$$

Esse exemplo pode ser estendido a outros casos. Em termos gerais, diz-se que:

O **rendimento** (η) de um sistema físico qualquer é dado pelo quociente da potência útil (Pot_u) pela potência recebida (Pot_r).

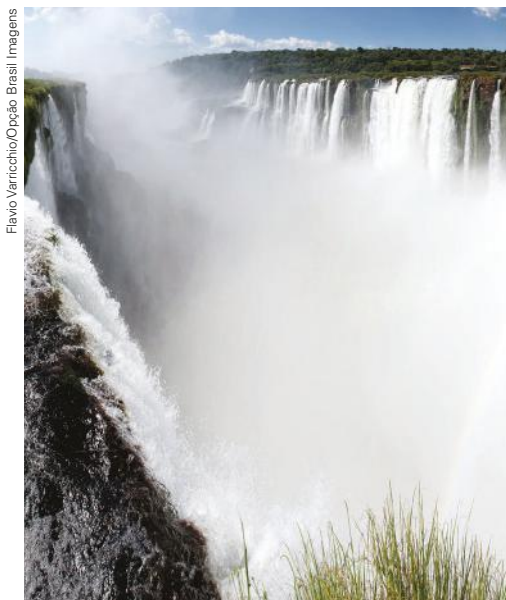
O rendimento é adimensional (não tem unidades) por ser definido pelo quociente entre duas grandezas medidas nas mesmas unidades. É expresso geralmente em porcentagem, bastando, para isso, multiplicar seu valor por 100%.

O rendimento de um sistema físico real é sempre inferior a 1 ou a 100%, pois, em razão das dissipações sempre existentes, a potência útil é sempre menor que a recebida.

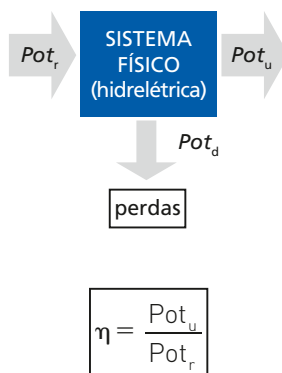
De fato:
$$\eta = \frac{Pot_u}{Pot_r} \Rightarrow \eta = \frac{Pot_r - Pot_d}{Pot_r}$$

Daí:
$$\eta = 1 - \frac{Pot_d}{Pot_r}$$

O esquema a seguir ilustra o conceito de rendimento a partir de uma queda-d'água até uma linha de transmissão.



// Garganta do Diabo, o maior conjunto de quedas-d'água das cataratas do Iguazu (2012).



// Linha de transmissão em campo de girassol.

A ocorrência de $\eta = 1$ ou 100% implica $Pot_d = 0$, o que é inviável em termos reais. Dizemos que o rendimento de um sistema é baixo quando a potência útil é bem menor que a recebida e que o rendimento de um sistema é alto quando a potência útil é pouco menor que a recebida.

Ampliando o olhar

Árvores laboriosas: trabalho no erguimento de água e os rios voadores da Amazônia

Quem disse que existem apenas rios líquidos escoando ao longo de calhas bem definidas, esculpidas pela água durante décadas a fio, e que esses rios serpenteiam rumo a rios maiores ou mesmo em direção ao mar?

Pois bem, a Floresta Amazônica despeja na atmosfera através de suas muitas árvores – estimadas em cerca de 600 bilhões de unidades, sabidamente, um verdadeiro manto verde equatorial – uma quantidade enorme de vapor de água, que supera em massa o que o Rio Amazonas verte diariamente em sua foz no Oceano Atlântico (cerca de 17 bilhões de toneladas de água). Calcula-se que cada árvore de grande porte transfira sozinha do subsolo para o ar aproximadamente 1000 L de água a cada 24 horas. Existe sobre nós, por conseguinte, um imenso rio voador!

E essa enorme massa de H_2O viaja transversalmente pelo céu do Brasil, do noroeste para o sudeste, irrigando o solo e possibilitando condições favoráveis e controladas de vida.

Trata-se de um processo sofisticado e eficaz, diferente do verificado nos gêiseres, que se constituem de dutos que fazem conexão com o subsolo. Nesse caso, o vapor de água em alta pressão produzido pelo magma superaquecido, devido à súbita descompressão, explode em jatos líquidos para a atmosfera.

A floresta lança sobre um quadrilátero imaginário com vértices aproximadamente em São Paulo, Buenos Aires, Cordilheira dos Andes e Cuiabá um grande rio aéreo que faz chover regularmente em toda essa região. É importante notar que esse quadrilátero situa-se em uma latitude – a implacável latitude 30° Sul – na qual ocorrem desertos em outras partes do mundo, como o Atacama, no Chile, o Kalahari, na África, e o Outback, na Austrália. Sendo irrigada pelas chuvas amazônicas, essa área da América do Sul escapa sorradeira da cruel estatística dos desertos, sendo atualmente a responsável por 70% do Produto Interno Bruto (PIB) do continente. Somos, pois, uma exceção, e isso é uma verdadeira dádiva, não é mesmo?

/// Carapanaúba. Manaus (AM). Setembro de 2014. As árvores puxam água existente no subsolo permitindo que ela evapore através de suas folhas. Trata-se de um incrível mecanismo da biosfera responsável por dotar de umidade a atmosfera terrestre.



Fabio Colombini/
Arquivo do fotógrafo

Essa poderosíssima usina ambiental, equivalente a 50 mil Itaipus, depende, porém, de sutilezas para continuar funcionando e a principal delas é a preservação da floresta. Agressões, como queimadas e desmatamentos, podem ser fatais, impactando imediatamente essa fantástica engrenagem e conduzindo o Centro-Oeste, o Sudeste e o Sul brasileiros a situações de escassez de chuvas – secas – e desabastecimento de água, como temos vivenciado nos dias atuais.



// Um rio de toras de madeira no seio da indefesa floresta. Grande parte dessa destruição ocorre de forma clandestina, burlando-se as leis e a fiscalização.



// Sistema da Cantareira (SP). Novembro de 2014. Imagens como esta têm permeado os noticiários brasileiros nos últimos tempos. Seca na região Sudeste? Quem diria! A natureza reclama e a contrapartida exigida para uma possível reversão desse quadro é restaurar as florestas – reflorestar.

Com um olhar para os malefícios da abertura indiscriminada de áreas agrícolas na Amazônia, cabe, portanto, uma maior reflexão da sociedade no que se refere a legislações ambientais, especialmente em pontos que deliberam sobre queimadas e desmatamentos.

Sem as florestas, o meio ambiente caminhará para um colapso e o homem, cujo conforto e estabilidade dependem sobremaneira da harmonia e sustentabilidade ambientais, sucumbirá, padecendo com severas crises de oferta de insumos básicos, a começar por falta de água.

Fonte de pesquisa: Documento *O Futuro Climático da Amazônia* – Relatório de Avaliação Científica, do cientista ambiental Professor Antônio Donato Nobre (PhD), Articulación Regional Amazônica (ARA).

Disponível em: <www.ccst.inpe.br/o-futuro-climatico-da-amazonia-relatorio-de-avaliacao-cientifica-antonio-donato-nobre/>. Acesso em: 2 jul. 2018.

JÁ PENSOU NISTO?

Gerar energia elétrica com menos impacto ambiental?

Uma modalidade de energia que vem sendo utilizada cada vez em maior escala é a **eólica**, proveniente das correntes de ar (ventos). O aproveitamento desse tipo de energia, considerada energia limpa por não causar poluição, pode ser observado em regiões áridas ou desérticas, como no oeste dos Estados Unidos, nos estados da Califórnia, de Nevada e do Arizona, além de alguns estados do Nordeste brasileiro.

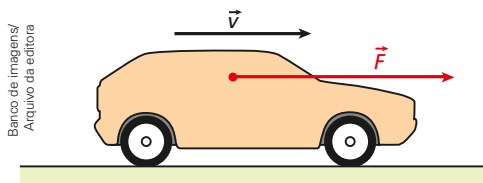
O vento age nas pás dos rotores, fazendo-as girar. Esse movimento é transmitido aos eixos de geradores, que disponibilizam em seus terminais tensão elétrica. A potência útil disponível em cada ventoinha é sempre menor que a potência recebida do vento, já que sempre ocorrem dissipações. Isso indica que o rendimento de cada sistema captador é menor que 100%.

// Maior complexo eólico da América Latina, localizado nos municípios de Caetitê, Guanambi e Igaporã, na Bahia. Dezembro de 2014.



Exercícios Nível 1

56. No esquema seguinte, \vec{F} é a força motriz que age no carro e \vec{v} , sua velocidade vetorial instantânea:

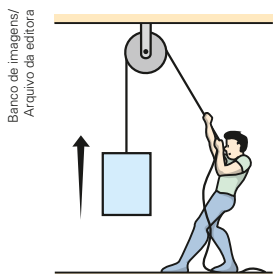


Sendo $|\vec{F}| = 1,0 \cdot 10^3 \text{ N}$ e $|\vec{v}| = 5,0 \text{ m/s}$, calcule, em kW, a potência de \vec{F} no instante considerado.

57. Uma partícula de massa $2,0 \text{ kg}$ parte do repouso sob a ação de uma força resultante de intensidade $1,0 \text{ N}$. Determine:
- o módulo da aceleração adquirida pela partícula;
 - a potência da força resultante, decorridos $4,0 \text{ s}$ da partida.

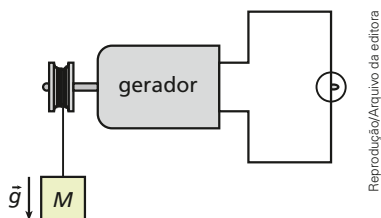
58. No arranjo da figura, Aurélio faz com que a carga de peso igual a 300 N seja elevada com velocidade constante de $0,50 \text{ m/s}$.

Considerando a corda e a polia ideais e o efeito do ar desprezível, determine:



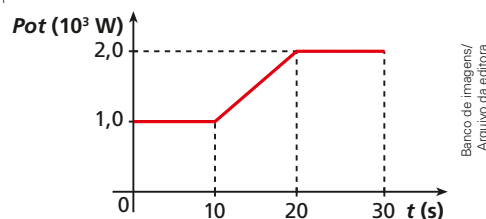
- a intensidade da força com que Aurélio puxa a corda;
- a potência útil da força exercida por ele.

59. (UFPE) Um gerador elétrico suposto ideal é acionado pela queda de um bloco de massa M que desce sob a ação da gravidade com velocidade escalar constante de $5,0 \text{ m/s}$. Sabendo que a potência fornecida pelo gerador é usada para acender uma lâmpada de 100 W , calcule o valor de M .



Despreze os atritos e adote $|\vec{g}| = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

60. O diagrama seguinte representa a potência instantânea fornecida por uma máquina, desde $t_0 = 0 \text{ s}$ até $t_1 = 30 \text{ s}$:



Com base no diagrama, determine:

- o trabalho realizado pela máquina, de $t_0 = 0 \text{ s}$ até $t_1 = 30 \text{ s}$;
- a potência média fornecida pela máquina no intervalo referido no item anterior.

61. O rendimento de determinada máquina é de **E.R.** 80% . Sabendo que ela recebe uma potência de $10,0 \text{ kW}$, calcule:

- a potência útil oferecida;
- a potência dissipada.

Resolução:

- a) O rendimento (η) da máquina pode ser expresso por:

$$\eta = \frac{\text{Pot}_u}{\text{Pot}_r}$$

Sendo $\eta = 80\% = 0,80$ e $\text{Pot}_r = 10,0 \text{ kW}$, calculemos Pot_u :

$$\text{Pot}_u = \eta \text{Pot}_r \Rightarrow \text{Pot}_u = 0,80 \cdot 10,0$$

$$\text{Pot}_u = 8,0 \text{ kW}$$

- b) Temos:

$$\text{Pot}_u = \text{Pot}_r - \text{Pot}_d \quad \text{ou} \quad \text{Pot}_d = \text{Pot}_r - \text{Pot}_u$$

Logo:

$$\text{Pot}_d = 10,0 \text{ kW} - 8,0 \text{ kW}$$

$$\text{Pot}_d = 2,0 \text{ kW}$$

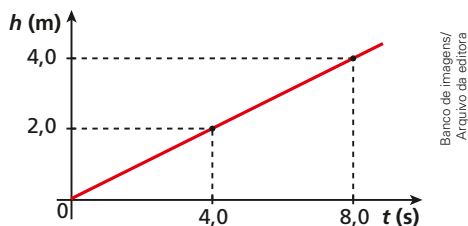
62. Qual é o rendimento de uma máquina que, ao receber 200 W , dissipa 50 W ?

- 25%
- 50%
- 75%
- 100%
- 150%

63. O rendimento de um motor é de 90% . Sabendo que ele oferece ao usuário uma potência de 36 hp , calcule:

- a potência total que o motor recebe para operar;
- a potência que ele dissipa durante a operação.

64. Uma caixa de massa $5,0 \cdot 10^2$ kg é erguida verticalmente por um guindaste, de modo que sua altura em relação ao solo varia em função do tempo, conforme o gráfico abaixo:



Considerando $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$, analise as proposições seguintes:

- I. O movimento da caixa é uniforme.
- II. A velocidade escalar da caixa no instante $t = 5,0$ s é $5,0 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$.
- III. A força que os cabos do guindaste aplicam na caixa tem intensidade $5,0 \cdot 10^3 \text{ N}$.
- IV. A potência útil do guindaste é de $2,5 \text{ kW}$.

Responda conforme o código:

- a) Todas são corretas.
 - b) Todas são incorretas.
 - c) Somente I e II são corretas.
 - d) Somente III e IV são corretas.
 - e) Somente I, III e IV são corretas.
65. Um paraquedista desce com velocidade constante de $5,0 \text{ m/s}$. O conjunto paraquedas e paraquedista pesa 100 kgf . Considerando $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, podemos dizer que a potência dissipada pelas forças de resistência do ar tem módulo:
- a) $0,50 \text{ kW}$
 - b) $4,9 \text{ kW}$
 - c) $5,0 \text{ kW}$
 - d) 49 kW
 - e) 50 kW

66. (Fatec-SP) Um carro de massa $1,0$ tonelada sobe 20 m ao longo de uma rampa inclinada de 20° com a horizontal, mantendo velocidade constante de 10 m/s . Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\sin 20^\circ = 0,34$ e $\cos 20^\circ = 0,94$ e desprezando o efeito do ar, calcule, nesse deslocamento:
- a) o trabalho realizado pelo peso do carro;
 - b) a potência útil do motor.

67. Uma caminhonete de massa $1,2$ tonelada sobe uma rampa inclinada de 30° em relação à horizontal, com velocidade constante de intensidade 36 km/h . As forças de atrito, resistentes ao movimento, perfazem 25% do peso do veículo. Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- a) a intensidade da força motriz exercida na caminhonete;
- b) a potência útil desenvolvida pelo motor do veículo.

68. Sabe-se que a intensidade da força total de resistência recebida por um carro de Fórmula 1 em movimento sobre o solo plano e horizontal é diretamente proporcional ao quadrado da intensidade de sua velocidade.

Admita que, para manter o carro com velocidade $v_A = 140 \text{ km/h}$, o motor forneça uma potência útil $P_A = 30 \text{ hp}$. Que potência útil P_B deverá o motor fornecer para manter o carro com velocidade $v_B = 280 \text{ km/h}$?

69. A velocidade escalar (v) de uma partícula em trajetória retilínea varia com o tempo (t), conforme a função:

$$v = 4,0t \quad (\text{SI})$$

Sabendo que a massa da partícula vale $3,0 \text{ kg}$, determine:

- a) a expressão da potência instantânea da força resultante que age na partícula;
- b) o valor da potência no instante $t = 2,0 \text{ s}$.

Resolução:

Analisando a função $v = 4,0t$, concluímos que o movimento é uniformemente variado, com aceleração de intensidade $4,0 \text{ m/s}^2$.

Aplicando a 2ª Lei de Newton, obtemos a intensidade da força que acelera a partícula:

$$F = ma \Rightarrow F = 3,0 \cdot 4,0$$

$$F = 12 \text{ N}$$

- a) Como a força resultante tem a mesma orientação da velocidade, sua potência é dada por:

$$\text{Pot} = Fv$$

Como $F = 12 \text{ N}$ e $v = 4,0t$, vem:

$$\text{Pot} = 12 \cdot 4,0t \Rightarrow \text{Pot} = 48t \quad (\text{SI})$$

- b) Para $t = 2,0 \text{ s}$, temos:

$$\text{Pot} = 48 \cdot 2 \therefore \text{Pot} = 96 \text{ W}$$

70. Sob a ação de uma força resultante constante e de intensidade 20 N, uma partícula parte do repouso, adquirindo um movimento cuja função das velocidades escalares é $v = 2kt$ (SI), sendo k uma constante adimensional e positiva. Sabendo que, no instante $t = 1$ s, a potência da força resultante sobre a partícula vale 200 W, determine o valor de k .

71. Um bloco de 15 kg de massa repousa sobre uma mesa horizontal e sem atrito. No instante $t_0 = 0$ s, passa a agir sobre ele uma força cuja potência é dada em função do tempo, conforme o gráfico seguinte:

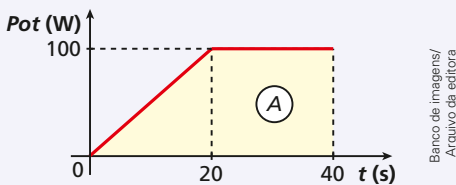


Desprezando o efeito do ar e supondo que a força referida seja paralela à mesa, determine:

- o trabalho da força sobre o bloco de $t_0 = 0$ s até $t_1 = 40$ s;
- o módulo da velocidade do bloco no instante $t_1 = 40$ s.

Resolução:

a) O trabalho é calculado pela “área” A destacada abaixo:



$$\tau = A = \frac{(40 + 20)100}{2}$$

$$\tau = 3,0 \cdot 10^3 \text{ J}$$

b) A força em questão é a resultante sobre o bloco, o que nos permite aplicar o Teorema da Energia Cinética:

$$\tau = E_{c_{40}} - E_{c_0}$$

$$\tau = \frac{mv_{40}^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Sendo $m = 15$ kg, $v_0 = 0$ e $\tau = 3,0 \cdot 10^3$ J, calculemos v_{40} :

$$3,0 \cdot 10^3 = \frac{15v_{40}^2}{2} \therefore v_{40} = 20 \text{ m/s}$$

72. O gráfico abaixo mostra a variação da potência instantânea da força resultante em uma partícula de massa 2,0 kg que, no instante $t_0 = 0$, tem velocidade escalar igual a 1,0 m/s.



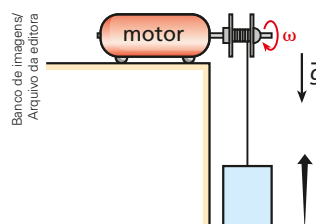
Supondo que a trajetória seja retilínea, calcule:

- a potência média da força resultante, no intervalo de $t_0 = 0$ a $t_1 = 5,0$ s;
- a velocidade escalar da partícula no instante $t_1 = 5,0$ s.

73. Os trólebus são veículos elétricos ainda em operação no transporte público urbano de algumas capitais brasileiras, como São Paulo. Para se movimentarem, eles devem ser conectados a uma linha de força suspensa que os alimenta energeticamente, permitindo um deslocamento silencioso com produção de níveis praticamente nulos de poluição. Embora sua concepção tecnológica seja antiga, os trólebus funcionam com rendimentos maiores que os dos ônibus similares movidos a diesel, sendo, porém, cativos dos trajetos preestabelecidos em que existem as linhas de alimentação. Considere um trólebus trafegando com velocidade de intensidade constante, 36 km/h, num trecho retilíneo e horizontal de uma avenida. Sabendo que a potência elétrica que ele recebe da rede é de 5000 kW e que seu rendimento é igual a 60%, determine:

- a potência dissipada nos mecanismos do trólebus;
- a intensidade da força resistente ao movimento do veículo.

74. Na situação da figura a seguir, o motor elétrico faz com que o bloco de massa 30 kg suba com velocidade constante de 1,0 m/s. O cabo que sustenta o bloco é ideal, a resistência do ar é desprezível e adota-se $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$. Considerando que nessa operação o motor apresenta rendimento de 60%, calcule a potência por ele dissipada.



Avião tem hp?

A decolagem de um jato é sempre um fato espetacular, que desperta interesse e indagações: como um corpo de massa da ordem de 10^2 ou 10^3 toneladas, inicialmente em repouso sobre o solo, pode ser elevado a altitudes de 10 000 m, ou mais, atingindo velocidades próximas de 1 000 km/h?

As responsáveis pela propulsão da aeronave são as turbinas, que “sugam” o ar à sua frente e o expelam vigorosamente para trás. Essa interação com o ar (ação e reação) faz com que esses dispositivos – e, conseqüentemente, o avião – recebam uma força denominada **empuxo**, que tem sua intensidade expressa em libras (na realidade, libras-força) e desempenha o papel de força motriz sobre o sistema.

É comum avaliar a “capacidade” de uma turbina em libras-força, isto é, menciona-se a intensidade da força de empuxo que ela pode disponibilizar ao avião. Para nós, porém, que estamos acostumados a expressar potências de motocicletas, carros e caminhões em cv ou hp, é comum a pergunta: quantos hp de potência tem um avião?

Para responder a essa questão, devemos saber inicialmente que 1 libra-força equivale a 0,453 kgf ou a 4,44 N aproximadamente.

Assim, lembrando que $Pot = Fv$, fazendo $F = 4,44 \text{ N}$ e $v = 600 \text{ km/h} \cong 167 \text{ m/s}$, concluímos que:

$$Pot = 4,44 \cdot 167 \quad \therefore \quad Pot \cong 740 \text{ W} \cong 1 \text{ hp}$$

É possível dizer, então, que, para um avião que se move a 600 km/h, cada libra-força de empuxo nas turbinas está associada a uma potência de 1 hp.

$1 \text{ libra-força} \rightarrow 1 \text{ hp}$

Um jato 737-300, por exemplo, que é equipado com duas turbinas de empuxo igual a 23 500 libras-força cada uma, utiliza, na velocidade de 600 km/h, uma potência de 47 000 hp.

Um carro esportivo pode oferecer potências próximas de 390 hp. Isso significa que o 737-300, a 600 km/h, tem debaixo de cada asa uma propulsão equivalente a 60 desses carros operando a “todo vapor”.



Corbis Sygma/Latinstock

// O jato 737-300: sessenta carros esportivos debaixo de cada asa.



Corbis Sygma/Latinstock

// O jato A380 é o maior avião de passageiros do mundo. A aeronave, que pesa aproximadamente 560 toneladas-força, tem 22 rodas para manuseio em solo e pode comportar até 600 pessoas, ou mais, conseguindo voar sem escalas trechos de 15 000 km. Seus quatro motores proporcionam, na velocidade de cruzeiro de 1 000 km/h, um empuxo de 70 000 libras-força cada um, o que dá a esse gigante uma potência total em torno de 300 000 hp.

Potência em cachoeiras

O Brasil é um dos países de maior potencial hídrico do mundo, superado apenas pela Rússia e pelo Canadá. Esse potencial traduz a quantidade de energia mecânica aproveitável das águas dos rios por unidade de tempo. Dos 250 000 MW disponíveis em nosso país, cerca de 20% (50 000 MW) são transformados em potência elétrica nas muitas usinas hidrelétricas espalhadas pelo território nacional, predominantemente nas regiões Sudeste e Sul.

O potencial hídrico (potência hídrica média teórica) de uma queda-d'água depende da densidade absoluta da água (μ), do volume de líquido que despenca por unidade de tempo – vazão em volume (Z) –, da intensidade da aceleração da gravidade (g) e do desnível entre o topo da cachoeira e seu sopé (h).

Vamos admitir, no cálculo a seguir, que a água apresenta velocidade praticamente nula ao se precipitar do alto da cachoeira e que m seja a massa de água que despenca do topo da cachoeira em um intervalo de tempo Δt .

O trabalho τ realizado pelas forças da gravidade para transportar a massa m do topo até o sopé da queda-d'água é dado por:

$$\tau = mgh \quad (I)$$

A potência hídrica média teórica envolvida no processo, porém, é determinada pela relação:

$$Pot_m = \frac{\tau}{\Delta t} \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$Pot_m = \frac{mgh}{\Delta t} \quad (III)$$

Representemos por V o volume de água correspondente à massa m . A densidade absoluta da água é dada pelo quociente:

$$\mu = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \mu V \quad (IV)$$

Substituindo (IV) em (III), temos:

$$Pot_m = \frac{\mu Vgh}{\Delta t}$$

Note que, na expressão anterior, o quociente $\frac{V}{\Delta t}$ representa a vazão em volume Z da cachoeira.

Assim:

$$Pot_m = \mu Zgh$$

Para termos uma ideia da ordem de grandeza da potência hídrica média teórica disponível no sopé de uma cachoeira, consideremos uma queda-d'água com altura de 10 m, situada em um local em que $g = 10 \text{ m/s}^2$, por onde jorram 10 m^3 de água por segundo. Sendo de $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ a densidade absoluta da água, temos:

$$Pot_m = \mu Zgh$$

$$Pot_m = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ (W)}$$

$$Pot_m = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kW} = 1,0 \text{ MW}$$

Observe que, para μ , Z e g constantes, a Pot_m é diretamente proporcional à altura h da queda-d'água. Dobrando-se h , por exemplo, a Pot_m também dobra.



Thinkstock/Getty Images

// Cataratas do Iguazu, Foz do Iguazu (PR). Novembro de 2015. A potência hídrica média teórica disponível na base de uma cachoeira cresce com o desnível entre o topo e o sopé da queda-d'água e com a vazão de água que jorra. Essa potência, entretanto, não é totalmente aproveitável, já que sempre haverá perdas nos mecanismos de captação e conversão da energia.

Já para μ , g e h constantes, a Pot_m é diretamente proporcional à vazão Z de água que jorra pela cachoeira. Dobrando-se Z , por exemplo, a Pot_m também dobra.

Leia a seguir trechos de um texto sobre a matriz energética brasileira, publicado em novembro de 2010 e reeditado em julho de 2014.

Brasil possui a matriz energética mais renovável do mundo industrializado [...]

O Brasil possui a matriz energética mais renovável do mundo industrializado com 45,3% de sua produção proveniente de fontes como recursos hídricos, biomassa e etanol, além das energias eólica e solar. As usinas hidrelétricas são responsáveis pela geração de mais de 75% da eletricidade do país. Vale lembrar que a matriz energética mundial é composta por 13% de fontes renováveis no caso de países industrializados, caindo para 6% entre as nações em desenvolvimento.[...]

O modelo energético brasileiro apresenta um forte potencial de expansão, o que resulta em uma série de oportunidades de investimento de longo prazo.[...]

Hoje, apenas um terço do potencial hidráulico nacional é utilizado. Usinas de grande porte a serem instaladas na região amazônica constituem a nova fronteira hidrelétrica nacional e irão interferir não apenas na dimensão do sistema de geração, mas também no perfil de distribuição de energia em todo o país, abrindo novas possibilidades de desenvolvimento regional e nacional.[...]

O Brasil possui uma matriz de energia elétrica que conta com a participação de 77,1% da hidroeletricidade. Energia proveniente de 140 usinas em operação, com perspectiva de aumento do uso dessa fonte. [...]

O Brasil usa energia hidrelétrica desde o final do século 19, mas as décadas de 1960 e 1970 marcaram a fase de maior investimento na construção de grandes usinas. [...] Inaugurada em 1984 depois de um acordo binacional com o Paraguai, a Usina de Itaipu tem hoje potência instalada de 14 mil MW, com 20 unidades geradoras. Essa capacidade é suficiente para suprir cerca de 80% de toda a energia elétrica consumida no Paraguai e de 20% da demanda do sistema interligado brasileiro.

Já as usinas de Jirau e Santo Antônio – ainda em fase de construção, no Rio Madeira –, por exemplo, utilizam a tecnologia de turbinas bulbo, diminuindo o alagamento necessário e, conseqüentemente, efeitos negativos como o deslocamento de populações locais, a desapropriação de terras e o impacto ambiental. [...]



Christian Rizzi/Fotarena

// Usina Hidrelétrica de Itaipu, localizada no rio Paraná, fronteira entre Brasil e Paraguai. Novembro de 2015.

Disponível em: <www.brasil.gov.br/editoria/meio-ambiente/2010/11/matriz-energetica>. Acesso em: 2 jul. 2018.

A hidrelétrica com maior capacidade de geração instantânea de energia elétrica no mundo é a Usina de Três Gargantas, na China, com capacidade instalada de 22,5 mil MW. Apesar disso, a Usina de Três Gargantas e a Usina de Itaipu geram praticamente a mesma quantidade de energia anualmente, pois a região onde a usina chinesa foi instalada experimenta seis meses de pouco fluxo de água, insuficiente para a geração de energia elétrica.

// Fotografia da Usina de Três Gargantas (2009), na província de Hubei, na China, que com 26 turbinas fornece uma potência total de 22 500 MW, maior que os 14 000 MW de potência instalada de Itaipu. É um projeto controverso que inundou importantes sítios arqueológicos e demoveu 1,1 milhão de pessoas, muito embora tenha colaborado para controlar enchentes no rio Yang-Tsé.



Reuters/Latinstock

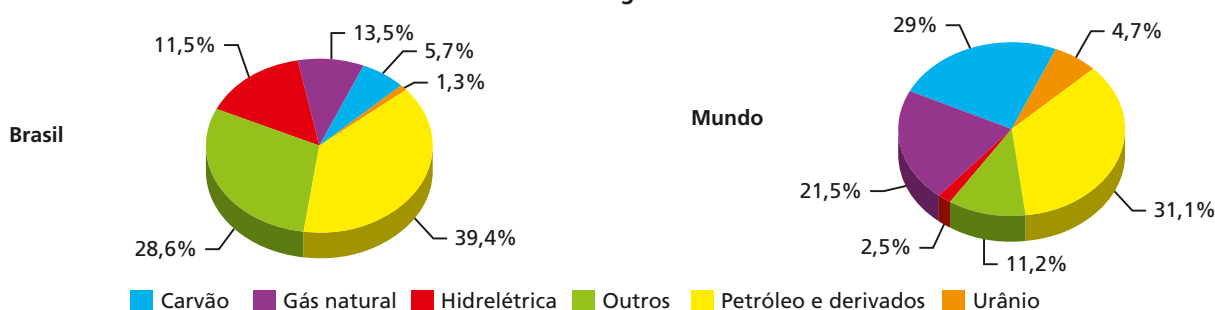
Observe abaixo uma tabela com algumas hidrelétricas brasileiras e sua potência instalada e a seguir dois gráficos que indicam a oferta interna de energia no Brasil e no mundo. Uma consideração: em 2016, começou a funcionar no Brasil a usina hidrelétrica de Belo Monte, na bacia do rio Xingu, no Pará, com capacidade instalada de 11 GW e capacidade efetiva de geração de 4,5 GW.

Algumas usinas hidrelétricas brasileiras/Potência hídrica instalada (2014)

Nome	Capacidade (GW)	Rio	UF
Tucuruí I e II	8,54	Tocantins	PA
Itaipu (Parte brasileira)	7,00	Paraná	PR
Ilha Solteira	3,44	Paraná	SP
Xingó	3,16	São Franc.	SE
Paulo Afonso IV	2,46	São Franc.	AL
Santo Antônio	2,29	Madeira	RO
Itumbiara	2,08	Paranaíba	MG
São Simão	1,71	Paranaíba	MG
Gov. Bento Munhoz R. N.	1,68	Iguaçu	PR
Eng. Souza Dias (Jupiá)	1,55	Paraná	SP
Eng. Sérgio Motta	1,54	Paraná	MS
Jirau	1,50	Madeira	RO
Luiz Gonzaga (Itaparica)	1,48	São Franc.	BA
Itá	1,45	Uruguai	RS/SC
Marimbondo	1,44	Grande	MG

Fonte: <www.mme.gov.br/documents/1138787/0/Capacidade+Instalada+de+EE+2014.pdf/cb1d150d-0b52-4f65-a86b-b368ee715463>. Acesso em: 2 jul. 2018.

Oferta interna de energia no Brasil e no mundo



Fonte: <www.mme.gov.br/documents/1138787/1732840/Resenha+Energetica+++Brasil+2015_.pdf/4e6b9a34-6b2e-48fa-9ef8-dc7008470bf2>. Acesso em: 2 jul. 2018.

Compreensão, pesquisa e debate

1. Forneça quatro argumentos a favor da construção de usinas hidrelétricas e quatro argumentos contra.
2. De que forma as usinas hidrelétricas colaboram para aumentar o efeito estufa?
3. A matriz energética brasileira é considerada uma das mais limpas do mundo por se fundamentar em fontes renováveis de energia. O que vêm a ser essas fontes energéticas? Cite pelo menos cinco exemplos.
4. Quais são os países cuja matriz energética descarta a maior quantidade de dejetos e resíduos poluentes no meio ambiente?
5. Como prover no futuro próximo, de forma sustentável, o crescimento populacional do planeta com energia limpa, agredindo minimamente o meio ambiente? Discuta com seus colegas e o professor.

Exercícios Nível 3

75. (Vunesp) Para acender o isqueiro, um pequeno rolete de aço com ranhuras em sua face encurvada é esfregado contra uma pedra especial, tirando-lhe faíscas. As faíscas atingem o pavio embebido em fluido inflamável, ateando-lhe fogo.



No ato de acender seu isqueiro, um rapaz faz com que o rolete se movimente, aplicando uma força tangente ao rolete, de intensidade 1,5 N. Depois de o rolete girar $1/4$ de volta, o pavio se incendeia. Sabendo-se que o diâmetro do rolete mede 80 mm, pode-se inferir que a energia de ativação empregada para a ignição do fluido, nessa circunstância, seja, em joules:

Dado: $\pi = 3$.

- a) $1,9 \cdot 10^{-2}$ d) $7,1 \cdot 10^{-3}$
 b) $3,7 \cdot 10^{-2}$ e) $9,0 \cdot 10^{-3}$
 c) $5,3 \cdot 10^{-3}$
76. (Uepa) **Quem disse que carro elétrico não anda?**

“Era isso o que esperávamos obter quando começamos a empresa há três anos: construir um carro com emissões zero que as pessoas adorassem dirigir.” As palavras de Martin Eberhard, da Tesla Motors, são conclusivas quanto ao sucesso do projeto recém-concluído. O belo conversível de uma tonelada tem potência para fazer, com movimento uniformemente variado, de 0 a 108 km/h em apenas 4,0 segundos. Ele possui autonomia de 400 km por carga da bateria e sua velocidade escalar máxima é de 210 km/h. Junto com o seu novo Tesla Roadster, você poderá comprar um sistema de carga da bateria para ser instalado na sua garagem, capaz de carregar totalmente a bateria em apenas 3h30min.

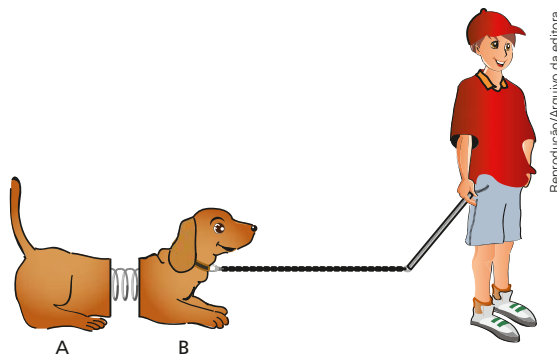
(<http://motorsa.com.br/tag/carro-eletrico>. Adaptado.)

Sobre o texto, é correto afirmar que, para o carro elétrico em questão, deslocando-se em um plano horizontal, nos 4,0 primeiros segundos,

- a) sua aceleração escalar média vale 25 m/s^2 .

- b) o trabalho do motor é $5,0 \cdot 10^6 \text{ J}$.
 c) a força resultante nele atuante, suposta constante, tem módulo aproximadamente igual a $1,0 \cdot 10^3 \text{ N}$.
 d) a energia elétrica de sua bateria é totalmente transformada em energia cinética.
 e) a distância que ele percorreu, com aceleração suposta constante, é de 60 m.

77. (Fuvest-SP) Um menino puxa, com uma corda, na direção horizontal, um cachorro de brinquedo formado por duas partes, **A** e **B**, ligadas entre si por uma mola, como ilustra a figura adiante. As partes **A** e **B** têm, respectivamente, massas $m_A = 0,5 \text{ kg}$ e $m_B = 1,0 \text{ kg}$, sendo $\mu = 0,30$ o coeficiente de atrito cinético entre cada parte e o piso. A constante elástica da mola é $k = 10 \text{ N/m}$ e, na posição relaxada, seu comprimento é $x_0 = 10 \text{ cm}$. O conjunto se move com **velocidade constante** de módulo $v = 0,10 \text{ m/s}$.



Nessas condições, determine:

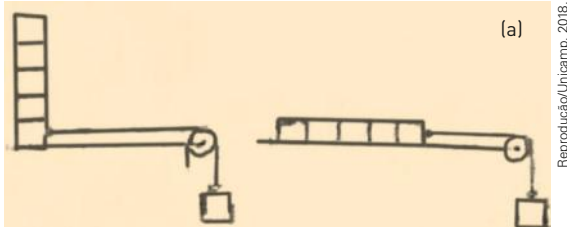
- a) o módulo T da força exercida pelo menino sobre a parte **B**;
 b) o trabalho W realizado pela força que o menino faz para puxar o brinquedo por 2,0 minutos;
 c) o módulo F da força exercida pela mola sobre a parte **A**;
 d) o comprimento x da mola, com o brinquedo em movimento.

Note e adote:

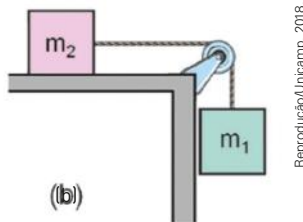
Módulo da aceleração da gravidade no local:
 $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Despreze a massa da mola.

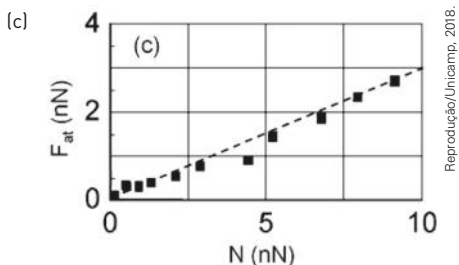
78. (Unicamp-SP) Importantes estudos sobre o atrito foram feitos por Leonardo da Vinci (1452-1519) e por Guillaume Amontons (1663-1705). A figura **a** é uma ilustração feita por Leonardo da Vinci do estudo sobre a influência da área de contato na força de atrito.



a) Dois blocos de massas $m_1 = 1,0 \text{ kg}$ e $m_2 = 0,5 \text{ kg}$ são ligados por uma corda e dispostos como mostra a figura **b**. A polia e a corda têm massas desprezíveis, e o atrito nas polias também deve ser desconsiderado. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco de massa m_2 e a superfície da mesa é $\mu_c = 0,8$. Qual deve ser a distância de deslocamento do conjunto para que os blocos, que partiram do repouso, atinjam a velocidade $v = 2,0 \text{ m/s}$?



b) Em certos casos, a lei de Amontons da proporcionalidade entre a força de atrito cinético e a força normal continua válida nas escalas micro-métrica e nanométrica. A figura **c** mostra um gráfico do módulo da força de atrito cinético, F_{at} , em função do módulo da força normal, N , entre duas monocamadas moleculares de certa substância, depositadas em substratos de vidro. Considerando $N = 5,0 \text{ nN}$, qual será o módulo do trabalho da força de atrito se uma das monocamadas se deslocar de uma distância $d = 2,0 \text{ }\mu\text{m}$ sobre a outra que se mantém fixa?

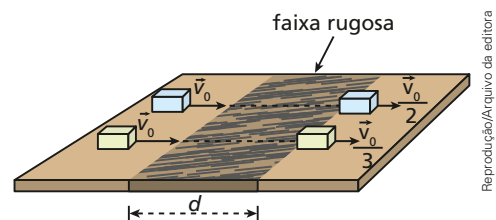


79. (Enem) Num sistema de freio convencional, as rodas do carro travam e os pneus derrapam no solo, caso a força exercida sobre o pedal seja muito intensa. O sistema ABS evita o travamento das rodas, mantendo a força de atrito no seu valor estático máximo, sem derrapagem. O coeficiente de atrito estático da borracha em contato com o concreto vale $\mu_e = 1,0$ e o coeficiente de atrito cinético para o mesmo par de materiais é $\mu_c = 0,75$. Dois carros, com velocidades iniciais iguais a 108 km/h , iniciam a frenagem numa estrada perfeitamente horizontal de concreto no mesmo ponto. O carro 1 tem sistema ABS e utiliza a força de atrito estática máxima para a frenagem; já o carro 2 trava as rodas, de maneira que a força de atrito efetiva é a cinética. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$ e despreze o efeito do ar.

As distâncias, medidas a partir do ponto em que iniciam a frenagem, que os carros 1 (d_1) e 2 (d_2) percorrem até parar são, respectivamente,

- a) $d_1 = 45 \text{ m}$ e $d_2 = 60 \text{ m}$.
- b) $d_1 = 60 \text{ m}$ e $d_2 = 45 \text{ m}$.
- c) $d_1 = 90 \text{ m}$ e $d_2 = 120 \text{ m}$.
- d) $d_1 = 5,8 \cdot 10^2 \text{ m}$ e $d_2 = 7,8 \cdot 10^2 \text{ m}$.
- e) $d_1 = 7,8 \cdot 10^2 \text{ m}$ e $d_2 = 5,8 \cdot 10^2 \text{ m}$.

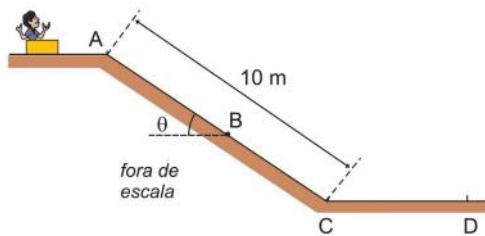
80. (Fuvest-SP) Dois pequenos corpos, 1 e 2, movem-se em um plano horizontal, com atrito desprezível, em trajetórias paralelas, inicialmente com mesma velocidade, de módulo v_0 . Em dado instante, os corpos passam por uma faixa rugosa do plano, de largura d . Nessa faixa, o atrito não pode ser desprezado e os coeficientes de atrito cinético entre o plano rugoso e os corpos 1 e 2 valem μ_1 e μ_2 respectivamente. Os corpos 1 e 2 saem da faixa com velocidades $\frac{v_0}{2}$ e $\frac{v_0}{3}$ respectivamente.



Nessas condições, a razão $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ é igual a:

- a) $\frac{2}{3}$
- b) $\frac{4}{9}$
- c) $\frac{27}{32}$
- d) $\frac{16}{27}$
- e) $\frac{1}{2}$

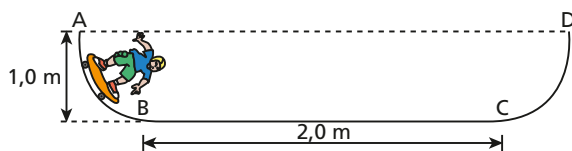
81. (Unifesp) Um garoto de 40 kg está sentado, em repouso, dentro de uma caixa de papelão de massa desprezível, no alto de uma rampa de 10 m de comprimento, conforme a figura.



Reprodução/Unifesp, 2016.

Para que ele desça a rampa, um amigo o empurra, imprimindo-lhe uma velocidade de 1 m/s no ponto **A**, com direção paralela à rampa, a partir de onde ele escorrega, parando ao atingir o ponto **D**. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a superfície, em todo o percurso **AD**, é igual a 0,25, que $\text{sen } \theta = 0,6$, $\text{cos } \theta = 0,8$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que a resistência do ar ao movimento pode ser desprezada, calcule:

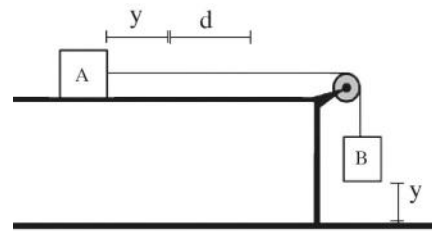
- o módulo da força de atrito, em N, entre a caixa e a rampa no ponto **B**.
 - a distância percorrida pelo garoto, em metros, desde o ponto **A** até o ponto **D**.
82. (UFU-MG) Um menino e seu skate, considerados uma única partícula, deslizam numa pista construída para esse esporte, como representado na figura abaixo. A parte plana e horizontal da pista mede 2,0 m e o menino parte do repouso do ponto **A**, cuja altura, em relação à base, é de 1,0 m. Considerando-se que há atrito somente na parte plana da pista e que o coeficiente de atrito cinético é 0,20, indique a alternativa correta.



Reprodução/Arquivo da editora

- O menino irá parar no ponto médio da parte plana **BC**.
- Na primeira descida, o menino consegue atingir o ponto **D**.
- O menino irá parar no ponto **C**, no final da parte plana da pista.
- A energia mecânica dissipada até que o conjunto pare é maior que a energia potencial que o sistema possuía no ponto de partida.
- O menino irá parar no ponto **B**, no início da parte plana da pista.

83. (Efomm-RJ) Na situação apresentada no esquema abaixo, o bloco **B** cai a partir do repouso de uma altura y , e o bloco **A** percorre uma distância total $y + d$. Considere a polia ideal e que existe atrito entre o corpo **A** e a superfície de contato.

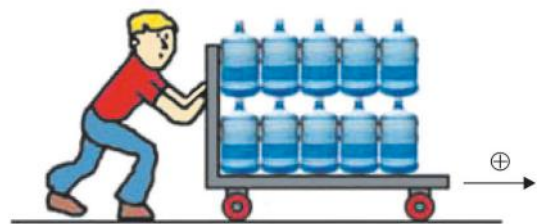


Reprodução/Efomm, 2017.

Sendo as massas dos corpos **A** e **B** iguais a m , determine o coeficiente de atrito cinético μ .

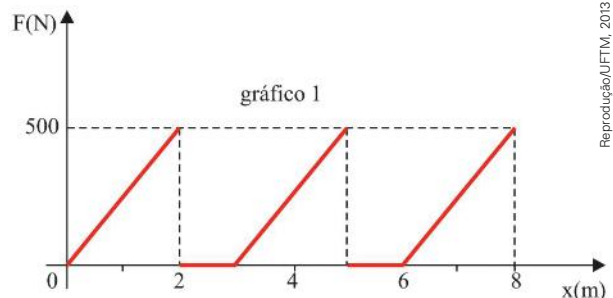
- $\mu = \frac{y}{y + 2d}$
- $\mu = \frac{2d}{y + 2d}$
- $\mu = \frac{y + 2d}{y}$
- $\mu = \frac{y}{2d}$
- $\mu = \frac{d}{y + 2d}$

84. (UFTM-MG) O funcionário de um armazém, responsável pela reposição de produtos, empurra, a partir do repouso e em movimento retilíneo, um carrinho com massa total de 350 kg sobre uma superfície plana e horizontal.

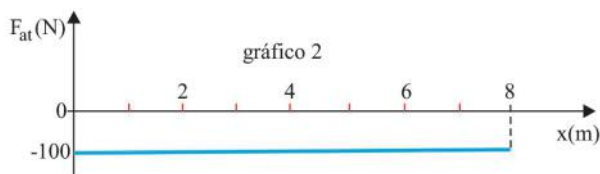


Reprodução/UFTM, 2013.

Em um determinado trecho de 8,0 m de comprimento, ele dá três empurrões consecutivos no carrinho, exercendo uma força horizontal para a direita, cuja intensidade é representada no gráfico 1, em função da posição do carrinho. Nesse mesmo trecho, atua sobre o carrinho uma força de atrito de intensidade constante, igual a 100 N (gráfico 2).



Reprodução/UFTM, 2013.



Reprodução/UFTM, 2013.

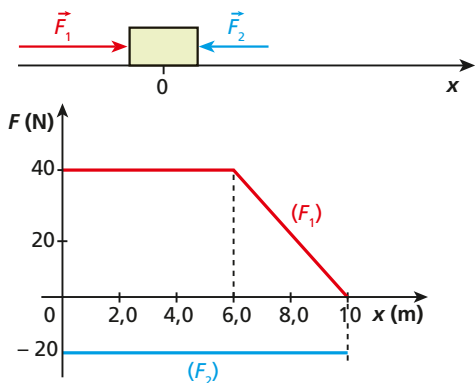
Calcule:

- a intensidade máxima da força resultante que atuou no carrinho nos primeiros 2,0 m de deslocamento;
- a velocidade escalar atingida pelo carrinho ao final dos 8,0 m.

- 85.** Uma partícula de massa $m = 10$ kg acha-se em repouso na origem do eixo Ox , quando passa a agir sobre ela uma força resultante \vec{F} , paralela ao eixo. De $x = 0$ a $x = 4,0$ m, a intensidade de \vec{F} é constante, de modo que $F = 120$ N. De $x = 4,0$ m em diante, \vec{F} adquire intensidade que obedece à função:

$$F = 360 - 60x \text{ (SI)}$$

- Trace o gráfico da intensidade de \vec{F} em função de x .
 - Determine a velocidade escalar da partícula no ponto de abscissa $x = 7,0$ m.
- 86.** O bloco da figura tem 2,8 kg de massa e parte do repouso, na origem do eixo Ox . Sobre ele, agem exclusivamente as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 representadas, cujos valores algébricos variam em função de x , conforme o gráfico a seguir:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que \vec{F}_1 e \vec{F}_2 são suprimidas na posição $x = 10$ m, determine a máxima velocidade escalar atingida pelo bloco.

- 87.** A tecnologia fotovoltaica vem mesmo revolucionando a era moderna, constituindo-se numa alternativa sustentável com mínimos impactos ambientais. Atualmente, as naves cogitadas para viagens espaciais de longa distância têm muitos equipamentos acionados pela radiação solar, que

é convertida em outras formas de energia a partir de placas fotodadoras. A verdade é que o Sol despeja continuamente sobre a Terra cerca de 1000 watts de potência por metro quadrado de área perpendicular aos raios incidentes. Trata-se da constante solar, um dos mais importantes parâmetros que contribuem para a existência de vida em nosso planeta.

O carro solar da fotografia abaixo foi desenvolvido na universidade japonesa de Tokai e, com um aproveitamento de 30% da energia radiante, consegue acelerar de zero a mais de 100 km/h. A massa total do veículo com seu piloto é de 200 kg e suas placas fotovoltaicas apresentam área de $9,0 \text{ m}^2$.

Wikipédia/Wikimedia Commons 3.0



Desprezando-se as forças de resistência do ar, bem como os atritos passivos, pergunta-se:

- Em um dia de intensa insolação, por volta do meio-dia, qual a potência efetiva utilizada pelo carro?
 - Qual o intervalo de tempo gasto pelo veículo em uma arrancada do repouso até a velocidade de 108 km/h?
- 88.** (USF-SP) A altura da superfície livre da água (densidade absoluta igual a $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) no lago de uma usina hidroelétrica em relação ao nível das turbinas é de 40 m e a vazão total do líquido nos equipamentos conversores de energia mecânica em elétrica corresponde a $4,0 \cdot 10^3$ litros por segundo. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ e sabendo-se que o rendimento da instalação é de 80% e que esta abastece uma comunidade com famílias que consomem em média, por mês (30 dias), 150 kWh, calcule:
- a potência total gerada pela usina, em MW;
 - a potência útil fornecida pela usina, em MW;
 - o número N de famílias que a usina pode atender.

89. (Enem)

A usina de Itaipu é uma das maiores hidrelétricas do mundo em geração de energia. Com 20 unidades geradoras e 14000 MW de potência total instalada, apresenta uma queda de 118,4 m e vazão nominal de $690 \text{ m}^3/\text{s}$ por unidade geradora. O cálculo da potência teórica leva em conta a altura da massa de água represada pela barragem, a gravidade local (10 m/s^2) e a densidade da água (1000 kg/m^3). A diferença entre a potência teórica e a instalada é a potência não aproveitada.

Disponível em: www.itaipu.gov.br.
Acesso em: 11 maio 2013 (adaptado).

Qual é a potência, em MW, não aproveitada em cada unidade geradora de Itaipu?

- a) 0 c) 116,96 e) 13 183,04
b) 1,18 d) 816,96

90. Avião movido a energia solar?

Sim, é o Solar Impulse 2, de tecnologia suíça (École Polytechnique Fédérale, de Lousanne), que conseguiu a façanha de dar uma volta ao mundo graças exclusivamente à energia proveniente do Sol. A aeronave partiu de Abu Dhabi, nos Emirados Árabes Unidos, e retornou a essa mesma localidade dezesseis meses depois. Nesse período, intermeado por paradas para manutenção e acertos, foram percorridos cerca de 40 000 km durante aproximadamente 500 h efetivas de voo.



Jean Revillard/Solar Impulse/ Getty Images

/// Nesta imagem, o Solar Impulse 2 sobvoa a baía de São Francisco, na Califórnia, Estados Unidos.

Embora muito menos veloz em comparação com os jatos convencionais, o Solar Impulse 2 é extremamente mais leve e não polui a atmosfera, já que utiliza energia limpa.

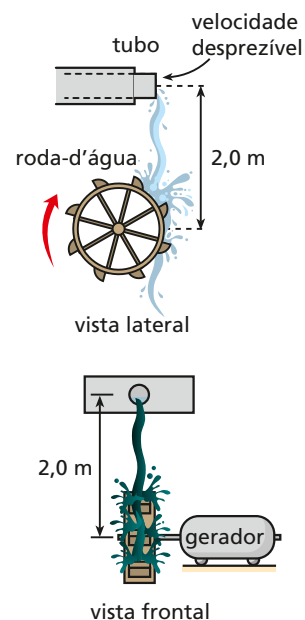
	Massa	Envergadura
Airbus 380	560 t	80 m
Solar Impulse 2	2 t	80 m

Os motores do Solar Impulse 2 disponibilizam uma potência total $P = 50 \text{ kW}$ e suas baterias podem armazenar uma energia $E = 164,0 \text{ kWh}$. Objetivando aproveitar ao máximo a radiação solar, durante o dia, a aeronave voa mais alto, ocorrendo o contrário durante a noite. A constante solar nas maiores altitudes é $I = 1,2 \text{ kW/m}^2$ e o desnível entre esses dois patamares de voo é de 10000 pés ou 3480 m.

Sabendo-se que a área total de placas fotovoltaicas instaladas nas asas e na fuselagem do avião é $A = 270 \text{ m}^2$ e que essa instalação aproveita apenas 25% da radiação incidente:

- determine, em km/h, a velocidade escalar média v_m do Solar Impulse 2 durante o voo;
- calcule a relação R entre a energia consumida por um Airbus 380 (ver tabela comparativa) e pelo Solar Impulse 2 para ascender, sem variação de energia cinética, a 10000 pés;
- obtenha, em horas, o intervalo de tempo Δt para carregar completamente as baterias do Solar Impulse 2, levando-se em conta que a aeronave está em voo com seus motores operando a uma potência igual a 80% de P e com as baterias inicialmente descarregadas.

91. O esquema seguinte representa os principais elementos de um sistema rudimentar de geração de energia elétrica. A água que sai do tubo com velocidade praticamente nula faz girar a roda, que, por sua vez, aciona um gerador. O rendimento do sistema é de 80% e a potência elétrica que o gerador oferece em seus terminais é de 4,0 kW.



CJT/Zapi/Arquivo da editora

Sendo dadas a densidade da água ($1,0 \text{ g/cm}^3$) e a aceleração da gravidade (10 m/s^2), aponte a alternativa que traz o valor correto da vazão da água.

- a) $0,025 \text{ m}^3/\text{s}$ d) $0,25 \text{ m}^3/\text{s}$
 b) $0,050 \text{ m}^3/\text{s}$ e) $0,50 \text{ m}^3/\text{s}$
 c) $0,10 \text{ m}^3/\text{s}$

92. (Fuvest-SP) Trens de alta velocidade, chamados trens-bala, deverão estar em funcionamento no Brasil nos próximos anos. Características típicas desses trens são: velocidade máxima de 300 km/h , massa total (incluindo 500 passageiros) de 500 t e potência máxima dos motores elétricos igual a $8,0 \text{ MW}$. Nesses trens, as máquinas elétricas que atuam como motores também podem ser usadas como geradores, freando o movimento (freios regenerativos). Nas ferrovias, curvas circulares têm raio de curvatura de, no mínimo, $5,0 \text{ km}$. Considerando-se um trem e uma ferrovia com essas características, determine:

Note e adote:

$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$

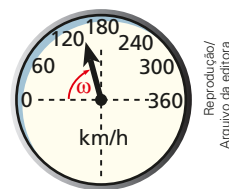
Desconsidere o fato de que, ao partir, os motores demoram alguns segundos para atingir sua potência máxima. Desconsidere o efeito de forças dissipativas.

Admita que o movimento ocorra em um plano horizontal.

- a) o tempo necessário para o trem atingir a velocidade de módulo 288 km/h , a partir do repouso, supondo-se que os motores forneçam a potência máxima o tempo todo. Admita que o trem se deslocou em linha reta.

- b) a intensidade da força máxima na direção horizontal, entre cada roda e o trilho, numa curva circular percorrida a 288 km/h , supondo-se que o trem tenha 80 rodas e que as forças entre cada uma delas e o trilho tenham a mesma intensidade. Admita que todas as rodas estejam na curva.
 c) o módulo da aceleração tangencial do trem quando, na velocidade de módulo 288 km/h , as máquinas elétricas são acionadas como geradores de $8,0 \text{ MW}$ de potência, freando o movimento.

93. (Fuvest-SP) Um carro de corrida, com massa total $m = 800 \text{ kg}$, parte do repouso e, com aceleração constante, atinge, após 15 segundos, a velocidade de 270 km/h (ou seja, 75 m/s). A figura representa o velocímetro, que indica a velocidade instantânea do carro. Despreze as perdas por atrito e as energias cinéticas de rotação (como a das rodas do carro). Suponha que o movimento ocorre numa trajetória retilínea e horizontal.



- a) Qual a velocidade angular ω do ponteiro do velocímetro durante a aceleração do carro? Indique a unidade usada.
 b) Qual o valor do módulo da aceleração do carro nesses 15 segundos?
 c) Qual o valor da componente horizontal da força que a pista aplica ao carro durante sua aceleração?
 d) Qual a potência fornecida pelo motor quando o carro está a 180 km/h ?

DESCUBRA MAIS

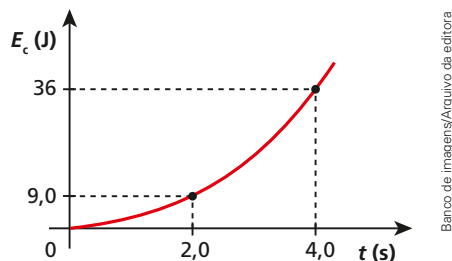
- Admita que no teste de um carro, realizado em uma pista plana e horizontal, o veículo parta do repouso e atinja 100 km/h ao fim de 3 s , de modo que nessa arrancada nenhuma de suas rodas derrape. Desconsidere os efeitos do ar. Que forças são responsáveis pela aceleração do carro e que forças são responsáveis pela variação de sua energia cinética?
- Pesquise dados técnicos sobre as maiores hidrelétricas brasileiras (região e rio onde estão instaladas, dimensões dos respectivos lagos, vazão nas tubulações que despejam água nas turbinas e potência média teórica oferecida, entre outros) e compare-os entre si. Analise os danos ambientais que a instalação de uma hidrelétrica acarreta e compare-os com os danos ambientais produzidos por outros sistemas de geração de energia elétrica (termelétricas e usinas nucleares).

94. Considere dois recipientes cilíndricos 1 e 2 feitos de material de espessura e peso desprezíveis. Os recipientes têm raios $R_1 = r$ e $R_2 = 2r$ e estão apoiados sobre duas prateleiras desniveladas por 1,0 m.

O recipiente 2, inicialmente vazio, está na prateleira superior, enquanto o recipiente 1, que contém 2,0 L de água até a altura de 40 cm em relação à parede do fundo, está apoiado na prateleira inferior. Terezinha pega o recipiente 1, ergue-o e despeja seu conteúdo no recipiente 2.

Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a densidade da água igual a 1,0 kg/L, calcule o trabalho motor realizado sobre a água no transporte do recipiente 1 para o recipiente 2.

95. Uma partícula de massa igual a 2,0 kg está em movimento retilíneo uniformemente acelerado sob a ação de uma força resultante \vec{F} . A energia cinética da partícula é dada em função do tempo pelo gráfico abaixo:

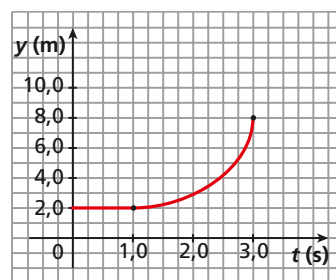
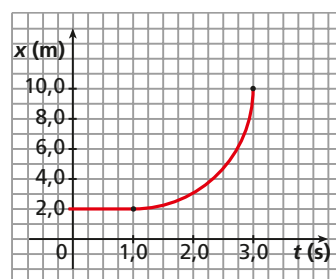


- Qual é a intensidade da força \vec{F} ?
- Qual é o deslocamento da partícula no intervalo de 2,0 s a 4,0 s?

96. Um dublê deverá gravar uma cena de um filme de ação na qual tiros serão disparados contra ele, que estará mergulhando nas águas de um lago profundo, descrevendo uma trajetória horizontal. Os projéteis serão expelidos com velocidade de intensidade v_0 e realizarão movimentos verticais a partir de uma altura H em relação à superfície líquida. No local, a aceleração da gravidade tem módulo g e a influência do ar é desprezível. Admitindo-se que dentro da água a força total de resistência que cada projétil recebe durante a penetração tem intensidade constante e igual ao triplo do seu peso, determine, em função de H , v_0 e g , a profundidade segura p em que o dublê deverá se deslocar para não ser atingido por nenhum projétil.

97. Considere uma partícula de massa igual a 8,0 kg inicialmente em repouso num ponto **A** de um plano horizontal. A partir do instante $t_1 = 1,0$ s, essa partícula é deslocada até um ponto **B** do mesmo plano, sob a ação de uma força resultante \vec{F} , lá chegando no instante $t_2 = 3,0$ s.

Nos gráficos a seguir, estão registradas as variações das coordenadas de posição x e y da partícula em função do tempo. Os trechos curvos são arcos de parábola.



Pede-se:

- esboçar, num diagrama **Ox**, o deslocamento vetorial da partícula de **A** até **B**, destacando o seu módulo;
- calcular o trabalho da força \vec{F} de **A** até **B**, bem como a intensidade dessa força.

98. (OBF) Cintos de segurança e *air bags* salvam vidas ao reduzir as forças exercidas sobre o motorista e os passageiros em uma colisão. Os carros são projetados com uma "zona de enrugamento" na metade frontal do veículo. Se ocorrer uma colisão, o compartimento dos passageiros percorre uma distância de aproximadamente 1,0 m enquanto a frente do carro é amassada. Um ocupante restringido pelo cinto de segurança e pelo *air bag* desacelera junto com o carro. Em contraste, um ocupante que não usa tais dispositivos restringentes continua movendo-se para frente, com o mesmo módulo

da velocidade (primeira Lei de Newton!), até colidir violentamente com o painel ou o para-brisa. Como estas são superfícies resistentes, o infeliz ocupante, então, desacelera em uma distância de apenas 5,0 mm. Para um dado valor de velocidade inicial do carro, indiquemos por \vec{F}_1 a intensidade da força que freia a pessoa quando ela não está usando cinto de segurança e o carro não dispuser de *air bag* e por \vec{F}_2 a intensidade de força que freia a pessoa no carro em que ela dispõe dos dois dispositivos de segurança. A razão F_1/F_2 vale:

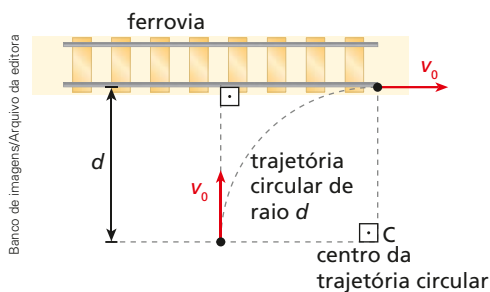
- a) 1 c) 20 e) 200
b) 10 d) 100

99. Um motorista trafega com velocidade de intensidade v_0 , perpendicularmente a uma ferrovia retilínea contida numa região plana e horizontal, quando escuta o apito de um trem em iminente passagem diante do seu veículo. Ele, então, percebe que há duas maneiras de evitar uma colisão com o comboio:

Providência 1: frear o carro imediatamente, com as quatro rodas travadas mantendo a trajetória retilínea original, com desaceleração constante, fazendo o veículo parar exatamente diante da linha férrea. Nesse caso, o coeficiente de atrito dinâmico entre os pneus e o solo é igual a μ_c , e a distância percorrida é d .

Providência 2: fazer uma curva circular de raio d para a direita, com velocidade de intensidade v_0 , de modo a tangenciar a linha férrea. Nesse caso, o carro fica na iminência de derrapar e o coeficiente de atrito estático entre os pneus e o solo é igual a μ_e .

As duas situações estão esquematizadas na figura abaixo.



Desprezando-se a influência do ar e adotando-se para o carro o modelo de ponto material, determine a relação $\frac{\mu_c}{\mu_e}$.

100. Considere uma melancia que, em seu processo de crescimento, mantém permanentemente o formato esférico. Suponha que esse processo seja isotrópico, isto é, o crescimento ocorra igualmente em todas as direções. Um elástico de extremidades conectadas e constante elástica $5,0 \cdot 10^2$ N/m é colocado em volta da superfície externa da fruta, ao longo da circunferência de maior diâmetro, em um momento em que o raio é de 10 cm, assim permanecendo até o raio aumentar para 12 cm. Desprezando-se os atritos e adotando-se $\pi = 3$, calcule durante essa etapa:

- a) o trabalho das forças elásticas sobre a melancia;
b) a intensidade da força média aplicada pela fruta sobre o elástico;
c) o módulo da força resultante exercida pela fruta sobre o elástico.

101. Um balde de massa igual a 800 g contendo inicialmente 20 litros de água (densidade absoluta 1,0 kg/L) é içado verticalmente a partir do solo até uma altura de 5,0 m. A operação é realizada em 20 s, com velocidade constante, num local em que $g = 10$ m/s², utilizando-se uma corda leve e inextensível que passa por uma polia fixa ideal. O balde, entretanto, tem uma rachadura que o faz perder água à razão de 0,08 L/s, que pode ser considerada constante ao longo do trajeto. Desprezando-se a influência do ar, determine:

- a) o trabalho motor realizado sobre o balde nesse processo;
b) a potência da força de tração aplicada pela corda sobre o balde no fim dos primeiros 10 s.

102. Um carro sobe uma rampa inclinada de 30°, com velocidade constante de intensidade v . Nessas condições, a força de resistência do ar tem intensidade igual a um quarto do peso do carro. Em seguida, ele desce a mesma rampa com velocidade constante de intensidade $2v$. Sabendo que a força de resistência do ar tem intensidade proporcional ao quadrado da velocidade do carro, responda: qual a razão entre as potências úteis desenvolvidas pelo motor na subida e na descida?



Energia mecânica e sua conservação

Jason Stang/veer/Corbis/Latinstock/Arquivo da editora



/// Nesta fotografia, o operário corta uma peça utilizando uma máquina elétrica apropriada para esse fim. O equipamento é dotado de uma lâmina em forma de disco que gira em alta velocidade. Na operação, a energia elétrica que alimenta a máquina se transforma essencialmente em energia mecânica (a lâmina e as fagulhas produzidas pelo atrito estão em movimento), térmica (as partes que se atrim se aquecem) e acústica (há a produção de ruído).

Por meio das nossas experiências cotidianas, sabemos que a energia pode se manifestar sob diversas formas (energia térmica, luminosa, elétrica, atômica, química, mecânica, etc.).

Veremos neste tópico as diferentes modalidades de energia mecânica com as respectivas expressões matemáticas para seu cálculo. Estudaremos com relevância os sistemas mecânicos conservativos, em que intervém o Princípio de Conservação da Energia Mecânica, caso particular do Princípio Geral da Conservação da Energia aplicado a sistemas físicos diversos.

1. Princípio de conservação – Intercâmbios energéticos

A **energia** desempenha um papel essencial em todos os setores da vida, sendo a grandeza mais importante da Física.

O Sol, a água, o vento, o petróleo, o carvão e o átomo são fontes que suprem o consumo atual de energia no mundo, mas, à medida que a população do planeta cresce e os itens de conforto à disposição da espécie humana se multiplicam, aumenta também a demanda por energia, exigindo novas alternativas e técnicas de obtenção.

Ao que tudo indica, o átomo será a principal fonte de energia do futuro. Por isso, ele vem sendo objeto de estudos nos principais centros de pesquisa, que também se preocupam em investigar o aproveitamento de suas potencialidades de modo seguro e eficaz.

A energia é uma grandeza única, mas, dependendo de como se manifesta, recebe diferentes denominações:

- energia térmica;
- energia luminosa;
- energia elétrica;
- energia química;
- energia mecânica;
- energia atômica, entre outras.

Um dos preceitos mais amplos e fundamentais da Física é o **Princípio de Conservação da Energia**, segundo o qual se pode afirmar que:

A energia total do Universo é **constante**, podendo haver apenas transformações de uma modalidade em outras.

Uma lâmpada incandescente, por exemplo, transforma energia elétrica em energia térmica. Seu filamento se aquece a tal ponto que se torna luminoso, transformando parte da energia térmica proveniente da corrente elétrica (efeito Joule) em energia luminosa.

Na explosão de uma bomba atômica, várias formas de energia estão presentes. A energia nuclear desprendida é transformada principalmente em energia mecânica, térmica e radiante (luz visível e raios γ , que podem provocar degeneração celular nos seres vivos). Considerando o Princípio de Conservação da Energia, podemos afirmar que a soma de todas as modalidades de energia liberadas pela bomba no ato da explosão é igual à energia inicial potencializada no artefato.

Tudo teria começado com alusões à conservação da matéria. Talvez a referência mais antiga a esse respeito se deva ao poeta romano **Lucrecio** (c. 99 a.C.-c. 55 a.C.), contemporâneo de Júlio César (100 a.C.-49 a.C.). Ele escreveu em seu célebre poema *De Rerum Natura*: “[...] As coisas não podem nascer do nada, nem desaparecer voltando ao nada [...]”. Passou muito tempo para que esse conceito fosse retomado e adquirisse base científica. A principal contribuição experimental foi dada pelo químico francês Antoine de **Lavoisier** (1743-1794), considerado por muitos o criador da Química Moderna. Ele escreveu em 1789:

“[...] Devemos tomar como axioma incontestável que, em todas as operações da arte e da natureza, nada é criado; a mesma quantidade de matéria existe antes e após um experimento... e nada ocorre além de mudanças e modificações nas combinações dos elementos envolvidos [...]”.



SPL/Latinstock/Arquivo de editora

/// Explosão de uma bomba atômica no atol de Bikini, no oceano Pacífico, em 26 de março de 1954.

O princípio de Lavoisier, denominado depois Princípio de Conservação da Massa, mostrou-se extremamente fértil no desenvolvimento da Química e da Física.

O físico e médico alemão Julius Robert von **Mayer** (1814-1878) foi o primeiro a formular o conceito de conservação da energia. Em um ensaio de 1842, ele defendeu que:

“Quando uma quantidade de energia de qualquer natureza desaparece numa transformação, então se produz uma quantidade igual em grandeza de uma energia de outra natureza”.

Estava lançada a semente do Princípio de Conservação da Energia.

O físico inglês James Prescott **Joule** (1818-1889) obteve em 1843, um ano depois da publicação de Mayer, com experimentos que se tornaram históricos, a relação quantitativa entre as unidades de calor e trabalho, verificando que 1 caloria = 4,1855 joules. Com isso, a noção de conservação da energia anexava-se também à Termodinâmica prática. É importante dizer que a denominação *joule* para a unidade de energia foi uma homenagem póstuma ao cientista por seus trabalhos sobre os intercâmbios entre as energias térmica e mecânica em sistemas termodinâmicos.

De forma mais abrangente, se considerarmos que o Universo é um sistema físico isolado, a Lei da Conservação da Energia estabelece que a energia total contida nesse sistema tem se mantido invariável desde os primórdios de sua formação.

O físico alemão Max **Planck** (1858-1947), considerado um dos mentores da Mecânica Quântica, campo fundamental da Física moderna que estuda o comportamento de partículas elementares, foi o primeiro a exprimir matematicamente, em 1887, em termos rigorosos e gerais, essa lei fundamental da natureza. Assim ele se referiu ao conceito:

“A energia total (mecânica e não mecânica) de um sistema isolado, isto é, um sistema que não troca matéria nem energia com o exterior, mantém-se constante”.

Mas experimentos recentes fundamentados nas teorias do físico alemão Albert **Einstein** (1879-1955) confirmam que ocorre, sim, no Universo, a constância do conjunto massa e energia. Segundo Albert Einstein (1935, apud PONCZEK, R. L. *Deus ou seja a Natureza*. 2009. p. 133),

A Física pré-relativística contém duas leis de conservação cuja importância é fundamental – a Lei de Conservação da Massa e a Lei de Conservação da Energia –, em aparência, completamente independentes entre si. Por meio da Teoria da Relatividade elas se fundem em um único princípio.

O processo de aniquilamento que se verifica quando ocorre a colisão entre um elétron e um pósitron – partículas elementares de massas iguais, cargas elétricas de mesmo módulo, porém de sinais contrários –, por exemplo, confirma tal afirmação. Ao se aniquilarem, essas partículas “desaparecem”, mas em seu lugar nota-se a presença de radiação γ (onda eletromagnética de frequência muito alta), de energia equivalente à massa de repouso das duas partículas mais a energia cinética associada a elas antes do processo.

Essa equivalência entre massa e energia é tratada com mais detalhamento no Volume 3, em Física Moderna.

Nosso objetivo é estudar a energia mecânica que se manifesta em situações de movimento (como um cavalo a galope) e possíveis movimentos (como uma pequena bola prestes a ser lançada por uma mola comprimida).



SuperStock/Diomedea/Arquivo da editora

// O Princípio de Conservação da Massa, de **Lavoisier**, pode ser assim resumido: “Na natureza, nada se cria, nada se perde, tudo se transforma”.



Photo Researchers/Diomedea/Arquivo da editora

// Julius Robert von **Mayer** é o precursor da Lei da Conservação da Energia. Aplicando esse princípio à Termodinâmica, ele estabeleceu relações de igualdade entre trabalho mecânico e energia térmica, o que suscitou o surgimento da lei número 1 dessa área.

Na figura 1, o garoto está em movimento. Em relação a um referencial no solo, ele tem energia mecânica.

Na figura 2, o garoto está tentando fazer com que uma pedra role encosta abaixo. A pedra tem a potencialidade de se movimentar, apresentando, por isso, energia mecânica em relação à base da encosta.

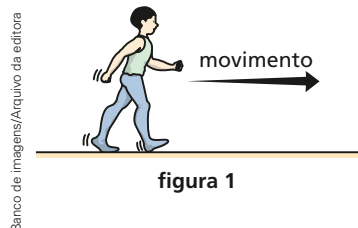


figura 1



figura 2

A energia, da mesma forma que o trabalho, é uma grandeza de natureza **escalar**, por não ter associados a ela direção e sentido.

Ampliando o olhar

Um luxo de lixo!

A sociedade de consumo está produzindo cada vez mais lixo.

Os depósitos e aterros sanitários estão abarrotados e multiplicam-se rapidamente por todo o mundo, já que a população cresce sem parar e coisas que em épocas passadas eram acondicionadas de maneira simples agora recebem camadas e mais camadas de embalagens de vidros e latas, papel e matérias plásticas.

Uma pessoa sozinha produz em média 1,2 kg de lixo por dia. Isso significa aproximadamente 30 toneladas de detritos ao longo de sua vida, estimada em 70 anos. Esse descarte equivale a 33 bois ou carros populares, aproximadamente. Se pensarmos na população brasileira, o lixo produzido em um dia chega a 0,25 milhão de toneladas. A humanidade inteira, por sua vez – hoje, em número superior a 7 bilhões de habitantes –, joga fora aproximadamente 9 bilhões de toneladas entre um raiar de sol e o próximo.

Há lixo de toda espécie e em toda parte: lixo orgânico, lixo reciclável, lixo hospitalar... Há também lixo químico e lixo radioativo, ambos uma constante ameaça ao meio ambiente.

E o que fazer com tanto lixo? Onde pôr todos esses rejeitos que diariamente colocamos do lado de fora de nossas casas em quantidades cada vez maiores?

É fundamental que exista, acima de tudo, uma consciência ambiental que leve as pessoas a descartar o lixo de maneira seletiva para que cada item siga o caminho mais adequado. Papel, garrafas de vidro e de plástico, latas, pilhas, baterias, celulares obsoletos e sucata eletrônica, em geral, devem ser direcionados a coletas específicas para reciclagem.

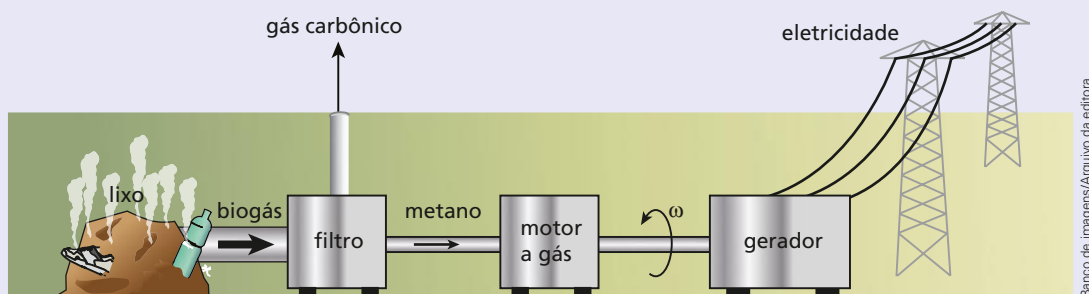


Veículos e máquinas especiais são utilizados para acomodar nos aterros sanitários montanhas de lixo produzidas todos os dias.

Mas o lixo também pode ter um retorno triunfal à sociedade, sendo empregado atualmente como importante fonte de energia. As bactérias que se proliferam em lixões se alimentam da matéria orgânica lá existente e produzem o chamado biogás, uma mistura de metano e gás carbônico, principalmente.

É justamente o metano, um gás estufa que contribui bastante para o agravamento do aquecimento global, que pode ser utilizado para a produção energética. O biogás desprendido do lixo é captado por meio de drenos especiais e passa por um sistema de filtragem que separa o metano do gás carbônico. O metano é, então, direcionado para o acionamento de motores, semelhantes aos utilizados nos carros movidos a gás, que entram em operação e fazem girar eixos de geradores capazes de disponibilizar tensão suficiente para abastecer de eletricidade cidades inteiras.

Veja no esquema a seguir as etapas de captação da energia do lixo.



O biogás obtido em usinas de lixo pode suprir 15% da demanda energética brasileira. Há vários projetos para o aproveitamento dessa matéria-prima, e a transformação do lixo em energia ainda traria duas consequências benéficas: a primeira é de natureza ambiental, já que haveria uma melhor seleção e armazenagem dos resíduos que são a base de todo o processo; a segunda é de ordem política, uma vez que o não lançamento do metano diretamente na atmosfera geraria **créditos de carbono**, moeda forte que poderia favorecer o Brasil em negociações internacionais sobre mudanças climáticas, meio ambiente e sustentabilidade.

2. Unidades de energia

Conforme dissemos no Tópico 6, Trabalho e potência, as unidades de energia são as mesmas de trabalho. Recordando, vimos que, no SI:

$$\text{unid. (energia)} = \text{unid. (trabalho)} = \text{joule (J)}$$

Entretanto há outras unidades de energia que, embora não pertençam a nenhum sistema oficial, foram consagradas pelo uso. Temos, por exemplo:

- **Caloria** (cal): utilizada nos fenômenos térmicos.

$$1 \text{ cal} \cong 4,19 \text{ J}$$

- **Quilowatt-hora** (kWh): utilizada em geração e distribuição de energia elétrica.

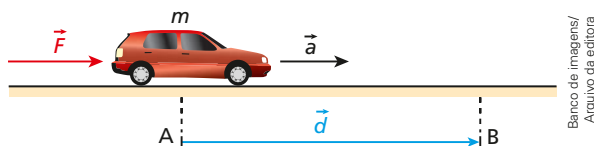
$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

- **Elétron-volt** (eV): utilizada nos estudos do átomo.

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

3. Energia cinética

Considere a figura seguinte, em que um carrinho de massa m se encontra em repouso no ponto **A** do plano horizontal sem atrito. Uma pessoa empurra o carrinho, aplicando-lhe a força \vec{F} indicada, constante e paralela ao plano de apoio.



Banco de imagens/
Arquivo da editora

Pela ação de \vec{F} , o carrinho adquire a aceleração \vec{a} , atingindo um ponto genérico **B** com velocidade \vec{v} . De **A** até **B** o deslocamento é \vec{d} .

Por estar em movimento, dizemos que o carrinho está energizado e, nesse caso, apresenta o que chamamos de **energia cinética** (E_c).

Entretanto, de onde vem essa energia? Ocorre que a partir do ponto **A** a força exercida pela pessoa passa a realizar trabalho sobre o carrinho. Esse trabalho é assimilado sob a forma de energia cinética.

Calculemos a energia cinética do carrinho em **B**:

$$E_c = \tau \Rightarrow E_c = Fd \quad (I)$$

Como \vec{F} é a força resultante, a aplicação da **2ª Lei de Newton** leva-nos a:

$$F = ma \quad (II)$$

De **A** até **B**, o carrinho descreve movimento uniformemente variado, em que o módulo do deslocamento (d) pode ser calculado pela Equação de Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 + 2ad \Rightarrow d = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Sendo $v_0 = 0$ (o carrinho partiu do repouso em **A**), vem:

$$d = \frac{v^2}{2a} \quad (III)$$

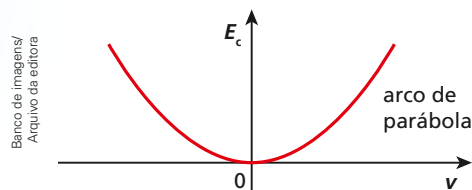
Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$E_c = ma \frac{v^2}{2a}$$

Daí:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

A energia cinética (E_c) de uma partícula é proporcional ao quadrado de sua velocidade escalar (v). Graficamente, temos:



Banco de imagens/
Arquivo da editora

Observe que a energia cinética jamais é negativa: é **positiva** ou **nula**. Veja ainda que ela é uma grandeza relativa, pois é função da velocidade, que depende do referencial adotado. Assim, uma única partícula pode ter, ao mesmo tempo, energia cinética nula para um referencial e não nula para outro.

Na fotografia, um ônibus espacial norte-americano, veículo outrora utilizado em missões tripuladas, é conduzido acoplado a um avião adaptado especialmente para esse fim. Estando em repouso em relação ao avião, a espaçonave apresenta energia cinética nula em relação a ele. No entanto, em relação ao solo, ela está em movimento. Isso torna sua energia cinética não nula do ponto de vista desse outro referencial.

Thinkstock/Getty Images



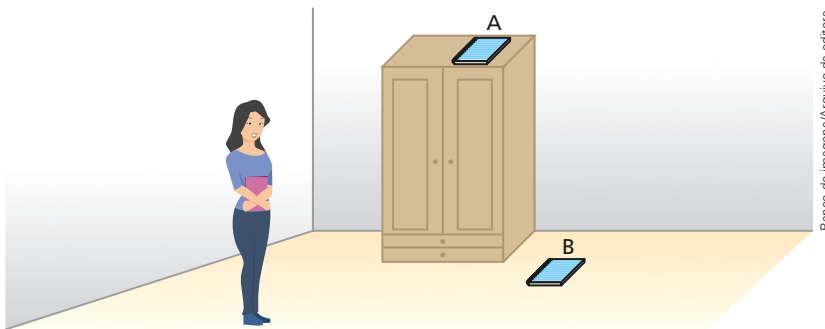
4. Energia potencial

É uma forma de energia latente, isto é, está sempre prestes a se converter em energia cinética. Na Mecânica há duas modalidades de energia potencial:

- energia potencial de gravidade;
- energia potencial elástica.

Energia potencial de gravidade (E_p)

É função da posição de um corpo em um campo gravitacional (por exemplo, o terrestre) e depende da intensidade do peso do corpo no local onde se encontra e da altura do seu centro de massa em relação a um plano horizontal de referência.



// Utilizando o piso do quarto como plano horizontal de referência, a estudante poderá dizer que o caderno **A**, colocado sobre o armário, tem energia potencial de gravidade não nula, enquanto o caderno **B**, de espessura desprezível, apoiado sobre o solo, possui energia potencial de gravidade nula.

Considere a situação da figura ao lado, em que uma pessoa ergue um corpo de massa m da posição **A** à posição **B**. Sejam h a altura de **B** em relação ao nível horizontal da posição **A** e g o módulo da aceleração da gravidade.

Pelo fato de ocupar a posição **B**, dizemos que o corpo está energizado, apresentando, em relação à posição **A**, **energia potencial de gravidade** (E_p).

De onde veio, no entanto, essa energia? Veio da pessoa que, ao erguer o corpo, exerceu uma força que realizou um trabalho assimilado pelo corpo sob a forma de energia potencial de gravidade.

Uma vez em **B** e abandonado, o corpo cai, buscando atingir o nível da posição **A**. Esse fato mostra que, em **B**, o corpo está realmente energizado, pois cai quando largado à ação da gravidade. Assim, ocorre transformação de energia potencial de gravidade em energia cinética.

Calculando a energia potencial de gravidade do corpo na posição **B**, temos:

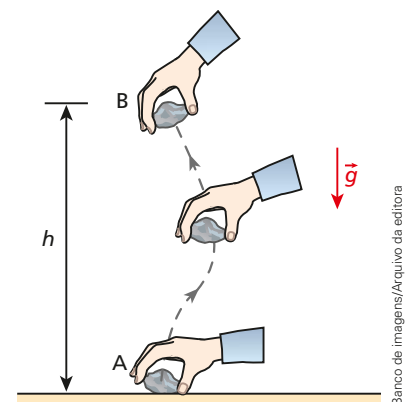
$$E_p = \tau \quad (I)$$

No Tópico 6 (Trabalho e potência), vimos que o trabalho motor realizado no erguimento de um corpo sem variação de energia cinética é calculado por:

$$\tau = Ph \Rightarrow \tau = mgh \quad (II)$$

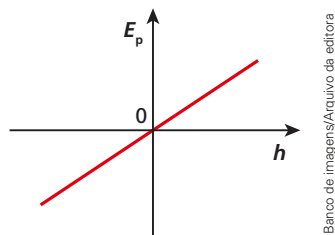
De (I) e (II), obtemos:

$$E_p = Ph \text{ ou } E_p = mgh$$



Devemos destacar que a energia potencial de gravidade deve ser definida em relação a determinado **plano horizontal de referência (PHR)**, a partir do qual são medidas as alturas. Um mesmo corpo pode ter energia potencial de gravidade positiva, nula ou negativa, dependendo do PHR adotado.

Veja abaixo a representação gráfica da variação da E_p em função de h .

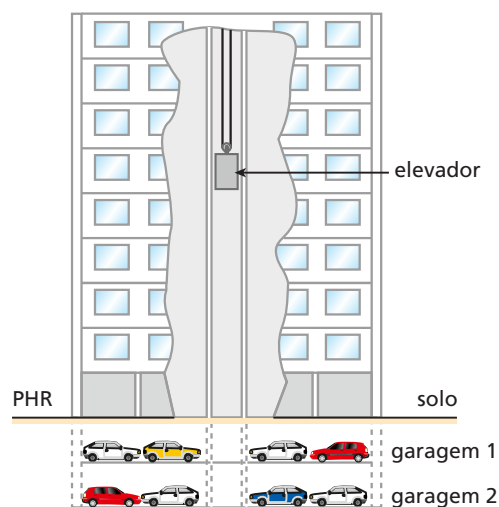


Banco de imagens/Arquivo da editora

Convém observar que valores negativos de h implicam valores negativos de E_p , que estão associados a posições abaixo do PHR.

Vamos agora analisar outro exemplo, em que representamos um edifício cujo elevador serve para transportar pessoas das garagens até o oitavo andar (ao lado).

Consideremos o nível do solo (térreo) como plano horizontal de referência (PHR). Em relação a esse referencial, os passageiros do elevador, cujas dimensões serão admitidas desprezíveis, apresentarão energia potencial de gravidade positiva se estiverem em qualquer andar acima do solo, nula se estiverem no térreo e negativa se estiverem nas garagens 1 ou 2.



Veja o significado físico de uma energia potencial de gravidade negativa: se a energia potencial de gravidade de um corpo vale $-mgh$, deve-se realizar sobre ele um trabalho equivalente a $+mgh$ para que esse corpo chegue ao nível zero de energia potencial, isto é, ao PHR adotado.

A seguir, podemos observar um *videogame* em diferentes posições.

2013 Sony Computer Entertainment Inc.



// Suponha que inicialmente o aparelho estivesse "deitado" e alguém o tenha colocado de pé sobre a mesma superfície de apoio. Nessa operação o centro de massa do *videogame* sofre uma elevação, de modo que ocorre uma **variação positiva** de energia potencial de gravidade.

NOTAS!

- A variação de energia potencial de gravidade (ΔE_p) é a diferença entre as energias potenciais final (E_{p_f}) e inicial (E_{p_i}).

$$\Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_i}$$

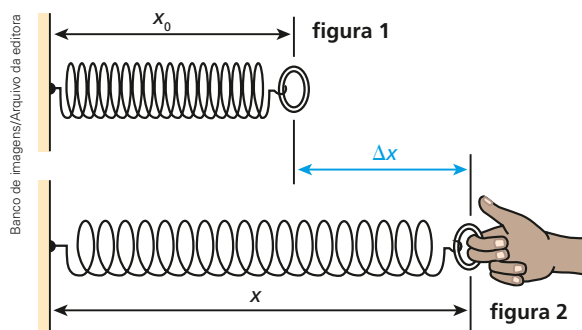
- Se o centro de massa de um corpo sobe, então $E_{p_f} > E_{p_i}$ e $\Delta E_p > 0$.
- Se o centro de massa de um corpo desce, então $E_{p_f} < E_{p_i}$ e $\Delta E_p < 0$.
- ΔE_p **independe** do PHR adotado.

Energia potencial elástica (E_e)

É a forma de energia que encontramos armazenada em sistemas elásticos deformados. É o caso, por exemplo, de uma mola alongada ou comprimida ou de uma tira de borracha alongada.

Vamos analisar a situação das figuras a seguir, em que temos uma mola, suposta ideal, de constante elástica K , fixa em uma parede e inicialmente livre de deformações (figura 1).

Um operador puxa a extremidade livre da mola, alongando-a de modo que sofra uma deformação Δx , tal que $\Delta x = x - x_0$ (figura 2).



Por estar deformada, dizemos que a mola está energizada, tendo armazenada em si **energia potencial elástica** (E_e).

De onde vem, no entanto, essa energia? Vem do operador que, ao deformar a mola, exerce sobre ela uma força que realiza um trabalho, assimilado sob a forma de energia potencial elástica.

A evidência de que a mola deformada está energizada consiste no fato de que ela pode ser usada para impulsionar objetos, dotando-lhes de energia cinética.

Vamos calcular a energia potencial elástica que a mola armazena quando deformada:

$$E_e = \tau \quad (\text{I})$$

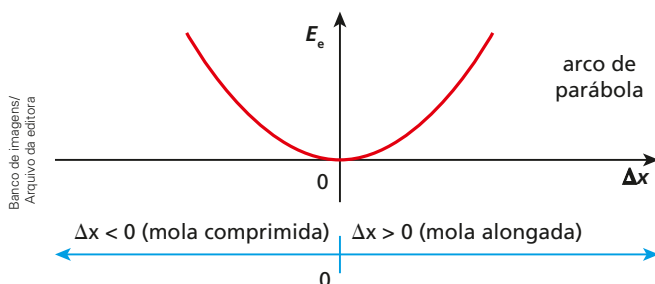
O trabalho realizado pela força do operador ao deformar a mola é dado por:

$$\tau = \frac{K(\Delta x)^2}{2} \quad (\text{II})$$

De (I) e (II), obtemos:

$$E_e = \frac{K(\Delta x)^2}{2}$$

Observe que a energia potencial elástica (E_e) nunca é negativa: é **positiva** ou **nula**. Ela é diretamente proporcional ao quadrado da deformação (Δx). Assim, o gráfico E_e versus Δx é um arco de parábola, como representamos abaixo.



Em um arco flexionado, como o da fotografia, há energia potencial elástica (de deformação) armazenada. No ato do disparo, essa energia é prontamente transferida para a flecha, que a assimila em forma de energia cinética.



Exercícios Nível 1

- Apesar das tragédias ocorridas com os ônibus espaciais norte-americanos Challenger e Columbia, que puseram fim à vida de catorze astronautas, esses veículos reutilizáveis foram fundamentais na exploração do cosmo. Admita que um ônibus espacial com massa igual a 100 t esteja em procedimento de reentrada na atmosfera, apresentando velocidade de intensidade 10800 km/h em relação à superfície terrestre. Qual é a energia cinética desse veículo?
- (Fuvest-SP) A equação da velocidade de um móvel de 20 quilogramas é dada por $v = 3,0 + 0,20t$ (SI). Podemos afirmar que a energia cinética desse móvel, no instante $t = 10$ s, vale:
 - 45 J
 - $1,0 \cdot 10^2$ J
 - $2,0 \cdot 10^2$ J
 - $2,5 \cdot 10^2$ J
 - $2,0 \cdot 10^3$ J

- Uma partícula **A** tem massa M e desloca-se verticalmente para cima com velocidade de módulo v . Uma outra partícula **B** tem massa $2M$ e desloca-se horizontalmente para a esquerda com velocidade de módulo $\frac{v}{2}$. Qual é a relação entre as energias cinéticas das partículas **A** e **B**?

Resolução:

A energia é uma grandeza física escalar. Por isso, não importam as orientações dos movimentos das partículas **A** e **B**.

A energia cinética de uma partícula é calculada por:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

Para a partícula **A**, temos: $E_{cA} = \frac{Mv^2}{2}$ (I)

Para a partícula **B**:

$$E_{cB} = \frac{2M\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow E_{cB} = \frac{2Mv^2}{8} \quad \text{(II)}$$

Dividindo (I) por (II), obtemos:

$$\frac{E_{cA}}{E_{cB}} = \frac{\frac{Mv^2}{2}}{\frac{2Mv^2}{8}} \Rightarrow \boxed{\frac{E_{cA}}{E_{cB}} = 2}$$

- Três corpos, **A**, **B** e **C**, têm as características indicadas na tabela a seguir. Sendo E_A , E_B e E_C , respectivamente, as energias cinéticas de **A**, **B** e **C**, aponte a alternativa correta:

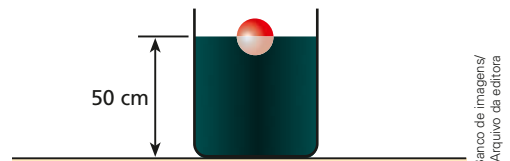
	A	B	C
Massa	M	$\frac{M}{2}$	2M
Velocidade escalar	v	2v	$\frac{v}{2}$

- $E_A = E_B = E_C$
 - $E_A = 2E_B = 4E_C$
 - $E_B = 2E_A = 4E_C$
 - $E_C = 2E_A = 4E_B$
 - $E_A = E_B = 8E_C$
- (Efoimm-RJ) Se o nosso amigo da figura a seguir conseguisse levantar o haltere de massa igual a 75 kg a uma altura de 2,0 m, em um local onde $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, qual a energia potencial que ele estaria transferindo para o haltere?



Reprodução/
Arquivo da editora

- No esquema da figura, a esfera de massa 1,0 kg é homogênea e flutua na água com 50% do seu volume submerso:



Banco de imagens/
Arquivo da editora

Sabendo que, no local, a aceleração da gravidade vale $9,8 \text{ m/s}^2$, calcule a energia potencial de gravidade da esfera:

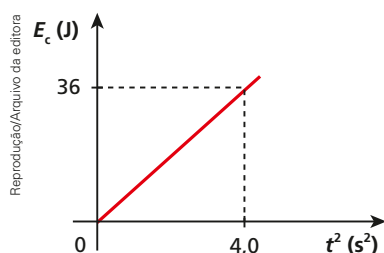
- em relação à superfície livre da água;
 - em relação ao fundo do recipiente.
- Uma pequena pedra de massa 2,0 kg acha-se no fundo de um poço de 10 m de profundidade. Sabendo que, no local, a aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s^2 , indique a alternativa que traz o valor correto da energia potencial de gravidade da pedra em relação à borda do poço.
 - $-2,0 \cdot 10^2$ J
 - $2,0 \cdot 10^2$ J
 - 20 J
 - 20 J
 - Nenhuma das anteriores.

8. Tracionada com 800 N, certa mola helicoidal sofre distensão elástica de 10 cm. Qual é a energia potencial armazenada na mola quando deformada de 4,0 cm?
9. Um garoto chuta uma bola de massa 400 g que, em determinado instante, tem velocidade de 72 km/h e altura igual a 10 m em relação ao solo. Adotando $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$ e considerando um referencial no solo, aponte a alternativa que traz os valores corretos da energia cinética e da energia potencial de gravidade da bola no instante considerado.

	Energia cinética (joules)	Energia potencial (joules)
a)	40	40
b)	80	40
c)	40	80
d)	80	80
e)	20	60

Exercícios Nível 2

10. Em dado instante, a energia cinética de um pássaro em voo:
- pode ser negativa.
 - depende do referencial adotado, sendo proporcional à massa do pássaro e ao quadrado de sua velocidade escalar.
 - é proporcional à altura do pássaro em relação ao solo.
 - depende da aceleração da gravidade.
 - tem a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade vetorial do pássaro.
11. Um corpo de massa m e velocidade \vec{v}_0 possui energia cinética E_0 . Se o módulo da velocidade aumentar em 20%, a nova energia cinética do corpo será:
- $1,56E_0$
 - $1,44E_0$
 - $1,40E_0$
 - $1,20E_0$
 - $1,10E_0$
12. A massa da Terra vale $6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, aproximadamente. Se sua velocidade orbital em torno do Sol tem intensidade média igual a 30 km/s, a ordem de grandeza da energia cinética média do planeta, em joules, é:
- 10^{30}
 - 10^{33}
 - 10^{35}
 - 10^{38}
 - 10^{40}
13. (Unip-SP) Uma partícula de massa 2,0 kg, em trajetória retilínea, tem energia cinética (E_c) variando com o quadrado do tempo (t^2) de acordo com o gráfico abaixo.



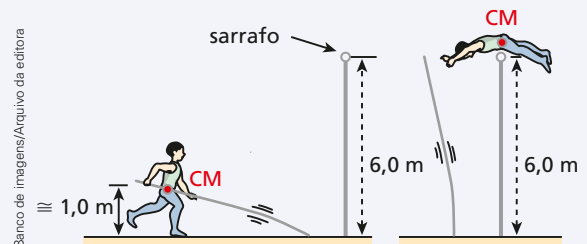
A força resultante na partícula:

- é variável.
 - tem intensidade igual a 3,0 N.
 - tem intensidade igual a 6,0 N.
 - tem intensidade igual a 9,0 N.
 - tem intensidade igual a 72 N.
14. Um elevador, juntamente com sua carga, tem massa de 2,0 toneladas. Qual é a potência de dez que melhor expressa o acréscimo de energia potencial de gravidade do elevador – dado em joules – quando este sobe do terceiro ao sétimo andar?
- 10^1
 - 10^5
 - 10^9
 - 10^{13}
 - 10^{17}

15. Um atleta de massa igual a 60 kg realiza um salto com vara, transpondo o sarrafo colocado a 6,0 m de altura. Calcule o valor aproximado do acréscimo da energia potencial de gravidade do atleta nesse salto. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Resolução:

No caso, o atleta é um **corpo extenso** (dimensões não desprezíveis) e, por isso, deve-se raciocinar em termos do seu **centro de massa**.



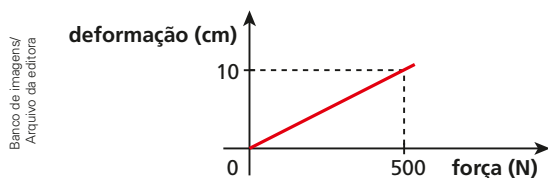
Sendo $m = 60 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a elevação do centro de massa do atleta $\Delta h \cong 5,0 \text{ m}$, calculemos o acréscimo de energia potencial de gravidade (ΔE_p).

$$\Delta E_p = mg \Delta h = 60 \cdot 10 \cdot 5,0$$

$$\Delta E_p = 3,0 \cdot 10^3 \text{ J}$$

16. (UPM-SP) Uma bola de borracha de massa $1,0 \text{ kg}$ é abandonada da altura de 10 m . A energia perdida por essa bola ao se chocar com o solo é 28 J . Supondo $g = 10 \text{ m/s}^2$, a altura máxima atingida pela bola após o choque com o solo será de:
- a) $7,2 \text{ m}$ c) $5,6 \text{ m}$ e) $2,8 \text{ m}$
 b) $6,8 \text{ m}$ d) $4,2 \text{ m}$

17. A deformação em uma mola varia com a intensidade da força que a traciona, conforme o gráfico abaixo.



Determine:

- a) a constante elástica da mola, dada em N/m ;
 b) a intensidade da força de tração quando a deformação da mola for de $6,0 \text{ cm}$;
 c) a energia potencial elástica armazenada na mola quando ela estiver deformada $4,0 \text{ cm}$.

18. Um bloco de peso P é dependurado na extremidade livre de uma mola vertical de constante elástica K . Admitindo o sistema em equilíbrio, calcule:

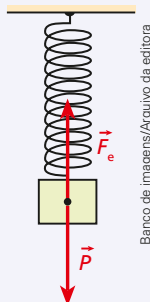
- a) a distensão da mola;
 b) a energia potencial elástica armazenada na mola.

Resolução:

- a) Na situação de equilíbrio, o peso (\vec{P}) do bloco é equilibrado pela força elástica exercida pela mola (\vec{F}_e).

$$F_e = P \Rightarrow K \Delta x = P$$

$$\text{Então: } \Delta x = \frac{P}{K}$$



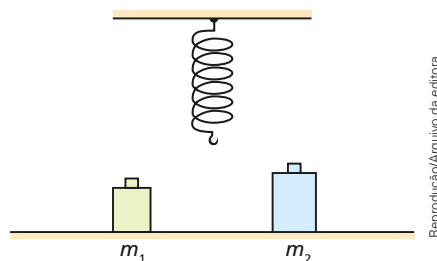
- b) A energia potencial elástica armazenada na mola é, então, determinada por:

$$E_e = \frac{K(\Delta x)^2}{2} \Rightarrow E_e = \frac{K}{2} \left(\frac{P}{K} \right)^2$$

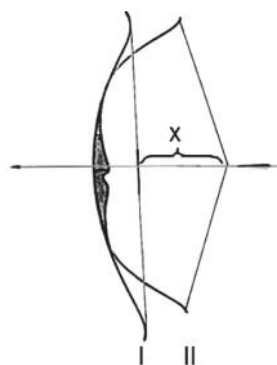
Logo:

$$E_e = \frac{P^2}{2K}$$

19. (UFPE) Duas massas, $m_1 = 2,0 \text{ kg}$ e $m_2 = 4,0 \text{ kg}$, são suspensas sucessivamente em uma mesma mola vertical. Se U_1 e U_2 são, respectivamente, as energias elásticas armazenadas na mola quando as massas m_1 e m_2 foram penduradas e $U_1 = 2,0 \text{ J}$, qual é o valor de U_2 ?



20. (UFRGS-RS) O uso de arco e flecha remonta a tempos anteriores à história escrita. Em um arco, a força da corda sobre a flecha é proporcional ao deslocamento x , ilustrado na figura abaixo, a qual representa o arco nas suas formas relaxada I e distendida II.



Uma força horizontal de 200 N , aplicada na corda com uma flecha de massa $m = 40 \text{ g}$, provoca um deslocamento $x = 0,5 \text{ m}$. Supondo que toda a energia armazenada no arco seja transferida para a flecha, qual a velocidade que a flecha atingiria, em m/s , ao abandonar a corda?

- a) $5,0 \cdot 10^3$ c) 50 e) 10^2
 b) 100 d) 5

5. Cálculo da energia mecânica

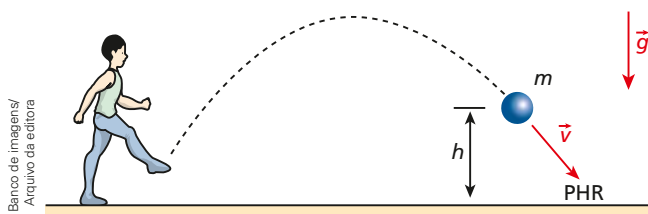
Calculamos a energia mecânica (E_m) de um sistema adicionando a energia cinética à energia potencial, que pode ser de gravidade ou elástica:

$$E_m = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}}$$

Observe os exemplos a seguir, em que mostramos o cálculo em cada caso.

Exemplo 1

Um jogador chuta uma bola de massa m , que descreve a trajetória indicada. No instante da figura, a velocidade da bola é \vec{v} e sua altura em relação ao solo (PHR) é h .

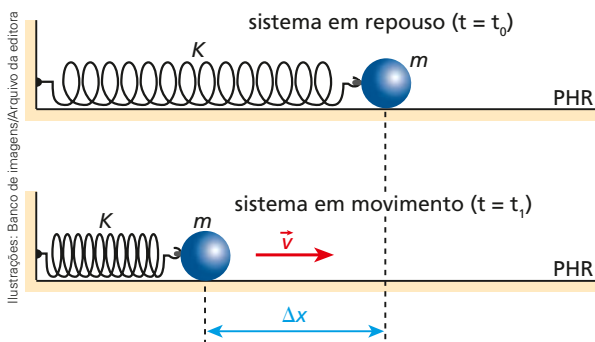


Sendo g o módulo da aceleração da gravidade, a energia mecânica da bola no instante considerado é calculada por:

$$E_m = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

Exemplo 2

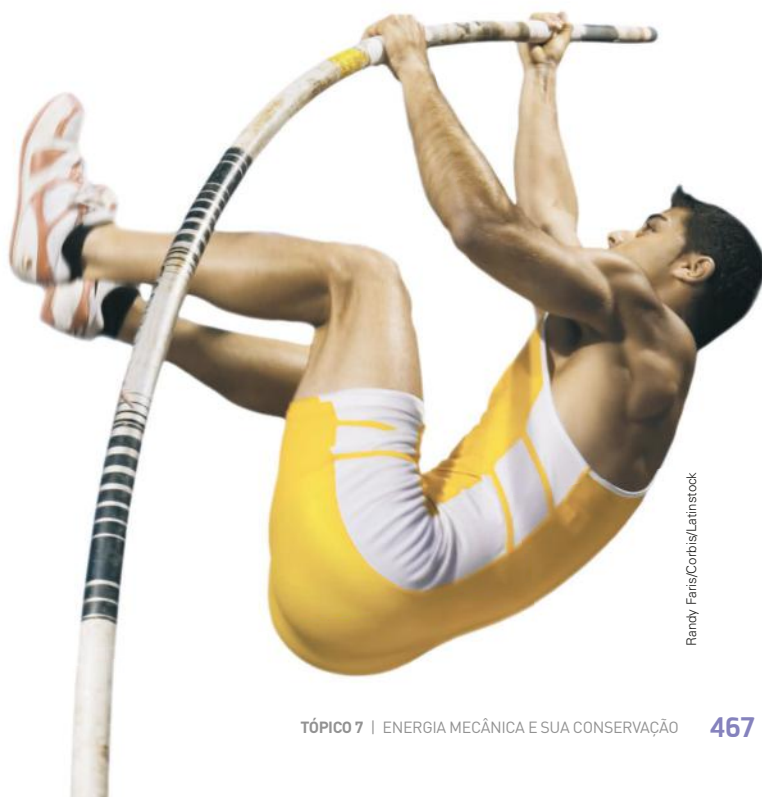
Uma partícula de massa m oscila horizontalmente, em condições ideais, ligada a uma mola leve, de constante elástica K .



No instante $t = t_1$ indicado na figura, a velocidade da partícula é \vec{v} , e a energia mecânica do sistema massa-mola é calculada por:

$$E_m = \frac{mv^2}{2} + \frac{K(\Delta x)^2}{2}$$

Na fotografia, um atleta realiza um salto com vara. Em determinado instante de sua ascensão, ainda durante o contato com a vara envergada, a energia mecânica do sistema atleta-vara em relação ao solo é composta de três parcelas: energia cinética, energia potencial de gravidade e energia elástica de deformação.



Randy Faris/Corbis/Latinstock

6. Sistema mecânico conservativo

Sistema mecânico conservativo é todo aquele em que as forças que realizam trabalho transformam **exclusivamente** energia potencial em energia cinética, e vice-versa. É o que ocorre com as forças de gravidade, elástica e eletrostática, que, por sua vez, são denominadas **forças conservativas**.

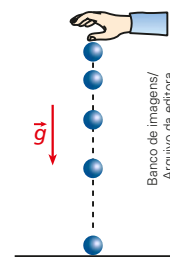
As forças de atrito, de resistência viscosa – exercidas pelos líquidos em corpos movendo-se em seu interior – e de resistência do ar transformam energia mecânica em outras formas de energia, principalmente térmica. Essas forças são denominadas **forças dissipativas**.

Podemos dizer, então, que um sistema mecânico só é conservativo quando o trabalho é realizado **exclusivamente por forças conservativas**. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1

Uma partícula cai em movimento vertical sob a ação exclusiva do campo gravitacional terrestre.

Nesse caso, a única força que realiza trabalho sobre a partícula é a da gravidade, que é uma força conservativa.

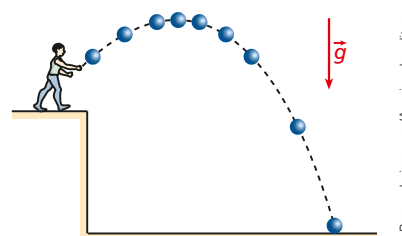


Banco de imagens/
Arquivo da editora

Exemplo 2

Uma partícula é lançada obliquamente, ficando sob a ação exclusiva do campo gravitacional terrestre.

Também, nesse caso, a única força que realiza trabalho é a da gravidade, que é uma força conservativa.

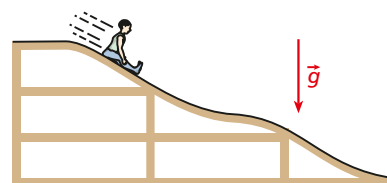


Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplo 3

Um garoto desce por um tobogã praticamente sem atrito, movimentando-se sem sofrer a influência do ar.

Como o atrito e a influência do ar foram desprezados e a força normal não realiza trabalho, o único trabalho a considerar é o da força peso, que é uma força conservativa.

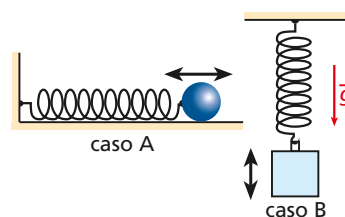


Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplo 4

Uma partícula, presa a uma mola leve e elástica, oscila sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar.

No caso **A**, somente a força elástica (conservativa) realiza trabalho. No caso **B**, duas forças conservativas realizam trabalho: a força elástica e a força peso.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplo 5

Um esporte radical que exige do praticante muita técnica e precaução é o *bungee-jump*. Uma pessoa devidamente atada à extremidade de uma corda elástica específica para esse fim, sob os cuidados de monitores especializados, projeta-se a partir de uma plataforma elevada, despencando em um voo que termina em grandes oscilações. Desprezando-se a influência do ar, apenas a força peso e a força elástica realizam trabalho, o que caracteriza o conjunto pessoa-corda como um sistema conservativo.

7. Princípio de Conservação da Energia Mecânica

Trata-se de uma aplicação particular do Princípio de Conservação da Energia em sistemas mecânicos. Seu enunciado é:

Em um sistema mecânico conservativo, a energia mecânica total mantém-se **constante**.

$$E_m = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}} \Rightarrow \text{constante}$$

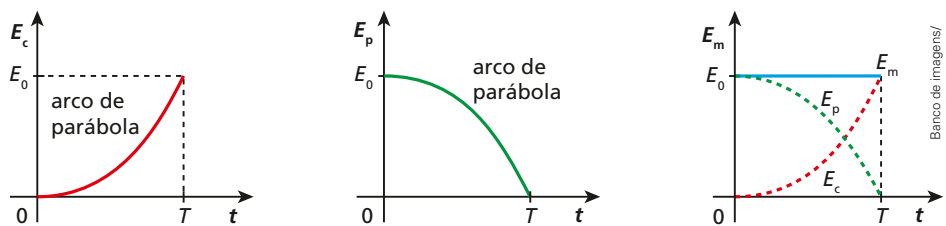
Concluimos, então, que qualquer aumento de energia cinética observado nesse sistema ocorre a partir de uma redução igual de energia potencial (de gravidade ou elástica), e vice-versa.

Tomemos, por exemplo, uma partícula em queda livre nas vizinhanças da superfície terrestre. Temos, aí, um sistema mecânico conservativo, no qual deve permanecer constante a energia mecânica.

De fato, durante a queda livre, a energia cinética da partícula aumenta, enquanto a energia potencial de gravidade diminui na mesma quantidade. Isso faz com que a soma da energia cinética com a energia potencial não varie, de modo que a energia mecânica permaneça sempre constante.

Admita que a partícula tenha iniciado sua queda no instante $t_0 = 0$, a partir do repouso. Considere T o tempo de queda até o solo (altura zero) e E_0 a energia mecânica inicial.

Os gráficos das energias cinética, potencial de gravidade e mecânica, em função do tempo, estão traçados a seguir:

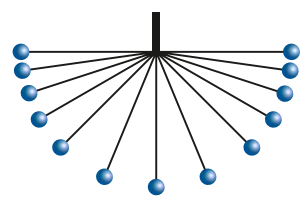
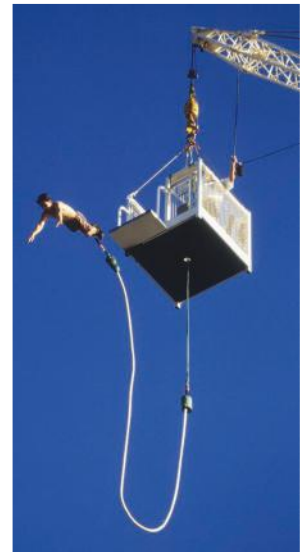


$$E_m = E_c + E_p$$

Vejam os outros exemplos. Observe agora o caso da figura ao lado, em que um pêndulo é abandonado do repouso, iniciando movimento descendente.

Durante a descida, a energia cinética do pêndulo é crescente enquanto a potencial é decrescente. Na subida ocorre o processo inverso, isto é, enquanto a energia potencial cresce, a cinética decresce.

Não levando em conta as forças dissipativas, o movimento do pêndulo constitui um sistema conservativo, no qual a energia mecânica se mantém constante.

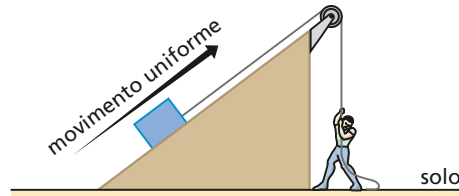




Parques aquáticos oferecem uma série de diversões emocionantes, como o toboágua da fotografia, em que as pessoas escorregam de grandes alturas por uma canaleta dotada de curvas e ondulações. Em razão dos atritos e da resistência do ar, ocorrem algumas dissipações de energia mecânica, mas, se essas perdas pudessem ser desprezadas, teríamos um sistema mecânico conservativo, no qual os acréscimos de energia cinética ocorreriam à custa de iguais reduções de energia potencial.

É correto afirmar que um sistema mecânico não conservativo sempre é dissipativo? A resposta é *não*, como exemplifica a situação a seguir.

Na figura abaixo, um homem ergue um bloco apoiado sobre um plano inclinado, perfeitamente liso, utilizando uma corda e uma polia ideais.



Suponhamos que o bloco se desloque em **movimento uniforme**.

Podemos afirmar que a energia cinética do bloco se mantém constante ao longo da rampa. À medida que o bloco sobe, porém, sua altura em relação ao solo aumenta, provocando também um aumento na respectiva energia potencial de gravidade.

A energia cinética constante, somada à energia potencial crescente, determina uma energia **mecânica total crescente**, o que caracteriza um sistema **não conservativo**.

Esse aumento da energia mecânica do sistema é proveniente do trabalho realizado pelas forças musculares (não conservativas) que o homem exerce sobre a corda.

Nesse caso, o sistema é também **não dissipativo**, já que não há forças dissipativas presentes.

Ampliando o olhar

Emoção no *looping* vertical



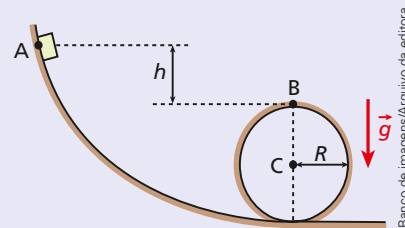
Em parques de diversões, há vários brinquedos em que veículos desafiam a gravidade, realizando *loopings* contidos em um plano vertical. Para isso, é fundamental que a construção dessas atrações leve em conta o desnível entre o ponto de partida dos veículos e o ponto mais alto do *looping*.

Montanha-russa em parque de diversões. Gardaland, Itália. Abril de 2008. Desafiar a gravidade em uma montanha-russa é muito emocionante e divertido, especialmente quando a aceleração se aproxima de \vec{g} . É disso que surge aquela sensação de “frio na barriga”, causada pela aparente “perda de peso” das vísceras, que praticamente levitam no interior do abdome.

Consideremos o caso ideal de uma partícula que deverá percorrer o trilho esquematizado na figura ao lado, sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar. O trilho está contido em um plano vertical, e o *looping* circular tem raio R .

Se a partícula partir do repouso do ponto **A**, qual deverá ser o menor desnível h entre os pontos **A** e **B** para que ela consiga descrever toda a trajetória sem perder o contato com o trilho?

Sabe-se que $h \neq 0$, isto é, o ponto **A** está acima do ponto **B**, pois, se esses pontos estivessem no mesmo nível horizontal, a partícula teria em **B** uma parcela de energia (energia cinética) a mais que no ponto **A**, o que contrariaria o **Princípio de Conservação da Energia Mecânica**.



Raciocinando em termos de h mínimo, a partícula não trocará forças com o trilho no ponto **B** e, por isso, seu peso (\vec{P}) fará o papel de resultante centrípeta (\vec{F}_{cp}).

Assim, no ponto **B**, temos: $\vec{P} = \vec{F}_{cp}$.

Sendo m a massa, g o valor da aceleração da gravidade e v_B a intensidade da velocidade em **B**, temos:

$$mg = \frac{m(v_B)^2}{R} \Rightarrow gR = (v_B)^2 \quad (I)$$

Adotando o nível horizontal do ponto **B** como referência e aplicando o **Princípio de Conservação da Energia Mecânica**, temos:

$$mgh = \frac{m(v_B)^2}{2} \Rightarrow 2gh = (v_B)^2 \quad (II)$$

Comparando (I) e (II), calculamos h mínimo: $2gh = gR \Rightarrow h = \frac{R}{2}$

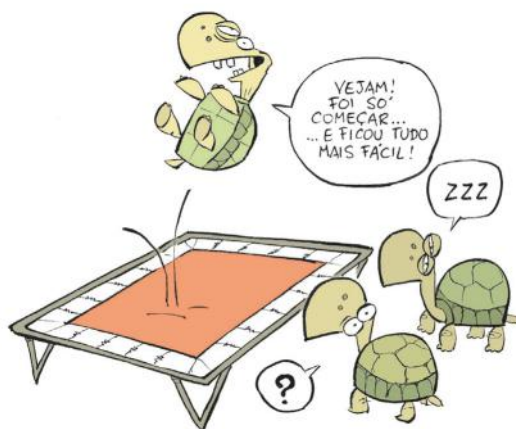
Se h for menor que $\frac{R}{2}$, a partícula não realizará o *looping*, perdendo o contato com o trilho antes de atingir o ponto **B**.

Se não houvesse atrito nem resistência do ar, o desnível deveria ser no mínimo igual à metade do raio do *looping*, como acabamos de demonstrar.

Na prática, entretanto, ocorrem dissipações de energia mecânica. Por esse motivo, e também por questões de segurança, é necessário que esses brinquedos sejam operados com um desnível sempre maior que a metade do raio do *looping*.

DESCUBRA MAIS

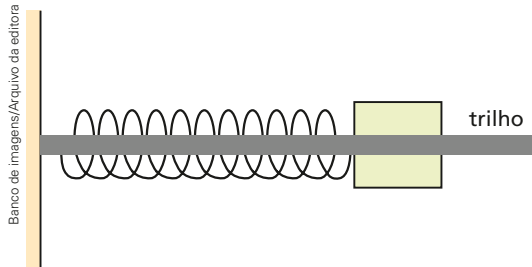
- Um dos princípios mais importantes da Física é o de conservação de energia. Ele estabelece que energia não se cria nem se destrói; energia se transforma. O aparecimento de certa quantidade de energia implica sempre o desaparecimento de quantidade igual. Dê sustentação argumentativa a essa lei, fundamentando sua linha de raciocínio com exemplos.
- Observe o quadrinho ao lado, em que uma tartaruga está se exercitando com entusiasmo numa cama elástica. Como foi possível iniciar essa série de saltos, considerando-se que o quelônio estava inicialmente em repouso sobre a lona? Explique as conversões de energia envolvidas no processo.
- Considere uma granada explodindo e se fragmentando em vários estilhaços lançados nas diversas direções ao redor do local da explosão com velocidades de grande intensidade. Nessa situação, há conversão entre que modalidades de energia?
A energia total do sistema, que inclui o meio em que ocorre a explosão, permanece constante? No ato da explosão, a granada constitui um sistema mecânico conservativo?
- A energia emanada das estrelas provém de um processo contínuo, que ocorre em seu interior, denominado fusão nuclear. Do que consiste esse processo? Fusão nuclear e fissão nuclear são um mesmo processo? Pesquise.



Fernando Gonçales/Arquivo da editora

Exercícios Nível 1

21. O bloco da figura oscila preso a uma mola de massa desprezível, executando movimento harmônico simples:



A massa do bloco é de $1,0 \text{ kg}$, a constante elástica da mola vale $2,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ e o trilho que suporta o sistema é reto e horizontal.

Se no instante da figura o bloco tem velocidade de $2,0 \text{ m/s}$ e a mola está distendida de 10 cm , qual é a energia mecânica (total) do conjunto bloco-mola em relação ao trilho?

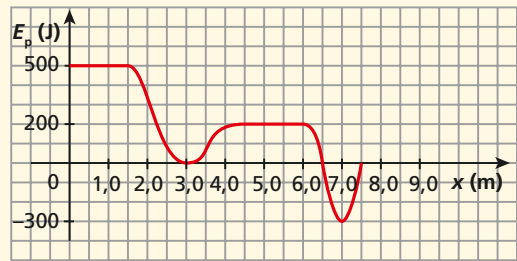
22. Considere um sistema constituído por um homem e seu paraquedas e admita que esse conjunto esteja descendo verticalmente com velocidade de intensidade constante. Adotando-se um referencial no solo, analise as proposições a seguir:

- I. A energia cinética do sistema mantém-se constante, mas sua energia potencial de gravidade diminui.
- II. O sistema é conservativo.
- III. Parte da energia mecânica do sistema é dissipada pelas forças de resistência do ar, transformando-se em energia térmica.

Aponte a alternativa correta:

- a) As três proposições estão corretas.
- b) As três proposições estão incorretas.
- c) Apenas as proposições I e II estão corretas.
- d) Apenas as proposições I e III estão corretas.
- e) Apenas as proposições II e III estão corretas.

23. A energia potencial de uma partícula que se **ER** desloca sob a ação exclusiva de um sistema de forças conservativas varia em função da sua posição, dada por um eixo horizontal Ox , conforme o gráfico seguinte:



Sabendo que na posição $x = 0$ a partícula estava em repouso, determine:

- a) sua energia mecânica nas posições $x = 1,0 \text{ m}$, $x = 3,0 \text{ m}$ e $x = 7,0 \text{ m}$;
- b) sua energia cinética nas posições $x = 1,0 \text{ m}$, $x = 3,0 \text{ m}$, $x = 5,0 \text{ m}$ e $x = 7,0 \text{ m}$.

Resolução:

- a) Como a partícula estava em repouso na posição $x = 0$, sua energia cinética era nula nesse local. Por isso, em $x = 0$, a energia mecânica da partícula resumia-se à potencial:

$$E_{m_0} = E_{p_0} = 500 \text{ J}$$

Considerando-se que a partícula está sujeita a um sistema de forças conservativas, podemos dizer que sua energia mecânica é constante. Assim:

$$E_{m_{1,0}} = E_{m_{3,0}} = E_{m_{7,0}} = 500 \text{ J}$$

- b) Podemos ler diretamente no gráfico que

$$E_{p_{1,0}} = 500 \text{ J}, E_{p_{3,0}} = 0, E_{p_{5,0}} = 200 \text{ J} \text{ e} \\ E_{p_{7,0}} = -300 \text{ J}.$$

Lembrando que $E_m = E_c + E_p$, segue que:

$$E_{c_{1,0}} = E_{m_{1,0}} - E_{p_{1,0}} \Rightarrow E_{c_{1,0}} = 500 \text{ J} - 500 \text{ J}$$

$$E_{c_{1,0}} = 0$$

$$E_{c_{3,0}} = E_{m_{3,0}} - E_{p_{3,0}} \Rightarrow E_{c_{3,0}} = 500 \text{ J} - 0$$

$$E_{c_{3,0}} = 500 \text{ J}$$

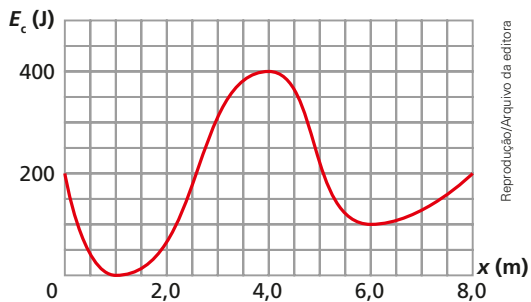
$$E_{c_{5,0}} = E_{m_{5,0}} - E_{p_{5,0}} \Rightarrow E_{c_{5,0}} = 500 \text{ J} - 200 \text{ J}$$

$$E_{c_{5,0}} = 300 \text{ J}$$

$$E_{c_{7,0}} = E_{m_{7,0}} - E_{p_{7,0}} \Rightarrow E_{c_{7,0}} = 500 \text{ J} - (-300 \text{ J})$$

$$E_{c_{7,0}} = 800 \text{ J}$$

24. (PUC-SP) O gráfico representa a energia cinética de uma partícula de massa 10 g, sujeita somente a forças conservativas, em função da abscissa x . A energia mecânica do sistema é de 400 J.



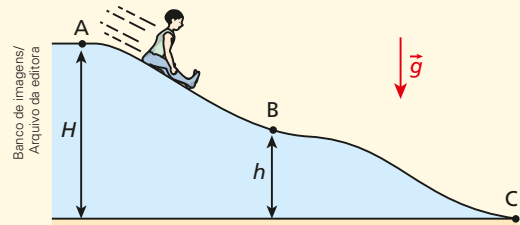
- a) Qual a energia potencial para $x = 1,0$ m e para $x = 4,0$ m?
 b) Calcule a velocidade da partícula para $x = 8,0$ m.
25. Um corpo movimenta-se sob a ação exclusiva de forças conservativas. Em duas posições, **A** e **B**, de sua trajetória, foram determinados alguns valores de energia. Esses valores se encontram na tabela abaixo:

	Energia cinética (joules)	Energia potencial (joules)	Energia mecânica (joules)
Posição A		800	1000
Posição B	600		

Os valores da energia cinética em **A** e das energias potencial e mecânica em **B** são, respectivamente:

- a) 0 J, 800 J e 1000 J.
 b) 200 J, 400 J e 1000 J.
 c) 100 J, 200 J e 800 J.
 d) 200 J, 1000 J e 400 J.
 e) Não há dados suficientes para os cálculos.
26. (UFRN) Indique a opção que representa a altura da qual devemos abandonar um corpo de massa $m = 2,0$ kg para que sua energia cinética, ao atingir o solo, tenha aumentado de 150 J. O valor da aceleração da gravidade no local da queda é $g = 10$ m/s² e a influência do ar é desprezível.
- a) 150 m
 b) 75 m
 c) 50 m
 d) 15 m
 e) 7,5 m

27. Um garoto de massa m parte do repouso no ponto **A** do tobogã da figura a seguir e desce sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar:



Sendo dadas as alturas H e h e o valor da aceleração da gravidade (g), calcule o módulo da velocidade do garoto:

- a) no ponto **B**; b) no ponto **C**.

Resolução:

O sistema é conservativo, o que nos permite aplicar o Princípio de Conservação da Energia Mecânica.

$$a) E_{m_B} = E_{m_A} \Rightarrow E_{m_C} + E_{P_B} = E_{C_A} + E_{P_A}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} + mgh = \frac{mv_A^2}{2} + mgH$$

Sendo $v_A = 0$, calculemos v_B :

$$v_B = \sqrt{2g(H - h)}$$

$$b) E_{m_C} = E_{m_A} \Rightarrow E_{C_C} + E_{P_C} = E_{C_A} + E_{P_A}$$

$$\frac{mv_C^2}{2} + mgh_C = \frac{mv_A^2}{2} + mgH$$

Como $h_C = 0$ e $v_A = 0$, vem:

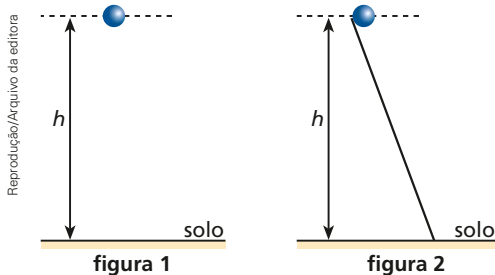
$$v_C = \sqrt{2gH}$$

Nota:

- As velocidades calculadas **independem** da massa do garoto e do formato da trajetória descrita por ele.

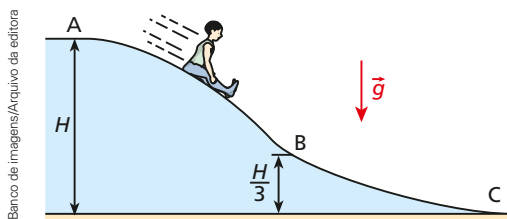
28. (Cesgranrio) O Beach Park, localizado em Fortaleza-CE, é o maior parque aquático da América Latina situado na beira do mar. Uma de suas principais atrações é um tobogã chamado "Insano". Descendo esse tobogã, uma pessoa atinge sua parte mais baixa com velocidade de módulo 28 m/s. Considerando-se a aceleração da gravidade com módulo $g = 9,8$ m/s² e desprezando-se os atritos, conclui-se que a altura do tobogã, em metros, é de:
- a) 40 b) 38 c) 37 d) 32 e) 28

29. (UFF-RJ) Na figura 1, um corpo é abandonado em queda livre de uma altura h . Nessa situação, o tempo de queda e a velocidade ao chegar ao solo são, respectivamente, t_1 e v_1 . Na figura 2, o mesmo corpo é abandonado sobre um trilho e atinge o solo com velocidade v_2 , num tempo de queda igual a t_2 .



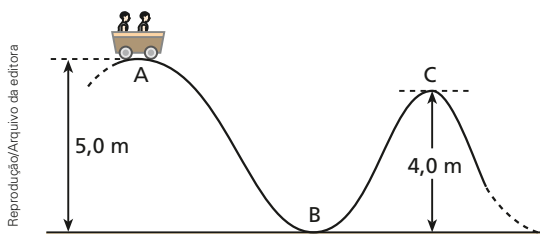
Assim, desprezando o atrito, é correto afirmar que:

- a) $t_1 < t_2$ e $v_1 < v_2$.
 b) $t_1 < t_2$ e $v_1 = v_2$.
 c) $t_1 = t_2$ e $v_1 = v_2$.
 d) $t_1 = t_2$ e $v_1 > v_2$.
 e) $t_1 > t_2$ e $v_1 = v_2$.
30. Um garoto de massa $m = 30$ kg parte do repouso do ponto **A** do escorregador perfilado na figura e desce, sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar, em direção ao ponto **C**:



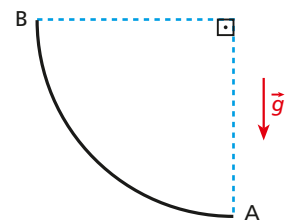
Sabendo que $H = 20$ m e que $|\vec{g}| = 10$ m/s², calcule:

- a) a energia cinética do garoto ao passar pelo ponto **B**;
 b) a intensidade de sua velocidade ao atingir o ponto **C**.
31. (Fuvest-SP) Numa montanha-russa, um carrinho com 300 kg de massa é abandonado do repouso de um ponto **A**, que está a 5,0 m de altura. Supondo que os atritos sejam desprezíveis e que $g = 10$ m/s², calcule:

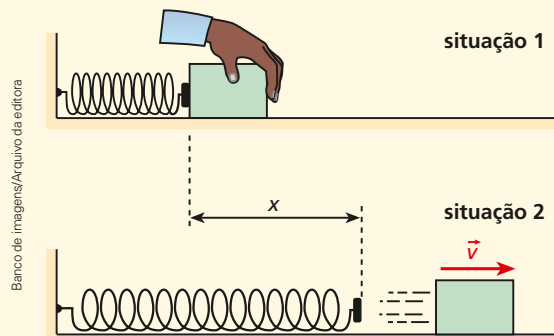


- a) o valor da velocidade do carrinho no ponto **B**;
 b) a energia cinética do carrinho no ponto **C**, que está a 4,0 m de altura.

32. (PUC-SP) A pista vertical representada é um quadrante de circunferência de 1,0 m de raio. Adotando $g = 10$ m/s² e considerando desprezíveis as forças dissipativas, um corpo lançado em **A** com velocidade de 6,0 m/s desliza pela pista, chegando ao ponto **B** com velocidade:
- a) 6,0 m/s. c) 3,0 m/s. e) nula.
 b) 4,0 m/s. d) 2,0 m/s.



33. No experimento realizado a seguir, uma mola ideal, de constante elástica K , é comprimida por um operador, lançando um bloco de massa m sobre uma mesa horizontal perfeitamente polida.



Na situação 1, a mola está comprimida de um comprimento x e o bloco está em repouso. Na situação 2, a mola está sem deformação e o bloco encontra-se em movimento, com velocidade de intensidade v . Desprezando a influência do ar, determine o valor de v .

Resolução:

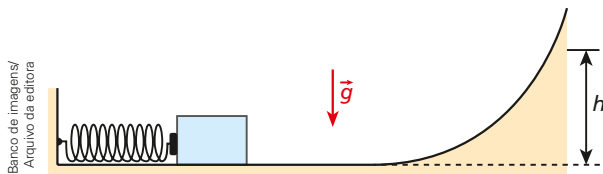
Como não há atritos nem influência do ar, o sistema é conservativo, devendo ocorrer conservação da energia mecânica total. Isso significa que a energia potencial elástica armazenada inicialmente na mola é totalmente transferida para o bloco, que a assimila em forma de energia cinética.

$$E_c = E_e \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{Kx^2}{2}$$

Logo:

$$v = \sqrt{\frac{K}{m}} x$$

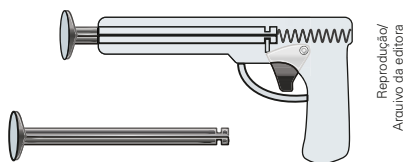
34. No arranjo experimental da figura, desprezam-se o atrito e o efeito do ar:



O bloco (massa de 4,0 kg), inicialmente em repouso, comprime a mola ideal (constante elástica de $3,6 \cdot 10^3 \text{ N/m}$) de 20 cm, estando apenas encostado nela. Largando-se a mola, esta distende-se impulsionando o bloco, que atinge a altura máxima h .

Adotando $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

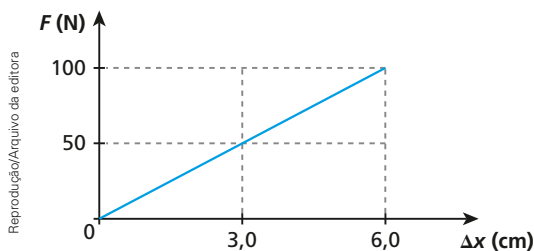
- o módulo da velocidade do bloco imediatamente após desligar-se da mola;
 - o valor da altura h .
35. (Vunesp) Um brinquedo de tiro ao alvo utiliza a energia armazenada em uma mola para lançar dardos.



Para carregar o lançador de dardos de brinquedo, um garoto aplica uma força progressivamente maior até que a mola encontre a trava.

Dados: massa de um dardo = 60 g;
módulo da aceleração da gravidade = 10 m/s^2 .

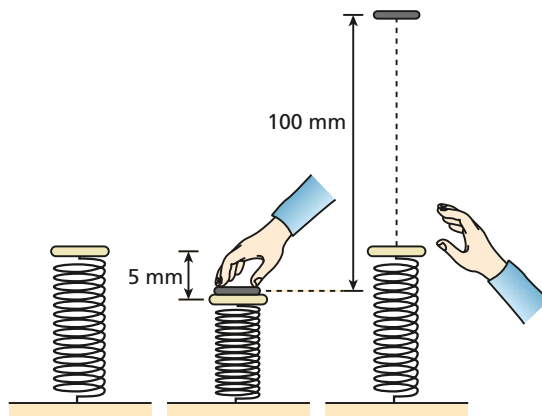
- O gráfico indica as forças envolvidas no processo de colocação do dardo no lançador até seu travamento, quando a mola é deformada em 6,0 cm.



Com base no gráfico, determine o trabalho realizado pelo garoto nessa ação.

- Disparando-se o brinquedo de forma que o dardo realize um movimento vertical para cima, determine a máxima altura alcançada por ele, em relação à sua posição inicial, admitindo-se que toda energia armazenada pela mola seja transferida para o dardo e que não haja dissipação de energia mecânica durante a sua ascensão.

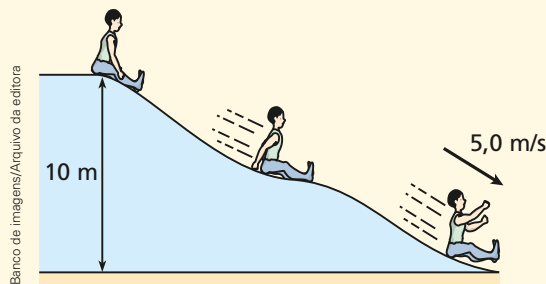
36. (UFJF-MG) Um garoto brinca com uma mola helicoidal. Ele coloca a mola em pé em uma mesa e apoia sobre ela um pequeno disco de plástico. Segurando a borda do disco, ele comprime a mola, contraindo-a de 5 mm. Após o garoto soltar os dedos, a mola projeta o disco 100 mm para cima (contados do ponto de lançamento, veja a figura).



Considerando-se a mola ideal e desprezando-se a resistência do ar, quanto subiria o disco se o garoto contraísse a mola de 10 mm?

- 400 mm
- 200 mm
- 100 mm
- 80 mm
- 90 mm

37. Rogério, de massa 40 kg, parte do repouso de uma altura de 10 m, desliza ao longo de um tobogã e atinge a parte mais baixa com velocidade de 5,0 m/s:



Admitindo a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 , calcule a energia mecânica degradada pelas forças dissipativas, durante a descida do garoto.

Resolução:

A energia mecânica inicial, associada a Rogério no alto do tobogã, era do tipo potencial de gravidade (referencial no solo).

$$E_{m_i} = E_p = mgh$$

$$E_{m_i} = 40 \cdot 10 \cdot 10 \therefore E_{m_i} = 4,0 \cdot 10^3 \text{ J}$$

A energia mecânica final com que o garoto atinge a parte mais baixa do tobogã é do tipo cinética:

$$E_{m_f} = E_c = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_{m_f} = \frac{40 \cdot (5,0)^2}{2} \therefore E_{m_f} = 5,0 \cdot 10^2 \text{ J}$$

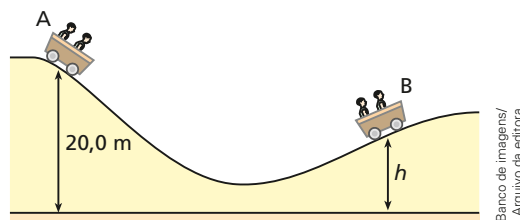
A energia mecânica degradada pelas forças dissipativas é E_d . Essa energia é calculada por:

$$E_d = E_{m_i} - E_{m_f}$$

$$E_d = 4,0 \cdot 10^3 \text{ J} - 5,0 \cdot 10^2 \text{ J}$$

$$E_d = 3,5 \cdot 10^3 \text{ J}$$

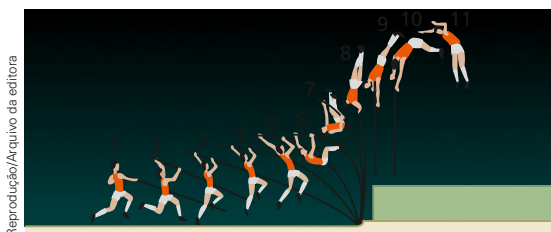
38. O carrinho de montanha-russa da figura seguinte pesa $6,50 \cdot 10^3 \text{ N}$ e está em repouso no ponto **A**, numa posição de equilíbrio instável. Em dado instante, começa a descer o trilho, indo atingir o ponto **B** com velocidade nula:



Sabendo que a energia térmica gerada pelo atrito de **A** até **B** equivale a $4,55 \cdot 10^4 \text{ J}$, determine o valor da altura h .

Exercícios Nível 2

39. (Vunesp) A figura ilustra a sequência de movimentos de um atleta durante o salto com vara.



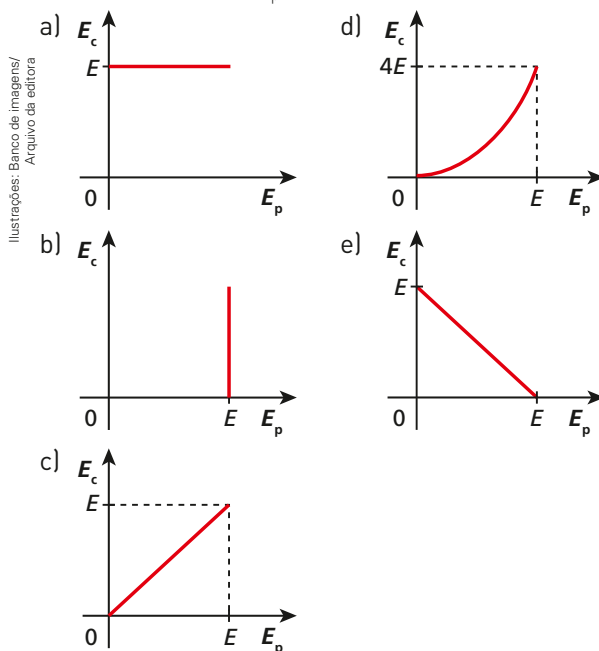
Na posição 6, indicada na figura, o sistema atleta-vara possui, em relação ao solo,

- apenas energia potencial gravitacional e energia potencial elástica.
 - apenas energia cinética e energia potencial gravitacional.
 - apenas energia potencial gravitacional.
 - energia cinética, energia potencial gravitacional e energia potencial elástica.
 - apenas energia potencial elástica e energia cinética.
40. Em uma montanha-russa, um carrinho de massa 60 kg tem sua energia potencial de gravidade variando em função de uma coordenada horizontal de posição x , conforme o gráfico a seguir:



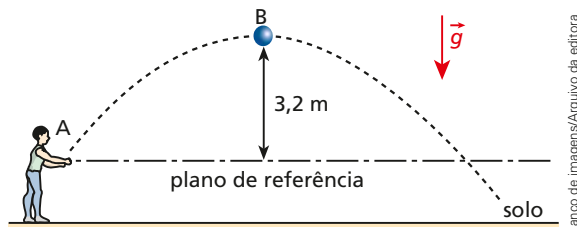
Admitindo que para $x_0 = 0$ a velocidade do carrinho é nula e supondo a inexistência de atritos:

- calcule a altura do carrinho em relação ao nível zero de referência, bem como a intensidade de sua velocidade para $x = 50 \text{ m}$ (adote nos cálculos $g = 10 \text{ m/s}^2$);
 - esboce o gráfico da energia cinética do carrinho em função de x .
41. Uma partícula movimenta-se sob a ação de um campo de forças conservativo, possuindo energia mecânica E . O gráfico que melhor traduz a energia cinética (E_c) da partícula em função de sua energia potencial (E_p) é:



42. (Vunesp) No final de dezembro de 2004, um *tsunami* no Oceano Índico chamou a atenção pelo seu poder de destruição. Um *tsunami* é uma onda que se forma no oceano, geralmente criada por abalos sísmicos, atividades vulcânicas ou pela queda de meteoritos. Este foi criado por uma falha geológica reta, muito comprida, e gerou ondas planas que, em alto-mar, propagaram-se com comprimentos de onda muito longos, amplitudes pequenas se comparadas com os comprimentos de onda, mas com altíssimas velocidades. Uma onda desse tipo transporta grande quantidade de energia, que se distribui em um longo comprimento de onda e, por isso, não representa perigo em alto-mar. No entanto, ao chegar à costa, onde a profundidade do oceano é pequena, a velocidade da onda diminui. Como a energia transportada é praticamente conservada, a amplitude da onda aumenta, mostrando assim o seu poder devastador. Considere que o módulo da velocidade da onda possa ser obtido pela relação $v = \sqrt{hg}$, em que $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ e h são, respectivamente, o módulo da aceleração da gravidade e a profundidade no local de propagação. A energia da onda pode ser estimada pela relação $E = kA^2$, em que k é uma constante de proporcionalidade e A é a amplitude da onda. Se o *tsunami* for gerado em um local com 6250 m de profundidade e com amplitude de 2,0 m, quando chegar à região costeira, com 10,0 m de profundidade, sua amplitude será
- a) 14,0 m c) 10,0 m e) 6,0 m
b) 12,0 m d) 8,0 m

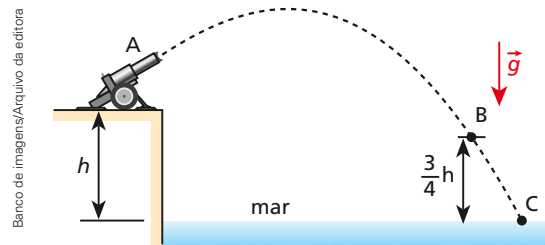
43. Um jogador de voleibol, ao dar um saque, comunica à bola uma velocidade inicial de 10 m/s. A bola, cuja massa é de 400 g, passa a se mover sob a ação exclusiva do campo gravitacional ($|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$), descrevendo a trajetória indicada na figura:



Calcule:

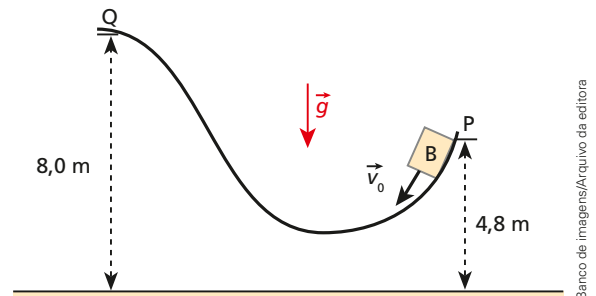
- a) a energia mecânica da bola no ponto **A** em relação ao plano de referência indicado;
b) o módulo da velocidade da bola ao passar pelo ponto **B** (mais alto da trajetória).

44. Do ponto **A**, situado no alto de uma plataforma de altura h , um canhão de dimensões desprezíveis dispara um projétil que, depois de descrever a trajetória indicada na figura, cai no mar (ponto **C**):



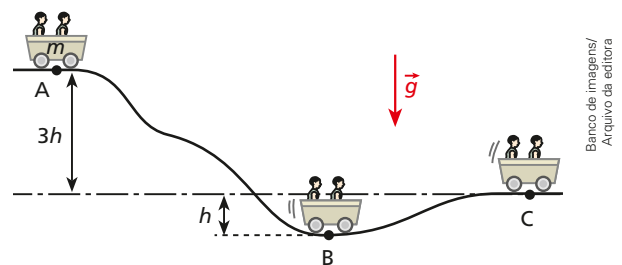
Sendo g o valor da aceleração da gravidade e v_0 o módulo da velocidade de lançamento do projétil, calcule o módulo de sua velocidade nos pontos **B** e **C**.

45. Um pequeno bloco **B**, lançado do ponto **P** com velocidade de intensidade v_0 , desliza sem atrito e sem sofrer influência do ar sobre a superfície **PQ**, contida em um plano vertical.



Sabendo que **B** inverte o sentido do movimento no ponto **Q** e que $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$, calcule o valor de v_0 .

46. Um carrinho de dimensões desprezíveis, com massa igual a m , parte do repouso no ponto **A** e percorre o trilho **ABC** da figura, contido em um plano vertical, sem sofrer a ação de forças dissipativas:



Supõe-se conhecida a altura h e adota-se para a aceleração da gravidade o valor g . Considerando como plano horizontal de referência aquele que passa pelo ponto **C**, determine:

- a) a energia potencial de gravidade do carrinho no ponto **B**;
b) a relação v_B/v_C entre os módulos da velocidade do carrinho nos pontos **B** e **C**.

47. (FGV-SP) Os Jogos Olímpicos recém-realizados no Rio de Janeiro promoveram uma verdadeira festa esportiva, acompanhada pelo mundo inteiro. O salto em altura foi uma das modalidades de atletismo que mais chamou a atenção, porque o recorde mundial está com o atleta cubano Javier Sotomayor desde 1993, quando, em Salamanca, ele atingiu a altura de 2,45 m, marca que ninguém, nem ele mesmo, em competições posteriores, conseguiria superar. A foto a seguir mostra o atleta em pleno salto.

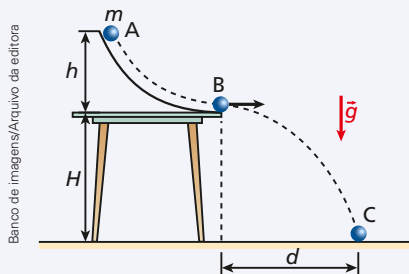


Reprodução/FGV, 2017

Considere que, antes do salto, o centro de massa desse atleta estava a 1,0 m do solo; no ponto mais alto do salto, seu corpo estava totalmente na horizontal e ali sua velocidade tinha módulo igual a $2\sqrt{5}$ m/s; a aceleração da gravidade tem módulo igual a 10 m/s^2 ; e não houve interferências passivas. Para atingir a altura recorde, ele deve ter partido do solo com uma velocidade inicial, com módulo, em m/s, igual a

a) 7,0. b) 6,8. c) 6,6. d) 6,4. e) 6,2.

48. Na montagem experimental esquematizada **ER** na figura, o trilho **AB** é perfeitamente liso. No local, reina o vácuo e a aceleração da gravidade tem intensidade g .



Uma bolinha de massa m , abandonada do repouso no ponto **A**, desce o trilho e projeta-se horizontalmente no ponto **B**, atingindo o solo no ponto **C**. Supondo conhecidas as alturas h e H , calcule a distância d entre o pé da vertical baixada do ponto **B** e o ponto **C**.

Resolução:

- I. Cálculo de v_B :

Sistema conservativo: $E_{m_B} = E_{m_A}$

$$\text{PHR em B: } \frac{mv_B^2}{2} = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

- II. Cálculo de t_{BC} :

Na vertical, o movimento da bolinha de **B** até **C** é uniformemente variado, logo:

$$H = \underbrace{v_{0y} t_{BC}}_{\text{parcela nula}} + \frac{g}{2} t_{BC}^2 \Rightarrow t_{BC} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

- III. Cálculo de d :

Na horizontal, o movimento da bolinha de **B** até **C** é uniforme, logo:

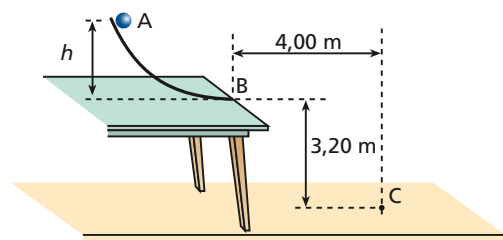
$$d = v_B t_{BC} \Rightarrow d = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$d = 2\sqrt{hH}$$

Nota:

- d independe de m e de g .

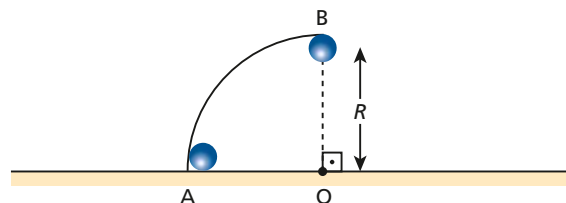
49. (UPM-SP) Uma bolinha é abandonada do ponto **A** do trilho liso **AB** e atinge o solo no ponto **C**. Supondo que a velocidade da bolinha no ponto **B** seja horizontal, a altura h vale:



Reprodução/Arquivo da editora

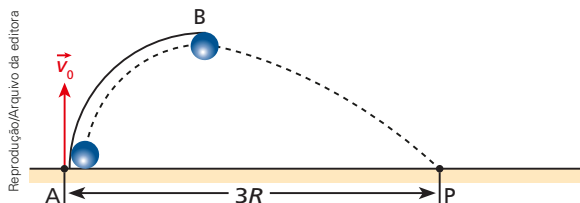
- a) 1,25 m c) 2,00 m e) 2,50 m
b) 1,75 m d) 2,25 m

50. (UFRJ) Um trilho em forma de arco circular, contido em um plano vertical, está fixado em um ponto **A** de um plano horizontal. O centro do arco está em um ponto **O** desse mesmo plano. O arco é de 90° e tem raio R , como ilustra a figura.



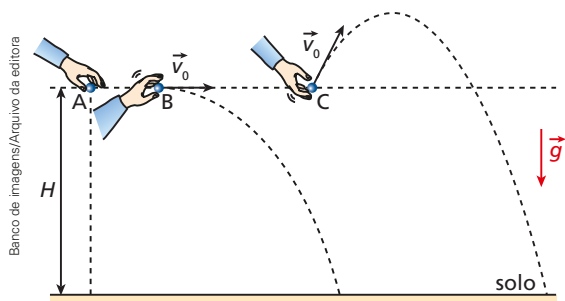
Reprodução/Arquivo da editora

Um pequeno objeto é lançado para cima, verticalmente, a partir da base **A** do trilho e desliza apoiado internamente a ele, sem atrito, até o ponto **B**, onde escapa horizontalmente, caindo no ponto **P** do plano horizontal onde está fixado o trilho. A distância do ponto **P** ao ponto **A** é igual a $3R$.



Calcule o módulo da velocidade inicial \vec{v}_0 com que o corpo foi lançado, em função do raio R e do módulo da aceleração da gravidade g .

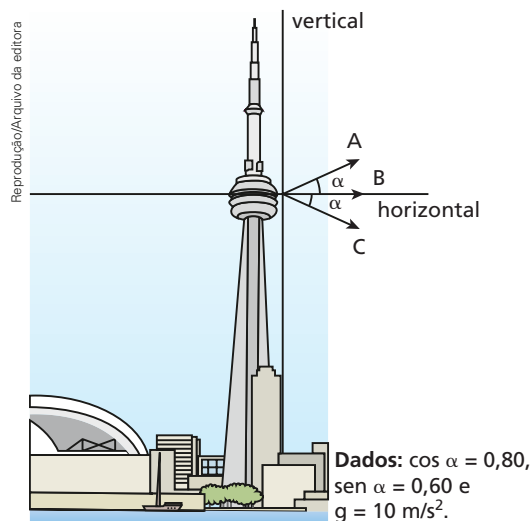
51. Três pequenos pedaços de giz, **A**, **B** e **C**, vão se movimentar no interior de determinada sala de aula a partir de uma mesma altura H sob a ação exclusiva da gravidade. O pedaço **A** será abandonado do repouso para despencar verticalmente e os pedaços **B** e **C** serão lançados com velocidades de mesma intensidade v_0 para realizarem voos balísticos, em trajetórias parabólicas. A velocidade inicial de **B** será horizontal, enquanto a de **C** será oblíqua e dirigida para cima, como representa a figura.



Representando-se respectivamente por T_A , T_B e T_C os tempos gastos por **A**, **B** e **C** em seus movimentos até o solo e por v_A , v_B e v_C as correspondentes intensidades das velocidades de impacto desses três pedaços de giz contra o chão, pede-se comparar:

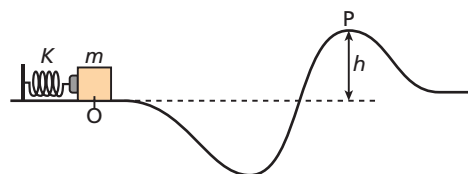
- T_A , T_B e T_C ;
 - v_A , v_B e v_C .
52. [OBF] A CN Tower de Toronto, Canadá, tem altitude máxima de 1815 pés (553,33 m), um dos maiores edifícios do mundo. A 315 metros de altitude, os turistas têm acesso ao andar de observação.

A partir desse andar, objetos de massa $m = 0,40$ kg são lançados com velocidades de mesmo módulo $v_0 = 10$ m/s, segundo direções **A**, **B** e **C**, conforme ilustra a figura.



Considerando-se o solo como altitude zero e a resistência do ar desprezível, pode-se afirmar:

- Nas três situações, o tempo de queda do objeto é o mesmo.
 - O objeto atinge o solo com mais energia cinética quando lançado conforme a situação **C**.
 - Os três objetos atingem o solo num ponto cuja distância em relação à vertical que passa pelo ponto de lançamento é de 82,7 m (alcance horizontal).
 - Nas três situações, o módulo da velocidade de impacto do objeto com o solo vale 288 km/h.
 - Os três objetos atingem o solo com a mesma velocidade vetorial final.
53. [OBF] Um bloco de massa $m = 0,60$ kg, sobre um trilho de atrito desprezível, comprime uma mola de constante elástica $K = 2,0 \cdot 10^3$ N/m, conforme a figura abaixo.

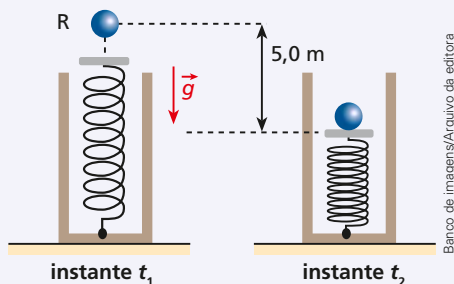


Considere que a energia potencial gravitacional seja zero na linha tracejada. O bloco, ao ser liberado, passa pelo ponto **P** ($h = 0,60$ m), onde 75% de sua energia mecânica é cinética. Adote $g = 10,0$ m/s² e despreze o efeito do ar.

A compressão x da mola foi de:

- 9,0 cm.
- 12,0 cm.
- 15,0 cm.
- 18,0 cm.
- 21,0 cm.

54. Na figura seguinte, uma esfera de massa $m = 5,0 \text{ kg}$ é abandonada do ponto **R** no instante t_1 , caindo livremente e colidindo inelasticamente com o aparador, que está ligado a uma mola de constante elástica igual a $2,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}$. As massas da mola e do aparador são desprezíveis, como também o são todas as dissipações de energia mecânica.

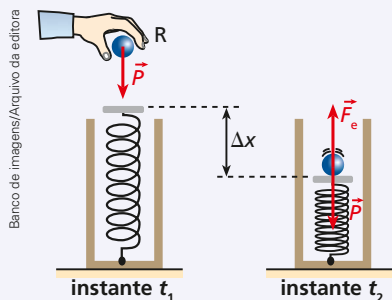


Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e supondo que no instante t_2 a mola está sob compressão máxima, calcule:

- a compressão da mola quando a esfera atinge sua máxima velocidade;
- a compressão da mola no instante t_2 .

Resolução:

a) Durante a queda livre, o movimento da esfera é uniformemente acelerado pela ação do peso constante \vec{P} . Após a colisão inelástica com o aparador, entretanto, além do peso \vec{P} , passa a agir na esfera a força elástica \vec{F}_e exercida pela mola, que, pela Lei de Hooke, tem intensidade proporcional à deformação Δx . Assim, logo após a colisão, como a deformação da mola ainda é pequena, o mesmo ocorre com a intensidade de \vec{F}_e , havendo predominância de \vec{P} . Isso faz com que o movimento continue acelerado (não uniformemente). A velocidade da esfera tem **intensidade máxima** no instante em que a força elástica equilibra o peso.



Na posição em que a velocidade é máxima:

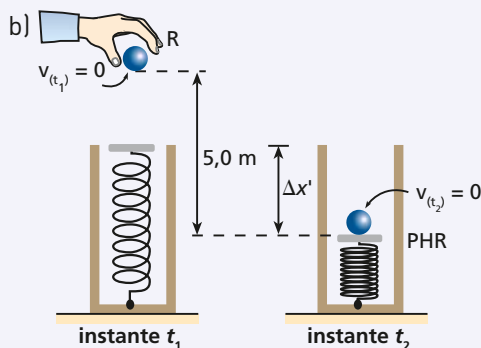
$$|\vec{F}_e| = |\vec{P}|$$

$$K\Delta x = mg$$

$$2,0 \cdot 10^3 \cdot \Delta x = 5,0 \cdot 10$$

$$\Delta x = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2,5 \text{ cm}$$

Da posição de máxima velocidade para baixo, a esfera realiza um movimento retardado (não uniformemente) até parar (instante t_2).



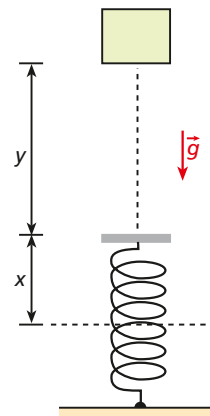
Adotando o nível do aparador na situação da mola sob máxima compressão como referência e observando que o sistema é conservativo, podemos dizer que a energia potencial elástica acumulada na mola no instante t_2 é igual à energia potencial de gravidade da esfera no instante t_1 .

$$E_{e(t_2)} = E_{p(t_1)} \Rightarrow \frac{K(\Delta x')^2}{2} = mgh$$

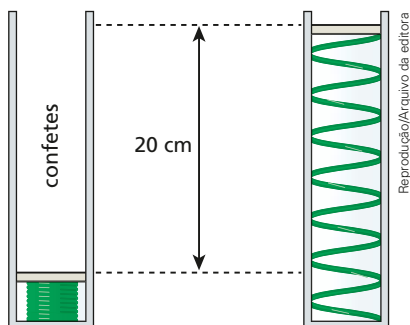
$$\frac{2,0 \cdot 10^3 (\Delta x')^2}{2} = 5,0 \cdot 10 \cdot 5,0$$

$$\Delta x' = 5,0 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

55. Um corpo de massa $1,0 \text{ kg}$ cai livremente, a partir do repouso, da altura $y = 6,0 \text{ m}$ sobre uma mola de massa desprezível e eixo vertical, de constante elástica igual a $1,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$. Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando todas as dissipações de energia mecânica, calcule a máxima deformação x da mola.



56. (FGV-SP) Em festas de aniversário, um dispositivo bastante simples arremessa confetes. A engenhoca é constituída essencialmente por um tubo de papelão e uma mola helicoidal comprimida. No interior do tubo, estão acondicionados os confetes. Uma pequena torção na base plástica do tubo destrava a mola que, em seu processo de relaxamento, empurra, por 20 cm, os confetes para fora do dispositivo.

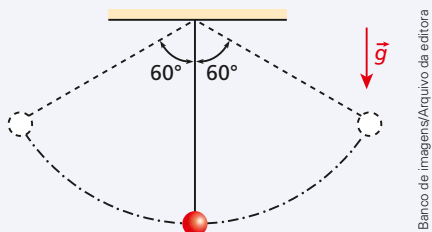


Ao serem lançados com o tubo na posição vertical, os confetes atingem no máximo 4,0 metros de altura, 20% do que conseguiriam se não houvesse a resistência do ar. Considerando-se que a porção de confetes a ser arremessada tem massa total de 10 g e que a aceleração da gravidade tem módulo igual a 10 m/s^2 , o valor da constante elástica da mola utilizada é, aproximadamente, em N/m,

a) 10 b) 20 c) 40 d) 50 e) 100

57. (Unicamp-SP) *Bungee-jump* é um esporte radical, muito conhecido hoje em dia, em que uma pessoa salta de uma grande altura, presa a um cabo elástico. Considere o salto de uma pessoa de 80 kg. No instante em que a força elástica do cabo vai começar a agir, o módulo da velocidade da pessoa é de 20 m/s. O cabo adquire o dobro de seu comprimento natural quando a pessoa atinge o ponto mais baixo de sua trajetória. Para resolver as questões abaixo, despreze a resistência do ar e considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- a) Calcule o comprimento normal do cabo.
b) Determine a constante elástica do cabo.

58. O pêndulo da figura oscila para ambos os lados, formando um ângulo máximo de 60° com a vertical.

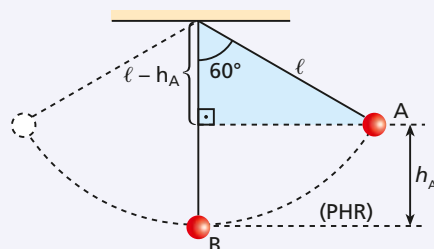


O comprimento do fio é de 90 cm e, no local, o módulo da aceleração da gravidade vale 10 m/s^2 . Supondo condições ideais, determine:

- a) o módulo da velocidade da esfera no ponto mais baixo de sua trajetória;
b) a intensidade da força que traciona o fio quando este se encontra na vertical (adotar, para a massa da esfera, o valor 50 g).

Resolução:

Vamos analisar, inicialmente, os aspectos geométricos do problema:



Considerando o triângulo retângulo destacado na figura, temos:

$$\cos 60^\circ = \frac{\ell - h_A}{\ell} \Rightarrow \frac{1}{2} \ell = \ell - h_A$$

$$h_A = \frac{1}{2} \ell = \frac{90 \text{ cm}}{2} \Rightarrow \boxed{h_A = 45 \text{ cm}}$$

- a) Como a única força que realiza trabalho é a da gravidade, o sistema é conservativo, permitindo-nos aplicar o Princípio de Conservação da Energia Mecânica:

$$E_{m_B} = E_{m_A}$$

$$E_{c_B} + E_{p_B} = E_{c_A} + E_{p_A}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} + mgh_B = \frac{mv_A^2}{2} + mgh_A$$

Sendo $h_B = 0$ e $v_A = 0$, calculamos v_B :

$$v_B = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,45}$$

$$\boxed{v_B = 3,0 \text{ m/s}}$$

- b) No ponto **B**, agem na esfera seu peso (\vec{P}) e a força aplicada pelo fio (\vec{T}):

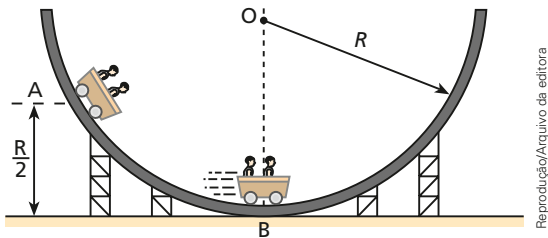
A resultante entre \vec{P} e \vec{T} deve ser

centrípeta. Então, temos:

$$T - P = F_{c_{PB}} \Rightarrow T = m \left(\frac{v_B^2}{\ell} + g \right)$$

$$T = 50 \cdot 10^{-3} \left(\frac{3,0^2}{0,90} + 10 \right) \therefore \boxed{T = 1,0 \text{ N}}$$

59. (UFMG) A figura mostra um trecho de uma montanha-russa de formato circular de raio R . Um carro de massa $M = 200$ kg parte do repouso de uma altura $\frac{R}{2}$ (ponto **A**).

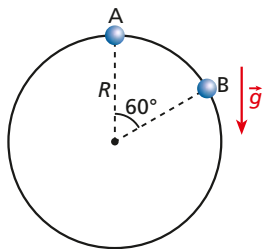


Reprodução/Arquivo da editora

Considere o instante em que o carro passa pelo ponto mais baixo da trajetória (ponto **B**). Despreze as forças de atrito e use $g = 10$ m/s².

- Faça uma figura representando as forças que atuam sobre o carro nesse instante.
- Calcule a intensidade da força que a pista faz sobre ele nesse instante.

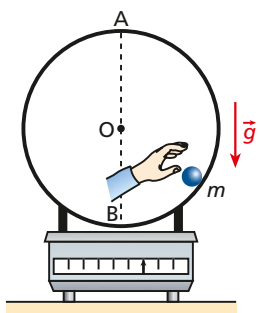
60. (UFPE) Uma pequena conta de vidro de massa igual a 10 g desliza sem atrito ao longo de um arame circular de raio $R = 1,0$ m, como indicado na figura.



Reprodução/Arquivo da editora

Se a conta partiu do repouso na posição **A**, determine o valor de sua energia cinética ao passar pelo ponto **B**. O arame está posicionado verticalmente em um local em que $|\vec{g}| = 10$ m/s².

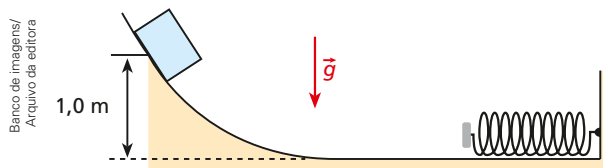
61. Considere a situação esquematizada na figura em que um aro circular de raio $R = 50$ cm e massa $M = 3,0$ kg, disposto verticalmente, é apoiado sobre uma balança graduada em newtons. Uma pequena esfera de massa $m = 200$ g será lançada por um operador de modo a percorrer a parte interna do aro, sem perder o contato com a trajetória e sem sofrer a ação de forças de atrito. No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $g = 10$ m/s². Supondo que nos instantes em que a esfera passa no ponto **A**, o mais alto do aro, a balança indique zero, determine:



Banco de imagens/Arquivo da editora

- a intensidade da velocidade da esfera no ponto **B**, o mais baixo do aro;
- a indicação da balança nos instantes da passagem da esfera no ponto **B**.

62. No esquema da figura, o bloco tem massa 3,0 kg e encontra-se inicialmente em repouso num ponto da rampa, situado à altura de 1,0 m:



Uma vez abandonado, o bloco desce, atingindo a mola de constante elástica igual a $1,0 \cdot 10^3$ N/m, que sofre uma compressão máxima de 20 cm. Adotando $|\vec{g}| = 10$ m/s², calcule a energia mecânica dissipada no processo.

63. O assento ejetável que equipa a maioria dos caças militares modernos é um dispositivo de segurança que, em caso de desastre iminente, lança o piloto para cima e este deixa o cockpit da aeronave em alta velocidade. Em seguida, já distante do avião, o piloto desce rumo ao solo, fazendo uso de um paraquedas. O assento ejetável, uma vez acionado, é disparado com o auxílio de catapultas mecânicas ou sistemas explosivos comandados por foguetes.



Aero Archive/Alamy/Fotostreema

Consideremos a situação hipotética de um caça avariado em voo paralelo à superfície terrestre, com velocidade de intensidade igual a 648 km/h, a uma altitude de 118,75 m em relação ao solo horizontal. Percebendo o inevitável colapso da aeronave, o piloto aciona o assento ejetável, cujo sistema propulsor deverá ser assimilado a uma mola ideal de eixo vertical, constante elástica $K = 2,7 \cdot 10^6$ N/m, comprimida inicialmente de $x = 50$ cm. A massa do piloto juntamente com seu assento é $M = 120$ kg e o conjunto é disparado verticalmente para cima em relação ao caça. No local, $g = 10$ m/s². Sabendo-se que o piloto só aciona seu paraquedas depois de iniciado o movimento de descida, adotando-se um referencial fixo no solo e ignorando-se nos cálculos a resistência do ar, pede-se determinar:

- a energia cinética E do piloto juntamente com seu assento ao deixar a aeronave;
- a altura máxima H atingida pelo conjunto.



Wolfgang Pauli ganhou o Prêmio Nobel em 1945 pela formulação do seu Princípio da Exclusão.

Salvo pelo neutrino

A água tem energia potencial de gravidade convertida em energia cinética quando despenca do topo de uma cachoeira. Há também nessa queda produção de energias térmica e acústica, outras formas desse ente físico. Se contabilizarmos, no entanto, a energia final do sistema, que inclui a água e o ambiente, veremos que o total obtido coincidirá com a energia mecânica inicial do líquido, no começo de sua precipitação. Esse e outros contextos compõem um amplo cenário que torna plausível considerarmos a manutenção da quantidade total da energia de um sistema amplo em uma transformação qualquer.

A conservação da energia, talvez a mais abrangente e importante concepção da Física, foi colocada na berlinda nas primeiras décadas do século XX. Isso aconteceu por ocasião dos estudos preliminares do decaimento β , um fenômeno atômico muito em voga na época.

O salvador do **Princípio de Conservação da Energia**, por assim dizer, foi o físico austríaco Wolfgang Pauli (1900-1958), que explicou o decaimento β . O físico italiano Enrico Fermi (1901-1954) corroborou as ideias de Pauli e chamou a misteriosa partícula de **neutrino**.

A hipótese de neutrino

[...] Durante a década de 1930, um dos grandes problemas da Física Nuclear era explicar o decaimento β . Nesse tipo de processo, um núcleo atômico instável pode transformar-se em outro núcleo pela emissão de uma partícula β (um elétron ou um pósitron). Hoje, há duas formas de explicá-lo: no caso da emissão de elétrons, um nêutron (**n**) do núcleo se transforma em um próton (**p**), um elétron (**e⁻**) e um neutrino (**$\bar{\nu}$**); na emissão de pósitrons, um próton do núcleo se transforma em um nêutron, um pósitron (**e⁺**) e um antineutrino.

Essas transformações são representadas, respectivamente, por:



Nos anos 1930, no entanto, os neutrinos ainda não eram conhecidos. Em um experimento realizado em 1911, a física Lise Meitner (1878-1968) e o químico Otto Hahn (1879-1968) mostraram que a energia do elétron emitido não era igual à diferença entre a energia final e inicial do núcleo, indicando que parte da energia era carregada por alguma partícula ainda não detectada. Medidas do *spin* do núcleo e dos elétrons emitidos indicavam, por outro lado, uma aparente violação da conservação total do *spin* do sistema.

Por isso, vários físicos, entre eles Bohr, chegaram a pensar em abandonar o **Princípio de Conservação da Energia**. Até que, em 1931, Pauli propôs uma alternativa menos drástica, supondo a existência de uma partícula com massa extremamente pequena e com *spin* 1/2, emitida junto com o elétron no processo de decaimento. Para distinguir tal partícula do nêutron, Fermi batizou-a de neutrino, usando um diminutivo de nêutron em italiano. Isso estava de acordo com a conservação da energia e do *spin*, e a razão de o neutrino não ser observado estaria na sua fraca interação com a matéria.

Em razão dessa pequena interação, os neutrinos só foram detectados quase 25 anos após a proposição teórica de Pauli. Isso ocorreu em 1956, em um experimento com reatores nucleares feito pelos físicos americanos Clyde Cowan e Frederick Reines, que deu a Reines o Prêmio Nobel de Física de 1995. [...]

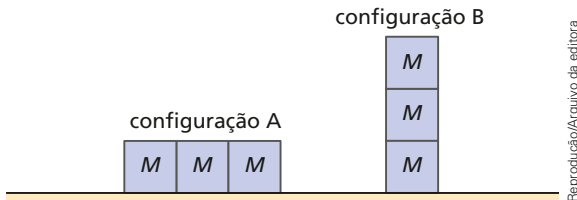
SILVA, Cibelle Celestino. Wolfgang Pauli. *Scientific American Brasil*, Gênios da Ciência, São Paulo, ed. 13, p. 82-89, dez. 2006.

Compreensão, pesquisa e debate

1. Pense nos diversos intercâmbios energéticos existentes na natureza. Em sua opinião, haveria algum processo em que não se verifica o **Princípio de Conservação da Energia**? Discuta o assunto com seus colegas e professor.
2. Procure saber mais sobre o decaimento β e outros processos radioativos. Além disso, pesquise também cientistas envolvidos nesses estudos, entre eles, Marie Curie (1867-1934).

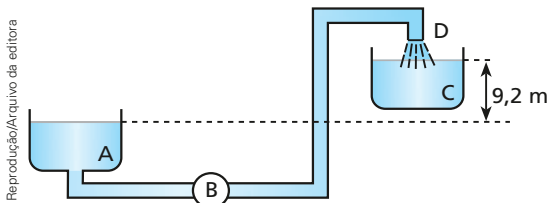
Exercícios Nível 3

64. (UFPE) Uma criança, que está brincando com blocos cúbicos idênticos, constrói as configurações compostas de três blocos mostradas na figura. Cada bloco tem aresta $a = 10 \text{ cm}$ e massa $M = 100 \text{ g}$. A criança pode até perceber intuitivamente que a configuração **A** é mais estável do que a **B**, mas não consegue quantificar fisicamente essa estabilidade. Para tal, é necessário determinar a diferença de energia potencial gravitacional $\Delta U = U_B - U_A$ entre as duas configurações. Qual é o valor de ΔU ? Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Reprodução/Arquivo da editora

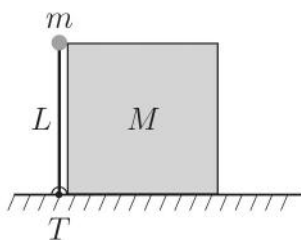
65. (UPM-SP) Uma bomba (**B**) recalca água, à taxa de $2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ por segundo, de um depósito (**A**) para uma caixa (**C**) no topo de uma casa. A altura de recalque é de $9,2 \text{ m}$ e a velocidade da água na extremidade do tubo de descarga (**D**) é de $4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



Reprodução/Arquivo da editora

Considere $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e a massa específica da água igual a $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Despreze as dissipações de energia. Qual a potência da bomba em kW?

66. (ITA-SP) Uma haste vertical de comprimento L , sem peso, é presa a uma articulação **T** e dispõe em sua extremidade de uma pequena massa m que, conforme a figura, toca levemente a quina de um bloco de massa M . Após uma pequena perturbação, o sistema movimenta-se para a direita. A massa m perde o contato com M no momento em que a haste perfaz um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ rad com a horizontal.



Reprodução/ITA, 2018.

Desconsiderando atritos, assinale a velocidade final do bloco.

- a) $\sqrt{\frac{mgL}{M}}$ c) $\sqrt{\frac{mgL}{M + \frac{4m}{3}}}$ e) \sqrt{gL}
 b) $\sqrt{\frac{mgL}{M + 4m}}$ d) $\sqrt{\frac{2mgL}{M}}$

67. Um garoto amarra firmemente um pequeno objeto de massa m na extremidade de um fio ideal de comprimento L e faz com que o conjunto gire sucessivamente em um plano vertical. O objeto realiza dessa forma *loopings* circulares centrados na mão do garoto sem sofrer ação significativa da resistência do ar. Veja a ilustração abaixo.



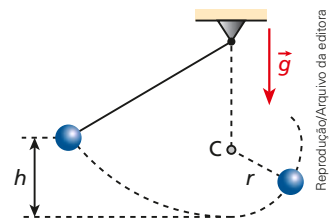
Banco de Imagens/Arquivo da editora

Verifica-se que numa determinada volta, no ponto mais baixo da trajetória, a intensidade da força de tração no fio é o dobro daquela registrada no ponto mais alto.

Desprezando-se eventuais acréscimos de energia mecânica pela ação muscular do garoto sobre o fio e adotando-se para a aceleração da gravidade módulo igual a g , determine para o ponto mais baixo da trajetória e para o mais alto:

- a) a intensidade da velocidade do objeto. Responda em função de g e de L ;
 b) a intensidade da força de tração no fio. Responda em função de m e de g .

68. (UFTM-MG) A figura, fora de escala, mostra um pêndulo simples abandonado à altura h do ponto mais baixo da trajetória. Na vertical que

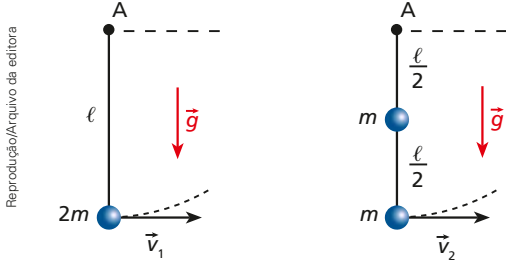


passa pelo ponto de sustentação, um pino faz o fio curvar-se e o pêndulo passa a descrever uma trajetória circular de raio r e centro **C**.

Reprodução/Arquivo da editora

O menor valor de h para que a esfera pendular descreva uma circunferência completa é igual a:
 a) $1,0r$. b) $1,5r$. c) $2,0r$. d) $2,5r$. e) $3,0r$.

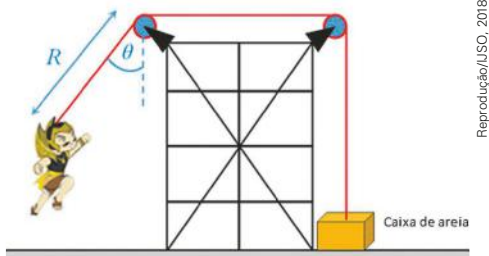
69. (ITA-SP) Uma haste rígida de peso desprezível e comprimento ℓ carrega uma massa $2m$ em sua extremidade. Outra haste, idêntica, suporta uma massa m em seu ponto médio e outra massa m em sua extremidade. As hastes podem girar ao redor do ponto fixo **A**, conforme as figuras.



Qual a velocidade horizontal mínima que deve ser comunicada às suas extremidades para que cada haste deflita até atingir a horizontal?

Considere conhecida a intensidade da aceleração da gravidade, g .

70. (IJSO) Você está projetando um aparato para suportar um ator de massa 65 kg que vai voar sobre o palco durante a performance de uma peça. Você conecta o ator a uma caixa de areia de 130 kg por meio de um cabo de aço de massa desprezível que pode deslizar sem atrito sobre duas polias, como mostrado na figura a seguir.



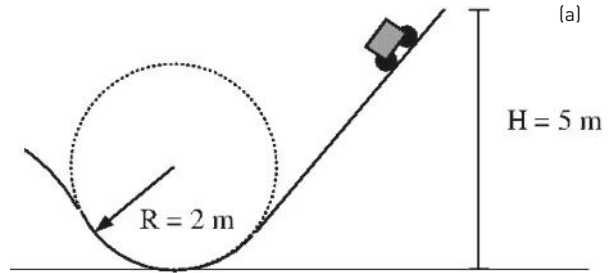
// Vista esquemática do aparato usado pelo ator durante o voo na performance da peça.

Você precisa de $3,0\text{ m}$ de cabo entre o ator e a polia mais próxima, de maneira que a polia possa ficar escondida atrás da cortina. Para que o aparato funcione, a caixa de areia nunca pode perder contato com o solo enquanto o ator balança acima do chão do palco. O ângulo inicial que o cabo do ator faz com a vertical é θ . Qual o máximo valor que θ pode assumir antes que a caixa de areia levante do solo? (Assuma que o ator pode ser considerado como um ponto material.)

- a) 30° b) 40° c) 60° d) 90°

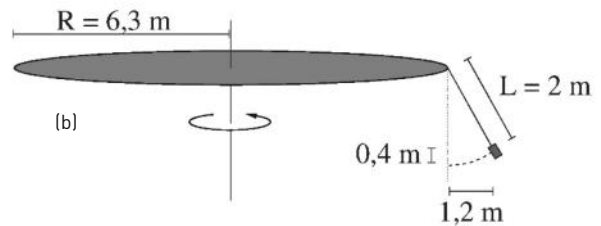
71. (Unicamp-SP) Os brinquedos de parques de diversões utilizam-se de princípios da Mecânica para criar movimentos aos quais não estamos habituados, gerando novas sensações. Por isso um parque de diversões é um ótimo local para ilustrar princípios básicos da Mecânica.

- a) Considere uma montanha-russa em que um carrinho desce por uma rampa de altura $H = 5\text{ m}$, e, ao final da rampa, passa por um trecho circular de raio $R = 2\text{ m}$, conforme mostra a figura (a) abaixo.



Calcule o módulo da aceleração no ponto mais baixo do circuito, considerando que o carrinho partiu do repouso.

- b) Outro brinquedo comum em parques de diversões é o chapéu mexicano, em que cadeiras são penduradas com correntes na borda de uma estrutura circular que gira com seu eixo de rotação perpendicular ao solo. Considere um chapéu mexicano com estrutura circular de raio $R = 6,3\text{ m}$ e correntes de comprimento $L = 2\text{ m}$. Ao girar, as cadeiras se elevam 40 cm , afastando-se $1,2\text{ m}$ do eixo de rotação, conforme mostra a figura (b) abaixo.

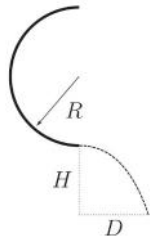


Calcule a velocidade angular de rotação do brinquedo.

Dado: $g = 10\text{ m/s}^2$.

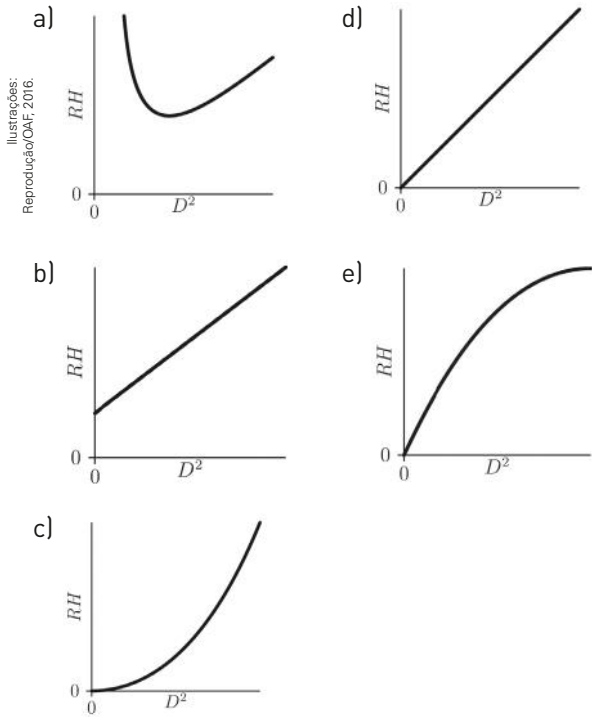
72. (Olimpiada Americana de Física) Um trilho semi-circular de raio R está posicionado verticalmente. Um pequeno anel é abandonado do repouso do topo do trilho e desliza sem atrito, sob ação da gravidade, até a extremidade inferior, quando então abandona o trilho horizontalmente a uma altura H acima do solo horizontal.

O anel atinge o solo percorrendo uma distância horizontal D .

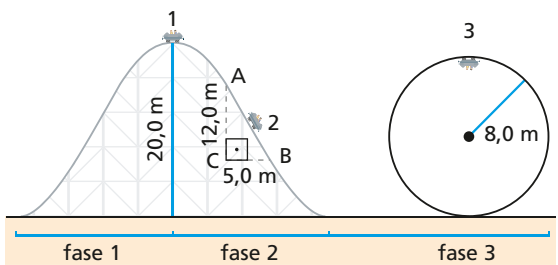


Reprodução/OAF, 2016.

Assinale o gráfico que representa corretamente o produto RH em função de D^2 .



73. (Fuvest-SP) Na montanha-russa esquematizada a seguir, um motor leva o carrinho até o ponto 1. Desse ponto, ele parte, saindo do repouso, rumo ao ponto 2, localizado em um trecho retilíneo AB . Adote $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

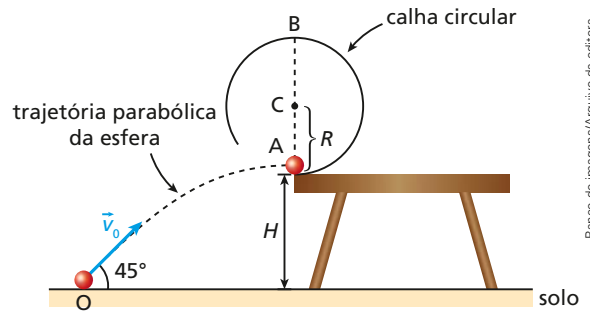


Reprodução/Arquivo da editora

Desprezando-se a resistência do ar e as forças de atrito, calcule:

- o módulo da aceleração do carrinho no ponto 2;
- a velocidade escalar do carrinho no ponto 3, dentro do *loop*.

74. Na situação esquematizada abaixo, uma pequena esfera é disparada do ponto O do solo com velocidade \vec{v}_0 , formando um ângulo $\theta = 45^\circ$ em relação à horizontal. No local, a influência do ar é desprezível e o campo gravitacional é uniforme. A esfera descreve, então, uma trajetória parabólica e no ponto A , com velocidade horizontal, ela penetra em uma calha circular de raio R , contida em um plano vertical e fixada sobre uma mesa de apoio, a uma altura H acima do solo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Desprezando todos os atritos e sabendo que, ao passar no ponto B , a esfera recebe da calha uma força normal de contato de intensidade igual à metade do seu peso, calcule a relação $\frac{H}{R}$.

75. (OBF) Um esquimó está no ponto mais alto do iglu semiesférico onde mora, como mostrado na figura abaixo. Ele desce ao longo da superfície do iglu de cima para baixo que tem um coeficiente de atrito cinético aproximadamente igual a zero e com velocidade inicial desprezível. Para um iglu de raio $3,75 \text{ m}$, encontre:



Reprodução/OBF, 2009.

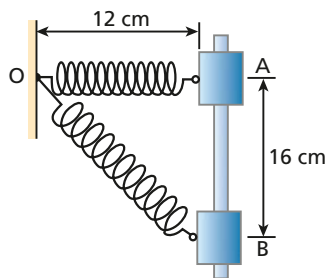
- a altura a partir do chão onde o esquimó perde contato com a superfície do iglu;
- a velocidade do esquimó no ponto onde ele perde contato com a superfície do iglu.

76. Um atleta de massa igual a $64,0 \text{ kg}$ prepara-se para realizar um salto a distância. Para isso, ele começa a correr numa pista horizontal, destacando-se do solo com uma velocidade oblíqua \vec{v}_0 que tem componente horizontal de intensidade $10,5 \text{ m/s}$.

Nesse instante, o centro de massa do atleta encontra-se a uma altura de 80,0 cm em relação ao solo. No local, a aceleração da gravidade tem intensidade $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ e a influência do ar é desprezível. Tendo-se verificado que o centro de massa do atleta sofreu uma elevação máxima de 45,0 cm durante o voo e que ao encerrar-se o salto este ponto termina praticamente ao nível do chão, determine:

- a energia cinética do atleta no instante em que se destaca do solo;
- o intervalo de tempo transcorrido durante o voo;
- a marca obtida pelo atleta em seu salto, isto é, a distância percorrida por ele durante o voo, paralelamente à pista.

77. Na figura, tem-se um cilindro de massa 5,0 kg, dotado de um furo, tal que, acoplado à barra vertical indicada, pode deslizar sem atrito ao longo dela.



Ligada ao cilindro, existe uma mola de constante elástica igual a $5,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$ e comprimento natural de 8,0 cm, cuja outra extremidade está fixada no ponto **O**. Inicialmente, o sistema encontra-se em repouso (posição **A**) quando o cilindro é largado, descendo pela barra e alongando a mola. Calcule o módulo da velocidade do cilindro depois de ter descido 16 cm (posição **B**). Adote nos cálculos $g = 10 \text{ m/s}^2$.

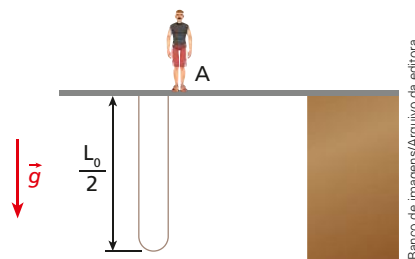
78. É a maior adrenalina!

O *bungee-jump* é um esporte radical que consiste de o praticante se deixar cair praticamente do repouso a partir de uma plataforma elevada preso a uma corda elástica. Equipamentos adequados e muito preparo técnico são indispensáveis nessa prática.



Admita que um atleta vá realizar um salto a partir do ponto **A**, indicado no esquema a seguir, preso a uma corda de comprimento natural $L_0 = 40 \text{ m}$ que obedece à Lei de Hooke. No local, a influência do ar pode ser desprezada, adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$ e,

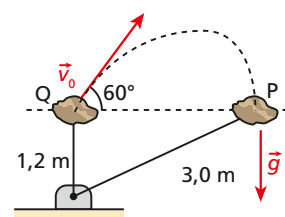
inicialmente, a corda está dobrada em duas metades, conforme aparece na ilustração.



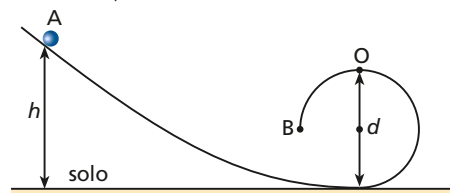
Sabendo-se que o atleta tem massa $M = 100 \text{ kg}$ e que a máxima distensão adquirida pela corda é igual a L_0 , pede-se determinar:

- o módulo da velocidade do atleta, v , em m/s , no instante em que a corda vai começar a esticar (adote $\sqrt{2} \cong 1,4$);
- a constante elástica da corda, K , em N/m ;
- a intensidade da aceleração do atleta, a , em m/s^2 , no instante em que a corda atinge sua máxima distensão;
- o módulo da máxima velocidade atingida pelo atleta, $v_{\text{máx}}$, em m/s .

79. Uma pedra **Q**, de massa igual a 2,0 kg, está presa a um fio elástico que possui constante elástica $K = 2,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$. A pedra é projetada com velocidade \vec{v}_Q de módulo 20 m/s , formando um ângulo de 60° com a horizontal. No instante do lançamento, o fio elástico estava esticado 0,20 m. Desprezando a influência do ar e considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule o módulo da velocidade da pedra, em m/s , no instante em que ela atinge a posição **P**.



80. Uma partícula, saindo do repouso do ponto **A**, percorre a guia representada no esquema, disposta em um plano vertical:

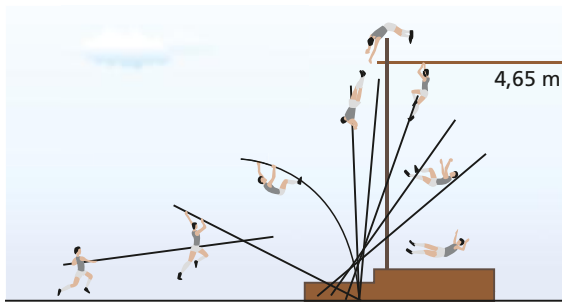


Sendo h a altura do ponto **A** em relação ao solo e d o diâmetro do arco de circunferência indicado, calcule o máximo valor admissível à relação $\frac{d}{h}$ para que a partícula consiga chegar ao ponto **B** sem perder o contato com a guia. Despreze os atritos e a resistência do ar.

Para raciocinar um pouco mais

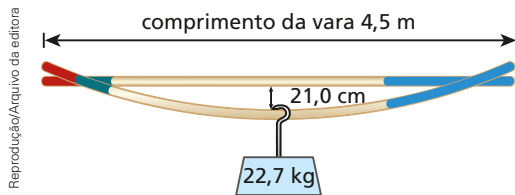
81. (UFG-GO) A saltadora brasileira Fabiana Murer terminou as Olimpíadas de Pequim em décimo lugar, após descobrir, no meio da competição, que o Comitê Organizador dos Jogos havia perdido uma de suas varas, a de flexibilidade 21. Fabiana Murer foi prejudicada porque teve de usar uma vara inapropriada para seu salto. A altura que Fabiana não conseguiu ultrapassar: 4,65 m.

Com a vara errada		
Flexibilidade		Saltos para os quais a vara é apropriada
A vara que foi perdida	21,0	4,55 m e 4,60 m 4,65 m e 4,70 m
A vara que Fabiana usou	20,5	4,75 m e 4,80 m



Reprodução/Arquivo da editora

Como se mede a flexibilidade?



Dizer que a vara tem flexibilidade 21,0 significa que, quando apoiada e submetida a um peso de 22,7 kgf em seu centro, ela sofrerá uma deformação de 21,0 cm.

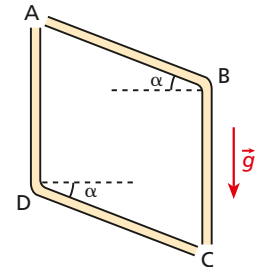
Fontes: Elson Miranda, treinador de Fabiana Murer, e Júlio Serrão, do Laboratório de Biomecânica da USP. (VEJA. São Paulo, p. 128, 27 ago. 2008. Adaptado.)

Com a técnica adequada, considere que, ao flexionar a vara, a atleta consiga um acréscimo de energia equivalente a 20% de sua energia cinética antes do salto. Na corrida para o salto, a atleta atinge uma velocidade de módulo 8,0 m/s e seu centro de massa se encontra a 80 cm do solo. Admita que, no ponto mais alto de sua trajetória, a velocidade da atleta é desprezível.

Nessas condições, desconsiderando-se a resistência do ar e adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, a altura máxima, em metros, que a atleta consegue saltar é:

- a) 3,84 c) 4,64 e) 4,80
b) 4,00 d) 4,70

82. Na figura, **ABC** e **ADC** são tubos contidos em um mesmo plano vertical. Os segmentos **AB**, **BC**, **AD** e **DC** têm todos o mesmo comprimento L , estando **AD** e **BC** posicionados verticalmente.

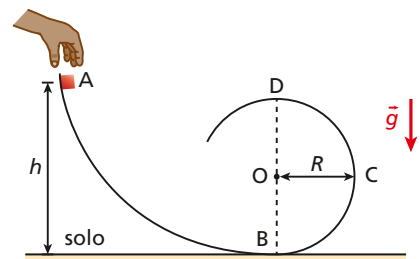


Banco de imagens/Arquivo da editora

Uma esfera I parte do repouso de **A**, percorre o tubo **ABC** e atinge **C** com velocidade de intensidade v_I , gastando um intervalo de tempo Δt_I . Uma outra esfera II também parte do repouso de **A**, percorre o tubo **ADC** e atinge **C** com velocidade de intensidade v_{II} , gastando um intervalo de tempo Δt_{II} . Despreze todos os atritos e as possíveis dissipações de energia mecânica nas colisões das esferas com as paredes internas dos tubos. Supondo conhecidos o ângulo α e a intensidade da aceleração da gravidade g , pede-se:

- a) calcular v_I e v_{II} ;
b) comparar Δt_I com Δt_{II} .

83. O trilho representado na figura está contido em um plano vertical, é perfeitamente liso e o raio do trecho circular **BCD** vale R . No local, a influência do ar é desprezível e a intensidade da aceleração da gravidade é g . Uma partícula de massa m vai partir do repouso do ponto **A** e deverá deslizar ao longo do trilho, sem perder o contato com ele.

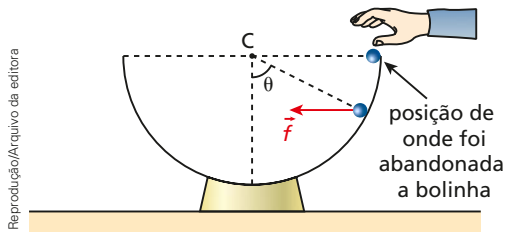


Banco de imagens/Arquivo da editora

Pede-se:

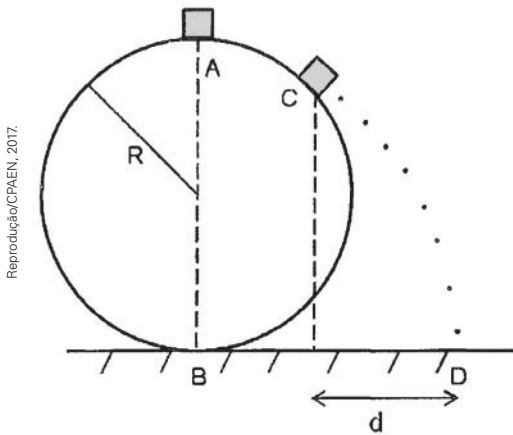
- a) determinar, em função de R , o desnível mínimo entre os pontos **A** e **D**;
b) esboçar o gráfico da intensidade da força de contato, F , trocada entre a partícula e o trilho no ponto **D**, em função da altura h do ponto **A** em relação ao solo.

84. (UFRJ) Uma bolinha de gude de dimensões desprezíveis é abandonada, a partir do repouso, na borda de um hemisfério oco e passa a deslizar, sem atrito, em seu interior.



Calcule o ângulo θ (expresso por uma função trigonométrica) entre o vetor-posição da bolinha em relação ao centro C e a vertical para o qual a força resultante \vec{F} sobre a bolinha é horizontal.

85. (CPAEN-RJ) Analise a figura abaixo.

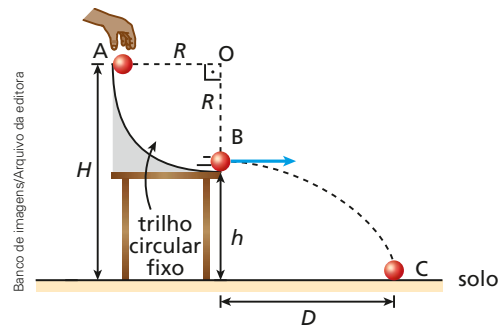


A figura acima mostra um pequeno bloco, inicialmente em repouso, no ponto A , correspondente ao topo de uma esfera perfeitamente lisa de raio $R = 135$ m. A esfera está presa ao chão no ponto B . O bloco começa a deslizar para baixo, sem atrito, com uma velocidade inicial tão pequena que pode ser desprezada, e ao chegar no ponto C o bloco perde contato com a esfera. Sabendo que a distância horizontal percorrida pelo bloco durante seu voo é $d = 102$ m, o tempo de voo do bloco, em segundos, ao cair do ponto C ao ponto D , vale

- a) 1,3 c) 9,2 e) 18,0
b) 5,1 d) 13,0

Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

86. No esquema a seguir, uma pequena bola é largada sem velocidade inicial do ponto A para percorrer um trilho em forma de um quarto de circunferência contido em um plano vertical até se projetar horizontalmente no ponto B . Todos os atritos são desprezíveis, bem como a resistência do ar.

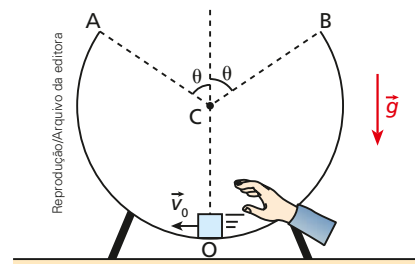


Sendo R o raio do trilho, H a altura do ponto A em relação ao solo, h a altura do ponto B em relação ao solo e admitindo-se uniforme o campo gravitacional local, pergunta-se:

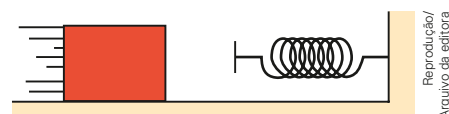
- a) Qual é o deslocamento horizontal, D , da bola em seu voo balístico de B até C em função de R e h ?
b) Mantendo-se H constante, qual é a relação entre R e h para que D seja máximo?
c) Qual é o valor máximo de D em função de R ?

87. (OBF) Considere um trilho envergado em forma de arco de circunferência com raio igual a R instalado verticalmente, como representa a figura. No local, a aceleração da gravidade tem módulo g e a resistência do ar é desprezível.

Supondo-se conhecido o ângulo θ , qual deve ser a intensidade da velocidade \vec{v}_0 com que se deve lançar um pequeno objeto do ponto O , o mais baixo do trilho, para que ele possa deslizar livremente saltando da extremidade A para a extremidade B , executando assim um movimento periódico?



88. (UFF-RJ) Um bloco de massa igual a $5,0$ kg, deslizando sobre uma mesa horizontal, com coeficientes de atrito cinético e estático iguais a $0,5$ e $0,6$, respectivamente, colide com uma mola de massa desprezível, com constante elástica igual a 250 N/m , inicialmente relaxada. O bloco atinge a mola com velocidade igual a $1,0 \text{ m/s}$.



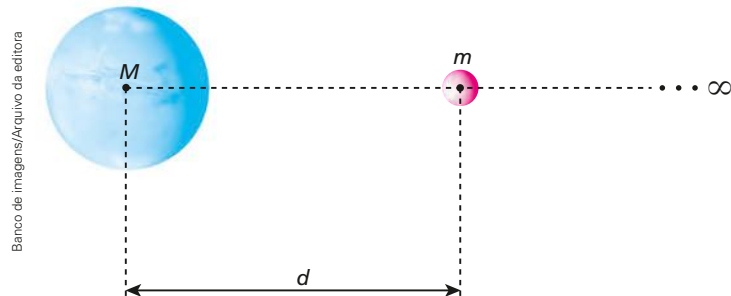
- a) Determine a deformação máxima da mola.
b) O bloco retorna? Justifique sua resposta.

Energia potencial gravitacional*

Conforme vimos no Tópico 4 (Gravitação), um astro, por ter massa, cria no espaço uma zona de influências sobre outras massas, denominada **campo gravitacional**, cuja intensidade é decrescente com a distância ao astro. Um corpo qualquer situado nesse campo é atraído gravitacionalmente, ficando sujeito a uma força caracterizada pela Lei de Newton. Essa é a concepção clássica da Gravitação.

Teoricamente, o campo gravitacional se estende ao infinito. Para grandes distâncias à superfície do astro, entretanto, a intensidade desse campo é tão pequena que seus efeitos são praticamente desprezíveis.

Considere um astro esférico e homogêneo, de massa M , isolado e estacionário no espaço, interagindo gravitacionalmente com uma partícula de massa m , situada a uma distância d do centro de massa do astro.



O sistema constituído pelo astro e pela partícula armazena uma modalidade de energia mecânica denominada **energia potencial gravitacional**. Trata-se de uma forma latente de energia, isto é, que está sempre prestes a se transformar em energia cinética.

Adotando-se um referencial no infinito (no suposto “fim” do campo gravitacional), pode-se demonstrar que a energia potencial gravitacional E_p associada a esse sistema é dada por:

$$E_p = -G \frac{Mm}{d}$$

em que G é a Constante da Gravitação.

Dizer que a energia potencial gravitacional do sistema vale $-G \frac{Mm}{d}$ significa que, para deslocar a partícula ao nível zero de energia potencial (infinito), é preciso realizar sobre ela um trabalho $+G \frac{Mm}{d}$.

Admitindo que o astro tenha raio R e que a partícula esteja sobre sua superfície, a energia potencial gravitacional do sistema fica expressa por:

$$E_p = -G \frac{Mm}{R}$$

* Quando tratamos da interação entre dois astros, preferimos usar a denominação energia potencial **gravitacional**.

Velocidade de escape

Admita que uma partícula de massa m seja lançada sucessivas vezes para cima, a partir da superfície de um astro esférico e homogêneo, de massa M e raio R , isolado e estacionário no espaço. Despreze as influências atmosféricas.

Os lançamentos são verticais (radiais ao astro) e realizados com velocidades de intensidades crescentes.

Inicialmente, a partícula sobe, atinge velocidade nula no ponto de altura máxima e volta ao solo, atraída gravitacionalmente pelo astro. Entretanto, haverá um lançamento em que a partícula subirá tanto que chegará ao "fim" do campo gravitacional (infinito). Ao chegar a esse ponto, ela apresentará velocidade nula e permanecerá em repouso, não mais retornando ao solo.

Diremos, então, que a partícula escapou da gravidade do astro e, nesse caso, chamaremos a velocidade de lançamento de **velocidade de escape** (v_e).

Para calcularmos v_e , consideremos os elementos da figura ao lado.

O sistema é conservativo, permitindo-nos aplicar o **Princípio de Conservação da Energia Mecânica**.

$$E_{m_A} = E_{m_B}$$

$$\frac{mv_e^2}{2} - G \frac{Mm}{R} = 0 \Rightarrow \frac{v_e^2}{2} = G \frac{M}{R}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Multiplicando e dividindo a fração contida no radical acima por R , teremos:

$$v_e = \sqrt{2 \frac{GM}{R^2} R} \quad (I)$$

Na Gravitação, vimos que a intensidade da aceleração da gravidade na superfície do astro (g_0) pode ser expressa por:

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$v_e = \sqrt{2g_0 R}$$

Se o astro for a Terra, teremos $g_0 \cong 9,81 \text{ m/s}^2$ e $R \cong 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$. Calculemos, então, v_e para a Terra:

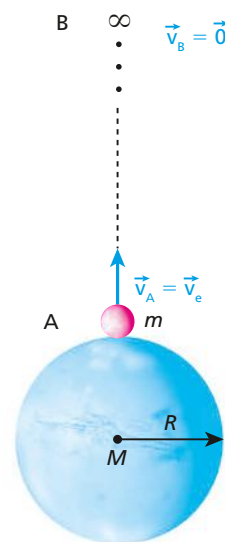
$$v_e \cong \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6,38 \cdot 10^6}$$

$$v_e \cong 11,2 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 11,2 \text{ km/s}$$

É claro que a partícula, se for lançada com velocidade maior que a de escape, chegará ao "fim" do campo gravitacional ainda em movimento e prosseguirá com velocidade constante, por inércia, livre da atração do astro de onde partiu, até entrar em zona de influência (campo gravitacional) de um outro astro.

Planeta	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno
Velocidade de escape (km/s)	4,3	10,4	11,2	5,0	59,5	35,5	21,3	23,5

Fonte: <<https://nssds.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet>>. Acesso em: 3 ago. 2018.



Banco de imagens/Arquivo da editora

NOTAS!

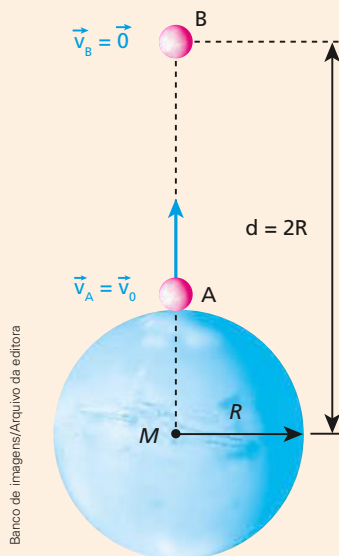
- A velocidade de escape de um buraco negro (estágio final de uma grande estrela que esgotou seu combustível nuclear) é maior que a velocidade da luz no vácuo ($\cong 3,0 \cdot 10^8 \text{ km/s}$), o que justifica o fato de nem mesmo a luz conseguir escapar de sua excepcional influência gravitacional.
- A velocidade de escape da Lua é de 2,4 km/s e a do Sol é estimada em 617,5 km/s.

Exercícios

89. Um artefato espacial sem propulsão, lançado verticalmente da superfície de um planeta de massa M e raio R , atinge uma altura máxima igual a R . Supondo que o planeta seja isolado, estacionário e sem atmosfera, calcule a intensidade da velocidade de lançamento do artefato. Considere conhecida a Constante da Gravitação G .

Resolução:

Sistema conservativo:



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$E_{m_A} = E_{m_B}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} - G \frac{Mm}{R} = -G \frac{Mm}{2R}$$

$$\frac{v_0^2}{2} = G \frac{M}{R} - G \frac{M}{2R}$$

Logo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

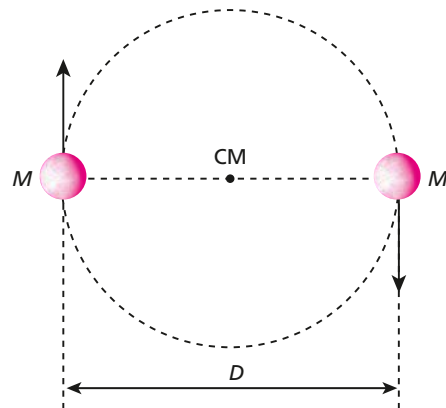
90. Um corpo, lançado verticalmente da superfície da Terra (massa M e raio R), atinge uma altura máxima igual ao triplo do raio terrestre. Supondo a Terra estacionária no espaço, calcule a intensidade da velocidade de lançamento do corpo. Considere conhecida a Constante da Gravitação G e admita que, durante o movimento, a única força que age no corpo seja a gravitacional exercida pela Terra.

91. (PUCC-SP) Calcular o módulo da velocidade que adquiriria um corpo se, partindo do repouso de um ponto **B**, infinitamente afastado, caísse livremente na superfície da Terra, num ponto **A**. Despreze todos os movimentos da Terra (raio igual a $6,4 \cdot 10^6$ m), a influência do ar e adote a aceleração da gravidade na superfície do planeta igual a 10 m/s^2 .

92. (UFG-GO) Um satélite, lançado da superfície da Terra, é destinado a permanecer em órbita terrestre a uma altura R . Supondo que a energia mecânica do satélite seja conservada, que R seja o raio da Terra e g a aceleração da gravidade em sua superfície, podemos afirmar que o módulo da velocidade de lançamento é:

- a) $\left[\frac{3}{2}Rg\right]^{\frac{1}{2}}$ c) $\left[\frac{2}{3}gR\right]^{\frac{1}{2}}$ e) $\left[\frac{1}{2}gR\right]^{\frac{1}{2}}$
 b) $[2gR]^{\frac{1}{2}}$ d) $[3gR]^{\frac{1}{2}}$

93. Na figura, dois corpos celestes de massas iguais a M , com centros de massa separados por uma distância D , descrevem movimento circular e uniforme em torno do centro de massa (CM) do sistema. As únicas forças a serem consideradas são as de atração gravitacional trocadas entre os dois corpos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sendo G a Constante da Gravitação, calcule:

- a) a energia cinética de um dos corpos em relação ao centro de massa do sistema;
 b) a energia de ligação entre os dois corpos. Considere nula a energia potencial gravitacional no caso de a distância entre os dois corpos ser infinita.

Quantidade de movimento e sua conservação



Wavebreakmedia/Stockphoto/Getty Images

// Ao empurrar a menina no balanço, a mulher exerce sobre ela uma força que, durante o intervalo de tempo do empurrão, produz um impulso.

Diariamente vivenciamos situações que envolvem a interação com outros corpos, desde um simples empurrão que impulsiona um objeto até colisões que podem representar perigo a nossa integridade física.

Neste tópico, apresentaremos os conceitos de impulso de uma força e de quantidade de movimento (ou momento linear). Salientamos desde já o caráter vetorial dessas duas grandezas. Veremos o Teorema do Impulso, que estabelece uma correlação entre impulso e variação de quantidade de movimento, e, em seguida, abordaremos os sistemas isolados de forças externas, em que se conserva a quantidade de movimento total. Por último, trataremos, de forma específica, das colisões mecânicas. Encerraremos o tópico com um apêndice em que poderá ser estudada a noção de centro de massa, indispensável à compreensão da Mecânica dos corpos extensos.

1. Impulso de uma força constante

Os impulsos mecânicos estão presentes em uma série de fenômenos do dia a dia, como nas situações em que há empurrões, puxões, impactos e explosões.

Um jogador de futebol, por exemplo, impulsiona a bola no ato de um chute. Seu pé aplica na bola uma força que, agindo durante um certo intervalo de tempo, determina um impulso.

Ao disparar um tiro com uma arma de fogo qualquer, o projétil é impulsionado pelos gases provenientes da detonação do explosivo. Esses gases agem muito rapidamente, porém de forma intensa, sobre o projétil, determinando um impulso considerável.

Também recebem impulsos uma flecha ao ser lançada por um arco e uma pedra ao ser disparada por um estilingue.

Em nosso curso vamos nos restringir à definição matemática do **impulso de uma força constante** (intensidade, direção e sentido invariáveis), uma vez que a definição geral dessa grandeza requer elementos de Matemática normalmente não estudados no Ensino Médio.

Para tanto, considere o esquema a seguir, em que uma força \vec{F} constante age sobre uma partícula do instante t_1 ao instante t_2 :

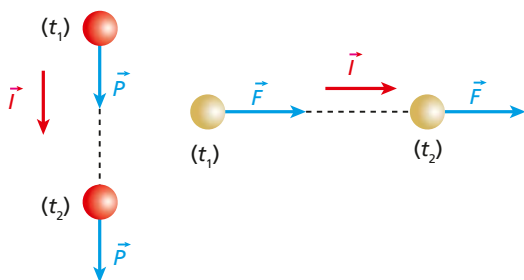


Banco de imagens/Arquivo da editora

O impulso de \vec{F} no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é a grandeza vetorial \vec{I} , definida por:

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t$$

Sendo Δt um escalar positivo, \vec{I} tem sempre a mesma orientação de \vec{F} .



Banco de imagens/Arquivo da editora

As unidades de impulso decorrem da própria definição:

$$\text{unid. (I)} = \text{unid. (F)} \cdot \text{unid. (\Delta t)}$$

No Sistema Internacional (SI), temos:

$$\text{unid. (I)} = \text{newton} \cdot \text{segundo} = \text{N} \cdot \text{s}$$

Se a força tiver direção constante, mas intensidade variável, também podemos utilizar a definição particular dada para a grandeza impulso. Basta raciocinar em termos de uma **força média** que exerça, no mesmo intervalo de tempo, o mesmo efeito dinâmico da força considerada.

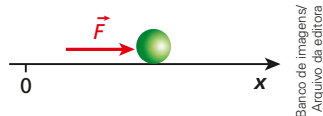
Por exemplo, durante o curto intervalo de tempo em que estabelece contato com as cordas da raquete, uma bola de tênis recebe um impulso de considerável intensidade, capaz de provocar significativas variações de sua velocidade vetorial. O impulso exercido pela raquete sobre a bola tem a mesma direção e o mesmo sentido da força média que a raquete aplica sobre ela.



Alamy/Other Images

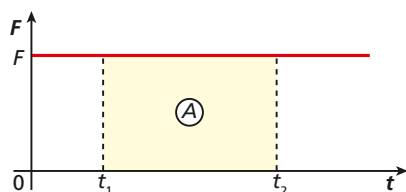
2. Cálculo gráfico do valor algébrico do impulso

Considere o esquema a seguir, em que uma partícula se movimenta ao longo do eixo $0x$ sob a ação da força \vec{F} constante.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Tracemos o gráfico do valor algébrico de \vec{F} (dado em relação ao eixo $0x$) em função do tempo:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Seja a “área” A destacada no diagrama. Teria essa “área” algum significado especial? Sim: ela fornece uma medida do valor algébrico do impulso da força \vec{F} , desde o instante t_1 até o instante t_2 .

De fato, isso pode ser facilmente verificado:

$$A = F(t_2 - t_1)$$

Mas $t_2 - t_1$ é o intervalo de tempo Δt considerado. Logo:

$$A = F\Delta t$$

Como o produto $F\Delta t$ corresponde ao valor algébrico do impulso de \vec{F} , segue que:

$$A = I$$

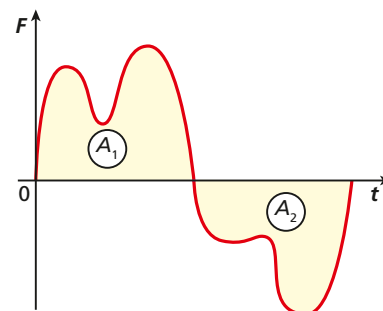
Embora a última propriedade tenha sido apresentada com base em um caso simples e particular, sua validade estende-se também a situações em que a força envolvida tem direção constante, porém valor algébrico variável. Nesses casos, entretanto, sua verificação requer um tratamento matemático mais elaborado.

$$A_1 + A_2 = I$$

(soma algébrica)

Tendo em conta o exposto, podemos fazer a seguinte generalização:

Dado um diagrama do valor algébrico da força atuante em uma partícula em função do tempo, a “área” compreendida entre o gráfico e o eixo dos tempos expressa o valor algébrico do impulso da força. No entanto, a força considerada deve ter direção constante.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$\color{red}{//}$ F é o valor algébrico da força responsável pelo impulso.

3. Quantidade de movimento

Em diversos fenômenos físicos é necessário agrupar os conceitos de massa e de velocidade vetorial. Isso ocorre, por exemplo, nas colisões mecânicas e nas explosões. Nesses casos, torna-se conveniente a definição de **quantidade de movimento** (ou momento linear), que é uma das grandezas fundamentais da Física.

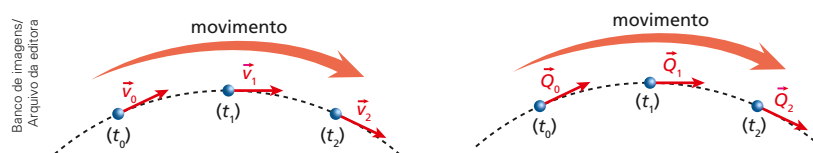
Considere uma partícula de massa m que, em certo instante, tem velocidade vetorial igual a \vec{v} .

Por definição, a quantidade de movimento da partícula nesse instante é a grandeza vetorial \vec{Q} expressa por:

$$\vec{Q} = m\vec{v}$$

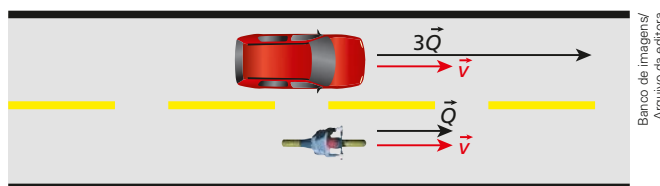
A quantidade de movimento é uma grandeza instantânea, já que sua definição envolve o conceito de velocidade vetorial instantânea.

Sendo m um escalar positivo, \vec{Q} tem sempre a mesma direção e o mesmo sentido de \vec{v} , isto é, em cada instante é tangente à trajetória e dirigida no sentido do movimento.



// Nestas figuras aparece uma partícula nos instantes t_0 , t_1 e t_2 do seu movimento curvilíneo. À esquerda estão indicadas as velocidades vetoriais \vec{v}_0 , \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e, à direita, as respectivas quantidades de movimento \vec{Q}_0 , \vec{Q}_1 e \vec{Q}_2 .

Observe a ilustração a seguir.



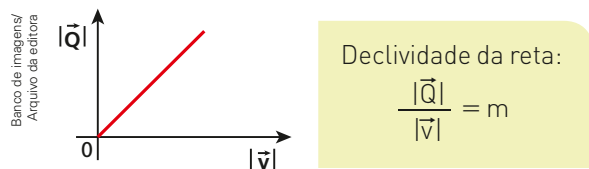
Nesta figura estamos admitindo que o carro e a moto se movimentam lado a lado, com velocidades iguais. Supondo que a massa do carro seja o triplo da massa da moto, teremos para o carro uma quantidade de movimento de intensidade o triplo da definida para a moto.

É interessante ressaltar que, quanto maior for a intensidade da quantidade de movimento de um corpo, maior será seu “poder de impacto”.

Um carro que trafega sob uma forte chuva de granizo geralmente fica bastante danificado, o que certamente não seria verificado sob chuvas líquidas. Isso acontece porque as pedras de gelo que despencam das nuvens – água no estado sólido de massa geralmente maior que a de gotas de água individuais – atingem o veículo com uma quantidade de movimento relativamente intensa, o que, somado à rigidez própria do gelo, determina um maior “poder de impacto”, capaz mesmo de causar estragos à lataria.

Outro exemplo é o de um caminhão a 60 km/h que vai colidir frontalmente com um poste. Esse veículo provocará um dano muito maior ao poste do que aquele que seria observado no impacto frontal de um carro popular igualmente rígido à mesma velocidade.

Para m constante, \vec{Q} tem módulo diretamente proporcional ao módulo de \vec{v} . O gráfico a seguir representa tal proporcionalidade.



A energia cinética (E_c) pode ser relacionada com o módulo da quantidade de movimento $|\vec{Q}|$, fazendo-se:

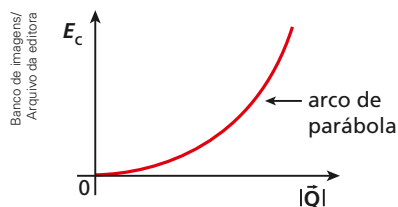
$$E_c = \frac{m|\vec{v}|^2}{2} \quad (I)$$

$$|\vec{Q}| = m|\vec{v}| \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{|\vec{Q}|}{m} \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$E_c = \frac{m}{2} \left(\frac{|\vec{Q}|}{m} \right)^2 \Rightarrow E_c = \frac{|\vec{Q}|^2}{2m}$$

Para m constante, E_c é diretamente proporcional ao quadrado de $|\vec{Q}|$. O gráfico a seguir representa tal proporcionalidade.



As unidades de quantidade de movimento decorrem da própria definição:

$$\text{unid. (Q)} = \text{unid. (m)} \cdot \text{unid. (v)}$$

No Sistema Internacional (SI), temos:

$$\text{unid. (Q)} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

JÁ PENSOU NISTO?

Quem tem maior quantidade de movimento?

Nesta fotografia, quatro ciclistas percorrem uma curva do velódromo mantendo, nesse trecho, espaçamento constante entre si (velocidades escalares relativas nulas). Isso significa que suas velocidades em relação ao solo têm intensidades iguais e, por isso, cada quantidade de movimento terá módulo diretamente proporcional à respectiva massa do conjunto ciclista-bicicleta, sendo tangente à trajetória e orientada no sentido do movimento.



David Madison/Corbis/Latinstock

4. O Teorema do Impulso

Um arco dispara uma flecha conferindo-lhe um impulso que provoca nela certa variação de quantidade de movimento. Um jogador de futebol cobra uma falta, imprimindo à bola no momento do chute um forte impulso. Este, por sua vez, determina expressiva variação de quantidade de movimento na bola. Você lança uma pedra e o impulso exercido no ato do lançamento provoca nela uma dada variação de quantidade de movimento.

Haveria alguma conexão entre as noções de impulso e variação de quantidade de movimento? Certamente que sim! O Teorema do Impulso, apresentado a seguir, estabelece uma relação matemática entre essas grandezas.

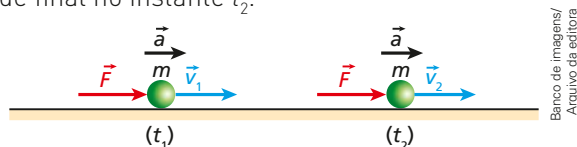
Enuncia-se que:

O impulso da resultante (impulso total) das forças sobre uma partícula é igual à variação de sua quantidade de movimento:

$$\vec{I}_{\text{total}} = \Delta\vec{Q} \Rightarrow \vec{I}_{\text{total}} = \vec{Q}_{\text{final}} - \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Demonstração para um caso particular

Na figura abaixo, temos uma partícula de massa m sujeita à ação da força resultante \vec{F} , constante e de mesma orientação que o movimento. Sejam \vec{a} a aceleração comunicada por \vec{F} , \vec{v}_1 a velocidade inicial da partícula no instante t_1 , e \vec{v}_2 sua velocidade final no instante t_2 .



O impulso de \vec{F} no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é \vec{I}_{total} , dado por:

$$\vec{I}_{\text{total}} = \vec{F}\Delta t \quad (\text{I})$$

Como \vec{F} é a resultante, a aplicação do Princípio Fundamental da Dinâmica conduz a:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{II})$$

Sendo \vec{F} constante, \vec{a} será constante, permitindo escrever que:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} \quad (\text{III})$$

Substituindo (III) em (II), vem:

$$\vec{F} = m \frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\Delta t} \quad (\text{IV})$$

Substituindo agora (IV) em (I), segue que:

$$\vec{I}_{\text{total}} = m \frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\Delta t} \Delta t$$

Daí:

$$\vec{I}_{\text{total}} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

Como os produtos $m\vec{v}_2$ e $m\vec{v}_1$ são as respectivas quantidades de movimento da partícula nos instantes final (t_2) e inicial (t_1), temos:

$$\vec{I}_{\text{total}} = \Delta\vec{Q} \Rightarrow \vec{I}_{\text{total}} = \vec{Q}_{\text{final}} - \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Embora tenhamos demonstrado o Teorema do Impulso a partir de uma situação simples e particular, sua aplicação é geral, estendendo-se ao cálculo do impulso de forças constantes ou variáveis. Devemos observar apenas que a força, cujo impulso é igual à variação da quantidade de movimento, deve ser **resultante**.

Podemos dizer, ainda, que o impulso da força resultante é equivalente à soma vetorial dos impulsos de todas as forças que atuam na partícula.

O Teorema do Impulso permite concluir que as unidades $\text{N} \cdot \text{s}$ e $\text{kg} \cdot \text{m/s}$, respectivamente de impulso e quantidade de movimento, são equivalentes. Isso ocorre porque essas grandezas têm as mesmas dimensões físicas.

Aplicado a uma partícula solitária, o Teorema do Impulso equivale à 2ª Lei de Newton (Princípio Fundamental da Dinâmica).

JÁ PENSOU NISTO?

Beleza e terror

As erupções vulcânicas, uma das mais espetaculares manifestações da natureza, já fizeram milhares de vítimas ao longo da história, como ocorreu no ano 79 a.C., quando o Vesúvio soterrou a cidade e toda a população de Pompeia (região de Nápoles, sul da Itália).

Quando um vulcão entra em erupção, gases e vapores produzidos em seu interior, submetidos a elevadas temperaturas e pressões, ejetam para fora da cratera lava incandescente, cinza e fragmentos mais leves, que conseguem atingir altitudes estratosféricas (da ordem de 10 km).

Aplicando ao material expelido por um vulcão o Teorema do Impulso, podemos afirmar que o impulso total entre dois instantes, exercido pela força resultante, é igual à variação da quantidade de movimento desse material.



Thinkstock/Getty Images

Ampliando o olhar

Air bags: frenagens menos traumáticas

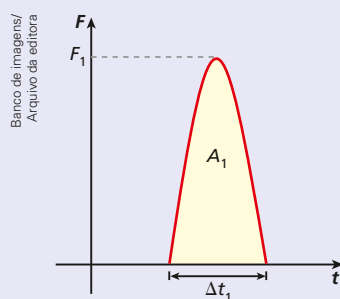
Nesta fotografia, observa-se um teste de colisão em que um carro equipado com *air bags* se choca contra um obstáculo fixo. No ato do impacto, os *air bags* são prontamente inflados, minimizando os efeitos da inércia de movimento inerente aos corpos situados dentro do veículo. A proteção proporcionada pelo dispositivo ocorre porque, em contato com ele, a frenagem fica suavizada, ocorrendo em um intervalo de tempo maior do que aquele no qual ocorreria sem o equipamento. Com isso, uma mesma variação de quantidade de movimento, obtida em um intervalo de tempo maior, requer uma força de intensidade menor, o que reduz os possíveis danos.

Nos gráficos a seguir você poderá assimilar melhor o que foi dito até aqui. As escalas utilizadas para intensidade de força (F) e valores de tempo (t) são as mesmas, respectivamente, e, nas duas situações, uma mesma pessoa dentro de um carro vai sofrer uma freada súbita, provocada por uma colisão frontal do veículo. Em ambos os casos a velocidade inicial é a mesma, o que impõe ao corpo da pessoa uma mesma variação de quantidade de movimento até sua completa imobilização. Assim, será exigido, nas duas frenagens, o mesmo impulso de retardamento, o que implica a igualdade entre as áreas A_1 e A_2 destacadas nos dois diagramas.

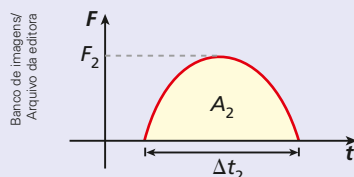


Rick Fischer/Masterfile/Other Images

Situação 1: O carro não está equipado com *air bag* e o corpo da pessoa é freado pelas forças exercidas pelas partes internas rígidas do veículo.



Situação 2: O carro está equipado com *air bag* e o corpo da pessoa é freado pelas forças aplicadas pelo acessório.



Com a utilização do *air bag*, o intervalo de tempo de frenagem é maior, isto é, $\Delta t_2 > \Delta t_1$. Sendo assim, como $A_1 = A_2$, conclui-se que $F_2 < F_1$, o que significa que, com o *air bag*, os possíveis traumas no corpo da pessoa são menores, já que as forças impactantes exercidas sobre ele são de intensidade menor.

JÁ PENSOU NISTO?

“Deixa a vida me levar...”

Imagine que você esteja sob uma intensa chuva constituída, não de gotas de água em queda vertical, como ocorre normalmente, mas de enormes pneus de caminhão...

Com certeza, esse bombardeio, felizmente fictício, seria fatal, já que você teria que absorver toda a energia de impacto transmitida pelas forças exercidas pelos pneus e o solo durante o curto intervalo de tempo de cada colisão. As forças impulsivas provocariam gravíssimas lesões, como ocorre em qualquer trombada severa.

Guardadas as devidas proporções, e em relação a pequenos insetos como moscas e muriçocas, em voo durante uma chuva regular, não ocorreria a mesma coisa? Esses pobres animais não seriam impactados por gotas de água, em certos casos, muitas vezes mais pesadas que eles?

Estudos desenvolvidos pelo Instituto de Tecnologia da Geórgia, nos Estados Unidos, e publicados na prestigiada revista *Proceedings of the National Academy of Sciences*, demonstraram que, ao contrário do que se imagina, os insetos em geral suportam muito bem o “impacto” das gotas de chuva, já que, ao melhor estilo “deixa a vida me levar...”, uma vez em contato com o material líquido, deslocam-se de modo a acompanhar a trajetória da gota, minimizando assim os efeitos da colisão. Dessa forma, o impacto ocorre em um intervalo de tempo maior, o que reduz a intensidade das forças sobre o corpo do animal. Por isso, durante momentos de tempestade, eles voam a altitudes maiores de maneira a disporem de mais espaço vertical para realizar a manobra descendente.

Se impactados em solo, muitos insetos seriam abatidos pelas forças exercidas pelas gotas de água e pela superfície de apoio, podendo ainda sofrer afogamento, uma vez envoltos pela massa líquida derramada sobre eles.



Inseto voando sob chuva.

Tim Nowack/TimNowackPhotography.com

ROCHA, Mariana. Voando na chuva. Disponível em: <<http://cienciahoje.org.br/voando-na-chuva>>. Acesso em: 8 jul. 2018.

Exercícios Nível 1

- Um ciclista, junto com sua bicicleta, tem massa de 80 kg. Partindo do repouso de um ponto do velódromo, ele acelera com aceleração escalar constante de $1,0 \text{ m/s}^2$. Qual o módulo da quantidade de movimento do sistema ciclista-bicicleta após 20 s da partida?
- Considere duas partículas **A** e **B** em movimento com quantidades de movimento constantes e iguais. É necessariamente correto que:
 - as trajetórias de **A** e **B** são retas divergentes.
 - as velocidades de **A** e **B** são iguais.
 - as energias cinéticas de **A** e **B** são iguais.
 - se a massa de **A** for o dobro da de **B**, então, o módulo da velocidade de **A** será metade do de **B**.
 - se a massa de **A** for o dobro da de **B**, então, o módulo da velocidade de **A** será o dobro do de **B**.
- (Vunesp) Em cada ciclo cardíaco, o coração bombeia em média 80 g de sangue com uma velocidade próxima de 30 cm/s. Considerando-se que o sangue esteja inicialmente em repouso, o impulso da força exercida pelo músculo cardíaco sobre o sangue, em cada ciclo, tem módulo, em $\text{N} \cdot \text{s}$, igual a:
 - $2,4 \cdot 10^{-4}$
 - $3,6 \cdot 10^{-3}$
 - $2,4 \cdot 10^{-2}$
 - $2,4 \cdot 10^3$
 - $3,6 \cdot 10^4$

4. Uma partícula de massa 8,0 kg desloca-se em trajetória retilínea, quando lhe é aplicada, no sentido do movimento, uma força resultante de intensidade 20 N. Sabendo que no instante de aplicação da força a velocidade da partícula valia 5,0 m/s, determine:

- o módulo do impulso comunicado à partícula, durante 10 s de aplicação da força;
- o módulo da velocidade da partícula ao fim do intervalo de tempo referido no item anterior.

Resolução:

a) A intensidade do impulso da força referida no enunciado, suposta constante, é calculada por $I = F\Delta t$.

Sendo $F = 20 \text{ N}$ e $\Delta t = 10 \text{ s}$, calculemos I :

$$I = 20 \cdot 10 \therefore I = 2,0 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{s}$$

- b) A força aplicada na partícula é a resultante. Por isso, o impulso exercido por ela deve ser igual à variação da quantidade de movimento da partícula (Teorema do Impulso):

Banco de imagens/
Arquivo da editora



$$I = \Delta Q \Rightarrow I = Q_2 - Q_1$$

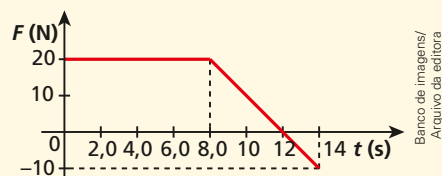
$$I = mv_2 - mv_1 \Rightarrow I = m(v_2 - v_1)$$

Com $I = 2,0 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{s}$; $m = 8,0 \text{ kg}$;
 $v_1 = 5,0 \text{ m/s}$, calculemos v_2 :

$$2,0 \cdot 10^2 = 8,0 \cdot (v_2 - 5,0) \therefore v_2 = 30 \text{ m/s}$$

- Uma bola de bilhar de massa 0,15 kg, inicialmente em repouso, recebeu uma tacada numa direção paralela ao plano da mesa, o que lhe imprimiu uma velocidade de módulo 4,0 m/s. Sabendo que a interação do taco com a bola durou $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}$, calcule:
 - a intensidade média da força comunicada pelo taco à bola;
 - a distância percorrida pela bola, enquanto em contato com o taco.
- (Cefet-MG) Um corpo de massa $m = 10 \text{ kg}$ se movimenta sobre uma superfície horizontal perfeitamente polida, com velocidade escalar $v_0 = 4,0 \text{ m/s}$, quando uma força constante de intensidade igual a 10 N passa a agir sobre ele na mesma direção do movimento, porém em sentido oposto. Sabendo que a influência do ar é desprezível e que quando a força deixa de atuar a velocidade escalar do corpo é $v = -10 \text{ m/s}$, determine o intervalo de tempo de atuação da força.

- 7.** Um corpo de massa 38 kg percorre um eixo orientado com velocidade escalar igual a 15 m/s. No instante $t_0 = 0$, aplica-se sobre ele uma força resultante cujo valor algébrico varia em função do tempo, conforme o gráfico seguinte:

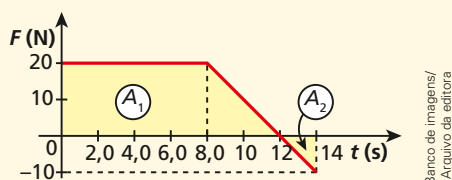


Banco de imagens/
Arquivo da editora

Admitindo que a força seja paralela ao eixo, calcule a velocidade escalar do corpo no instante $t = 14$ s.

Resolução:

Determinemos, inicialmente, o valor algébrico do impulso que a força resultante comunica ao corpo de $t_0 = 0$ a $t = 14$ s. Isso pode ser feito calculando-se a “área” destacada no diagrama:



$$I = A_1 + A_2$$

$$I = \frac{(12 + 8,0) \cdot 20}{2} + \frac{2,0 \cdot (-10)}{2}$$

$$I = 190 \text{ N} \cdot \text{s}$$

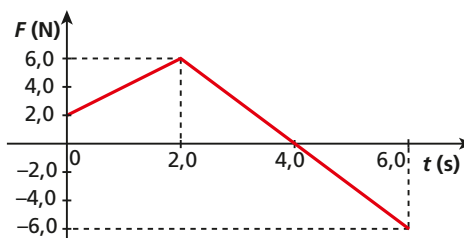
Aplicando ao corpo o Teorema do Impulso, vem:

$$I = Q_{14} - Q_0 = mv_{14} - mv_0$$

Sendo $I = 190 \text{ N} \cdot \text{s}$, $m = 38 \text{ kg}$ e $v_0 = 15 \text{ m/s}$, calculemos v_{14} , que é a velocidade escalar da partícula no instante $t = 14$ s:

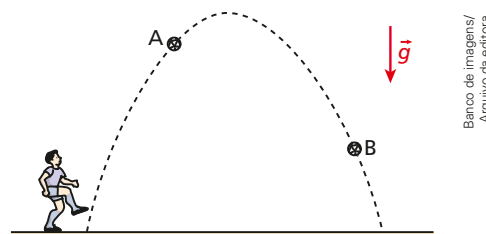
$$190 = 38 \cdot (v_{14} - 15) \therefore \boxed{v_{14} = 20 \text{ m/s}}$$

8. Um carrinho de massa $2,0 \text{ kg}$ está em repouso sobre um plano horizontal sem atrito. No instante $t_0 = 0$, passa a agir sobre ele uma força \vec{F} de direção constante, paralela ao plano, cujo valor algébrico é dado em função do tempo, conforme o gráfico:

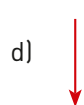


Desprezando a influência do ar, determine as velocidades escalares do carrinho nos instantes $t_1 = 2,0 \text{ s}$, $t_2 = 4,0 \text{ s}$ e $t_3 = 6,0 \text{ s}$.

9. Zizo chuta uma bola e esta descreve uma trajetória parabólica, como representa a figura, sob a ação exclusiva do campo gravitacional, considerado uniforme.



Indique a alternativa cuja seta melhor representa a variação da quantidade de movimento da bola entre os pontos **A** e **B**:

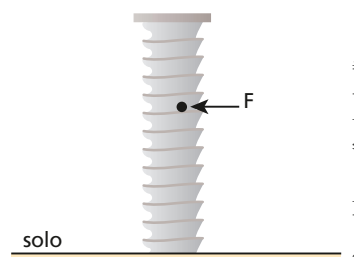


- e) Faltam dados para uma conclusão possível.

Exercícios Nível 2

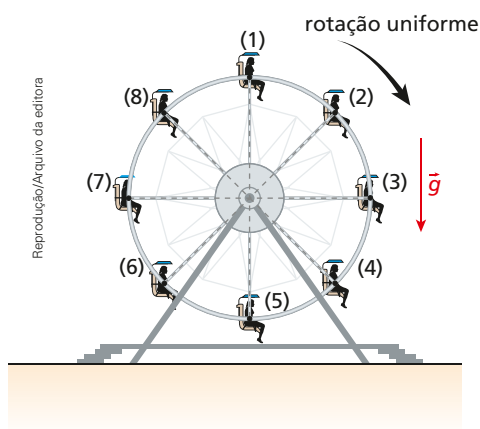
10. Uma partícula percorre certa trajetória em movimento uniforme.
- Podemos afirmar que a energia cinética da partícula é constante?
 - Podemos afirmar que a quantidade de movimento da partícula é constante?
11. Uma formiga **F** sobe com velocidade escalar constante a “rosca” de um grande parafuso, colocado de pé sobre o solo plano e horizontal, como indica

a figura. Em relação a um referencial no solo, podemos afirmar que:



- a) as energias cinética e potencial de gravidade da formiga permanecem constantes.
- b) a energia cinética e a quantidade de movimento da formiga permanecem constantes.
- c) a energia cinética da formiga permanece constante, mas sua energia potencial de gravidade aumenta.
- d) a quantidade de movimento da formiga permanece constante, mas sua energia potencial de gravidade aumenta.
- e) a energia mecânica total da formiga permanece constante.

12. (Unip-SP) Considere uma roda-gigante com movimento de rotação uniforme e formada por oito unidades simetricamente dispostas, como indica a figura.



Todas as unidades são formadas pela cadeira e por uma pessoa e têm pesos iguais. Considere um sistema de referência fixo no solo terrestre, suposto horizontal.

Analise as proposições a seguir:

- (1) A quantidade de movimento de cada unidade permanece constante.
- (2) A quantidade de movimento total do sistema formado pelas oito unidades permanece constante.
- (3) A energia mecânica de cada unidade permanece constante.
- (4) A energia mecânica total do sistema formado pelas oito unidades permanece constante.
- (5) A força resultante em cada unidade não realiza trabalho. Somente está correto o que se afirma em:

- a) (2) e (4). c) (1) e (3). e) (1), (3) e (5).
- b) (4) e (5). d) (2), (4) e (5).

13. Considere duas partículas **A** e **B** em movimento com energias cinéticas constantes e iguais. É necessariamente correto que:

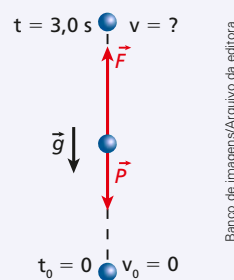
- a) as trajetórias de **A** e **B** são retas paralelas.
- b) as velocidades de **A** e **B** têm módulos iguais.
- c) as quantidades de movimento de **A** e **B** têm módulos iguais.
- d) se a massa de **A** for o quádruplo da de **B**, então o módulo da quantidade de movimento de **A** será o quádruplo do de **B**.
- e) se a massa de **A** for o quádruplo da de **B**, então o módulo da quantidade de movimento de **A** será o dobro do de **B**.

14. A um pequeno bloco que se encontra inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal e lisa aplica-se uma força constante, paralela à mesa, que lhe comunica uma aceleração de $5,0 \text{ m/s}^2$. Observa-se, então, que, $4,0 \text{ s}$ após a aplicação da força, a quantidade de movimento do bloco vale 40 kg m/s . Calcule, desprezando o efeito do ar, o trabalho da força referida desde sua aplicação até o instante $t = 4,0 \text{ s}$.

15. Uma partícula de massa igual a $2,0 \text{ kg}$, inicialmente em repouso sobre o solo, é puxada verticalmente para cima por uma força constante \vec{F} , de intensidade 30 N , durante $3,0 \text{ s}$. Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando a resistência do ar, calcule a intensidade da velocidade da partícula no fim do citado intervalo de tempo.

Resolução:

Apenas duas forças agem na partícula: \vec{F} e \vec{P} (peso).



Aplicando o Teorema do Impulso, temos:

$$\vec{I}_{\text{total}} = \vec{Q} - \vec{Q}_0$$

$$\vec{I}_{(\vec{F})} + \vec{I}_{(\vec{P})} = \vec{Q} - \vec{Q}_0$$

Algebricamente:

$$F\Delta t - mg\Delta t = mv - mv_0$$

Sendo $F = 30 \text{ N}$, $\Delta t = 3,0 \text{ s}$, $m = 2,0 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $v_0 = 0$, calculemos o valor de v :

$$30 \cdot 3,0 - 2,0 \cdot 10 \cdot 3,0 = 2,0 v$$

$$v = 15 \text{ m/s}$$

Nota:

- Este problema também poderia ser resolvido aplicando-se a 2ª Lei de Newton.

16. Uma bola de massa igual a 40 g, ao chegar ao local em que se encontra um tenista, tem velocidade horizontal de módulo 12 m/s. A bola é golpeada pela raquete do atleta, com a qual interage durante $2,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}$, retornando horizontalmente em sentido oposto ao do movimento inicial. Supondo que a bola abandone a raquete com velocidade de módulo 8,0 m/s, calcule a intensidade média da força que a raquete exerce sobre a bola.

17. Mochila voadora

Projetada originalmente por uma empresa de brinquedos aquáticos alemã, essa mochila propulsada por água permite a um homem se manter em equilíbrio pairando no ar, como se pudesse voar. Trata-se do Jetlev, que deixa o usuário a cerca de 8,5 m de altura mediante um jato de água que circula pela mochila, produzindo uma força vertical dirigida para cima que equilibra o peso total. A água é introduzida em uma mangueira gigante por meio de uma bomba existente em um pequeno barco conectado ao equipamento. Essa injeção de água ocorre em grande vazão: algo em torno de 20,0 L/s. Depois de fazer uma curva de 180° na mochila com mudança de intensidade da velocidade, mas com conservação da vazão, o líquido provoca a sustentação da pessoa, que se mantém elevada sobre um lago ou o mar.

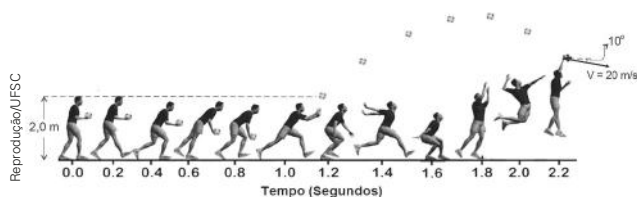
O usuário também pode deslocar-se horizontalmente a uma velocidade próxima de 40 km/h, bastando para isso inclinar adequadamente os jatos por onde a água é ejetada, além de controlar a vazão.



Perry van Munster/Alamy/Fotorena

Considerando-se a vazão de 20,0 L/s, citada no texto, levando-se em conta que a densidade da água vale $d = 1,0 \text{ g/L}$, que $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ e que a água é introduzida na mochila verticalmente para cima a 20,0 m/s e ejetada verticalmente para baixo a 30,0 m/s, que massa ficaria suspensa em equilíbrio nessas condições?

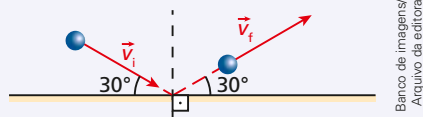
18. (UFSC) Nos Jogos Olímpicos Rio 2016, a seleção brasileira de vôlei obteve a medalha de ouro após doze anos da última conquista, com uma vitória por 3 sets a 0 sobre a Itália. O saque Viagem, popularizado pelos jogadores brasileiros na Olimpíada de 1984, foi de fundamental importância para o alto desempenho da equipe. Na figura abaixo, uma sequência de imagens ilustra a execução de um saque Viagem, com indicação da posição do jogador e da posição correspondente da bola em diversos instantes de tempo. O jogador lança a bola, cuja massa é de 0,3 kg, com velocidade horizontal próxima de 4,0 m/s e entra em contato novamente com ela a uma altura de 3,50 m acima do nível do solo, no instante 2,2 s. Esse contato dura apenas 0,02 s, mas projeta a bola com velocidade de módulo $V = 20 \text{ m/s}$. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e considere $\sin 10^\circ \cong 0,17$ e $\cos 10^\circ \cong 0,98$.



Com base na figura e nos dados acima, é correto afirmar que:

- (01) o módulo da força média de interação da mão do jogador com a bola é maior que o módulo da força média de interação da bola com a mão do jogador.
 - (02) o módulo da velocidade vertical da bola no momento em que o jogador entra em contato novamente com ela é de 3,5 m/s.
 - (04) a força média de interação da mão do jogador com a bola na direção horizontal é de aproximadamente 234 N.
 - (08) a força média de interação da mão do jogador com a bola na direção vertical é nula.
 - (16) o trabalho realizado sobre a bola durante a interação é de aproximadamente 54,23 J.
- Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

19. Uma bola de tênis de massa m é lançada contra o solo, com o qual interage, refletindo-se em seguida sem perdas de energia cinética. O esquema abaixo representa o evento:



Sabendo que $|\vec{v}_i| = V$ e que a interação tem duração Δt , calcule a intensidade média da força que o solo exerce na bola.

Resolução:

Como não há perdas de energia cinética, temos:

$$|\vec{v}_i| = |\vec{v}_f| = V$$

Aplicando à bola o Teorema do Impulso, vem:

$$\vec{T} = \Delta\vec{Q} \Rightarrow \vec{T} = m\Delta\vec{v} \quad (I)$$

Mas:

$$\vec{T} = \vec{F}_m \Delta t \quad (II)$$

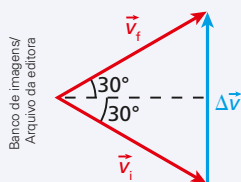
Comparando (I) e (II), segue que:

$$\vec{F}_m \Delta t = m\Delta\vec{v} \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Em módulo:

$$|\vec{F}_m| = \frac{m|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$$

Com base no diagrama vetorial abaixo, determinamos $|\Delta\vec{v}|$:



$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$$

O triângulo formado pelos vetores é equilátero, o que permite escrever:

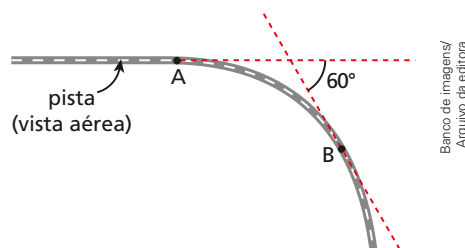
$$|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}_i| = |\vec{v}_f| = V$$

Assim, finalmente, calculamos $|\vec{F}_m|$:

$$|\vec{F}_m| = \frac{mV}{\Delta t}$$

20. Considere um carro de massa igual a $8,0 \cdot 10^2$ kg que entra em uma curva com velocidade \vec{v}_1 de intensidade 54 km/h e sai dessa mesma curva com velocidade \vec{v}_2 de intensidade 72 km/h. Sabendo que \vec{v}_2 é perpendicular a \vec{v}_1 , calcule a intensidade do impulso total (da força resultante) comunicado ao carro.

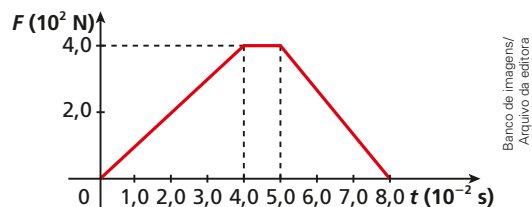
21. Um carro de massa igual a 1,0 tonelada percorre uma pista como a esquematizada na figura, deslocando-se do ponto **A** ao ponto **B** em movimento uniforme, com velocidade de intensidade igual a 90 km/h.



Sabendo que o comprimento do trecho **AB** é igual a 500 m, calcule:

- a) o intervalo de tempo gasto pelo carro no percurso de **A** até **B**;
- b) a intensidade da força capaz de provocar a variação de quantidade de movimento sofrida pelo carro de **A** até **B**.

22. Ao cobrar uma falta, um jogador de futebol chuta uma bola de massa igual a $4,5 \cdot 10^2$ g. No lance, seu pé comunica à bola uma força resultante de direção constante, cuja intensidade varia com o tempo, conforme o seguinte gráfico:

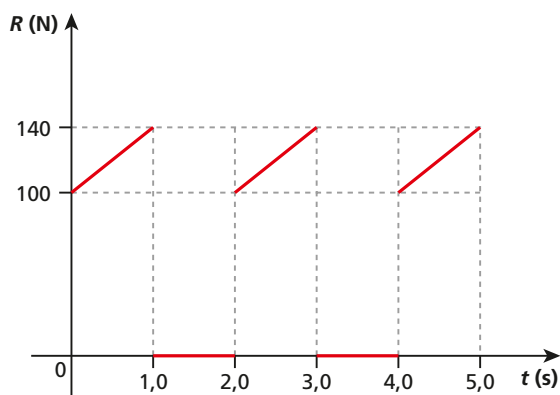


Em $t_0 = 0$ (início do chute) a bola estava em repouso. Calcule:

- a) o módulo da quantidade de movimento da bola no instante $t_1 = 8,0 \cdot 10^{-2}$ s (fim do chute);
- b) o trabalho da força que o pé do jogador exerce na bola.

23. O skate foi concebido na Califórnia, Estados Unidos, e consiste basicamente de uma prancha com frente (*nose*) e traseira (*tail*) levemente inclinadas, apoiada sobre quatro pequenas rodas acopladas a dois eixos metálicos (*trucks*). O esquetista – ou skater – realiza uma espécie de surf no asfalto e em obstáculos, o que exige manobras que variam em grau de dificuldade, desde as básicas até as mais radicais. Os skates podem ter tamanhos diversos em função do estilo do usuário e dos exercícios que ele pretende realizar.

Para impulsionar seu *skate* em linha reta, a partir do repouso e em um plano horizontal, o jovem da fotografia abaixo mantém seu pé direito sobre a prancha e, com o pé esquerdo, empurra o solo para trás, três vezes. O gráfico a seguir representa como varia a intensidade da força de atrito resultante (R) que o conjunto jovem-*skate* recebe do chão em função do tempo nesse processo.



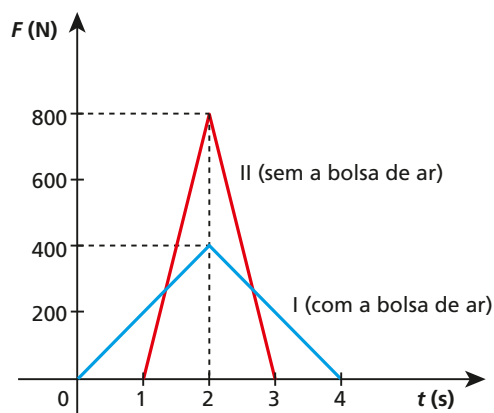
Sabendo-se que a massa do conjunto jovem-*skate* é de 60 kg e desprezando-se a resistência do ar, pede-se determinar, ao fim do terceiro impulso:

- a intensidade da velocidade adquirida pelo conjunto jovem-*skate*;
- o trabalho total realizado sobre ele.

24. (UFRN) Alguns automóveis dispõem de um eficiente sistema de proteção para o motorista, que consiste de uma bolsa inflável de ar. Essa bolsa é automaticamente inflada, do centro do volante,

quando o automóvel sofre uma desaceleração súbita, de modo que a cabeça e o tórax do motorista, em vez de colidirem com o volante, colidem com ela.

A figura a seguir mostra dois gráficos da variação temporal da intensidade da força que age sobre a cabeça de um boneco que foi colocado no lugar do motorista. Os dois gráficos foram registrados em duas colisões de testes de segurança. A única diferença entre essas colisões é que, na colisão I, se usou a bolsa e, na colisão II, ela não foi usada.



Da análise desses gráficos, indique a alternativa que melhor conclui a explicação para o sucesso da bolsa como equipamento de proteção:

- A bolsa diminui o intervalo de tempo da desaceleração da cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força média que atua sobre a cabeça.
- A bolsa aumenta o intervalo de tempo da desaceleração da cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força média que atua sobre a cabeça.
- A bolsa diminui o módulo do impulso total transferido para a cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força máxima que atua sobre a cabeça.
- A bolsa diminui a variação total do momento linear da cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força média que atua sobre a cabeça.
- A bolsa aumenta a variação total do momento linear da cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força média que atua sobre a cabeça.

5. Sistema mecânico isolado

Um sistema mecânico é denominado **isolado de forças externas** quando a resultante das forças externas atuantes sobre ele for nula.

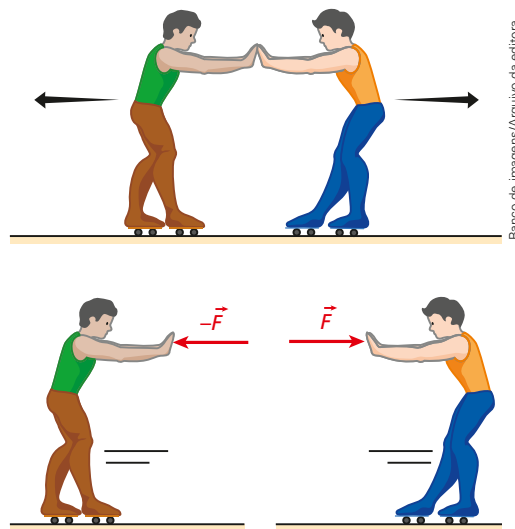
Uma partícula em equilíbrio é o caso mais elementar de sistema mecânico isolado. Estando em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, a resultante das forças que agem sobre ela é nula.

Vejamus outro exemplo: admita que dois patinadores, inicialmente em repouso sobre uma plataforma plana e horizontal, se empurrem mutuamente, conforme sugerem os esquemas ao lado.

Desprezando os atritos e a influência do ar, os dois patinadores constituem um sistema mecânico isolado, pois a resultante das forças externas atuantes no conjunto é nula. De fato, as únicas forças externas que agem em cada patinador são a força da gravidade (peso) e a força de sustentação da plataforma (normal), que se equilibram.

Entretanto, uma pergunta surge naturalmente: as forças trocadas entre eles no ato do empurrão não seriam resultantes, uma vez que cada patinador, pela ação da força recebida, tem seu corpo acelerado a partir do repouso? E a resposta é simples: sim, essas forças (ação e reação) são as resultantes que aceleram **cada corpo**, porém são **forças internas** ao sistema, não devendo ser consideradas no estudo do sistema como um todo.

De fato, a soma dos impulsos das forças internas \vec{F} e $-\vec{F}$ (forças de ação e reação trocadas pelos patinadores no ato do mútuo empurrão) é **nula** e, por isso, essas forças não participam da composição do impulso total externo exercido sobre o sistema.



Banco de imagens/Arquivo da editora

6. O Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento

As leis mais importantes e gerais da Física são os **princípios de conservação**, entre os quais destacamos o de conservação da energia, o da conservação da quantidade de movimento (ou momento linear), o da conservação do momento angular e o da conservação da carga elétrica.

Veremos, agora, o **Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento**, mas, antes da apresentação formal de seu enunciado, analisemos a situação a seguir.

Consideremos um pequeno bote em repouso nas águas tranquilas de um lago. Admitamos que no local não haja correnteza nem ventos. Um homem está parado na proa da embarcação. Você pode concluir então que, nessa situação, a quantidade de movimento total do sistema homem-bote é nula. De repente, o homem lança-se horizontalmente, mergulhando diretamente na água. O que ocorre com o bote? Tomando-se por base uma série de ocorrências similares de nosso dia a dia, a resposta imediata seria: a embarcação é impulsionada para trás, em sentido oposto ao da velocidade do homem.

Nesse contexto, desprezando-se a resistência da água ao movimento do bote, houve a conservação da quantidade de movimento total do sistema homem-bote, que permaneceu nula do início ao final do episódio. Se somarmos vetorialmente as quantidades de movimento do homem e do bote em qualquer instante, desde o momento imediatamente anterior ao seu salto até a situação imediatamente posterior, a soma será nula.

Isso ocorre porque estamos diante de um sistema isolado de forças externas, como foi descrito na seção anterior, e, em casos assim, deve ocorrer a conservação da quantidade de movimento total do sistema.

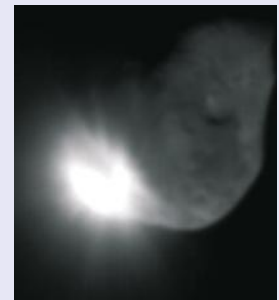
A conservação da quantidade de movimento também pode ser notada no mundo atômico, como acontece no decaimento radioativo alfa, em que o núcleo de um dos isótopos radioativos do urânio (U^{232}), inicialmente em repouso, se divide em um núcleo de tório e uma partícula alfa (núcleo de hélio), que adquirem movimento em sentidos opostos de modo que a quantidade de movimento total do sistema se mantém igual a zero.

A validade desse princípio fundamental ainda pode ser verificada nas imensidões cósmicas, por ocasião de explosões estelares ou de colisões entre asteroides e astros maiores, como planetas e satélites.

Ampliando o olhar

Se fosse possível ouvir sons no espaço, este teria sido um grande estrondo!

No dia 4 de julho de 2005 ocorreu uma espetacular trombada sideral, a cerca de 132 milhões de quilômetros da Terra. Um veículo-projétil do tamanho de uma máquina de lavar roupas, com massa de 130 kg e feito predominantemente de cobre, disparado da sonda norte-americana Deep Impact (Impacto Profundo) atingiu em cheio, a 37 mil km/h, o núcleo do cometa Temple I (raio próximo de 3 km), abrindo uma cratera do tamanho de um campo de futebol. Uma imensa nuvem de fragmentos brilhantes espalhou-se pelos arredores, o que foi fotografado em alta definição pelas câmeras acopladas a dois telescópios instalados na sonda, que permaneceu à distância segura de 500 mil quilômetros do local do choque.



Reuters/Lainstock

A análise dessas imagens trouxe preciosas informações sobre a constituição dos cometas, que sabidamente carregam gases, poeira, gelo e compostos orgânicos. Será estudado também se um processo como esse é capaz de desviar um asteroide eventualmente em rota de colisão com a Terra.

No breve intervalo de tempo da colisão, o sistema constituído pelo cometa e pelo veículo-projétil é isolado de forças externas, aplicando-se a ele um dos mais importantes conceitos físicos: o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento.

Enuncia-se que:

Em um sistema mecânico isolado de forças externas, conserva-se a quantidade de movimento total.

$$\Delta \vec{Q} = \vec{0} \text{ ou } \vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Façamos a verificação desse enunciado. Segundo o Teorema do Impulso, temos:

$$\vec{T}_{\text{total}} = \Delta \vec{Q}$$

Entretanto, em um sistema mecânico isolado, a resultante das forças externas é nula, o que permite dizer que o impulso total (da força resultante externa) também é nulo. Então:

$$\vec{T}_{\text{total}} = \vec{0}$$

Assim, temos:

$$\Delta \vec{Q} = \vec{0}$$

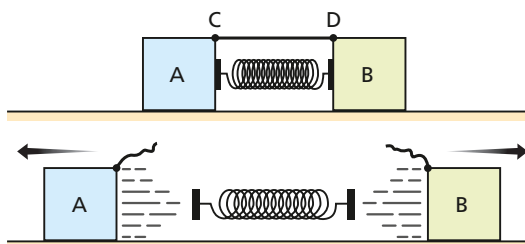
Ou, de modo equivalente:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Vejam alguns exemplos típicos em que se aplica o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento.

Exemplo 1

Considere o esquema seguinte, em que dois blocos, **A** e **B**, amarrados pelo fio **CD**, repousam sobre uma superfície horizontal e sem atrito. Os blocos estão inicialmente separados por uma mola ideal, que se encontra comprimida.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Admita que, em determinado instante, o fio **CD** seja cortado. O que ocorre? A mola distende-se bruscamente, impulsionando um bloco para cada lado.

Desprezando a influência do ar, temos, nesse caso, um sistema isolado de forças externas (as forças que os blocos recebem da mola são internas ao sistema), o que possibilita dizer que, nele, a quantidade de movimento total permanece constante. Assim:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Como os blocos estavam inicialmente em repouso, temos $\vec{Q}_{\text{inicial}} = \vec{0}$.

Logo:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \vec{0}$$

Ou: $\vec{Q}_A = -\vec{Q}_B$ (movimentos em sentidos opostos).

Em módulo, temos:

$$Q_A = Q_B$$

Sendo m_A e v_A , m_B e v_B , respectivamente, a massa e o módulo da velocidade de **A** e **B**, vem:

$$m_A v_A = m_B v_B \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{m_B}{m_A}$$

Observe que se $m_B > m_A$, teremos $v_B < v_A$. Na situação estudada, as velocidades e as respectivas massas são inversamente proporcionais.

Exemplo 2

Na fotografia ao lado, duas bolas de bilhar realizam uma colisão mecânica.

Por causa da breve duração da interação (da ordem de 10^{-2} s), os impulsos de eventuais forças externas – atritos, por exemplo – sobre cada bola são desprezíveis. Assim, essas forças não alteram de modo significativo a quantidade de movimento total do sistema, que permanece praticamente constante desde imediatamente antes da colisão até imediatamente após sua ocorrência.

/// Fotografia estroboscópica mostrando bolas de bilhar ao realizarem uma colisão mecânica.



Reimar Gaetner/AGE Fotostock/ Grupo Keystone

Portanto, é correto afirmar que, nessa colisão, o sistema é isolado de forças externas, valendo o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

De modo geral, os corpos que participam de uma colisão mecânica podem ser considerados um sistema isolado de forças externas, o que possibilita aplicar o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento.

Exemplo 3

Outra situação importante em que podemos aplicar o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento é a de uma explosão.

Também nesse caso, em razão da breve duração do fenômeno, os impulsos de eventuais forças externas são desprezíveis, não alterando de modo significativo a quantidade de movimento total do sistema, que se conserva, obedecendo à equação:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Na explosão de uma bomba, a soma vetorial das quantidades de movimento dos fragmentos imediatamente após o evento deve ser igual à quantidade de movimento inicial do artefato.

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}} \Rightarrow \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 + \dots = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$



Getty Images/Purestock

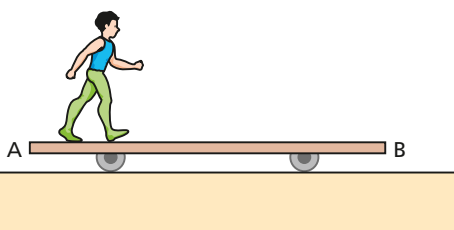
// Fotografia mostrando a explosão de uma bomba.

NOTAS!

- Nos exemplos vistos, em virtude da existência de forças internas aos sistemas, as quantidades de movimento de suas partes variam e apenas a quantidade de movimento total (soma vetorial das quantidades de movimento parciais) permanece constante.
- Não se deve confundir **sistema isolado** com **sistema conservativo**. Observe que nem todo sistema isolado é conservativo e nem todo sistema conservativo é isolado.
- O Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento é muito amplo, porém, aplicado a um sistema de duas partículas isoladas de forças externas, conduz a resultados equivalentes aos obtidos pela aplicação da 3ª e da 2ª Leis de Newton, o Princípio da Ação e Reação e o Princípio Fundamental da Dinâmica, respectivamente.

Exercícios Nível 1

25. Considere o esquema a seguir, em que, inicialmente, tanto o homem quanto o carrinho estão em repouso em relação ao solo. No local não há ventos e a influência do ar é desprezível. O carrinho é livre para se mover para a esquerda ou para a direita sobre trilhos horizontais, sem atrito.



Banco de imagens/
Arquivo da editora

Em determinado instante, o homem sai do ponto **A** e dirige-se para o ponto **B**, movendo-se na direção do eixo longitudinal do carrinho. Admitindo que, ao chegar a **B**, o homem para em relação ao carrinho, analise as seguintes proposições:

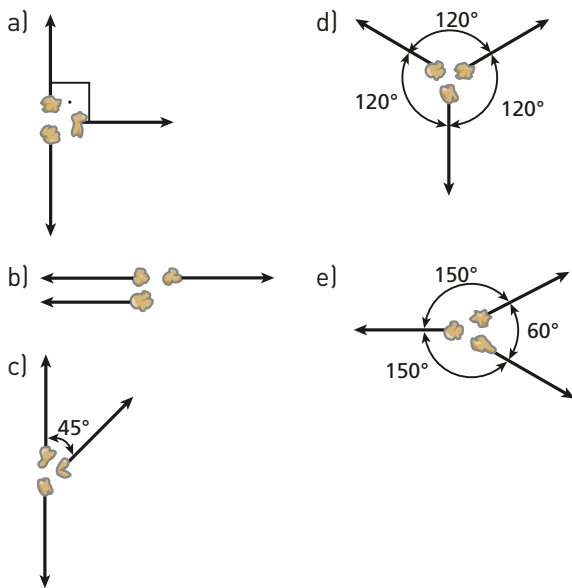
- (01) A quantidade de movimento total do sistema constituído pelo homem e pelo carrinho é nula em qualquer instante.
- (02) Enquanto o homem dirige-se do ponto **A** para o ponto **B**, sua quantidade de movimento é não nula e oposta à do carrinho.
- (04) Enquanto o homem dirige-se do ponto **A** para o ponto **B**, sua velocidade é não nula e oposta à do carrinho.

(08) Ao atingir o ponto **B**, o homem para em relação ao carrinho e este, por sua vez, para em relação ao solo.

(16) Após a chegada do homem a **B**, o sistema prossegue em movimento retilíneo e uniforme, por inércia.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

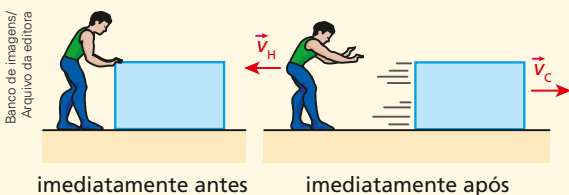
26. Uma bomba, inicialmente em repouso, explode, fragmentando-se em três partes que adquirem quantidades de movimento coplanares de intensidades iguais. Qual das alternativas a seguir melhor representa a situação das partes da bomba imediatamente após a explosão?



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

27. Sobre um plano horizontal e perfeitamente liso, repousam, frente a frente, um homem e uma caixa de massas respectivamente iguais a 80 kg e 40 kg. Em dado instante, o homem empurra a caixa, que se desloca com velocidade de módulo 10 m/s. Desprezando a influência do ar, calcule o módulo da velocidade do homem após o empurrão.

Resolução:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Reprodução/Arquivo da editora

Nos elementos componentes do sistema (homem e caixa), a resultante das forças externas é nula. Por isso, o sistema é **isolado**, o que permite aplicar o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Como $\vec{Q}_{\text{inicial}} = \vec{0}$ (o sistema estava inicialmente em repouso), temos:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{0}$$

Daí, vem:

$$\vec{Q}_H + \vec{Q}_C = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_H = -\vec{Q}_C$$

Considerando apenas os módulos das quantidades de movimento, pode-se escrever:

$$Q_H = Q_C \Rightarrow m_H v_H = m_C v_C$$

Então:

$$\frac{v_H}{v_C} = \frac{m_C}{m_H}$$

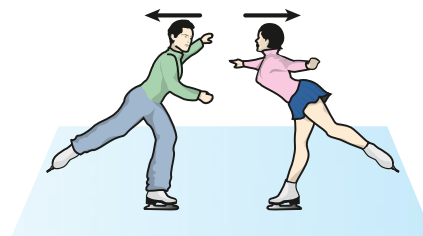
Sendo $v_C = 10 \text{ m/s}$, $m_C = 40 \text{ kg}$ e $m_H = 80 \text{ kg}$, calculemos v_H :

$$\frac{v_H}{10} = \frac{40}{80} \Rightarrow v_H = 5,0 \text{ m/s}$$

Nota:

- Nesse caso e em situações similares, as velocidades adquiridas pelos corpos têm intensidades inversamente proporcionais às respectivas massas.

28. (UFPE) Um casal participa de uma competição de patinação sobre o gelo. Em dado instante, o rapaz, de massa igual a 60 kg, e a garota, de massa igual a 40 kg, estão parados e abraçados frente a frente. Subitamente, o rapaz dá um empurrão na garota, que sai patinando para trás com uma velocidade de módulo igual a 0,60 m/s. Qual o módulo da velocidade do rapaz ao recuar, como consequência desse empurrão? Despreze o atrito com o chão e o efeito do ar.



Reprodução/Arquivo da editora

29. (Uema) No dia 04/07/2010, uma emissora de TV apresentou uma matéria sobre uma sacola que foi encontrada na rodoviária de São Paulo, com suspeita de conter uma bomba em seu interior. A polícia foi acionada e a equipe do GATE (Grupo de Ações Táticas Especiais) usou um robzinho para retirar a sacola do local e, em seguida, fazer os procedimentos de desativação do artefato. Ao ser detonado, supõe-se que $\frac{3}{5}$ de massa do artefato foi expelida com uma velocidade de módulo 40 m/s, e a outra parte foi expelida com uma velocidade de módulo:

- a) 40 m/s d) 60 m/s
 b) 30 m/s e) 120 m/s
 c) 20 m/s

30. Um astronauta de massa 70 kg encontra-se em repouso numa região do espaço em que as ações gravitacionais são desprezíveis. Ele está fora de sua nave, a 120 m dela, mas consegue mover-se com o auxílio de uma pistola que dispara projéteis de massa 100 g, os quais são expelidos com velocidade de $5,6 \cdot 10^2$ m/s. Dando um único tiro, qual o menor intervalo de tempo que o astronauta leva para atingir sua nave, suposta em repouso?

31. (Acafe-SC) Num ringue de patinação, dois patinadores, João, com massa de 84 kg, e Maria, com massa 56 kg, estão abraçados e em repouso sobre a superfície do gelo, ligados por um fio inextensível de 10,0 m de comprimento. Desprezando-se o atrito entre os patinadores e a superfície do gelo, é correto afirmar que, se eles se empurrarem, passando a descrever movimentos retilíneos uniformes em sentidos opostos, a distância, em metros, percorrida por Maria, antes de o fio se romper, é:

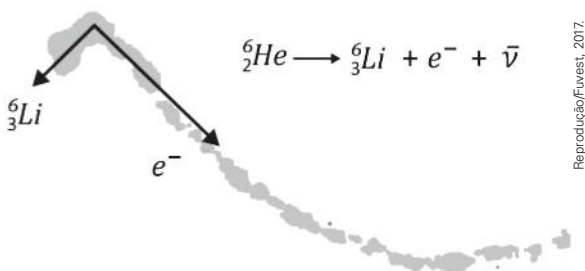
- a) 4,0 b) 5,0 c) 6,0 d) 8,0 e) 10,0

32. (UFPE) Uma menina de 40 kg é transportada na garupa de uma bicicleta de 10 kg, a uma velocidade constante de módulo 2,0 m/s, por seu irmão de 50 kg. Em dado instante, a menina salta para trás com velocidade de módulo 2,5 m/s em relação ao solo. Após o salto, o irmão continua na bicicleta, afastando-se da menina. Qual o módulo da velocidade da bicicleta, em relação ao solo, imediatamente após o salto? Admita que durante o salto o sistema formado pelos irmãos e pela bicicleta seja isolado de forças externas.






- a) 3,0 m/s c) 4,0 m/s e) 5,0 m/s
 b) 3,5 m/s d) 4,5 m/s

Exercícios Nível 2

33. (Fuvest-SP) A figura foi obtida em uma câmara de nuvens, equipamento que registra trajetórias deixadas por partículas eletricamente carregadas. Na figura, são mostradas as trajetórias dos produtos do decaimento de um isótopo do hélio (${}^6_2\text{He}$) em repouso: um elétron (e^-) e um isótopo de lítio (${}^6_3\text{Li}$), bem como suas respectivas quantidades de movimento linear, no instante do decaimento, representadas, em escala, pelas setas. Uma terceira partícula, denominada antineutrino ($\bar{\nu}$, carga zero), é também produzida nesse processo.



O vetor que melhor representa a direção e o sentido da quantidade de movimento do antineutrino é

- a)  b)  c)  d)  e) 
- Reprodução/Fuvest, 2017.

34. O sumô é uma modalidade de luta muito antiga, originária do Japão, e praticada ainda nos dias de hoje. Nesse desporto, dois lutadores (*rikichis*), geralmente de grande massa corpórea, têm como

meta derrubar o adversário ou levá-lo a pisar fora dos limites de um ringue circular (*dohyô*).

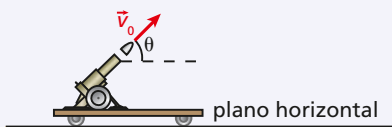


Paul Sakuma/Associated Press/Glow Images

Na imagem acima, um menino empurra um homem muito mais massivo que ele. Imaginando-se que não houvesse atrito entre os pés dos dois indivíduos e o solo e supondo-se que ambos estivessem inicialmente em repouso, seria correto afirmar que:

- a) a força aplicada pelo menino no homem é mais intensa que a força aplicada pelo homem no menino.
- b) o impulso dado pelo menino no homem tem intensidade menor que o impulso dado pelo homem no menino.
- c) depois do empurrão, a velocidade adquirida pelo menino terá intensidade igual à velocidade adquirida pelo homem.
- d) depois do empurrão, a quantidade de movimento adquirida pelo menino terá intensidade maior que a quantidade de movimento adquirida pelo homem.
- e) depois do empurrão, a quantidade de movimento total do menino e do homem será nula.

35. Um canhão, juntamente com o carrinho que lhe serve de suporte, tem massa M . Com o conjunto em repouso, dispara-se obliquamente um projétil de massa m , que, em relação ao solo, desliga-se do canhão com uma velocidade de módulo v_0 , inclinada de um ângulo θ com a horizontal. A figura abaixo retrata o evento:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Desprezando os atritos, determine o módulo da velocidade de recuo do conjunto canhão-carrinho.

Resolução:

Segundo a direção horizontal, o sistema é isolado de forças externas, o que permite

aplicar a essa direção o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Mas $\vec{Q}_{\text{inicial}} = \vec{0}$ (o conjunto estava inicialmente em repouso), logo:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_C + \vec{Q}_P = \vec{0}$$

Daí:

$$\vec{Q}_C = -\vec{Q}_P \text{ (movimentos horizontais em sentidos opostos)}$$

Em módulo:

$$Q_C = Q_P \Rightarrow Mv_C = mv_{0h}$$

Na última equação, v_{0h} é o módulo da componente horizontal de \vec{v}_0 .

Sendo $v_{0h} = v_0 \cos \theta \Rightarrow$, vem:

$$Mv_C = mv_0 \cos \theta \Rightarrow \boxed{v_C = \frac{m}{M} v_0 \cos \theta}$$

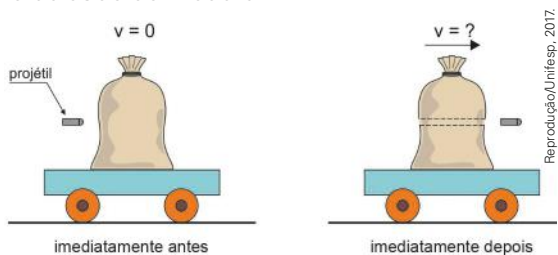
Nota:

- Na direção vertical, o sistema canhão-projétil **não é isolado** de forças externas. Isso ocorre devido à **força impulsiva** exercida pelo solo no ato do disparo. Essa força, que atua apenas durante o curtíssimo intervalo de tempo da explosão, tem intensidade significativa, produzindo um impulso que modifica a quantidade de movimento do canhão nessa direção.

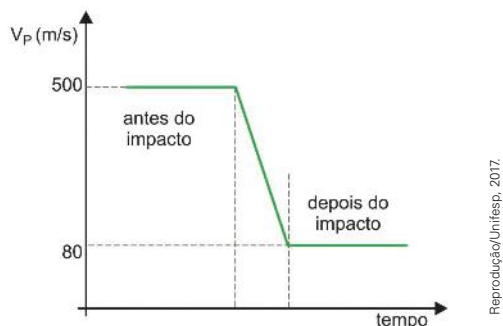
36. Um garoto de massa 48 kg está de pé sobre um skate de massa 2,0 kg, inicialmente em repouso sobre o solo plano e horizontal. Em determinado instante, ele lança horizontalmente uma pedra de massa 5,0 kg, que adquire uma velocidade de afastamento (relativa ao garoto) de módulo 11 m/s. Sendo v_G e v_P , respectivamente, os módulos da velocidade do garoto e da pedra em relação ao solo imediatamente após o lançamento, calcule v_G e v_P .

37. (Unifesp) Em um teste realizado na investigação de um crime, um projétil de massa 20 g é disparado horizontalmente contra um saco de areia apoiado, em repouso, sobre um carrinho que, também em repouso, está apoiado sobre uma superfície horizontal na qual pode mover-se livre de atrito. O projétil atravessa o saco perpendicularmente aos eixos das rodas do carrinho, e sai com velocidade menor que a inicial, enquanto o sistema formado pelo saco de areia e pelo car-

rinho, que totaliza 100 kg, sai do repouso com velocidade de módulo v .



O gráfico representa a variação da velocidade escalar do projétil, v_p , em função do tempo, nesse teste.



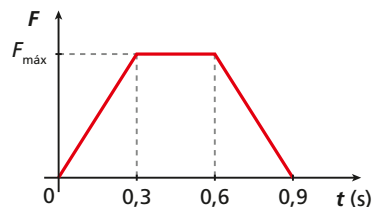
Calcule:

- o módulo da velocidade v , em m/s, adquirida pelo sistema formado pelo saco de areia e pelo carrinho imediatamente após o saco ter sido atravessado pelo projétil.
- o trabalho, em joules, realizado pela resultante das forças que atuaram sobre o projétil no intervalo de tempo em que ele atravessou o saco de areia.

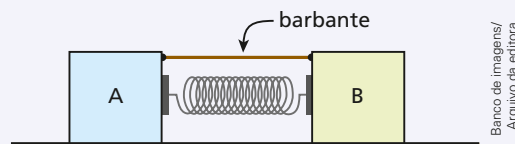
38. (Unicamp-SP) O lixo espacial é composto de partes de naves espaciais e satélites fora de operação abandonados em órbita ao redor da Terra. Esses objetos podem colidir com satélites, além de pôr em risco astronautas em atividades extraveiculares. Considere que, durante um reparo na estação espacial, um astronauta substituiu um painel solar, de massa $m_p = 80$ kg, cuja estrutura foi danificada. O astronauta estava inicialmente em repouso em relação à estação e ao abandonar o painel no espaço, lança-o com uma velocidade de módulo $v_p = 0,15$ m/s.

- Sabendo-se que a massa do astronauta é $m_a = 60$ kg, calcule o módulo de sua velocidade de recuo.
- O gráfico a seguir mostra, de forma simplificada, o módulo da força aplicada pelo astronauta sobre o painel em função do tempo durante o lançamento. Sabendo-se que a variação de momento linear é igual ao impulso, cujo

módulo pode ser obtido pela área do gráfico, calcule a intensidade da força máxima $F_{\text{máx}}$.



39. Dois blocos **A** e **B**, de massas respectivamente iguais a 2,0 kg e 4,0 kg, encontram-se em repouso sobre um plano horizontal perfeitamente polido. Entre os blocos, há uma mola de massa desprezível, comprimida, que está impedida de expandir-se devido a um barbante que conecta os blocos.



Em determinado instante, queima-se o barbante e a mola se expande, impulsionando os blocos. Sabendo que o bloco **B** adquire velocidade de intensidade 3,0 m/s e que a influência do ar é desprezível, determine:

- a intensidade da velocidade adquirida pelo bloco **A**;
- a energia potencial elástica armazenada na mola antes da queima do barbante.

Resolução:

a) O sistema é isolado de forças externas, o que permite aplicar o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Com o sistema inicialmente em repouso, porém, temos:

$$\vec{Q}_{\text{inicial}} = \vec{0}$$

$$\text{Logo: } \vec{Q}_{\text{final}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \vec{0}$$

Assim: $\vec{Q}_A = -\vec{Q}_B$ (movimentos em sentidos opostos)

$$\text{Em módulo: } Q_A = Q_B \Rightarrow m_A v_A = m_B v_B$$

Sendo $m_A = 2,0$ kg, $m_B = 4,0$ kg e $v_B = 3,0$ m/s, calculemos v_A :

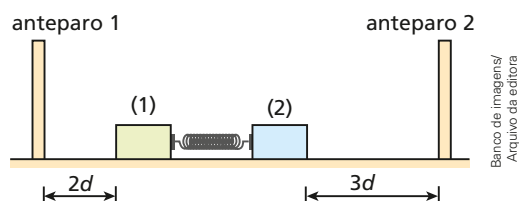
$$2,0 v_A = 4,0 \cdot 3,0 \therefore v_A = 6,0 \text{ m/s}$$

b) A energia elástica armazenada inicialmente na mola pode ser calculada somando-se as energias cinéticas adquiridas pelos blocos:

$$E_e = E_{c_A} + E_{c_B} \Rightarrow E_e = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_B v_B^2}{2}$$

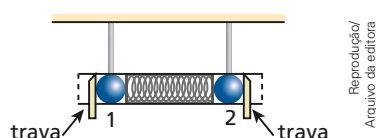
$$E_e = \frac{2,0 \cdot (6,0)^2}{2} + \frac{4,0 \cdot (3,0)^2}{2} \therefore \boxed{E_e = 54 \text{ J}}$$

40. Na figura, os blocos 1 e 2 têm massas respectivamente iguais a 2,0 kg e 4,0 kg e acham-se inicialmente em repouso sobre um plano horizontal e liso. Entre os blocos, existe uma mola leve de constante elástica igual a $1,5 \cdot 10^2 \text{ N/m}$, comprimida de 20 cm e impedida de distender-se devido a uma trava:



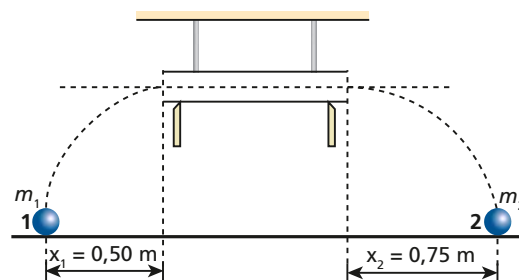
Em dado instante, a trava é liberada e a mola, ao se distender bruscamente, impulsiona os blocos, que, depois de percorrerem as distâncias indicadas, colidem com os anteparos. Não considerando o efeito do ar, determine:

- a relação entre os intervalos de tempo gastos pelos blocos 1 e 2 para atingirem os respectivos anteparos;
 - as energias cinéticas dos blocos depois de perderem o contato com a mola.
41. (Unesp-SP) A figura representa duas esferas, 1 e 2, de massas m_1 e m_2 , respectivamente, comprimindo uma mola e sendo mantidas por duas travas dentro de um tubo horizontal.



Quando as travas são retiradas simultaneamente, as esferas 1 e 2 são ejetadas do tubo, com velocidades de módulos v_1 e v_2 , respectivamente, e caem sob a ação da gravidade. A esfera 1 atinge o solo num ponto situado à distância $x_1 = 0,50 \text{ m}$, t_1 segundos depois de abandonar o tubo, e a esfera 2,

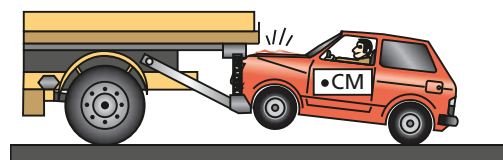
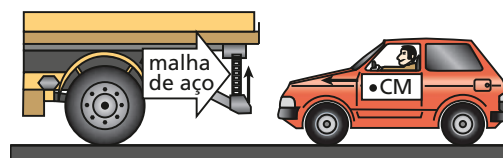
à distância $x_2 = 0,75 \text{ m}$, t_2 segundos depois de abandonar o tubo, conforme indicado na figura seguinte.



Desprezando a massa da mola e quaisquer atritos, determine:

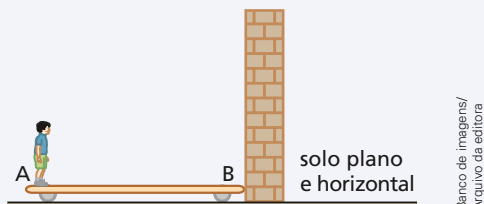
- as razões $\frac{t_2}{t_1}$ e $\frac{v_2}{v_1}$;
- a razão $\frac{m_2}{m_1}$.

42. (Unicamp-SP) O chamado “para-choque alicate” foi projetado e desenvolvido na Unicamp com o objetivo de minimizar alguns problemas com acidentes. No caso de uma colisão de um carro contra a traseira de um caminhão, a malha de aço de um para-choque alicate instalado no caminhão prende o carro e o ergue do chão pela plataforma, evitando, assim, o chamado “efeito guilhotina”. Imagine a seguinte situação: um caminhão de 6 000 kg está a 54,0 km/h e o automóvel que o segue, de massa igual a 2 000 kg, está a 72,0 km/h. O automóvel colide contra a malha, subindo na rampa. Após o impacto, os veículos permanecem engatados um ao outro.



- Qual o módulo da velocidade dos veículos imediatamente após o impacto?
- Qual a fração da energia cinética inicial do automóvel que foi transformada em energia potencial gravitacional, sabendo-se que o centro de massa do veículo subiu 50 cm? Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

43. Na situação esquematizada na figura, um garoto de massa 40 kg está posicionado na extremidade **A** de uma prancha de madeira, de massa 120 kg, dotada de rodas, que tem sua extremidade **B** em contato com um muro vertical. O comprimento **AB** da prancha é igual a 6,0 m.



Em determinado instante, o garoto começa a caminhar de **A** para **B** com velocidade de módulo 1,2 m/s em relação à prancha.

Admitindo que o sistema garoto-prancha seja isolado de forças externas e que o garoto pare de caminhar ao atingir a extremidade **B**, calcule:

- o módulo da velocidade da prancha em relação ao solo enquanto o garoto caminha de **A** para **B**;
- a distância x entre a extremidade **B** da prancha e o muro no instante em que o garoto atinge a extremidade **B**.

Resolução:

a) Sendo o sistema garoto-prancha isolado de forças externas, aplica-se o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento.

$$\vec{Q}_{\text{inicial}} = \vec{Q}_{\text{final}}$$

Com o sistema inicialmente em repouso, porém, temos:

$$\vec{Q}_{\text{inicial}} = \vec{0}$$

Logo: $\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_G + \vec{Q}_P = \vec{0}$

$$\vec{Q}_G = -\vec{Q}_P \text{ (movimentos em sentidos opostos)}$$

Em módulo: $Q_G = Q_P \Rightarrow m_G v_G = m_P v_P$

Sendo $m_G = 40$ kg e $m_P = 120$ kg, vem:

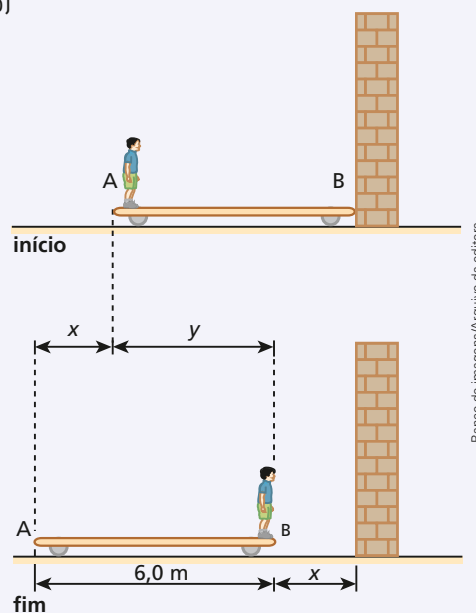
$$40v_G = 120v_P \Rightarrow v_G = 3v_P \quad \text{(I)}$$

Mas: $v_G + v_P = 1,2 \quad \text{(II)}$

(I) em (II): $3v_P + v_P = 1,2 \therefore v_P = 0,30$ m/s

ou $v_P = 30$ cm/s

b)



No esquema, x e y caracterizam, respectivamente, as distâncias percorridas pela prancha e pelo garoto em relação ao solo.

$$x + y = 6,0 \quad \text{(III)}$$

$$Q_G = Q_P \Rightarrow m_G v_G = m_P v_P$$

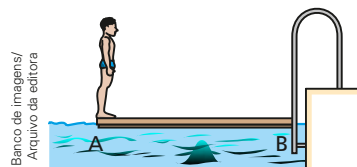
Como as velocidades do garoto e da prancha são constantes, temos:

$$40 \frac{y}{\Delta t} = 120 \frac{x}{\Delta t} \Rightarrow y = 3x \quad \text{(IV)}$$

Substituindo (IV) em (III), vem:

$$x + 3x = 6,0 \therefore x = 1,5 \text{ m}$$

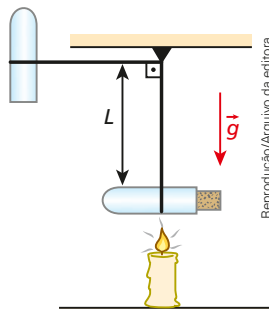
44. A figura abaixo representa um homem de massa 60 kg, de pé sobre uma prancha de madeira, de massa 120 kg, em repouso na água de uma piscina. Inicialmente, o homem ocupa o ponto **A**, oposto de **B**, onde a prancha está em contato com a escada.



Em determinado instante, o homem começa a andar, objetivando alcançar a escada. Não levando em conta os atritos entre a prancha e a água, ventos ou correntezas, e considerando para a prancha comprimento de 1,5 m, calcule:

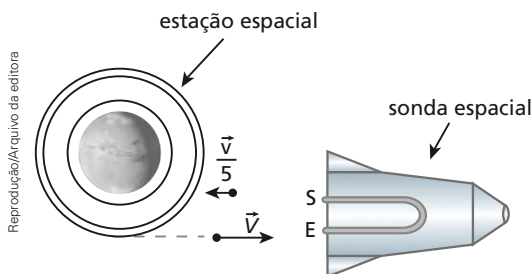
- a) a relação entre os módulos das quantidades de movimento do homem e da prancha, enquanto o homem não alcança o ponto **B**;
- b) a distância x do homem à escada, depois de ter atingido o ponto **B**;
- c) o módulo da velocidade escalar média do homem em relação à escada e em relação à prancha, se, ao se deslocar de **A** até **B**, ele gasta 2,0 s.

45. (Vunesp) Um tubo de massa M contendo uma gota de éter de massa desprezível é suspenso por meio de um fio leve, de comprimento L , conforme ilustrado na figura. No local, despreza-se a influência do ar sobre os movimentos e adota-se para o módulo da aceleração da gravidade o valor g . Calcule o módulo da velocidade horizontal mínima com que a rolha de massa m deve sair do tubo aquecido para que ele atinja a altura do seu ponto de suspensão.



46. (UnB-DF) Novos sistemas de propulsão de foguetes e de sondas espaciais estão sempre sendo estudados pela Nasa. Um dos projetos utiliza o princípio de atirar e receber bolas de metal para ganhar impulso. O sistema funcionaria da seguinte forma: em uma estação espacial, um disco, girando, atiraria bolas metálicas, a uma velocidade de 7 200 km/h. Uma sonda espacial as receberia e as mandaria de volta ao disco da estação. Segundo pesquisadores, esse sistema de receber e atirar bolas de metal poderia ser usado para dar o impulso inicial a naves ou sondas espaciais que já estivessem em órbita.

(Adaptado de: Jornal Folha de S.Paulo.)



Considere uma sonda espacial com massa de 1 tonelada, em repouso em relação a uma estação espacial, conforme ilustra a figura acima. Suponha que a sonda receba, pela entrada **E**, uma bola

de 10 kg, atirada a 7 200 km/h pelo disco da estação, e a devolva, pela saída **S**, com um quinto do módulo da velocidade inicial. Calcule, em m/s, o módulo da velocidade da sonda em relação à estação no instante em que a bola é devolvida.

47. Um barco de massa M , pilotado por um homem de massa m , atravessa um lago de águas tranquilas com velocidade constante \vec{v}_0 . Em dado instante, pressentindo perigo, o homem atira-se à água, desligando-se do barco com velocidade $-2\vec{v}_0$, medida em relação às margens do lago. Nessas condições, a velocidade do barco imediatamente após o homem ter-se atirado à água é mais bem expressada por:

- a) $\frac{2m}{M} \vec{v}_0$ c) $\frac{(M+3m)}{M} \vec{v}_0$ e) $\frac{(M+2m)}{M} \vec{v}_0$
- b) $\frac{m}{M} \vec{v}_0$ d) $\frac{(M-m)}{M} \vec{v}_0$

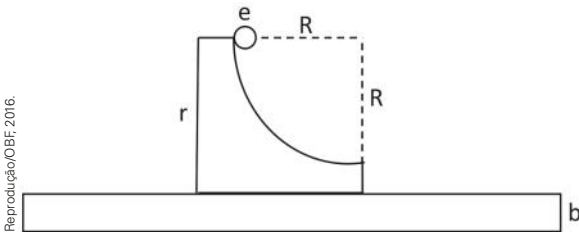
48. Considere uma espaçonave em movimento retilíneo, com velocidade escalar de $2,0 \cdot 10^3$ m/s numa região de influências gravitacionais desprezíveis. Em determinado instante, ocorre uma explosão e a espaçonave se fragmenta em duas partes, **A** e **B**, de massas respectivamente iguais a M e $2M$. Se a parte **A** adquire velocidade escalar de $8,0 \cdot 10^3$ m/s, qual a velocidade escalar adquirida pela parte **B**?

49. Uma bomba, em queda vertical nas proximidades da superfície terrestre, explode no instante em que a intensidade de sua velocidade é 20 m/s. A bomba fragmenta-se em dois pedaços, **A** e **B**, de massas respectivamente iguais a 2,0 kg e 1,0 kg. Sabendo que, imediatamente após a explosão, o pedaço **A** se move para baixo, com velocidade de intensidade 32 m/s, determine:

- a) a intensidade e o sentido da velocidade do pedaço **B** imediatamente depois da explosão;
- b) o aumento da energia mecânica do sistema devido à explosão.

50. (OBF) Com a intenção de estudar os movimentos dos corpos e suas relações com a massa, foi construído para uma feira de ciências um experimento que consiste de uma base **b**, uma rampa **r** e uma esfera **e**, conforme ilustrado na figura seguinte. A base foi fixada ao solo, de modo que sua superfície superior plana e absolutamente lisa ficasse perfeitamente nivelada na horizontal. A rampa, com formato circular de raio $R = 6,0$ m e massa $5M$, foi apoiada em repouso sobre a base, mas podendo deslizar sobre ela praticamente sem

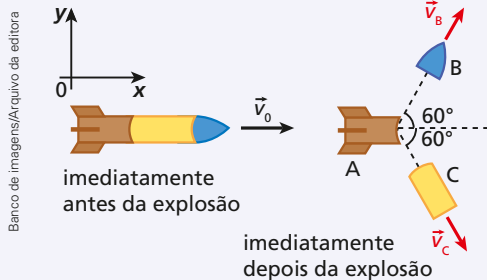
atrito. No ponto mais alto da rampa, uma esfera maciça, homogênea, de massa M , foi então abandonada, deslizando sem rolar pela rampa, conforme a figura abaixo. Desprezando-se a resistência do ar e qualquer outro atrito, e considerando o módulo da aceleração da gravidade $g = 10\text{m/s}^2$, determine, em m/s , o módulo da velocidade da esfera no instante em que ela perde o contato com a rampa.



51. Uma caixa de massa $1,0 \cdot 10^2 \text{ kg}$, inicialmente vazia, desloca-se horizontalmente sobre rodas num plano liso, com velocidade constante de $4,0 \text{ m/s}$. Em dado instante, começa a chover e as gotas, que caem verticalmente, vão-se depositando na caixa, que é aberta.

- Qual a velocidade da caixa depois de ter alojado $3,0 \cdot 10^2 \text{ kg}$ de água?
- Se no instante em que a caixa contém $3,0 \cdot 10^2 \text{ kg}$ parar de chover e for aberto um orifício no seu fundo, por onde a água possa escoar, qual será a velocidade final da caixa depois do escoamento de toda a água?

52. Na situação do esquema seguinte, um míssil move-se no sentido do eixo Ox com velocidade \vec{v}_0 , de módulo 40 m/s . Em dado instante, ele explode, fragmentando-se em três partes, **A**, **B** e **C**, de massas M , $2M$ e $2M$, respectivamente:



Sabendo que, imediatamente após a explosão, as velocidades das partes **B** e **C** valem $v_B = v_C = 110 \text{ m/s}$, determine as características da velocidade vetorial da parte **A**, levando em conta o referencial Oxy .

Resolução:

Como a explosão do míssil constitui um **sistema isolado de forças externas**, podemos aplicar o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

Segundo a direção Oy , podemos escrever:

$$\vec{Q}'_{y_A} + \vec{Q}'_{y_B} + \vec{Q}'_{y_C} = \vec{Q}_{y_A} + \vec{Q}_{y_B} + \vec{Q}_{y_C}$$

$$Mv'_{y_A} + 2Mv \sin 60^\circ - 2Mv \sin 60^\circ = 0$$

$$Mv'_{y_A} = 0 \Rightarrow v'_{y_A} = 0$$

O último resultado leva-nos a concluir que, segundo a direção Oy , a velocidade vetorial do fragmento **A** não apresenta componente imediatamente após a explosão.

Segundo a direção Ox , podemos escrever:

$$\vec{Q}'_{x_A} + \vec{Q}'_{x_B} + \vec{Q}'_{x_C} = \vec{Q}_{x_A} + \vec{Q}_{x_B} + \vec{Q}_{x_C}$$

$$Mv'_{x_A} + 2Mv \cos 60^\circ + 2Mv \cos 60^\circ = 5Mv_0$$

$$v'_{x_A} + 4v \cos 60^\circ = 5v_0$$

$$v'_{x_A} + 4v \frac{1}{2} = 5v_0 \Rightarrow v'_{x_A} = 5v_0 - 2v$$

Sendo $v_0 = 40 \text{ m/s}$ e $v = 110 \text{ m/s}$, calculemos v'_{x_A} , que é a componente, segundo Ox , da velocidade vetorial do fragmento **A** imediatamente após a explosão:

$$v'_{x_A} = 5 \cdot 40 - 2 \cdot 110 \therefore \boxed{v'_{x_A} = -20 \text{ m/s}}$$

Tendo em vista os valores obtidos para v'_{y_A} e v'_{x_A} , devemos responder:

Imediatamente após a explosão, o fragmento **A** tem velocidade na direção do eixo Ox , sentido oposto ao do referido eixo e módulo de 20 m/s .

53. (Olimpíada Americana de Física) Uma bomba de massa M , inicialmente em repouso, explode, fragmentando-se em três partes, **A**, **B** e **C**, de massas iguais. Imediatamente após a explosão, as partes **A** e **B** adquirem velocidades com módulo igual a v em direções perpendiculares entre si. Com base nessas informações, determine:

- o módulo v_C da velocidade da parte **C** imediatamente após a explosão, em função de v ;
- a energia potencial química, E , transformada em energia cinética das três partes, em função de M e v .

7. Introdução ao estudo das colisões mecânicas

Um jogo de sinuca é um excelente cenário para observarmos um bom número de colisões mecânicas. As bolas, lançadas umas contra as outras, interagem, alterando as características de seus movimentos iniciais.

As colisões mecânicas têm, em geral, breve duração. Quando batemos um prego usando um martelo, por exemplo, o intervalo de tempo médio de contato entre o martelo e o prego em cada impacto é da ordem de 10^{-2} s.

Dois fases podem ser distinguidas em uma colisão mecânica: a de **deformação** e a de **restituição**. A primeira tem início no instante em que os corpos entram em contato, passando a se deformar mutuamente, e termina quando um corpo para em relação ao outro. Nesse instante começa a segunda fase, que tem seu fim no momento em que os corpos se separam. A fase de restituição, entretanto, não ocorre em todas as colisões. Em uma batida entre dois automóveis que não se separam após o choque, por exemplo, praticamente não há restituição.

Dizemos que uma colisão mecânica é **unidimensional** (ou **frontal**) quando os centros de massa dos corpos se situam sobre uma mesma reta antes e depois do choque. Em nosso estudo, trataremos preferencialmente das colisões unidimensionais.



Taxi/Getty Images

Em um jogo de sinuca, o domínio do jogador sobre as colisões que ocorrem entre as bolas pode levá-lo à vitória.

8. Quantidade de movimento e energia mecânica nas colisões

Conforme comentamos na seção 6 deste tópico, os corpos que participam de qualquer tipo de colisão mecânica podem ser considerados um **sistema isolado de forças externas**.

De fato, recordemos que, em razão da breve duração da interação, os impulsos das eventuais forças externas sobre o sistema são praticamente desprezíveis, não modificando de modo sensível a quantidade de movimento total.

Portanto, para qualquer colisão, podemos aplicar o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento, que significa o seguinte:

Em qualquer tipo de colisão mecânica, a quantidade de movimento total do sistema mantém-se constante. A quantidade de movimento imediatamente após a interação é igual à quantidade de movimento imediatamente antes:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

É importante observar, entretanto, que, embora a quantidade de movimento total se conserve nas colisões, o mesmo não ocorre, necessariamente, com a energia mecânica (cinética) total do sistema. Quando dois corpos colidem, há, geralmente, dissipação de energia mecânica (cinética) em energia térmica, acústica e trabalho de deformação permanente, entre outras dissipações. Por isso, na maior parte das situações, os corpos que participam de uma colisão mecânica constituem um **sistema dissipativo**.

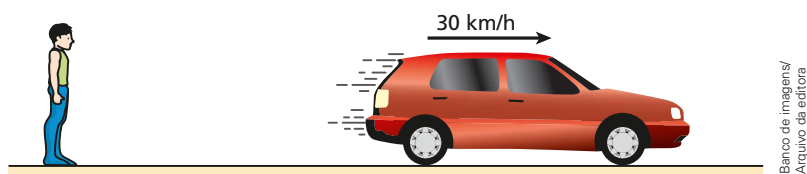
Excepcionalmente, porém, no caso de as perdas de energia mecânica serem desprezíveis – e somente nesse caso –, os corpos que participam da colisão constituem um **sistema conservativo**.

Ratificando, pois, frisemos que os corpos que participam de colisões mecânicas constituem normalmente sistemas isolados, sendo sistemas conservativos apenas excepcionalmente.

9. Velocidade escalar relativa

Este assunto foi tratado no tópico 2 de Cinemática, sobre movimento uniforme, mas é oportuno fazermos uma recapitulação.

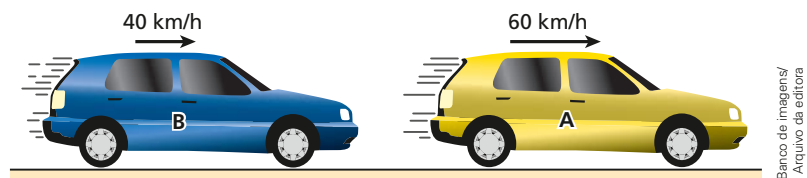
Considere a figura a seguir, em que um carro trafega em uma rua, tendo seu velocímetro indicando permanentemente 30 km/h.



A velocidade acusada pelo velocímetro do veículo é referente ao solo, ou seja, é dada, por exemplo, em relação a uma pessoa que, parada na calçada, observa o carro passar.

Movimentos no mesmo sentido

Considere, agora, o caso em que dois carros, **A** e **B**, trafegam por uma mesma avenida retilínea, no mesmo sentido. Admita que os módulos das velocidades escalares de **A** e **B** em relação ao solo sejam, respectivamente, 60 km/h e 40 km/h, com **A** à frente de **B**.



Se o motorista do carro **B** observar o carro da frente, verá este afastar-se dele com uma velocidade escalar de módulo 20 km/h, tudo se passando como se ele próprio estivesse parado e apenas o carro **A** se movesse a 20 km/h. Diz-se então que, no caso, a velocidade escalar relativa entre os dois carros tem módulo 20 km/h.

Podemos, assim, afirmar que:

Se duas partículas percorrem uma mesma trajetória no mesmo sentido, o módulo da velocidade escalar relativa entre elas é dado pelo módulo da diferença entre as velocidades escalares das duas, medidas em relação ao solo.

Exemplo 1



$$|v_{rel_{A,B}}| = |v_A - v_B|$$

$$|v_{rel_{A,B}}| = |10 - 50| \quad \therefore \quad |v_{rel_{A,B}}| = 40 \text{ m/s}$$

Exemplo 2

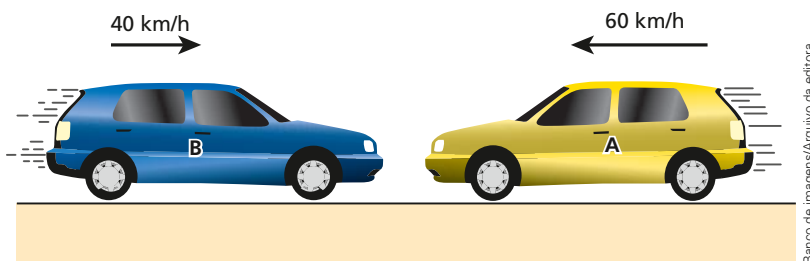


$$|v_{rel_{A,B}}| = |v_A - v_B|$$

$$|v_{rel_{A,B}}| = |60 - 20| \quad \therefore \quad |v_{rel_{A,B}}| = 40 \text{ m/s}$$

Movimentos em sentidos opostos

Imagine agora outra situação, em que os carros **A** e **B** trafegam por uma mesma estrada retilínea, em sentidos opostos. Sejam 60 km/h e 40 km/h, respectivamente, os módulos das velocidades escalares de **A** e de **B** em relação ao solo.



Se o motorista do carro **B** observar o carro **A**, verá este aproximar-se dele com uma velocidade escalar de módulo 100 km/h, tudo se passando como se ele próprio estivesse parado e apenas o carro **A** se movesse ao seu encontro a 100 km/h. Diz-se, então, que, no caso, a velocidade escalar relativa entre os dois carros tem módulo 100 km/h.

Dessa forma, podemos afirmar que:

Se duas partículas percorrem uma mesma reta em sentidos opostos, o módulo da velocidade escalar relativa entre elas é dado pela soma dos módulos das velocidades escalares das duas, medidas em relação ao solo.

Exemplo 3



$$|v_{rel_{A,B}}| = |v_A| + |v_B|$$

$$|v_{rel_{A,B}}| = |10| + |-50| \quad \therefore \quad |v_{rel_{A,B}}| = 60 \text{ m/s}$$

NOTA!

Os critérios apresentados para o cálculo da velocidade escalar relativa são aplicáveis somente aos casos em que as partículas têm velocidades muito menores que a da luz no vácuo ($c \cong 3,0 \cdot 10^8$ m/s). Para partículas dotadas de grandes velocidades, os efeitos relativísticos não podem ser desprezados e os critérios de cálculo sofrem alterações, como se estuda em **Física moderna** e também foi comentado no Tópico 2 de Cinemática (Unidade 1).

Exemplo 4



$$|v_{\text{rel},A,B}| = |v_A| + |v_B|$$

$$|v_{\text{rel},A,B}| = |-10| + |50| \quad \therefore \quad |v_{\text{rel},A,B}| = 60 \text{ m/s}$$

10. Coeficiente de restituição ou de elasticidade (e)

Sejam $|v_{\text{rel},af}|$ e $|v_{\text{rel},ap}|$, respectivamente, os módulos das velocidades escalares relativas de **afastamento** (após a colisão) e de **aproximação** (antes da colisão) de duas partículas que realizam uma colisão unidimensional. O **coeficiente de restituição ou de elasticidade** (e) para a referida colisão é definido pelo quociente:

$$e = \frac{v_{\text{rel},af}}{v_{\text{rel},ap}}$$

NOTAS!

- O coeficiente de restituição (e) não depende da massa, mas dos materiais dos corpos que participam da colisão.
- O coeficiente de restituição (e) é adimensional por ser calculado pelo quociente de duas grandezas medidas nas mesmas unidades.
- Pode-se demonstrar que:

$$0 \leq e \leq 1$$

11. Classificação das colisões quanto ao valor de e

De acordo com o valor assumido pelo coeficiente de restituição e , as colisões mecânicas unidimensionais classificam-se em duas categorias: **elásticas** e **inelásticas**.

Colisões elásticas (ou perfeitamente elásticas)

Constituem uma situação ideal em que o coeficiente de restituição é máximo, isto é:

$$e = 1$$

Se $e = \frac{|v_{rel_{af}}|}{|v_{rel_{ap}}|}$, decorre que:

$$1 = \frac{|v_{rel_{af}}|}{|v_{rel_{ap}}|} \Rightarrow |v_{rel_{af}}| = |v_{rel_{ap}}|$$

Em uma colisão elástica, as partículas aproximam-se (antes da colisão) e afastam-se (depois da colisão) com a mesma velocidade escalar relativa, em módulo.

Exemplo 1

Antes da colisão:

Depois da colisão:

$|v_{rel_{ap}}| = 70 + 10$
 $|v_{rel_{ap}}| = 80 \text{ m/s}$

$|v_{rel_{af}}| = 50 + 30$
 $|v_{rel_{af}}| = 80 \text{ m/s}$

$$e = \frac{|v_{rel_{af}}|}{|v_{rel_{ap}}|} = \frac{80}{80} \Rightarrow \boxed{e = 1}$$

Exemplo 2

Antes da colisão:

Depois da colisão:

$|v_{rel_{ap}}| = 60 - 40$
 $|v_{rel_{ap}}| = 20 \text{ m/s}$

$|v_{rel_{af}}| = 50 - 30$
 $|v_{rel_{af}}| = 20 \text{ m/s}$

$$e = \frac{|v_{rel_{af}}|}{|v_{rel_{ap}}|} = \frac{20}{20} \Rightarrow \boxed{e = 1}$$

Nas colisões elásticas, o sistema, além de isolado, também é conservativo. A energia mecânica (cinética) total do sistema, imediatamente após a interação, é igual à energia mecânica (cinética) total do sistema imediatamente antes da interação.

Colisão elástica \Rightarrow Sistema conservativo

$$E_{c_{final}} = E_{c_{inicial}}$$

Nas colisões elásticas, não há degradação de energia mecânica do sistema. Durante a fase de deformação há transformação de energia cinética em energia potencial elástica. Durante a fase de restituição ocorre o processo inverso, isto é, a energia potencial elástica armazenada é totalmente reconvertida em energia cinética.

Colisões inelásticas

Colisões totalmente inelásticas

São aquelas em que o coeficiente de restituição é nulo:

$$e = 0$$

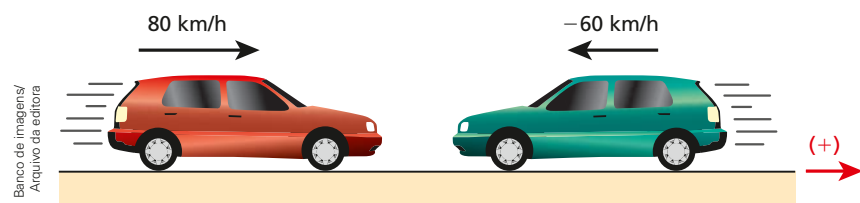
Sendo $e = \frac{|v_{rel_{af}}|}{|v_{rel_{ap}}|}$, decorre que:

$$0 = \frac{|v_{rel_{af}}|}{|v_{rel_{ap}}|} \Rightarrow |v_{rel_{af}}| = 0$$

Nas colisões totalmente inelásticas, como a velocidade escalar relativa de afastamento tem módulo nulo, concluímos que, após a interação, os corpos envolvidos **não se separam**.

Exemplo 3

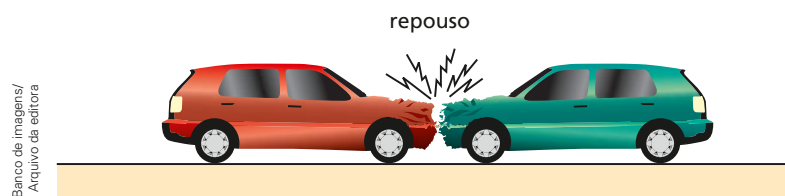
Antes da colisão:



$$|v_{rel_{ap}}| = 80 + 60$$

$$|v_{rel_{ap}}| = 140 \text{ km/h}$$

Depois da colisão:

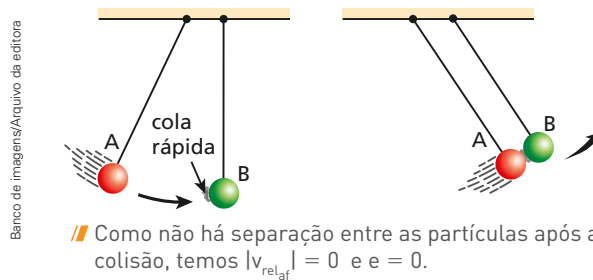


$$|v_{rel_{af}}| = 0$$

$$e = \frac{|v_{rel_{af}}|}{|v_{rel_{ap}}|} = \frac{0}{140} \Rightarrow e = 0$$

Exemplo 4

Pelo fato de os corpos permanecerem unidos (juntos) após uma colisão totalmente inelástica, inexistente a fase de restituição, ocorrendo apenas a fase de deformação.



Os corpos que participam de colisões totalmente inelásticas constituem sistemas dissipativos. A energia mecânica (cinética) total imediatamente após a interação é menor que a energia mecânica (cinética) total imediatamente antes da interação.

Colisão totalmente inelástica \Rightarrow Sistema dissipativo

$E_{\text{cfinal}} < E_{\text{cinicial}}$

Destaquemos que, nas colisões totalmente inelásticas, a dissipação de energia mecânica é relativamente grande. Há casos, como o esquematizado no exemplo 3, em que toda a energia mecânica se degrada, transformando-se em energia térmica, energia acústica, trabalho de deformação permanente, entre outras formas de energia, havendo, portanto, dissipação total.

Colisões parcialmente elásticas

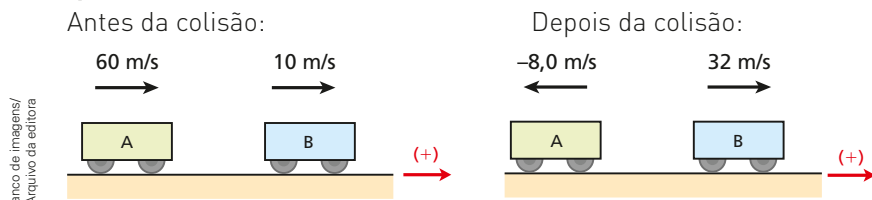
São aquelas em que o coeficiente de restituição se situa entre zero e um:

$$0 < e < 1$$

Sendo $e = \frac{|v_{\text{rel_af}}|}{|v_{\text{rel_ap}}|}$, decorre que $0 < \frac{|v_{\text{rel_af}}|}{|v_{\text{rel_ap}}|} < 1 \Rightarrow 0 < |v_{\text{rel_af}}| < |v_{\text{rel_ap}}|$

Nas colisões parcialmente elásticas, os corpos envolvidos separam-se após a interação, existindo, assim, a fase de restituição. Os corpos afastam-se, entretanto, com velocidade escalar relativa de módulo menor que o da aproximação.

Exemplo 5



Antes da colisão: $|v_{\text{rel_ap}}| = 60 - 10$

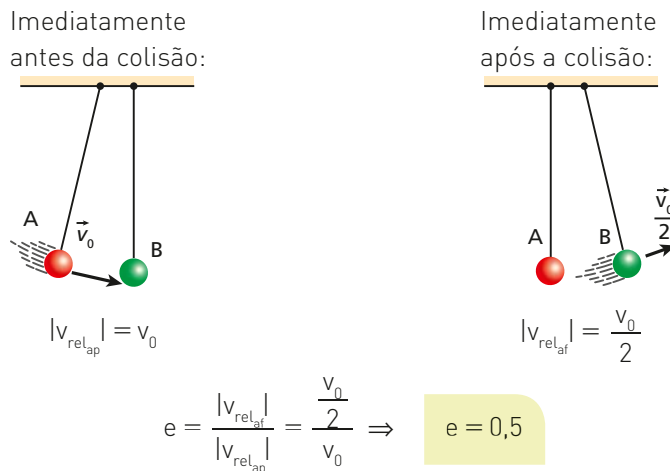
$|v_{\text{rel_ap}}| = 50 \text{ m/s}$

Depois da colisão: $|v_{\text{rel_af}}| = 32 + 8,0$

$|v_{\text{rel_af}}| = 40 \text{ m/s}$

$$e = \frac{|v_{\text{rel_af}}|}{|v_{\text{rel_ap}}|} = \frac{40}{50} \Rightarrow e = 0,8$$

Exemplo 6



Banco de imagens/
Arquivo da editora

Os corpos que participam de colisões parcialmente elásticas também constituem sistemas dissipativos. A energia mecânica (cinética) total imediatamente após a interação é menor que a energia mecânica (cinética) total imediatamente antes da interação.

Colisão parcialmente elástica \Rightarrow Sistema dissipativo
 $E_{c_final} < E_{c_inicial}$

JÁ PENSOU NISTO?

Colisões elásticas?

Nesta fotografia, seis esferas de massas praticamente iguais pendem de fios leves e inextensíveis. Por meio do fornecimento de energia mecânica (potencial) à esfera da esquerda, ela é elevada até certa altura. Soltando-a em seguida, ela desce, ocorrendo conversão de energia potencial em energia cinética. Ao atingir o nível inferior, essa esfera colide com sua vizinha em repouso e para. O impacto se transmite para as quatro esferas subsequentes, propagando-se, por meio delas, até manifestar-se na esfera da direita. Esta, por sua vez, se eleva e retorna, colidindo com a fileira das cinco esferas em repouso, fazendo a esfera da esquerda subir. Verifica-se, com o passar do tempo, que as subidas das esferas das extremidades vão se repetindo, porém, atingindo, em cada caso, uma altura máxima cada vez menor. Nota-se, finalmente, a imobilidade total das esferas, que ocorre quando o acréscimo de energia mecânica dado inicialmente para o sistema operar se degrada completamente em outras formas de energia (energia térmica e ruído, por exemplo). Na hipótese ideal de as colisões serem perfeitamente elásticas e a resistência do ar desprezível, o sistema permaneceria oscilando indefinidamente, com as esferas das extremidades atingindo sempre a mesma altura máxima após receber o impacto da esfera ao seu lado. Haveria, nesse caso, conservação da quantidade de movimento do sistema (em cada sucessão de cinco colisões em um mesmo sentido) e também da energia mecânica total.



Thinkstock/Getty Images

Exercícios Nível 1

54. [Cesgranrio] Duas bolas de gude idênticas, de massa m , movimentam-se em sentidos opostos (veja a figura) com velocidades de módulo v :



Indique a opção que pode representar as velocidades das bolas imediatamente depois da colisão:

- a)
 b)
 c)
 d)
 e)

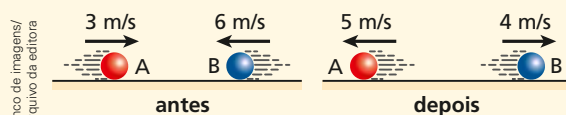
Ilustrações: Reprodução/Arquivo da editora

55. Nas situações representadas nas figuras seguintes, as partículas realizam colisões unidimensionais. Os módulos de suas velocidades escalares estão indicados. Determine, em cada caso, o coeficiente de restituição da colisão, dizendo, ainda, se a interação ocorrida foi elástica, totalmente inelástica ou parcialmente elástica.

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

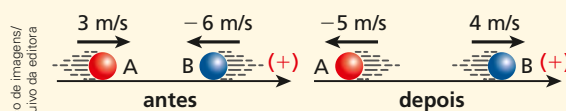
56. No esquema seguinte, estão representadas as situações imediatamente anterior e imediatamente posterior à colisão unidimensional ocorrida entre duas partículas **A** e **B**:



Sendo conhecidos os módulos das velocidades escalares das partículas, calcule a relação $\frac{m_A}{m_B}$ entre suas massas.

Resolução:

Qualquer colisão mecânica constitui um sistema isolado de forças externas, o que permite a aplicação do Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento:



$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

$$\vec{Q}_{f_A} + \vec{Q}_{f_B} = \vec{Q}_{i_A} + \vec{Q}_{i_B}$$

Como a colisão é unidimensional, levando em conta a orientação atribuída à trajetória, raciocinemos em termos escalares:

$$Q_{f_A} + Q_{f_B} = Q_{i_A} + Q_{i_B}$$

$$m_A v_{f_A} + m_B v_{f_B} = m_A v_{i_A} + m_B v_{i_B}$$

$$m_A(-5) + m_B(4) = m_A(3) + m_B(-6)$$

$$8m_A = 10m_B \Rightarrow \boxed{\frac{m_A}{m_B} = \frac{5}{4}}$$

57. Os carrinhos representados nas figuras a seguir, ao percorrer trilhos retilíneos, colidem frontalmente. Os módulos de suas velocidades escalares antes e depois das interações estão indicados nos esquemas. Calcule, para as situações dos itens **a** e **b**, a relação m_1/m_2 entre as massas dos carrinhos 1 e 2.

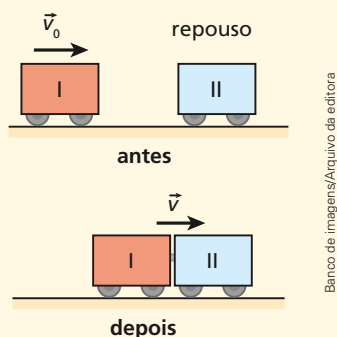
- a)
- b)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

58. Um vagão (I) de massa M , movendo-se sobre trilhos retos e horizontais com velocidade de intensidade v_0 , colide com um vagão (II) de massa m , inicialmente em repouso. Se o vagão (I) fica acoplado ao vagão (II), determine a intensidade da velocidade do conjunto imediatamente após a colisão.

Resolução:

Os esquemas seguintes representam as situações imediatamente anterior e imediatamente posterior à colisão:



Aplicando o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento, temos:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

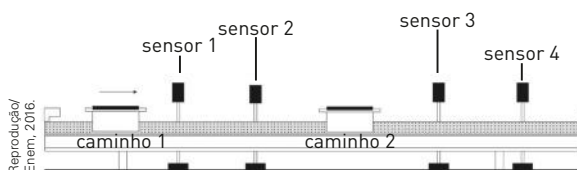
$$(M + m)v = Mv_0 \Rightarrow v = \frac{M}{M + m} v_0$$

Destaquemos que a colisão é totalmente inelástica e que $v < v_0$.

59. Uma locomotiva de massa 200 t movendo-se sobre trilhos retos e horizontais com velocidade de intensidade 18,0 km/h colide com um vagão de massa 50 t inicialmente em repouso. Se o vagão fica acoplado à locomotiva, determine a intensidade da velocidade do conjunto imediatamente após a colisão.

60. (Fuvest-SP) Dois patinadores de massas iguais deslocam-se numa mesma trajetória retilínea, com velocidades escalares respectivamente iguais a 1,5 m/s e 3,5 m/s. O patinador mais rápido persegue o outro. Ao alcançá-lo, salta verticalmente e agarra-se às suas costas, passando os dois a deslocarem-se com velocidade escalar v . Desprezando o atrito, calcule o valor de v .

61. (Enem) O trilho de ar é um dispositivo utilizado em laboratórios de Física para analisar movimentos em que corpos de prova (carrinhos) podem se mover com atrito desprezível. A figura ilustra um trilho horizontal com dois carrinhos (1 e 2) em que se realiza um experimento para obter a massa do carrinho 2. No instante em que o carrinho 1, de massa 150,0 g, passa a se mover com velocidade escalar constante, o carrinho 2 está em repouso. No momento em que o carrinho 1 se choca com o carrinho 2, ambos passam a se movimentar juntos com velocidade escalar constante. Os sensores eletrônicos distribuídos ao longo do trilho determinam as posições e registram os instantes associados à passagem de cada carrinho, gerando os dados do quadro.

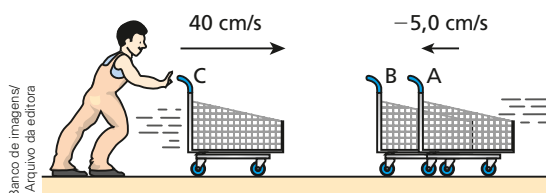


Carrinho 1		Carrinho 2	
Posição (cm)	Instante (s)	Posição (cm)	Instante (s)
15,0	0,0	45,0	0,0
30,0	1,0	45,0	1,0
75,0	8,0	75,0	8,0
90,0	11,0	90,0	11,0

Com base nos dados experimentais, o valor da massa do carrinho 2 é igual a

- a) 50,0 g.
- b) 250,0 g.
- c) 300,0 g.
- d) 450,0 g.
- e) 600,0 g.

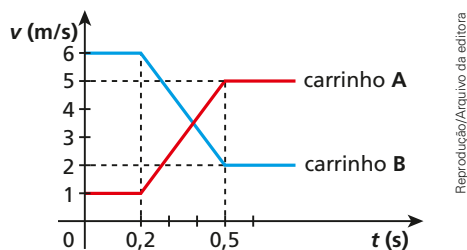
62. Ao perceber que dois carrinhos vazios **A** e **B** se deslocam acoplados ao seu encontro com uma velocidade escalar de $-5,0$ cm/s, o funcionário de um supermercado lança contra eles um terceiro carrinho, **C**, também vazio, com velocidade escalar de 40 cm/s, como representa a figura a seguir.



Ao colidir com o conjunto **A-B, C** nele se encaixa e os três carrinhos seguem unidos com velocidade escalar v . Admitindo que os carrinhos sejam iguais e que se movimentem ao longo de uma mesma reta horizontal sem a ação de atritos nos eixos das rodas, tanto antes como depois da interação, pede-se determinar:

- o valor de v ;
- a intensidade do impulso que **C** exerce no conjunto **A-B** no ato da colisão. Considere que cada carrinho tenha massa igual a 15 kg.

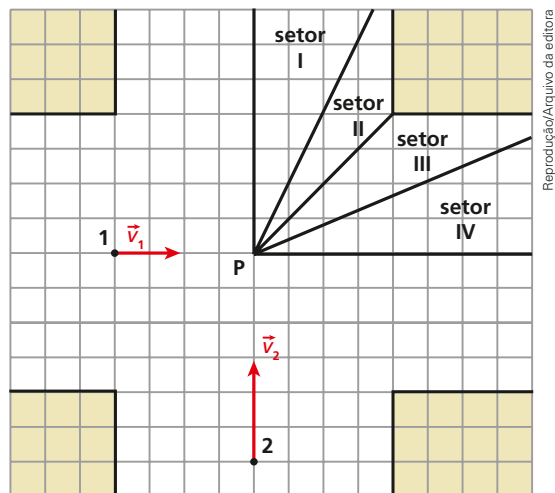
63. (UFPB) A figura a seguir apresenta os gráficos da velocidade *versus* tempo para a colisão unidimensional ocorrida entre dois carrinhos **A** e **B**:



Supondo que não existam forças externas resultantes e que a massa do carrinho **A** valha 0,2 kg, calcule:

- o coeficiente de restituição da colisão;
 - a massa do carrinho **B**.
64. (UFRN) A figura a seguir mostra dois pequenos veículos, 1 e 2, de massas iguais, que estão pres-

tes a colidir no ponto **P**, que é o ponto central do cruzamento de duas ruas perpendiculares entre si. Toda região em torno do cruzamento é plana e horizontal. Imediatamente antes da colisão, as velocidades dos veículos têm as direções representadas na figura, tendo o veículo 2 uma velocidade que é 1,5 vez maior que a do veículo 1.



Após a colisão, os veículos vão deslizar juntos pela pista molhada, praticamente sem atrito.

Com base nessas informações, pode-se afirmar que o setor ao longo do qual os veículos vão deslizar juntos é o:

- setor I.
- setor II.
- setor III.
- setor IV.

Exercícios Nível 2

65. A fotografia mostrada abaixo expõe a reconstituição de um acidente, resultado de uma imprudência. Um carro de massa igual a 1 t, ao tentar ultrapassar de maneira incorreta um caminhão, acabou batendo de frente em outro carro, de massa 800 kg, que estava parado no acostamento. Em virtude de a estrada estar muito lisa por causa de uma chuva ocorrida momentos antes da colisão, os carros se moveram juntos em linha reta, com uma velocidade de intensidade 54 km/h, após o impacto.



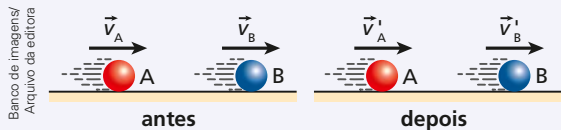
Admitindo-se que a força que deformou os veículos agiu durante 0,10 s, são feitas as seguintes afirmações para a situação descrita:

- O choque foi totalmente inelástico e, por isso, não houve conservação da quantidade de movimento total do sistema.
- A intensidade da velocidade do carro de 1 t antes da batida era de 97,2 km/h.
- A intensidade do impulso em cada carro no ato da colisão foi de $1,2 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{s}$.
- A intensidade da força média que deformou os veículos foi de $1,2 \cdot 10^3 \text{ N}$.

Estão corretas somente:

- I e II.
- II e III.
- III e IV.
- I, II e III.
- II, III e IV.

66. Duas pequenas esferas de massas iguais realizam um choque unidimensional e perfeitamente elástico sobre uma mesa do laboratório. No esquema abaixo, mostra-se a situação imediatamente anterior e a imediatamente posterior ao evento:



Supondo conhecidos os módulos de \vec{v}_A e \vec{v}_B (v_A e v_B), determine os módulos de \vec{v}'_A e \vec{v}'_B (v'_A e v'_B).

Resolução:

Aplicando ao choque o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento, vem:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

$$\vec{Q}'_A + \vec{Q}'_B = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B$$

Escalarmente:

$$Q_A + Q_B = Q_A + Q_B$$

$$mv'_A + mv'_B = mv_A + mv_B$$

Logo:

$$v'_A + v'_B = v_A + v_B \quad (I)$$

Sabemos também que:

$$e = \frac{|v_{\text{relat}}|}{|v_{\text{relap}}|} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

Sendo o choque perfeitamente elástico, temos $e = 1$, decorrendo que:

$$1 = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \Rightarrow v'_B - v'_A = v_A - v_B \quad (II)$$

Resolvendo o sistema constituído pelas equações (I) e (II), obtemos:

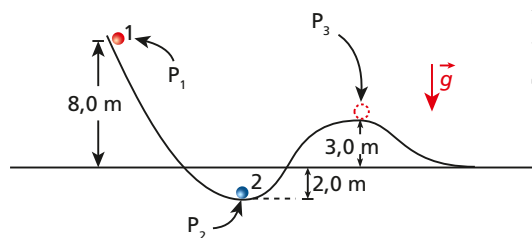
$$\boxed{v'_A = v_B} \quad \text{e} \quad \boxed{v'_B = v_A}$$

Cabe aqui uma observação importante:

Num choque unidimensional e perfeitamente elástico entre partículas de massas iguais, estas **trocamos suas velocidades**.

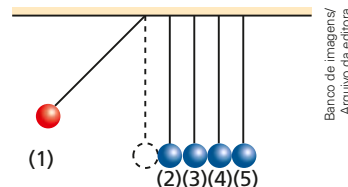
67. Duas bolas de boliche **A** e **B**, de massas iguais, percorrem uma mesma canaleta retilínea onde realizam um choque perfeitamente elástico. Se as velocidades escalares de **A** e **B** imediatamente antes da colisão valem $v_A = 2,0 \text{ m/s}$ e $v_B = -1,0 \text{ m/s}$, quais as velocidades escalares v'_A e v'_B de **A** e **B** imediatamente depois da colisão?

68. (UFPI) A figura representa duas partículas idênticas, 1 e 2, ambas de massa igual a m , e ambas em repouso nas posições indicadas, P_1 e P_2 . O módulo da aceleração da gravidade no local é $g = 10 \text{ m/s}^2$. A partícula 1 é então abandonada em sua posição inicial, indo colidir elasticamente com a partícula 2.



Na ausência de qualquer atrito, qual a intensidade da velocidade da partícula 2 ao atingir a posição P_3 ?

69. Considere a montagem experimental representada a seguir, em que a esfera 1 tem massa $2M$ e as demais (2, 3, 4 e 5) têm massa M :

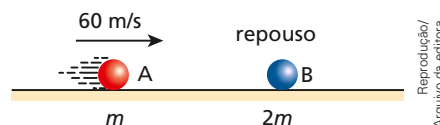


Abandonando-se a esfera 1 na posição indicada, ela desce, chegando ao ponto mais baixo de sua trajetória com velocidade \vec{v}_0 . Supondo que todas as possíveis colisões sejam perfeitamente elásticas, podemos afirmar que, após a interação:

- a) a esfera 5 sai com velocidade $2\vec{v}_0$.
- b) as esferas 2, 3, 4 e 5 saem com velocidade $\frac{\vec{v}_0}{2}$.
- c) as esferas 4 e 5 saem com velocidade \vec{v}_0 .
- d) as esferas 2, 3, 4 e 5 saem com velocidade \vec{v}_0 .
- e) todas as esferas permanecem em repouso.

70. (UPM-SP) Na figura, representamos uma mesa perfeitamente lisa e duas esferas **A** e **B** que vão realizar uma colisão unidimensional e perfeitamente elástica.

A esfera **A** tem massa m e, antes da colisão, se desloca com velocidade constante de 60 m/s . A esfera **B** tem massa $2m$ e, antes da colisão, está em repouso.

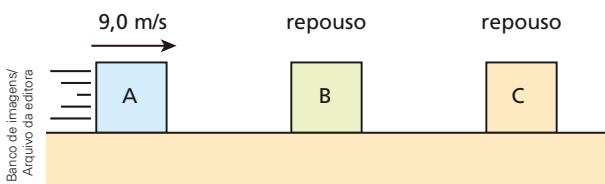


Não considere a rotação das esferas.

Sejam E_A a energia cinética de **A** antes da colisão e E_B a energia cinética de **B** após a colisão. Indique a opção correta:

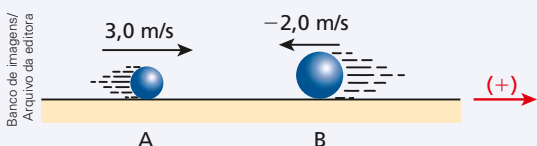
- a) $E_B = \frac{4}{9}E_A$ c) $E_B = E_A$ e) $E_B = 2E_A$
 b) $E_B = \frac{8}{9}E_A$ d) $E_B = \frac{9}{8}E_A$

71. Três blocos, **A**, **B** e **C**, de dimensões idênticas e massas respectivamente iguais a $2M$, M e M , estão inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal sem atrito, alinhados num ambiente em que a influência do ar é desprezível. O bloco **A** é então lançado contra o bloco **B** com velocidade escalar de $9,0$ m/s, conforme indica a figura.



Admitindo-se que as colisões entre **A**, **B** e **C** sejam unidimensionais e perfeitamente elásticas, determine as velocidades escalares desses blocos depois de ocorridas todas as colisões possíveis entre eles.

72. A figura representa a situação imediatamente anterior à colisão unidimensional entre duas partículas **A** e **B**:



Sabendo que a massa de **B** é o dobro da de **A** e que o coeficiente de restituição da colisão vale $0,8$, calcule as velocidades escalares de **A** e **B** imediatamente após o choque.

Resolução:

Aplicando o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento, temos:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

$$\vec{Q}'_A + \vec{Q}'_B = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B$$

$$m\vec{v}'_A + 2m\vec{v}'_B = m\vec{v}_A + 2m\vec{v}_B$$

Escalarmente:

$$v'_A + 2v'_B = 3,0 + 2(-2,0)$$

$$v'_A + 2v'_B = -1,0 \quad (\text{I})$$

Sendo $e = 0,8$, vem:

$$e = \frac{|v'_{\text{rel}}|}{|v_{\text{rel}}|} \Rightarrow 0,8 = \frac{v'_B - v'_A}{3,0 + 2,0}$$

$$v'_B - v'_A = 4,0 \quad (\text{II})$$

Fazendo (I) + (II), calculamos v'_B :

$$3v'_B = 3,0 \therefore v'_B = 1,0 \text{ m/s}$$

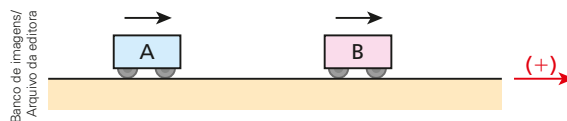
Substituindo em (I), obtemos v'_A :

$$v'_A + 2(1,0) = -1,0$$

$$v'_A = -3,0 \text{ m/s}$$

Observe que, imediatamente depois da colisão, **A** se moverá para a esquerda e **B**, para a direita.

73. A figura seguinte representa dois carrinhos **A** e **B** de massas m e $3m$, respectivamente, que percorrem um mesmo trilho retilíneo com velocidades escalares $v_A = 15$ m/s e $v_B = 5,0$ m/s:



Se o choque mecânico que ocorre entre eles tem coeficiente de restituição $0,2$, quais as velocidades escalares após a interação? Despreze os atritos.

74. Duas partículas 1 e 2, de massas respectivamente iguais a $3,0$ kg e $2,0$ kg, percorrem uma mesma reta orientada com velocidades escalares $v_1 = 2,0$ m/s e $v_2 = -8,0$ m/s. Supondo que essas partículas colidam e que o coeficiente de restituição do impacto seja $0,5$, determine:

- as velocidades escalares de 1 e de 2 imediatamente após o impacto;
- a relação entre as energias cinéticas do sistema (partículas 1 e 2) imediatamente após e imediatamente antes do impacto.

75. Uma esfera **A**, de massa 200 g, colidiu frontalmente com outra, **B**, de massa 300 g, inicialmente em repouso. Sabendo que **A** atingiu **B** com velocidade escalar de 5,0 cm/s e que esta última adquiriu, imediatamente após a colisão, velocidade escalar de 3,0 cm/s, determine:

- o coeficiente de restituição para a colisão ocorrida;
- o percentual de energia cinética dissipada por efeito do impacto.

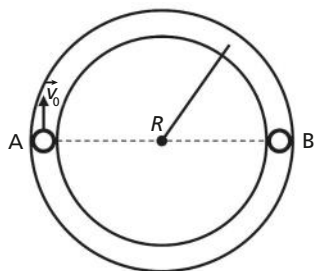
76. No diagrama seguinte, estão representadas as variações das velocidades escalares de duas partículas **A** e **B**, que realizam um choque unidimensional sobre uma mesa horizontal e sem atrito.



Com base no gráfico:

- classifique o choque como elástico, totalmente inelástico ou parcialmente elástico;
- calcule a massa de **B**, se a de **A** vale 7,0 kg;
- determine a intensidade média da força trocada pelas partículas por ocasião do choque.

77. (OBC) Em uma canaleta circular, plana e horizontal, podem deslizar sem atrito duas pequenas esferas **A** e **B**, de massas iguais a m . A figura mostra o sistema no instante $t = 0$.



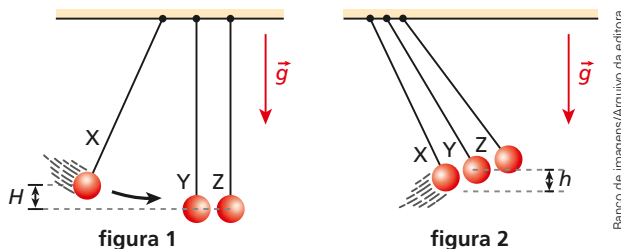
Nesse instante, a esfera **A** é lançada com velocidade de módulo v_0 . Depois de um intervalo de tempo Δt ela colide com a esfera **B**, inicialmente em repouso. O coeficiente de restituição é igual a e . Após a primeira colisão, as esferas voltam a colidir decorrido um intervalo de tempo $\Delta t'$. Pode-se afirmar que:

- $\Delta t' = \Delta t$
- $\Delta t' = 2\Delta t$
- $\Delta t' = e\Delta t$
- $\Delta t' = \frac{2\Delta t}{e}$
- $\Delta t' = e\frac{\Delta t}{2}$

78. (Unicamp-SP) Um objeto de massa $m_1 = 4,0$ kg e velocidade escalar $v_1 = 3,0$ m/s choca-se com um objeto em repouso, de massa $m_2 = 2,0$ kg. A colisão ocorre de modo que a perda de energia cinética é máxima, mas consistente com o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento.

- Quais as velocidades escalares dos objetos imediatamente após a colisão?
- Qual a variação da energia cinética do sistema?

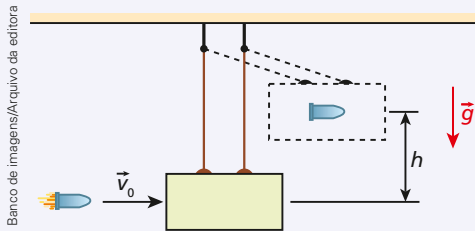
79. Existe um brinquedo infantil que consiste em três pêndulos idênticos, **X**, **Y** e **Z**. Com **Y** e **Z** em repouso, abandona-se o pêndulo **X** a partir do repouso de uma altura H em relação à linha horizontal que contém as massas de **Y** e **Z**, conforme representa a figura 1.



Com a colisão totalmente inelástica verificada entre todos os pêndulos, o conjunto se eleva até uma altura máxima h , como indica a figura 2. Desprezando-se as massas dos fios, as dimensões das esferas e a resistência do ar, pede-se determinar o valor de h em função de H .

80. (UFBA) Um bloco **A**, de massa 2,0 kg, deslocando-se sem atrito sobre uma superfície horizontal plana, com velocidade de módulo igual a v , atinge em uma colisão frontal um bloco **B**, de massa 3,0 kg, inicialmente em repouso. Após a colisão, **A** e **B** deslocam-se unidos, com velocidade de módulo igual a 6,0 m/s. Admita agora que a colisão ocorra, nas mesmas condições da colisão anterior, entre o bloco **A** e uma mola ideal. A mola tem constante elástica igual a $5,0 \cdot 10^5$ N/m e foi colocada no lugar de **B**, com uma das extremidades fixa. Determine a deformação máxima da mola, em unidades do SI e em notação científica. Despreze qualquer perda de energia mecânica na interação entre o bloco **A** e a mola.

81. O dispositivo representado na figura a seguir denomina-se **pêndulo balístico** e pode ser utilizado para a determinação da intensidade da velocidade de projéteis:



Considere desprezíveis os pesos das hastes e o efeito do ar. Um projétil de massa m é disparado horizontalmente com velocidade \vec{v}_0 contra o bloco de massa M , inicialmente em repouso. O projétil fica incrustado no bloco e o conjunto eleva-se a uma altura máxima h . Sendo g o módulo da aceleração da gravidade, determine, em função de M , m , g e h , a intensidade de \vec{v}_0 .

Resolução:

Se o projétil fica incrustado no bloco, a colisão é totalmente inelástica. Calculemos o módulo v da velocidade do conjunto bloco-projétil, imediatamente após o impacto. Para tanto, apliquemos à colisão o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento:

$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}} \Rightarrow (M + m)v = mv_0$$

Daí:

$$v = \frac{m}{M + m}v_0 \quad (\text{I})$$

Devido às condições ideais, imediatamente após a colisão, o sistema torna-se conservativo, valendo a partir daí o Princípio de Conservação da Energia Mecânica.

Adotemos o plano horizontal de referência passando pela posição inicial do centro de massa do conjunto bloco-projétil. Assim, imediatamente após o impacto, a energia mecânica do conjunto será puramente cinética e, no ponto de altura máxima, puramente potencial de gravidade.

$$E_{\text{mfinal}} = E_{\text{minicial}} \Rightarrow E_p = E_c$$

$$(M + m)gh = \frac{(M + m)v^2}{2} \Rightarrow gh = \frac{v^2}{2} \quad (\text{II})$$

Substituindo (I) em (II), vem:

$$gh = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{M + m} \right)^2 v_0^2$$

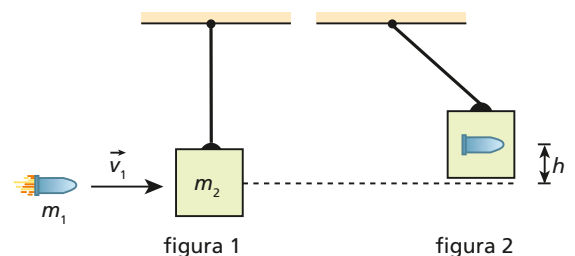
Logo:

$$v_0 = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh}$$

Nota:

- Embora imediatamente após o impacto o sistema seja conservativo, analisado do início ao fim do fenômeno, ele assim não pode ser considerado, pois, devido à colisão totalmente inelástica ocorrida, uma fração da energia mecânica total é dissipada.

82. (UFJF-MG) A figura 1 a seguir ilustra um projétil de massa $m_1 = 20$ g disparado horizontalmente com velocidade de módulo $v_1 = 200$ m/s contra um bloco de massa $m_2 = 1,98$ kg, em repouso, suspenso na vertical por um fio de massa desprezível. Após sofrerem uma colisão perfeitamente inelástica, o projétil fica incrustado no bloco e o sistema projétil-bloco atinge uma altura máxima h , conforme representado na figura 2.



Desprezando-se a força de resistência do ar e adotando-se $g = 10$ m/s², resolva os itens abaixo.

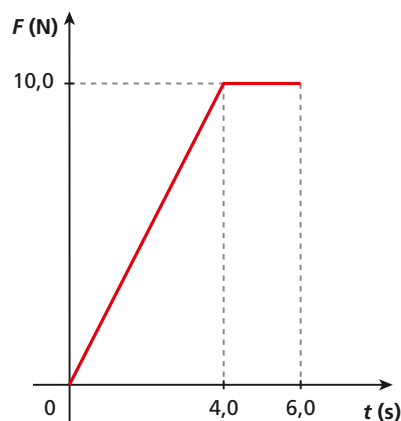
- Calcule o módulo da velocidade que o sistema projétil-bloco adquire imediatamente após a colisão.
 - Aplicando-se o Princípio de Conservação da Energia Mecânica, calcule o valor da altura máxima h atingida pelo sistema projétil-bloco após a colisão.
83. Uma bola é abandonada, a partir do repouso, de um ponto situado a uma altura H em relação ao solo, admitido plano e horizontal. A bola cai livremente e, após chocar-se contra o solo, consegue atingir uma altura máxima h .
- Calcule o coeficiente de restituição do choque em função de H e de h .
 - Classifique o choque como elástico, totalmente inelástico ou parcialmente elástico, nos seguintes casos: $h = H$, $0 < h < H$ e $h = 0$.

1. Admita que você esteja em repouso sobre a superfície horizontal e perfeitamente lisa de um grande lago congelado. Em razão da inexistência de atritos é impossível caminhar. Você tem em suas mãos um pesado bloco de gelo. Que procedimento você adotaria para atingir uma determinada borda do lago com maior rapidez?
2. O **momento linear** (ou quantidade de movimento), definido pelo produto da massa pela velocidade vetorial, é uma grandeza física de grande importância, essencial no estudo de explosões e colisões. O que vem a ser **momento angular**?
3. Suponha que você esteja sentado em uma cadeira giratória realizando rotações em torno de um eixo vertical. Você está de braços cruzados e, neste caso, sua velocidade angular é igual a ω_0 . Se você abrir os braços posicionando-os horizontalmente, haverá uma alteração em sua velocidade angular que adquirirá um novo valor $\omega < \omega_0$. A explicação para essa variação na velocidade angular é fundamentada em que princípio físico?
4. Imaginemos que a Terra sofra, por alguma razão, um significativo "encolhimento" (redução de raio), sendo mantidas, porém, sua massa e sua forma esférica. Isso provocaria alguma alteração no período de rotação do planeta? Os dias terrestres ficariam mais curtos, mais longos ou manteriam a duração atual de 24 h?

Exercícios Nível 3

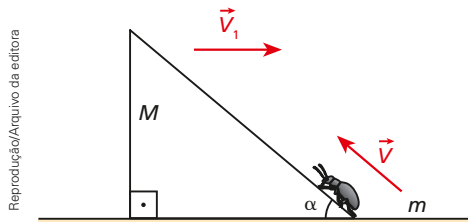
84. [Vunesp] João estava dentro de um carro que colidiu frontalmente com uma árvore e, devido à existência do *air bag*, a colisão de sua cabeça com o para-brisa demorou um intervalo de tempo de 0,5 s. Se considerarmos que, sem o uso do *air bag*, a colisão da cabeça com o para-brisa teria durado um intervalo de tempo igual a 0,05 s, é correto afirmar que a intensidade da força média, exercida sobre a cabeça de João, na situação com *air bag*, é:
- a) um décimo da intensidade da força média exercida sobre sua cabeça sem *air bag*.
 - b) um vigésimo da intensidade da força média exercida sobre sua cabeça sem *air bag*.
 - c) 10 vezes a intensidade da força média exercida sobre sua cabeça sem *air bag*.
 - d) 20 vezes a intensidade da força média exercida sobre sua cabeça sem *air bag*.
 - e) a mesma que sem o *air bag*.
85. [UFU-MG] Um corpo de 10,0 kg desloca-se em uma trajetória retilínea e horizontal, com uma velocidade de módulo 3,0 m/s, quando passa a atuar sobre ele uma força resultante \vec{F} , cujo módulo varia de acordo com o gráfico a seguir, formando um ângulo reto com a direção inicial do movimento. Se \vec{F} é a única força que atua sobre

o corpo e se sua direção e sentido permanecem constantes, analise as seguintes afirmações e responda de acordo com o código que se segue.



- I. A energia cinética do corpo no instante $t = 6,0$ s é de 125 J.
 - II. O trabalho realizado pela força \vec{F} no intervalo entre $t = 0$ e $t = 6,0$ s vale 80,0 J.
 - III. A quantidade de movimento do corpo no instante $t = 6,0$ s tem módulo igual a 70,0 kg m/s.
- a) Apenas I e II são corretas.
 - b) Apenas I é correta.
 - c) Apenas II e III são corretas.
 - d) Apenas I e III são corretas.
 - e) I, II e III são corretas.

86. (Ufla-MG) Um plano inclinado de um ângulo α e massa M está inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Um besouro de massa m , inicialmente em repouso, passa a subir o plano inclinado com velocidade constante de módulo V (relativa ao plano), de forma a deslocar o plano inclinado para a direita com velocidade de módulo V_1 (figura abaixo).



É correto afirmar que o módulo V_1 da velocidade do plano inclinado é dado por:

- a) $V \frac{m \cos \alpha}{M + m \sin \alpha}$ c) $\frac{m}{M + m} V \cos \alpha$
 b) $V \frac{m \cos \alpha}{M + m \cos \alpha}$ d) $V \frac{m}{M} \operatorname{tg} \alpha$

87. O beisebol é uma modalidade esportiva muito popular nas Américas do Norte e Central, bem como em outras partes do mundo. Envolve equipes de nove jogadores que atacam e defendem alternadamente, utilizando uma bola e um bastão (taco) específicos. Nos Estados Unidos, a MLB (*Major League Baseball*) promove o principal campeonato profissional da modalidade, lotando estádios em todo o país.

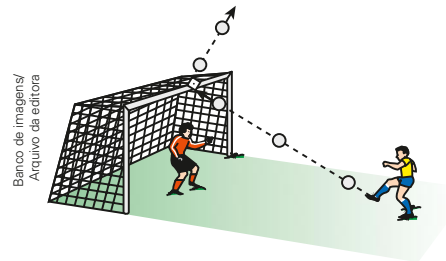
Admita que um jogador tenha lançado uma bola de massa igual a 140 g horizontalmente em direção a um rebatedor, como o que aparece na fotografia, com velocidade de intensidade 40 m/s.



Este golpeia então prontamente a bola, imprimindo-lhe logo após a tacada uma velocidade horizontal de intensidade 40 m/s de sentido oposto ao da velocidade inicial e uma velocidade vertical de intensidade 60 m/s.

Sabendo-se que o contato entre o taco e a bola teve duração de 0,70 ms e considerando-se desprezível o impulso do peso da bola no ato da colisão, pede-se determinar o módulo da força média exercida pelo taco sobre a bola.

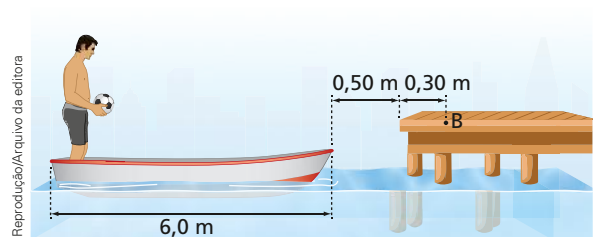
88. Numa importante final futebolística, o meia-esquerda Tito cobra um pênalti e a bola, depois de chocar-se contra o travessão, sai numa direção perpendicular à do movimento inicial.



A bola, que tem 0,50 kg de massa, incide no travessão com velocidade de módulo 80 m/s e recebe deste uma força de intensidade média $5,0 \cdot 10^3$ N. Sabendo que o impacto da bola no travessão dura $1,0 \cdot 10^{-2}$ s, calcule:

- a) o módulo da velocidade da bola imediatamente após o impacto;
 b) a energia mecânica dissipada no ato do impacto.

89. (CPAEN-RJ) Analise a figura abaixo.



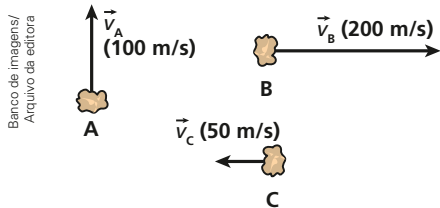
A figura acima mostra um homem de 69,0 kg, segurando um pequeno objeto de 1,0 kg, em pé na popa de um flutuador de 350 kg e 6,0 m de comprimento que está em repouso sobre águas tranquilas. A proa do flutuador está a 0,50 m de distância do píer. O homem se desloca a partir da popa até a proa do flutuador, para e em seguida lança horizontalmente o objeto, que atinge o píer no ponto **B**, indicado na figura acima. Sabendo que o deslocamento vertical do objeto durante seu voo é de 1,25 m, qual a velocidade, em relação ao píer, com que o objeto inicia o voo?

- a) 2,40 m/s d) 3,00 km/h
 b) 61,0 cm/s e) 15,0 km/h
 c) 360 cm/s

As resistências são desprezíveis e $g = 10 \text{ m/s}^2$.

90. Um barco de massa $M = 160 \text{ kg}$ encontra-se em repouso na superfície das águas de um lago, no qual não há correntezas. Dentro do barco está um homem de massa $m = 80 \text{ kg}$, que em dado instante salta, deixando o barco com velocidade de módulo $2,0 \text{ m/s}$, paralela às águas e medida em relação às margens do lago. Desprezando os atritos e o efeito do ar, determine:
- o módulo da velocidade do barco após o salto do homem;
 - o trabalho da força que o homem exerce no barco, por ocasião do seu salto.
91. [Cesesp-PE] Um avião voando horizontalmente atira um projétil de massa $8,0 \text{ kg}$, que sai com velocidade de $5,0 \cdot 10^2 \text{ m/s}$ relativa ao solo. O projétil é disparado na mesma direção e no mesmo sentido em que voa o avião. Sabendo que a massa do avião sem o projétil vale 12 toneladas, calcule, em km/h , o decréscimo na velocidade da aeronave em consequência do tiro.

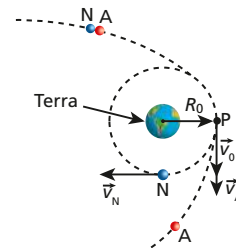
92. Um artefato explosivo, inicialmente em repouso, é detonado, fragmentando-se em quatro partes, **A**, **B**, **C** e **D**, de massas respectivamente iguais a $3,0 \text{ kg}$, $2,5 \text{ kg}$, $2,0 \text{ kg}$ e $4,0 \text{ kg}$. Despreze a perda de massa do sistema no ato da explosão e admita que os quatro fragmentos sejam lançados com velocidades contidas em um mesmo plano. No esquema a seguir, são fornecidas as características das velocidades vetoriais adquiridas por **A**, **B** e **C**.



Aponte a alternativa que melhor traduz as características da velocidade vetorial adquirida por **D**:

-
-
-
-
-

93. [Fuvest-SP] Alienígenas desejam observar o nosso planeta. Para tanto, enviam à Terra uma nave **N**, inicialmente ligada a uma nave auxiliar **A**, ambas de mesma massa. Quando o conjunto de naves se encontra muito distante da Terra, sua energia cinética e sua energia potencial gravitacional são muito pequenas, de forma que a energia mecânica total do conjunto pode ser considerada nula. Enquanto o conjunto é acelerado pelo campo gravitacional da Terra, sua energia cinética aumenta e sua energia potencial fica cada vez mais negativa, conservando a energia total nula. Quando o conjunto **N-A** atinge, com velocidade v_0 (a ser determinada), o ponto **P** de máxima aproximação da Terra, a uma distância R_0 do centro do planeta, um explosivo é acionado, separando **N** de **A**. A nave **N** passa a percorrer, em torno da Terra, uma órbita circular de raio R_0 , com velocidade v_N (a ser determinada). A nave auxiliar **A** adquire uma velocidade v_A (a ser determinada). Suponha que a Terra esteja isolada no espaço e em repouso.



Reprodução/Arquivo da editora

Note e adote:

- A força de atração gravitacional F , entre um corpo de massa m e o planeta Terra, de massa M , tem intensidade dada por

$$F = \frac{GMm}{R^2} = mg_R$$

- A energia potencial gravitacional E_p do sistema formado pelo corpo e pelo planeta Terra, com referencial de potencial zero no infinito, é dada por: $E_p = \frac{-GMm}{R}$.

G : constante universal da gravitação.

R : distância do corpo ao centro da Terra.

g_R : módulo da aceleração da gravidade à distância R do centro da Terra.

Determine, em função de M , G e R_0 :

- o módulo da velocidade v_0 com que o conjunto atinge o ponto **P**;
- o módulo da velocidade v_N , quando **N** percorre sua órbita circular;
- o módulo da velocidade v_A , logo após **A** se separar de **N**.

94.(UFBA) As leis de conservação da energia e da quantidade de movimento são gerais e valem para qualquer situação.

Um caso simples é o de um decaimento radioativo alfa. Um núcleo-pai, em repouso, divide-se, gerando dois fragmentos, um núcleo-filho e uma partícula alfa. Os fragmentos adquirem energia cinética, que é denominada energia de desintegração. Isso ocorre, porque uma parte da massa do núcleo-pai se transforma em energia cinética desses fragmentos, segundo a lei de equivalência entre massa e energia, proposta por Einstein.

Um exemplo do decaimento é o de um dos isótopos radioativos do urânio, que se transforma em tório, emitindo uma partícula alfa, um núcleo de hélio, ou seja:

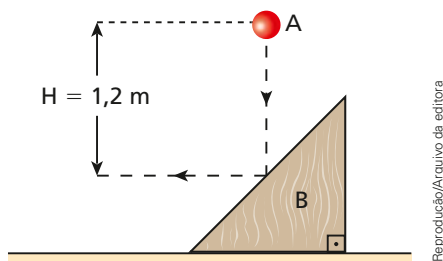


Na notação empregada, o número inferior refere-se à carga nuclear, e o superior, à massa aproximada do núcleo respectivo.

Sabe-se que o núcleo de urânio está em repouso, e a energia de desintegração é $E = 5,40 \text{ MeV}$.

Considerando-se as leis de conservação e o fato de a mecânica newtoniana permitir, com boa aproximação, o cálculo das energias cinéticas, determine a energia cinética da partícula alfa.

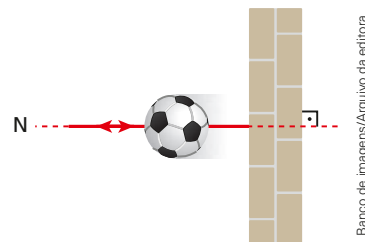
95.(Unip-SP) Na figura, temos um plano horizontal sem atrito e um bloco **B**, em repouso, com o formato de um prisma. Uma pequena esfera **A** é abandonada do repouso, da posição indicada na figura, e, após uma queda livre, colide elasticamente com o prisma. Despreze o efeito do ar e adote $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



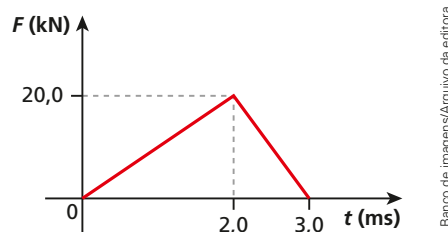
Sabe-se que, imediatamente após a colisão, a esfera **A** tem velocidade horizontal. A massa do bloco **B** é o dobro da massa da esfera **A**. A velocidade adquirida pelo bloco **B**, após a colisão, tem módulo igual a:

- a) 2,0 m/s. c) 8,0 m/s. e) 1,0 m/s.
b) 4,0 m/s. d) 16 m/s.

96. Uma bola de massa $m = 500 \text{ g}$ é lançada contra uma parede vertical na direção da reta **N** perpendicular à superfície de colisão. Imediatamente antes do choque, a bola tem velocidade de intensidade v_0 e, logo após o contato com a parede, esse corpo retorna também segundo a reta **N**, mas com velocidade de intensidade v . O esquema abaixo ilustra essa situação.



A intensidade da força que a parede exerce na bola durante a colisão está indicada no gráfico a seguir.



Sabendo-se que no instante $t = 2,0 \text{ ms}$ (fim da fase de deformação e início da fase de restituição) a velocidade se anula, desprezando-se o peso da bola no contato com a parede, calcule:

- a) o valor de v_0 ;
b) o valor de v ;
c) o coeficiente de restituição, e , da colisão;
d) o trabalho, τ , e o módulo do impulso total, I , da força que a parede exerce na bola no ato da colisão.

97.

Errática

E a linha deita errática sobre o carretel de madeira

Envolta em voltas, enrolada sobremaneira.

Vai como a vida, sem eira nem beira

Mas com começo e fim, certa.

Guy Medeiros



Garsya/Shutterstock

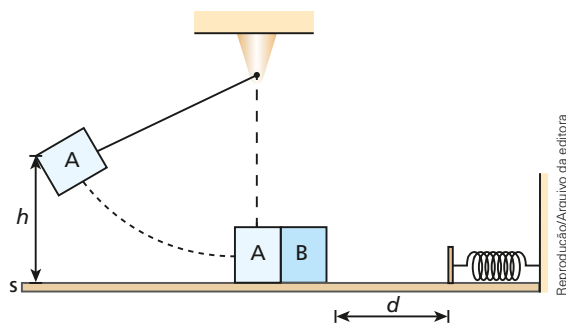
Considere um carretel com linha, como o que aparece na imagem anterior, que será lançado sobre uma mesa horizontal com velocidade de intensidade $12,6 \text{ cm/s}$.

Suponha que à medida que o carretel se desloca em trajetória reta, ele vá enrolando linha de densidade linear de massa igual a $50,0 \text{ mg/m}$, em repouso, esticada sobre a mesa.

Considerando-se que a massa do carretel no instante do lançamento é de $2,0 \text{ g}$, desprezando-se as dimensões do carretel, bem como todos os atritos passivos, determine:

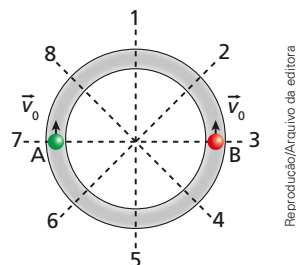
- a intensidade da velocidade do sistema, em cm/s , depois de o carretel ter enrolado $2,0 \text{ m}$ de linha;
- a dissipação de energia cinética, em joules, ocorrida no processo.

98. (UFJF-MG) A figura a seguir mostra um sistema composto de dois blocos de massas idênticas $m_A = m_B = 3,0 \text{ kg}$ e uma mola de constante elástica $k = 4,0 \text{ N/m}$. O bloco **A** está preso a um fio de massa desprezível e suspenso de uma altura $h = 0,80 \text{ m}$ em relação à superfície **S**, onde está posicionado o bloco **B**. Sabendo-se que a distância entre o bloco **B** e a mola é $d = 3,0 \text{ m}$ e que a colisão entre os blocos **A** e **B** é elástica, faça o que se pede nos itens seguintes. Adote $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ e despreze o efeito do ar.



- Usando a lei de conservação da quantidade de movimento (momento linear), calcule o módulo da velocidade do bloco **B** imediatamente após a colisão com o bloco **A**.
- Calcule a compressão máxima sofrida pela mola se o atrito entre o bloco **B** e o solo for desprezível.
- Calcule a distância percorrida pelo bloco **B** rumo à mola, se o coeficiente de atrito cinético entre o bloco **B** e o solo for igual a $\mu_c = 0,40$. Nesse caso, a mola será comprimida pelo bloco **B**? Justifique.

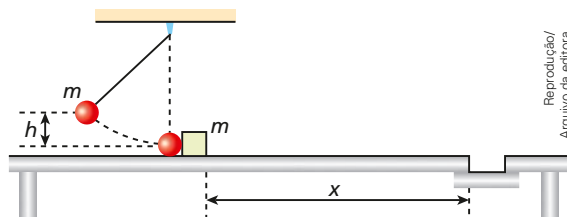
99. (Fuvest-SP) Em uma canaleta circular, plana e horizontal, podem deslizar duas pequenas bolas, **A** e **B**, com massas $M_A = 3M_B$, que são lançadas uma contra a outra, com igual velocidade \vec{v}_0 , a partir das posições indicadas. Após o primeiro choque entre elas (em 1), que não é elástico, as duas passam a movimentar-se no sentido horário, sendo que a bola **B** mantém o módulo de sua velocidade \vec{v}_0 .



Desprezando-se os atritos, pode-se concluir que o próximo choque entre elas ocorrerá nas vizinhanças da posição:

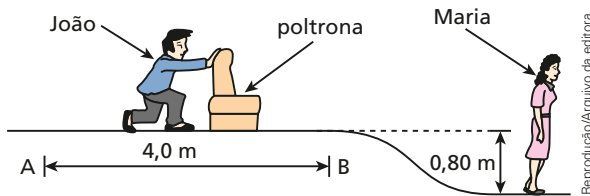
- a) 3 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

100. (UFF-RJ) No brinquedo ilustrado na figura, o bloco de massa m encontra-se em repouso sobre uma superfície horizontal e deve ser impulsionado para tentar atingir a caçapa, situada a uma distância $x = 1,5 \text{ m}$ do bloco. Para impulsioná-lo, utiliza-se um pêndulo de mesma massa m . O pêndulo é abandonado de uma altura $h = 20 \text{ cm}$ em relação à sua posição de equilíbrio e colide elasticamente com o bloco no instante em que passa pela posição vertical. Considerando-se a aceleração da gravidade com módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:



- a intensidade da velocidade da esfera do pêndulo imediatamente antes da colisão;
- a intensidade da velocidade do bloco imediatamente após a colisão;
- a distância percorrida pelo bloco sobre a superfície horizontal, supondo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e essa superfície seja $\mu = 0,20$. Verifique se o bloco atinge a caçapa.

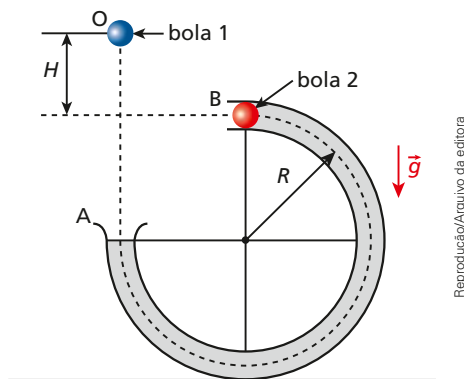
101. (UFU-MG) João, num ato de gentileza, empurra horizontalmente uma poltrona (massa igual a 10 kg) para Maria (massa igual a 50 kg), que a espera em repouso num segundo plano horizontal 0,80 m abaixo do plano em que se desloca João, conforme indica a figura.



A poltrona é empurrada a partir do repouso de **A** até **B**, ao longo de 4,0 m, por uma força constante \vec{F} de intensidade 25 N. Em **B**, ela é solta, descendo uma pequena rampa e atingindo Maria com velocidade de intensidade v , que se senta rapidamente. Com isso, o sistema poltrona-Maria passa a se deslocar com velocidade de intensidade v' . Desprezando-se os efeitos do ar e também os atritos sobre a poltrona e considerando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

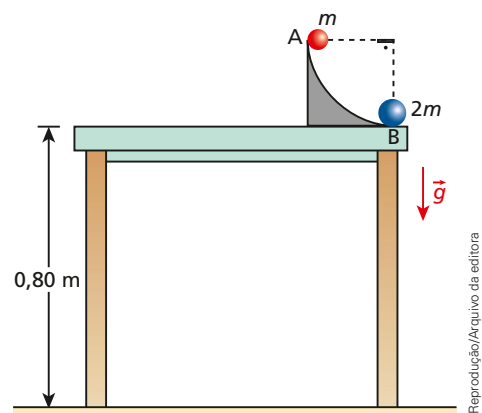
- o trabalho da força aplicada por João sobre a poltrona no percurso de **A** até **B**;
- o valor de v ;
- o valor de v' .

102. (Fuvest-SP) Um brinquedo é constituído por um cano (tubo) em forma de $\frac{3}{4}$ de circunferência, de raio médio R , posicionado em um plano vertical, como mostra a figura. O desafio é fazer com que a bola 1, ao ser abandonada de certa altura H acima da extremidade **B**, entre pelo cano em **A**, bata na bola 2 que se encontra parada em **B**, ficando nela grudada, e ambas atinjam juntas a extremidade **A**. As massas das bolas 1 e 2 são m_1 e m_2 , respectivamente. Despreze os efeitos do ar e das forças de atrito.



- Determine a velocidade v com que as duas bolas grudadas devem sair da extremidade **B** do tubo para atingir a extremidade **A**.
- Determine o valor de H para que o desafio seja vencido.

103. (UFU-MG) Sobre uma mesa fixa, de altura 0,80 m, está conectada uma rampa perfeitamente polida em forma de quadrante de circunferência de raio 45 cm, conforme representa a figura. Do ponto **A** da rampa, abandona-se uma partícula de massa m , que vai chocar-se de modo perfeitamente elástico com outra partícula de massa $2m$, em repouso no ponto **B**, o mais baixo da rampa.



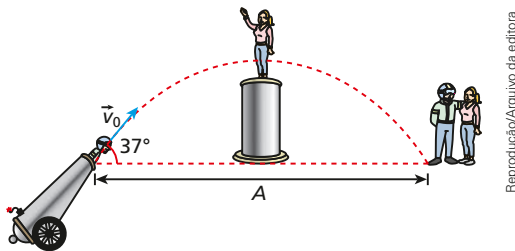
Sabendo que no local a influência do ar é desprezível e que $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- a intensidade da velocidade da partícula de massa $2m$ ao atingir o solo;
- a altura, acima do tampo da mesa, atingida pela partícula de massa m após a colisão com a partícula de massa $2m$;
- a distância entre os pontos de impacto das partículas com o solo.

104. (Unifesp) Uma pequena esfera maciça é lançada de uma altura de 0,6 m na direção horizontal, com velocidade inicial de módulo 2,0 m/s. Ao chegar ao chão, somente pela ação da gravidade, colide elasticamente com o piso e é lançada novamente para o alto. Considerando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, o módulo da velocidade e o ângulo de lançamento da esfera, a partir do solo, em relação à direção horizontal, imediatamente após a colisão, são, respectivamente, dados por:

- 4,0 m/s e 30° .
- 3,0 m/s e 30° .
- 4,0 m/s e 60° .
- 6,0 m/s e 45° .
- 6,0 m/s e 60° .

105. (AFA-SP) Num circo, um homem-bala de massa 60 kg é disparado por um canhão com velocidade \vec{v}_0 de módulo 25 m/s, sob um ângulo de 37° com a horizontal. Sua parceira, cuja massa é 40 kg, está em repouso numa plataforma localizada no topo da trajetória. Ao passar pela plataforma, o homem-bala e a parceira se agarram e vão cair em uma rede de segurança, na mesma altura que o canhão. Veja a figura fora de escala a seguir.

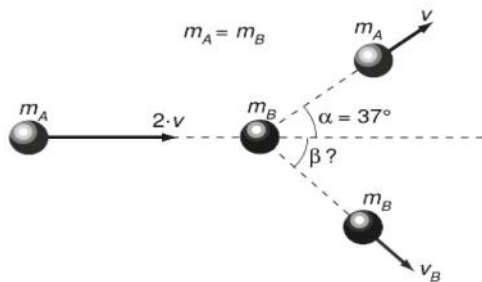


Reprodução/Arquivo da editora

Desprezando-se a resistência do ar e considerando-se $\sin 37^\circ = 0,60$, $\cos 37^\circ = 0,80$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, pode-se afirmar que o alcance A atingido pelo homem é:

- a) 60 m. b) 48 m. c) 36 m. d) 24 m.

106. (Olimpíada Peruana de Física) Em uma mesa horizontal em que os atritos podem ser desprezados uma bola de sinuca, **A**, colide com outra bola, **B**, que estava inicialmente em repouso. As bolas apresentam massas iguais e a bola **A** tem sua velocidade reduzida à metade devido à colisão. Além disso, a velocidade de **A**, após a colisão, fica inclinada de um ângulo $\alpha = 37^\circ$ em relação à direção do movimento inicial dessa bola, conforme indica a figura ($\sin 37^\circ = 0,6$ e $\cos 37^\circ = 0,8$).



Reprodução/OPF, 2014.

Observe os dados da tabela:

β (graus)	27	35	37	45	53
$\text{tg } \beta$	0,51	0,70	0,75	1,00	1,3

Com base nessas informações, calcule o ângulo β formado entre a velocidade da bola **B** logo após a colisão e a direção do movimento inicial da bola **A**.

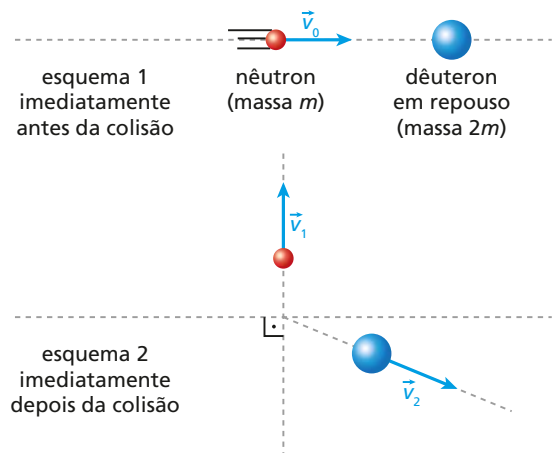
107. O experimento Atlas realizado no Grande Colisor de Hádrons (LHC) – instalado na fronteira franco-suíça, o maior acelerador de partículas do mundo, com formato circular e cerca de 27 quilômetros de extensão – nos deu o primeiro vislumbre do bóson de Higgs em ação, partícula fundamental para a criação de toda sorte de matéria (massa) existente no Universo.



Denis Balibouse/Reuters/Fotoarena

// O Solenóide de Múon Compacto, na figura acima, é um dos detectores de partículas que integram o LHC.

Suponha que em um acelerador de partículas seja disparado com velocidade \vec{v}_0 um nêutron lento ou térmico (partícula de baixa energia e massa m) contra um dêuteron inicialmente em repouso (núcleo do deutério ou hidrogênio pesado, ${}^2\text{H}$, com massa $2m$), como representa o esquema 1. Admita que, imediatamente após a colisão perfeitamente elástica entre essas partículas, ocorra a situação representada no esquema 2, com o nêutron deslocando-se com velocidade \vec{v}_1 , e o dêuteron, com velocidade \vec{v}_2 .



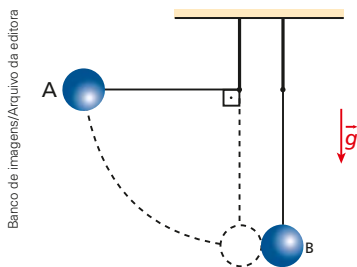
Banco de imagens/Arquivo da editora

Sejam v_0 , v_1 e v_2 , respectivamente, as intensidades das velocidades citadas:

- calcule v_1 em função de v_0 ;
- determine a fração f da energia cinética inicial do nêutron que é transferida para o dêuteron no ato da colisão.

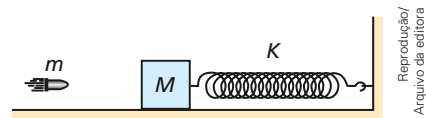
- 108.** Um caminhão **A** de massa $2m$ colidiu com um caminhão **B** de massa m que transportava um contêiner **C** de massa $2m$. Imediatamente antes da colisão, os veículos se deslocavam com velocidades de mesmo módulo, v , mas em direções perpendiculares. Ao trombarem, os veículos ficaram enganchados e passaram a se mover a 45° em relação às respectivas trajetórias iniciais, enquanto o contêiner se soltou e passou a mover-se em uma direção formando 20° com sua trajetória inicial e 25° com a velocidade comum aos caminhões imediatamente após o choque. Sendo dados $\cos 20^\circ \cong 0,94$ e $\sin 20^\circ \cong 0,34$, determine, em função de v , a intensidade da velocidade de **C** ao se desprender do caminhão que o transportava.

- 109.** Na figura a seguir, há dois pêndulos idênticos, cujos fios inextensíveis e de pesos desprezíveis têm $3,2$ m de comprimento. No local, reina o vácuo e a aceleração da gravidade vale 10 m/s^2 .



Em determinado instante, a esfera **A** é abandonada da posição indicada, descendo e chocando-se frontalmente com a esfera **B**, inicialmente em repouso. Sabendo que o coeficiente de restituição do choque vale $\frac{1}{4}$ calcule:

- os módulos das velocidades de **A** e de **B** imediatamente após o choque;
 - a relação $\frac{h_A}{h_B}$ entre as alturas máximas atingidas por **A** e por **B** após o choque;
 - a relação entre as energias cinéticas do sistema imediatamente após o choque e imediatamente antes dele.
- 110.** (ITA-SP) Na figura a seguir, temos uma massa $M = 132$ gramas, inicialmente em repouso, presa a uma mola de constante elástica $K = 1,6 \cdot 10^4 \text{ N/m}$, podendo deslocar-se sem atrito sobre a mesa em que se encontra. Atira-se um projétil de massa $m = 12$ gramas, que encontra o bloco horizontalmente, com velocidade $v_0 = 200 \text{ m/s}$, incrustando-se nele.



Qual é a máxima deformação que a mola experimenta?

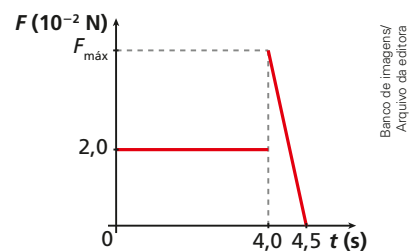
Para raciocinar um pouco mais

- 111.** Os gafanhotos são insetos pertencentes à subordem Caelifera, da ordem Orthoptera. Caracterizam-se por terem patas posteriores longas e fortes, o que lhes permite deslocar-se aos saltos. Algumas espécies formam enormes enxames que podem devastar grandes plantações.



Considere o gráfico a seguir, que mostra o comportamento da intensidade da força vertical que uma superfície plana e horizontal exerce sobre um gafanhoto. No intervalo em que F é constante, o inseto encontra-se em repouso sobre a super-

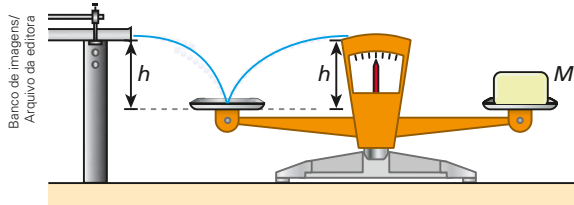
fície e, no intervalo em que F é variável, ele está realizando um salto vertical, com perda de contato com a superfície no instante $t = 4,5 \text{ s}$.



Desprezando-se as dimensões do gafanhoto, além da influência do ar, adotando-se para a intensidade da aceleração da gravidade o valor 10 m/s^2 e sabendo-se que a altura máxima atingida no salto é de 20 cm , determine:

- a massa do gafanhoto, em gramas;
- o valor de $F_{\text{máx}}$ indicado no gráfico.

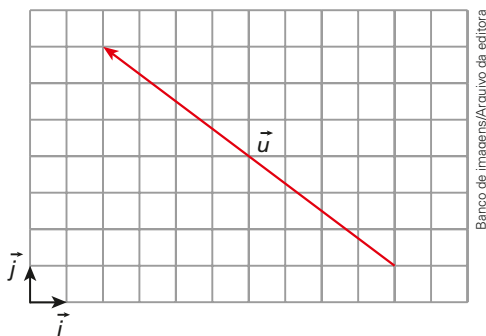
112. Um dispositivo lança horizontalmente em regime permanente 200 pequenas esferas por segundo sobre o prato esquerdo de uma balança de travessão de braços iguais. As esferas colidem com esse prato e se elevam a uma altura máxima $h = 0,20$ m, igual à da boca do dispositivo lançador, conforme ilustra a figura.



Para manter o travessão em equilíbrio na horizontal, coloca-se sobre o prato direito da balança um bloco de massa M . Supondo-se que cada esfera tenha massa $m = 0,50$ g, que a aceleração da gravidade tenha módulo 10 m/s² e que todos os atritos e a resistência do ar sejam desprezíveis, determine:

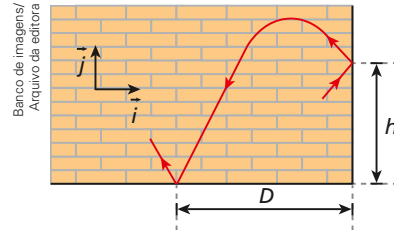
- o módulo da variação da quantidade de movimento de cada esfera, em $g \cdot \frac{m}{s}$, em virtude da colisão com o prato da balança;
- o valor da massa M , em gramas.

113. **Versores** são vetores de módulo unitário utilizados na expressão de outros vetores. Consideremos os versores \vec{i} e \vec{j} indicados abaixo, respectivamente, vetores de referência das direções horizontal e vertical, e, como exemplo, um vetor \vec{u} , também representado.



Em termos de \vec{i} e \vec{j} , o vetor \vec{u} fica determinado por $\vec{u} = -8,0\vec{i} + 6,0\vec{j}$. Isso significa que esse vetor tem uma componente horizontal para a esquerda de módulo 8,0 unidades e uma componente vertical para cima de módulo 6,0 unidades. Pelo Teorema de Pitágoras, pode-se também inferir que o módulo de \vec{u} é igual a 10,0 unidades. Uma bola de massa $m = 1,5$ kg é lançada contra uma parede vertical. Imediatamente antes de

colidir com a parede, a bola tem velocidade dada por $\vec{v} = 4,0\vec{i} + 3,0\vec{j}$, em m/s, em que \vec{i} e \vec{j} são os versores das direções horizontal e vertical, respectivamente. A colisão ocorre a uma altura $h = 2,0$ m do solo, como indica a figura, e, depois dela, a bola descreve a trajetória esboçada, atingindo o chão pela primeira vez a uma distância horizontal D da parede.



No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $g = 10,0$ m/s². Sabendo-se que o impulso que a parede exerce na bola no ato da colisão é $\vec{I} = -9,0\vec{i}$, em N · s, calcule a distância D .

114. Nas estepes africanas, os leões situam-se no topo da cadeia alimentar. A tarefa de caçar é incumbida às fêmeas, que, geralmente, andam em grupos, sorrateiras, em busca de uma presa que, uma vez abatida, serve de banquete para toda a alcateia.



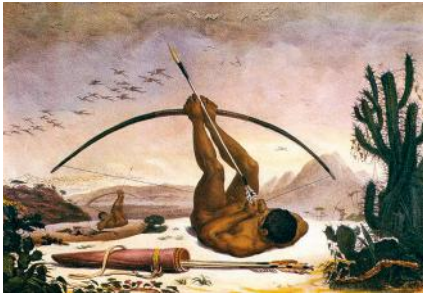
Admita que num instante $t_0 = 0$ uma leoa, de massa $m_L = 120$ kg, correndo em linha reta com velocidade constante de intensidade $v_L = 8,0$ m/s, está em procedimento de ataque a uma zebra, de massa $m_Z = 200$ kg, inicialmente em repouso. Nesse instante, a distância entre os dois animais é 20 m, quando a zebra inicia uma fuga desesperada, acelerando com intensidade constante de $2,0$ m/s² ao longo da mesma reta percorrida pela leoa.

- A leoa consegue êxito em seu ataque, isto é, consegue alcançar a zebra?
- Qual é a distância mínima verificada entre os dois animais, admitidos pontos materiais?
- Qual é a intensidade da quantidade de movimento da zebra em relação à leoa no instante em que a distância entre os dois animais for mínima?

115. Debret

Jean-Baptiste Debret (1768-1848) foi um desenhista, pintor e professor francês que esteve por cerca de quinze anos no Brasil a convite do rei de Portugal dom João VI para registrar as características da colônia. Fundou a Academia Imperial de Belas Artes no Rio de Janeiro, onde também lecionou. Ao retornar à França, publicou uma obra intitulada *Viagem pitoresca e histórica ao Brasil*, em que descreveu por meio de desenhos e textos detalhes da natureza, do homem e da sociedade brasileira.

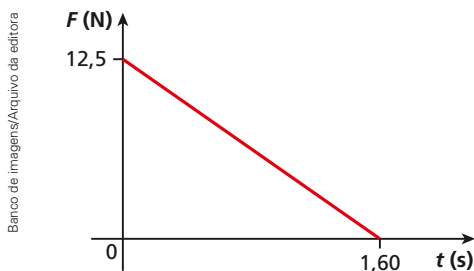
Debret foi também um dos idealizadores da bandeira brasileira, formada pelo retângulo verde com um losango amarelo e um círculo azul inscritos, adotada oficialmente em 19 de novembro de 1889. Ele assina, ainda, o clássico abaixo, denominado *O caboclo*. Nessa figura – originalmente uma aquarela sobre papel – mestiços tentam abater aves que sobrevoam a região com flechas disparadas por meio de arcos.



Reprodução/Coletânea particular

Admita que o disparo de uma determinada flecha ocorra mediante um ângulo $\theta = 53^\circ$ ($\text{sen } \theta = 0,80$ e $\text{cos } \theta = 0,60$) em relação à horizontal em um local em que $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ e a resistência do ar é desprezível. A massa da flecha é $m = 250 \text{ g}$ e o coeficiente de atrito entre o projétil e os pés do atirador é $\mu = \frac{1}{3}$.

Suponha que, numa situação ideal, a intensidade F da força total que o arco exerce sobre a flecha no ato do disparo varie em função do tempo t conforme o gráfico abaixo.

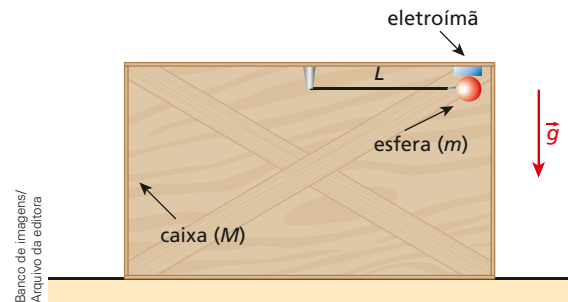


Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo-se que o disparo da flecha tem início em $t_0 = 0$ e que ela perde o contato com o arco em $t = 1,60 \text{ s}$, pergunta-se:

- Em que instante, durante o ato do lançamento, a velocidade da flecha tem intensidade máxima? Qual é a magnitude dessa velocidade?
- Qual é a intensidade da velocidade com que a flecha deixa o arco, em $t = 1,60 \text{ s}$?
- Considerando-se que a flecha e as aves sejam pontos materiais, a que altura em relação ao solo (plano e horizontal) as aves devem voar horizontalmente para não serem atingidas pela flecha?

- 116.** Na situação esquematizada a seguir, uma caixa de massa M está em repouso sobre um plano horizontal sem atrito. Uma esfera metálica de massa m , ligada ao centro da parede superior da caixa por um fio leve e inextensível de comprimento L , também está em repouso presa magneticamente por um eletroímã.

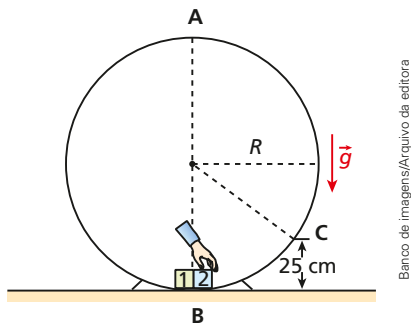


Banco de imagens/Arquivo da editora

Em certo instante, o eletroímã é desligado e o sistema entra em movimento sem sofrer efeitos do ar. Sendo g a intensidade da aceleração da gravidade, pede-se determinar a intensidade da máxima velocidade horizontal da esfera em relação às paredes verticais da caixa.

- 117.** Uma bola de tênis é abandonada de uma altura H , acima do solo plano e horizontal. A bola cai verticalmente, choca-se com o solo e, depois do impacto, sobe também verticalmente, até parar. Depois da parada instantânea, a bola torna a cair, colidindo novamente com o solo. Supondo que seja e o coeficiente de restituição, calcule a altura máxima atingida pela bola depois de n choques sucessivos.

- 118.** Na situação representada na figura a seguir, dois pequenos blocos 1 e 2 de massas iguais a $2,0 \text{ kg}$ encontram-se em repouso no ponto **B** de uma calha circular de raio R , perfeitamente lisa, contida em um plano vertical. No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.



Em determinado instante, o bloco 2 é lançado para a direita, sendo-lhe comunicada uma velocidade de intensidade $10,0 \text{ m/s}$. Esse bloco realiza então um *loop* ao longo da parte interna da calha e em seguida se choca frontalmente com o bloco 1, parado no ponto **B**. Sabendo-se que após a colisão os blocos permanecem unidos e que ao passarem no ponto **A** eles não trocam forças com a calha, pede-se calcular:

- o valor de R em centímetros;
- a intensidade da força de contato trocada entre o bloco 2 e a calha na sua primeira passagem no ponto **C**.

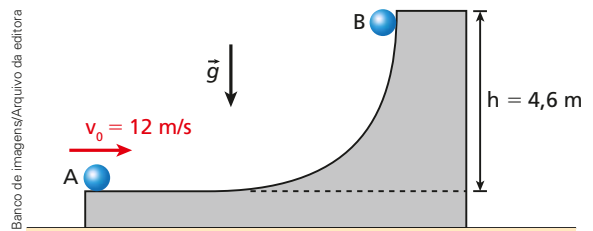
119. O Large Hadron Collider, ou simplesmente LHC, do CERN, é o maior acelerador de partículas e o de maior energia existente do mundo. Seu principal objetivo é obter dados sobre colisões de feixes de partículas, tanto de prótons, a uma energia de $7,0 \text{ TeV}$ ($1,12 \text{ microjoules}$) por partícula, como de núcleos de chumbo, a uma energia de 574 TeV ($92,0 \text{ microjoules}$) por núcleo. O laboratório localiza-se em um túnel de 27 km de circunferência, a 175 metros abaixo do nível do solo, na fronteira franco-suíça próximo a Genebra, Suíça.



Considere duas partículas com cargas elétricas de mesmo sinal em rota de colisão dentro de um acelerador semelhante ao LHC. A partícula 1 tem massa $2m$ e a partícula 2 é um próton, de massa m . Quando a distância entre elas é muito grande, suas velocidades têm a mesma direção e sentidos opostos,

mas intensidades iguais a $6,0 \cdot 10^4 \text{ m/s}$. Desprezando-se os efeitos relativísticos, determine os módulos das velocidades das partículas 1 e 2 imediatamente após a colisão perfeitamente elástica que se verifica entre elas.

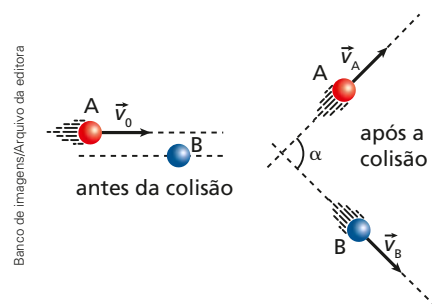
120. No esquema a seguir uma esfera de massa $m = 5,0 \text{ kg}$ é lançada no ponto **A** com velocidade de intensidade $v_0 = 12 \text{ m/s}$ horizontalmente sobre uma plataforma de massa $M = 15 \text{ kg}$ estacionada a princípio sobre uma superfície horizontal. A esfera se desloca sobre a plataforma até se projetar, no ponto **B**, verticalmente em relação à plataforma.



Os atritos são todos desprezíveis, bem como a resistência do ar. Adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine em relação a um referencial fixo na superfície de apoio da plataforma e no instante em que a esfera atinge o ponto **B**:

- o módulo v da velocidade da plataforma;
- o módulo v_B da velocidade da esfera;
- o módulo v_y da componente vertical da velocidade da esfera.

121. Na figura a seguir, vemos duas bolas de boliche **A** e **B** iguais, livres para se moverem num plano horizontal liso. A bola **A**, dotada inicialmente de velocidade de módulo v_0 , colide elástica e obliquamente com a bola **B**, inicialmente em repouso.



Após a colisão, **A** e **B** adquirem, respectivamente, velocidades iguais a \vec{v}_A e \vec{v}_B , que formam entre si um ângulo α . Ignore o movimento de rotação das bolas.

- Calcule o ângulo α .
- No caso em que \vec{v}_A e \vec{v}_B têm mesmo módulo v , calcule v .

Centro de massa

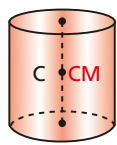
Este é um conceito que foi cogitado diversas vezes ao longo deste livro sem que ainda tivesse sido fornecida sua definição formal. Tentamos, dessa maneira, apelar a seu raciocínio abstrato contando apenas com a força da expressão: **centro de massa**.

É chegado, agora, o momento que julgamos oportuno para a apresentação da referida noção e aproveitaremos para falar do centro de massa de sistemas contínuos (corpos extensos) e também do centro de massa de sistemas de partículas.

Conceito

Chama-se **centro de massa** de um sistema físico o ponto onde se admite concentrada, para efeito de cálculos, toda a sua massa.

Se o sistema físico for um corpo rígido e maciço constituído de material homogêneo, como uma esfera ou um cilindro, por exemplo, o centro de massa (**CM**) coincidirá com o centro geométrico (**C**).

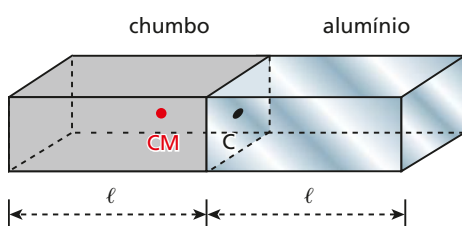


Banco de imagens/Arquivo da editora

Em cada um dos corpos acima, supostos homogêneos, o centro de massa coincide com o centro geométrico.

Entretanto, se o corpo em estudo não for constituído de material homogêneo, o centro de massa ficará deslocado para a região em que houver maior concentração de massa.

É o que ocorre com a barra bimetálica maciça representada na figura a seguir. A metade esquerda da barra é constituída de chumbo e a metade direita de alumínio.



Banco de imagens/Arquivo da editora

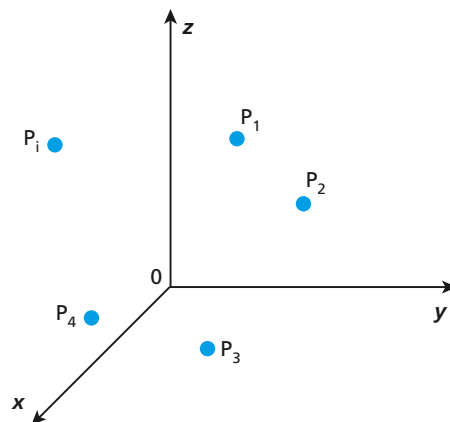
Nessa situação, como o chumbo é mais denso do que o alumínio, o centro de massa da barra fica deslocado para o lado do chumbo, não coincidindo com o centro geométrico.

O centro de massa nem sempre é um ponto pertencente ao corpo, como ocorre, por exemplo, com um anel circular, homogêneo e de espessura uniforme, cujo centro de massa se situa no ponto de interseção de dois de seus diâmetros.

Posição do centro de massa de um sistema de partículas

Considere as partículas P_1, P_2, \dots, P_i , posicionadas em relação a um sistema cartesiano **Oxyz**, como ilustra o esquema a seguir. A cada partícula, associemos uma abscissa x , uma ordenada y , uma cota z e uma massa m :

- $P_1 \equiv m_1 (x_1; y_1; z_1)$
- $P_2 \equiv m_2 (x_2; y_2; z_2)$
- $\cdot \quad \cdot$
- $\cdot \quad \cdot$
- $\cdot \quad \cdot$
- $P_i \equiv m_i (x_i; y_i; z_i)$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sejam \bar{x}, \bar{y} e \bar{z} , respectivamente, a abscissa, a ordenada e a cota do centro de massa do sistema em relação ao mesmo referencial **Oxyz**.

Pode-se demonstrar que as coordenadas \bar{x}, \bar{y} e \bar{z} são calculadas pelas seguintes médias ponderadas:

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_ix_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

$$\bar{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_iy_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

$$\bar{z} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \dots + m_iz_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

Se todas as partículas estiverem dispostas em um mesmo plano **Oxy**, por exemplo, bastarão as coordenadas \bar{x} e \bar{y} para o posicionamento do centro de massa do sistema.

No caso de as partículas estarem alinhadas segundo uma mesma reta **Ox** bastará uma coordenada \bar{x} para o posicionamento do centro de massa do sistema.

Velocidade do centro de massa de um sistema de partículas

Seja um sistema de partículas **P₁**, **P₂**, ..., **P_i**, que tem massas e velocidades respectivamente iguais a m_1, m_2, \dots, m_i e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i$.

A velocidade do centro de massa do sistema é dada pela seguinte expressão vetorial:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_i\vec{v}_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

Os produtos $m_1\vec{v}_1, m_2\vec{v}_2, \dots, m_i\vec{v}_i$, entretanto, correspondem, respectivamente, às quantidades de movimento $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_i$ das partículas que compõem o sistema. Assim:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \dots + \vec{Q}_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i},$$

$$\text{mas } \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \dots + \vec{Q}_i = \vec{Q}_{total}$$

$$\text{e } m_1 + m_2 + \dots + m_i = m_{total}.$$

Disso, concluímos que:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{Q}_{total}}{m_{total}}$$

No caso de um sistema isolado, temos \vec{Q}_{total} constante (Princípio de Conservação de Quantidade de Movimento). Como m_{total} é constante, o mesmo deve acontecer com \vec{v}_{CM} . Diante disso, podemos enunciar que:

O centro de massa de um sistema isolado tem **velocidade vetorial constante**, permanecendo em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

Por exemplo, um corpo inicialmente em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, ao explodir (sistema isolado de forças externas), terá imediatamente após a explosão o centro de massa de seus fragmentos respectivamente em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, com a mesma velocidade vetorial manifestada pelo corpo antes da explosão.

Aceleração do centro de massa de um sistema de partículas

Retomemos o sistema de partículas definido na seção anterior. Sendo $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_i$ as acelerações das partículas, concluímos que a aceleração do centro de massa do sistema é dada por:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots + m_i\vec{a}_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

Os produtos $m_1\vec{a}_1, m_2\vec{a}_2, \dots, m_i\vec{a}_i$, entretanto, correspondem, respectivamente, às forças resultantes $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i$ sobre cada partícula componente do sistema.

Diante disso, temos:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i},$$

$$\text{mas } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i = \vec{F}_{externa}$$

$$\text{e } m_1 + m_2 + \dots + m_i = m_{total}.$$

Portanto:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_{externa}}{m_{total}}$$

Esse último resultado traduz o **Teorema do Centro de Massa**.

O balão teimoso

Na figura ao lado, está esquematizado um balão tripulado, inicialmente em repouso em relação ao solo, em um local em que não há correntes de ar. Do cesto do balão pende uma escada de corda, que tangencia o chão. Nessas condições, o centro de massa (CM) do sistema balão-homem está a uma altura h em relação ao solo.

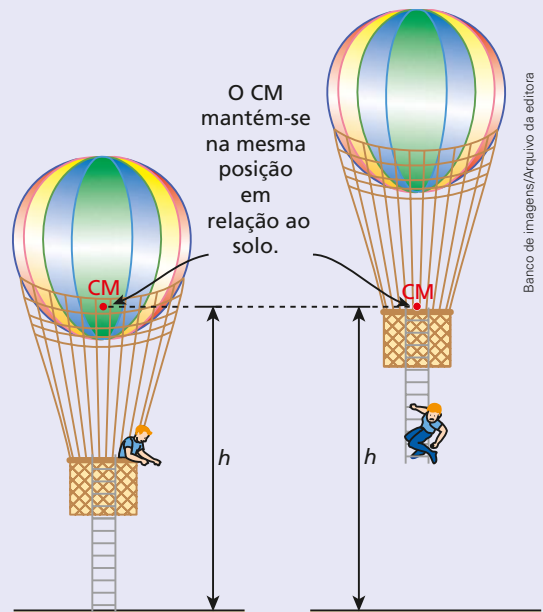
Admita que o homem resolva descer a escada na tentativa de abandonar o balão. Sua pretensão ficará frustrada, pois, ao atingir a extremidade inferior da escada, ele notará que esta já não mais tangenciará o chão como antes, tendo se elevado em relação ao solo.

A explicação para o ocorrido é a seguinte: o sistema balão-homem é isolado de forças externas ($\vec{F}_{\text{externa}} = \vec{0}$) e, por isso, a velocidade do seu centro de massa deve permanecer constante.

Como o centro de massa estava inicialmente em repouso, assim deverá permanecer durante todo o tempo.

Com a descida do homem há um deslocamento de massa para as partes mais baixas do balão, o que tenderia a rebaixar o centro de massa do sistema. Entretanto, a altura do centro de massa se mantém igual a h , uma vez que à medida que o homem desce, o balão sobe.

Ao retornar ao cesto do balão, o homem perceberá que, novamente, a extremidade inferior da escada estará tangenciando o chão.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Trajétoria do centro de massa

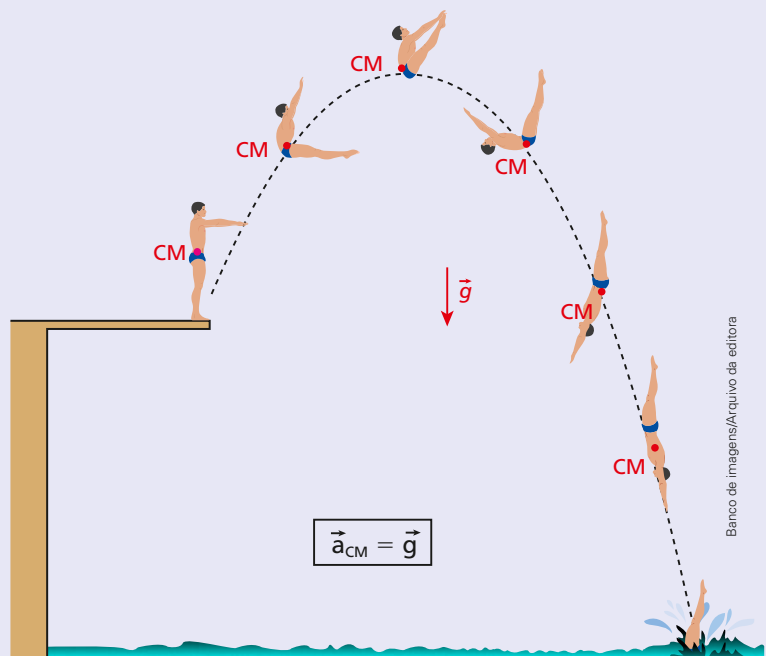
Vimos que a aceleração do centro de massa de um sistema é dada pelo quociente da força externa resultante pela massa total.

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{\vec{F}_{\text{externa}}}{m_{\text{total}}}$$

Observe a figura ao lado, em que um atleta realiza um salto ornamental.

Desprezando a influência do ar, podemos dizer que a resultante das forças externas no corpo do atleta é a força da gravidade (peso), que pode ser considerada **constante** durante o salto. Como a massa não varia, concluímos que a aceleração do centro de massa do corpo do atleta também não varia, mantendo-se **constante** e igual a \vec{g} .

Por isso, esse ponto descreve uma **trajetória parabólica**, independentemente de o atleta realizar manobras com suas pernas e com seus braços e/ou contorções durante o voo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Já um espetáculo sempre encantador é o da queima de fogos de artifício, que deve ser sempre realizado por técnicos especializados, utilizando artefatos confiáveis e profissionais de segurança. Rojões, morteiros e foguetes são lançados no céu noturno, explodindo depois de descreverem trajetórias aproximadamente parabólicas. Após a explosão, as partes de cada artefato são lançadas em diversas direções e também descrevem trajetórias aproximadamente parabólicas, porém diferentes da trajetória inicial.



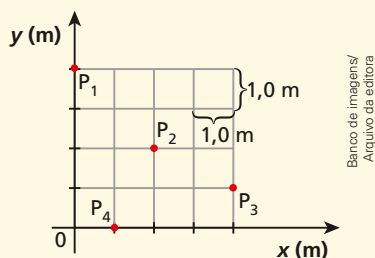
Thinkstock/Getty Images

// Queima de fogos: um belo show pirotécnico.

Como seria, no entanto, a trajetória do centro de massa do sistema depois da explosão se pudéssemos desprezar a influência do ar? Enquanto nenhum fragmento tocasse o solo, o centro de massa do sistema continuaria descrevendo a **mesma parábola inicial**. Isso ocorreria porque a força externa resultante no sistema não se alteraria (peso total), fazendo com que a aceleração do centro de massa se mantivesse constante e igual a \vec{g} .

Exercícios

- 122.** Quatro partículas, P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , de massas **ER** respectivamente iguais a 1,0 kg, 2,0 kg, 3,0 kg e 4,0 kg, encontram-se sobre um mesmo plano, posicionadas em relação a um referencial **Oxy**, conforme a figura abaixo:



Banco de imagens/
Arquivo da editora

Determine as coordenadas \bar{x} e \bar{y} do centro de massa do sistema.

Resolução:

A abscissa \bar{x} do centro de massa do sistema é calculada por:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$\bar{x} = \frac{1,0 \cdot 0 + 2,0 \cdot 2,0 + 3,0 \cdot 4,0 + 4,0 \cdot 1,0}{1,0 + 2,0 + 3,0 + 4,0} = \frac{20}{10}$$

$$\bar{x} = 2,0 \text{ m}$$

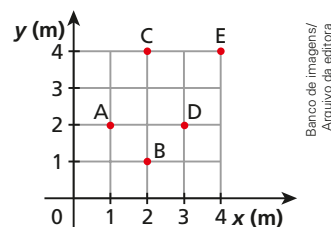
A ordenada \bar{y} do centro de massa do sistema é calculada por:

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$\bar{y} = \frac{1,0 \cdot 4,0 + 2,0 \cdot 2,0 + 3,0 \cdot 1,0 + 4,0 \cdot 0}{1,0 + 2,0 + 3,0 + 4,0} = \frac{11}{10}$$

$$\bar{y} = 1,1 \text{ m}$$

- 123.** Três pontos materiais, P_1 , P_2 e P_3 , encontram-se em repouso sobre um mesmo plano. Suas características estão dadas a seguir, sendo expressas por $m(x, y)$, em que m é a massa em kg e o par x, y , as coordenadas cartesianas em metros:



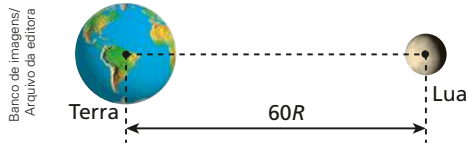
Banco de imagens/
Arquivo da editora

$$P_1 \equiv 2(0, -1); P_2 \equiv 1(1, 0); P_3 \equiv 2(2, 6)$$

O centro de massa do sistema é dado no diagrama acima, pelo ponto:

- a) A b) B c) C d) D e) E

124. Suponha a Terra e a Lua esféricas e com massas uniformemente distribuídas. A distância entre os centros da Terra e da Lua é de aproximadamente $60R$, em que R representa o raio terrestre. No esquema a seguir os dois astros estão representados fora de escala e em cores fantasia.



Sendo a massa da Terra aproximadamente igual a 80 vezes a massa da Lua:

- determine a posição do centro de massa do sistema Terra-Lua em relação ao centro da Terra;
- diga se o centro de massa do sistema é um ponto interno ou externo à esfera terrestre. Justifique a resposta.

125. A humanidade já pode comemorar!

A primeira nave espacial não tripulada feita pelo homem, a New Horizons, se avizinhou de Plutão, corpo celeste rebaixado à condição de planeta-anão, entre todos os planetas, o mais distante do Sol (seu raio médio de órbita tem cerca de 39,24 UA, em que 1 UA, ou uma Unidade Astronômica, é a distância média entre a Terra e o Sol). A viagem durou ao todo 9 anos e 6 meses, tendo a New Horizons, corpo do tamanho de um piano de cauda, percorrido algo próximo de 5 bilhões de quilômetros. Depois de ganhar velocidade por meio do estilingue gravitacional proporcionado por Júpiter, a nave seguiu “dormente” até ser “despertada” já na aproximação de Plutão. A 12 500 km do astro, a nave produziu uma série de fotografias em alta resolução que permitirão aos cientistas avaliarem muitas características do planeta-anão e sua principal lua, Caronte.



Ilustração da New Horizons, tendo ao fundo Plutão e Caronte. A nave leva em seu interior as cinzas do astrônomo descobridor do astro, o estadunidense Clyde Tombaugh, que constatou a existência de Plutão, em 1930.

A imagem a seguir é uma das muitas centenas de fotos enviadas à Nasa (Administração Nacional da Aeronáutica e do Espaço, agência do governo dos Estados Unidos) pela New Horizons. Nela, aparecem Plutão (em primeiro plano) e sua lua Caronte (ao fundo), satélite natural com centro distante cerca de 19 600 quilômetros do centro de Plutão e com massa próxima de 15% da massa de Plutão.

Na realidade, o sistema Plutão-Caronte é considerado um astro binário, já que os dois corpos celestes giram em torno do centro de massa do sistema com velocidade angular estimada em $1,0 \text{ rad/dia}$.

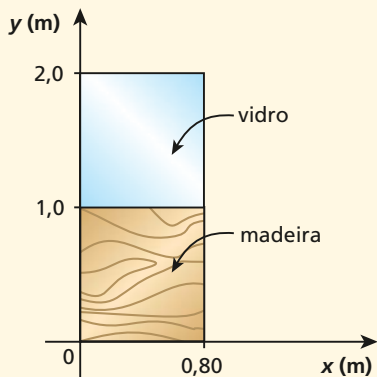


Plutão-Caronte em uma das imagens enviadas à Terra pela New Horizons. O trânsito do sinal eletromagnético entre a espaçonave e a Nasa, região de vácuo sideral, tem duração próxima de cinco horas.

Com base nas informações fornecidas, responda às questões a seguir:

- Qual é a velocidade escalar média aproximada, v_m , em km/h, da New Horizons em sua viagem da Terra até as vizinhanças de Plutão?
- Qual é a duração aproximada do ano de Plutão, T_p , em anos terrestres?
- Qual é a intensidade aproximada da velocidade orbital, v , em km/h, da lua Caronte em torno do centro de massa do sistema Plutão-Caronte?

- 126.** Uma porta que tem a sua metade inferior feita de madeira e sua metade superior feita de vidro tem espessura constante e as dimensões indicadas na figura.

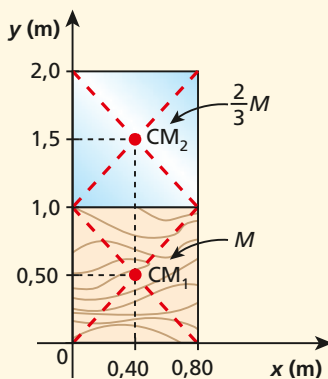


Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que a massa da parte de vidro é $\frac{2}{3}$ da massa da parte de madeira, determine as coordenadas \bar{x} e \bar{y} do centro de massa da porta, dadas pelo referencial Oxy .

Resolução:

Localizemos, inicialmente, os centros de massa da parte de madeira e da parte de vidro. Para isso, tracemos as diagonais das respectivas regiões retangulares, como está mostrado na figura abaixo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

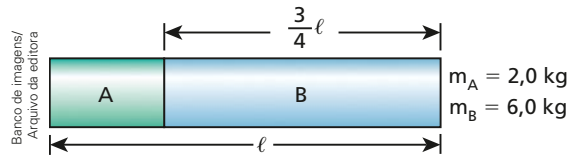
Como CM_1 e CM_2 pertencem à mesma vertical, a abscissa do centro de massa da porta (\bar{x}) fica determinada diretamente.

$$\bar{x} = 0,40 \text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{M \cdot 0,50 + \frac{2}{3} M \cdot 1,5}{M + \frac{2}{3} M}$$

$$\bar{y} = 0,90 \text{ m}$$

- 127.** Uma barra metálica é constituída pela junção de dois cilindros **A** e **B**, coaxiais e de materiais diferentes:



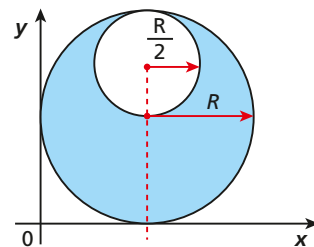
Supondo que os dois cilindros tenham secções transversais constantes e iguais e admitindo uniforme a distribuição de massas em cada um deles, determine a posição do centro de massa da barra.

- 128.** (Uerj) A forma de uma raquete de tênis pode ser esquematizada por um aro circular homogêneo de raio R e massa m_1 , preso a um cabo cilíndrico homogêneo de comprimento L e massa m_2 .

Quando $R = \frac{L}{4}$ e $m_1 = m_2$, a distância do centro de massa da raquete ao centro do aro circular vale:

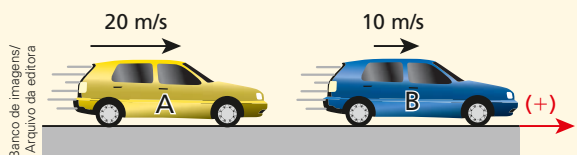
- a) $\frac{R}{2}$ b) R c) $\frac{3R}{2}$ d) $2R$

- 129.** Um artista plástico elaborou uma escultura que consiste de um disco metálico homogêneo de espessura constante e raio R dotado de um furo circular de raio $\frac{R}{2}$, conforme representa a figura. Levando-se em conta o referencial Oxy indicado, determine as coordenadas do centro de massa da peça.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- 130.** O esquema seguinte representa dois carrinhos, **A** e **B**, que percorrem uma reta orientada com as velocidades escalares indicadas:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que as massas de **A** e de **B** valem, respectivamente, 4,0 kg e 6,0 kg, calcule a velocidade do centro de massa do sistema.

Resolução:

A velocidade do centro de massa do sistema é dada por:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B}{m_A + m_B}$$

Como os movimentos têm a mesma direção, podemos raciocinar em termos escalares:

$$v_{CM} = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$$

Sendo $m_A = 4,0$ kg, $v_A = +20$ m/s, $m_B = 6,0$ kg e $v_B = +10$ m/s, calculemos v_{CM} :

$$v_{CM} = \frac{4,0 \cdot 20 + 6,0 \cdot 10}{4,0 + 6,0} = \frac{140}{10}$$

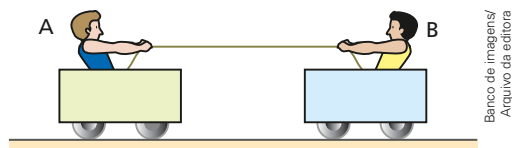
$$v_{CM} = 14 \text{ m/s}$$

131. Dois navios, **N₁** e **N₂**, de massas respectivamente iguais a 250 t e 150 t, partem de um mesmo ponto e adquirem movimentos retilíneos perpendiculares entre si. Sabendo que as velocidades de **N₁** e **N₂** têm módulos $v_1 = 32$ nós e $v_2 = 40$ nós, podemos afirmar que o centro de massa do sistema terá velocidade de módulo:

- a) 35 nós.
- b) 25 nós.
- c) 20 nós.
- d) 5 nós.
- e) zero.

132. (UFC-CE) Um conjunto de três partículas, todas de igual massa m , está situado na origem de um sistema de coordenadas **xy**. Em dado instante, uma delas é atirada na direção **x**, com velocidade constante $v_x = 9,0$ m/s, e outra é atirada, simultaneamente, na direção **y**, com velocidade constante $v_y = 12$ m/s, ficando a terceira em repouso na origem. Determine o módulo da velocidade do centro de massa do conjunto.

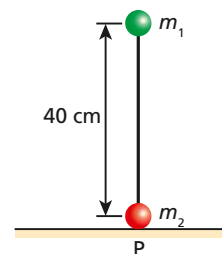
133. Na situação da figura a seguir, não há atritos nem resistência do ar; a corda que os garotos **A** e **B** seguram é leve e o plano em que apoiam seus carrinhos é horizontal. As massas de **A** e **B**, adicionadas às de seus respectivos carrinhos, valem, nesta ordem, 150 kg e 100 kg.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Estando inicialmente em repouso, os garotos começam a puxar a corda, objetivando provocar uma colisão entre os carrinhos. Durante o movimento mútuo de **A** e **B**, qual a velocidade do centro de massa do sistema?

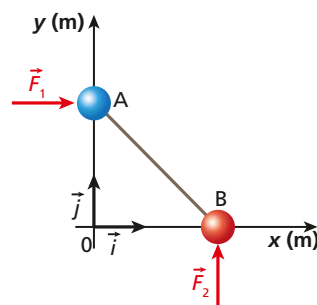
134. (ITA-SP) As massas $m_1 = 3,0$ kg e $m_2 = 1,0$ kg foram fixadas nas extremidades de uma haste homogênea, de massa desprezível e 40 cm de comprimento. Esse sistema foi colocado verticalmente sobre uma superfície plana, perfeitamente lisa, conforme mostra a figura ao lado, e abandonado. A massa m_1 colidirá com a superfície a uma distância x do ponto **P** dada por:



Reprodução/Arquivo da editora

- a) $x = 0$ (no ponto **P**).
- b) $x = 10$ cm.
- c) $x = 20$ cm.
- d) $x = 30$ cm.
- e) $x = 40$ cm.

135. (CPAEN-RJ)



Reprodução/Arquivo da editora

A figura acima mostra um sistema formado por duas partículas iguais, **A** e **B**, de massas 2,0 kg cada uma, ligadas por uma haste rígida de massa desprezível. O sistema encontra-se inicialmente em repouso, apoiado em uma superfície horizontal (plano **xy**) sem atrito. Em $t = 0$, uma força $\vec{F}_1 = 8,0\vec{i}$ N passa a atuar na partícula **A** e, simultaneamente, uma força $\vec{F}_2 = 6,0\vec{j}$ N passa a atuar na partícula **B**. Qual é o vetor deslocamento, em metros, do centro de massa do sistema de $t = 0$ a $t = 4,0$ s?

- a) $2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$
- b) $2\vec{i} + 6\vec{j}$
- c) $4\vec{i} + 3\vec{j}$
- d) $4\vec{i} + 12\vec{j}$
- e) $16\vec{i} + 12\vec{j}$

UNIDADE

3

Estática



O nado sincronizado é uma modalidade esportiva na qual os conceitos de equilíbrio, tanto de corpos sólidos quanto de corpos imersos em fluidos, são fundamentais para a sua prática.

A **Estática** é a parte da Física que estuda o equilíbrio dos corpos. A palavra “equilíbrio” é encontrada nos dicionários com o sentido de estabilidade, harmonia, constância, solidez, firmeza, etc. Em sentido figurado, pode significar prudência, moderação e comedimento. Na Física, no entanto, seu significado é simples e direto: força resultante nula!



Action Plus Sports Images/Alamy/Fotoarena

NESTA UNIDADE VAMOS ESTUDAR:

- Tópico 1: Estática dos sólidos
- Tópico 2: Estática dos fluidos

Estática dos sólidos



// A prática da dança, seja clássica, seja contemporânea, requer muita consciência corporal e equilíbrio. Para realizar coreografias e passos, é necessário que o praticante compreenda como organizar o peso do próprio corpo em diversas situações.

Na unidade anterior, estudamos a dinâmica do movimento dos corpos utilizando os conceitos de força, energia, quantidade de movimento, etc. No entanto, até então consideramos os corpos como pontos materiais. Quando levamos em consideração corpos extensos, outras grandezas são necessárias para descrever o movimento do corpo.

Estudaremos neste tópico as condições de equilíbrio para corpos extensos e para sistemas de pontos materiais. Apresentaremos o conceito de momento de uma força, os efeitos que ele produz em um corpo extenso e alguns dispositivos que utilizam esse conceito para seu funcionamento: a alavanca. Discutiremos também os possíveis tipos de equilíbrio para corpos suspensos e apoiados.

1. Introdução

A Estática é a parte da Física dedicada ao estudo das forças e do equilíbrio dos corpos.

Para compreendermos o quão vasto é o campo de atuação desse tópico da Física, vamos tentar responder ao seguinte questionamento: o que um engenheiro, um ortopedista e um ortodontista necessitam ter em comum?



Richard Lyons/Shutterstock



Ricardo Azouny/Pulsar Imagens



Alexis C/Shutterstock

Resposta: sólidos conceitos de Estática.

De fato, um engenheiro, principalmente o engenheiro civil, tem na Estática uma companheira do dia a dia. Na elaboração de projetos de prédios, pontes e monumentos, o engenheiro precisa saber dimensionar o exato esforço que uma coluna ou uma viga deve suportar. Dezenas de cálculos e simulações devem ser executados, tendo como base os conceitos fundamentais da Estática. Um único cálculo estrutural incorreto pode levar a desabamentos e acidentes fatais.

Um médico ortopedista também necessita desses conhecimentos. Como diz Marcel Bienfait em seu livro *Os desequilíbrios estáticos*: “Nosso corpo é um conjunto de sólidos articulados, um empilhamento de segmentos em que cada peça se equilibra na subjacente [...]”.

A palavra equilíbrio está no centro do estudo da Estática. Quando um médico necessita efetuar a colocação de pinos e placas no corpo de um paciente, tudo deve ser minuciosamente calculado para a perfeita reabilitação óssea. A imobilização de um braço ou de uma perna deve ser planejada, para que os membros não sejam submetidos a uma força de intensidade maior ou menor do que a necessária.

Sabe-se que esforços indevidamente aplicados podem provocar atrofia irreversíveis.

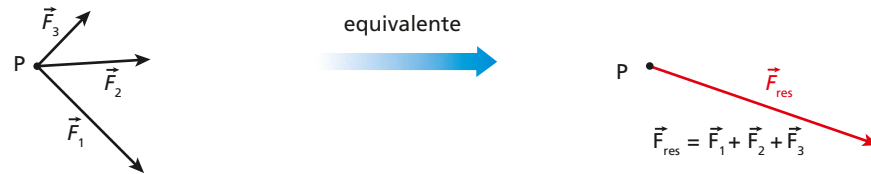
Por fim, o profissional da Ortodontia também faz uso da Estática na otimização do seu trabalho. Para que um dente que, por um motivo qualquer, precise ser reposicionado corretamente na arcada dentária, a Estática entra em ação. Forças aplicadas em direções específicas e com valores muito precisos realizam o incrível posicionamento correto do dente. Os elásticos ortodônticos e os aparelhos formam um intrincado sistema de forças que só um profissional com conhecimento e habilidade pode operar.

2. Conceitos fundamentais

Resultante de forças aplicadas a um ponto material

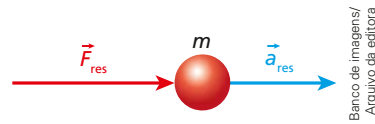
Consideremos um ponto material, conforme indica a figura abaixo, sujeito à ação de n forças: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. É sempre possível determinar uma força única que, aplicada ao ponto material, lhe proporcione a mesma aceleração vetorial que o conjunto das n forças.

Esta força é a soma vetorial de $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ e é denominada resultante (\vec{F}_{res}) das n forças.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Para uma partícula de massa m , temos:



Banco de imagens/
Arquivo da editora

A partícula adquire uma aceleração resultante (\vec{a}_{res}) quando submetida a uma força resultante \vec{F}_{res} .

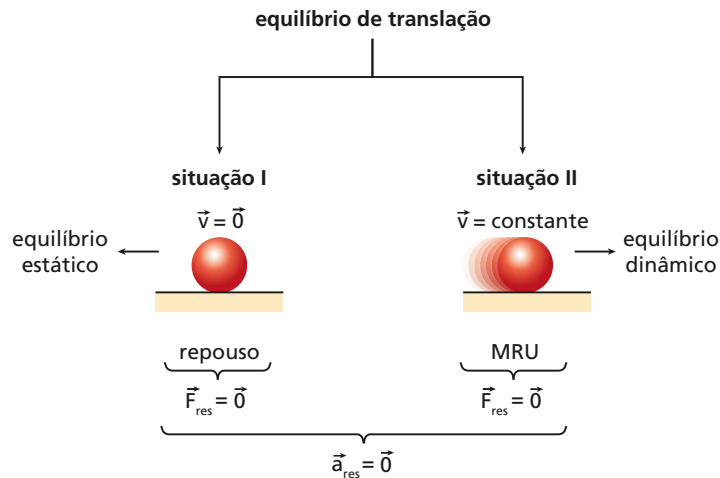
Da 2ª Lei de Newton, vem:

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a}_{res}$$

É condição necessária para o equilíbrio da partícula que a força resultante nela atuante seja nula, assim:

$$\vec{F}_{res} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_{res} = \vec{0}$$

Surgem, então, duas possibilidades: a partícula estará em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme.



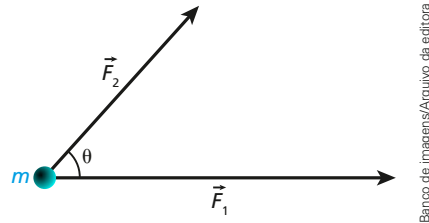
Banco de imagens/Arquivo da editora

As duas possibilidades levam-nos a situações de equilíbrio.

A situação I nos remete ao equilíbrio estático da partícula e a situação II estabelece o equilíbrio dinâmico.

Resultante de duas forças

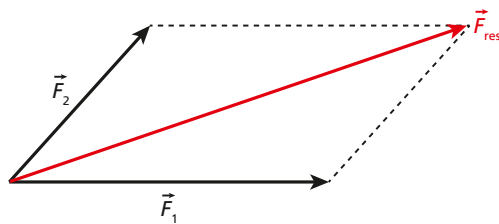
Seja uma partícula de massa m sob ação simultânea de duas forças coplanares \vec{F}_1 e \vec{F}_2 que formam entre si um ângulo θ qualquer, como mostra o esquema abaixo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

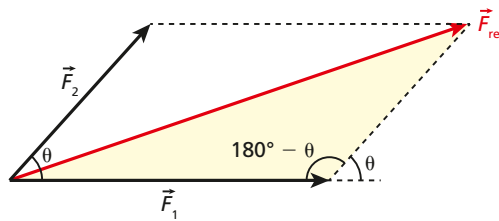
As duas forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 podem ser substituídas por uma única força (\vec{F}_{res}) que vai produzir na partícula exatamente o mesmo efeito. Podemos determinar essa força resultante, tanto graficamente como analiticamente. No Tópico 4, Vetores e Cinemática vetorial, da Unidade 1, estudamos em detalhes as operações envolvendo vetores.

1º modo (graficamente): regra do paralelogramo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

2º modo (analiticamente): Lei dos Cossenos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

No triângulo destacado na imagem acima, podemos aplicar a Lei dos Cossenos, assim:

$$F_{res}^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \theta)$$

Sendo $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$, temos:

$$F_{res}^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2(-\cos \theta)$$

Portanto:

$$F_{res}^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta$$

Podemos também analisar a situação inicial proposta sob o ponto de vista das

Leis dos Senos.

No triângulo **ABC** destacado na imagem ao lado, temos:

$$\frac{F_{res}}{\sin(190^\circ - \theta)} = \frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta}$$

Como $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$, vem:

$$\frac{F_{res}}{\sin \theta} = \frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta}$$

NOTAS!

- Quando as forças são perpendiculares entre si ($\theta = 90^\circ$), temos:

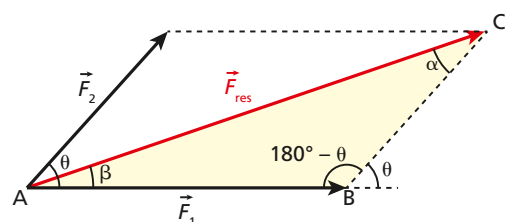
$$F_{res}^2 = F_1^2 + F_2^2$$

- Quando as forças são paralelas entre si e com mesmo sentido ($\theta = 0^\circ$), a resultante é dada por:

$$F_{res} = F_1 + F_2$$

- Quando as forças são paralelas entre si, porém com sentidos opostos ($\theta = 180^\circ$), a resultante é dada por:

$$F_{res} = |F_1 - F_2|$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

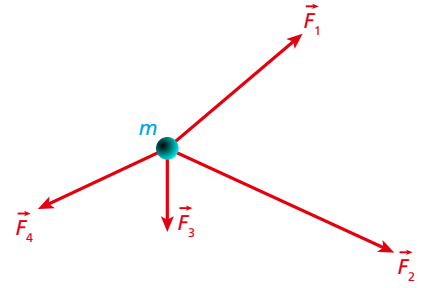
Cálculo da resultante para n forças

Método do polígono

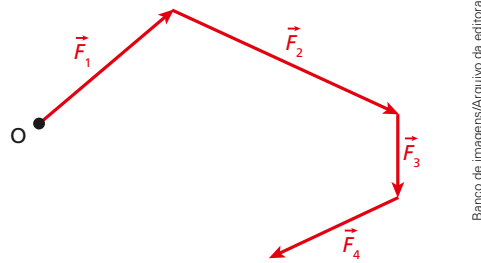
Passamos agora a analisar um caso mais geral quando se tem várias forças atuando em uma partícula, esquematizada ao lado.

Nessa situação, a partícula de massa m está submetida à ação de quatro forças: \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 e \vec{F}_4 .

Para determinarmos a força resultante sobre a partícula, podemos adotar o seguinte procedimento. Por um ponto de origem arbitrário O representamos a primeira força, obedecendo seu módulo e sua orientação inicial. A segunda força terá como origem a extremidade da primeira, e assim sucessivamente para todas as forças. Graficamente, esse procedimento está representado na imagem abaixo.

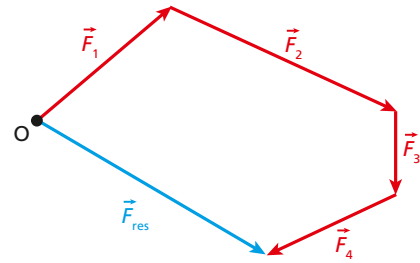


Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

NOTA!

Se tivéssemos uma quinta força \vec{F}_5 com a mesma direção e mesmo módulo da força resultante \vec{F}_{res} , porém, com sentido oposto, essa força fecharia o polígono e garantiria resultante nula.

O vetor com origem em O que fecha o polígono formado é denominado força resultante do sistema \vec{F}_{res} , como mostra a imagem ao lado.

Decomposição de forças em componentes ortogonais

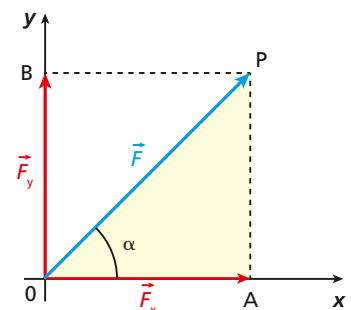
Seja \vec{F} a força que deve ser decomposta em duas componentes ortogonais dispostas segundo os eixos Ox e Oy , conforme esquema ao lado.

Projetamos a força \vec{F} sobre os dois eixos. As projetantes do ponto P (extremidade de \vec{F}) determinam sobre os eixos os pontos A e B . Os vetores \vec{OA} e \vec{OB} , que chamaremos, respectivamente, de \vec{F}_x e \vec{F}_y são as componentes da força \vec{F} , segundo os dois eixos dados.

Calculando o $\text{sen } \alpha$ e o $\text{cos } \alpha$ no triângulo destacado, podemos determinar os módulos de \vec{F}_x e \vec{F}_y :

$$\text{sen } \alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F \text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F \text{cos } \alpha$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

NOTA!

Com forças ortogonais, o cálculo da força resultante em todo o sistema é facilitado, pois pode-se analisar separadamente o eixo vertical do eixo horizontal.

Decomposição de uma força em duas componentes não ortogonais

Seja a força \vec{F} que deve ser decomposta em duas componentes dispostas segundo os eixos $\mathbf{0x}$ e $\mathbf{0y}$, como mostra a imagem ao lado. Observe, agora, que os eixos formam entre si um ângulo θ qualquer.

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo destacado, temos:

$$\frac{F}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{F_x}{\sin \beta} = \frac{F_y}{\sin \alpha}$$

Mas $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

Logo:

$$F_x = F \frac{\sin \beta}{\sin \theta} \quad \text{e} \quad F_y = F \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}$$

Mas $\beta = \theta - \alpha$. Daí:

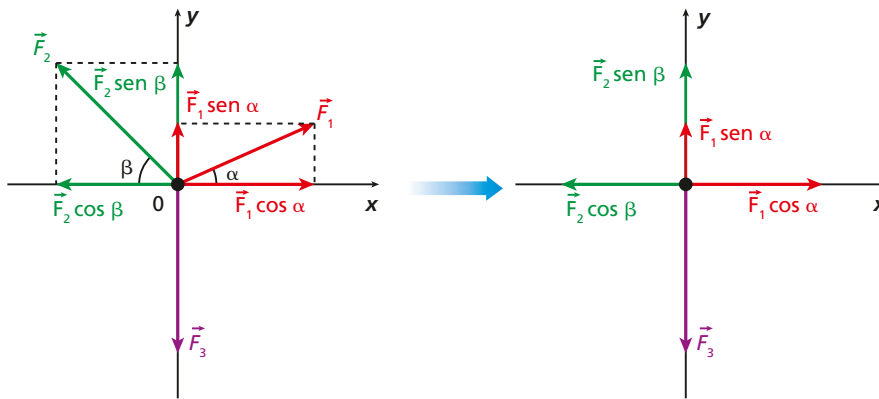
$$F_x = F \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \quad \text{e} \quad F_y = F \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}$$

Vale notar que, se impusermos $\theta = 90^\circ$, obteremos os mesmos valores de F_x e F_y do item anterior.

O método das projeções

Sejam \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 três forças coplanares e concorrentes em $\mathbf{0}$.

Escolhe-se, inicialmente, um sistema de eixos cartesianos de referência no mesmo plano das forças. Se a força resultante desse sistema é nula, decorre que as projeções dessas forças nos eixos $\mathbf{0x}$ e $\mathbf{0y}$ também terão resultantes nulas.



Equilíbrio no eixo \mathbf{x} :

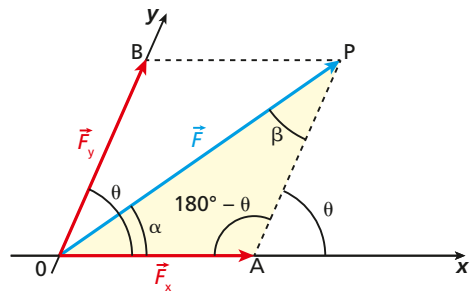
$$\vec{F}_{\text{resx}} = \vec{0} \Rightarrow F_1 \cos \alpha = F_2 \cos \beta$$

Equilíbrio no eixo \mathbf{y} :

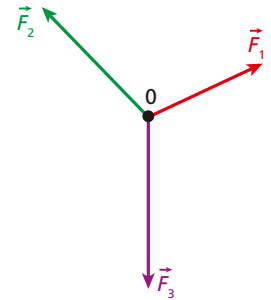
$$\vec{F}_{\text{resy}} = \vec{0} \Rightarrow F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta = F_3$$

De modo geral:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{\text{resx}} = \vec{0} \\ \vec{F}_{\text{resy}} = \vec{0} \end{cases}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

NOTA!

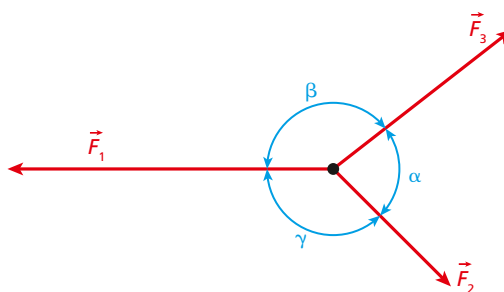
A melhor escolha do par de eixos é aquela em que o maior número possível de forças já se encontra sobre esses próprios eixos. Esse procedimento simplifica o número de forças a serem decompostas.

Teorema de Lamy

Para um sistema de três forças coplanares e concorrentes, atuando em uma partícula em equilíbrio, podemos fazer uso do Teorema de Lamy.

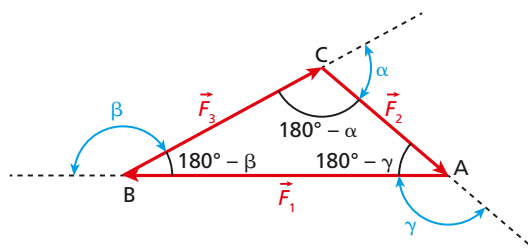
Quando uma partícula, sujeita à ação de três forças, está em equilíbrio, os módulos das forças são proporcionais aos senos dos ângulos determinados pelas outras duas forças.

Seja a situação proposta pelo teorema acima:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Podemos demonstrar essa relação construindo o polígono de forças:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Aplicando a Lei dos Senos ao triângulo **ABC**, obtemos:

$$\frac{F_1}{\text{sen}(180^\circ - \alpha)} = \frac{F_2}{\text{sen}(180^\circ - \beta)} = \frac{F_3}{\text{sen}(180^\circ - \gamma)}$$

Mas $\text{sen}(180^\circ - \theta) = \text{sen } \theta$. Portanto:

$$\frac{F_1}{\text{sen } \alpha} = \frac{F_2}{\text{sen } \beta} = \frac{F_3}{\text{sen } \gamma}$$

Exercícios Nível 1

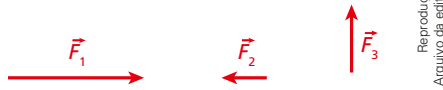
1. Analise as proposições e classifique-as como verdadeiras ou falsas.

- I. Uma partícula sujeita à ação de uma única força pode estar em equilíbrio.
- II. Se uma partícula está em equilíbrio sob ação de apenas duas forças, elas devem ter mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos.

III. Quando a soma vetorial de todas as forças atuantes em uma partícula é zero, ela pode estar em movimento.

- a) Somente I é verdadeira.
- b) Somente II é verdadeira.
- c) Somente III é verdadeira.
- d) I e II são verdadeiras.
- e) II e III são verdadeiras.

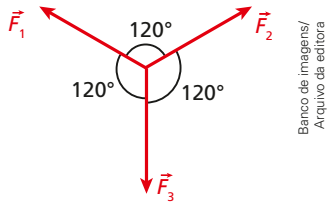
5. Considere duas forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 de módulos 6,0 N e 8,0 N respectivamente. Determine:
- o intervalo de variação da força resultante entre \vec{F}_1 e \vec{F}_2 ;
 - o módulo da força resultante quando o ângulo θ entre \vec{F}_1 e \vec{F}_2 for de 90° .
6. (Unimontes-MG) Considere os vetores de força representados na figura abaixo, cujos módulos são: $F_1 = 6,0$ N, $F_2 = 2,0$ N, $F_3 = 3,0$ N.



O módulo do vetor soma, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, é igual a

- 30 N
- 4,0 N
- 5,0 N
- 6,0 N
- 7,0 N

7. Três forças coplanares \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , e \vec{F}_3 têm mesma intensidade F e formam duas a duas ângulos de 120° , conforme indicado na figura



A força resultante correspondente à ação de \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 terá módulo igual a

- zero
 - $\frac{F}{3}$
 - $\frac{2}{3}F$
 - F
 - $3F$
8. (Vunesp) Um bloco de peso 6 N está suspenso por um fio, que se junta a dois outros num ponto **P**, como mostra a figura 1. Dois estudantes, tentando representar as forças que atuam em **P** e que o mantêm em equilíbrio, fizeram os seguintes diagramas vetoriais, usando a escala indicada na figura 2.

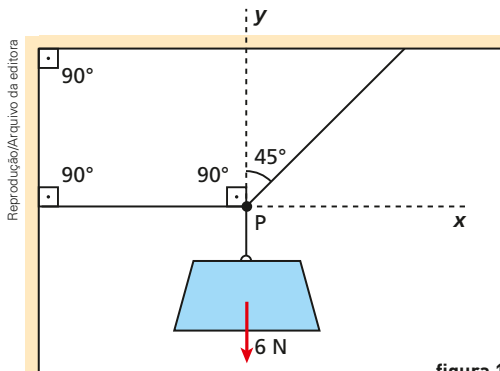
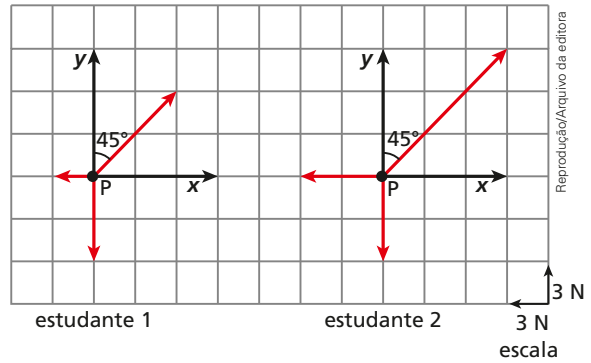


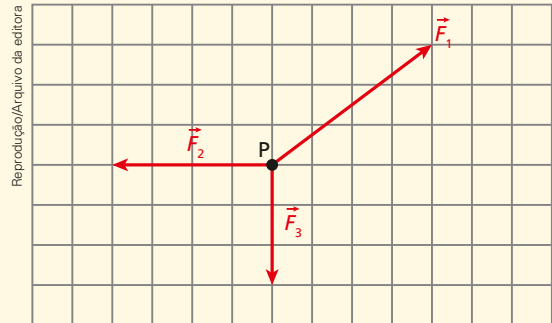
figura 1

figura 2



- Alguns dos diagramas está correto?
- Justifique sua resposta.

9. (Fatec-SP) A um ponto **P** aplicam-se as forças representadas no esquema. Cada divisão representa 10 N.



- As forças representadas possuem intensidades $F_1 = 5$ N, $F_2 = 4$ N, $F_3 = 3$ N.
- Se $F_2 = 40$ N e $F_3 = 30$ N, a resultante dessas duas forças tem intensidade igual a 70 N.
- Se $F_1 = 50$ N e $F_3 = 30$ N, a resultante dessas duas não pode ter intensidade igual a 40 N.
- As três forças figuradas formam um sistema em equilíbrio.
- A força resultante vale 100 N.

Resolução:

Cada divisão do quadriculado equivale a uma força de 10 N, assim:

$$F_2 = 4 (10 \text{ N}) = 40 \text{ N} \quad F_3 = 3 (10 \text{ N}) = 30 \text{ N}$$

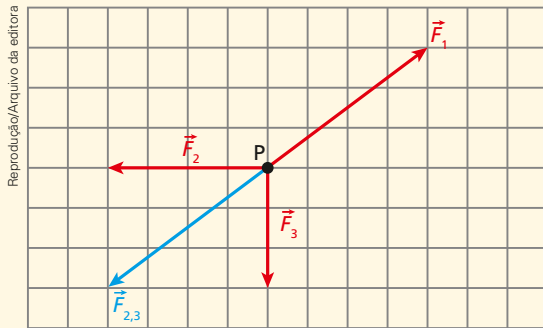
As forças \vec{F}_2 e \vec{F}_3 , perpendiculares entre si, geram uma resultante $\vec{F}_{2,3}$ dada por:

$$F_{2,3}^2 = F_2^2 + F_3^2 \Rightarrow F_{2,3}^2 = (40)^2 + (30)^2$$

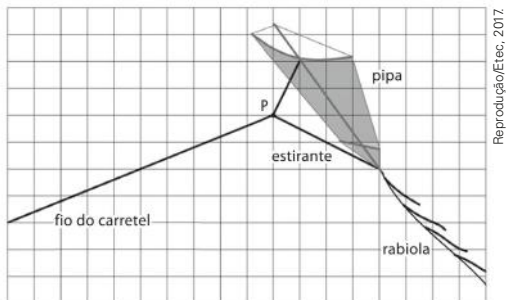
$$F_{2,3} = \sqrt{2500}$$

$$F_{2,3} = 50 \text{ N}$$

Observemos, finalmente, que o vetor $\vec{F}_{2,3}$ tem o mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto ao vetor \vec{F}_1 ; logo, o sistema está em equilíbrio e a força resultante é nula, como se afirma na alternativa **d**.



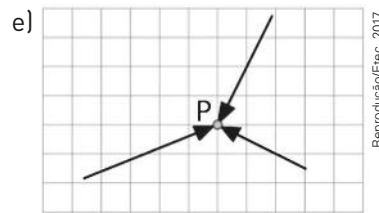
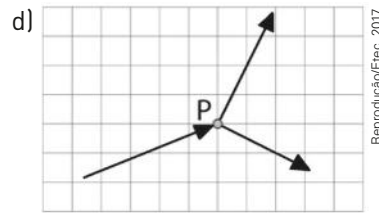
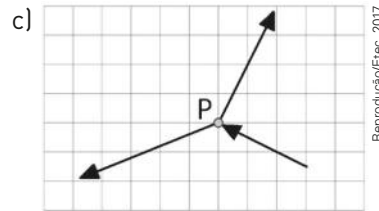
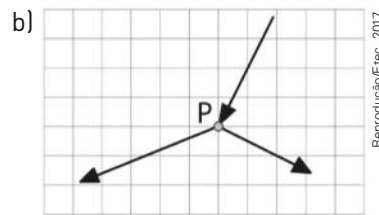
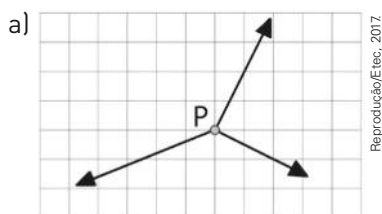
10. (Etec-SP) Há muitos conceitos físicos no ato de empinar pipas. Talvez por isso essa brincadeira seja tão divertida. Uma questão física importante para que uma pipa ganhe altura está na escolha certa do ponto em que a linha do carretel é amarrada do estirante (ponto **P**), conforme figura.



Na figura, a malha quadriculada coincide com o plano que contém a linha, o estirante e a vareta maior da pipa.

O estirante é um pedaço de fio amarrado à pipa com um pouco de folga e em dois pontos: no ponto em que as duas varetas maiores se cruzam e no extremo inferior da vareta maior, junto à rabiola.

Admitindo-se que a pipa esteja pairando no ar, imóvel em relação ao solo, e tendo como base a figura, os vetores que indicam as forças atuantes sobre o ponto **P** estão melhor representados em

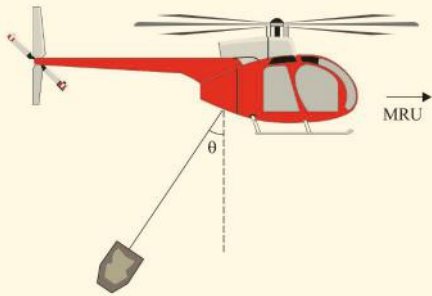


11. Bastante comum nas academias de ginástica, o aparelho denominado *leg press* é indicado pelos especialistas para treinamento e exercício de vários músculos das pernas (imagem da esquerda). Existem vários modelos desse tipo de aparelho. Na foto, vemos uma atleta exercitando-se em um modelo em que o conjunto de pesos possui massa total de 40 kg e pode deslizar sobre trilhos sem atrito. Na execução desse exercício, as pernas do atleta formam um ângulo de 45° com a horizontal quando totalmente estendidas. Para a situação em que os pesos encontram-se em equilíbrio estático, qual é a força correspondente ao esforço muscular suportado pelas pernas do atleta?



Dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\sqrt{2} = 1,4$.

12. (Unesp-SP) Em uma operação de resgate, um helicóptero sobrevoa horizontalmente uma região levando pendurado um recipiente de 200 kg com mantimentos e materiais de primeiros socorros. O recipiente é transportado em movimento retilíneo e uniforme, sujeito às forças peso (\vec{P}), de resistência do ar horizontal (\vec{F}) e tração (\vec{T}), exercida pelo cabo inextensível que o prende ao helicóptero.



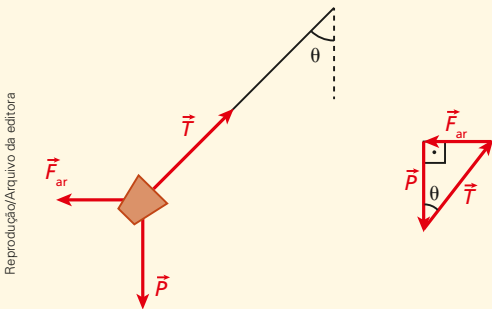
Reprodução/Unesp, 2012.

Sabendo-se que o ângulo entre o cabo e a vertical vale θ , que $\sin \theta = 0,6$, $\cos \theta = 0,8$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, a intensidade da força de resistência do ar que atua sobre o recipiente vale, em N:

- a) 500 c) 1500 e) 2000
b) 1250 d) 1750

Resolução:

Na imagem abaixo temos o diagrama de forças:



Reprodução/Arquivo da editora

Para o equilíbrio do recipiente, a força resultante é nula e o polígono de forças é fechado.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_{\text{ar}}}{P} \Rightarrow F_{\text{ar}} = P \operatorname{tg} \theta \Rightarrow F_{\text{ar}} = 2000 \cdot \frac{0,6}{0,8}$$

$$F_{\text{ar}} = 1500 \text{ N}$$

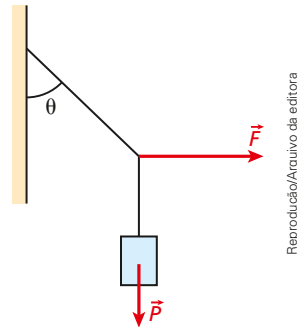
Resposta: alternativa **c**.

13. (Uerj) Em um pêndulo, um fio de massa desprezível sustenta uma pequena esfera magnetizada de massa igual a 0,01 kg. O sistema encontra-se em estado de equilíbrio, com o fio de sustentação em uma direção perpendicular ao solo.

Um ímã, ao ser aproximado do sistema, exerce uma força horizontal sobre a esfera, e o pêndulo alcança um novo estado de equilíbrio, com o fio de sustentação formando um ângulo de 45° com a direção inicial. Admitindo-se a aceleração da gravidade com módulo igual a $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, a magnitude dessa força, em newtons, é igual a:

- a) 0,1 b) 0,2 c) 1,0 d) 2,0

14. (ITA-SP) Um bloco de peso \vec{P} é sustentado por fios, como indica a figura.



Reprodução/Arquivo da editora

Calcular o módulo da força horizontal \vec{F} .

- a) $F = P \sin \theta$ d) $F = P \operatorname{cotg} \theta$
b) $F = P \cos \theta$ e) $F = P \operatorname{tg} \theta$
c) $F = P \sin \theta \cos \theta$

15. (Unesp-SP) Um lustre está pendurado no teto de uma sala por meio de dois fios inextensíveis, de mesmo comprimento e de massas desprezíveis, como mostra a figura 1, na qual o ângulo que cada fio faz com a vertical é 30° . As forças de tensão nos fios têm a mesma intensidade.

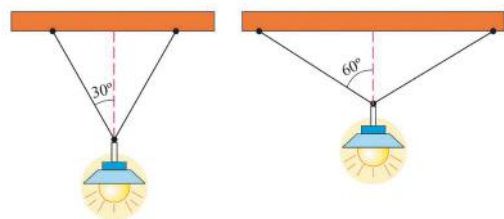


figura 1

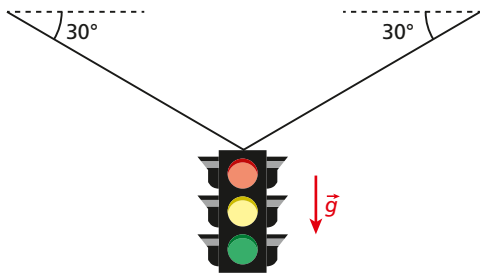
figura 2

Reprodução/Unesp, 2011.

Considerando $\cos 30^\circ \cong 0,87$, se a posição do lustre for modificada e os fios forem presos ao teto mais distantes um do outro, de forma que o ângulo que cada um faz com a vertical passe a ser o dobro do original, como mostra a figura 2, a tensão em cada fio será igual a

- a) 0,50 do valor original.
b) 1,74 do valor original.
c) 0,86 do valor original.
d) 2,00 do valor original.
e) 3,46 do valor original.

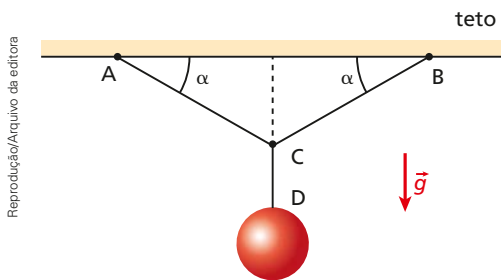
16. (UEA-AM) Um semáforo de peso 120 N é sustentado por dois cabos que formam ângulos de 30° com a horizontal, como indicado na figura.



Reprodução/Arquivo da editora

Sendo $\sin 30^\circ = 0,50$ e $\cos 30^\circ = 0,87$, é correto afirmar que a intensidade da força de tração em cada um dos cabos vale

- a) 30 N c) 87 N e) 120 N
b) 60 N d) 104 N
17. (Uespi) A figura abaixo ilustra um corpo de peso P , que se encontra pendurado no teto de uma sala por fios ideais, definindo ângulos α de mesmo valor. A aceleração da gravidade no local tem módulo g . Nesta situação, qual é a intensidade da força de tração no fio **AC**?



Reprodução/Arquivo da editora

18. (Unicid-SP) A imagem mostra uma radiografia lateral do pé de um paciente, na qual o osso destacado com contornos vermelhos está em equilíbrio e submetido à ação de três forças, \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 , resultantes da interação com ossos adjacentes.



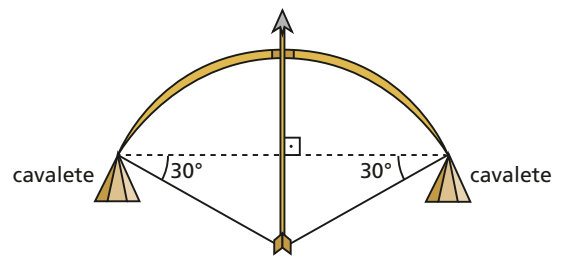
Reprodução/Unesp, 2015.

(fisioterapia.bloguepessoal.com. Adaptado.)

As forças \vec{F}_2 e \vec{F}_3 possuem módulos iguais a 400 e 300 newtons, respectivamente, e formam ângulos retos entre si. Supondo-se que a aceleração da gravidade tenha módulo igual a 10 m/s^2 e que a força \vec{F}_1 tenha a metade do valor e a mesma direção do peso do paciente, é correto afirmar que a massa aproximada desse paciente, em quilogramas, é igual a

- a) 60 d) 100
b) 75 e) 120
c) 80

19. (UEA-AM) A figura mostra uma armação tipo arco e flecha, apoiada em dois cavaletes fixos.



Reprodução/Arquivo da editora

A flecha, que forma 90° com a linha tracejada na figura, imprime uma força de intensidade 40 N no ponto médio da corda ideal, permanecendo em equilíbrio.

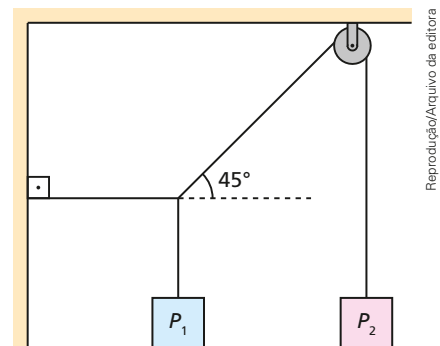
Sendo $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ e $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a intensidade da força de tração na corda, em newtons, é:

- a) 20 d) 35
b) 25 e) 40
c) 30

20. (UFMA) O sistema ilustrado na figura abaixo encontra-se em equilíbrio. O valor de P_2 em newtons é:

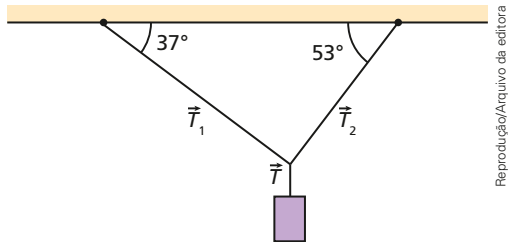
- a) 150 N d) 200 N
b) 160 N e) 220 N
c) 180 N

Considere: $P_1 = 140 \text{ N}$; $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ \cong 0,7$.



Reprodução/Arquivo da editora

21. (UFS-SE) Um fio vertical é submetido à tração de intensidade T quando sustenta um corpo de massa 10 kg. A extremidade desse fio é presa ao teto por dois fios: o fio 1, cuja tração tem módulo T_1 , forma 37° com o teto horizontal; e o fio 2, submetido à tração de módulo T_2 , forma 53° com o teto.



Reprodução/Arquivo da editora

Dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$;

$\sin 37^\circ = \cos 53^\circ = 0,60$;

$\cos 37^\circ = \sin 53^\circ = 0,80$.

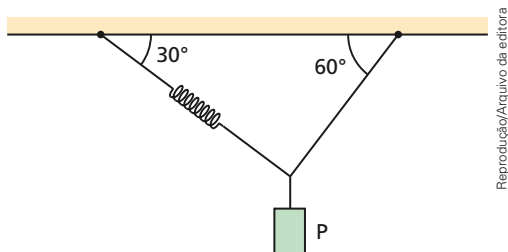
Analise as afirmações.

1. $T = 100 \text{ N}$.
2. $T_1 + T_2 = T$.
3. $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T} = \vec{0}$
4. $T_1 = 80 \text{ N}$
5. $T_2 = 60 \text{ N}$

Somente está correto o que se afirma em:

- | | |
|-----------|--------------|
| a) 1 e 2. | d) 3, 4 e 5. |
| b) 1 e 3. | e) 2 e 3. |
| c) 4 e 5. | |

22. (Efmom-RJ) – Considere o sistema em equilíbrio da figura dada:



Reprodução/Arquivo da editora

Dados:

$\cos 30^\circ = 0,87$;

$\cos 60^\circ = 0,50$.

Os fios são ideais e o peso do bloco **P** é de 50,0 N. Sabendo-se que a constante elástica da mola K vale $5,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, determina-se que a mola está alongada de:

- a) 0,05 cm
- b) 0,10 cm
- c) 0,50 cm
- d) 0,87 cm
- e) 1,00 cm

23. (UPM-SP) Em uma experiência de laboratório, um estudante utilizou os dados do gráfico da figura 1, que se referiam à intensidade da força aplicada a uma mola helicoidal, em função de sua deformação ($|\vec{F}| = k|x|$). Com esses dados e uma montagem semelhante à da figura 2, determinou a massa (m) do corpo suspenso.

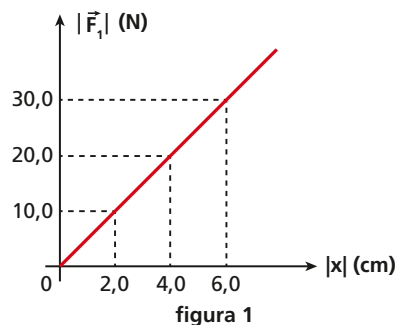


figura 1

Ilustrações: Reprodução/Arquivo da editora

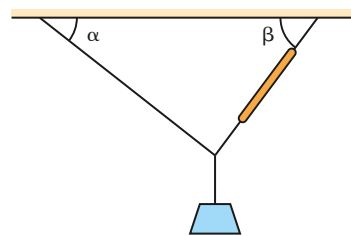


figura 2

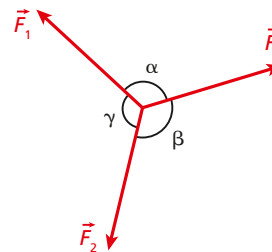
Considerando-se que as massas da mola e dos fios (inextensíveis) são desprezíveis, que $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$ e que, na posição de equilíbrio, a mola está deformada de 6,4 cm, a massa (m) do corpo suspenso é

- | | | |
|------------|-----------|-----------|
| a) 12,0 kg | c) 4,0 kg | e) 2,0 kg |
| b) 8,0 kg | d) 3,2 kg | |

Dados:

$\sin \alpha = \cos \beta = 0,60$; $\sin \beta = \cos \alpha = 0,80$.

24. (UPM-SP) A resultante das três forças, de módulos $F_1 = F$, $F_2 = 2F$ e $F_3 = F\sqrt{3}$, indicadas na figura abaixo, é zero.

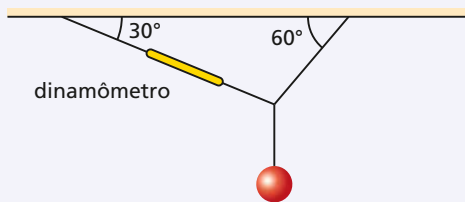


Reprodução/Arquivo da editora

Os ângulos α , β e γ valem respectivamente:

- | | |
|---|--|
| a) 150° ; 150° e 60° | d) 90° ; 150° e 120° |
| b) 135° ; 135° e 90° | e) 120° ; 120° e 120° |
| c) 90° ; 135° e 135° | |

25. (Unesp-SP) Um professor de física pendurou uma pequena esfera, pelo seu centro de gravidade, ao teto da sala de aula, conforme a figura:



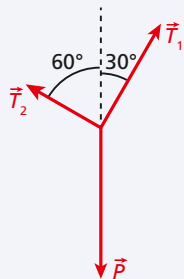
Em um dos fios que sustentava a esfera ele acoplou um dinamômetro e verificou que, com o sistema em equilíbrio, ele marcava 10 N. O peso, em newtons, da esfera pendurada é de:

- a) $5\sqrt{3}$.
- b) 10.
- c) $10\sqrt{3}$.
- d) 20.
- e) $20\sqrt{3}$.

Dados: $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$;
 $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Resolução:

1ª solução (método da poligonal):



Para o equilíbrio do sistema, a força resultante deve ser nula e o polígono de forças deve ser fechado.

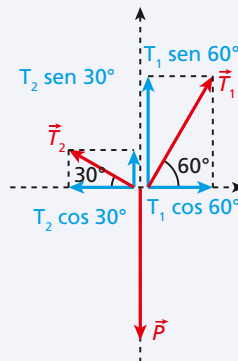
A força indicada pelo dinamômetro tem intensidade igual à da força que traciona o fio no qual ele está intercalado.

$$F_{\text{din}} = T_2 = 10 \text{ N}$$

Do triângulo de forças, temos:

$$\sin 30^\circ = \frac{T_2}{P} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{P} \therefore P = 20 \text{ N}$$

2ª solução (método das projeções):



Equilíbrio no eixo x :

$$T_1 \cos 60^\circ = T_2 \cos 30^\circ$$

$$T_1 \cdot \frac{1}{2} = T_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$T_1 = T_2 \sqrt{3}$$

Do enunciado, $T_2 = 10 \text{ N}$ (indicação do dinamômetro), portanto:

$$T_1 = 10\sqrt{3} \text{ N}$$

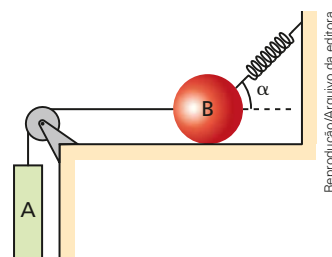
Equilíbrio no eixo y :

$$T_1 \sin 60^\circ + T_2 \sin 30^\circ = P$$

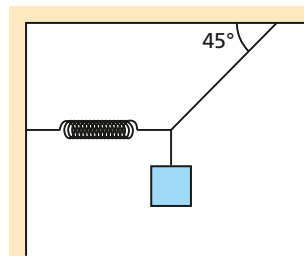
$$10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 10 \cdot \frac{1}{2} = P$$

$$15 + 5,0 = P \therefore P = 20 \text{ N}$$

26. (OBF) No sistema representado e em equilíbrio, a mola tem uma constante elástica igual a $1,0 \text{ kN/m}$, a bola tem um peso P_B igual a 200 N , o ângulo α vale 45° e o corpo suspenso tem peso P_A igual a 50 N . Nessas condições, calcule:
- a) a intensidade da força de reação F_N que o plano de apoio exerce sobre a bola;
 - b) a deformação x provocada na mola para assegurar o equilíbrio. Adote $\sqrt{2} = 1,4$.



27. (Cefet-PR) A mola representada na figura está em equilíbrio, na posição horizontal, tem constante elástica $k = 2,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ e peso desprezível.



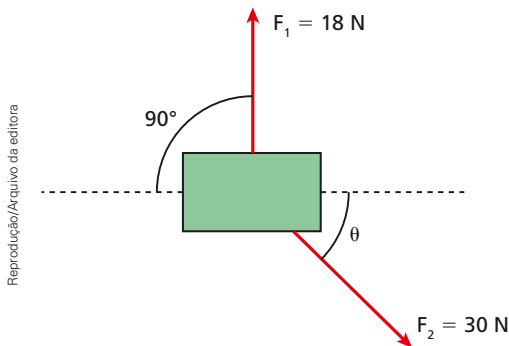
Reprodução/Arquivo da editora

O corpo suspenso pesa $5,0 \cdot 10^2 \text{ N}$.

Calcule:

- a) a deformação da mola;
- b) a intensidade da força tensora no fio.

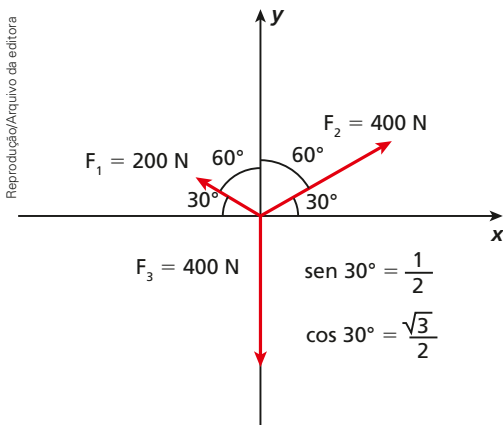
28. (Fatec-SP) Um corpo está sujeito a duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 . Dados $\sin \theta = 0,60$ e $\cos \theta = 0,80$, uma terceira força \vec{F}_3 é aplicada ao corpo e provoca o equilíbrio estático. Esta nova força \vec{F}_3 é:



Reprodução/Arquivo da editora

- a) horizontal para a esquerda, de intensidade 30 N.
- b) horizontal para a direita, de intensidade 30 N.
- c) horizontal para a esquerda, de intensidade 24 N.
- d) horizontal para a direita, de intensidade 18 N.
- e) inclinada de θ para baixo, de intensidade 30 N.

29. (OBC) Numa partícula, atuam três forças, conforme está indicado na figura.

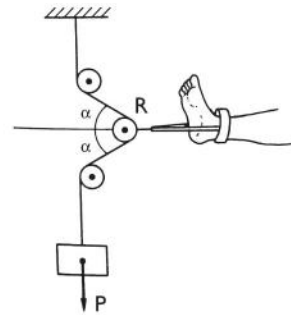


Reprodução/Arquivo da editora

A força resultante que age na partícula tem intensidade igual a

- a) 1000 N
- b) 800 N
- c) 600 N
- d) 400 N
- e) 200 N

30. (Uerj) Em uma sessão de fisioterapia, a perna de um paciente acidentado é submetida a uma força de tração que depende do ângulo α , como indica a figura abaixo.



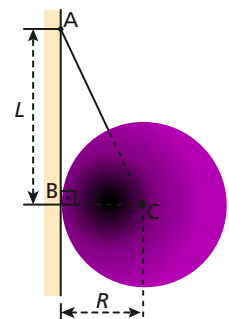
Reprodução/Uerj, 2002.

(KING, A. R. & REGEV, O. *Physics with answers*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.)

O ângulo α varia deslocando-se a roldana **R** sobre a horizontal. Se, para um mesmo peso P , o fisioterapeuta muda α de 60° para 45° , o valor da tração na perna fica multiplicado por:

- a) $\sqrt{3}$
- b) $\sqrt{2}$
- c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

31. Uma esfera homogênea de peso P e raio R está suspensa em equilíbrio, fixa a uma parede sem atrito por um fio ideal, em um ponto **A**, que está indicado na figura.

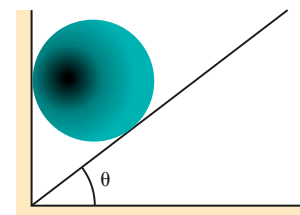


Banco de imagens/Arquivo da editora

Determine, em função de P , L e R :

- a) a intensidade F da força que a parede exerce sobre a esfera;
- b) a intensidade T da força que traciona o fio.

32. (OBF) Uma esfera de peso P está apoiada numa parede vertical sem atrito e mantida nessa posição por um plano inclinado, também sem atrito, que forma um ângulo θ com o plano horizontal. Calcular as intensidades das reações da parede e do plano sobre a esfera.



Reprodução/Arquivo da editora

3. Momento escalar de uma força

Em muitas situações do cotidiano, fazemos uso de conceitos físicos sem perceber. Vejamos alguns exemplos.



Matva/Shutterstock

// Determinadas ferramentas, como a chave de boca da imagem ao lado, permitem um ajuste preciso de porcas e parafusos, garantindo o bom funcionamento de equipamentos.

Se temos dificuldade na retirada de um parafuso ou de uma porca, tentamos utilizar uma ferramenta que tenha um braço maior ou um extensor, como mostram a imagem acima e as imagens abaixo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

// Para trocar o pneu de um carro, utilizamos a chave de roda. Essa ferramenta é encaixada na porca da roda do veículo e, após aplicação de força, rotaciona a porca para que o pneu seja trocado.

Sabemos quase intuitivamente, por experiência cotidiana, qual o local mais apropriado para tentar abrir um grande portão, como o esquematizado na imagem a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

// A força utilizada para abrir um portão depende do ponto de aplicação escolhido. Quanto mais distante do eixo de rotação (dobradiça), menor a intensidade da força que deverá ser empregada.

No parque da escola ou da praça da cidade, sabemos onde devemos nos sentar para brincar de gangorra com uma pessoa que tenha um peso maior ou menor que o nosso.



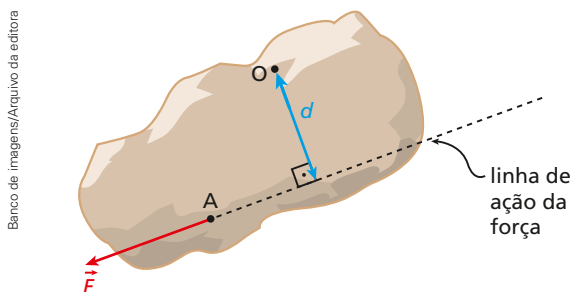
Banco de imagens/Arquivo da editora

// Na situação acima, o equilíbrio do sistema depende do peso das pessoas e da distância com que cada uma delas se situa em relação ao eixo de rotação da gangorra. A mulher, por ter um peso maior que o da criança, deve sentar mais próximo ao eixo de rotação da gangorra para que esta fique paralela ao solo.

Muitas vezes, se a intuição falhar, o método da tentativa e erro pode nos levar à resposta correta. Em todas essas situações apresentadas, ao aplicarmos uma força, a consequência imediata é uma rotação ou uma tendência de rotação.

Para caracterizar essa capacidade de imprimir rotação, apresentada por uma força, define-se uma grandeza chamada **momento da força em relação a um polo**.

Sejam \vec{F} a força aplicada no ponto **A** do corpo rígido, **O** o polo em torno do qual o corpo rígido pode girar e d a distância do polo **O** à linha de ação da força (d é denominado **braço** de alavanca e é sempre medido na perpendicular baixada do polo à linha de ação da força).



O momento da força \vec{F} em relação ao polo **O** pode ser assim definido:

O **momento escalar da força** \vec{F} em relação ao polo **O** é o produto do módulo da força pelo braço de alavanca d , sendo esse produto precedido do sinal + ou -, conforme o sentido da rotação produzida pela força seja anti-horário ou horário. Assim:

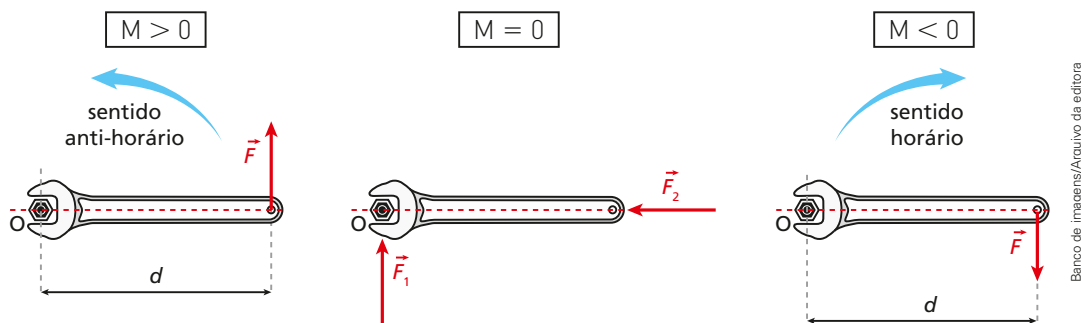
$$M_F^O = \pm Fd$$

No Sistema Internacional (SI), a unidade de momento escalar da força é o produto da unidade de força (N) e da unidade de distância (m): **N · m**.

Convencionalmente:

Rotação em sentido horário	Momento negativo
Rotação em sentido anti-horário	Momento positivo

Essa convenção é arbitrária e pode ser adotada de maneira oposta sem nenhum prejuízo. Na imagem a seguir, podemos observar a relação entre o sentido de rotação da chave inglesa e o sinal do momento escalar, conforme a convenção usual.



Quando a força está aplicada no próprio polo ou tem sua linha de ação passando pelo polo, como na segunda imagem acima, o momento escalar é nulo, pois o braço da alavanca $d = 0$. Nessa situação, a força \vec{F}_2 promove uma compressão da chave, mas não imprime tendência de rotação, assim:

$$M_{F_1}^0 = 0 \quad \text{e} \quad M_{F_2}^0 = 0$$

NOTA!

O momento da força ou torque é, de fato, uma grandeza física vetorial, porém, trabalharemos neste tópico exclusivamente com o momento escalar da força.

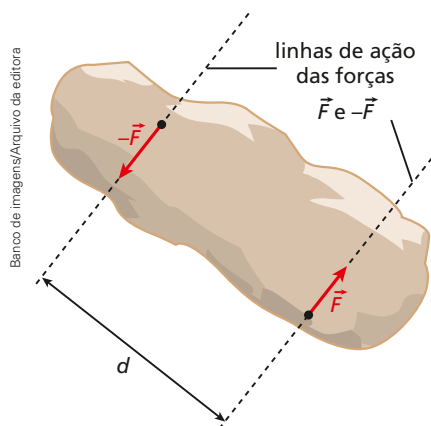
4. Binário ou conjugado

A seguir, estudaremos em detalhes o sistema de forças denominado binário.

Denomina-se **binário** ou **conjugado** um sistema de duas forças de intensidades iguais, sentidos opostos e linhas de ação paralelas entre si.

Braço do binário é a distância d entre as linhas de ação das forças.

Plano do binário é o plano determinado pelas linhas de ação das duas forças.



// Representação de um objeto sob ação de um binário.



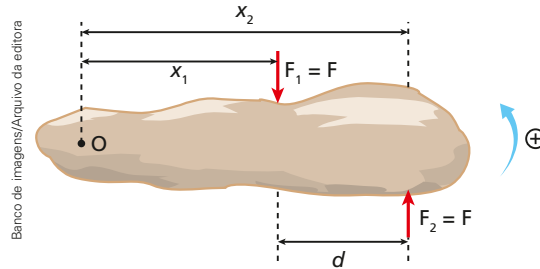
Loren Rye Photo Garden /Alamy/Fotorena

Os efeitos de um binário sobre um corpo são a **rotação** e a **torção**, se ao sólido não for permitido girar. Como vimos anteriormente, a força resultante devido ao binário é nula; portanto, o corpo não adquire movimento de translação.

// No irrigador giratório, as forças dos jatos de água geram um binário.

Momento resultante de um binário

Sendo \vec{F}_1 e \vec{F}_2 forças coplanares e de mesmo módulo, o momento resultante do binário pode ser determinado pela soma algébrica dos momentos provocados pelas forças componentes. Na figura a seguir, \mathbf{O} é o ponto em que o plano do binário é interceptado por um eixo e d é a distância entre os pontos de aplicação das forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 nesse eixo.



Assim, o momento escalar do binário ($M_{\text{binário}}$) é obtido considerando-se os momentos escalares das forças em relação a \mathbf{O} :

$$M_{\text{binário}} = M_{F_1}^O + M_{F_2}^O \Rightarrow M_{\text{binário}} = -F_1 x_1 + F_2 x_2$$

Mas $F_1 = F_2 = F$, então:

$$M_{\text{binário}} = -F x_1 + F x_2 \Rightarrow M_{\text{binário}} = F(x_2 - x_1)$$

Temos ainda:

$$x_2 - x_1 = d$$

Portanto:

$$M_{\text{binário}} = F d$$

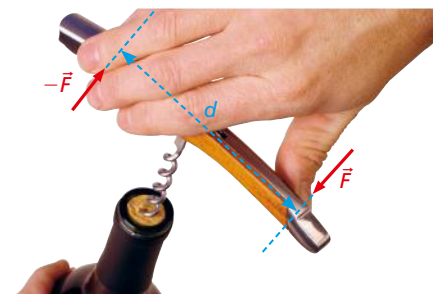
De modo geral:

O **momento escalar de um binário** é o produto de uma de suas forças (\vec{F}) pelo braço do binário (d) precedido do sinal + ou - conforme convenção adotada.

$$M_{\text{binário}} = \pm F d$$



// Para apertar um parafuso ou encaixar um saca-rolha, aplica-se um binário de momento escalar resultante de módulo Fd .



// Utilizando as duas mãos ao fazer uma curva, produz-se também um binário de força.

5. Equilíbrio estático de um corpo extenso

A seguir, apresentaremos as condições necessárias e suficientes para que um corpo extenso se mantenha em equilíbrio.

1ª condição

A **resultante** (\vec{F}_{res}) de todas as forças que nele agem é **nula**.

$$\vec{F}_{res} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{res_x} = \vec{0} \\ \vec{F}_{res_y} = \vec{0} \end{cases}$$

Essa condição implica que o corpo não terá movimento de translação.

2ª condição

A **soma algébrica dos momentos** de todas as forças que nele atuam é **nula**.

$$\Sigma M = 0$$

Essa condição implica que o corpo não terá movimento de rotação e é equivalente a:

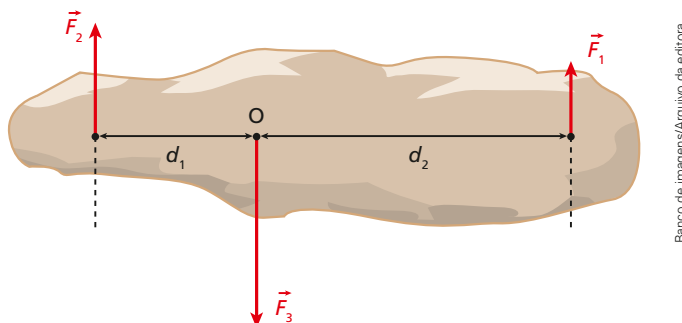
$$\begin{array}{ccc} \Sigma M_{(\text{horário})} & = & \Sigma M_{(\text{anti-horário})} \\ \text{somatório dos} & & \text{somatório dos} \\ \text{momentos no} & & \text{momentos no} \\ \text{sentido horário} & & \text{sentido anti-horário} \end{array}$$

Nesse caso, não há a necessidade de convencionar um sinal, positivo ou negativo, para os momentos escalares das forças atuantes. Nessa situação, trabalharemos exclusivamente com seus módulos.

6. Teorema das Três Forças

Quando um corpo qualquer está em equilíbrio sob a ação exclusiva de três forças coplanares, podemos ter as seguintes situações:

1) As três forças são paralelas entre si.

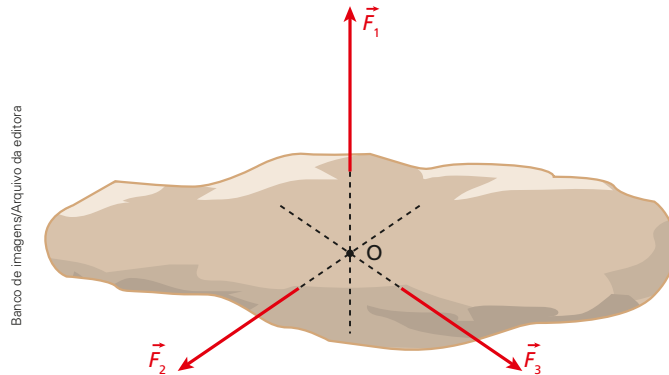


Das condições de equilíbrio, temos:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{res} = \vec{0} & \Rightarrow F_1 + F_2 = F_3 \\ M^O = 0 & \Rightarrow F_1 d_1 = F_2 d_2 \end{aligned}$$

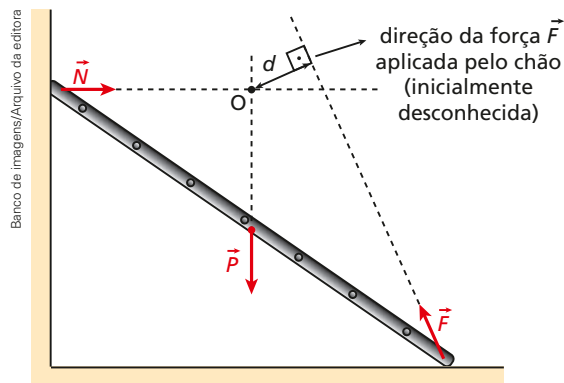
Notemos que as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 não precisam ter a mesma intensidade, mas precisam satisfazer as condições de equilíbrio acima.

II) As três forças são concorrentes em um mesmo ponto.



Vamos analisar por meio de um exemplo a necessidade de que as três forças tenham linha de ação passando por um mesmo ponto.

Consideremos uma escada apoiada em uma parede lisa (sem atrito) e solo rugoso (com atrito).

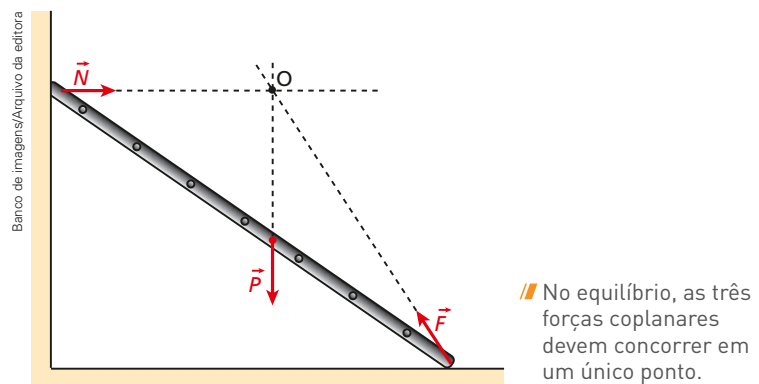


No equilíbrio, o somatório dos momentos de todas as forças em relação ao polo O deve ser nulo. Assim:

$$M_N^O + M_P^O + M_F^O = 0 \Rightarrow N \cdot 0 + P \cdot 0 + F \cdot d = 0$$

$$d = 0$$

Se $d = 0$, demonstramos que a força \vec{F} também deve ter linha de ação passando pelo ponto O .



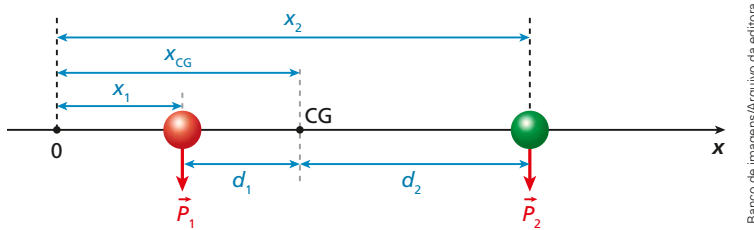
Com o uso do Teorema das Três Forças, se conhecermos as direções de duas das forças atuantes, podemos determinar a direção da terceira.

7. Centro de gravidade

Centro de gravidade (CG) de um sistema de partículas é o ponto onde se pode **supor** que o peso total desse sistema esteja aplicado.

Isso facilita o estudo de problemas com corpos extensos ou de um sistema de muitas partículas.

Imaginemos um sistema simples formado por duas partículas de pesos \vec{P}_1 e \vec{P}_2 posicionadas no eixo $0x$.



Para localizarmos a abscissa (x_{CG}) do centro de gravidade, vamos impor que o somatório dos momentos em relação a ele seja nulo; assim:

$$M_{P_1} = M_{P_2} \Rightarrow P_1 d_1 = P_2 d_2 \Rightarrow P_1 (x_{CG} - x_1) = P_2 (x_2 - x_{CG})$$

$$x_{CG} (P_1 + P_2) = P_1 x_1 + P_2 x_2$$

$$x_{CG} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}$$

Imaginemos, agora, um corpo formado por n partículas de pesos $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$. Sabemos que cada partícula desse corpo é atraída pela Terra segundo uma força de natureza gravitacional denominada peso da partícula. A resultante de todas essas n forças atrativas é o peso total do corpo. A direção da força exercida sobre cada partícula é a de uma reta que passa pelo centro da Terra, ou seja, todos esses n pesos convergem para o centro. Entretanto, como a distância até o centro da Terra é muito grande, tais forças podem ser consideradas praticamente paralelas entre si sem que se cometa algum erro significativo.

Desse modo, o resultado anterior obtido para apenas duas partículas pode ser generalizado. Assim:

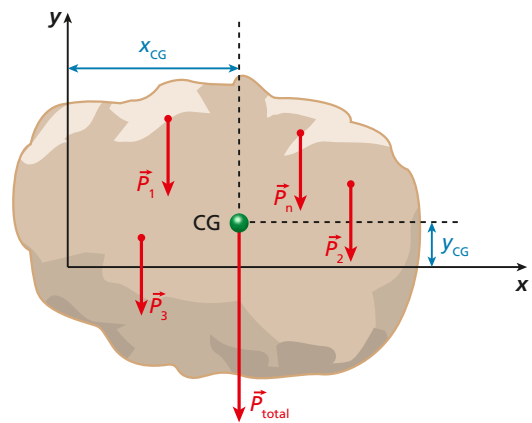
$$x_{CG} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

e

$$y_{CG} = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

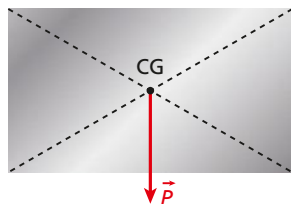
Em que:

- $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ representam os pesos das partículas;
- x_1, x_2, \dots, x_n e y_1, y_2, \dots, y_n representam as coordenadas de $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$;
- x_{CG} e y_{CG} representam as coordenadas do ponto de aplicação do peso total do corpo, chamado centro de gravidade e representado por **CG**.

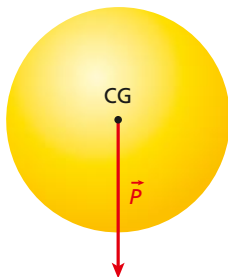


8. Centro de gravidade e centro de massa

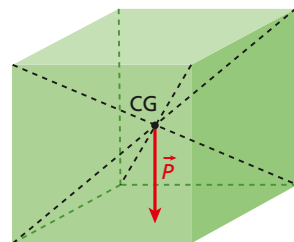
Quando um corpo tem distribuição homogênea de sua massa e seu formato geométrico apresenta simetria, é possível identificar nesse corpo um ponto, um eixo ou plano sobre o qual estará, necessariamente, o seu centro de gravidade (**CG**) ou baricentro.



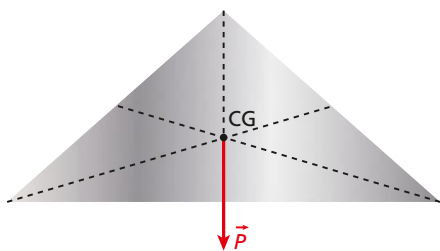
// O encontro das diagonais de uma placa retangular homogênea determina o **CG**.



// O centro de uma esfera homogênea coincide com o **CG**.



// O centro de gravidade de um cubo homogêneo está no encontro de suas diagonais.



// O centro de gravidade de uma chapa triangular homogênea encontra-se na interseção das medianas.



// O **CG** pode estar fora do corpo, como é o caso de uma aliança homogênea, cujo centro do anel corresponde ao **CG**.

Em uma região onde a aceleração da gravidade \vec{g} possa ser considerada constante, o centro de gravidade (**CG**) é coincidente com o **centro de massa** do corpo (**CM**).

JÁ PENSOU NISTO?

Como o centro de gravidade afeta a nossa postura?

Quando uma pessoa carrega uma mala ou mochila com muito peso, há um deslocamento do centro de gravidade. Para que o corpo possa restabelecer o equilíbrio, algumas musculaturas são solicitadas e o organismo, como um todo, busca se reestruturar espacialmente. Essas solicitações persistentes em alguns músculos podem, com o tempo, acarretar problemas de postura e desconfortos musculares.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Faça você mesmo

Determinando o centro de gravidade: método da suspensão

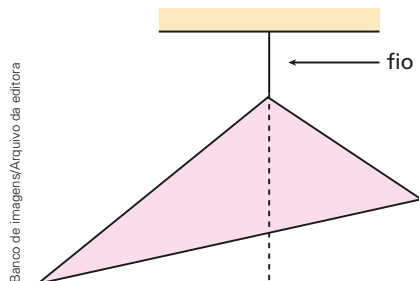
Vimos na teoria que corpos extensos possuem um centro de gravidade (**CG**). Veremos nesta atividade experimental um método para determinar o centro de gravidade de objetos: o método da suspensão.

Material necessário

- 1 folha de cartolina cortada em um formato qualquer;
- linha de costura;
- fita adesiva;
- lápis;
- régua.

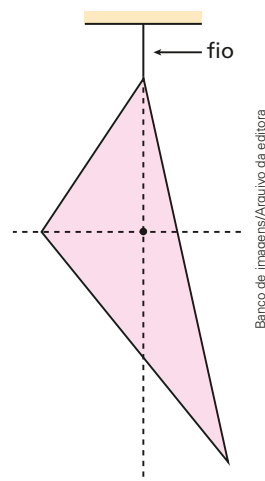
Procedimento

- I. Em uma extremidade da folha de cartolina, prenda a linha de costura com fita adesiva.
- II. Suspenda a folha por um de seus extremos e espere até que ela atinja o equilíbrio. Utilizando a régua, trace uma linha vertical passando pelo ponto de suspensão.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- III. Adote outro extremo da folha e repita o procedimento anterior.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- IV. A interseção das duas linhas determina o centro de gravidade do corpo.

Desenvolvimento

1. Compare o centro de gravidade do seu objeto com o centro de gravidade de outros objetos de seus colegas. Como a forma da folha de cartolina influencia na posição do centro de gravidade?
2. Você acha que esse experimento é válido para determinar o centro de gravidade de corpos tridimensionais? Quais seriam as dificuldades em determinar o centro de gravidade desses corpos utilizando esse método?

Ampliando o olhar

A Física no salto em altura

O momento mágico da conquista de uma medalha de ouro por um atleta é sempre antecedido de muita dedicação, trabalho e treinos árduos. Como diz o ditado, "Sem dor, sem ganho", tradução literal que vem do universo do halterofilismo, "*No pain, no gain*". Porém, conhecimentos de Física, Biomecânica e simulações por computador são hoje ingredientes fundamentais na preparação dos chamados atletas de elite.

// A atleta curva-se de tal maneira que seu **CG** pode estar até mesmo abaixo do sarrafo.



muratart/Shutterstock

De modo geral, a energia que um atleta coloca em jogo no salto em altura deve transformar-se em energia cinética e energia potencial gravitacional.

$$\text{Energia do atleta} = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

Nessa modalidade, salto em altura, o atleta tenta usar todas as técnicas possíveis na tentativa de maximizar a altura h do **centro de gravidade** de seu corpo. Nessa hora, sabemos que centímetros podem fazer a diferença entre a glória e o ostracismo.

Nos longos períodos de treino que antecedem as competições, ele deve aperfeiçoar como transformar sua velocidade horizontal de aproximação do sarrafo em uma velocidade vertical máxima. Essa velocidade vertical máxima define a altura que seu centro de gravidade atingirá.

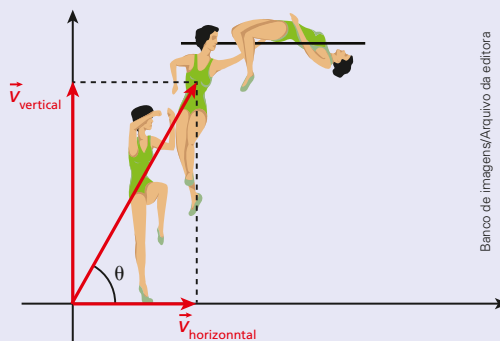
Sua concentração deve estar em alto nível pois, em fração de segundos, ele deve escolher o exato momento de usar toda sua potência muscular, em um curto intervalo de tempo, e iniciar definitivamente seu salto. A relação entre a potência (Pot) desenvolvida pelo atleta, o intervalo de tempo (Δt) considerado, a velocidade do salto (v) e a altura (h) alcançada é dada por:

$$Pot \cdot \Delta t = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

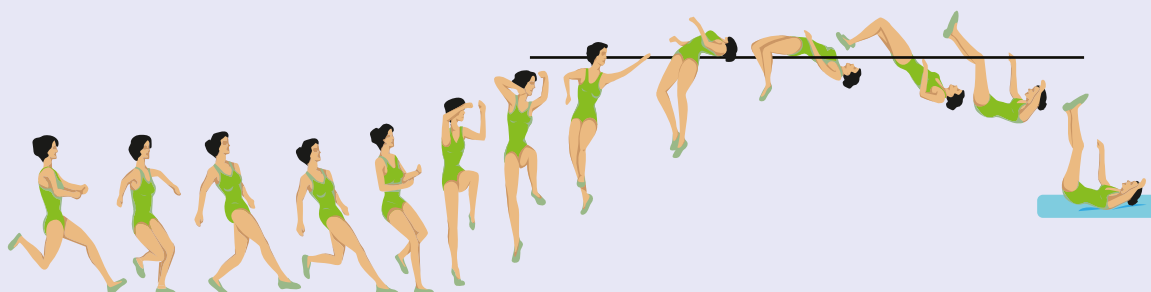
Isso é apenas um dos vários detalhes que o atleta deve observar. No exato instante em que o atleta perde contato com o solo, sua velocidade forma um ângulo θ com a horizontal. A atenção com esse ângulo, no momento do salto, deve ser total. Não pode ser tão pequeno, que o faria voar para a frente, nem tão grande, resultando em um esforço muscular descomunal para diminuir sua velocidade horizontal, que comprometeria todo o restante do salto.

Devemos ter então um ângulo θ ótimo. Um ângulo que permita a perfeita correlação entre a velocidade horizontal e a vertical.

Alguns fatores como peso do atleta e técnicas de salto nos ajudam a determinar teoricamente esse ângulo. Analisando-se vídeos de atletas de alto rendimento, chegou-se a valores típicos para o ângulo θ na faixa de 55° a 60° .



Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

// Durante a fase de corrida, a atleta ainda faz uma curva que também permitirá, na hora do salto, um ganho de velocidade devido à conservação de uma grandeza física, relacionada ao movimento de rotação dos corpos, denominada momento angular.

Poderíamos discorrer sobre inúmeros detalhes que permitem a um atleta chegar ao ponto mais alto do pódio, porém fica cada vez mais evidente que o conhecimento e a tecnologia, juntamente com dedicação e perseverança, são parceiros inseparáveis na conquista de uma medalha de ouro.

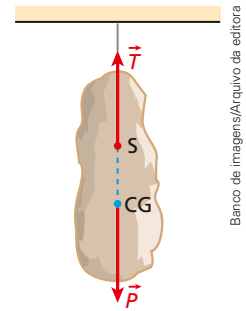
9. Equilíbrio dos corpos suspensos

Seja um corpo suspenso por um ponto **S**, como mostra a figura ao lado.

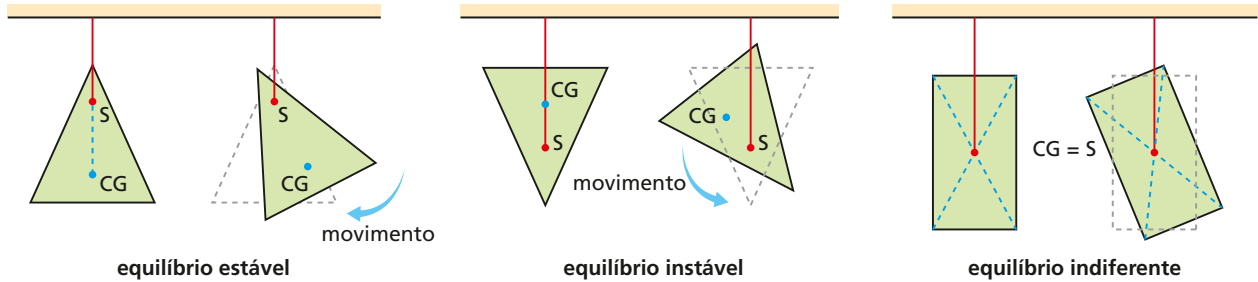
Para que ele esteja em equilíbrio, é necessário que o centro de suspensão **S** e o centro de gravidade **CG** estejam na mesma vertical.

O corpo estará em equilíbrio:

- **Estável:** quando o centro de gravidade **estiver abaixo** do centro de suspensão.
- **Instável:** quando o centro de gravidade **estiver acima** do centro de suspensão.
- **Indiferente:** quando o centro de gravidade **coincidir** com o centro de suspensão.



Banco de imagens/Arquivo da editora

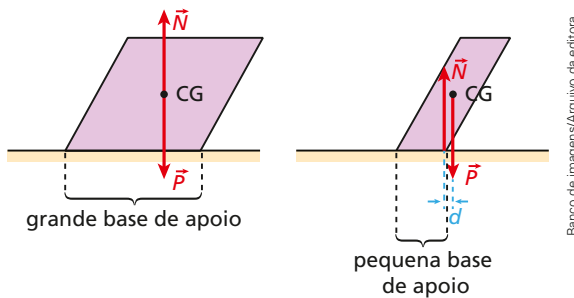


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

10. Equilíbrio dos corpos apoiados

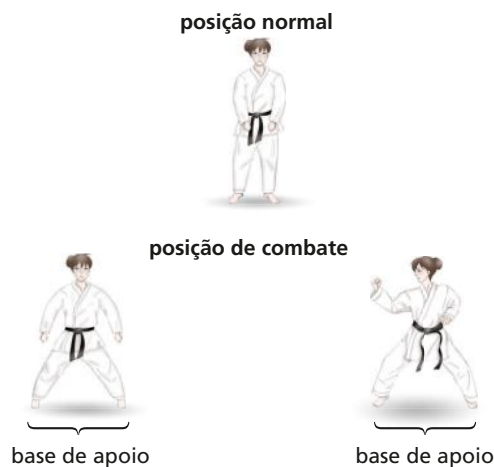
Para que um corpo apoiado esteja em equilíbrio, é necessário que a vertical traçada pelo centro de gravidade dele passe "dentro" da base de apoio.

Se a vertical passar "fora" da base de apoio, surgirá um momento de módulo igual a (Pd) , que ocasionará uma rotação no corpo, fazendo o corpo tombar. A imagem abaixo representa essas duas situações.



Banco de imagens/Arquivo da editora

No caratê, por exemplo, o atleta, em posição de combate, promove uma maior abertura das pernas. Essa posição produz maior estabilidade, pois há uma ampliação da base de apoio.

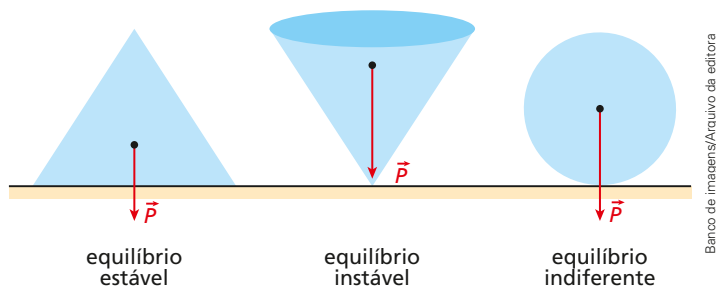


Banco de imagens/Arquivo da editora

// Ao adotar uma base de apoio com distância maior entre os pés, o atleta faz com que seu centro de gravidade fique mais próximo ao chão, contribuindo para obter maior estabilidade.

O equilíbrio dos corpos apoiados pode ser:

- **Estável:** quando, afastando-se ligeiramente o corpo de sua posição de equilíbrio, ele volta à posição inicial;
- **Instável:** quando, afastando-se ligeiramente o corpo de sua posição de equilíbrio, ele não volta à posição inicial;
- **Indiferente:** quando, afastando-se ligeiramente o corpo de sua posição de equilíbrio, ele permanece em equilíbrio nessa outra posição.



JÁ PENSOU NISTO?

Os prédios tortos de Santos



Entre as diversas atrações turísticas da cidade de Santos (SP), estão os prédios tortos de sua orla. Esses prédios, construídos entre os anos 1950 e 1960, começaram a se inclinar na década de 1970. A inclinação é resultado da construção dessas edificações sobre fundações muito rasas. O solo de Santos é composto de uma camada de areia (8 m a 12 m), uma camada de argila marinha (20 m a 40 m) e, por fim, uma camada rochosa. As construtoras utilizaram fundações com profundidade de 4 m a 7 m, porém, em virtude das características do solo do local, as fundações deveriam ter no mínimo 40 m. Com isso, o peso das estruturas comprime a camada de argila, resultando na inclinação observada. Além disso, a proximidade entre os prédios também contribui para a inclinação deles.

A inclinação do topo dos prédios em relação ao solo varia entre 50 cm e 1,8 m. O edifício Núncio Malzoni corrigiu sua inclinação de 2,1 m utilizando macacos hidráulicos para erguer a estrutura do prédio, ao mesmo tempo que novas fundações foram instaladas.

De acordo com um levantamento realizado pela Prefeitura Municipal de Santos, cerca de 3% da população da cidade mora em prédios com inclinações maiores que 1 m. Apesar disso, a prefeitura concluiu que nenhum dos prédios inclinados corre risco de tombamento.

Desafiando a gravidade

Em um programa de televisão dominical, o artista provoca *frisson* na plateia quando simula burlar a ação da gravidade. De fato, a linha de ação da força peso passa completamente fora da base de apoio, o que implicaria um momento de tombamento que seria fatal para o artista. Como explicar, então, a ausência da queda iminente? Na verdade, temos aí um truque, até mesmo realizado pelo astro *pop* Michael Jackson. Com sapatos especiais, tipo bota e muito bem presos ao solo, o artista se permite inclinar muito além do que as leis da física permitiriam. O grande segredo pode ser visualizado na foto ao lado. O solado do sapato está muito bem preparado e reforçado para ficar preso ao solo. Observe, também, o forte parafuso previamente instalado no piso.

O encaixe perfeito entre o parafuso e o sapato permitem a "ilusão antigравitacional". Alguns jornais da época chegaram a afirmar que o artista havia patenteado esse tipo de calçado.



Gamma-Rapho/Getty Images

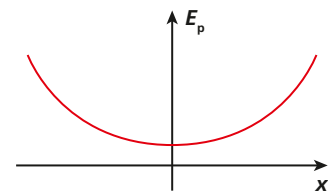
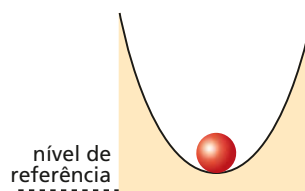


Ivan Alvarado/Reuters/Fotoarena

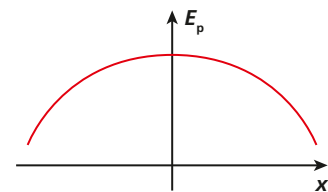
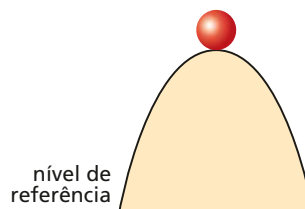
11. A relação entre equilíbrio e energia potencial

Quando um corpo está localmente em **equilíbrio estável**, a sua **energia potencial** (E_p) é **mínima**, isto é, o seu centro de gravidade se encontra na posição mais baixa possível. Qualquer deslocamento que o corpo possa sofrer implicará a elevação do seu centro de gravidade, o que só poderá acontecer à custa de energia externa.

Quando um corpo se encontra localmente em **equilíbrio instável**, a sua **energia potencial** (E_p) é **máxima**, isto é, o seu centro de gravidade está na posição mais alta possível. Qualquer deslocamento que o corpo possa sofrer implicará o abaixamento do seu centro de gravidade. O trabalho de deslocamento é realizado à custa de uma diminuição da energia potencial do próprio corpo. Dessa maneira, sem o trabalho de um operador externo, ele não retornará mais à posição inicial.



// Na situação de **equilíbrio estável**, somente com a atuação de um agente externo o corpo sairá de sua posição de equilíbrio. Voltando à posição inicial ele devolve ao meio a energia recebida.

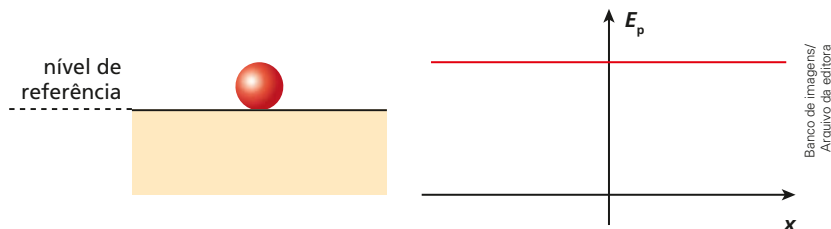


// Na situação de **equilíbrio instável**, somente com o trabalho de um agente externo o corpo retornaria à posição inicial.

Banco de imagens/Arquivo da editora

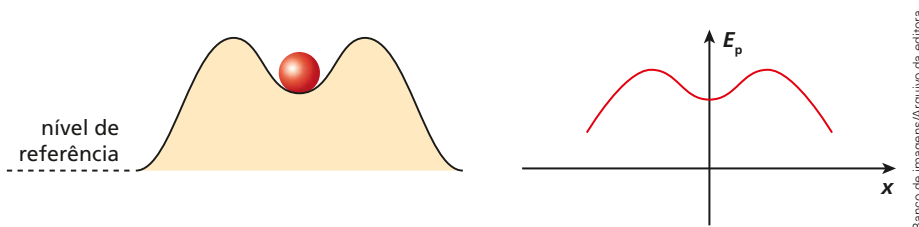
Banco de imagens/Arquivo da editora

Quando um corpo se encontra em um local onde o equilíbrio é **indiferente**, sua **energia potencial permanece a mesma**, qualquer que seja a posição que ele possa ocupar. Em todo e qualquer deslocamento sofrido pelo corpo o seu centro de gravidade se move conservando-se no mesmo nível. Existem infinitas posições de equilíbrio absolutamente simétricas em termos de energia.



// Na situação de **equilíbrio indiferente**, o corpo encontra-se em uma superfície equipotencial, ou seja, a energia potencial do corpo é a mesma para qualquer ponto da superfície.

No **equilíbrio metaestável**, o sistema possui limites extremos de perturbação. Uma vez ultrapassados esses limites, o corpo abandona essa específica posição de equilíbrio e não mais retorna a ela.



// Um **sistema metaestável** pode ter múltiplas e diferentes posições de equilíbrio.

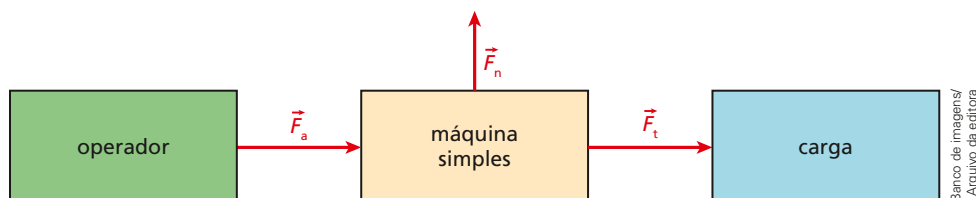
12. Máquina simples

Máquinas são dispositivos cuja função básica é transmitir, multiplicar e modificar de modo conveniente a ação das forças.

As máquinas que, tecnicamente, são constituídas de uma única peça, um único sistema rígido, são denominadas máquinas simples.

A característica marcante de uma máquina simples é o fato de nela figurarem basicamente três forças:

- força aplicada (ou motriz) (\vec{F}_a);
- força transmitida (ou resistente) (\vec{F}_t);
- força de reação normal do apoio (\vec{F}_n).



O objetivo fundamental de uma máquina simples é promover uma alteração da força em intensidade, direção ou sentido e, desse modo, permitir a realização de uma tarefa com o menor esforço possível.

Vantagem mecânica

Chama-se **vantagem mecânica da máquina** (VM) a razão entre a intensidade da força transmitida (F_t) e a intensidade da força aplicada (F_a), isto é:

$$VM = \frac{F_t}{F_a}$$

A vantagem mecânica é uma grandeza adimensional. Na verdade, podemos considerá-la um fator que exprime a eficiência de uma máquina simples.

Exemplo: se $VM = 10$, temos:

$$VM = \frac{F_t}{F_a} \Rightarrow 10 = \frac{F_t}{F_a} \Rightarrow F_t = 10F_a$$

Assim, se quiser levantar, arrastar ou cortar uma determinada carga usando essa máquina simples, você poderá fazer uso de uma força 10 vezes maior que a aplicada.

O trabalho nas máquinas simples

No funcionamento de uma máquina simples, as forças aplicadas (ou motrizes) e as forças transmitidas (ou resistentes) devem promover um deslocamento (d) em seus pontos de aplicação. Se tivermos um sistema livre de ações dissipativas, ou seja, uma máquina simples ideal, o princípio de conservação de energia nos fornece que o trabalho (τ_a) da força aplicada (F_a) será igual ao trabalho (τ_t) da força transmitida (F_t). Assim:

$$\tau_a = \tau_t \Rightarrow F_a d_a = F_t d_t$$

Da definição de vantagem mecânica, temos:

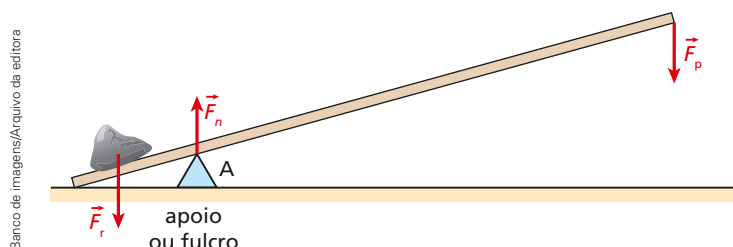
$$VM = \frac{F_t}{F_a} = \frac{d_a}{d_t}$$

Percebe-se, assim, que as máquinas simples **não são** máquinas multiplicadoras de trabalho. São máquinas que, na verdade, promovem uma negociação entre força e deslocamento. Sempre que há um ganho em força, tem-se uma perda proporcional em distância, e vice-versa.

13. Alavancas

A alavanca é um tipo de máquina simples que consiste essencialmente de uma barra alongada que pode girar em torno de um ponto de apoio. No caso das alavancas, utilizaremos para a força aplicada o termo força potente (\vec{F}_p). Há três tipos de alavanca:

- **Interfixa:** é aquela que apresenta o ponto de apoio entre os pontos de aplicação da força potente (\vec{F}_p) e da força resistente (\vec{F}_r).

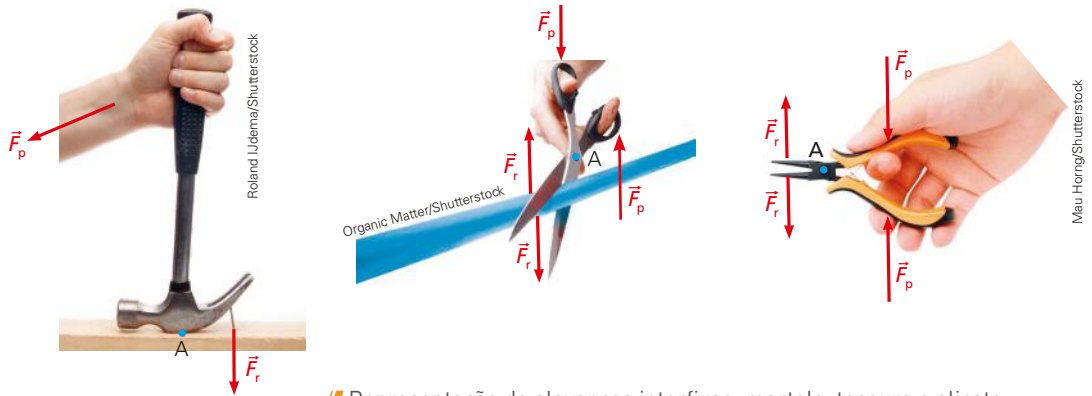


Banco de imagens/Arquivo da editora

NOTA!

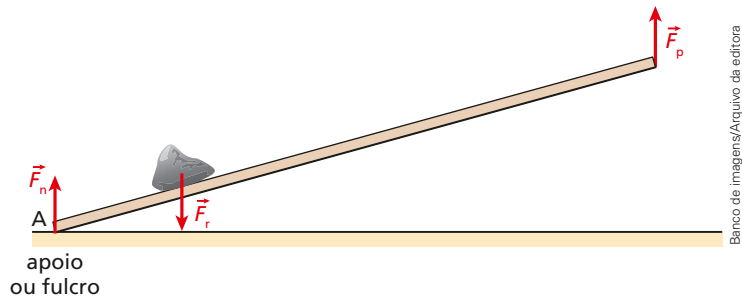
A **força resistente** (\vec{F}_r) é justamente a força que se pretende equilibrar com a alavanca.

A seguir, temos alguns exemplos de alavanca interfixas.

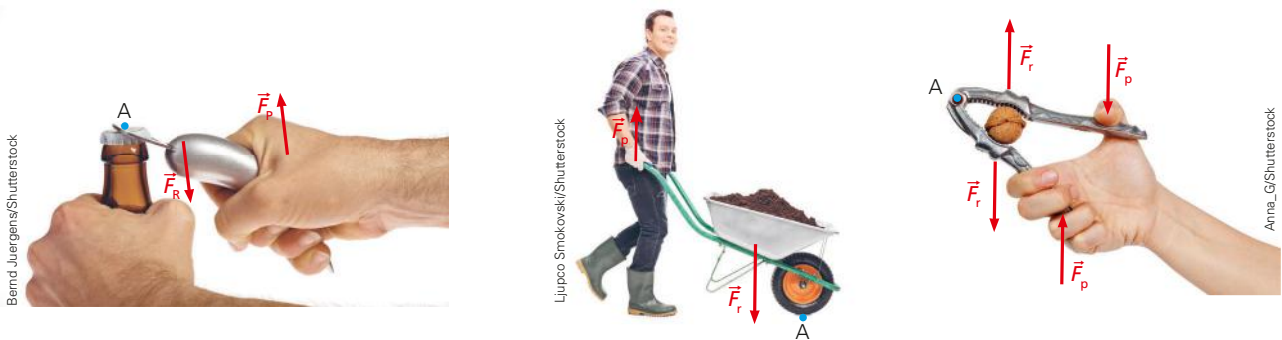


// Representação de alavancas interfixas: martelo, tesoura e alicate.

- **Inter-resistente:** é aquela que apresenta o ponto de aplicação da força resistente (\vec{F}_r) entre os pontos de apoio e de aplicação da força potente (\vec{F}_p).

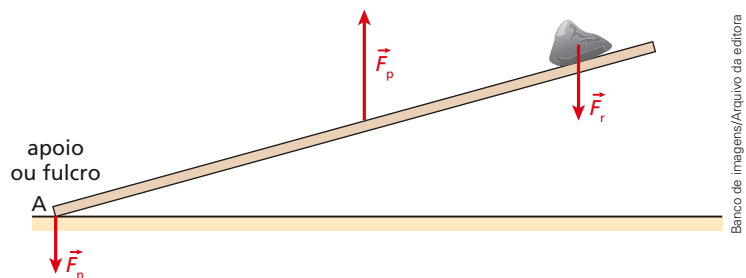


A seguir, temos alguns exemplos de alavancas inter-resistentes.

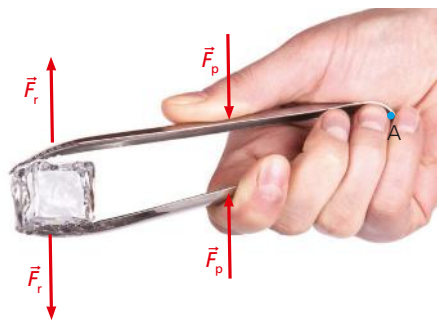


// Representações de alavancas inter-resistentes: abridor de garrafas, carrinho de mão e o quebra-nozes.

- **Interpotente:** é aquela que apresenta o ponto de aplicação da força potente (\vec{F}_p) entre o ponto de aplicação da força resistente (\vec{F}_r) e o ponto de apoio.



A seguir, temos alguns exemplos de alavanca interpotente.

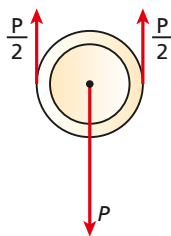


// Representações de alavancas interpotentes: pegador de gelo, vassoura e acelerador de veículo.

14. A talha exponencial

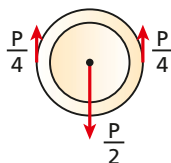
A talha exponencial consiste na combinação de várias polias móveis e uma única polia fixa.

Na primeira polia móvel, a força de tração no cabo sustenta, de cada lado, metade da intensidade da força peso \vec{P} aplicada na polia. Recordemos que a polia ideal é desprovida de massa.



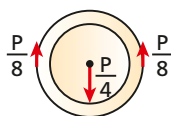
Banco de imagens/
Arquivo da editora

Na segunda polia móvel o processo se repete.



Banco de imagens/
Arquivo da editora

Na terceira polia móvel, temos:



Banco de imagens/
Arquivo da editora

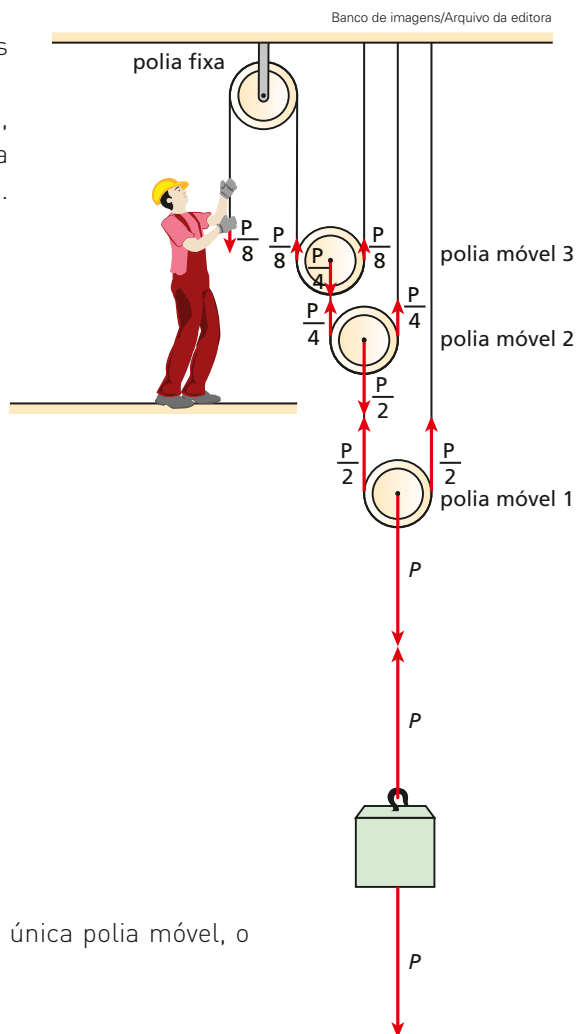
Analisando todo o sistema, percebe-se que, para uma única polia móvel, o homem aplicaria uma força \vec{F} dada por: $F = \frac{P}{2}$.

Para 2 polias móveis: $F = \frac{P}{2^2}$.

Para 3 polias móveis: $F = \frac{P}{2^3}$.

Generalizando para n polias móveis, temos:

$$F = \frac{P}{2^n}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

1. Certamente a Torre de Pisa é a torre inclinada mais famosa do mundo. No entanto, existem diversas construções que apresentam inclinação, proposital ou acidental. Pesquise uma dessas edificações: procure a sua história, quando foi construída e a causa da sua inclinação.
2. Ao estudar o sistema solar em tópicos anteriores, vimos que os planetas orbitam o Sol. No entanto, seria mais correto dizer que os planetas orbitam o centro de gravidade do sistema planeta-Sol. Para a maioria dos planetas, esse centro de gravidade é tão perto do centro do Sol, que realmente podemos dizer que o centro da órbita é o Sol. Em nosso sistema solar, existe algum planeta cuja órbita não se localiza no centro do Sol? Pesquise outros sistemas solares e verifique se o centro de gravidade desses sistemas localiza-se próximo ao corpo celeste equivalente ao nosso Sol.



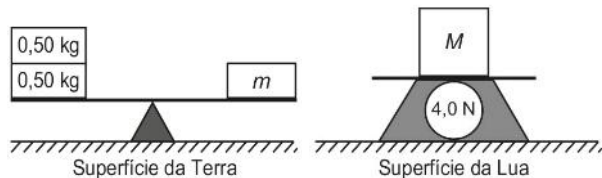
Alexa Adrian/Shutterstock

Atualmente, a Torre de Pisa apresenta uma inclinação de aproximadamente 4° .

Exercícios Nível 1

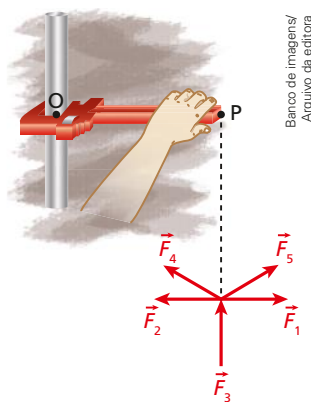
33. (Enem) A figura mostra uma balança de braços iguais, em equilíbrio, na Terra, onde foi colocada uma massa m , e a indicação de uma balança de força na Lua, onde a aceleração da gravidade tem módulo igual a $1,6 \text{ m/s}^2$, sobre a qual foi colocada uma massa M .

Reprodução/Arquivo da editora



A razão das massas $\frac{M}{m}$ é

- a) 4,0 c) 1,0 e) 0,25
b) 2,5 d) 0,40
34. Todas as forças representadas na figura têm a mesma intensidade. Qual delas, aplicada em **P**, produz o momento de maior módulo, em relação ao ponto **O**?



Banco de imagens/Arquivo da editora

- a) \vec{F}_1
b) \vec{F}_2
c) \vec{F}_3
d) \vec{F}_4
e) \vec{F}_5

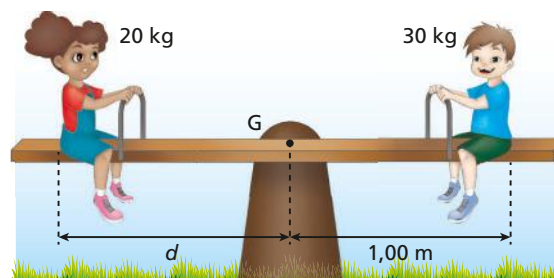
35. (Unifai-SP) Uma garota se exercita levantando uma tornozeleira de 4,0 kg, como mostra a figura.



Reprodução/Arquivo da editora

Considerando a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 e a distância entre o joelho da garota e a posição da tornozeleira igual a 30 cm, o torque da força peso da tornozeleira em relação a um ponto no joelho da garota é

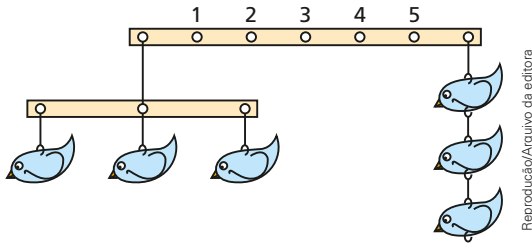
- a) $0,75 \text{ N} \cdot \text{m}$. d) $1200 \text{ N} \cdot \text{m}$.
b) $12 \text{ N} \cdot \text{m}$. e) nulo.
c) $1,20 \text{ N} \cdot \text{m}$.
36. (FEI-SP) Duas crianças, de massa 20,0 kg e 30,0 kg, encontram-se sobre uma gangorra de massa 4,00 kg, com apoio no ponto médio **G**, conforme a figura. Sendo $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, a distância d , em metros, para que a gangorra fique em equilíbrio, deve ser:



Reprodução/Arquivo da editora

- a) 1,00 b) 0,56 c) 1,25 d) 2,50 e) 1,50

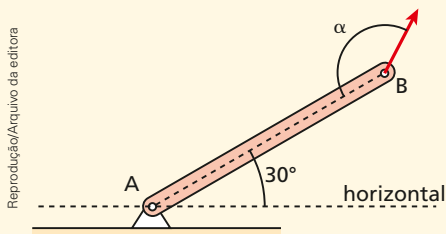
37. [Etec-SP] A *Op Art* ou “arte óptica” é um segmento do Cubismo abstrato que valoriza a ideia de mais visualização e menos expressão. É por esse motivo que alguns artistas dessa vertente do Cubismo escolheram o móbile como base da sua arte. No móbile representado, considere que os “passarinhos” tenham a mesma massa e que as barras horizontais e os fios tenham massas desprezíveis.



Para que o móbile permaneça equilibrado, conforme a figura, a barra maior que sustenta todo o conjunto deve receber um fio que a pendure, atado ao ponto numerado por

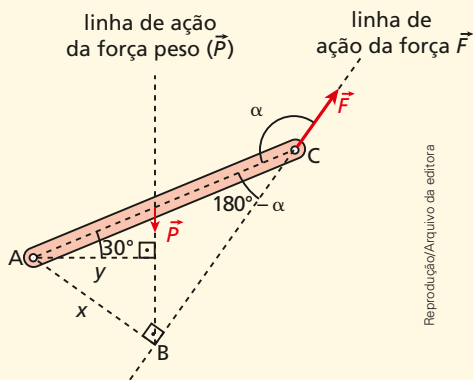
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

38. [Fuvest-SP] A figura mostra uma barra homogênea **AB**, articulada em **A**, mantida em equilíbrio pela aplicação de uma força \vec{F} em **B**:



Qual o valor do ângulo α para o qual a intensidade de \vec{F} é mínima?

Resolução:



y : braço de alavanca para a força peso \vec{P}
 x : braço de alavanca para a força \vec{F}

No equilíbrio:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$Fx = Py \Rightarrow F = \frac{Py}{x}$$

Observemos que o produto Py é constante, assim:

$$F = \frac{cte}{x}$$

No triângulo retângulo **ABC**, temos:

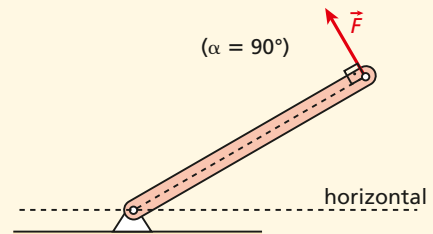
$$\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \frac{x}{\ell} \Rightarrow x = \ell \text{sen}(180^\circ - \alpha)$$

Para que tenhamos o menor valor para F , x deve ser máximo, portanto:

$$x = \ell \underset{\text{máximo}}{\text{sen}}(180^\circ - \alpha)$$

$$180^\circ - \alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Assim, para F_{\min} devemos ter $\alpha = 90^\circ$.



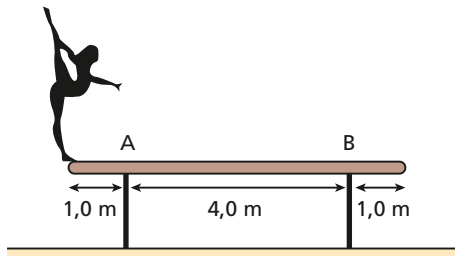
39. [Uerj] A figura abaixo ilustra uma ferramenta utilizada para apertar ou desapertar determinadas peças metálicas.



Para apertar uma peça, aplicando-se a menor intensidade de força possível, essa ferramenta deve ser segurada de acordo com o esquema indicado em:

- a) c)
- b) d)
- Reprodução/Uerj, 2014.

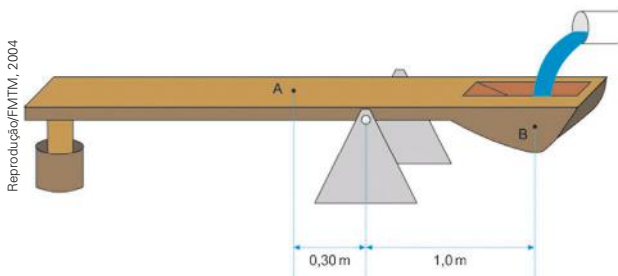
40. (Vunesp) Uma ginasta de 40 kg se apresenta numa prova de trave horizontal, cujo comprimento é igual a 6,0 metros. A ginasta está apoiada exatamente em uma das extremidades da trave, como mostra a figura.



Reprodução/Arquivo da editora

As barras de apoio da trave têm espessuras desprezíveis e a aceleração da gravidade tem módulo igual a 10 m/s^2 . Estando o conjunto em equilíbrio, os momentos da força de contato da ginasta com a trave, relativamente aos pontos de apoio **A** e **B** com as barras verticais, têm módulos iguais a:

- a) 20 Nm e 600 Nm. d) 400 Nm e 6 000 Nm.
 b) 40 Nm e 600 Nm. e) 400 Nm e 2 000 Nm.
 c) 40 Nm e 200 Nm.
41. (FMTM-MG) O monjolo é um engenho rudimentar movido a água que foi muito utilizado para descascar o café, moer o milho ou mesmo fazer a paçoca. Esculpido a partir de um tronco inteiriço de madeira, o monjolo tem, em uma extremidade, o socador do pilão, e, na outra extremidade, uma cavidade que capta a água desviada de um rio. Conforme a cavidade se enche com água, o engenho eleva o socador até o ponto em que, devido à inclinação do conjunto, a água é derramada, permitindo que o socador desça e golpeie o pilão.

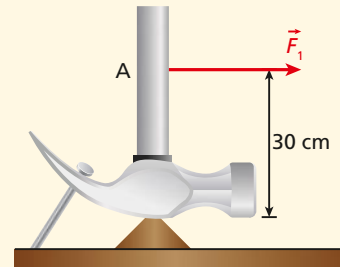


Reprodução/FMTM, 2004

O centro de massa de um monjolo de 80 kg, sem água, encontra-se no ponto **A**, deslocado 0,30 m do eixo do mecanismo, enquanto o centro de massa da água armazenada na cavidade está localizado no ponto **B**, a 1,0 m do mesmo eixo. A menor massa de água a partir da qual o monjolo inicia sua inclinação é, em kg,

- a) 12 b) 15 c) 20 d) 24 e) 26

42. (UMC-SP) Foi Arquimedes, há mais de **E.R.** 2 000 anos, na Grécia, quem descobriu o princípio de transmissão da força por uma alavanca. Diz-se em Física que uma alavanca permite a transferência do momento de uma força, definido como o produto da intensidade da força pelo braço da alavanca: $M = F b$.



Reprodução/Arquivo da editora

Para retirar um prego, como mostra a figura, seria necessária uma força de intensidade $F_1 = 120 \text{ N}$ aplicada em **A**. Um operário quer reduzir o esforço aplicando uma força de intensidade $F_2 = 80 \text{ N}$ para retirar o prego.

Nessas condições, de acordo com o princípio da alavanca, ele deverá aplicar \vec{F}_2

- a) 10 cm abaixo de **A**;
 b) 15 cm acima de **A**;
 c) 60 cm acima de **A**;
 d) no próprio ponto **A**, mas inclinado de 30° para baixo;
 e) 10 cm acima de **A**.

Resolução:

Para que o prego possa ser retirado, as intensidades dos momentos aplicados nas duas situações devem ser iguais, assim:

Em relação ao ponto de apoio:

$$M_1 = M_2$$

$$F_1 b_1 = F_2 b_2$$

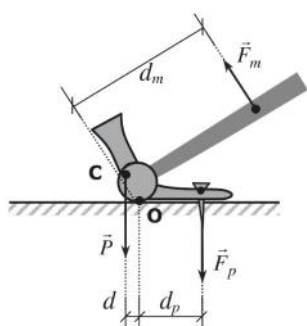
$$120 \cdot 30 = 80 \cdot b_2$$

$b_2 = 45 \text{ cm} \therefore 15 \text{ cm acima de } \mathbf{A}$

Resposta: alternativa **b**.

43. (Ufes) Para um corpo rígido estar em equilíbrio, é necessário que a soma das forças que sobre ele age seja nula (equilíbrio de translação) e que a soma dos torques (momentos de força), em relação a algum ponto especificado, também se anule (equilíbrio de rotação). Abaixo, tem-se uma simplificação da atuação de um

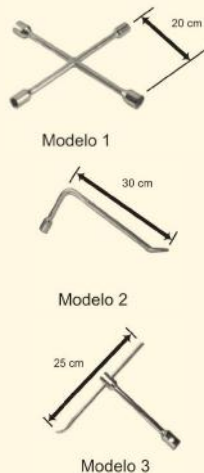
martelo ao ser utilizado para extrair um prego afixado em uma superfície horizontal. O martelo pode ser considerado uma alavanca, à qual se aplicam as condições de equilíbrio, desde que o movimento de extração seja bem lento. **C** é o centro de gravidade do martelo de peso \vec{P} , \vec{F}_m é a força exercida pela mão de uma pessoa e \vec{F}_p é a força exercida pelo prego no martelo; d , d_m e d_p são, respectivamente, as distâncias entre o ponto de equilíbrio **O** e as linhas de ação de \vec{P} , \vec{F}_m e de \vec{F}_p .



Reprodução/Ufes, 2016.

- a) Se d for muito pequena, pode-se desprezar o torque do peso. Nesse caso, use a condição de equilíbrio que você julgar adequada e determine a relação entre os módulos das forças \vec{F}_m e \vec{F}_p , sabendo-se que, na situação indicada, o prego está na iminência de se mover.
- b) Na condição do item anterior (a), sabe-se que é necessário um torque de módulo $30,0 \text{ Nm}$, em relação ao ponto **O**, para se extrair o prego. Considerando-se que $d_m = 0,20 \text{ m}$, determine o módulo ($|\vec{F}_m|$) da força que a pessoa deve exercer no cabo do martelo.

- 44.** (Enem) Retirar a roda **E.R.** de um carro é uma tarefa facilitada por algumas características da ferramenta utilizada, habitualmente denominada chave de roda. As figuras ao lado representam alguns modelos de chaves de roda.



Reprodução/Enem, 2013.

Em condições usuais, qual desses modelos permite a retirada da roda com mais facilidade?

- a) 1, em função de o momento da força ser menor.
- b) 1, em função da ação de um binário de forças.
- c) 2, em função de o braço da força aplicada ser maior.
- d) 3, em função de o braço da força aplicada poder variar.
- e) 3, em função de o momento da força produzida ser maior.

Resolução:

No modelo 1, teremos um binário resultante dado, em módulo, por:

$$M_1 = F \cdot 40$$

No modelo 2, teremos um momento escalar resultante, em módulo, dado por:

$$M_2 = F \cdot 30$$

No modelo 3, teremos um binário resultante, em módulo, dado por:

$$M_3 = F \cdot 25$$

Comparando, temos:

$$M_1 > M_2 > M_3$$

Resposta: alternativa **b**.

- 45.** (Fepese) Por volta do ano 5000 a.C., os egípcios inventaram a balança pela necessidade de pesar o ouro, que sempre foi um dos metais mais preciosos da Terra.

A balança é muito representada em papiros da história do Egito. No Livro dos Mortos, é contada a versão egípcia do “Julgamento Final”. Na narração, depois que morriam, os egípcios iam para uma sala chamada de Sala das Duas Verdades para serem julgados. Nesta sala, Anubis (deus egípcio dos mortos) colocava o coração do morto (que para eles representava a essência do ser humano) em um dos pratos da balança usando como contrapeso a pluma da deusa Maat (personalização da verdade, justiça e ordem universal). Anubis verificava qual dos dois pesava mais e, dependendo do resultado da pesagem, o espírito do morto seguia para o “paraíso” ou para o “inferno”.

[Http://www.ramuza.com.br/blog/origem-historia-ecuriosidadessobre-a-balanca/](http://www.ramuza.com.br/blog/origem-historia-ecuriosidadessobre-a-balanca/) acesso em 23.09.2015

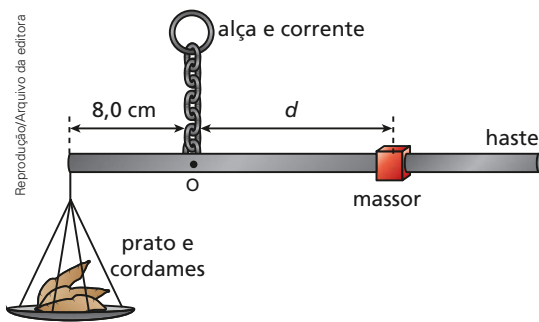
Conforme a figura abaixo, para ser julgado pelo deus dos mortos, um coração humano, cuja massa é de 270 g, foi colocado sobre um dos pratos da balança de Anúbis, feito de ferro, cuja massa é de 500 g. O prato é então pendurado a 8,0 cm do eixo central dessa balança. A pluma da deusa Maat, que é de avestruz, tem uma massa aproximada de 6 g e é colocada em outro prato de 110 g feito de ouro.



Em que posição deverá ser pendurado o segundo prato, em relação ao eixo central, para que a balança se equilibre e o dono desse coração consiga ir para o "paraíso"?

- a) 0,08 m c) 0,53 m e) 0,80 m
 b) 0,30 m d) 0,60 m

46. [Etec-SP] Você já deve ter visto em seu bairro pessoas que vieram diretamente da roça e, munidas de carrinhos de mão e de uma simples balança, vendem mandiocas de casa em casa. A balança mais usada nessas condições é a apresentada na figura a seguir.



Considere desprezíveis a massa do prato com seus cordames e a massa da haste por onde corre o massor.

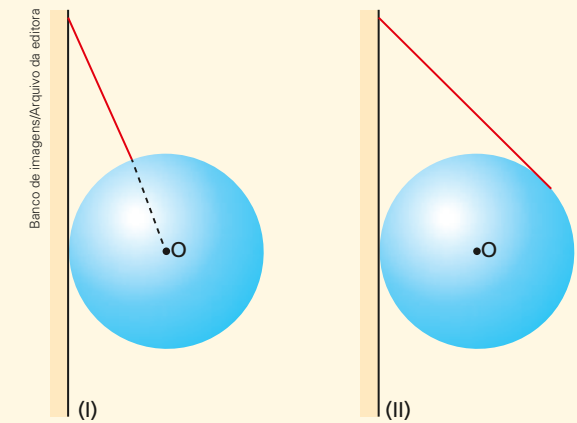
A balança representada está em equilíbrio, pois o produto da massa do massor pela distância que o separa do ponto **O** é igual ao produto da massa que se deseja medir pela distância que separa o ponto em que os cordames do prato são amarrados na haste até o ponto **O**.

Considere que no prato dessa balança haja 3,0 kg de mandiocas e que essa balança tenha um massor de 0,60 kg.

Para que se atinja o equilíbrio, a distância d do massor em relação ao ponto **O** deverá ser, em cm,

- a) 16,0
 b) 20,0
 c) 24,0
 d) 36,0
 e) 40,0

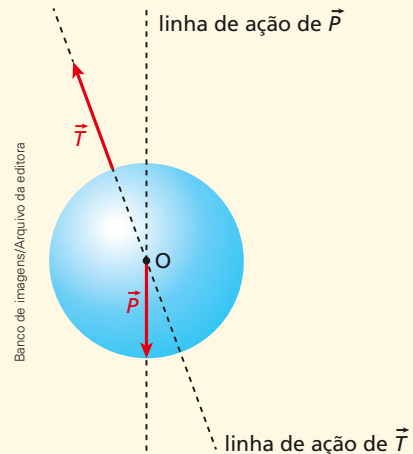
47. Considere uma esfera homogênea suspensa por um fio ideal e encostada a uma parede vertical. A esfera está em equilíbrio. No esquema I o prolongamento do fio passa pelo centro **O** da esfera e no esquema II não passa.



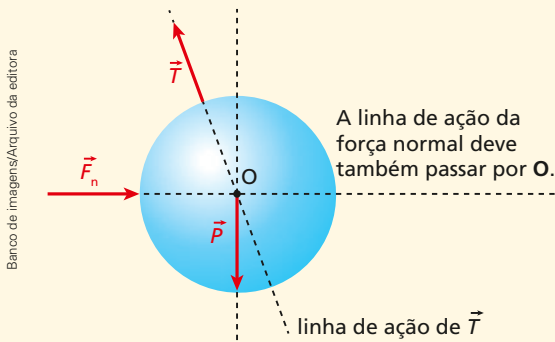
Em qual dos esquemas existe atrito entre a esfera e a parede?

Resolução:

Esquema I:

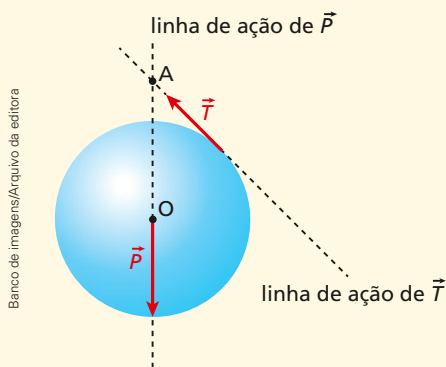


Para que a esfera esteja em equilíbrio, as três forças devem concorrer no ponto **O**. Dessa maneira, fica determinada a direção da força de reação aplicada pela parede sobre a esfera.

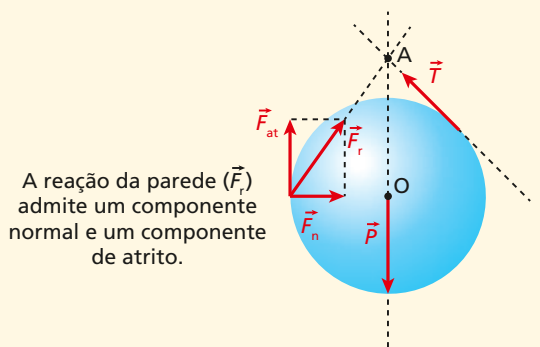


Nessa situação, a força de reação da parede não admite componente de atrito.

Esquema II:

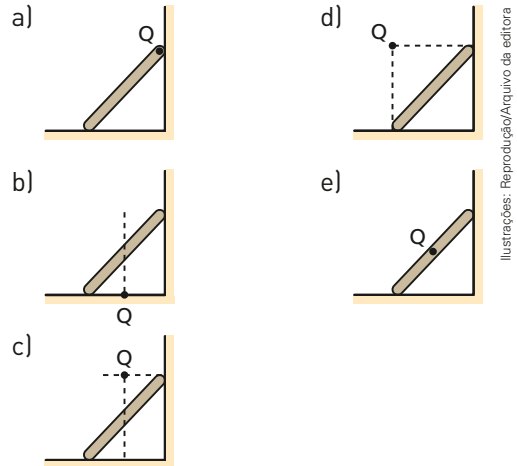


As forças \vec{T} e \vec{P} têm linha de ação passando pelo ponto **A**. Para que esse sistema de três forças esteja em equilíbrio, a reação \vec{F}_r da parede sobre a esfera também deve ter linha de ação passando por **A**. A resultante \vec{F}_r é a soma vetorial da força de atrito \vec{F}_{at} e da força normal \vec{F}_n .

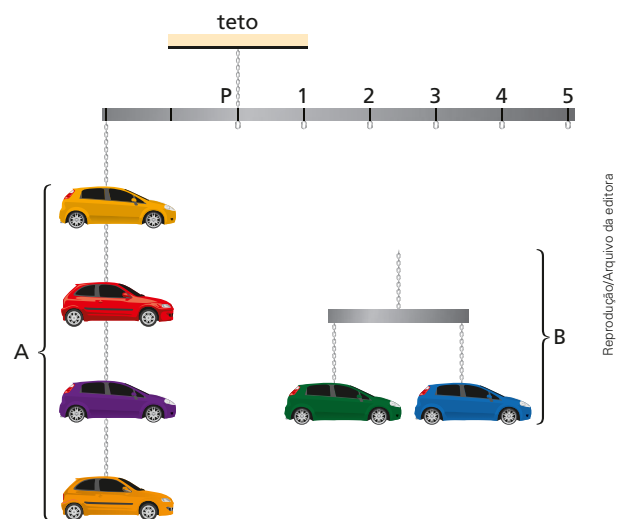


Concluimos, assim, que apenas no esquema II existe atrito entre a esfera e a parede.

48. (UFF-RJ) Uma escada homogênea, apoiada sobre um piso áspero, está encostada numa parede lisa. Para que a escada fique em equilíbrio, as linhas de ação das forças que agem sobre a escada devem convergir para um momento ponto **Q**. Assinale a opção que ilustra a situação descrita e apresenta o ponto **Q** mais bem localizado.



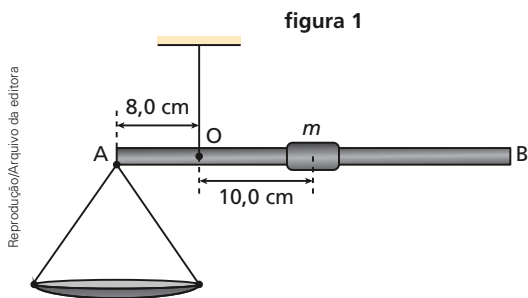
49. (Vunesp) O pai de uma criança pretende pendurar, no teto do quarto de seu filho, um móvel constituído por: seis carrinhos de massas iguais, distribuídos em dois conjuntos, **A** e **B**; duas hastes rígidas de massas desprezíveis, com marcas igualmente espaçadas; e fios ideais. O conjunto **A** já está preso a uma das extremidades da haste principal do móvel.



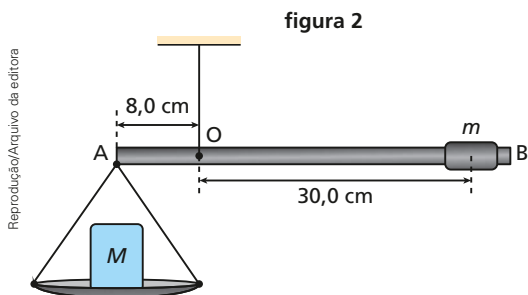
Sabendo-se que o móvel será pendurado ao teto pelo ponto **P**, para manter o móvel em equilíbrio, com as hastes na horizontal, o pai da criança deverá pendurar o conjunto **B**, na haste principal, no ponto

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

50. (Vunesp) Uma balança de contrapeso é construída de uma barra **AB** de massa desprezível articulada em **O**, de um prato de massa 300 g suspenso por fios ideais no ponto **A**, a uma distância de 8,0 cm do ponto **O**, e de um contrapeso de massa m que pode deslizar pela barra. Inicialmente com o prato vazio, para se manter a barra em equilíbrio na horizontal, o contrapeso deve ser posicionado a 10,0 cm do ponto **O**, conforme a figura 1.

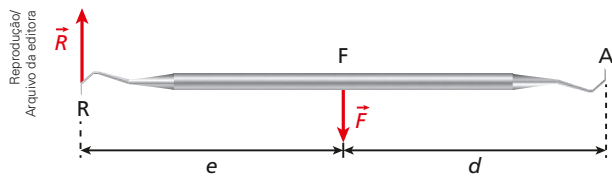


Se apoiarmos no centro do prato um corpo de massa M , para se manter a barra em equilíbrio na horizontal, o contrapeso deve ser posicionado a 30,0 cm de **O**, conforme a figura 2.



Nessas condições, a massa M , em gramas, é igual a:

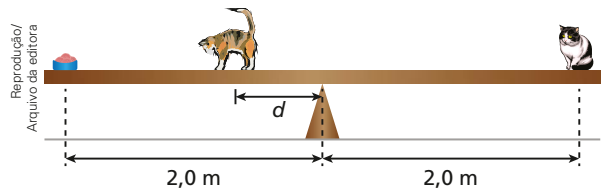
- a) 200 c) 500 e) 900
b) 300 d) 600
51. (Vunesp) O escavador é um instrumento de grande utilidade para os dentistas, por permitir avaliar o grau de dano causado pela cárie. A figura ilustra o esquema de um desses escavadores em que **A** é o ponto de apoio do escavador sobre a mão do dentista; **F** é o ponto de aplicação da força \vec{F} , perpendicular à direção do instrumento, exercida pelo(s) dedo(s) do dentista; e **R** é o ponto de contato do escavador com o dente, no qual é aplicada a força efetiva sobre o dente, também perpendicular ao escavador. Na figura, \vec{R} é a reação do dente sobre o escavador.



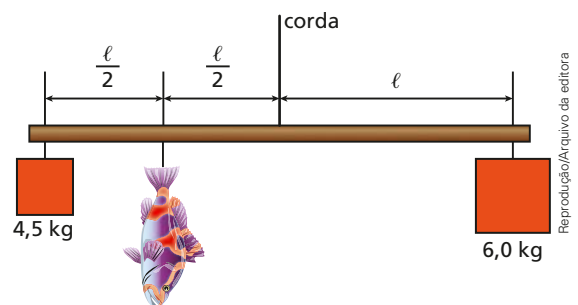
Na situação proposta, o escavador é considerado como um corpo extenso, uma alavanca, em equilíbrio. Se o ponto **A** for tomado como polo de referência, a relação correta entre as intensidades das forças \vec{F} e \vec{R} e as distâncias d e e será dada por:

- a) $Fd = R(d + e)$ d) $Fd = Re$
b) $\frac{F}{d} = \frac{R}{(d + e)}$ e) $Fe = Rd$
c) $Fe = R(d + e)$

52. (OBF) Um gato de 5,0 kg e uma tigela de 2,0 kg de atum estão em posições opostas de uma gangorra de 4,0 m de comprimento e massa negligenciável. Um segundo gato de 4,0 kg é posicionado a uma distância d à esquerda do ponto de apoio como ilustrado na figura. Calcule a distância d de modo que o sistema atinja o equilíbrio estático



53. (Vunesp) Um pescador improvisa uma balança posicionando massas de 4,5 kg e 6,0 kg nas extremidades de uma barra de madeira homogênea que é suspensa por meio de uma corda amarrada em seu ponto médio. Ao prender o peixe na posição apresentada na figura, a barra entra em equilíbrio.



Considerando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, é correto afirmar que o peso do peixe, em N, é igual a

- a) 10 c) 30 e) 60
b) 15 d) 45

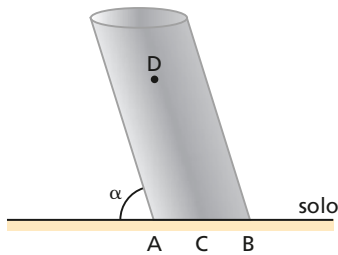
61. Brinquedos como o da figura ao lado fizeram muito sucesso nos anos 1970. Nele, o personagem conseguia andar de monociclo pela corda sem tombar. O brinquedo consistia do monociclo, do boneco e de uma haste à qual era preso um objeto de ferro.



The Bridgeman Art Library/foabarena

Explique como é possível o personagem andar pela cordinha sem cair.

62. (UFU-MG) A figura apresentada abaixo representa um objeto cilíndrico colocado sobre uma superfície plana e inclinado em relação a ela, formando um ângulo α . O ponto **D** representa a posição de seu centro de gravidade, **A** e **B**, os dois extremos da base, e **C**, o ponto médio entre **A** e **B**.

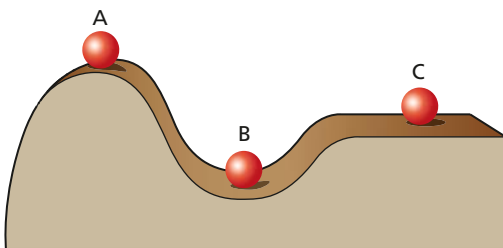


Reprodução/Arquivo da editora

A partir da análise das condições em que se encontra o objeto cilíndrico, ele tenderá a

- manter-se em equilíbrio se a reta normal ao solo, que passa por **D**, mantiver-se entre **A** e **B**.
- manter-se em equilíbrio, ainda que o diâmetro da base seja reduzido a **CB**.
- cair se sua altura diminuir e o ponto **C** aproximar-se da base **AB**.
- manter-se em equilíbrio, mesmo com a diminuição gradual do valor de α .

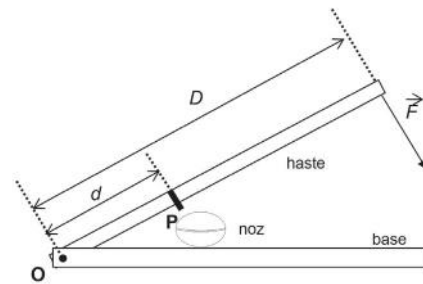
63.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

- Classifique o equilíbrio das bolinhas quando posicionadas em **A**, **B** e **C**.
- Explique o porquê de sua classificação para as três situações.

64. (UFPR) A figura abaixo representa o esquema de um quebra-nozes. Uma força de módulo F é aplicada perpendicularmente na extremidade móvel da haste, a uma distância D da articulação em **O**. A haste possui um pino **P** transversal situado a uma distância d da articulação em **O**, o qual pressiona a noz, como indicado na figura abaixo. Considere uma situação na qual a haste tem massa desprezível e permanece em equilíbrio estático enquanto é pressionada sobre a noz.



Reprodução/UFPR, 2007.

Sobre tal mecanismo, considere as seguintes afirmativas:

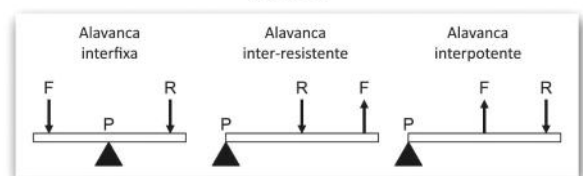
- Se $d = \frac{D}{3}$, o módulo da força aplicada sobre a noz é 3 vezes maior que o módulo da força aplicada na extremidade móvel.
- A força aplicada na extremidade móvel e a força exercida pela noz no pino constituem um par ação-reação.
- Para todo d menor que D , o módulo da força sobre a noz será maior que o módulo da força aplicada na extremidade móvel.

Assinale a alternativa correta.

- Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
- Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
- Somente a afirmativa 2 é verdadeira.
- Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
- As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

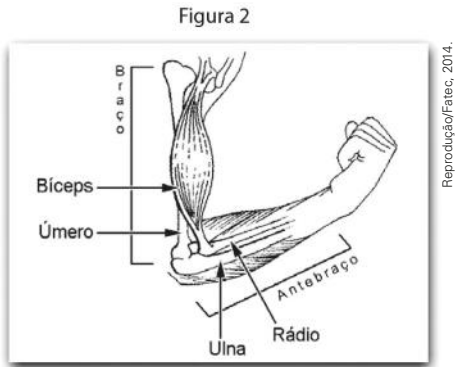
65. (Fatec-SP) De acordo com a Mecânica Clássica, são reconhecidos três tipos básicos de alavancas: a interfixa, a inter-resistente e a interpotente, definidas de acordo com a posição relativa da força potente (F), da força resistente (R) e do ponto de apoio (P), conforme a figura 1.

Figura 1



Reprodução/Fatec, 2014

Os seres vivos utilizam esse tipo de mecanismo para a realização de diversos movimentos. Isso ocorre com o corpo humano quando, por exemplo, os elementos ósseos e musculares do braço e do antebraço interagem para produzir movimentos e funcionam como uma alavanca, conforme a figura 2.

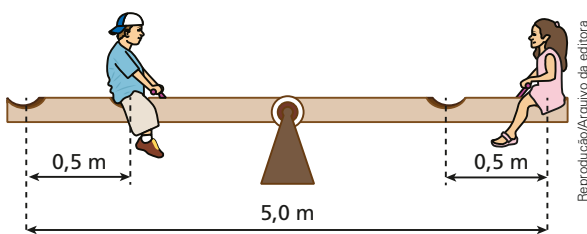


(commons.wikimedia.org/wiki/File:biceps_(PSF).png
Acesso em 12.09.2013. Adaptado)

Nessa alavanca, o ponto de apoio está localizado na articulação entre o úmero, o rádio e a ulna. A força potente é aplicada próximo à base do rádio, onde o tendão do biceps se insere, e a força resistente corresponde ao peso do próprio antebraço.

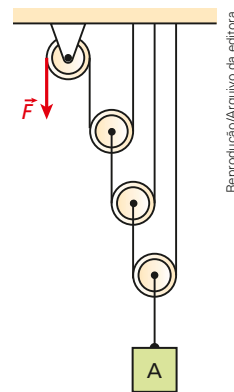
Com base nessas informações, é possível concluir, corretamente, que a contração do biceps provoca no membro superior um movimento de

- a) extensão, por um sistema de alavanca interfixa.
 - b) extensão, por um sistema de alavanca interpotente.
 - c) flexão, por um sistema de alavanca inter-resistente.
 - d) flexão, por um sistema de alavanca interpotente.
 - e) flexão, por um sistema de alavanca interfixa.
- 66.** (IFSP) Em um parque de diversão Carlos e Isabela brincam em uma gangorra que dispõe de dois lugares possíveis de se sentar nas suas extremidades. As distâncias relativas ao ponto de apoio (eixo) estão representadas conforme a figura a seguir.



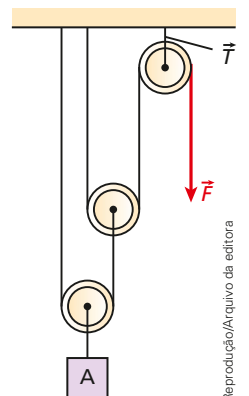
Considere a barra homogênea e de peso desprezível e o apoio no centro da barra. Sabendo-se que Carlos tem 70 kg de massa e que a barra deve permanecer em equilíbrio horizontal, assinale a alternativa correta que indica respectivamente o tipo de alavanca da gangorra e a massa de Isabela comparada com a de Carlos:

- a) Interfixa e maior que 70 kg.
 - b) Inter-resistente e menor que 70 kg.
 - c) interpotente e igual a 70 kg.
 - d) Inter-resistente e igual a 70 kg.
 - e) Interfixa e menor que 70 kg.
- 67.** (OBF) É muito comum observarmos em oficinas de automóveis, em hospitais e cais de portos, pessoas utilizando-se de talhas exponenciais ou polias móveis para elevar pesados objetos, tais como motores. Esse fato chama a atenção de curiosos no sentido de que a força (F) aplicada à corda possui uma baixa intensidade.



Se, na situação mostrada na figura acima, a talha possui três polias móveis, qual a intensidade da força aplicada na corda, se o peso do corpo **A** é de 1 600 N?

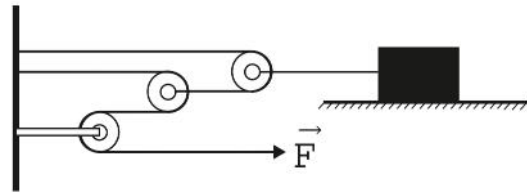
- a) 160 N
 - b) 200 N
 - c) 400 N
 - d) 800 N
 - e) 2 000 N
- 68.** (Cefet) No sistema a seguir, em equilíbrio estático, os fios são ideais, e cada polia pesa $P_0 = 10$ N. Sendo $P = 30$ N, o módulo da tração T , que sustenta a polia superior, em newtons, é



- a) 7,5
- b) 15
- c) 20
- d) 25
- e) 40

69. (Enem) Uma invenção que significou um grande avanço tecnológico na Antiguidade, a polia composta ou a associação de polias, é atribuída a Arquimedes (287 a. C. a 212 a.C.). O aparato consiste em associar uma série de polias móveis a uma polia fixa. A figura exemplifica um arranjo possível para esse aparato. É relatado que Arquimedes teria demonstrado para o rei Hierão um outro arranjo desse aparato, movendo sozinho, sobre a areia da praia, um navio repleto de passageiros e cargas algo que seria impossível sem a participação de muitos homens. Suponha que a massa do navio era de 3000 kg, que o coeficiente de atrito estático entre o navio e a areia era de 0,8 e que Arquimedes tenha puxado o navio com uma força \vec{F} , paralela à direção do movimento e

de módulo igual a 400 N. Considere os fios e as polias ideais, a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 e que a superfície da praia é perfeitamente horizontal.



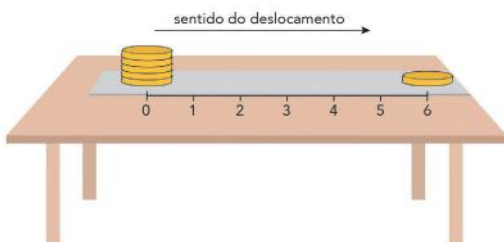
Reprodução/Enem, 2016.

Disponível em: www.histedbr.fac.unicamp.br
Acesso em: 28 fev. 2013 (adaptado).

- O número mínimo de polias móveis usadas, nessa situação, por Arquimedes foi
- a) 3. c) 7. e) 10.
b) 6. d) 8.

Exercícios Nível 2

70. (Uerj) Um sistema é constituído por seis moedas idênticas fixadas sobre uma régua de massa desprezível que está apoiada na superfície horizontal de uma mesa, conforme ilustrado abaixo. Observe que, na régua, estão marcados pontos equidistantes, numerados de 0 a 6.



Reprodução/Uerj, 2017.

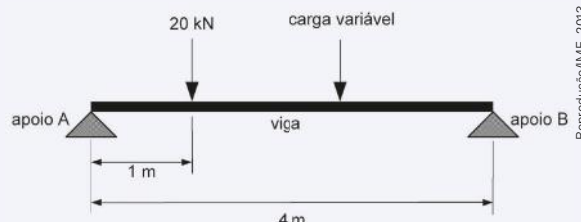
Ao se deslocar a régua da esquerda para a direita, o sistema permanecerá em equilíbrio na horizontal até que determinado ponto da régua atinja a extremidade da mesa. De acordo com a ilustração, esse ponto está representado pelo seguinte número:

- a) 1 c) 3 e) 5
b) 2 d) 4
71. (UFPI) Desejamos medir a massa M de um corpo e a única balança de que dispomos é uma de dois pratos, equilibrada, com braços de tamanhos e massas diferentes. O procedimento adotado foi o seguinte: colocamos a massa a ser pesada em um dos pratos e equilibramos com uma massa m_1 , trocamos a massa M de prato e veri-

ficamos que a massa equilibrante era outra, de valor m_2 . Diante dessa informação, podemos dizer que o valor da massa M será dado, corretamente, por:

- a) $\frac{m_1 + m_2}{2}$ d) $\sqrt{\frac{m_1 m_2}{2}}$
b) $\frac{m_1 m_2}{2}$ e) $\sqrt{m_1 m_2}$
c) $\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2}}$

72. (IME-RJ) A figura abaixo mostra uma viga em equilíbrio. Essa viga mede 4,0 m e seu peso é desprezível. Sobre ela, há duas cargas concentradas, sendo uma fixa e outra variável. A carga fixa, de 20 kN, está posicionada a 1,0 m do apoio **A**, enquanto a carga variável só pode posicionar-se entre a carga fixa e o apoio **B**.



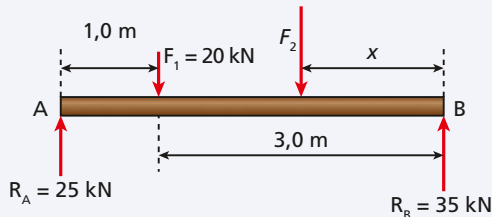
Reprodução/IME, 2013.

Para que as reações verticais (de baixo para cima) dos apoios **A** e **B** sejam iguais a 25 kN e 35 kN, respectivamente, a posição da carga variável, em relação ao apoio **B**, e o seu módulo devem ser:

- a) 1,0 m e 50 kN. d) 1,5 m e 50 kN.
 b) 1,0 m e 40 kN. e) 2,0 m e 40 kN.
 c) 1,5 m e 40 kN.

Resolução:

Diagrama de forças:



Condição de força resultante nula na vertical:

$$R_A + R_B = F_1 + F_2 \Rightarrow 60 = 20 + F_2$$

$$F_2 = 40 \text{ kN}$$

Momento resultante nulo em relação ao apoio **B**:

$$R_A d_A = F_1 d_1 + F_2 x$$

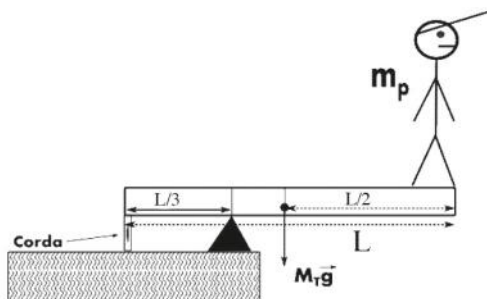
$$25 \cdot 4,0 = 20 \cdot 3,0 + 40 \cdot x$$

$$100 = 60 + 40 \cdot x$$

$$x = 1,0 \text{ m}$$

Resposta: alternativa **b**.

73. (UFJF-MG) A figura abaixo mostra um trampolim rígido de tamanho L e massa M_T . Na extremidade esquerda, existe uma corda que prende o trampolim ao solo e, a uma distância $\frac{L}{3}$ da extremidade esquerda, o trampolim está apoiado em uma base rígida e estática.

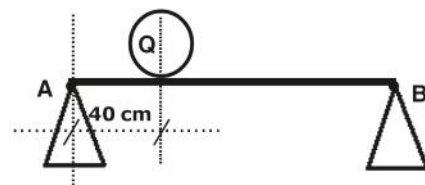


\vec{g} = aceleração da gravidade

Supondo-se que a força de tração máxima que a corda suporta sem arrebentar seja $T_{\text{máx}} = 100M_T g$, calcule o valor máximo de massa m_p de uma pessoa que a corda suportará, sem se romper, quando a pessoa estiver na extremidade oposta.

- a) $\frac{21M_T}{3}$ d) $\frac{10M_T}{3}$
 b) $\frac{19M_T}{4}$ e) $\frac{25M_T}{4}$
 c) $\frac{42M_T}{5}$

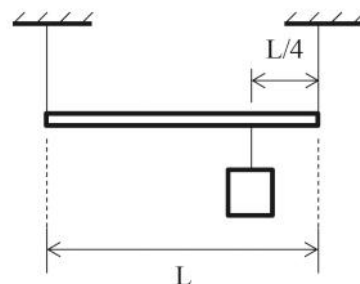
74. (Aman-RJ) Uma barra homogênea de peso igual a 50 N está em repouso na horizontal. Ela está apoiada em seus extremos nos pontos **A** e **B**, que estão distanciados de 2,0 m. Uma esfera **Q** de peso 80 N é colocada sobre a barra, a uma distância de 40 cm do ponto **A**, conforme representado no desenho abaixo.



A intensidade da força de reação do apoio sobre a barra no ponto **B** é de:

- a) 32 N d) 82 N
 b) 41 N e) 130 N
 c) 75 N

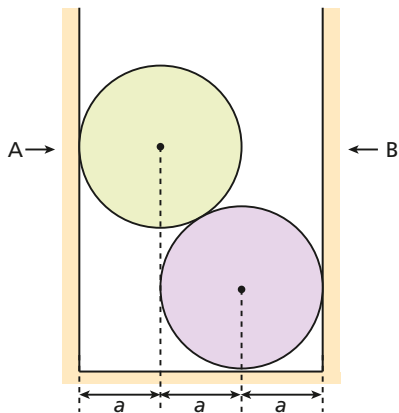
75. (OBC) Uma barra homogênea de peso 80 N é mantida em equilíbrio horizontal por meio de duas cordas verticais que suportam tração máxima de intensidade 130 N cada.



O valor máximo do peso de uma caixa que pode ser pendurada na barra, na posição indicada na figura, sem romper as cordas, é de:

- a) 80 N d) 110 N
 b) 90 N e) 120 N
 c) 100 N

82. (Fatec-SP) No interior de um vaso de forma prismática, conforme figura, depositam-se dois cilindros idênticos. Considerando-se P o peso de cada cilindro e lisas as superfícies em contato, então a reação na parede **A** é dada por:

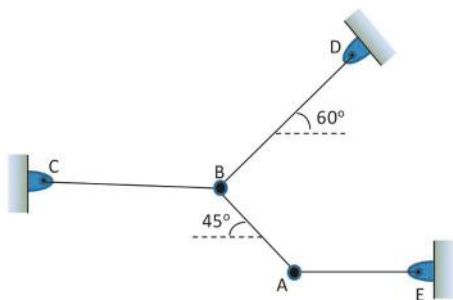


Reprodução/Arquivo da editora

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}P$
- b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}P$
- c) $\sqrt{3}P$
- d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}P$
- e) $\frac{P}{2}$

Dados: $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$; $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

83. (Eforrrm-RJ) Cada esfera (**A** e **B**) da figura pesa 1,0 kN. Elas são mantidas em equilíbrio estático por meio de quatro cordas finas e inextensíveis, de massas desprezíveis, nas posições mostradas.

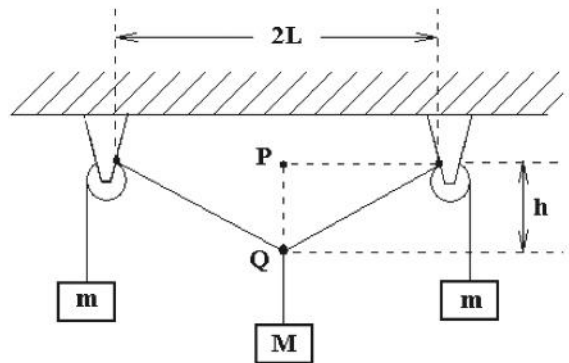


Reprodução/Eforrrm, 2016.

A intensidade de força de tração na corda **BD**, em kN, é

- a) $\frac{2,0\sqrt{2}}{3}$
- b) 1,0
- c) $\frac{2,0\sqrt{3}}{3}$
- d) $\frac{3,0\sqrt{2}}{3}$
- e) $\frac{4,0\sqrt{3}}{3}$

84. (ITA-SP) No arranjo mostrado na figura com duas polias, o fio inextensível e sem peso sustenta a massa M e, também, simetricamente, as duas massas m , em equilíbrio estático.



Reprodução/ITA, 2007.

Desprezando o atrito de qualquer natureza, o valor h da distância entre os pontos **P** e **Q** vale

- a) $\frac{ML}{\sqrt{4m^2 - M^2}}$
- b) L
- c) $\frac{ML}{\sqrt{M^2 - 4m^2}}$
- d) $\frac{mL}{\sqrt{4m^2 - M^2}}$
- e) $\frac{ML}{\sqrt{2m^2 - M^2}}$

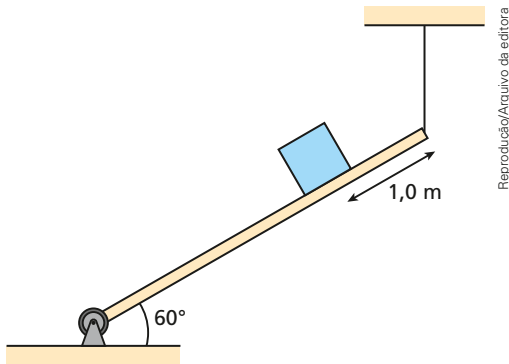
85. (Eforrrm-RJ) Uma régua escolar de massa M uniformemente distribuída com o comprimento de 30 cm está apoiada na borda de uma mesa, com $\frac{2}{3}$ da régua sobre a mesa. Um aluno decide colocar um corpo **C** de massa $2M$ sobre a régua, em um ponto da régua que está suspenso (conforme a figura). Qual é a distância mínima x , em cm, da borda livre da régua a que deve ser colocado o corpo, para que o sistema permaneça em equilíbrio?



Reprodução/Eforrrm, 2017.

- a) 1,25
- b) 2,50
- c) 5,00
- d) 7,50
- e) 10,0

86. (CPAEN-RJ)

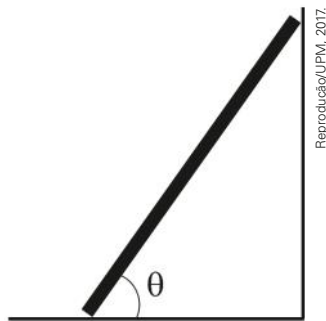


A figura acima ilustra um sistema mecânico em equilíbrio estático composto de uma tábua de 5,0 kg de massa e 6,0 m de comprimento, articulada em uma de suas extremidades e presa a um cabo na outra. O cabo está estendido na vertical. Sobre a tábua, que está inclinada a 60° , temos um bloco de massa 3,0 kg na posição indicada na figura. Sendo assim, qual o módulo, em newtons, a direção e o sentido da força que a tábua faz na articulação?

Dado: $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

- a) 45,0; horizontal para a esquerda.
- b) 45,0; vertical para baixo.
- c) 45,0; vertical para cima.
- d) 30,0; horizontal para a esquerda.
- e) 30,0; vertical para baixo.

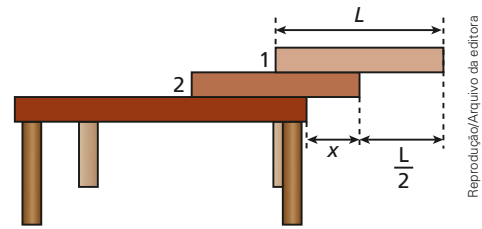
87. (UPM-SP) Uma barra homogênea de comprimento L e peso P encontra-se apoiada na parede vertical lisa e no chão horizontal áspero formando um ângulo θ como mostra a figura abaixo.



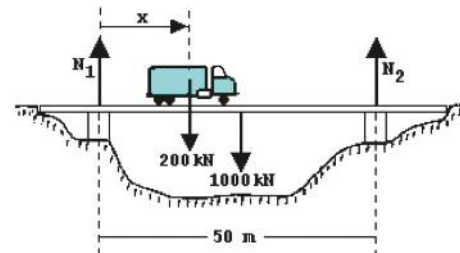
O coeficiente de atrito estático mínimo (μ_e) entre a barra e o chão deve ser

- a) $\frac{\cos \theta}{2 \sin \theta}$
- b) $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
- c) $\frac{\cos \theta}{L \sin \theta}$
- d) $\frac{\sin \theta}{2 \cos \theta}$
- e) $\frac{\sin \theta}{L \cos \theta}$

88. (UFPE) Dois blocos idênticos de comprimento $L = 24 \text{ cm}$ são colocados sobre uma mesa, como mostra a figura abaixo. Determine o máximo valor de x , em cm, para que os blocos fiquem em equilíbrio, sem tombar.



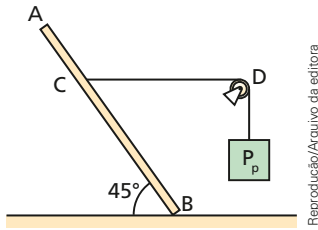
89. (Fuvest-SP) Um caminhão pesando 200 kN atravessa, com velocidade constante, uma ponte que pesa 1 000 kN e é suportada por dois pilares distantes 50 m entre si.



O gráfico que melhor representa as intensidades das forças de reação N_1 e N_2 nos dois pilares, em função da distância x do centro de massa do caminhão ao centro do primeiro pilar, é:

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

90. (UPM-SP)

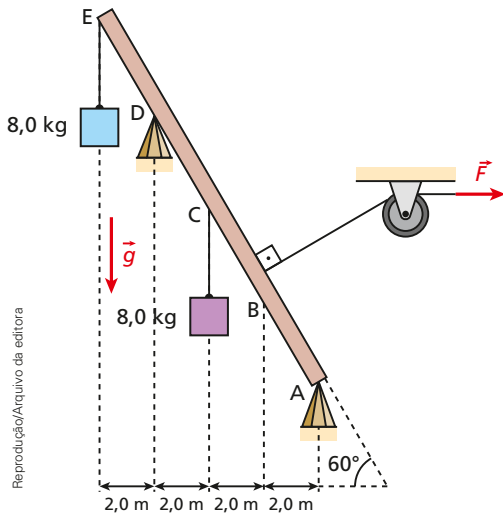


Uma barra homogênea **AB** de peso \vec{P}_{AB} está apoiada no solo horizontal rugoso e mantida em equilíbrio através do corpo **P** de peso \vec{P}_p , como mostra a figura acima. Considere o fio e a polia ideal, o trecho **CD** horizontal, $BC = \frac{2}{3} AB$ e $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. O coeficiente de atrito estático

entre o solo e a barra **AB** é:

- a) 0,35
- b) 0,55
- c) 0,75
- d) 0,80
- e) 0,90

91. (CPAEN-RJ) A viga inclinada de 60° mostrada na figura repousa sobre dois apoios **A** e **D**. Nos pontos **C** e **E**, dois blocos de massa 8,0 kg estão pendurados por meio de um fio ideal. Uma força de intensidade $F = 30,0$ N traciona um fio ideal preso à viga no ponto **B**.



Desprezando-se o peso da viga e o atrito de apoio **D**, a reação normal que o apoio **D** exerce na viga, em newtons, é igual a

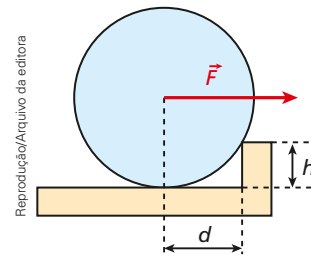
- a) 30,0
- b) 50,0
- c) 70,0
- d) 90,0
- e) 110

Adote $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

92. (ITA-SP) Um bloco cônico de massa M apoiado pela base numa superfície horizontal tem altura h e raio da base R . Havendo atrito suficiente na superfície da base de apoio, o cone pode ser tombado por uma força horizontal aplicada no vértice. O valor mínimo F dessa força pode ser obtido pela razão $\frac{h}{R}$ dada pela opção:

- a) $\frac{Mg}{F}$
- b) $\frac{F}{Mg}$
- c) $\frac{Mg + F}{Mg}$
- d) $\frac{Mg + F}{F}$
- e) $\frac{Mg + F}{2 Mg}$

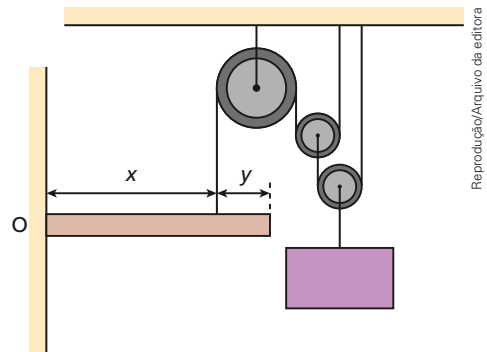
93. (UPM-SP) Uma esfera homogênea de raio R e peso \vec{P} está apoiada como mostra a figura abaixo.



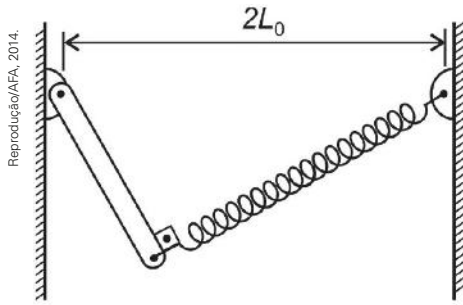
A intensidade da força \vec{F} horizontal, aplicada no centro da esfera, capaz de tornar o movimento iminente, é:

- a) $F = \frac{d}{R-h} P$
- b) $F = \frac{h}{R-d} P$
- c) $F = \frac{R-h}{R} P$
- d) $F = \frac{R-h}{d} P$
- e) $F = \frac{R}{d} P$

94. (ITA-SP) Uma barra homogênea, articulada no pino **O**, é mantida na posição horizontal por um fio fixado a uma distância x de **O**. Como mostra a figura, o fio passa por um conjunto de três polias que também sustentam um bloco de peso P . Desprezando efeitos de atrito e o peso das polias, determine a força de ação do pino **O** sobre a barra.



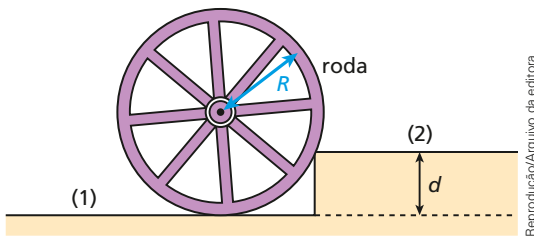
100. (AFA-SP) A figura abaixo mostra um sistema em equilíbrio estático, formado por uma barra homogênea e uma mola ideal que estão ligadas por uma de suas extremidades e livremente articuladas às paredes.



A barra possui massa m e comprimento L_0 , a mola possui comprimento natural L_0 e a distância entre as articulações é de $2L_0$. Esse sistema (barra-mola) está sujeito à ação da gravidade cujo módulo de aceleração é g e, nessas condições, a constante elástica da mola vale

- a) $\frac{mgL_0^{-1}}{4(\sqrt{3}-1)}$ c) $2mgL_0^{-1}$
 b) mgL_0^{-1} d) $\frac{mg}{\sqrt{6}-2}$

101. (CPAEN-RJ) Observe a figura abaixo.

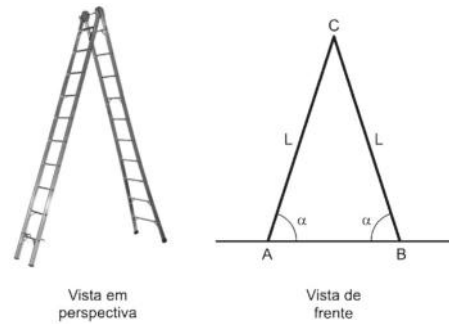


Tem-se uma roda de massa M e o raio R que deve ser erguida do plano horizontal (1) para o plano horizontal (2). Qual é a intensidade da força horizontal, aplicada no centro de gravidade da roda, capaz de erguê-la, sabendo-se que o centro de gravidade da roda coincide com seu centro geométrico $d < R$?

- a) $F > \frac{Mg\sqrt{d(R-d)}}{R}$ d) $F > \frac{Mg\sqrt{d(R-d)}}{R-d}$
 b) $F > \frac{Mg\sqrt{d(2R-d)}}{R-d}$ e) $F > \frac{Mg\sqrt{d^2(2R-d)^2}}{2R-d}$
 c) $F > \frac{Mg\sqrt{2d(R-d)}}{R-d}$

102. (OBC) Um pintor abre uma escada dupla, preparando o início de seu trabalho. Cada trecho da

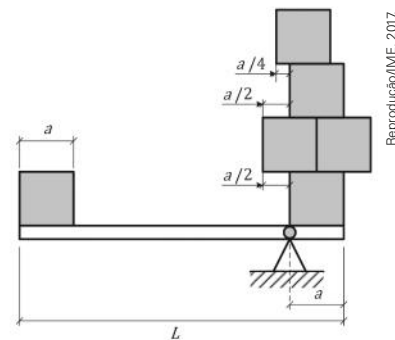
escada (**AC** e **BC**) tem massa M , comprimento L e forma com o solo horizontal um ângulo α .



O pintor pendura no extremo superior **C** uma lata de tinta de massa m . Seja g o módulo da aceleração da gravidade. Pode-se afirmar que as forças de atrito \vec{F}_{at_A} e \vec{F}_{at_B} que o solo exerce em **A** e **B** têm intensidades:

- a) $F_{at_A} = F_{at_B} = \frac{(M+m)g}{2} \cotg \alpha$
 b) $F_{at_A} = F_{at_B} = \frac{(M+m)g}{2} \tg \alpha$
 c) $F_{at_A} = \frac{1}{2}F_{at_B} = \frac{(M+m)g}{2} \cos \alpha$
 d) $F_{at_A} = 2F_{at_B} = \frac{(M+m)g}{2} \cos \alpha$
 e) $F_{at_A} = F_{at_B} = \frac{(M+m)g}{2} \cos \alpha$

103. (IME-RJ)



O sistema mostrado na figura acima encontra-se em equilíbrio estático, sendo composto por seis cubos idênticos, cada um com massa específica μ uniformemente distribuída e de aresta a , apoiados em uma alavanca composta por uma barra rígida de massa desprezível. O comprimento L da barra para que o sistema esteja em equilíbrio é:

- a) $\frac{9}{4}a$ c) $\frac{7}{2}a$ e) $\frac{17}{4}a$
 b) $\frac{13}{4}a$ d) $\frac{15}{4}a$

Estática dos fluidos



Galina Savina/Shutterstock

// O canal do Panamá é um canal artificial construído entre 1881 e 1914 para a travessia de navios. Ele possui 77 quilômetros de comprimento e liga o oceano Atlântico ao oceano Pacífico. No entanto, há um desnível de 26 m entre esses oceanos. Para que os navios consigam realizar essa travessia, o canal utiliza um sistema de comportas e eclusas que inundam diques e permitem a elevação e descida de embarcações. O funcionamento desse sistema só é possível devido aos princípios da Estática dos fluidos. A travessia pelo canal do Panamá é quase 13 mil quilômetros mais curta que a rota pelo cabo Horn, utilizada antes de sua construção.

No tópico anterior estudamos o equilíbrio de corpos rígidos – sólidos – e agora chegou o momento de analisarmos o equilíbrio dos fluidos – líquidos e gases. Aqui, serão introduzidos novos conceitos e novas grandezas físicas serão requisitadas, como densidade e pressão. Apresentaremos com suas principais aplicações os teoremas fundamentais que regem a Hidrostática: o de Stevin, o de Pascal e o de Arquimedes. Com este último, analisaremos a força empuxo, que atua em corpos submersos e que explica flutuações em geral, como as de navios.

1. Três teoremas fundamentais

A **Estática dos fluidos** ou **Hidroestática** é a parte da Mecânica que estuda os fluidos em equilíbrio.

Classificamos como **fluidos**, indistintamente, os líquidos e os gases. Em uma primeira abordagem, os líquidos não têm forma própria, embora possuam volume definido. Já os gases, por sua vez, não têm forma nem volume próprios.

Um litro de água, por exemplo, não sofre mudança de volume quando o transferimos de uma panela para uma garrafa. Nesse caso, apenas sua forma é alterada. Já uma determinada massa de gás sempre tende a ocupar todo o volume que lhe é oferecido, propriedade conhecida como expansibilidade. Devemos dizer, ainda, que a forma de certa porção de gás é a do recipiente que a contém.

Por apresentar maior utilidade prática, daremos mais ênfase ao equilíbrio dos líquidos. Nesse estado, as substâncias têm, de modo geral, uma configuração estrutural em que as moléculas se mostram notadamente reunidas. Por causa dessa característica microscópica, os líquidos oferecem grande resistência à compressão. Em nosso curso, a pequena compressibilidade dos líquidos será negligenciada e os consideraremos incompressíveis.

A estática dos fluidos está fundamentada em três teoremas (também chamados de leis). São eles:

- o Teorema de Stevin;
- o Teorema de Pascal;
- o Teorema de Arquimedes.

JÁ PENSOU NISTO?

Por que certos líquidos não se misturam?

Em alguns casos, por falta de afinidade molecular, dois ou mais líquidos podem não se misturar. Eles são chamados **líquidos imiscíveis**. Ainda que agitemos dois desses líquidos dentro de um mesmo recipiente, depois de certo intervalo de tempo ocorrerá uma separação entre eles, ficando o menos denso em cima e o mais denso embaixo.

Na fotografia ao lado, podemos observar água e óleo – líquidos imiscíveis – sendo vertidos simultaneamente dentro de um mesmo béquer. Passadas as turbulências iniciais, o óleo, que é o menos denso, vai subir, e a água, que é a mais densa, vai descer, criando-se uma nítida superfície de separação entre os dois fluidos. Situações como a da água e do óleo são estudadas em **Hidroestática**.



Charles D. Winters/SPL/Lainstock/Lainstock

// Água e óleo em um mesmo béquer: esses líquidos se misturam?

2. Massa específica ou densidade absoluta (μ)

Fixadas a temperatura e a pressão, uma substância pura tem a propriedade fundamental de apresentar massa diretamente proporcional ao respectivo volume.

Sejam m_1, m_2, \dots, m_n as massas de porções de uma substância pura em uma mesma temperatura e submetida à mesma pressão. Sendo V_1, V_2, \dots, V_n os respectivos volumes, podemos verificar que:

$$\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2} = \dots = \frac{m_n}{V_n} = \mu \text{ (constante)}$$

Por definição, a constante μ é a **massa específica** ou **densidade absoluta** da substância.

Do exposto, concluímos que:

Em pressão e temperatura constantes, uma substância pura tem massa específica (μ) constante e calculada pelo quociente da massa considerada (m) pelo volume correspondente (V):

$$\mu = \frac{m}{V}$$

As unidades de massa específica são obtidas pela divisão da unidade de massa pela unidade de volume:

$$\text{unid. } (\mu) = \frac{\text{unid. } (m)}{\text{unid. } (V)}$$

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a massa é medida em kg e o volume, em m^3 . Assim:

$$\text{unid. } (\mu) = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Outras unidades usuais:

$$1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-3} \text{ dm}^3 \text{ ou L}} \Rightarrow 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{L}}$$

$$1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} \Rightarrow 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Na tabela a seguir fornecemos os valores usuais das massas específicas de algumas substâncias.

NOTA!

Em algumas situações, pode ser adequado determinar-se o **peso específico** do fluido.

O peso específico ρ é a relação entre o peso de um fluido e o volume por ele ocupado, a uma dada pressão e uma dada temperatura:

$$\rho = \frac{P}{V}$$

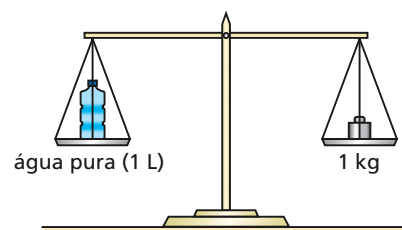
No Sistema Internacional, o peso específico é expresso em N/m^3 .

Massa específica (μ)			
Material	μ (g/cm^3)	Material	μ (g/cm^3)
Ar (20 °C e 1 atm)	0,001	Ferro	7,87
Isopor	0,10	Cobre	8,96
Gelo	0,92	Prata	10,49
Água	1,00	Chumbo	11,35
Glicerina	1,26	Mercúrio	13,55
Concreto	2,00	Ouro	19,32
Alumínio	2,70	Platina	21,45

Fonte: HALLIDAY, D. et al. *Fundamentos da Física: gravitação, ondas, termodinâmica*. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 2.

A água, à qual está subordinada a vida na Terra, é o líquido mais abundante do planeta, cobrindo praticamente $\frac{2}{3}$ da superfície terrestre. Por isso, o estudo da Estática dos fluidos dá ênfase especial a essa substância.

É importante observar que, como a densidade absoluta da água é igual a 1 kg/L, existe paridade entre o número que mede a massa dessa substância em quilogramas e o número que mede seu volume em litros.



// Em uma balança de travessão de braços iguais, um litro de água contido em uma garrafa plástica de massa desprezível é equilibrado por um massor de um quilograma.

3. Densidade de um corpo (d)

Será que um corpo de ferro ($\mu_{Fe} \cong 7,9 \text{ g/cm}^3$) pode ser menos denso que a água ($\mu_{H_2O} = 1,0 \text{ g/cm}^3$)? A resposta é sim. Para isso, esse corpo deverá ser provido de descontinuidades internas (regiões ocas), de modo que sua massa total seja medida por um número, em gramas, menor que aquele que mede, em cm^3 , o volume delimitado por sua superfície externa.

Por definição, a **densidade** de um corpo (d) é o quociente de sua massa (m) pelo volume delimitado por sua superfície externa (V_{ext}):

$$d = \frac{m}{V_{ext}}$$

Os navios modernos são metálicos, basicamente construídos em aço. Por ser um material de elevada densidade, o aço afunda rapidamente na água quando considerado em porções maciças. No entanto, os navios flutuam na água porque, sendo dotados de descontinuidades internas (partes ocas), apresentam densidade menor que a desse líquido.

Martin Harvey/Corbis/Lainstock



4. Densidade relativa

Por definição, chama-se densidade de uma substância **A** relativa a outra **B** o quociente das respectivas massas específicas das substâncias **A** e **B** quando à mesma temperatura e pressão:

$$d_{AB} = \frac{\mu_A}{\mu_B}$$

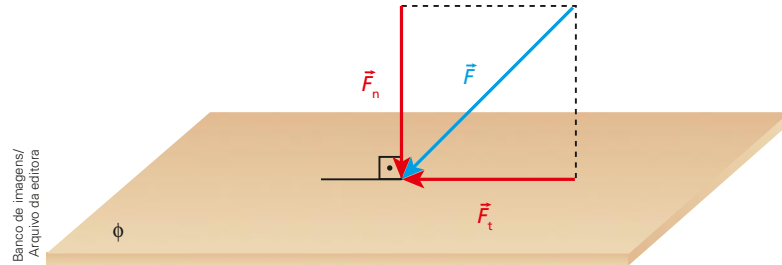
Se os volumes das substâncias consideradas forem iguais ($V_A = V_B = V$), teremos:

$$d_{AB} = \frac{\mu_A}{\mu_B} = \frac{\frac{m_A}{V}}{\frac{m_B}{V}} \therefore d_{AB} = \frac{m_A}{m_B}$$

Observe que a densidade relativa, por ser definida pelo quociente entre grandezas medidas nas mesmas unidades, é uma quantidade **adimensional**.

5.0 conceito de pressão

Suponha que você esteja comprimindo na palma de uma de suas mãos uma pelota de massa de modelar com movimentos sucessivos de compressão e relaxamento. Cada vez que você aperta a pelota, seus dedos exercem sobre ela certa **pressão**. A pressão é uma importante grandeza física que se destaca sobremaneira no estudo da estática dos fluidos.



Considere a figura acima, em que a superfície ϕ , de área A , está sujeita a uma distribuição de forças cuja resultante é \vec{F} . A componente tangencial de \vec{F} a ϕ é \vec{F}_t e a componente normal de \vec{F} a ϕ é \vec{F}_n .

Temos:

Por definição, a **pressão média** (p_m) que \vec{F} exerce na superfície ϕ é obtida dividindo-se o módulo da componente normal de \vec{F} em relação a ϕ ($|\vec{F}_n|$) pela correspondente área A :

$$p_m = \frac{|\vec{F}_n|}{A}$$

Convém destacar que apenas e tão somente a componente normal da força exerce pressão na superfície. A componente tangencial exerce outro efeito, denominado **cisalhamento**.

As unidades de pressão decorrem da própria definição, isto é, são obtidas da divisão da unidade de força pela unidade de área:

$$\text{unid. (p)} = \frac{\text{unid. (F)}}{\text{unid. (A)}}$$

No SI, a força é medida em newton (N) e a área, em m^2 . A razão entre essas duas unidades de medida é denominada **pascal (Pa)**:

$$\text{unid. (p)} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{pascal (Pa)}$$

Por causa da atração gravitacional, a atmosfera terrestre pressiona a superfície da Terra. Verifica-se que, ao nível do mar, a pressão atmosférica é praticamente igual a 1 atm ou $1 \cdot 10^5$ Pa.

Representamos na ilustração ao lado a Terra e sua atmosfera. Observe as setas vermelhas. Elas indicam as forças radiais de compressão que a atmosfera exerce sobre a superfície do planeta. São essas forças que produzem a pressão atmosférica.



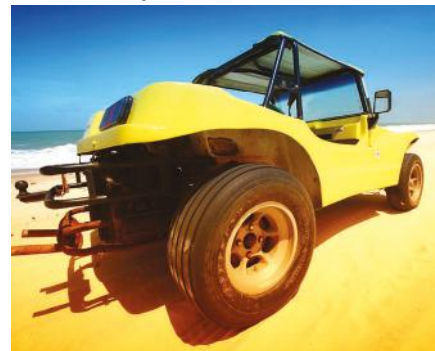
// Ilustração com formas e distâncias fora de escala e em cores fantasia.

A pressão é uma grandeza que não tem orientação privilegiada. Uma evidência disso é o fato de ela ser a mesma, **em qualquer direção**, em um ponto situado no interior de um fluido em equilíbrio. Por isso, a pressão é uma **grandeza escalar**, ficando plenamente definida pelo valor numérico acompanhado da respectiva unidade de medida.

Para uma mesma força normal, a pressão média exercida sobre uma superfície é inversamente proporcional à área considerada. Isso significa que um prego, por exemplo, comprimido sempre perpendicularmente a uma parede e com a mesma intensidade, poderá exercer pressões diferentes. Tudo dependerá do modo como ele entrar em contato com a superfície, pela ponta ou pela cabeça. No primeiro caso, a força estará distribuída em uma área menor, o que provocará maior pressão.

// Em algumas praias do Nordeste é tradicional o passeio de *buggy*. Esse veículo é geralmente equipado com pneus que apresentam banda de rodagem de largura maior que o normal (pneus tala larga). Em razão de uma área maior de contato com o solo, a pressão exercida pelos pneus sobre a areia torna-se menor, dificultando o atolamento.

Value Stock/Glow Images



Unidades usuais de pressão

- Uma unidade inglesa de pressão bastante utilizada nos calibradores de pneus encontrados em postos de gasolina no Brasil é o **psi**.

$$1 \text{ psi} = 1 \frac{\text{libra-força}}{(\text{polegada})^2} = \frac{\text{lbf}}{\text{pol}^2}$$

$$1 \text{ psi} \cong 6,9 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

- $\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$ = atmosfera técnica métrica (atm)

$$1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = \frac{9,8 \text{ N}}{10^{-4} \text{ m}^2} = 9,8 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Logo:

$$1 \text{ atm} = 9,8 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cong 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$



Eduardo Santalhestra/Acervo do fotógrafo

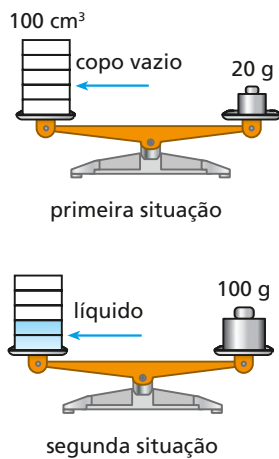
// Calibrador de pneus analógico.

Exercícios Nível 1

- Em pressão e temperatura constantes, a massa específica de uma substância pura:
 - é diretamente proporcional à massa considerada.
 - é inversamente proporcional ao volume considerado.
 - é constante somente para pequenas porções da substância.
 - é calculada por meio do quociente da massa considerada pelo respectivo volume.
 - pode ser medida em kgf/m^3 .
- Num local em que a aceleração da gravidade tem intensidade 10 m/s^2 , $1,0 \text{ kg}$ de água ocupa um volume de $1,0 \text{ L}$. Determine:
 - a massa específica da água, em g/cm^3 ;
 - o peso específico da água, em N/m^3 , em que o peso específico é o quociente entre o módulo do peso do líquido e o volume correspondente.
- Nas mesmas condições de pressão e temperatura, as massas específicas da água e da glicerina valem, respectivamente, $1,00 \text{ g/cm}^3$ e $1,26 \text{ g/cm}^3$. Nesse caso, qual a densidade da glicerina em relação à água?

8. (UEL-PR) As densidades de dois líquidos **A** e **B**, que não reagem quimicamente entre si, são $d_A = 0,80 \text{ g/cm}^3$ e $d_B = 1,2 \text{ g/cm}^3$, respectivamente. Fazendo-se a adição de volumes iguais dos dois líquidos, obtém-se uma mistura cuja densidade é x . Adicionando-se massas iguais de **A** e de **B**, a mistura obtida tem densidade y . Os valores de x e y , em g/cm^3 , são, respectivamente, mais próximos de:
- a) 1,1 e 1,1. c) 1,0 e 0,96. e) 0,96 e 0,96.
 b) 1,0 e 1,1. d) 0,96 e 1,0.

9. (UnB-DF)



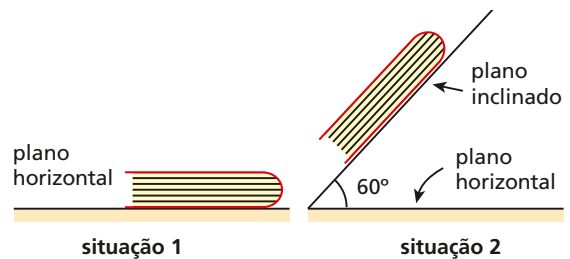
Na figura acima, está esquematizado um processo que pode ser usado para determinar a densidade de um líquido, por meio de uma balança de braços iguais e um béquer graduado. Nas duas situações retratadas, a balança está perfeitamente equilibrada. Nesse contexto, a densidade do líquido é igual a:

- a) $10,0 \text{ g/cm}^3$ c) $4,0 \text{ g/cm}^3$ e) $0,25 \text{ g/cm}^3$
 b) $8,0 \text{ g/cm}^3$ d) $2,0 \text{ g/cm}^3$
10. Um cubo, feito de material rígido e poroso, tem densidade igual a $0,40 \text{ g/cm}^3$. Quando mergulhado em água, e após absorver todo o líquido possível, sua densidade passa a ser de $1,2 \text{ g/cm}^3$. Sendo M a massa do cubo quando seco e M' a massa de água que ele absorve, responda: qual é a relação entre M e M' ? (Considere que o volume do cubo não se altera após absorver o líquido.)
11. Com uma faca bem afiada, um açougueiro consegue tirar bifés de uma peça de carne com relativa facilidade. Com essa mesma faca “cega” e com o mesmo esforço, entretanto, a tarefa fica mais difícil. A melhor explicação para o fato é que:
- a) a faca afiada exerce sobre a carne uma pressão menor que a exercida pela faca “cega”.

- b) a faca afiada exerce sobre a carne uma pressão maior que a exercida pela faca “cega”.
- c) o coeficiente de atrito cinético entre a faca afiada e a carne é menor que o coeficiente de atrito cinético entre a faca “cega” e a carne.
- d) a área de contato entre a faca afiada e a carne é maior que a área de contato entre a faca “cega” e a carne.
- e) Nenhuma das anteriores explica satisfatoriamente o fato.

12. Dois blocos cúbicos **A** e **B**, extraídos de uma mesma rocha maciça e homogênea, têm arestas, respectivamente, iguais a x e $3x$ e estão apoiados sobre um solo plano e horizontal. Sendo p_A e p_B as pressões exercidas por **A** e **B** na superfície de apoio, determine a relação $\frac{p_A}{p_B}$.

13. Um mesmo livro é mantido em repouso apoiado nos planos representados nos esquemas seguintes:

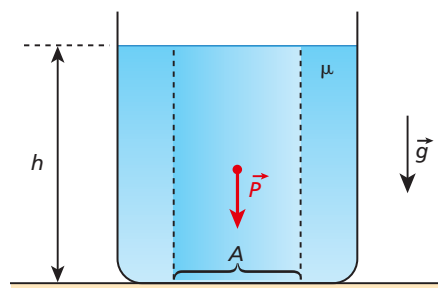


Sendo p_1 a pressão exercida pelo livro sobre o plano de apoio na situação 1 e p_2 a pressão exercida pelo livro sobre o plano de apoio na situação 2, qual será o valor da relação $\frac{p_2}{p_1}$?

14. Seja uma caixa-d'água de massa igual a $8,0 \cdot 10^2 \text{ kg}$ apoiada em um plano horizontal. A caixa, que tem base quadrada de lado igual a $2,0 \text{ m}$, contém água ($\mu_a = 1,0 \text{ g/cm}^3$) até a altura de $1,0 \text{ m}$. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule, em N/m^2 e em atm, a pressão média exercida pelo sistema no plano de apoio.
15. (Unicamp-SP) Ao se usar um saca-rolhas, a força mínima que deve ser aplicada para que a rolha de uma garrafa comece a sair é igual a 360 N .
- a) Sendo $\mu_e = 0,2$ o coeficiente de atrito estático entre a rolha e o bocal da garrafa, encontre a força normal que a rolha exerce no bocal da garrafa. Despreze o peso da rolha.
- b) Calcule a pressão da rolha sobre o bocal da garrafa. Considere o raio interno do bocal da garrafa igual a $0,75 \text{ cm}$ e o comprimento da rolha igual a $4,0 \text{ cm}$. Adote $\pi \cong 3$.

6. Pressão exercida por uma coluna líquida

Considere a figura ao lado, que representa um reservatório contendo um líquido homogêneo de massa específica μ , em equilíbrio sob a ação da gravidade (de intensidade g). Seja h a altura do nível do líquido no reservatório. Isolemos, no meio fluido, uma coluna cilíndrica imaginária do próprio líquido, com peso de módulo P e área da base A .



Banco de imagens/Arquivo da editora

A referida coluna exerce uma pressão média (p) na base do reservatório, que pode ser calculada por:

$$p = \frac{P}{A} \quad (\text{I}),$$

mas $P = mg$, e $\mu = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \mu V$

Assim:

$$P = \mu V g \quad (\text{II})$$

Como a coluna é cilíndrica, seu volume é dado por:

$$V = Ah \quad (\text{III})$$

Substituindo (III) em (II), vem:

$$P = \mu Ahg \quad (\text{IV})$$

Substituindo (IV) em (I), obtemos:

$$p = \frac{\mu Ahg}{A} \Rightarrow p = \mu gh$$

Observe que a pressão p independe da área A e que, com μ e g constantes, p é diretamente proporcional a h .

Visando obter um dado importante para a análise de situações hidrostáticas, vamos calcular o acréscimo de pressão Δp registrado por um mergulhador que se aprofunda verticalmente $\Delta h = 10$ m na água de um lago, admitida homogênea e com massa específica $\mu = 1,0 \cdot 10^3$ kg/m³.

Supondo que a aceleração da gravidade local seja $g = 10$ m/s², temos:

$$\Delta p = \mu g \Delta h \Rightarrow \Delta p = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10 \text{ (Pa)}$$

$$\Delta p = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cong 1,0 \text{ atm}$$

Assim, concluímos que, para cada 10 m acrescentados à profundidade do mergulhador na água, há um aumento de $1,0 \cdot 10^5$ Pa ou 1,0 atm na pressão exercida sobre ele.

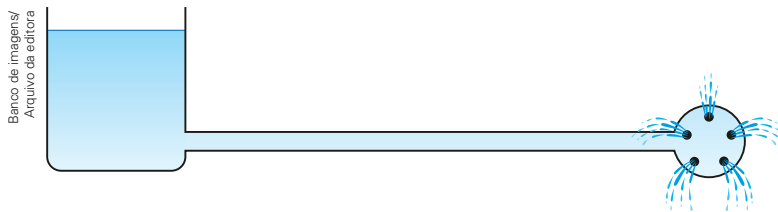
Um mergulhador aprofunda-se na água agarrado a uma corda. Para cada 10 m percorridos no movimento descendente vertical, acrescenta-se uma pressão de $1,0 \cdot 10^5$ Pa ou 1,0 atm.



Juan Carlos Calvín/Grupo Keystone

7. Forças exercidas nas paredes de um recipiente por um líquido em equilíbrio

Suponhamos que o recipiente da figura a seguir esteja cheio, por exemplo, de água, em equilíbrio e sob a ação da gravidade. Se no balão localizado à direita fizermos alguns furos, notaremos que a água jorrará através deles, esguichando, de saída, radialmente (perpendicularmente) à superfície do balão.



// Ao jorrar pelos orifícios, a água adquire movimento inicial normal à superfície do balão.

Chegamos, então, a uma importante conclusão:

Um líquido em equilíbrio exerce nas paredes do recipiente que o contém forças perpendiculares a elas, no sentido líquido → parede.

Caso as paredes do recipiente sejam planas, pode-se verificar que:

A intensidade (F) da força exercida por um líquido em equilíbrio contra uma parede plana do recipiente que o contém é igual ao produto da pressão no centro geométrico (**C**) da parede banhada pelo líquido (p_c) pela área (A) "molhada":

$$F = p_c A$$

Considere, por exemplo, a barragem representada na figura abaixo, em que o nível livre da água está a uma altura h . Admita que a região "molhada" seja retangular e tenha largura ℓ (não indicada no esquema). Supondo que o módulo da aceleração da gravidade seja g , calculemos a intensidade F da resultante das forças exercidas pela água (massa específica μ) contra a barragem.

Temos:

$$F = p_c A \quad (I)$$

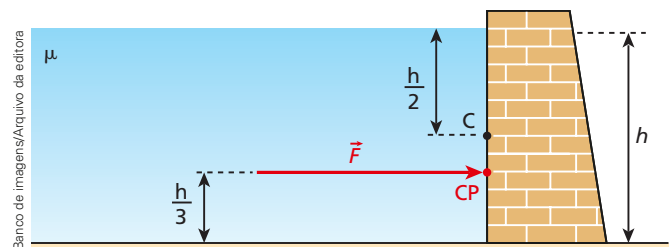
Mas:

$$p_c = \mu g h_c \Rightarrow p_c = \mu g \frac{h}{2} \quad (II)$$

e $A = h \ell \quad (III)$

Substituindo (II) e (III) em (I), vem:

$$F = \mu g \frac{h}{2} \ell \Rightarrow F = \frac{1}{2} \mu g \ell h^2$$



A barragem é, para o "recipiente" que contém o líquido em questão, uma parede lateral. Por isso, embora no cálculo de F tenhamos utilizado a pressão em **C** (centro geométrico da área "molhada"), a resultante das ações do líquido contra a barragem não se aplica em **C**, e sim em **CP**, ponto denominado **centro de pressões**.

Pode-se demonstrar que **CP** situa-se a uma altura $\frac{h}{3}$ em relação à base da barragem.



Retrato de Simon Stevin. Autor desconhecido, 1590. Paris, coleção particular.

8.0 Teorema de Stevin

Simon **Stevin** (1548-1620) nasceu em Bruges, nos Países Baixos (hoje, Bélgica), e notabilizou-se como engenheiro militar. Estudou os números fracionários e a queda livre de corpos com diferentes massas, constatando a igualdade de suas acelerações, e propôs alguns inventos, como a carroça movida a vela. Uma de suas funções era inspecionar as condições de segurança dos diques holandeses, o que o levou a importantes conclusões sobre hidrostática.

O teorema que enunciaremos a seguir, também conhecido como **Lei Fundamental da Hidrostática**, foi formulado por Simon Stevin:

A diferença de pressões entre dois pontos de um líquido homogêneo em equilíbrio sob a ação da gravidade é calculada pelo produto da massa específica do líquido pelo módulo da aceleração da gravidade no local e pelo desnível (diferença de cotas) entre os pontos considerados:

$$p_2 - p_1 = \mu gh$$

Demonstração

Considere o recipiente da figura ao lado, que contém um líquido homogêneo de massa específica μ , em equilíbrio sob a ação da gravidade (\vec{g}). Admita, para efeito de demonstração do teorema, um cilindro imaginário do próprio líquido, com área da base A e altura h .

Pelo fato de estar envolvido pelo líquido, o cilindro recebe dele os conjuntos de forças indicados.

Em razão da simetria, as forças laterais ao cilindro (horizontais) equilibram-se duas a duas. As forças aplicadas segundo a vertical, no entanto, não se equilibram. Por isso, temos uma resultante \vec{F}_1 aplicada no ponto 1, na base superior do cilindro, e uma resultante \vec{F}_2 aplicada no ponto 2, na base inferior do cilindro.

Observe que, além de \vec{F}_1 e de \vec{F}_2 , também atua no cilindro a força da gravidade \vec{P} .

Como o líquido está em equilíbrio, o cilindro, que faz parte dele, também deve estar. Para que isso ocorra, devemos ter:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} = \vec{0}$$

Ou, em módulo:

$$F_2 - F_1 = P$$

Dividindo todos os termos da igualdade anterior por A (área das bases do cilindro), obtemos:

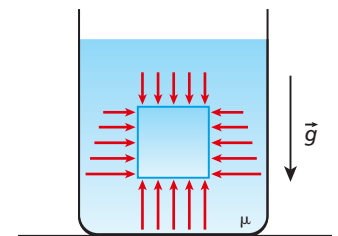
$$\frac{F_2}{A} - \frac{F_1}{A} = \frac{P}{A},$$

mas:

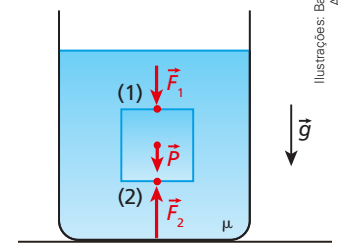
$$\frac{F_2}{A} = p_2 \text{ (pressão no ponto 2)} \quad \frac{F_1}{A} = p_1 \text{ (pressão no ponto 1)}$$

Assim:

$$p_2 - p_1 = \frac{P}{A} \Rightarrow p_2 - p_1 = \frac{mg}{A}$$



O cilindro tem bases paralelas à superfície do líquido.



A massa m pode ser expressa fazendo-se:

$$m = \mu V = \mu Ah$$

Substituindo, vem:

$$p_2 - p_1 = \frac{\mu Ahg}{A} \Rightarrow p_2 - p_1 = \mu gh$$

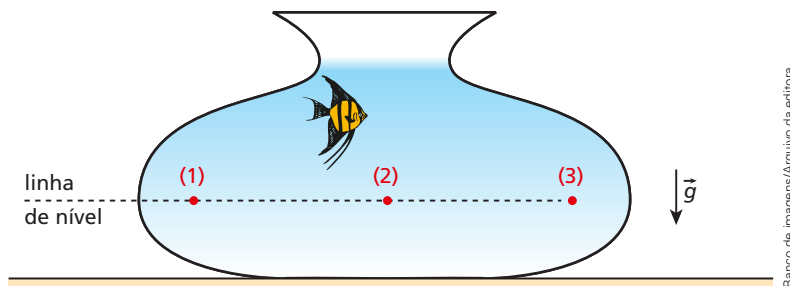
9. Consequências do Teorema de Stevin

1ª consequência

Todos os pontos de um líquido em equilíbrio sob a ação da gravidade, situados em um mesmo nível horizontal, suportam a **mesma pressão**, constituindo uma **região isobárica**.

Verificação

Consideremos a figura abaixo, na qual os pontos 1, 2 e 3 pertencem ao mesmo nível (mesma horizontal). O líquido considerado é homogêneo e encontra-se em equilíbrio.



Aplicando o **Teorema de Stevin** aos pontos 1 e 2, temos:

$$p_2 - p_1 = \mu gh$$

Entretanto, se os pontos estão no mesmo nível, o desnível entre eles (h) é nulo, levando-nos a escrever:

$$p_2 - p_1 = 0 \Rightarrow p_2 = p_1$$

No aquário esquematizado acima, o peixe se submeterá à mesma pressão nos pontos 1, 2 e 3, situados no mesmo nível horizontal, não importando o fato de os pontos 1 e 3 situarem-se abaixo das paredes laterais do recipiente e de o ponto 2 situar-se sob a superfície livre da água.

2ª consequência

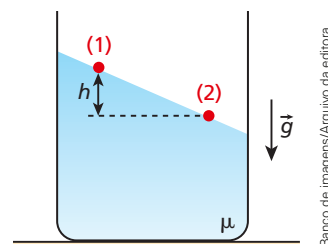
Desprezando fenômenos relativos à tensão superficial, a superfície livre de um líquido em equilíbrio sob a ação da gravidade é plana e horizontal.

Verificação

Suponhamos que no recipiente da figura ao lado exista um líquido em equilíbrio, sob a ação da gravidade. Sejam 1 e 2 pontos da superfície livre do líquido, desnivelados de uma altura h .

Aplicando a esses pontos o **Teorema de Stevin**, obtemos:

$$p_2 - p_1 = \mu gh$$



Como os pontos 1 e 2 estão expostos diretamente ao ar, a pressão que se exerce sobre ambos é a pressão atmosférica (p_0). Então, temos:

$$p_2 = p_1 = p_0$$

Assim:

$$p_0 - p_0 = \mu g h \Rightarrow \mu g h = 0$$

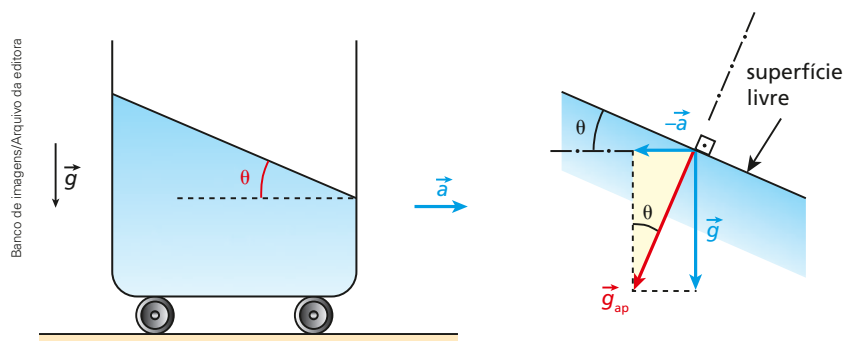
Como o produto $\mu g h$ é nulo e sendo $\mu \neq 0$ e $g \neq 0$, concluímos que:

$$h = 0$$

Do exposto, observamos que os pontos 1 e 2 não podem estar desnivelados, sendo, portanto, absurda a figura proposta.

Se o recipiente estiver em movimento acelerado, com aceleração horizontal constante \vec{a} , no entanto, a superfície livre do líquido ficará inclinada de um ângulo θ , conforme representa a figura a seguir. Podemos obter o valor de θ , como está demonstrado na seqüência, fazendo $\text{tg } \theta = a/g$, em que g é o módulo da aceleração da gravidade. Isso ocorre porque, em razão da inércia, se estabelece no interior do recipiente uma **gravidade aparente** (\vec{g}_{ap}) perpendicular à superfície livre do líquido, dada pela soma vetorial $\vec{g}_{ap} = -\vec{a} + \vec{g}$.

No triângulo retângulo destacado, temos:



$$\text{tg } \theta = \frac{a}{g}$$

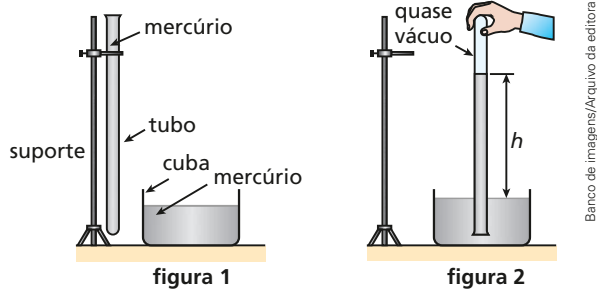
Observe que, aumentando o valor de a , aumenta-se também a $\text{tg } \theta$ e, conseqüentemente, o ângulo θ de inclinação da superfície livre do líquido em relação à horizontal.

10. A pressão atmosférica e o experimento de Torricelli

A **pressão atmosférica** influi de maneira decisiva em muitas situações. Um litro de água, por exemplo, pode ferver em maior ou em menor temperatura, dependendo da pressão atmosférica do local. A cidade de São Paulo, por estar em média a 760 m acima do nível do mar, suporta pressão atmosférica menor que Santos, no litoral. Por esse motivo, em São Paulo a água ferve a 98 °C, aproximadamente, enquanto em Santos ferve a 100 °C.

O cientista italiano Evangelista **Torricelli** (1608-1647), aluno de Galileu, propôs um critério bastante simples para a obtenção experimental do valor da pressão atmosférica. O aparato e o método utilizados por ele estão descritos a seguir.

Considere uma cuba e um tubo, de aproximadamente 1,0 m de comprimento, ambos contendo mercúrio (figura 1).



A princípio, o tubo encontra-se completamente tomado pelo fluido (mercúrio), até sua extremidade aberta.

Veda-se, então, a abertura do tubo e, posicionando-o de boca para baixo, introduz-se parte dele no mercúrio da cuba. Em seguida, destapa-se sua extremidade, tomando-se o cuidado de mantê-la sempre voltada para baixo (figura 2). Com isso, parte do mercúrio do tubo escoo para a cuba, até que seja estabelecido o equilíbrio fluidostático do sistema.

Vamos chamar de μ_{Hg} a massa específica do mercúrio, g o módulo da aceleração da gravidade, p_0 a pressão atmosférica local e h a altura do nível do mercúrio no tubo em relação à superfície livre do mercúrio na cuba (figura 2).

Na figura 3, sejam p_1 e p_2 , respectivamente, as pressões nos pontos 1 e 2.

Pelo fato de o ponto 1 pertencer ao nível livre do mercúrio na cuba e estar exposto diretamente à atmosfera, tem-se:

$$p_1 = p_0$$

No ponto 2, a pressão se deve praticamente à coluna de mercúrio que aí se sobrepõe, pois acima do mercúrio do tubo temos quase o vácuo (apenas vapor de mercúrio muito rarefeito). Desse modo:

$$p_2 = \mu_{\text{Hg}} g h$$

Entretanto, no equilíbrio, as pressões nos pontos 1 e 2 são iguais, pois os referidos pontos pertencem ao mesmo fluido (mercúrio) e estão no mesmo nível (mesma região isobárica).

Assim, $p_1 = p_2$, ou seja:

$$p_0 = \mu_{\text{Hg}} g h$$

Fazendo o experimento de Torricelli ao nível do mar ($g \cong 9,81 \text{ m/s}^2$) e a 0°C , obtém-se para h um valor muito próximo de 76,0 cm. Assim, com $\mu_{\text{Hg}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, calcula-se o valor de p_0 no local:

$$p_0 = 13,6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,760 \text{ m}$$

$$p_0 \cong 1,01 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cong 1,00 \text{ atm}$$

Na prática, para se evitar o incômodo da multiplicação $\mu_{\text{Hg}} g h$, é comum expressar-se a pressão atmosférica diretamente em cm ou mm de mercúrio. Dessa forma, ao nível do mar e a 0°C , diz-se que a pressão atmosférica tem um valor próximo de **76,0 cmHg** ou **760 mmHg**.

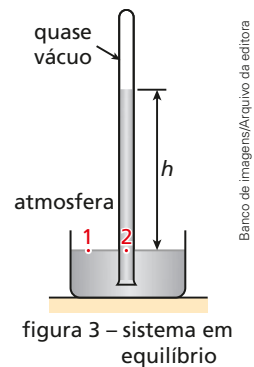


figura 3 – sistema em equilíbrio

NOTA!

O que há de errado com a imagem do *outdoor*?



Esta fotografia mostra um painel publicitário no centro da cidade de São Paulo (SP), em que um jovem parece tomar refrigerante sugando o líquido por meio de um canudinho posicionado na vertical.



A vela que ergue água

No experimento de Torricelli descrito anteriormente, vimos que uma coluna de mercúrio com altura próxima de 76 cm produz em sua base uma pressão capaz de equilibrar a pressão atmosférica. Por outro lado, é possível demonstrar que seria necessária uma coluna líquida de água com altura em torno de 10 m para equilibrar a mesma pressão atmosférica (veja o exercício resolvido na página 623).

O experimento sugerido a seguir propõe o equilíbrio entre a pressão exercida por uma coluna de um líquido aquoso, aliada a uma coluna gasosa, e a pressão atmosférica.

Material necessário

- 1 vela com cerca de 10 cm de altura;
- 1 frasco cilíndrico de vidro transparente e incolor, de preferência de boca larga, tal que possa abrigar com folga a vela. Pode ser uma embalagem de aspargos, palmito, maionese, doces em calda, etc.;
- 1 prato fundo;
- 1 sachê de suco de frutas em pó. Recomendamos suco de uva, que tem uma pigmentação mais escura. Observe que o suco mais escuro favorece a visualização;
- 1 vasilha com água para diluir o suco de frutas em pó;
- Fósforos ou isqueiro para acender a vela.

Procedimento

- I. Dilua o suco de frutas em pó na vasilha com água e, tomando o devido cuidado para não se queimar, acenda a vela. Usando a parafina derretida que surge logo de início, fixe a vela em posição vertical no centro do prato. Despeje cuidadosamente parte do suco contido na vasilha dentro do prato até preencher cerca de 1/3 de sua capacidade.
- II. Em seguida, emborque o frasco com a boca para baixo e introduza a vela acesa em seu interior, de modo a apoiar a boca do frasco no fundo do prato.
- III. Durante um breve intervalo de tempo, observe a vela erguer uma coluna de suco dentro do frasco com redução concomitante no tamanho da chama, que, por fim, irá se extinguir. Com a vela apagada, você perceberá uma situação de **equilíbrio** com a coluna de suco dentro do frasco praticamente estabilizada em relação ao suco contido no prato.



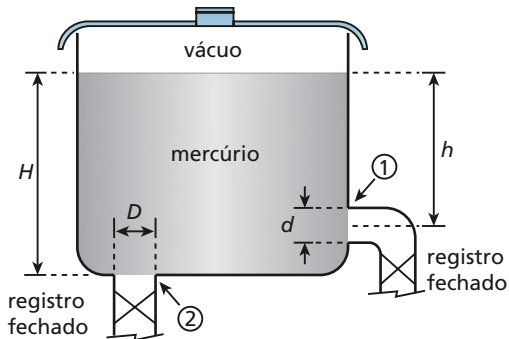
Fotografias: Sérgio Dotta Jr./The Next

Desenvolvimento

1. Por que a vela acaba se apagando quando confinada no interior do frasco? Elabore hipóteses e confronte-as com as de seus colegas.
2. Por que o suco sobe no interior do frasco? Elabore hipóteses e confronte-as com as de seus colegas.
3. Em termos de pressão, qual é a equação para o equilíbrio verificado na situação descrita no procedimento III? Discuta o resultado com seus colegas.

Exercícios Nível 1

16. (Ufop-MG) Considere o reservatório hermeticamente fechado esquematizado na figura:

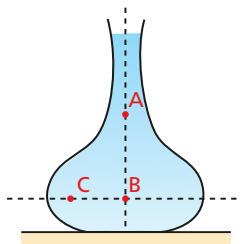


Reprodução/Arquivo da editora

No equilíbrio hidrostático, determine a relação entre as pressões p e P , respectivamente, na entrada dos tubos ① (diâmetro d) e ② (diâmetro D):

- a) $\frac{p}{P} = \frac{d}{D}$ c) $\frac{p}{P} = \frac{h}{H}$ e) $\frac{p}{P} = \frac{dh}{DH}$
 b) $\frac{p}{P} = \frac{D}{d}$ d) $\frac{p}{P} = \frac{H}{h}$

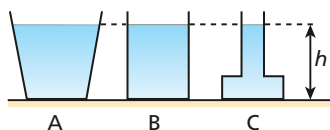
17. (Unesp-SP) Um vaso de flores, cuja forma está representada na figura, está cheio de água. Três posições, **A**, **B** e **C**, estão indicadas na figura.



Reprodução/Arquivo da editora

A relação entre as pressões p_A , p_B e p_C , exercidas pela água respectivamente nos pontos **A**, **B** e **C**, pode ser descrita como:

- a) $p_A > p_B > p_C$ d) $p_A = p_B < p_C$
 b) $p_A > p_B = p_C$ e) $p_A < p_B = p_C$
 c) $p_A = p_B > p_C$
18. Considere os recipientes **A**, **B** e **C** da figura, cujas áreas das paredes do fundo são iguais. Os recipientes contêm o mesmo líquido homogêneo em equilíbrio, e em todos eles o nível livre do líquido atinge a altura h .

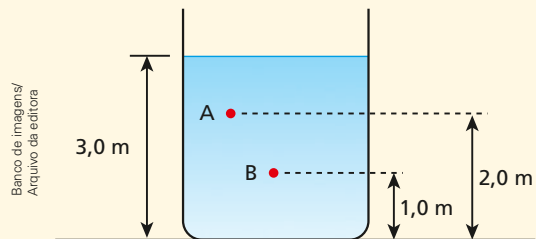


Banco de imagens/Arquivo da editora

Sejam p_A , p_B e p_C e F_A , F_B e F_C , respectivamente, as pressões e as intensidades das forças exercidas pelo líquido nas paredes do fundo dos recipientes **A**, **B** e **C**. Compare:

- a) p_A , p_B e p_C ;
 b) F_A , F_B e F_C .

19. O tanque representado na figura seguinte contém água ($\mu = 1,0 \text{ g/cm}^3$) em equilíbrio sob a ação da gravidade ($g = 10 \text{ m/s}^2$):



Banco de imagens/Arquivo da editora

Determine, em unidades do Sistema Internacional:

- a) a diferença de pressão entre os pontos **B** e **A** indicados;
 b) a intensidade da força resultante devido à água na parede do fundo do tanque, cuja área vale $2,0 \text{ m}^2$.

Resolução:

- a) A diferença de pressão entre os pontos **B** e **A** pode ser calculada pelo Teorema de Stevin:

$$p_B - p_A = \mu gh$$

Fazendo $p_B - p_A = \Delta p$, vem:

$$\Delta p = \mu gh$$

Sendo $\mu = 1,0 \text{ g/cm}^3 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 2,0 \text{ m} - 1,0 \text{ m} = 1,0 \text{ m}$, calculemos Δp :

$$\Delta p = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 1,0$$

$$\Delta p = 1,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$$

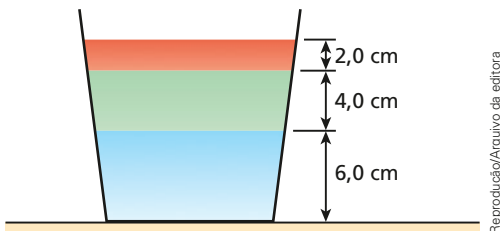
- b) A intensidade F da força resultante que a água exerce na parede do fundo do tanque é dada por:

$$F = p_{\text{fundo}} A = \mu g H A$$

Sendo $H = 3,0 \text{ m}$ e $A = 2,0 \text{ m}^2$, vem:

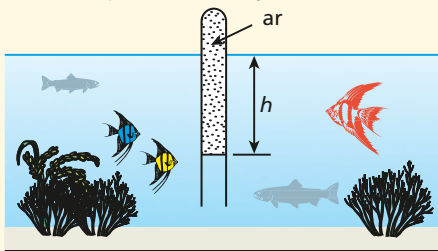
$$F = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 3,0 \cdot 2,0 \therefore F = 6,0 \cdot 10^4 \text{ N}$$

20. (PUC-RJ) Em um vaso em forma de cone truncado, são colocados três líquidos imiscíveis. O menos denso ocupa um volume cuja altura vale 2,0 cm; o de densidade intermediária ocupa um volume de altura igual a 4,0 cm, e o mais denso ocupa um volume de altura igual a 6,0 cm. Supondo que as densidades dos líquidos sejam $1,5 \text{ g/cm}^3$, $2,0 \text{ g/cm}^3$ e $4,0 \text{ g/cm}^3$, respectivamente, responda: qual é a força extra exercida sobre o fundo do vaso devido à presença dos líquidos? A área da superfície inferior do vaso é 20 cm^2 e a área da superfície livre do líquido que está na primeira camada superior vale 40 cm^2 . A aceleração gravitacional local é 10 m/s^2 .



Reprodução/Arquivo da editora

21. Um longo tubo de vidro, fechado em sua extremidade superior, é cuidadosamente mergulhado nas águas de um lago (com massa específica de $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) com seu eixo longitudinal coincidente com a direção vertical, conforme representa a figura.

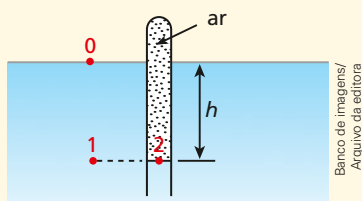


Banco de imagens/Arquivo da editora

No local, a pressão atmosférica vale $p_0 = 1,0 \text{ atm}$ e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Se o nível da água no interior do tubo sobe até uma profundidade $h = 5,0 \text{ m}$, medida em relação à superfície livre do lago, qual é a pressão do ar contido no interior do tubo?

Resolução:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Aplicando o Teorema de Stevin aos pontos 0 e 1, temos:

$$p_1 - p_0 = \mu_{\text{água}} g h \Rightarrow p_1 = \mu_{\text{água}} g h + p_0$$

Concluimos, então, que a pressão total no ponto 1 é constituída por duas parcelas:

$\mu_{\text{água}} g h$, que é a pressão efetiva exercida pela água, e p_0 , que é a pressão atmosférica.

É importante notar que a pressão atmosférica manifesta-se não apenas na superfície livre da água, mas também em todos os pontos do seu interior, como será demonstrado no item 12.

No ponto 2, temos: $p_2 = p_{\text{ar}}$

Como os pontos 1 e 2 pertencem à água e estão situados no mesmo nível horizontal (mesma região isobárica), suportam pressões iguais. Assim:

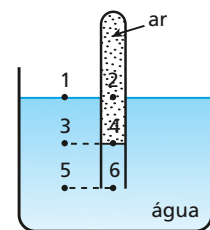
$$p_2 = p_1 \Rightarrow p_{\text{ar}} = \mu_{\text{água}} g h + p_0$$

Sendo $\mu_{\text{água}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $h = 5,0 \text{ m}$ e $p_0 = 1,0 \text{ atm} \approx 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, calculemos p_{ar} :

$$p_{\text{ar}} = (1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 5,0 + 1,0 \cdot 10^5) \text{ Pa}$$

$$p_{\text{ar}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \approx 1,5 \text{ atm}$$

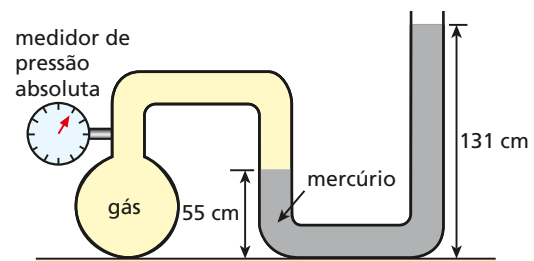
22. (Unesp-SP) Emborça-se um tubo de ensaio em uma vasilha com água, conforme a figura. Com respeito à pressão nos pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, qual das opções abaixo é válida?



Reprodução/Arquivo da editora

- a) $p_1 = p_4$ c) $p_5 = p_4$ e) $p_3 = p_6$
b) $p_1 = p_2$ d) $p_3 = p_2$

23. A medição da pressão atmosférica reinante no interior de um laboratório de Física foi realizada utilizando-se o dispositivo representado na figura:

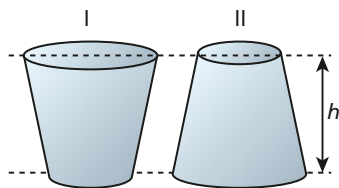


Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que a pressão exercida pelo gás, lida no medidor, é de 136 cmHg , determine o valor da pressão atmosférica no local.

24. (UFRJ) A figura abaixo ilustra dois recipientes de formas diferentes, mas de volumes iguais, abertos e apoiados em uma mesa horizontal. Os dois recipientes têm a mesma altura h e estão cheios, até a borda, com água.

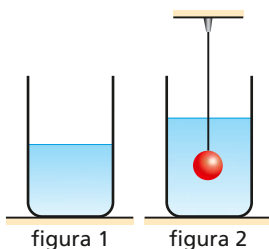
Calcule a razão $|\vec{f}_1|/|\vec{f}_2|$ entre os módulos das forças exercidas pela água sobre o fundo



Reprodução/Arquivo da editora

do recipiente I (\vec{f}_1) e sobre o fundo do recipiente II (\vec{f}_2), sabendo que as áreas das bases dos recipientes I e II valem, respectivamente, A e $4A$.

25. (UFRJ) Um recipiente cilíndrico contém água em equilíbrio hidrostático (figura 1). Introduce-se na água uma esfera metálica maciça de volume igual a $5,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$, suspensa, por um fio ideal de volume desprezível, de um suporte externo. A esfera fica totalmente submersa na água sem tocar as paredes do recipiente (figura 2).



Reprodução/Arquivo da editora

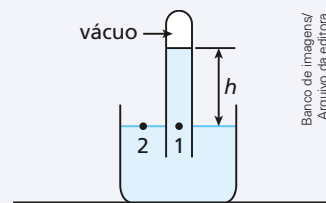
Restabelecido o equilíbrio hidrostático, verifica-se que a introdução da esfera na água provocou um acréscimo de pressão Δp no fundo do recipiente. A densidade da água é igual a $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e a área da base do recipiente é igual a $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Calcule o acréscimo de pressão Δp .

26. Se o experimento de Torricelli para a determinação da pressão atmosférica (p_0) fosse realizado com água ($\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 1,0 \text{ g/cm}^3$) no lugar de mercúrio, que altura da coluna de água no tubo (em relação ao nível livre da água na cuba) faria o equilíbrio hidrostático ser estabelecido no barômetro? Desprezar a pressão exercida pelo vapor de água e adotar, nos cálculos, $g = 10 \text{ m/s}^2$. A pressão atmosférica local vale $p_0 = 1,0 \text{ atm}$.

Resolução:

Na figura ao lado, está representado o barômetro de Torricelli.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Tendo em conta o equilíbrio hidrostático do sistema, podemos afirmar que a pressão exercida pela coluna de água de altura h em sua base ($p_{\text{H}_2\text{O}}$) é igual à pressão atmosférica (p_0).

$$p_1 = p_2 \Rightarrow p_{\text{H}_2\text{O}} = p_0 \Rightarrow \mu_{\text{H}_2\text{O}} g h = p_0$$

Em que:

$$h = \frac{p_0}{\mu_{\text{H}_2\text{O}} g}$$

Sendo $p_0 = 1,0 \text{ atm} \cong 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, calculemos a altura h :

$$h = \frac{1,0 \cdot 10^5}{1,0 \cdot 10^3 \cdot 10} \therefore \boxed{h = 10 \text{ m}}$$

27. (Unesp-SP) O esfigmomanômetro de Riva-Rocci foi um dos primeiros aparelhos desenvolvidos para se medir a pressão arterial. Atualmente, em razão do mercúrio presente nesses aparelhos, eles vêm sendo substituídos por esfigmomanômetros eletrônicos, sem mercúrio, para reduzir impactos ambientais.

Para uma pessoa saudável, a pressão arterial máxima equilibra a coluna de mercúrio a uma altura máxima de 120 mm e a pressão arterial mínima equilibra a coluna de mercúrio a uma altura mínima de 80 mm.

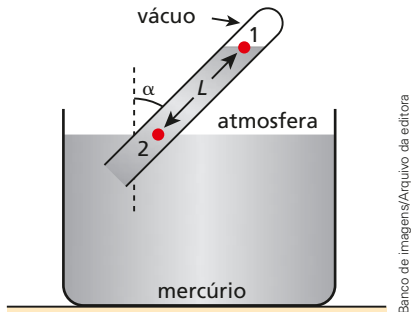
Se o esfigmomanômetro de Riva-Rocci utilizasse água ao invés de mercúrio, quais seriam as alturas máxima e mínima, em milímetros, da coluna de água que seria equilibrada pelos valores máximos e mínimos da pressão arterial de uma pessoa saudável?

Considere que a densidade do mercúrio é 13 vezes a da água.

- a) $H_{\text{mín}} = 1040 \text{ mm}$; $H_{\text{máx}} = 1560 \text{ mm}$
 b) $H_{\text{mín}} = 80 \text{ mm}$; $H_{\text{máx}} = 120 \text{ mm}$

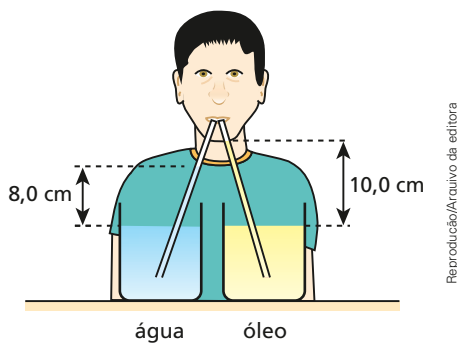
- c) $H_{\min} = 6,2 \text{ mm}$; $H_{\max} = 9,2 \text{ mm}$
 d) $H_{\min} = 1040 \text{ mm}$; $H_{\max} = 2080 \text{ mm}$
 e) $H_{\min} = 860 \text{ mm}$; $H_{\max} = 1560 \text{ mm}$

28. Numa região ao nível do mar, a pressão atmosférica vale $1,01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ e $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Repete-se o experimento de Torricelli, dispondo-se o tubo do barômetro conforme representa a figura.



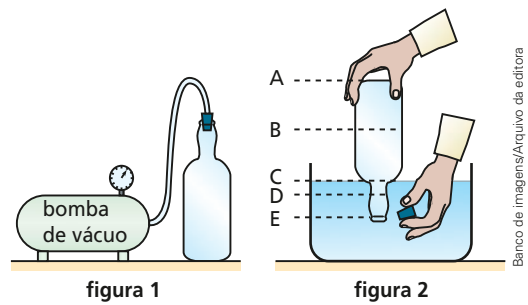
A distância L entre os pontos 1 e 2 vale 151 cm e a massa específica do mercúrio é $\mu = 13,6 \text{ g/cm}^3$. Estando o sistema em equilíbrio, calcule o valor aproximado do ângulo α que o tubo forma com a direção vertical.

29. [Cesgranrio] Um rapaz aspira ao mesmo tempo água e óleo, por meio de dois canudos de refrigerante, como mostra a figura. Ele consegue equilibrar os líquidos nos canudos com uma altura de 8,0 cm de água e de 10,0 cm de óleo.



Qual a relação entre as massas específicas do óleo e da água?

30. Considere o experimento descrito a seguir:
 Figura 1: Uma garrafa de vidro de altura igual a 40 cm é conectada a uma bomba de vácuo, que suga todo o ar do seu interior. Uma rolha de borracha obtura o gargalo, impedindo a entrada de ar.
 Figura 2: A garrafa é emborcada em um recipiente contendo água e a rolha é retirada.

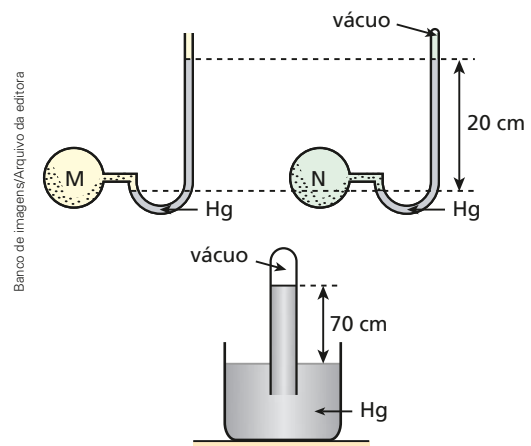


Dados: pressão atmosférica = 1,0 atm; densidade absoluta da água = $1,0 \text{ g/cm}^3$; intensidade da aceleração da gravidade = 10 m/s^2 .

Qual o nível da água na garrafa depois de estabelecido o equilíbrio hidrostático?

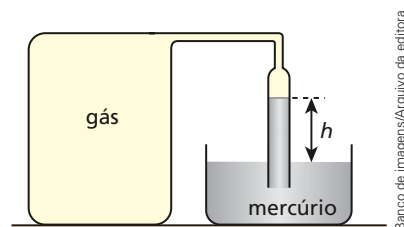
- a) **A** c) **C** e) **E**
 b) **B** d) **D**

31. Os três aparelhos abaixo estão situados no interior da mesma sala:



Fundamentado nas indicações das figuras, determine as pressões exercidas pelos gases contidos em **M** e **N**.

32. O sistema da figura encontra-se em equilíbrio sob a ação da gravidade, cuja intensidade vale 10 m/s^2 :



Considerando $1,0 \text{ atm} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, calcule, em atm, a pressão do gás contido no reservatório.

Dados: pressão atmosférica $p_0 = 1,0 \text{ atm}$; massa específica do mercúrio $\mu = 13,6 \text{ g/cm}^3$; $h = 50 \text{ cm}$.

11. O Teorema de Pascal

Blaise **Pascal** (1623-1662) nasceu em Clermont-Ferrand, França, tendo manifestado, ainda criança, grande habilidade em Matemática. Estudou Geometria, Probabilidade e Física, chegando a importantes descobertas. Aos 19 anos, depois de dois anos de trabalho intenso, terminou a construção de uma revolucionária calculadora mecânica que permitia a realização de operações aritméticas sem que o usuário precisasse saber os respectivos algoritmos. Buscando outros conhecimentos, embrenhou-se na Filosofia e na Teologia, tendo legado uma frase memorável, em que deixou clara sua insatisfação com as coisas meramente racionais: “O coração tem razões que a própria razão desconhece”.

A Blaise Pascal devemos o teorema enunciado a seguir, que encontra várias aplicações práticas.

Um incremento de pressão comunicado a um ponto qualquer de um líquido incompressível em equilíbrio **transmite-se integralmente** a todos os demais pontos do líquido, bem como às paredes do recipiente.

Demonstração

Consideremos o cilindro da figura a seguir, que contém um líquido homogêneo, incompressível e em equilíbrio sob a ação da gravidade. O líquido encontra-se aprisionado por um êmbolo livre, de peso P . Consideremos dois pontos no líquido: o ponto 1, situado imediatamente sob o êmbolo, e o ponto 2, situado a uma profundidade h em relação a 1.

Aplicando o Teorema de Stevin aos pontos 1 e 2, temos:

$$p_2 - p_1 = \mu gh$$

Então:
$$p_2 = p_1 + \mu gh \quad (I)$$

Se um corpo for depositado sobre o êmbolo, a pressão no ponto 1 será incrementada de Δp .

Tendo em vista esse incremento de pressão Δp , a nova pressão no ponto 1 (p'_1) será dada por:

$$p'_1 = p_1 + \Delta p$$

Com base na expressão indicada por (I), podemos constatar que a variação de p_1 acarreta também uma variação em p_2 , já que a parcela μgh não se altera ($h = \text{constante}$, pois o líquido é incompressível). Calculamos, então, a nova pressão (p'_2) exercida no ponto 2:

$$p'_2 = p'_1 + \mu gh$$

$$p'_2 = p_1 + \Delta p + \mu gh \Rightarrow p'_2 = p_1 + \mu gh + \Delta p$$

Lembrando que $p_2 = p_1 + \mu gh$, concluímos que:

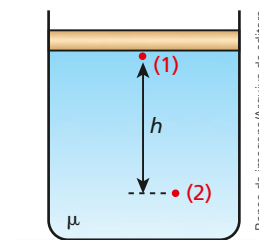
$$p'_2 = p_2 + \Delta p$$

Este último resultado permite-nos verificar que o incremento de pressão Δp , dado ao ponto 1, se transmitiu, manifestando-se também no ponto 2.

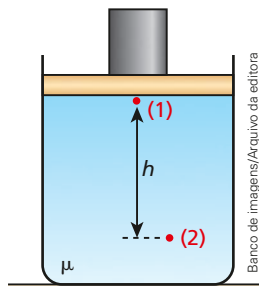


The Bridgeman Art Library/Getty Images

Retrato de Pascal pintado por Philippe de Champaigne no século XVII.



Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

Vejamos a seguir outras situações em que o Teorema de Pascal é determinante no funcionamento de alguns dispositivos.



Cristina Xavier

// Elevador hidráulico de automóveis (prensa hidráulica).



Ron Brown/Grupo Keystone

// Mecanismo hidráulico de abaixamento e recolhimento de trem de pouso de aviões.



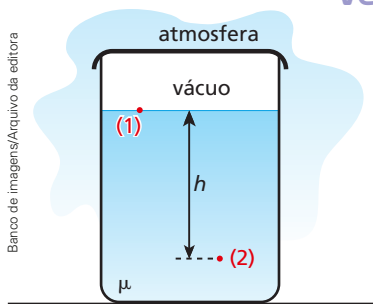
BSIP/Grupo Keystone

// Multiplicadores hidráulicos de forças em retroescavadeiras.

12. Consequência do Teorema de Pascal

Todos os pontos de um líquido em equilíbrio exposto à atmosfera ficam submetidos à pressão atmosférica.

Verificação



Banco de imagens/Arquivo da editora

No esquema ao lado temos um líquido em equilíbrio dentro de um recipiente fechado por uma tampa.

Admitamos, por hipótese, que entre a base da tampa e a superfície livre do líquido reine o vácuo. Sejam os pontos 1 e 2 pertencentes ao líquido, tal que 1 se encontre na superfície livre e 2 a uma profundidade h .

Nas condições descritas, a pressão no ponto 1 é nula, pois a esse ponto sobrepõe-se o vácuo. Assim:

$$p_1 = 0$$

No ponto 2, a pressão deve-se exclusivamente à camada líquida de altura h . Então:

$$p_2 = \mu gh$$

Se destamparmos o recipiente, a pressão no ponto 1 ficará incrementada de $\Delta p = p_0$, em que p_0 é a pressão atmosférica do local. A nova pressão p'_1 no ponto 1 será dada por:

$$p'_1 = \Delta p \Rightarrow p'_1 = p_0$$

Conforme o Teorema de Pascal, entretanto, esse incremento de pressão deverá transmitir-se integralmente também ao ponto 2. Por isso, a nova pressão p'_2 no ponto 2 será dada por:

$$p'_2 = \mu gh + \Delta p \quad \therefore \quad p'_2 = \mu gh + p_0$$

JÁ PENSOU NISTO?

O mergulhador submerso está livre da pressão atmosférica?

Nesse tranquilo mergulho oceânico, a pressão total sentida pelo mergulhador é obtida somando-se a pressão hidrostática que a água exerce sobre ele com a pressão atmosférica, que se manifesta em todos os pontos do líquido.



Kelvin Aitken/Grupo Keystone

Vimos que uma camada (ou coluna) de água de espessura (ou altura) 10 m exerce em sua base uma pressão equivalente a $1,0 \cdot 10^5$ Pa ou 1,0 atm.

Assim, a uma profundidade de 30 m, por exemplo, um mergulhador submerso em um lago detectará uma pressão total de 4,0 atm, sendo 3,0 atm exercidas pela água e 1,0 atm exercida pelo ar externo.

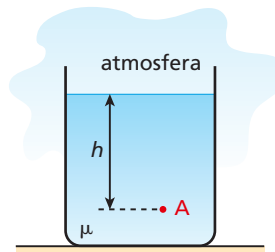
Você seria capaz de determinar a profundidade de um mergulhador que, submerso nas águas de um lago, detectasse uma pressão total de 3,8 atm?

Se você disse 28 m, acertou, pois, das 3,8 atm mencionadas, 2,8 atm são devidas à água, o que corresponde a uma profundidade de 28 m.

13. Pressão absoluta e pressão efetiva

Vamos admitir um recipiente como o representado ao lado, aberto, contendo um líquido homogêneo em equilíbrio sob a ação da gravidade. Seja um ponto **A** situado a uma profundidade h .

Conceituaremos a seguir a **pressão absoluta** e a **pressão efetiva** em **A**.



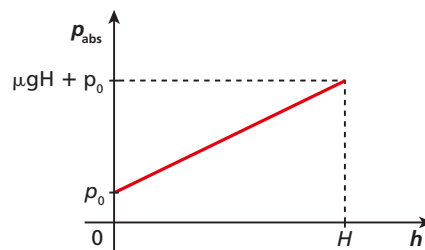
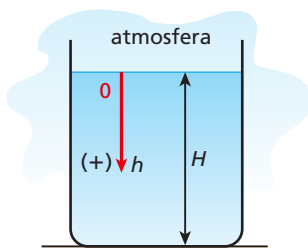
Banco de imagens/Arquivo da editora

Pressão absoluta

É a pressão total verificada no ponto **A**. Em outras palavras, é a soma da pressão exercida pela coluna líquida com a pressão atmosférica (transmitida até esse ponto).

$$p_{abs} = \mu gh + p_0$$

Graficamente temos a seguinte representação:



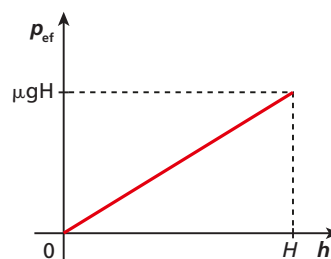
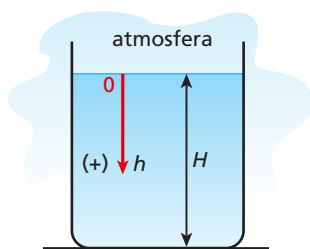
Banco de imagens/Arquivo da editora

Pressão efetiva (ou hidrostática)

É a pressão exercida exclusivamente pela camada líquida que se sobrepõe ao referido ponto:

$$p_{ef} = \mu gh$$

Graficamente temos a seguinte representação:



Banco de imagens/Arquivo da editora

14. Vasos comunicantes

Um líquido em equilíbrio

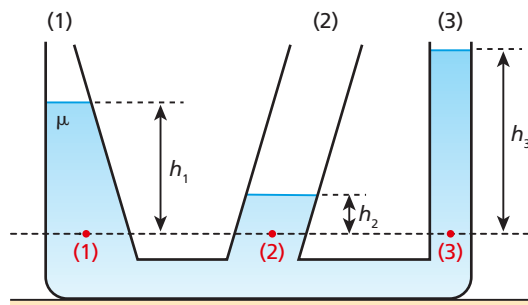
Considere os recipientes da figura a seguir, que se comunicam pelas bases. Admita que um mesmo líquido homogêneo preencha os três ramos existentes no sistema, suposto em equilíbrio. Os ramos têm diâmetros suficientemente grandes, de modo que os efeitos ligados à capilaridade possam ser considerados desprezíveis.

Em relação à linha de nível indicada, sejam h_1 , h_2 e h_3 , respectivamente, as alturas das colunas líquidas nos ramos (1), (2) e (3). As pressões absolutas nos pontos 1, 2 e 3 são calculadas por:

$$p_1 = \mu g h_1 + p_0 \Rightarrow h_1 = \frac{p_1 - p_0}{\mu g}$$

$$p_2 = \mu g h_2 + p_0 \Rightarrow h_2 = \frac{p_2 - p_0}{\mu g}$$

$$p_3 = \mu g h_3 + p_0 \Rightarrow h_3 = \frac{p_3 - p_0}{\mu g}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Nos três casos, p_0 (pressão atmosférica), μ (massa específica do líquido) e g (aceleração da gravidade) são constantes, e, como os pontos 1, 2 e 3 estão no mesmo nível, deve-se ter (pelo Teorema de Stevin) $p_1 = p_2 = p_3$. Assim, poderíamos constatar que:

$$h_1 = h_2 = h_3$$

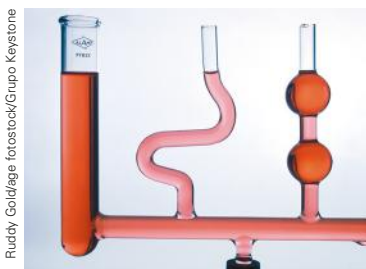
Concluimos, então, que a figura proposta é absurda. Disso, podemos dizer que:

Em um sistema de vasos comunicantes abertos nas extremidades superiores, situados em um mesmo ambiente e preenchidos por um mesmo líquido em equilíbrio, tem-se, em todos os vasos, a **mesma altura** para o nível livre do líquido.

Vamos ver alguns exemplos de vasos comunicantes.

Exemplo 1

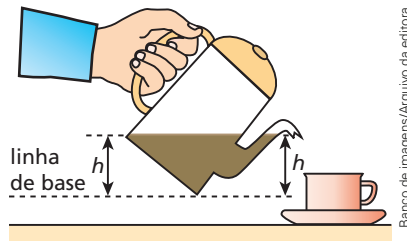
Na fotografia ao lado, o sistema de vasos comunicantes está preenchido com um mesmo líquido. Observe que, independentemente da forma dos tubos, a altura atingida pelo líquido em cada um deles, medida a partir de um determinado nível, é sempre a mesma.



// Fotografia mostrando um sistema de vasos comunicantes.

Exemplo 2

Um bule é um sistema de vasos comunicantes em que o bico do recipiente se comunica com o corpo principal. Ao tomarmos um bule para servir um café, por exemplo, a superfície livre da bebida fica à mesma altura h em relação à linha de base do sistema, tanto no bico como no corpo principal, apresentando-se praticamente plana e horizontal, conforme representa a figura acima.



Banco de imagens/Arquivo da editora

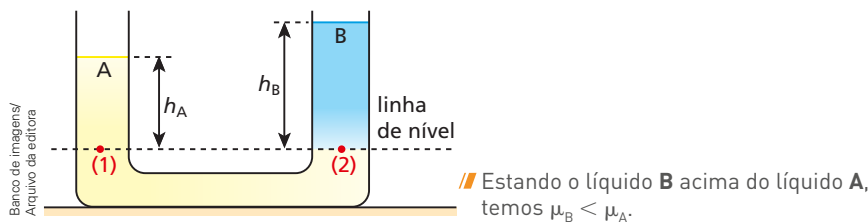
Dois líquidos imiscíveis em equilíbrio

Como já foi citado no início deste tópico, um exemplo tradicional de dois líquidos imiscíveis (que não se misturam) é o da água e do óleo, que não têm afinidade molecular. Colocando essas duas substâncias em um mesmo recipiente, observa-se que o óleo sobe enquanto a água desce. Estabelecido o equilíbrio, nota-se uma nítida superfície de separação entre os dois líquidos.

De acordo com o Teorema de Arquimedes (que será apresentado no item 16):

Em um recipiente em que comparecem vários líquidos imiscíveis em equilíbrio, as várias camadas líquidas apresentam massa específica crescente da superfície para o fundo.

Considere o tubo em **U** da figura a seguir, com os ramos abertos em um mesmo ambiente, contendo dois líquidos imiscíveis, **A** (massa específica μ_A) e **B** (massa específica μ_B), em equilíbrio.



Passando uma linha de nível pela superfície de separação dos líquidos, temos:

h_A = altura da superfície livre de **A**;

h_B = altura da superfície livre de **B**.

Os pontos 1 e 2 pertencentes ao líquido **A**, por estarem no mesmo nível, devem suportar pressões totais iguais. Assim, temos:

$$\text{Ponto 1: } p_1 = \mu_A g h_A + p_0$$

$$\text{Ponto 2: } p_2 = \mu_B g h_B + p_0$$

mas

$$p_1 = p_2$$

Logo:

$$\mu_A g h_A + p_0 = \mu_B g h_B + p_0$$

Assim:

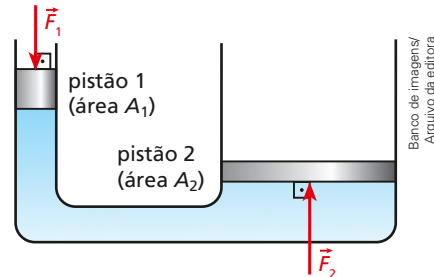
$$\frac{h_B}{h_A} = \frac{\mu_A}{\mu_B}$$

Na situação de equilíbrio, as alturas das superfícies livres são inversamente proporcionais às respectivas massas específicas.

15. Prensa hidráulica

É um dispositivo largamente utilizado, cuja finalidade principal é a multiplicação de forças.

Em sua versão mais elementar, a prensa hidráulica é um tubo em **U**, cujos ramos têm áreas da seção transversal diferentes. Normalmente esse tubo é preenchido com um líquido viscoso (em geral, óleo) aprisionado por dois pistões, conforme indica a figura abaixo.



Ao exercermos uma força \vec{F}_1 no pistão 1, provocamos um incremento de pressão Δp nos pontos do líquido vizinhos da base desse pistão. Esse acréscimo de pressão é transmitido integralmente aos demais pontos do líquido, o que é justificado pelo Teorema de Pascal. Isso significa que os pontos vizinhos da base do pistão 2 também recebem o acréscimo de pressão Δp e, por isso, exercem uma força \vec{F}_2 na base desse pistão.

Temos, então:

$$\text{Pistão 1: } \Delta p = \frac{F_1}{A_1}$$

$$\text{Pistão 2: } \Delta p = \frac{F_2}{A_2}$$

Logo:
$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

Supondo que os pistões 1 e 2 sejam circulares, com raios, respectivamente, iguais a R_1 e R_2 , temos:

$$A_2 = \pi R_2^2 \quad \text{e} \quad A_1 = \pi R_1^2$$

Logo:
$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\pi R_2^2}{\pi R_1^2} \quad \therefore \quad \frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

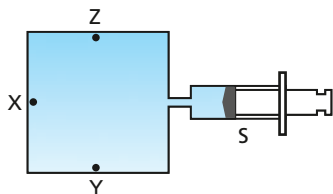
As forças aplicadas nos pistões da prensa hidráulica têm intensidades diretamente proporcionais aos quadrados dos respectivos raios desses pistões. Se, por exemplo, $R_2 = 10R_1$, teremos $F_2 = 100F_1$.

NOTAS!

- Embora a prensa hidráulica multiplique forças, não multiplica trabalho (Princípio de Conservação da Energia). Desprezando dissipações, os trabalhos realizados sobre os dois êmbolos têm valores absolutos iguais.
- O número $\frac{A_2}{A_1}$ ou $\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$ define a **vantagem mecânica** da prensa hidráulica, que é o fator de multiplicação de força oferecido pela máquina.

Exercícios Nível 1

33. (UFSE) Na figura, está representado um recipiente rígido, cheio de água, conectado a uma seringa **S**. **X**, **Y** e **Z** são pontos no interior do recipiente. Se a pressão que o êmbolo da seringa exerce sobre o líquido sofrer um aumento ΔP , a variação de pressão hidrostática nos pontos **X**, **Y** e **Z** será, respectivamente, igual a:



Reprodução/Arquivo da editora

- a) ΔP , ΔP e ΔP .
 b) ΔP , zero e zero.
 c) $\frac{\Delta P}{3}$, $\frac{\Delta P}{3}$ e $\frac{\Delta P}{3}$.
 d) zero, $\frac{\Delta P}{2}$ e $\frac{\Delta P}{2}$.
 e) zero, ΔP e zero.

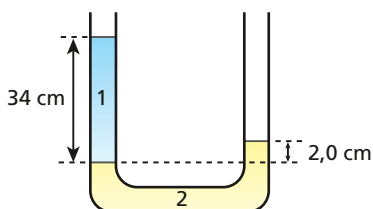
34. (Fuvest-SP) O organismo humano pode ser submetido, sem consequências danosas, a uma pressão de, no máximo, $4,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ e a uma taxa de variação de pressão de, no máximo, $1,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ por segundo. Nessas condições, responda:

- a) qual é a máxima profundidade recomendada a um mergulhador?
 b) qual é a máxima velocidade de movimentação na vertical recomendada para um mergulhador?

Adote os dados:

- pressão atmosférica: $1,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$;
- densidade da água: $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$;
- intensidade da aceleração da gravidade: 10 m/s^2 .

35. (UFRJ) Um tubo em **U**, aberto em ambos os ramos, contém dois líquidos não miscíveis em equilíbrio hidrostático. Observe, como mostra a figura, que a altura da coluna do líquido 1 é de 34 cm e que a diferença de nível entre a superfície livre do líquido 2, no ramo da direita, e a superfície de separação dos líquidos, no ramo da esquerda, é de 2,0 cm.

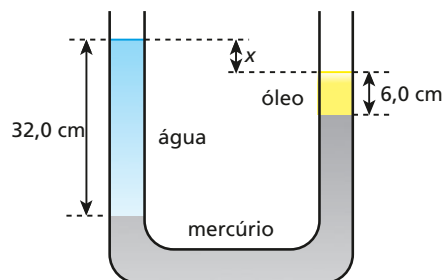


Reprodução/Arquivo da editora

Considere a densidade do líquido 1 igual a $0,80 \text{ g/cm}^3$.

Calcule a densidade do líquido 2.

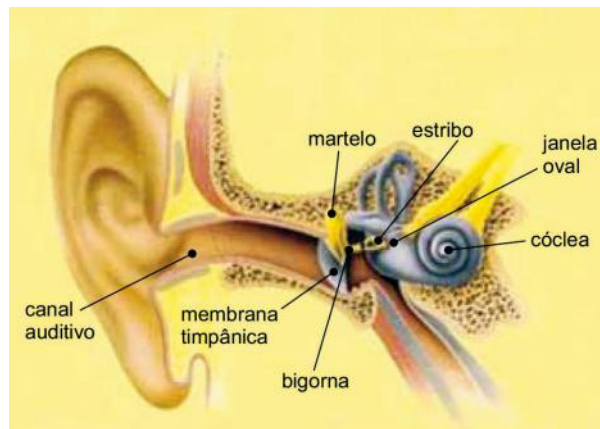
36. Na situação esquematizada fora de escala na figura, um tubo em **U**, longo e aberto nas extremidades, contém mercúrio, de densidade $13,6 \text{ g/cm}^3$. Em um dos ramos desse tubo, coloca-se água, de densidade $1,0 \text{ g/cm}^3$, até ocupar uma altura de 32,0 cm. No outro ramo, coloca-se óleo, de densidade $0,80 \text{ g/cm}^3$, que ocupa uma altura de 6,0 cm.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Qual é o desnível x entre as superfícies livres da água e do óleo nos dois ramos do tubo?

37. (Unesp-SP) No sistema auditivo humano, as ondas sonoras são captadas pela membrana timpânica, que as transmite para um sistema de alavancas formado por três ossos (martelo, bigorna e estribo). Esse sistema transporta as ondas até a membrana da janela oval, de onde são transferidas para o interior da cóclea. Para melhorar a eficiência desse processo, o sistema de alavancas aumenta a intensidade da força aplicada, o que, somado à diferença entre as áreas das janelas timpânica e oval, resulta em elevação do valor da pressão.

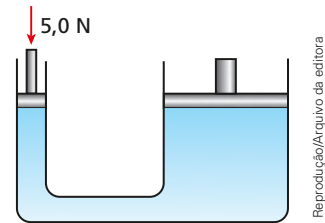


Reprodução/Unesp, 2017.

Considere que a força aplicada pelo estribo sobre a janela oval seja 1,5 vez maior do que a aplicada pela membrana timpânica sobre o martelo e que as áreas da membrana timpânica e da janela oval sejam $42,0 \text{ mm}^2$ e $3,0 \text{ mm}^2$, respectivamente. Quando uma onda sonora exerce sobre a membrana timpânica uma pressão de valor P_T , a correspondente pressão exercida sobre a janela oval vale

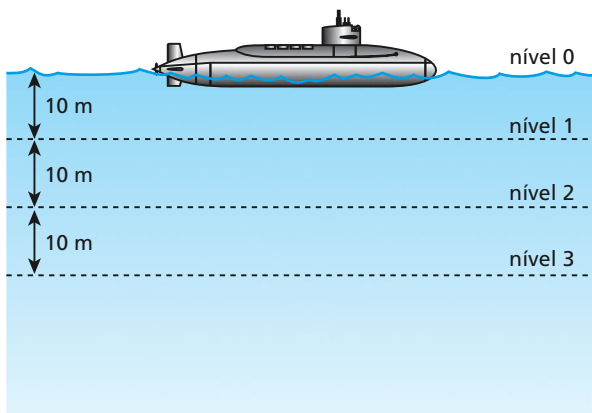
- a) $42P_T$.
- b) $14P_T$.
- c) $63P_T$.
- d) $21P_T$.
- e) $7P_T$.

38. (UFPE) Dois tubos cilíndricos interligados, conforme a figura, estão cheios de um líquido incompressível. Cada tubo tem um pistão capaz de ser movido verticalmente e, assim, pressionar o líquido. Se uma força de intensidade $5,0 \text{ N}$ é aplicada no pistão do tubo menor, conforme a figura, qual a intensidade da força, em newtons, transmitida ao pistão do tubo maior? Os raios internos dos cilindros são de $5,0 \text{ cm}$ (tubo menor) e 20 cm (tubo maior).



Exercícios Nível 2

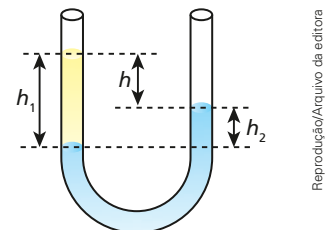
39. Um submarino, inicialmente em repouso em um ponto do nível 0 (superfície da água), indicado na figura, inunda seus compartimentos de lastro e afunda verticalmente, passando pelos níveis 1, 2 e 3. No local, a pressão atmosférica é normal ($1,0 \text{ atm}$) e $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$.



Sabendo que a densidade absoluta da água, suposta homogênea, é de $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e considerando $1,0 \text{ atm} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$:

- a) calcule o acréscimo de pressão registrado pelos aparelhos do submarino quando ele desce de um dos níveis referidos para o imediatamente inferior;
- b) trace o gráfico da pressão total (em atm) em função da profundidade quando o submarino desce do nível 0 ao nível 3.

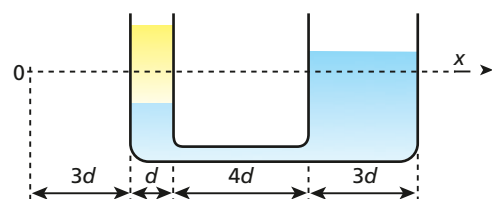
40. (UPM-SP) No tubo em U da figura, de extremidades abertas, encontram-se dois líquidos imiscíveis, de densidades iguais a $0,80 \text{ g/cm}^3$ e $1,0 \text{ g/cm}^3$. O desnível entre as superfícies livres dos líquidos é $h = 2,0 \text{ cm}$.



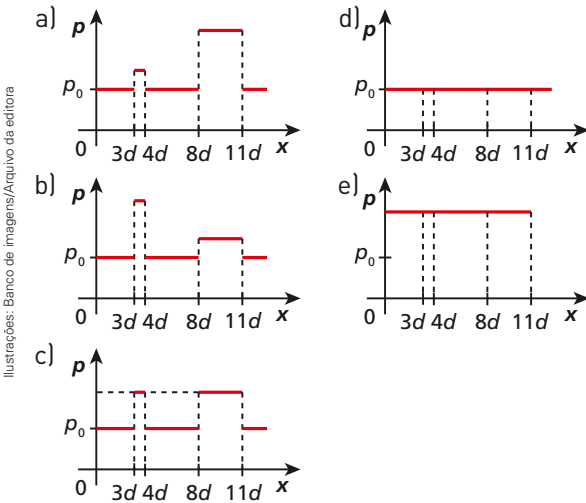
As alturas h_1 e h_2 são, respectivamente:

- a) $4,0 \text{ cm}$ e $2,0 \text{ cm}$.
- b) $8,0 \text{ cm}$ e $4,0 \text{ cm}$.
- c) 10 cm e $8,0 \text{ cm}$.
- d) 12 cm e 10 cm .
- e) $8,0 \text{ cm}$ e 10 cm .

41. No esquema abaixo, representa-se um tubo em U, aberto nas extremidades, contendo dois líquidos imiscíveis em equilíbrio fluidostático sob a ação da gravidade:

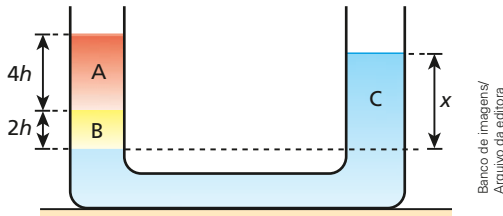


Considere o eixo **Ox** indicado, que atravessa o sistema. Sendo p_0 a pressão atmosférica, qual dos gráficos a seguir representa qualitativamente a variação da pressão absoluta em função da posição x ?



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

42. Na figura, representa-se o equilíbrio de três líquidos não miscíveis **A**, **B** e **C**, confinados em um sistema de vasos comunicantes:



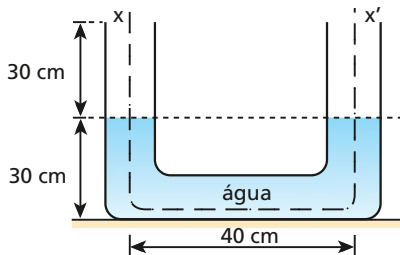
Banco de imagens/Arquivo da editora

Os líquidos **A**, **B** e **C** têm densidades μ_A , μ_B e μ_C , que obedecem à relação:

$$\frac{\mu_A}{1} = \frac{\mu_B}{2} = \frac{\mu_C}{3}$$

Supondo o valor de h conhecido, responda: qual é o valor do comprimento x indicado?

43. Na figura seguinte, é representado um tubo em **U**, cuja secção transversal tem área constante de $4,0 \text{ cm}^2$. O tubo contém, inicialmente, água ($\mu_a = 1,0 \text{ g/cm}^3$) em equilíbrio.

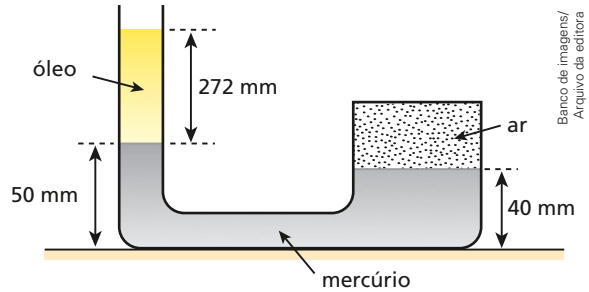


Banco de imagens/Arquivo da editora

Supõe-se que a pressão atmosférica local seja de $1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ e que $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- Determine o máximo volume de óleo ($\mu_0 = 0,80 \text{ g/cm}^3$) que poderá ser colocado no ramo esquerdo do tubo.
- Trace o gráfico da pressão absoluta em função da posição ao longo da linha **xx'**, supondo que no ramo esquerdo do tubo foi colocado o máximo volume de óleo, calculado no item **a**.

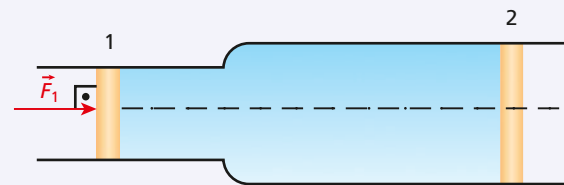
44. Um tubo cilíndrico contendo óleo ($0,80 \text{ g/cm}^3$) e mercúrio ($13,6 \text{ g/cm}^3$) é ligado a um reservatório que contém ar e mercúrio, conforme a figura abaixo:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sendo de 760 mmHg a pressão atmosférica local, qual é, em mmHg , a pressão do ar dentro do reservatório?

45. Na figura seguinte, está representado um recipiente constituído pela junção de dois tubos cilíndricos coaxiais e de eixos horizontais. O recipiente contém um líquido incompressível aprisionado pelos êmbolos 1 e 2, de áreas, respectivamente, iguais a $0,50 \text{ m}^2$ e $2,0 \text{ m}^2$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Empurrando-se o êmbolo 1 para a direita com a força \vec{F}_1 de intensidade 100 kgf , obtém-se, nesse êmbolo, um deslocamento de 80 cm . Desprezando os atritos, determine:

- a intensidade da força horizontal \vec{F}_2 com que o líquido empurra o êmbolo 2;
- o deslocamento do êmbolo 2.

Resolução:

a) Seja Δp o acréscimo de pressão que os pontos do líquido, vizinhos do êmbolo 1, recebem devido à aplicação de \vec{F}_1 . Temos:

$$\Delta p = \frac{F_1}{A_1} \quad (I)$$

Conforme o **Teorema de Pascal**, esse acréscimo de pressão transmite-se a todos os demais pontos do líquido, manifestando-se no êmbolo 2 por uma força \vec{F}_2 , perpendicular ao êmbolo:

$$\Delta p = \frac{F_2}{A_2} \quad (\text{III})$$

Comparando (I) e (III), vem:

$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

Sendo $A_2 = 2,0 \text{ m}^2$, $A_1 = 0,50 \text{ m}^2$ e $F_1 = 100 \text{ kgf}$, calculamos F_2 :

$$F_2 = \frac{2,00}{0,50} \cdot 100 \therefore F_2 = 400 \text{ kgf}$$

b) Ao se deslocar, o êmbolo 1 expulsa do tubo de menor diâmetro um volume de líquido ΔV , dado por:

$$\Delta V = A_1 L_1 \quad (\text{III})$$

Como o líquido é incompressível, esse volume ΔV é integralmente transferido para o tubo de maior diâmetro, provocando no êmbolo 2 um deslocamento L_2 . Temos, então, que:

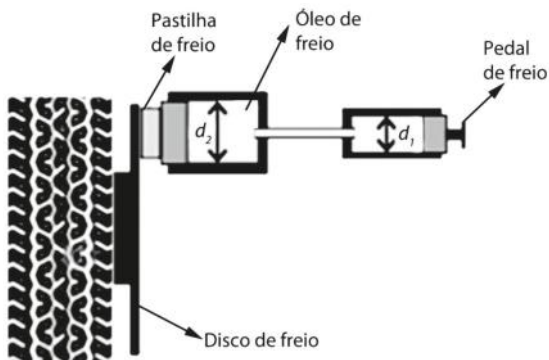
$$\Delta V = A_2 L_2 \quad (\text{IV})$$

De (III) e (IV), vem: $A_2 L_2 = A_1 L_1 \Rightarrow L_2 = \frac{A_1}{A_2} L_1$

Lembrando que $L_1 = 80 \text{ cm}$, vem:

$$L_2 = \frac{0,50}{2,0} \cdot 80 \therefore L_2 = 20 \text{ cm}$$

46. (Unicamp-SP) A figura abaixo mostra, de forma simplificada, o sistema de freios a disco de um automóvel. Ao se pressionar o pedal do freio, este empurra o êmbolo de um primeiro pistão que, por sua vez, através do óleo do circuito hidráulico, empurra um segundo pistão. O segundo pistão pressiona uma pastilha de freio contra um disco metálico preso à roda, fazendo com que ela diminua sua velocidade angular.

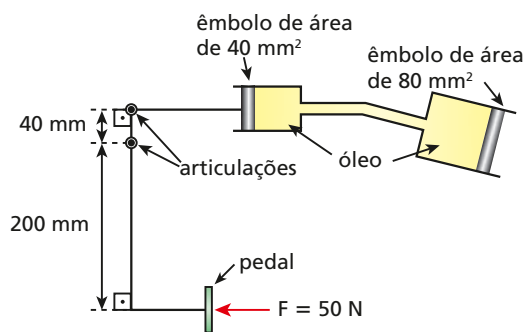


Reprodução/Unicamp, 2015.

Considerando o diâmetro d_2 do segundo pistão duas vezes maior que o diâmetro d_1 do primeiro, qual a razão entre a força aplicada ao pedal de freio pelo pé do motorista e a força aplicada à pastilha de freio?

- a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{2}$. c) 2. d) 4.

47. (UPM-SP) O diagrama abaixo mostra o princípio do sistema hidráulico do freio de um automóvel.

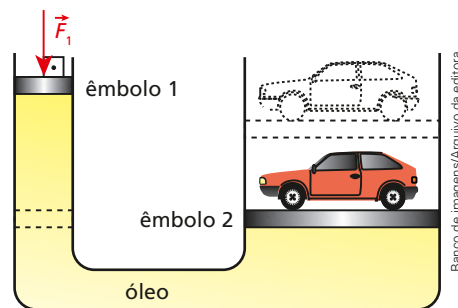


Reprodução/Arquivo da editora

Quando uma força de 50 N é exercida no pedal, a força aplicada pelo êmbolo de área igual a 80 mm^2 é de:

- a) 100 N. d) 400 N.
b) 250 N. e) 500 N.
c) 350 N.

48. Por meio do dispositivo da figura, pretende-se elevar um carro de massa $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$ a uma altura de 3,0 m em relação à sua posição inicial. Para isso, aplica-se sobre o êmbolo 1 a força \vec{F}_1 indicada e o carro sobe muito lentamente, em movimento uniforme.



Banco de imagens/Arquivo da editora

As áreas dos êmbolos 1 e 2 valem, respectivamente, $1,0 \text{ m}^2$ e 10 m^2 . No local, $g = 10 \text{ m/s}^2$. Desprezando a ação da gravidade sobre os êmbolos e sobre o óleo e também os atritos e a compressibilidade do óleo, determine:

- a) a intensidade de \vec{F}_1 ;
b) o trabalho da força que o dispositivo aplica no carro, bem como o trabalho de \vec{F}_1 .

16. O Teorema de Arquimedes

Qual é a força vertical e dirigida para cima que equilibra o peso de um navio permitindo que ele flutue? Que força arrebatadora vertical e dirigida para cima colabora para que uma bola de plástico, mergulhada totalmente na água de uma piscina, quando largada, aflore rapidamente à superfície? Reflita ainda sobre a força vertical e dirigida para cima responsável pela manutenção de um balão suspenso no ar...

Qual a origem dessas forças? Teriam elas algo em comum? Sim, elas advêm do fluido que envolve total ou parcialmente os corpos citados. Essa força vertical e dirigida para cima que os corpos recebem quando imersos na água, no ar ou em outros líquidos ou gases tem fundamental importância na compreensão de fenômenos hidrostáticos. Seu nome é **empuxo**, tendo sido descrita por Arquimedes de Siracusa no século III a.C.

Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) nasceu em Siracusa, na ilha da Sicília, cidade que na época pertencia à Magna Grécia. Em viagem de estudos a Alexandria (Egito), conheceu Euclides e seus discípulos, tornando-se entusiasta de sua obra. Determinou a área da superfície esférica, obteve com precisão o centro de gravidade de várias figuras planas, construiu engenhos bélicos de notável eficiência e também um parafuso capaz de elevar a água de poços e estudou o mecanismo das alavancas. O que realmente o celebrou, no entanto, foi a formulação da lei do empuxo. Morreu em plena atividade, na Primeira Guerra Púnica, durante o massacre realizado pelos romanos quando da tomada de Siracusa.

Veja o enunciado do Teorema de Arquimedes:

Quando um corpo é imerso total ou parcialmente em um fluido em equilíbrio sob a ação da gravidade, ele recebe do fluido uma força denominada **empuxo** (ou impulsão de Arquimedes). Tal força tem sempre direção vertical, sentido de baixo para cima e intensidade igual à do peso do fluido deslocado pelo corpo.

Demonstração

Vamos admitir um líquido homogêneo de massa específica μ_f , contido no recipiente da figura. O sistema acha-se em equilíbrio sob a ação da gravidade (\vec{g}). Seja também um cilindro, de altura h e bases de área A , totalmente imerso no líquido.

Por estar envolvido pelo líquido, o cilindro recebe forças deste, indicadas pelo esquema. As forças horizontais (laterais) equilibram-se duas a duas devido à simetria. Na vertical, entretanto, temos duas forças a considerar: uma, \vec{F}_1 , aplicada no ponto 1, resultante na base superior do cilindro, e outra, \vec{F}_2 , aplicada no ponto 2, resultante na base inferior desse cilindro.

Devido à maior profundidade do ponto 2, devemos ter $|\vec{F}_2| > |\vec{F}_1|$, o que significa que as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 admitem uma resultante vertical e dirigida para cima. Essa resultante que o líquido exerce no cilindro, suposto em repouso, denomina-se **empuxo** (\vec{E}).

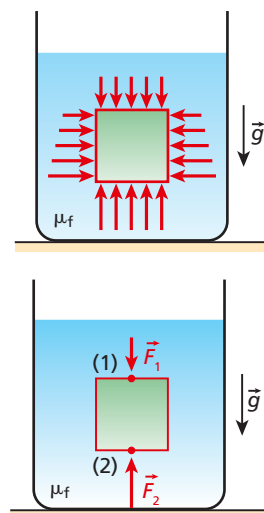
Temos, então, que: $\vec{F}_2 + \vec{F}_1 = \vec{E}$

Em módulo: $F_2 - F_1 = E$ (I)



Giraudon/Grupo Keystone

Arquimedes. Gravura do séc. XVII. Biblioteca Nacional de Paris.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo de editora

A intensidade de \vec{E} pode ser obtida aplicando-se aos pontos 1 e 2 o Teorema de Stevin:

$$p_2 - p_1 = \mu_f g h$$

Sendo $p_2 = \frac{F_2}{A}$ e $p_1 = \frac{F_1}{A}$, vem:

$$\frac{F_2}{A} - \frac{F_1}{A} = \mu_f h g \Rightarrow F_2 - F_1 = \mu_f g h A$$

O produto $h A$ traduz o volume do cilindro imerso no líquido (V). Assim:

$$F_2 - F_1 = \mu_f V g \quad (\text{II})$$

Comparando (I) e (II), segue que:

$$E = \mu_f V g$$

Seja V_{fd} o volume de fluido deslocado em razão da imersão do cilindro. É fundamental notar que esse volume é exatamente igual ao volume do cilindro imerso no fluido.

$$V_{fd} = V$$

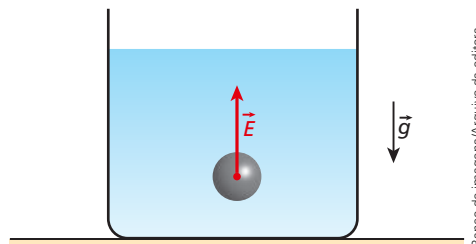
Diante disso, podemos escrever:

$$E = \mu_f V_{fd} g$$

Entretanto, $\mu_f V_{fd} = m_{fd}$ (massa do fluido deslocado). Assim, obtemos, finalmente:

$$E = \mu_f V_{fd} g \Rightarrow E = m_{fd} g \Rightarrow E = P_{fd}$$

Na situação representada na figura abaixo, temos uma esfera em repouso totalmente imersa na água. A resultante das ações da água sobre a esfera é o empuxo \vec{E} , força vertical e dirigida para cima. A intensidade de \vec{E} é igual à do peso do fluido deslocado pela esfera.



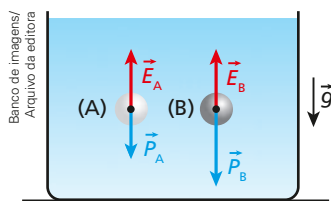
Banco de imagens/Arquivo da editora

É importante notar os seguintes pontos:

- O empuxo só pode ser considerado a resultante das ações do fluido sobre o corpo se este estiver em repouso.
- A linha de ação do empuxo passa sempre pelo centro de gravidade da porção fluida que ocupava o local em que está o corpo.
- O empuxo não tem nenhuma relação geral com o peso do corpo imerso, cuja intensidade pode ser maior que a do empuxo, menor que ela ou igual à do empuxo.
- Para μ_f e g constantes, E é diretamente proporcional a V_{fd} .
Se uma bola for inflada debaixo da água, por exemplo, a intensidade do empuxo exercido sobre ela aumentará. Quanto maior for o volume da bola, maior será o volume de água deslocado e maior será a intensidade do empuxo.
- Para V_{fd} e g constantes, E é diretamente proporcional a μ_f .
Um corpo totalmente imerso na água do mar receberá um empuxo mais intenso que o recebido quando totalmente imerso na água límpida de um lago. Isso ocorre porque a água salgada do mar tem densidade absoluta maior que a da água “doce” do lago.

Exemplo 1

Na figura, temos uma bola de pingue-pongue (**A**) e uma esfera maciça de aço (**B**), de mesmo volume externo.

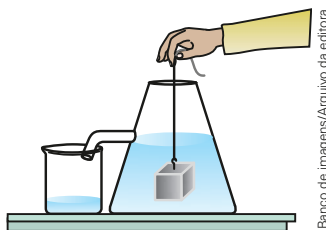


Esses dois corpos estão totalmente imersos na água. É claro que a esfera **B** é mais pesada que a bola **A**, porém, por terem o mesmo volume externo, **A** e **B** deslocam volumes iguais de água e, por isso, recebem **empuxos de mesma intensidade**:

$$|\vec{P}_A| < |\vec{P}_B|, \text{ mas } |\vec{E}_A| = |\vec{E}_B|$$

Exemplo 2

No experimento ilustrado ao lado, quando o bloco (sem porosidades) é introduzido na jarra preenchida com água até o nível do seu bico, certo volume do líquido extravasa, sendo recolhido no recipiente lateral. O volume de água extravasado é igual ao volume do bloco, e a intensidade do empuxo recebido por ele é igual à do peso do líquido deslocado (Teorema de Arquimedes).



Exemplo 3

Na fotografia ao lado, um balão inflado com um gás menos denso que o ar mantém suspensa, em repouso, uma pedra presa por um barbante.

Nesse caso, o sistema apresenta-se em equilíbrio e a intensidade do seu peso total é igual à intensidade do empuxo exercido pelo ar.

É interessante observar que, como a densidade do ar é bem menor que a da água ($\mu_{\text{ar}} \cong 1,3 \text{ kg/m}^3$ e $\mu_{\text{água}} \cong 1000 \text{ kg/m}^3$), para se obter no ar empuxos equivalentes aos obtidos na água é necessário utilizar, no meio gasoso, corpos de grandes volumes. É por isso que os balões atmosféricos são tão grandes.



// Balão inflado mantendo uma pedra suspensa, em repouso.

17. Uma verificação da Lei do Empuxo

Consideremos a situação representada na figura 1, em que se tem uma balança de travessão de braços iguais em equilíbrio. Nessas condições, o peso pendente na extremidade esquerda do travessão tem intensidade igual à do peso pendente na extremidade direita.

Admitamos, agora, a situação representada na figura 2. Introduzindo o corpo de ferro não poroso (dependurado no prato esquerdo) em um recipiente contendo água, verificamos certo desequilíbrio da balança. Isso ocorre porque, ao ser imerso na água, o corpo de ferro recebe desta uma força vertical e dirigida para cima – o empuxo –, que provoca uma redução na intensidade da força que traciona a extremidade esquerda do travessão.

Na situação mostrada na figura 3, o travessão encontra-se novamente em equilíbrio, tendo retornado à sua posição inicial. Para isso, foi necessário reduzir a intensidade do peso pendente à direita, retirando-se um dos massores do prato.

Ilustrações: Banco de imagens/
Arquivo da editora

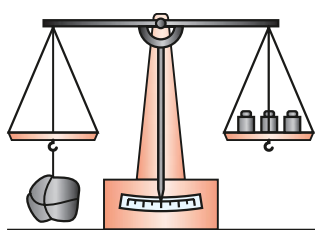


figura 1

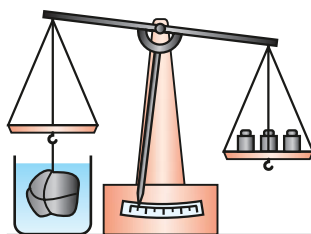


figura 2

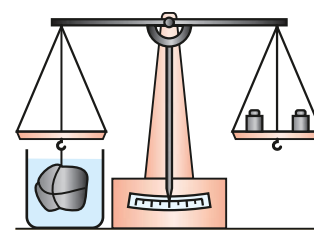


figura 3

Supondo que a retirada de um massor do prato à direita tenha sido suficiente para recolocar o travessão na horizontal, podemos afirmar que a intensidade do peso desse objeto é igual à do empuxo recebido pelo corpo de ferro imerso na água.

Ampliando o olhar

Um banho revelador

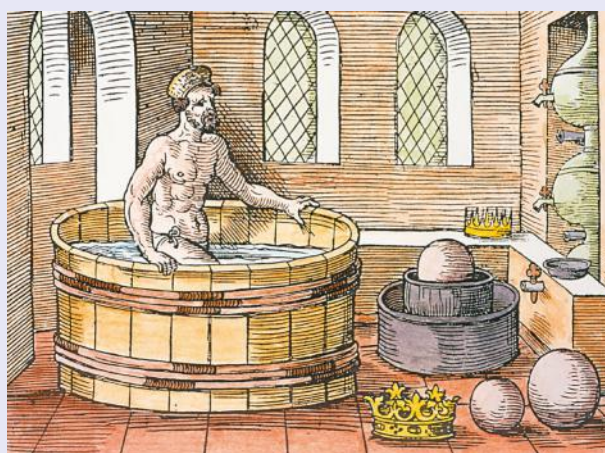
Hierão, tirano de Siracusa, no século III a.C., havia encomendado uma coroa de ouro para homenagear uma divindade, mas suspeitava de que o ourives o enganara, não utilizando ouro puro, conforme havia sido combinado. Ele queria descobrir, sem danificar o objeto, se em sua confecção não teriam sido utilizados outros metais, como, por exemplo, a prata. Só um homem talvez conseguisse resolver a questão: seu amigo Arquimedes – filho de Fídias, o astrônomo –, inventor de vários mecanismos e notabilizado por seus trabalhos em Matemática.

Hierão mandou chamá-lo e pediu-lhe que pusesse fim à sua dúvida. Arquimedes aceitou a incumbência e pôs-se a procurar uma solução para o problema, que lhe ocorreu durante um memorável banho. Enquanto se banhava, observou que o volume de água que se elevava na banheira, ao submergir, era igual ao volume do seu próprio corpo. Ali estava a chave que viria a desvendar o enigma do tirano. No entusiasmo da descoberta, Arquimedes teria saído nu pelas ruas, gritando a quem pudesse ouvir: *Eureka! Eureka!* [Encontrei! Encontrei!].

Agora bastaria aplicar ao problema em questão o método que descobrira. Então ele mediu o volume de água que transbordava de um recipiente totalmente cheio (volume deslocado) quando nele eram mergulhados, sucessivamente, um corpo de ouro de massa igual à da coroa, um corpo de prata de massa igual à da coroa e a própria coroa. Tendo verificado que o volume de água deslocado pela coroa era intermediário entre os outros dois, por análise das densidades, ele concluiu que a coroa não era de ouro puro e, desse modo, também determinou a porcentagem de prata utilizada em sua confecção.

Arquimedes foi um dos maiores gênios de todos os tempos. Incluídos nas suas muitas criações estão os espelhos ustórios (que queimam; que facilitam a combustão): superfícies côncavas refletoras com as quais os defensores de Siracusa teriam queimado a distância – pela “concentração” dos raios solares – navios romanos que sitiavam a região.

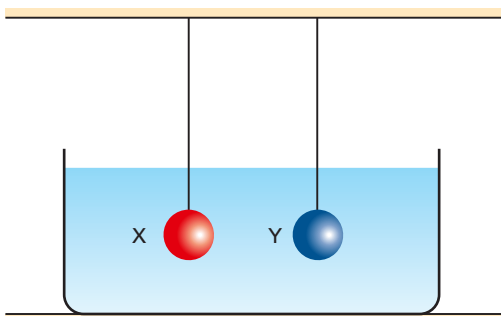
Além disso, Arquimedes foi um exímio conhecedor das leis das alavancas, resumindo a importância desses dispositivos dizendo: “Dê-me uma alavanca e um ponto de apoio e moverei o mundo”.



// Gravura que retrata Arquimedes em seu banho enquanto pensava sobre o problema da coroa de Hierão.

Thinstock/Getty Images

49. As esferas, **X** e **Y**, da figura têm volumes iguais e são constituídas do mesmo material. **X** é oca e **Y**, maciça, estando ambas em repouso no interior de um líquido homogêneo em equilíbrio, presas a fios ideais.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Nessas condições, é correto afirmar que as esferas:

- têm massas iguais;
 - possuem pesos de mesma intensidade;
 - apresentam a mesma densidade;
 - são sustentadas por fios igualmente tracionados;
 - estão submetidas a empuxos iguais.
50. (UFPA) Quando um peixe morre em um aquário, verifica-se que, imediatamente após a morte, ele permanece no fundo e, após algumas horas, com a decomposição, são produzidos gases dentro de seu corpo e o peixe vem à tona (flutua). A explicação correta para esse fato é que, com a produção de gases:
- o peso do corpo diminui, diminuindo o empuxo.
 - o volume do corpo aumenta, aumentando o empuxo.
 - o volume do corpo aumenta, diminuindo o empuxo.
 - a densidade do corpo aumenta, aumentando o empuxo.
 - a densidade do corpo aumenta, diminuindo o empuxo.
51. (FGV-SP) Uma pessoa mergulhou na água do mar gelado de uma praia argentina e desceu até determinada profundidade. Algum tempo depois, ela teve a oportunidade de mergulhar à mesma profundidade na tépida água de uma praia caribenha. Lembrando que a densidade da água varia com a temperatura, é correto afirmar que o empuxo sofrido pela pessoa

- e a pressão exercida pela água sobre ela foram os mesmos tanto na praia argentina como na caribenha.
- foi de menor intensidade na praia caribenha, mas a pressão exercida pela água foi a mesma em ambas as praias.
- foi de maior intensidade na praia caribenha, mas a pressão exercida pela água nessa praia foi menor.
- foi de menor intensidade na praia caribenha, e a pressão exercida pela água nessa praia foi menor também.
- foi de mesma intensidade em ambas as praias, mas a pressão exercida pela água na praia caribenha foi maior.

52. Um balão indeformável de massa 2,0 kg apresenta, num local em que $g = 10 \text{ m/s}^2$, peso específico de 25 N/m^3 . Supondo que o balão esteja totalmente imerso na água ($\mu_a = 1,0 \text{ g/cm}^3$), determine:

- o volume de água deslocado;
- o módulo do empuxo que o balão recebe da água.

Resolução:

- a) Chamando de ρ o peso específico do balão, temos:

$$\rho = \frac{|\vec{P}|}{V} \Rightarrow \rho = \frac{mg}{V}$$

Sendo $\rho = 25 \text{ N/m}^3$, $m = 2,0 \text{ kg}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, calculemos o volume V do balão.

$$25 = \frac{2,0 \cdot 10}{V} \Rightarrow V = \frac{20}{25}$$

$$V = 0,80 \text{ m}^3$$

- b) O empuxo recebido pelo balão tem intensidade E , dada por:

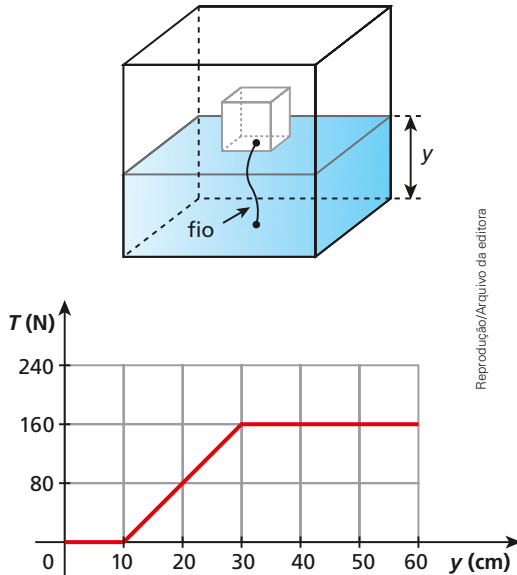
$$E = \mu_a V g$$

Sendo $\mu_a = 1,0 \text{ g/cm}^3 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, vem:

$$E = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 0,80 \cdot 10$$

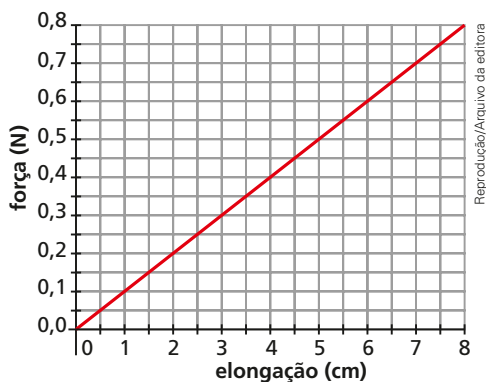
$$E = 8,0 \cdot 10^3 \text{ N}$$

53. (UFPE) Um cubo de isopor, de massa desprezível, é preso por um fio no fundo de um recipiente que está sendo preenchido com um fluido. O gráfico abaixo representa como a intensidade da força de tração no fio varia em função da altura y do fluido no recipiente.



Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

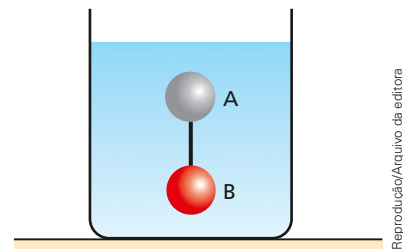
- o comprimento L do fio e a aresta A do cubo, em cm;
 - a densidade do fluido em g/cm^3 .
54. (Unesp-SP) Um bloco de certo material, quando suspenso no ar por uma mola de massa desprezível, provoca uma elongação de 7,5 cm na mola. Quando o bloco está totalmente imerso em um líquido desconhecido, desloca $5,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$ de líquido e a elongação da mola passa a ser 3,5 cm. A força exercida pela mola em função da elongação está dada no gráfico da figura:



Despreze o empuxo do ar e considere $g = 10 \text{ m/s}^2$. Nessas condições, determine:

- a intensidade do empuxo que o líquido exerce no bloco;
- a massa específica (densidade) do líquido em kg/m^3 .

55. (Unip-SP) Para medirmos a densidade do álcool, utilizado como combustível nos automóveis, usamos duas pequenas esferas, **A** e **B**, de mesmo raio, unidas por um fio de massa desprezível. As esferas estão em equilíbrio, totalmente imersas, como mostra a figura, e o álcool é considerado homogêneo.



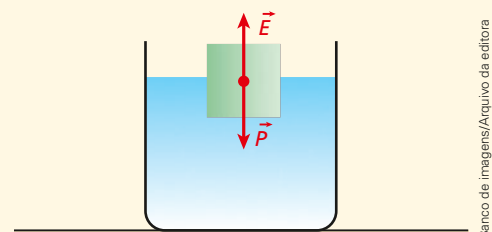
Sendo a densidade de **A** igual a $0,50 \text{ g/cm}^3$ e a densidade de **B** igual a $1,0 \text{ g/cm}^3$, podemos concluir que:

- não há dados suficientes para obtermos a densidade do álcool.
- a densidade do álcool vale $1,5 \text{ g/cm}^3$.
- a densidade do álcool vale $0,50 \text{ g/cm}^3$.
- a densidade do álcool vale $0,75 \text{ g/cm}^3$.
- a densidade do álcool vale $1,0 \text{ g/cm}^3$.

56. Um bloco de madeira flutua inicialmente na água com metade do seu volume imerso. Colocado a flutuar no óleo, o bloco apresenta $\frac{1}{4}$ do seu volume imerso. Determine a relação entre as massas específicas da água (μ_a) e do óleo (μ_o).

Resolução:

Analisemos, inicialmente, o equilíbrio do bloco parcialmente imerso em um fluido de massa específica μ_f :



Para que se verifique o equilíbrio, o empuxo recebido pelo volume imerso do bloco (\vec{E}) deve equilibrar a força da gravidade (\vec{P}):

$$\vec{E} + \vec{P} = \vec{0}$$

Ou, em módulo:

$$E = P$$

Lembrando que $E = \mu_f V_i g$, vem:

$$\mu_f V_i g = P$$

Para a flutuação na água, temos:

$$\mu_a \frac{1}{2} V g = P \quad (I)$$

Para a flutuação no óleo, temos:

$$\mu_o \frac{3}{4} V g = P \quad (II)$$

Comparando (I) e (II), vem:

$$\mu_a \frac{1}{2} V g = \mu_o \frac{3}{4} V g \Rightarrow \mu_a = \frac{3}{2} \mu_o$$

$$\boxed{\frac{\mu_a}{\mu_o} = \frac{3}{2}}$$

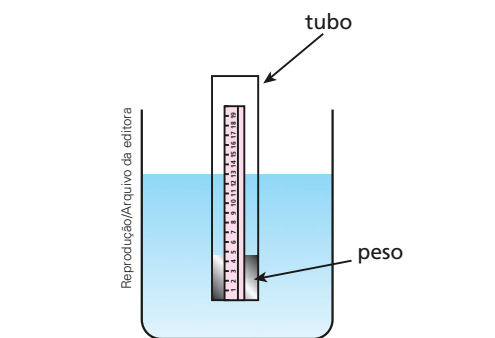
57. Um bloco de gelo (densidade de $0,90 \text{ g/cm}^3$) flutua na água (densidade de $1,0 \text{ g/cm}^3$). Que porcentagem do volume total do bloco permanece imersa?

58. (Unesp-SP) Um bloco de madeira de massa $0,63 \text{ kg}$ é abandonado cuidadosamente sobre um líquido desconhecido, que se encontra em repouso dentro de um recipiente. Verifica-se que o bloco desloca 500 cm^3 do líquido, até que passa a flutuar em repouso.

- a) Considerando $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, determine a intensidade (módulo) do empuxo exercido pelo líquido no bloco.
- b) Qual é o líquido que se encontra no recipiente? Para responder, consulte a tabela seguinte, após efetuar seus cálculos.

Líquido	Massa específica a temperatura ambiente (g/cm^3)
Álcool etílico	0,79
Benzeno	0,88
Óleo mineral	0,92
Água	1,00
Leite	1,03
Glicerina	1,26

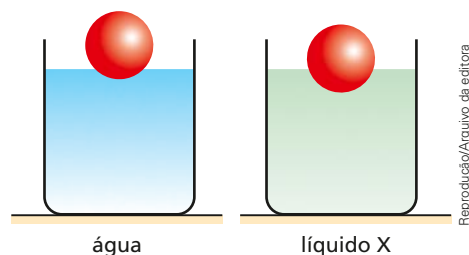
59. (Unifesp) Um estudante adota um procedimento caseiro para obter a massa específica de um líquido desconhecido. Para isso, utiliza um tubo cilíndrico transparente e oco, de seção circular, que flutua tanto na água quanto no líquido desconhecido. Uma pequena régua e um pequeno peso são colocados no interior desse tubo e ele é fechado. Qualquer que seja o líquido, a função da régua é registrar a porção submersa do tubo, e a do peso, fazer com que o tubo fique parcialmente submerso, em posição estática e vertical, como ilustrado na figura a seguir.



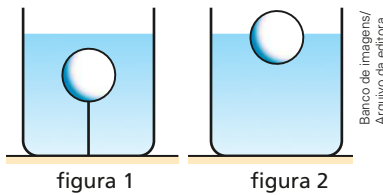
No recipiente com água, a porção submersa da régua é de $10,0 \text{ cm}$ e, no recipiente com o líquido desconhecido, a porção submersa da régua é de $8,0 \text{ cm}$. Sabendo que a massa específica da água é $1,0 \text{ g/cm}^3$, o estudante deve afirmar que a massa específica procurada é:

- a) $0,08 \text{ g/cm}^3$.
- b) $0,12 \text{ g/cm}^3$.
- c) $0,8 \text{ g/cm}^3$.
- d) $1,0 \text{ g/cm}^3$.
- e) $1,25 \text{ g/cm}^3$.

60. (UFC-CE) Um corpo flutua em água com $\frac{7}{8}$ do seu volume emersos. O mesmo corpo flutua em um líquido **X** com $\frac{5}{6}$ do seu volume emersos. Qual a relação entre a massa específica do líquido **X** e a massa específica da água?



61. Uma esfera de isopor de volume $2,0 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$ encontra-se inicialmente em equilíbrio presa a um fio inextensível, totalmente imersa na água (figura 1). Cortando-se o fio, a esfera afloa, passando a flutuar na superfície da água (figura 2).



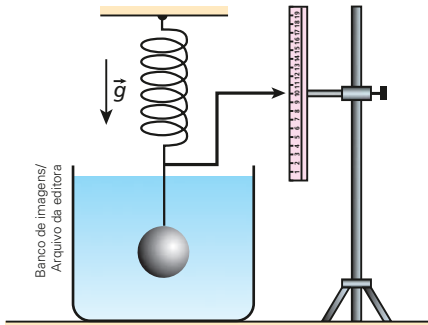
Banco de imagens/
Arquivo da editora

Sabendo que as massas específicas do isopor e da água valem, respectivamente, $0,60 \text{ g/cm}^3$ e $1,0 \text{ g/cm}^3$ e que $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- a intensidade da força de tração no fio na situação da figura 1;
- a porcentagem do volume da esfera que permanece imersa na situação da figura 2.

Exercícios Nível 2

62. Quando a esfera de aço representada na figura é imersa inteiramente na água, observa-se que o ponteiro, rigidamente fixado à mola de constante elástica $K = 1,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$, sofre um deslocamento vertical de $1,0 \text{ cm}$.

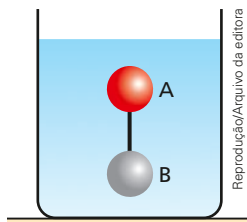


Banco de imagens/
Arquivo da editora

Adote $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$ e admita que a densidade absoluta da água vale $1,0 \text{ g/cm}^3$.

- O deslocamento sofrido pelo ponteiro é para cima ou para baixo?
- Qual o volume da esfera?

63. (UFPB) Dois corpos maciços e uniformes, ligados por um fio de massa e volume desprezíveis, estão em equilíbrio totalmente imersos em água, conforme ilustra a figura ao lado.



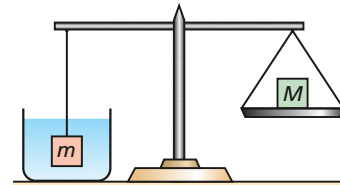
Reprodução/Arquivo da editora

Sabendo que o volume do corpo **A** é $3,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, que sua densidade é $6,0 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$ e que a intensidade do empuxo sobre o corpo **B** vale $8,0 \text{ N}$, determine:

- a intensidade do empuxo sobre o corpo **A**;
- a intensidade da força que traciona o fio;
- a massa do corpo **B**.

Dados: módulo da aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$; densidade da água: $d = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

64. (UFPE) Um bloco de massa $m = 5,0 \cdot 10^2 \text{ g}$ e volume igual a 30 cm^3 é suspenso por uma balança de braços iguais, apoiada em seu centro de gravidade, sendo completamente imerso em um líquido. Sabendo que para equilibrar a balança é necessário colocar uma massa $M = 2,0 \cdot 10^2 \text{ g}$ sobre o prato suspenso pelo outro braço, determine:

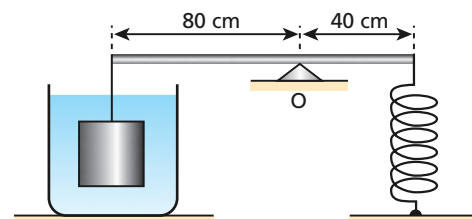


Reprodução/Arquivo da editora

- a intensidade do empuxo que o líquido exerce no bloco;
- a densidade do líquido.

Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e despreze o efeito do ar, bem como o peso do prato da balança.

65. Na situação da figura, uma barra rígida e de peso desprezível está em equilíbrio na posição horizontal. Na extremidade esquerda da barra está pendurado um bloco de ferro (densidade de $8,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$), de volume igual a $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, que está totalmente imerso em água (densidade de $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$). A extremidade direita da barra está presa a uma mola ideal de constante elástica $K = 2,8 \cdot 10^3 \text{ N/m}$.

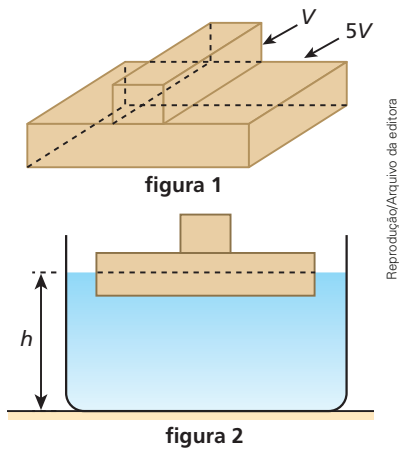


Banco de imagens/Arquivo da editora

Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

- a intensidade do empuxo recebido pelo bloco;
- a deformação da mola.

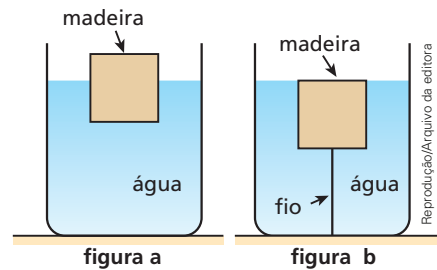
69. (Unesp-SP) Um bloco de madeira, de volume V , é fixado a outro bloco, construído com madeira idêntica, de volume $5V$, como representa a figura 1. Em seguida, o conjunto é posto para flutuar na água, de modo que o bloco menor fique em cima do maior. Verifica-se, então, que $\frac{3}{5}$ do volume do bloco maior ficam imersos e que o nível da água sobe até a altura h , como mostra a figura 2.



Se o conjunto for virado, de modo a flutuar com o bloco menor embaixo do maior:

- a) a altura h diminuirá e $\frac{1}{5}$ do volume do bloco maior permanecerá imerso.
 b) a altura h permanecerá a mesma e $\frac{2}{5}$ do volume do bloco maior permanecerão imersos.
 c) a altura h aumentará e $\frac{3}{5}$ do volume do bloco maior permanecerão imersos.
 d) a altura h permanecerá a mesma e $\frac{4}{5}$ do volume do bloco maior permanecerão imersos.
 e) a altura h aumentará e $\frac{5}{5}$ do volume do bloco maior permanecerão imersos.
70. (UPM-SP) Um cubo de madeira (densidade = $0,80 \text{ g/cm}^3$) de aresta 20 cm flutua em água (massa específica = $1,0 \text{ g/cm}^3$) com a face superior paralela à superfície livre da água. Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, a diferença entre a pressão na face inferior e a pressão na face superior do cubo é:
- a) $1,2 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.
 b) $1,6 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.
 c) $2,4 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.
 d) $3,0 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.
 e) $4,0 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.

71. (UFPI) Um cubo de madeira, de aresta $a = 20 \text{ cm}$, flutua, parcialmente imerso em água, com $\frac{2}{5}$ de cada aresta vertical fora d'água (a densidade da água é $\rho_A = 1,0 \text{ g/cm}^3$), conforme a figura a. Um fio é então amarrado, prendendo a base do cubo ao fundo do recipiente, como na figura b. Se o módulo da aceleração da gravidade é 10 m/s^2 , a intensidade da força tensora no fio é:



- a) 64 N . c) 32 N . e) $8,0 \text{ N}$.
 b) 48 N . d) 16 N .

72. (UFF-RJ) Recentemente, alguns cubanos tentaram entrar ilegalmente nos Estados Unidos. Usaram um caminhão Chevrolet 1951 amarrando-o em vários tambores de óleo vazios, utilizados como flutuadores. A guarda costeira norte-americana interceptou o caminhão próximo ao litoral da Flórida e todos os ocupantes foram mandados de volta para Cuba.



Dados:

- massa do caminhão $M_C = 1560 \text{ kg}$;
 - massa total dos tambores $m_T = 120 \text{ kg}$;
 - volume total dos tambores $V_T = 2400 \text{ litros}$;
 - massa de cada um dos cubanos $m = 70 \text{ kg}$;
 - densidade da água $\rho = 1,0 \text{ g/cm}^3 = 1,0 \text{ kg/litro}$.
- Supondo-se que apenas os tambores são responsáveis pela flutuação de todo o sistema, é correto afirmar que o número máximo de passageiros que o "caminhão-balsa" poderia transportar é igual a:
- a) 8. b) 9. c) 10. d) 11. e) 12.

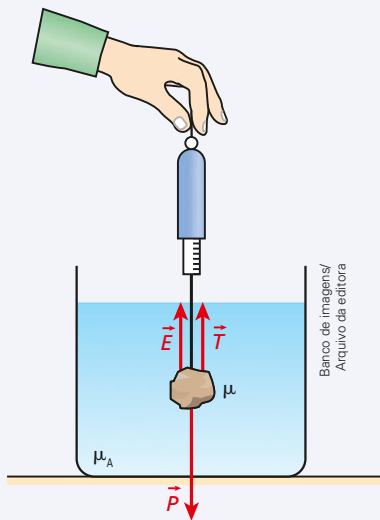
73. Um estudante, utilizando uma balança de mola tipo dinamômetro, faz no ar e na água a pesagem de um corpo maciço, constituído de um metal de massa específica μ .

Sendo P a medida obtida no ar e μ_A a massa específica da água, determine a medida obtida na água.

Resolução:

O peso aparente P_{ap} registrado pela balança corresponde à intensidade da força de tração exercida em suas extremidades.

Com o corpo totalmente imerso na água, temos o esquema de forças da figura a seguir:



\vec{T} = força de tração (peso aparente registrado pela balança);

\vec{E} = empuxo;

\vec{P} = peso.

Na situação de equilíbrio:

$$\vec{T} + \vec{E} + \vec{P} = \vec{0}$$

Em módulo:

$$T + E = P$$

$$T = P - E \Rightarrow P_{ap} = P - \mu_A Vg \quad (I)$$

$$\text{Sendo } \mu = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\mu} \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), vem:

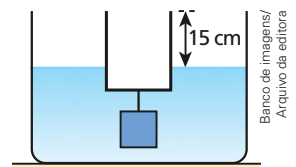
$$P_{ap} = P - \mu_A \frac{m}{\mu} g \Rightarrow P_{ap} = P - \frac{\mu_A}{\mu} P$$

$$P_{ap} = P \left(1 - \frac{\mu_A}{\mu} \right)$$

74. (Unifor-CE) Na construção do Porto de Pecém, foram usados blocos de concreto deslocados por grandes guindastes a fim de empilhá-los na construção do atracadouro. Verificou-se que blocos que pesavam 8000 N, quando suspensos no ar, pesavam 5000 N quando totalmente submersos na água. Se a densidade volumétrica da água é $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, então podemos concluir que a densidade volumétrica do concreto é:

- a) $\frac{5}{3} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
- b) $\frac{8}{3} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
- c) $\frac{5}{2} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
- d) $\frac{13}{3} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
- e) $\frac{8}{5} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

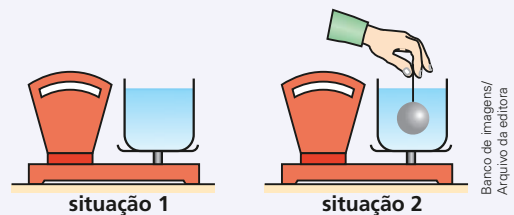
75. O esquema abaixo representa uma lata que flutua em água, de densidade igual a $1,0 \text{ g/cm}^3$. A altura da parte emersa da lata é de 15 cm, e o corpo pendurado ao seu fundo é um bloco de forma cúbica de 10 cm de aresta.



Sabendo que a base da lata é um quadrado de 20 cm de lado, se o bloco for introduzido dentro da lata, a altura da parte emersa:

- a) não será alterada.
- b) passará a ser de 17,5 cm.
- c) passará a ser de 14,5 cm.
- d) passará a ser de 12,5 cm.
- e) não existirá, pois o sistema afundará.

76. Na situação 1 da figura a seguir, tem-se um recipiente com água em equilíbrio sobre o prato de uma balança que, nessas condições, indica 80 N. Na situação 2, uma esfera de chumbo de $2,0 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$ de volume é totalmente imersa na água, permanecendo suspensa por um fio de espessura desprezível sem contactar as paredes do recipiente.



Sabendo que a densidade da água vale $1,0 \text{ g/cm}^3$ e que $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine a indicação da balança no caso da situação 2.

Resolução:

Pelo fato de estar imersa na água, a esfera recebe o empuxo \vec{E} , força vertical e dirigida para cima, que corresponde à ação da água. Conforme a Terceira Lei de Newton, entretanto, ao empuxo \vec{E} deve corresponder uma reação $-\vec{E}$, e isso se verifica. A esfera reage na água com uma força de mesma intensidade que o empuxo, vertical e dirigida para baixo, que provoca aumento na indicação da balança. A esfera está em equilíbrio, totalmente imersa na água. Nessas condições, ela interage com a água, havendo troca de forças de ação e reação.

A água age na esfera, aplicando-lhe a força \vec{E} (empuxo).

A esfera reage na água, aplicando-lhe a força $-\vec{E}$.



Seendo I' e I , respectivamente, as indicações final e inicial da balança, temos:

$$I' = I + E$$

em que a intensidade E da força que a esfera troca com a água é calculada por:

$$E = \mu_a V g$$

Como $\mu_a = 1,0 \text{ g/cm}^3 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$,
 $V = 2,0 \cdot 10^2 \text{ cm}^3 = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$,
vem:

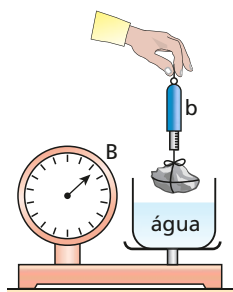
$$I' = I + \mu_a V g$$

$$I' = 80 + 1,0 \cdot 10^3 \cdot 2,0 \cdot 10^{-4} \cdot 10$$

Assim:

$$I' = 82 \text{ N}$$

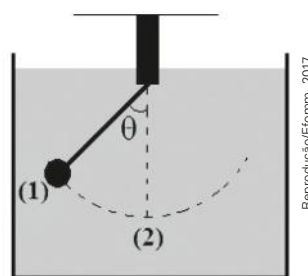
77. (Univás-MG) Um vaso com água está sobre o prato de uma balança (B), a qual indica determinado peso. Acima do vaso, uma pedra está dependurada por um barbante em uma balança de mola (b), do tipo usado por verdureiros. Se abaixarmos (b) de modo a mergulhar a pedra na água, mas sem a encostar no fundo do vaso, o que ocorrerá com as indicações de (B) e (b)?



78. (Efoimm-RJ) Considere uma bolinha de gude de volume igual a 10 cm^3 e densidade $2,5 \text{ g/cm}^3$ presa a um fio inextensível de comprimento 12 cm , com volume e massa desprezíveis. Esse conjunto é colocado no interior de um recipiente com água. Num instante t_0 , a bolinha de gude é abandonada de uma posição (1) cuja direção faz um ângulo $\theta = 45^\circ$ com a vertical conforme mostra a figura a seguir.

O módulo da força de tração no fio, quando a bolinha passa pela posição mais baixa (2) a primeira vez, vale $0,25 \text{ N}$. Determine a energia cinética nessa posição anterior.

Dados: $\rho_{\text{água}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- a) $0,0006 \text{ J}$
- b) $0,006 \text{ J}$
- c) $0,06 \text{ J}$
- d) $0,6 \text{ J}$
- e) $6,0 \text{ J}$

79. (Unifor-CE) Um corpo, constituído de um metal cuja densidade é $7,5 \text{ g/cm}^3$, é abandonado no interior de um líquido de densidade $1,5 \text{ g/cm}^3$. A aceleração que o corpo adquire no interior desse líquido assim que inicia o movimento, em m/s^2 , vale:

Dado: aceleração da gravidade = 10 m/s^2 .

- a) $8,0$.
- b) $6,0$.
- c) $5,0$.
- d) $4,0$.
- e) $2,5$.

80. Uma esfera de massa $1,0 \text{ kg}$ e de volume $9,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ é abandonada na água de um tanque, percorrendo, em movimento vertical e acelerado, $2,5 \text{ m}$ até chegar ao fundo. Sendo a densidade da água igual a $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule depois de quanto tempo a esfera chega ao fundo do tanque. Considere desprezível a força de resistência viscosa da água.

81. (OBF) Uma bola homogênea de densidade igual a $\frac{2}{3}$ da densidade da água é solta de uma altura $h = 10$ m acima do nível da água de uma piscina bem profunda. Despreze o efeito do ar e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- a) Qual a profundidade máxima que a bola atinge em relação à superfície da água? Despreze quaisquer efeitos de turbulência que poderão

ocorrer durante o movimento. Considere que a força que a água aplica na bola seja apenas o empuxo de Arquimedes, isto é, despreze a força de resistência viscosa. Não considere perdas de energia mecânica na colisão da bola com a água.

- b) Qual é o tempo gasto pela bola durante a sua primeira permanência dentro da água?

DESCUBRA MAIS

1. Na construção de barragens e diques, a espessura desses retentores de água cresce uniformemente do topo para a base. Explique por quê.
2. Explique detalhadamente o mecanismo que permite a sucção de uma bebida utilizando-se um canudinho com comprimento próximo de 20 cm.
3. Por que razão os meios gasosos não são tão eficientes para transmitir acréscimos de pressão como os meios líquidos?
4. O que flutua em água com maior porcentagem de volume imerso, um cubo maciço de isopor com 1,0 m de aresta ou um cubo maciço de isopor com 10 cm de aresta? Justifique matematicamente sua resposta.
5. Como as plumas de cisnes, gansos e patos, entre outras aves aquáticas, colaboram para a flutuação dessas aves?
6. Uma das etapas no treinamento de astronautas destinados à Estação Espacial Internacional (EEI) consiste em sua permanência dentro de uma enorme piscina onde são instaladas maquetes, em tamanho natural, de alguns engenhos que estarão presentes na missão. Vestidos em trajes semelhantes aos espaciais, os astronautas são levados a realizar operações delicadas e demoradas, que envolvem o uso de equipamentos sofisticados. Com isso, ficam minimizadas as possibilidades de erros nas situações reais. Por que esses treinamentos são realizados dentro da água?

Faça você mesmo

Apertou a garrafa? Afunda!

Vamos construir um **ludião**? Esse é o nome de um dispositivo bastante simples que, além de divertido, serve para verificar os princípios de Pascal e Arquimedes.

Material necessário

- 1 garrafa de plástico transparente o mais flexível possível (garrafa PET);
- 1 caneta esferográfica;
- alguns cliques de papel.

Procedimento

- I. Retire a carga da caneta, mantendo, porém, a tampinha que veda a extremidade oposta à ponta devidamente alojada. A caneta, de preferência transparente, não poderá ter nenhum orifício ao longo de sua extensão. Se houver algum furo, por menor que seja, este deverá ser vedado com um pedaço de fita adesiva, por exemplo.



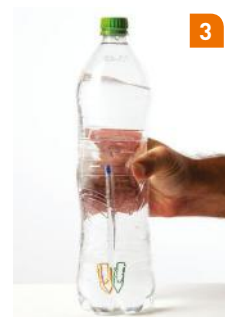
II. Encha a garrafa com água e emborque a caneta dentro do líquido com a extremidade aberta voltada para baixo. Observe que a caneta deverá receber previamente alguns cliques em sua extremidade aberta de modo a permanecer flutuando na água com um pequeno comprimento emerso. Na fotografia 1, aparece o ludião; na 2, sua situação de equilíbrio na água.

III. Apertando-se agora o corpo da garrafa em sua região central, o nível livre da água sobe, comprimindo o ar confinado entre o líquido e a tampa do recipiente. Esse aumento de pressão provocado no ar é então transmitido integralmente a todos os pontos da água (Princípio de Pascal), fazendo com que uma parte do interior da caneta seja invadida por líquido. Isso torna o ludião mais pesado e mais denso que a água; dessa maneira, a intensidade do seu peso supera a intensidade do empuxo exercido pela água e o ludião afunda (fotografia 3). Suprimindo-se a pressão sobre a garrafa, porém, a água sai do interior da caneta e o ludião, agora mais leve e menos denso que no caso anterior, volta a flutuar como na situação inicial.



2

Sergio Dotta Jr./The Next



3

Sergio Dotta Jr./The Next

Desenvolvimento

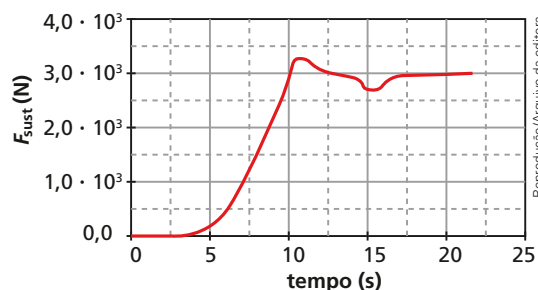
1. Por que o ludião é impelido para cima? Elabore hipóteses e confronte-as com as de seus colegas.
2. Pesquise o funcionamento de imersão e emersão de submarinos. O que o experimento proposto e o funcionamento de submarinos têm em comum? Discuta as semelhanças entre essas duas situações com os seus colegas.

Exercícios Nível 3

82. (UPM-SP) Num processo industrial de pintura, as peças recebem uma película de tinta de 0,1 mm de espessura. Considere a densidade absoluta da tinta igual a $0,8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. A área pintada com 10 kg de tinta é igual a:

- a) 1250 m^2 . c) 125 m^2 . e) 50 m^2 .
b) 625 m^2 . d) 75 m^2 .

83. (Unicamp-SP) O avião estabeleceu um novo paradigma nos meios de transporte. Em 1906, **Alberto Santos-Dumont** realizou em Paris um voo histórico com o 14-Bis. A massa desse avião, incluindo o piloto, era de 300 kg, e a área total das duas asas era de aproximadamente 50 m^2 . A força de sustentação de um avião, dirigida verticalmente de baixo para cima, resulta da diferença de pressão entre a parte inferior e a parte superior das asas. O gráfico representa, de forma simplificada, o módulo da força de sustentação aplicada ao 14-Bis em função do tempo, durante a parte inicial do voo.



Reprodução/Arquivo da editora

- a) Em que instante a aeronave decola, ou seja, perde contato com o chão? Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- b) Qual é a diferença de pressão entre a parte inferior e a parte superior das asa, $\Delta p = p_{inf} - p_{sup}$, no instante $t = 20 \text{ s}$?

84. Não são raras as ocasiões em que o regime de chuvas frustra as expectativas, deixando vazios mananciais e represas. Isso fatalmente compromete o fornecimento de água à população. Foi o que se verificou, especialmente entre 2014 e 2015, na região Sudeste brasileira quando as

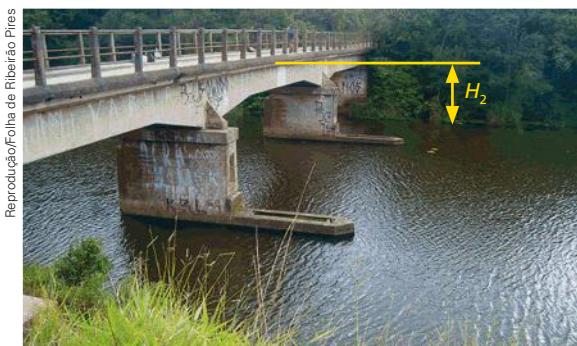
chuvas escassearam, impondo severos racionamentos e medidas emergenciais de captação do precioso líquido.

Suponha que, no período da estiagem, uma pequena pedra de massa $m = 200,0$ g tenha sido abandonada a partir do repouso do parapeito de uma ponte sobre as águas de uma represa, tendo demorado $2,0$ s para atingir a superfície líquida. Após um período de chuvas abundantes, porém, verificou-se que outra pedra, com as mesmas características da primeira, foi abandonada do mesmo local, demorando $1,8$ s para atingir a superfície da água.

Abaixo, aparecem imagens do local de abandono das pedras nos períodos da seca e das chuvas, respectivamente.



Reprodução/Folha de Ribeirão Pires
// Ponte da Estrada Velha, em Ribeirão Pires (SP), durante estação da seca.

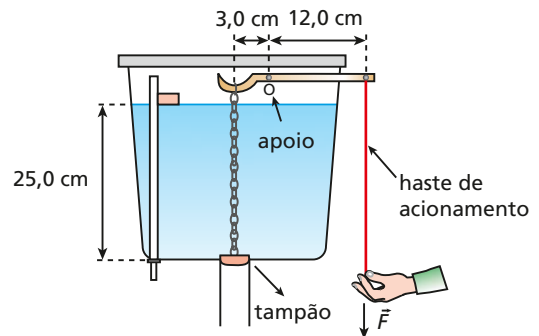


Reprodução/Folha de Ribeirão Pires
// Ponte da Estrada Velha, em Ribeirão Pires (SP), durante estação chuvosa.

Adotando-se para a aceleração da gravidade o valor $g = 10,0$ m/s² e desprezando-se a influência do ar, pede-se determinar:

- a elevação no nível da água na represa, ΔH , do período de seca ao período das chuvas;
- a variação da pressão hidrostática no fundo da represa, Δp , devido à elevação ΔH do nível da água (a densidade absoluta da água é igual a $1,0$ g/cm³);
- o trabalho, τ , no segundo caso em relação ao primeiro, da força gravitacional no transporte das pedras de sua posição inicial no parapeito da ponte até a superfície da água da represa.

85. (OBF) A superfície livre da água em uma caixa de descarga residencial está a uma altura de $25,0$ cm de sua base, onde existe um orifício de diâmetro $4,0$ cm para a saída da água. Um tampão de massa desprezível fecha o orifício, devido à ação das forças de pressão exercidas pela água. A descarga é disparada por meio de uma alavanca, também de massa desprezível, com apoio **O** a $3,0$ cm da vertical sobre o tampão e a $12,0$ cm da haste de acionamento. Um esboço da caixa está na figura a seguir.



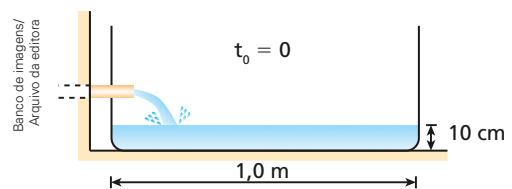
Reprodução/Arquivo da editora

A densidade da água vale $1,0 \cdot 10^3$ kg/m³ e a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10$ m/s².

Adotando-se $\pi \cong 3$, responda:

Qual a intensidade da força vertical \vec{F} necessária para liberar o tampão?

86. No esquema seguinte, está representada, no instante $t_0 = 0$, uma caixa-d'água, cuja base tem área igual a $1,0$ m². A partir desse instante, a caixa passa a ser preenchida com a água proveniente de um tubo, que opera com vazão constante de $1,0 \cdot 10^{-2}$ m³/min.

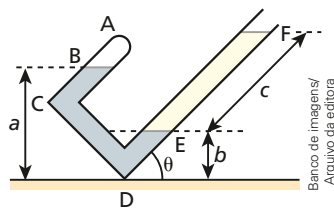


Desprezando-se as perturbações causadas pela introdução da água na caixa, adotando-se $g = 10$ m/s² e considerando-se que a água tem densidade igual a $1,0$ g/cm³, pede-se:

- traçar o gráfico quantitativo da pressão exercida pela água na base do reservatório, desde o instante $t_0 = 0$ até o instante $t = 20$ min (admita que não ocorram transbordamentos);
- calcular, no instante $t = 20$ min, as intensidades das forças resultantes aplicadas pela água nas cinco paredes molhadas da caixa.

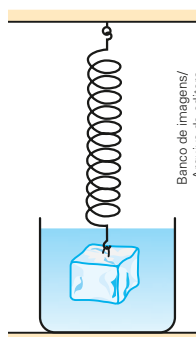
87. Um tubo de vidro, com uma extremidade fechada, **A**, e outra aberta, conforme a figura, apoia-se em **D** sobre um plano horizontal. O trecho **AB** do tubo contém ar, o trecho **BCDE** contém mercúrio e o trecho **EF** contém um líquido que não se mistura nem se combina com o mercúrio. Verifica-se que, girando o tubo em torno do ponto **D** num plano vertical, a pressão do trecho **AB** se torna igual à pressão atmosférica reinante, quando $\theta = 30^\circ$. Nessa posição, tem-se $a = 10$ cm, $b = 8$ cm e $c = 45$ cm.

Sendo a densidade absoluta do mercúrio igual a $13,5 \text{ g/cm}^3$, calcule a densidade do líquido contido no trecho **EF** do tubo.

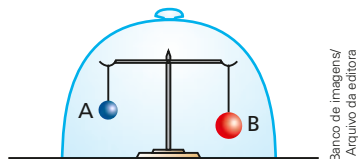


88. Um cubo de gelo a 0°C , preso a uma mola, é totalmente imerso em um recipiente com água a 25°C , conforme representa a figura. À medida que o gelo for se fundindo, podemos afirmar que:

- o comprimento da mola permanecerá constante.
- o comprimento da mola irá aumentando.
- o comprimento da mola irá diminuindo.
- o nível livre da água no recipiente permanecerá inalterado.
- o nível livre da água no recipiente irá subindo.



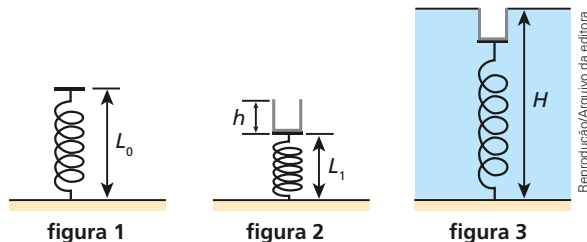
89. O esquema abaixo representa uma balança de travessão de braços iguais confinada no interior de uma campânula, na qual existe ar. A balança está em equilíbrio, tendo em suas extremidades os corpos **A** (volume V_A) e **B** (volume V_B). Sabe-se que $V_A < V_B$.



Se, por um processo qualquer, for retirado o ar de dentro da campânula:

- a balança não sofrerá perturbações.
- o travessão penderá para o lado do corpo **A**.
- o travessão penderá para o lado do corpo **B**.
- os corpos **A** e **B** perderão seus pesos.
- os corpos **A** e **B** receberão empuxos diferentes.

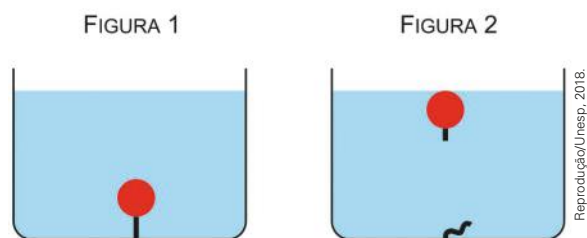
90. [Fuvest-SP] Considere uma mola ideal de comprimento $L_0 = 35$ cm presa no fundo de uma piscina vazia (figura 1). Prende-se sobre a mola um recipiente cilíndrico de massa $m = 750$ g, altura $h = 12,5$ cm e seção transversal externa $S = 300 \text{ cm}^2$, ficando a mola com comprimento $L_1 = 20$ cm (figura 2). Quando, enchendo-se a piscina, o nível da água atinge a altura H , começa a entrar água no recipiente (figura 3).



Dados: $\rho_{\text{água}} = 1,0 \text{ g/cm}^3$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.

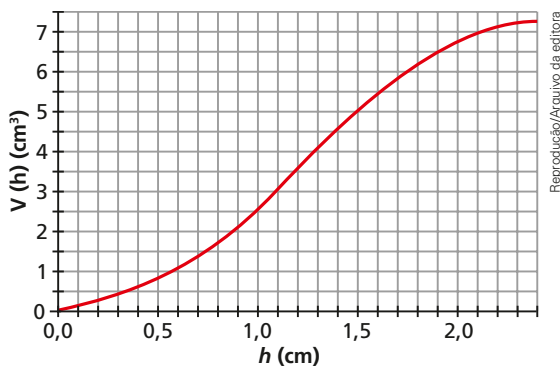
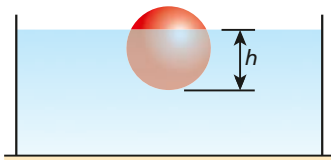
- Qual o valor da constante elástica da mola?
- Qual o valor, em N, da intensidade da força que traciona a mola quando começa a entrar água no recipiente?
- Qual o valor da altura H em cm?

91. [Unesp-SP] Uma esfera de massa 50 g está totalmente submersa na água contida em um tanque e presa ao fundo por um fio, como mostra a figura 1. Em dado instante, o fio se rompe e a esfera move-se, a partir do repouso, para a superfície da água, aonde chega $0,60$ s após o rompimento do fio, como mostra a figura 2.



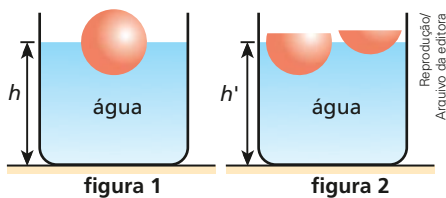
- Considerando que, enquanto a esfera está se movendo no interior da água, a força resultante sobre ela é constante, tem intensidade $0,30$ N, direção vertical e sentido para cima, calcule, em m/s, a velocidade com que a esfera chega à superfície da água.
- Considerando que apenas as forças peso e empuxo atuam sobre a esfera quando submersa, que a aceleração gravitacional seja 10 m/s^2 e que a massa específica da água seja $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, calcule a densidade da esfera, em kg/m^3 .

92. (Unicamp-SP) Uma esfera de raio 1,2 cm e massa 5,0 g flutua sobre a água, em equilíbrio, deixando uma altura h submersa, conforme a figura. O volume submerso como função de h é dado no gráfico. Sendo a densidade da água $1,0 \text{ g/cm}^3$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$:



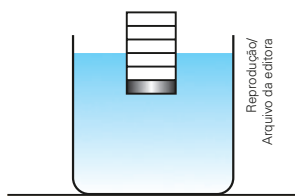
- a) calcule o valor de h no equilíbrio;
 b) ache a intensidade da força vertical para baixo necessária para afundar a esfera completamente.

93. (UFRJ) Uma esfera maciça flutua na água contida em um recipiente. Nesse caso, a superfície livre da água encontra-se a uma altura h do fundo do recipiente, como mostra a figura 1.



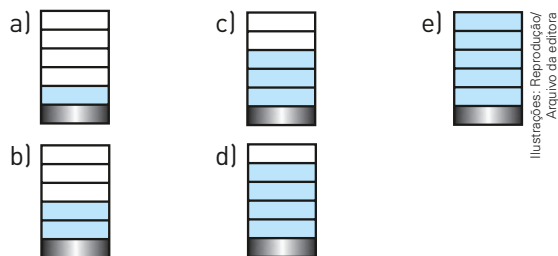
Corta-se a esfera em dois pedaços que, quando postos de volta na água, também flutuam, como mostra a figura 2. Nesse caso, a superfície livre da água encontra-se a uma altura h' do fundo do recipiente. Verifique se $h' > h$, $h' = h$ ou $h' < h$. Justifique.

94. (Fuvest-SP) Um recipiente cilíndrico vazio flutua em um tanque de água com parte de seu volume submerso, como na figura ao lado.



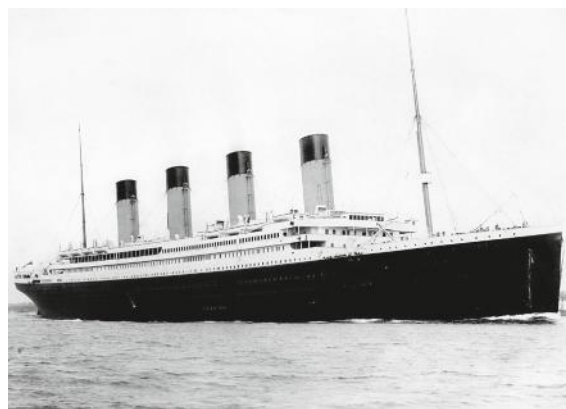
O recipiente possui marcas graduadas igualmente espaçadas, paredes laterais de volume desprezível e um fundo grosso e pesado.

Quando o recipiente começa a ser preenchido, lentamente, com água, a altura máxima que a água pode atingir em seu interior, sem que ele afunde totalmente, é mais bem representada por:



95. Um iceberg que flutua na água do mar é extremamente perigoso para as embarcações que navegam ao seu redor, pois a maior parte da água sólida que o constitui situa-se abaixo da superfície livre do mar. O gelo escondido pode danificar um navio que se encontra a uma distância considerável do gelo visível.

A colisão contra um iceberg levou o navio inglês RMS Titanic a pique com mais de 2 000 pessoas a bordo. O naufrágio dessa embarcação, na noite de 14 de abril de 1912, constitui um dos maiores desastres marítimos da história em tempos de paz.



O Titanic afundou logo em sua viagem inaugural, de Southampton a Nova York. Os destroços desse grande navio foram localizados a 3800 m de profundidade a 650 km a sudeste da ilha de Terra Nova, no Canadá.

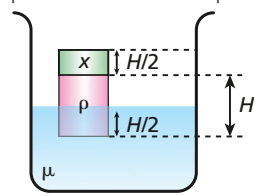
Considere:

- Pressão atmosférica: $1,0 \text{ atm} \cong 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$;
- Intensidade da aceleração da gravidade: 10 m/s^2 ;
- Densidade absoluta da água do mar: 1040 kg/m^3 ;
- Densidade absoluta do gelo de um iceberg: 910 kg/m^3 ;
- Massa estimada do Titanic com sua carga: 52000 t.

Com base nas informações contidas no texto, responda:

- Que pressão total, p , em sua superfície externa deve suportar uma sonda submarina adaptada para grandes profundidades ao atingir os destroços do Titanic?
- Qual o volume imerso, V_i , do navio quando em navegação normal?
- Que percentual, P , do volume de um iceberg flutuante na água do mar permanece emerso (fora da água)?

96. (UFF-RJ) Um cilindro, formado por duas substâncias de massas específicas x e ρ , flutua em equilíbrio na superfície de um líquido de massa específica μ na situação representada na figura. A massa específica x pode ser obtida em função de μ e ρ por meio da expressão:

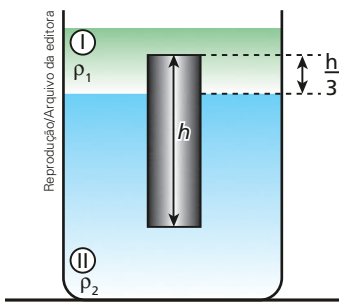


Reprodução/Arquivo da editora

- $2\mu + \rho$
- $\frac{\mu}{2} + \rho$
- $\frac{\mu}{2} - \rho$
- $\mu - 2\rho$
- $\mu + 2\rho$

97. (ITA-SP) Uma esfera sólida e homogênea de volume V e massa específica ρ repousa totalmente imersa na interface entre dois líquidos imiscíveis. O líquido de cima tem massa específica ρ_c e o de baixo, ρ_b , tal que $\rho_c < \rho < \rho_b$. Determine a fração imersa no líquido superior do volume da esfera.

98. (Fuvest-SP) Um recipiente contém dois líquidos, I e II, de massas específicas (densidades) ρ_1 e ρ_2 , respectivamente. Um cilindro maciço de altura h encontra-se em equilíbrio, na região da interface entre os líquidos, como mostra a figura.



Reprodução/Arquivo da editora

Podemos afirmar que a massa específica do material do cilindro vale:

- $\frac{(\rho_1 + 2\rho_2)}{2}$
- $\frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2}$
- $\frac{(2\rho_1 + \rho_2)}{3}$
- $\frac{(\rho_1 + 2\rho_2)}{3}$
- $\frac{2(\rho_1 + \rho_2)}{3}$

99. Um corpo aparenta ter massa de 45 g no ar e de 37 g quando totalmente imerso na água (massa específica de $1,0 \text{ g/cm}^3$). Sabendo que a massa específica do material de que é feito o corpo vale $9,0 \text{ g/cm}^3$, calcule o volume da cavidade que, certamente, deve existir no corpo. Considere desprezível o empuxo do ar, bem como o ar existente na cavidade do corpo.

100. No mar Morto, todas as pessoas flutuam!

De fato, nesse imenso lago de 650 km^2 de área superficial a água é tão salgada, e com densidade absoluta tão elevada, que qualquer pessoa pode se manter boiando confortavelmente, sem esforço algum, mesmo sem saber nadar.



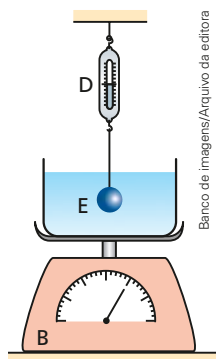
irspphoto/Shutterstock

O mar Morto é uma das maiores depressões do mundo, estando cerca de 430 m abaixo do nível médio dos oceanos. Suas águas, referidas em textos bíblicos, são abastecidas pelo rio Jordão, que serve de fronteira natural entre Israel e a Jordânia. A salinidade dessas águas é tão elevada que nenhuma espécie de peixe ou alga sobrevive aos 30 g de sal e outros minerais diluídos por 100 mL de solução. Daí a denominação: mar Morto. Rochas e cristalizações de sal mineral são comuns nas bordas desse imenso reservatório.

- Admita que uma pessoa de densidade $1,05 \text{ g/cm}^3$ esteja flutuando nas águas do mar Morto, de densidade $1,16 \text{ g/cm}^3$. Que porcentagem do volume do corpo dessa pessoa permanecerá emersa?
- Suponha que uma balsa em forma de paralelepípedo retângulo, cujas dimensões são $10,0 \text{ m} \times 20,0 \text{ m} \times 0,4 \text{ m}$, esteja navegando nas águas do rio Jordão (densidade $1,00 \text{ g/cm}^3$) com calado (comprimento submerso) igual a 23,2 cm. Qual será o calado dessa balsa se passar a navegar nas águas do mar Morto?
- Para retomar o calado verificado no rio Jordão, a balsa deverá, no mar Morto, receber ou descartar carga? De quantos kN será essa variação de carga? Adote $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

101. Um barqueiro dispõe de uma chata que permite o transporte fluvial de cargas até 10 000 N. Ele aceitou um trabalho de transporte de um lote de 50 barras maciças de ferro (10 g/cm^3) de 200 N cada. Por um erro de contagem, a firma enviou 51 barras. Não querendo perder o freguês, mas também procurando não ter prejuízo com duas viagens, o barqueiro resolveu amarrar certo número n de barras embaixo do barco, completamente submersas. Qual deve ser o número n mínimo para que a travessia das 51 barras seja feita numa só viagem? Densidade da água: $1,0 \text{ g/cm}^3$.

102. Na montagem experimental ao lado, o dinamômetro **D** e a balança **B** têm escalas calibradas em kgf. No local, a gravidade é normal. A esfera **E**, de 20,0 kg de massa e volume igual a 2,40 litros, encontra-se em equilíbrio totalmente imersa na água (densidade de $1,00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$).



A esfera, inicialmente sustentada pelo fio ideal, não toca as paredes do frasco. Sabendo que o peso do conjunto frasco-água vale 40,0 kgf:

a) determine as indicações de **D** e de **B**;

b) calcule a nova indicação de **B** supondo que o fio que sustenta **E** seja cortado (admita **E** em repouso no fundo do frasco).

103. (PUC-PR) Uma pessoa em pé dentro de uma piscina se sente "mais leve" devido à redução de seu peso aparente dentro da água. Uma modalidade esportiva que se beneficia deste efeito é a hidroginástica. A força normal que o piso da piscina exerce sobre os pés de uma pessoa é reduzida produzindo baixo impacto durante o exercício. Considere uma pessoa em pé dentro de uma piscina rasa com 24% do volume de seu corpo sob a água. Se a densidade relativa da pessoa for 0,96, qual a redução percentual da força normal que o piso horizontal exerce sobre a pessoa dentro da água em relação ao piso fora da água?

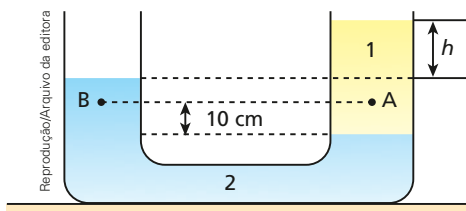
a) 15% b) 20% c) 25% d) 30% e) 35%

104. Um corpo constituído de um material de peso específico de $2,4 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$ tem volume externo de $2,0 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$. Abandonado no interior da água (densidade de $1,0 \text{ g/cm}^3$), ele move-se verticalmente, sofrendo a ação de uma força resistente cuja intensidade é dada pela expressão $F_r = 56v$ [SI], em que v é o módulo de sua velocidade. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule a velocidade-limite do corpo, isto é, a máxima velocidade atingida em todo o movimento.

Para raciocinar um pouco mais

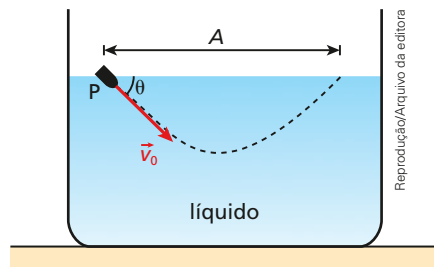
105. (FMJ-SP) O sistema de vasos comunicantes representado na figura contém dois líquidos imiscíveis, 1 e 2, de densidades ρ_1 e ρ_2 , respectivamente. A diferença de pressão entre os pontos **A** e **B** é igual a $1,0 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ e a densidade do líquido mais denso é igual a $2,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.



a) Determine a densidade do líquido menos denso.
b) Estabeleça a relação entre a distância da superfície de separação dos líquidos e a superfície livre de cada líquido e o desnível h .

106. (Aman-RJ) Mergulha-se a boca de uma espingarda de rolha no ponto **P** da superfície de um líquido de densidade $1,50 \text{ g/cm}^3$ contido em um tanque. Despreze o atrito viscoso e considere que no local a aceleração da gravidade tem módulo $10,0 \text{ m/s}^2$. O cano da espingarda forma um ângulo (θ) de 45° abaixo da horizontal.

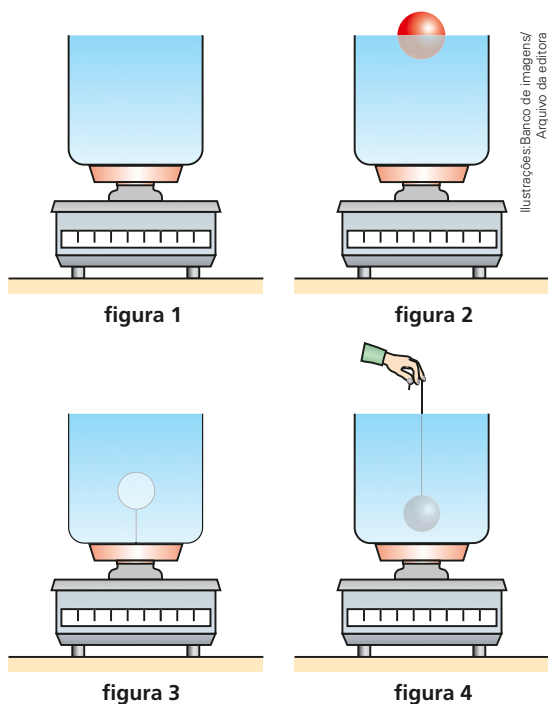


Supondo-se que a velocidade inicial (\vec{v}_0) da rolha tenha módulo igual a $6,0 \text{ m/s}$ e que sua densidade seja igual a $0,60 \text{ g/cm}^3$, pode-se afirmar

que a rola irá aflorar à superfície da água a uma distância (A) do ponto P igual a:

- a) 1,4 m.
- b) 1,8 m.
- c) 2,4 m.
- d) 2,5 m.
- e) 2,8 m.

107. Nas quatro situações esquematizadas a seguir, um mesmo recipiente contém água até a boca e está em repouso sobre a plataforma de uma balança. Na figura 1, apenas o líquido preenche o recipiente; na figura 2, uma esfera de madeira flutua na superfície livre da água; na figura 3, uma esfera maciça de isopor (menos densa que a água) está presa ao fundo do recipiente por meio de um fio inextensível de massa desprezível, e, na figura 4, uma esfera também maciça de aço (mais densa que a água) é mantida em equilíbrio, totalmente submersa, presa em um fio ideal.

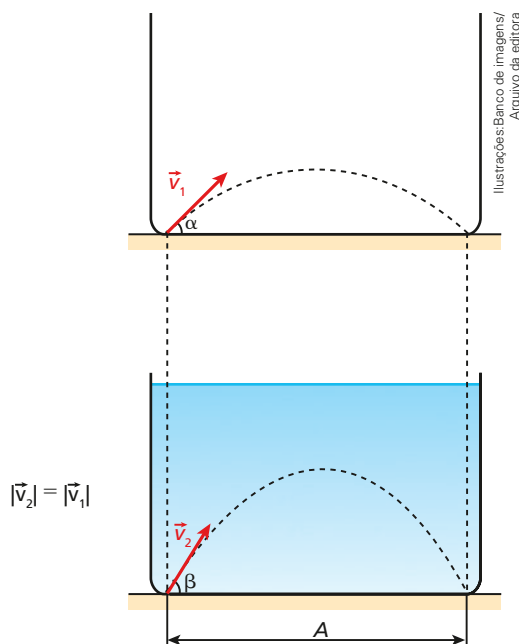


Sejam l_1, l_2, l_3 e l_4 as indicações da balança nas situações das figuras 1, 2, 3 e 4, respectivamente, aponte a alternativa correta:

- a) $l_3 < l_1 = l_2 < l_4$
- b) $l_3 < l_1 = l_2 = l_4$
- c) $l_1 = l_2 = l_3 = l_4$
- d) $l_3 < l_1 < l_2 < l_4$
- e) $l_3 < l_1 < l_2 = l_4$

108. Um projétil de densidade ρ_p é lançado com um ângulo α em relação à horizontal no interior de um recipiente vazio. A seguir, o recipiente é preenchido com um superfluido de densidade ρ_s , e o mesmo projétil é novamente lançado dentro dele, só que sob um ângulo β em relação à horizontal. Observa-se, então, que, para uma velocidade inicial \vec{v}_2 do projétil, de mesmo módulo que a do experimento anterior, não se altera seu alcance horizontal A .

Veja as figuras abaixo.



Sabendo-se que são nulas as forças de atrito num superfluido, pode-se então afirmar, com relação ao ângulo β de lançamento do projétil, que:

- a) $\text{sen } \beta = \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \text{sen } \alpha$
- b) $\text{sen } 2\beta = \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \text{sen } 2\alpha$
- c) $\text{sen } 2\beta = \left(1 + \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \text{sen } 2\alpha$
- d) $\text{cos } \beta = \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \text{cos } \alpha$
- e) $\text{cos } 2\beta = \left(1 + \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \text{sen } 2\alpha$

Dinâmica dos fluidos

Introdução

O estudo da **Estática dos fluidos** ou **Hidrostática** é sequenciado pelo da **Dinâmica dos fluidos** ou **Hidrodinâmica**. Essa abordagem, no entanto, é reservada ao Ensino Superior, mais especificamente aos cursos de ciências exatas, como Física e Engenharia. O desenvolvimento que faremos aqui será superficial e simplificado. Daremos ênfase a alguns conceitos que julgamos apropriados ao Ensino Médio.

A Hidrodinâmica estuda o movimento dos fluidos em geral, como o escoamento da água em rios e tubulações, a circulação sanguínea no corpo humano, o deslocamento da fumaça expelida por chaminés, etc.

Nossa análise será restrita a algumas situações particulares em que estarão envolvidos fluidos ideais, particularmente líquidos **incompressíveis, não viscosos e em regime permanente de escoamento**.

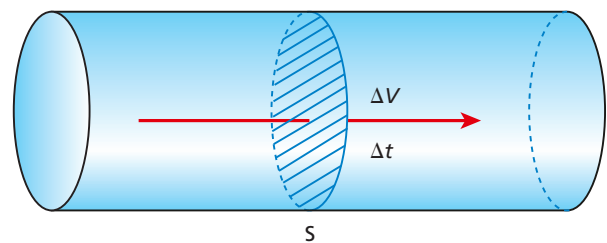
Líquido incompressível: apresenta a mesma massa específica (ou densidade absoluta) em qualquer ponto, independentemente de acréscimos de pressão. Essa hipótese é aceitável, já que os líquidos em geral têm baixa compressibilidade.

Escoamento não viscoso: é o deslocamento em que as diversas camadas fluidas não trocam forças de atrito entre si, tampouco com as paredes da tubulação. Quanto maior for a viscosidade de um líquido, maior será a dissipação de energia mecânica durante seu escoamento, o que não será objeto de nosso estudo. O óleo lubrificante de motores, por exemplo, é mais viscoso que a água. Por isso, seu escoamento em idênticas condições é mais “moroso” que o da água, implicando maior produção de energia térmica.

Regime permanente (ou estacionário) de escoamento: a velocidade verificada em um dado ponto do fluxo é constante para qualquer valor de tempo, independentemente da partícula do fluido que esteja passando por esse local.

Vazão (Z)

Consideremos um trecho de uma tubulação cilíndrica por onde escoar um líquido incompressível, não viscoso e em regime permanente. Por uma seção transversal **S** dessa tubulação passa um volume de líquido ΔV durante um intervalo de tempo Δt , conforme a ilustração a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Por definição, a vazão Z verificada em **S** é expressa por:

$$Z = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

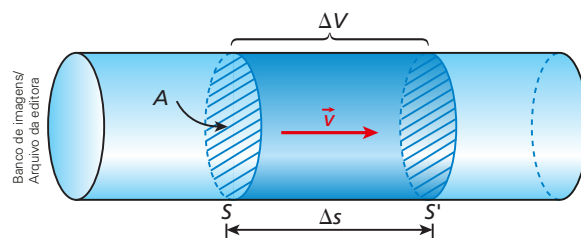
No Sistema Internacional de Unidades (SI), a vazão é medida em m^3/s .



Paulo Fridman/Pulsar Imagens

// Um dos vinte tubos da hidrelétrica de Itaipu. Esse duto despeja água sobre uma turbina acoplada a um gerador de tensão elétrica. Em cada tubo da usina a vazão de água é de $700 \text{ m}^3/\text{s}$, em média.

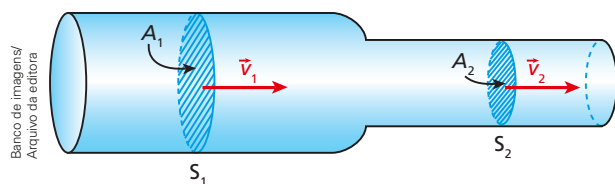
Durante um intervalo de tempo Δt , o volume de líquido que atravessa a seção de referência S pode ser calculado fazendo-se $\Delta V = A\Delta s$, em que A é a área de S e Δs é o deslocamento das partículas do líquido nesse intervalo de tempo.



Se v a intensidade da velocidade de escoamento do líquido, segue que:

$$Z = \frac{A\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow Z = Av$$

Equação da Continuidade



Consideremos o trecho de tubulação esquematizado ao lado por onde escoa um líquido incompressível, não viscoso e em regime permanente. Sejam A_1 e A_2 as áreas das seções S_1 e S_2 , e v_1 e v_2 as intensidades da velocidade de escoamento do fluido em S_1 e S_2 , respectivamente.

Levando-se em conta a conservação da massa, a vazão determinada em S_1 deve ser igual à determinada em S_2 ; logo:

$$Z_1 = Z_2 \Rightarrow A_1v_1 = A_2v_2$$

A última expressão é denominada **Equação da Continuidade**, e ela nos permite notar que as intensidades das velocidades de escoamento são inversamente proporcionais às respectivas áreas das seções transversais da tubulação:

$$A_1 > A_2 \Rightarrow v_1 < v_2$$

Ron Chapple/Corbis/Latinstock



// Neste rio de profundidade admitida constante, a velocidade da correnteza na parte mais estreita (região central da fotografia) deve ser maior que nas partes mais largas.

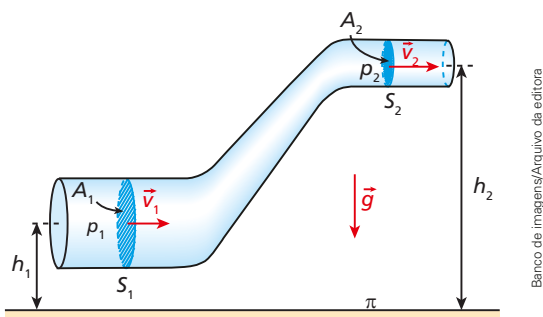


Thinstock/Getty Images

// À medida que a água escorre da boca de uma torneira, a intensidade de sua velocidade aumenta devido à ação da gravidade. Por isso a espessura do filete de água diminui, conforme prevê a Equação da Continuidade: à maior velocidade corresponde a menor área da seção da coluna fluida.

Teorema de Bernoulli

Consideremos um trecho de tubulação disposto verticalmente, conforme representa a figura a seguir, por onde escoo um líquido incompressível, não viscoso, de massa específica igual a μ em regime permanente. Sejam S_1 e S_2 duas seções transversais da tubulação, com áreas iguais a A_1 e A_2 . Por essas seções o líquido passa com velocidades de intensidade v_1 e v_2 , respectivamente. Sejam, ainda, p_1 e p_2 as pressões nos centros de S_1 e S_2 , h_1 e h_2 as alturas desses centros em relação a um plano horizontal de referência π , e g a intensidade da aceleração da gravidade.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Daniel Bernoulli relacionou as grandezas citadas por meio de uma expressão de grande importância, capaz de explicar vários fenômenos do dia a dia.

$$p_1 + \mu gh_1 + \frac{\mu v_1^2}{2} = p_2 + \mu gh_2 + \frac{\mu v_2^2}{2}$$

Nessa expressão, conhecida como Teorema de Bernoulli, as parcelas p_1 e p_2 são denominadas **pressões estáticas**, enquanto as parcelas $\frac{\mu v_1^2}{2}$ e $\frac{\mu v_2^2}{2}$ são chamadas **pressões dinâmicas**.

Outra forma de apresentar o Teorema de Bernoulli é: em qualquer seção da tubulação,

$$p + \mu gh + \frac{\mu v^2}{2} = C \text{ (Constante)}$$

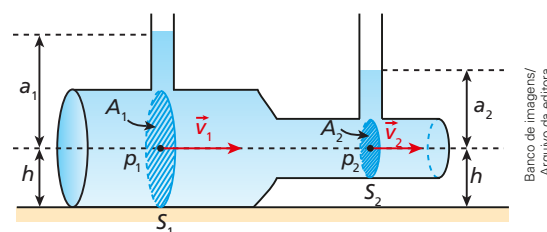
Casos particulares importantes

- I. Se h_1 for igual a h_2 , a tubulação será horizontal e, pela Equação da Continuidade, conclui-se que, sendo $A_1 > A_2$, então $v_1 < v_2$. O Teorema de Bernoulli reduz-se, nesse caso, a:

$$p_1 + \frac{\mu v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\mu v_2^2}{2}$$

Da desigualdade $v_1 < v_2$, decorre que $p_1 > p_2$. Assim, à menor velocidade de escoamento corresponde a maior pressão estática.

Isso pode ser verificado acoplando-se à tubulação dois tubos verticais abertos na extremidade superior, como está representado ao lado. Esses acessórios são denominados **tubos de Venturi** e permitem notar que na seção S_1 a altura atingida pelo líquido é maior que na seção S_2 , o que é o indicador de uma pressão estática maior.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$A_1 > A_2 \Rightarrow p_1 > p_2$$



Smithsonian/Corbis/Latinstock

/// Daniel Bernoulli (1700-1782) nasceu em uma família de físicos e matemáticos. Seu pai, seu tio e seus irmãos também deram importantes contribuições à ciência. Em 1738, Bernoulli publicou o livro *Hydrodynamica*, em que, entre outros estudos, está seu notável teorema. Gravura do século XVIII, por Johann J. Haid.

Na circulação sanguínea, por exemplo, admitindo-se condições ideais, verifica-se que nas artérias e veias de maior diâmetro ocorre menor velocidade de escoamento do sangue e, conseqüentemente, maior pressão.

- II. Se o líquido estiver em repouso, as pressões dinâmicas serão nulas e o Teorema de Bernoulli reduz-se ao Teorema de Stevin, da estática dos fluidos. De fato, se $v_1 = v_2 = 0$, tem-se:

$$p_1 + \rho gh_1 = p_2 + \rho gh_2 \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1)$$

Efeitos Bernoulli

Relacionamos a seguir algumas situações práticas que podem ser explicadas com base no Teorema de Bernoulli.

- I. Soprando-se sobre uma folha de papel, como sugerem as fotografias a seguir, a maior intensidade da velocidade de escoamento do ar sobre a folha faz com que a pressão nessa superfície fique menor que a pressão exercida sobre a face de baixo. Com isso a folha se eleva, adquirindo uma posição praticamente horizontal.



Fotografias: Sérgio Dotta, Jr./The Next

Em caso de fortes ventanias, telhados de casas e galpões podem ser arremessados para cima. Isso ocorre porque a maior velocidade do ar sobre o telhado reduz a pressão nessa superfície. Dessa forma, predominam as forças de pressão de baixo para cima, o que pode deslocar a estrutura.

Cortinas instaladas em janelas abertas podem ser lançadas para fora pela ação do vento, pois a corrente de ar do lado de fora, rente à janela, reduz a pressão do ambiente externo, fazendo com que elas sejam deslocadas no sentido da maior para a menor pressão.

Lonas de caminhões em alta velocidade estufam, movendo-se também no sentido da maior para a menor pressão.

Na imagem ao lado, pode-se observar que a lona que reveste a carga do caminhão acha-se estufada na parte de cima. Esse é um dos muitos "efeitos Bernoulli".

Em relação a um referencial ligado ao caminhão, a velocidade com que o ar se desloca na parte de cima é relativamente grande, ocorrendo o oposto com o ar confinado entre a carga e o revestimento, que praticamente não se movimenta. Isso impõe, portanto, uma diferença de pressões entre os dois lados da lona; na parte de cima se estabelece a menor pressão e, na parte de baixo, a maior. Com isso, as forças de pressão exercidas de baixo para cima prevalecem, fazendo a lona estufar.

G. Evangelista / Opção Brasil Imagens

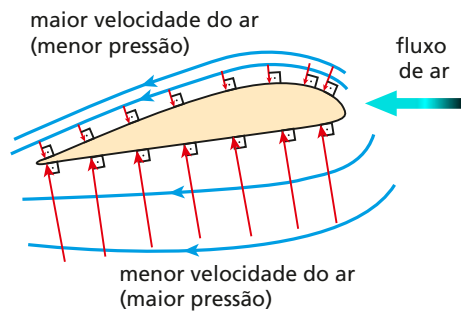


II. A força de sustentação de um avião é exercida principalmente nas asas da aeronave. Elas têm um desenho específico, de modo que o ar escoar com maior velocidade pela superfície de cima. Com isso, a pressão exercida nessa face é menor que a pressão verificada no lado de baixo. Obtém-se, então, uma força resultante que admite uma componente vertical dirigida para cima que se opõe à tendência de queda do avião.



Donal Philby/Age Fotostock/Grupo Keystone

// A velocidade de escoamento do ar é maior na face de cima das asas do avião. Assim, predominam as forças de pressão de baixo para cima, o que dá sustentação à aeronave.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Ampliando o olhar

Pesadelo dos goleiros

Situação difícil certamente foi a dos goleiros que depararam com cobradores de faltas como Rivelino, Zico, Marcelinho Carioca, Ronaldinho Gaúcho e Rogério Ceni, entre outros. Esses atletas, que inscreveram de forma definitiva seus nomes na história do futebol, notabilizaram-se pela maneira peculiar de desferir seus chutes. Eles imprimiam à bola um grande “efeito”, o que conferia ao percurso do projétil curvas espetaculares em lances decisivos. Durante o deslocamento, a bola girava em torno de um eixo central imaginário e isso determinava forte interação com o ar, com expressivas deflexões na trajetória. Nesse processo, a bola saía do previsível curso parabólico, fazendo os goleiros se desdobrarem em tentativas quase sempre frustradas de defender as cobranças.

Isso também pode ser notado no tênis quando um jogador imprime um *topspin*. Nessa maneira de golpear a bola, a pequena esfera amarela e felpuda segue rodopiando, o que impõe um itinerário imprevisível que engana o adversário, dificultando um possível contragolpe.

A irregularidade nas curvas exibidas por bolas que se deslocam através do ar em movimento conjunto de translação e rotação constitui o chamado **Efeito Magnus**, que recebeu essa denominação em razão das explicações fundamentais dadas pelo físico-químico alemão Heinrich Gustav **Magnus** (1802-1870) à correta compreensão do fenômeno.

// Fotografia de Heinrich Gustav Magnus; ele também apresentou importantes trabalhos sobre eletrólise, expansão de gases mediante recebimento de calor e termelétricidade.



Diomedea/Image Source/Alan Br

// Uma bola lançada com efeito (rotação) realiza uma trajetória curva, o que dificulta sobremaneira a ação do goleiro.



Album/ikg-images/Latinstock

Considere uma bola chutada por um jogador canhoto rumo ao gol. Veja a ilustração a seguir. A bola é disparada com rotação horária, como seria visto por um observador que a olhasse de cima. Representemos por ω a velocidade angular imprimida à bola no ato do chute.

Ela fará então uma curva para a direita, como justificamos a seguir.



// Ilustração representando o Efeito Magnus em um chute de falta cobrada por um jogador canhoto.

Sendo $-\vec{v}_0$ a velocidade de translação da bola em relação ao ar, podemos dizer que o ar apresenta uma velocidade \vec{v}_0 em relação à bola. Tudo se passa como se a bola permanecesse em repouso e o ar passasse por ela com velocidade \vec{v}_0 . Por outro lado, em relação a um referencial ligado ao centro da bola, a intensidade das velocidades $-\vec{v}_1$ e \vec{v}_1 das partículas do ar nas proximidades dos pontos **A** e **B** indicados no esquema ao lado é calculada por $v_1 = \omega R$, em que R é o raio da bola. É importante notar que $-\vec{v}_1$ e \vec{v}_1 são as velocidades impostas às partículas do ar vizinhas à bola devido ao arrastamento provocado por seu movimento de rotação.

Dessa forma, admitindo-se $v_0 > v_1$ e tendo em conta a composição de movimentos, conclui-se que nas vizinhanças do ponto **A** o ar tem, em relação à bola, uma velocidade vetorial \vec{v}_A , de intensidade $v_A = v_0 - v_1$, e, nas proximidades do ponto **B**, uma velocidade vetorial \vec{v}_B , de intensidade $v_B = v_0 + v_1$. Da análise de v_A e v_B , conclui-se que $v_A < v_B$.

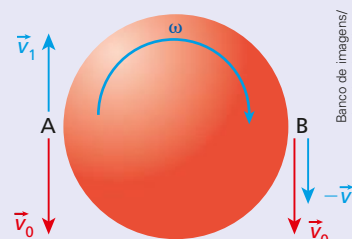
Sendo assim, de acordo com o Teorema de Bernoulli, estabelece-se na região do ponto **A** uma pressão p_A maior que a pressão p_B verificada na região do ponto **B**.

De fato:

$$p_A + \frac{\mu v_A^2}{2} = p_B + \frac{\mu v_B^2}{2}$$

Sendo constante a densidade μ do ar, se $v_A < v_B$, então $p_A > p_B$.

Por causa disso, a bola recebe do ar na região do ponto **A** forças de pressão mais intensas que aquelas verificadas na região do ponto **B**, o que explica a deflexão de sua trajetória para a direita.



Demonstração do Teorema de Bernoulli

Consideremos a figura a seguir, em que um líquido incompressível, não viscoso e de massa específica igual a μ escoou em regime permanente através de um trecho de tubulação disposto verticalmente em um local em que a aceleração da gravidade tem intensidade g . Estudemos o deslocamento da esquerda para a direita de uma porção de fluido compreendida em um determinado instante entre as seções S_1 (área igual a A_1) e S_2 (área igual a A_2). Nessas seções, as velocidades de escoamento têm intensidades v_1 e v_2 , respectivamente.

Essa porção líquida recebe do resto do fluido as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 aplicadas em S_1 e S_2 , onde as pressões estáticas valem, respectivamente, p_1 e p_2 . Sejam h_1 e h_2 as alturas dos centros de S_1 e S_2 em relação a um plano horizontal π adotado como referência. O líquido é então deslocado durante certo intervalo de tempo, migrando da região delimitada pelas seções S_1 e S_2 para outra, delimitada pelas seções S'_1 e S'_2 .

O volume V de líquido que sai da parte baixa do duto é integralmente transferido para a parte alta. Tudo se passa, para efeito de cálculo, como se fossem deslocadas as mesmas partículas do fluido de uma região à outra. Esse volume fica determinado fazendo-se:

$$V = A_1 d_1 \quad \text{ou} \quad V = A_2 d_2$$

em que d_1 e d_2 são os deslocamentos da massa m de líquido, respectivamente, na parte baixa e na parte alta da tubulação.

I. Trabalhos de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 (τ_{fd}):

$$\tau_{fd} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} \Rightarrow \tau_{fd} = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

$$\tau_{fd} = p_1 A_1 d_1 - p_2 A_2 d_2 \Rightarrow \tau_{fd} = p_1 V - p_2 V$$

Da qual:

$$\tau_{fd} = (p_1 - p_2)V \quad (I)$$

II. Trabalho da gravidade (τ_{gr}):

$$\tau_{gr} = -mg(h_2 - h_1)$$

$$\tau_{gr} = -\mu Vg(h_2 - h_1) \quad (II)$$

III. Teorema da Energia Cinética:

$$\tau_{fd} + \tau_{gr} = \tau_{total} \Rightarrow \tau_{fd} + \tau_{gr} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Assim:

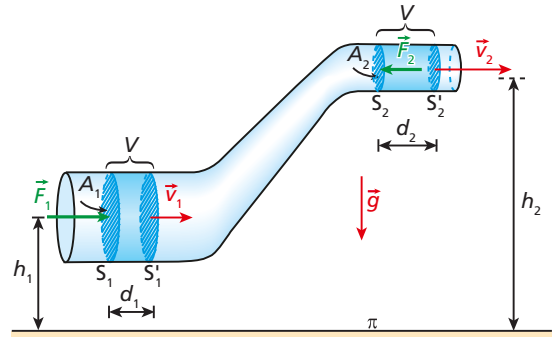
$$\tau_{fd} + \tau_{gr} = \frac{\mu V}{2} (v_2^2 - v_1^2) \quad (III)$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$$(p_1 - p_2)V - \mu Vg(h_2 - h_1) = \frac{\mu V}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

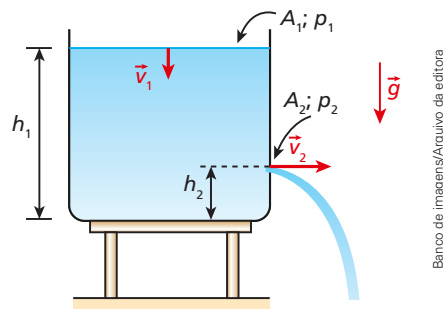
Da qual:

$$p_1 + \frac{\mu v_1^2}{2} + \mu g h_1 = p_2 + \frac{\mu v_2^2}{2} + \mu g h_2$$



Equação de Torricelli

Vamos admitir um recipiente cilíndrico em repouso sobre um suporte horizontal. Suponhamos que dentro dele exista um líquido incompressível, não viscoso e de massa específica igual a μ . Se fizermos um pequeno furo próximo à base do recipiente, o líquido vazará pelo orifício com velocidade horizontal, como representa a figura a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Aplicando-se o Teorema de Bernoulli, é possível determinar a intensidade (v) da velocidade de escoamento do fluido através do orifício em função do módulo da aceleração da gravidade (g) e do desnível (h) entre a superfície livre do líquido e o plano horizontal que contém o furo.

$$p_2 + \frac{\mu v_2^2}{2} + \mu g h_2 = p_1 + \frac{\mu v_1^2}{2} + \mu g h_1$$

Devemos observar, porém, que, sendo o diâmetro do orifício muito pequeno em comparação com o do recipiente, é razoável considerarmos $v_1 \cong 0$.

Por outro lado, as pressões estáticas na superfície livre do líquido (p_1) e na saída do furo (p_2) são iguais à pressão atmosférica local.

Com isso, vem:

$$\frac{\mu v_2^2}{2} = \mu g (h_1 - h_2)$$

Fazendo $h_1 - h_2 = h$ e $v_2 = v$, obtemos a chamada Equação de Torricelli, em uma alusão ao físico italiano Evangelista **Torricelli** (1608-1647).

$$v = \sqrt{2gh}$$

// Nesta fotografia, a intensidade da velocidade com que o líquido é ejetado para fora da garrafa cresce com a profundidade do furo. Isso está de acordo com a Equação de Torricelli, a qual estabelece que a intensidade da velocidade de saída do fluido dobra quando a profundidade do orifício quadruplica.



Sérgio Dotta Jr./The Next

109. Uma mangueira tem em sua extremidade

E.R. um esguicho de boca circular cujo diâmetro pode ser ajustado. Admita que essa mangueira, operando com vazão constante, consiga encher um balde de 30 L em 2 min 30 s.

- Se a área da boca do esguicho for ajustada em $1,0 \text{ cm}^2$, com que velocidade a água sairá da mangueira?
- Reduzindo-se o diâmetro da boca do esguicho à metade, com que velocidade a água sairá da mangueira nessa nova situação?

Resolução:

a) A vazão (Z) através da boca do esguicho é calculada por:

$$Z = Av = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Sendo a área $A = 1,0 \text{ cm}^2 = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, o volume $\Delta V = 30 \text{ L} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ e o intervalo de tempo $\Delta t = 2,5 \text{ min} = 150 \text{ s}$, calculemos a velocidade v de escoamento da água.

$$10 \cdot 10^{-4} v = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{150} \therefore \boxed{v = 2,0 \text{ m/s}}$$

b) Como a área do círculo é diretamente proporcional ao quadrado do seu raio, ou do seu diâmetro $\left(A = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4} \right)$, se re-

duzirmos o diâmetro à metade, a área será reduzida à quarta parte. Assim, aplicando-se a Equação da Continuidade, vem:

$$A \cdot v' = Av \Rightarrow \frac{A}{4} v' = A \cdot 2,0$$

$$\boxed{v' = 8,0 \text{ m/s}}$$

110. (UFPE) A velocidade do sangue na artéria aorta de um adulto, que possui em média 5,4 litros de sangue, tem módulo aproximadamente igual a 30 cm/s . A área transversal da artéria é cerca de $2,5 \text{ cm}^2$. Qual o intervalo de tempo, em segundos, necessário para a aorta transportar o volume de sangue de um adulto?

111. (Unama-AM) Uma piscina, cujas dimensões são $18 \text{ m} \times 10 \text{ m} \times 2 \text{ m}$, está vazia. O tempo necessário para enchê-la é 10 h, através de um conduto de seção $A = 25 \text{ cm}^2$. A velocidade da água, admitida constante, ao sair do conduto, terá módulo igual a:

- 1 m/s
- 2 km/s
- 3 cm/min
- 4 m/s
- 5 km/s

112. (UFPA) Considere duas regiões distintas do leito de um rio: uma larga **A**, com área de seção transversal de 200 m^2 , e outra estreita **B**, com 40 m^2 de área de seção transversal.

A velocidade das águas do rio na região **A** tem módulo igual a $1,0 \text{ m/s}$.

De acordo com a equação da continuidade aplicada ao fluxo de água, podemos concluir que a velocidade das águas do rio na região **B** tem módulo igual a:

- $1,0 \text{ m/s}$
- $2,0 \text{ m/s}$
- $3,0 \text{ m/s}$
- $4,0 \text{ m/s}$
- $5,0 \text{ m/s}$

113. (UFJF-MG) Um fazendeiro decide medir a vazão de um riacho que passa em sua propriedade e, para isso, escolhe um trecho retilíneo de $30,0 \text{ m}$ de canal. Ele observa que objetos flutuantes gastam em média $60,0 \text{ s}$ para percorrer esse trecho. No mesmo lugar, observa que a profundidade média é de $0,30 \text{ m}$ e a largura média, $1,50 \text{ m}$. A vazão do riacho, em litros de água por segundo, é:

- $1,35$
- $3,65$
- 225
- 365
- 450

114. O aneurisma é uma dilatação anormal verificada em um trecho de uma artéria pela distensão parcial de suas paredes. Essa patologia, de origem congênita ou adquirida, pode provocar o rompimento do duto sanguíneo com escape de sangue, o que em muitos casos pode ser fatal. Trata-se do que popularmente se denomina **derrame**.

Admita que uma pessoa tenha um aneurisma de aorta, de modo que a área da seção reta de sua artéria dobre. Considere o sangue um fluido ideal, de massa específica $1,2 \text{ g/cm}^3$, escoando inicialmente com velocidade 20 cm/s . Devido ao aneurisma, qual a variação da pressão estática do sangue no local da lesão, expressa em unidades do SI?

Resolução:

I. Pela Equação da Continuidade:

$$Z_2 = Z_1 \Rightarrow A_2 v_2 = A_1 v_1 \Rightarrow 2A_1 v_2 = A_1 \quad (20)$$

$$v_2 = 10 \text{ cm/s} = 0,10 \text{ m/s}$$

II. Pelo Teorema de Bernoulli aplicado a um mesmo ponto do interior da artéria, tem-se:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = C \text{ (constante)}$$

$$p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}$$

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2)$$

$$\Delta p = \frac{1,2 \cdot 10^3}{2} (0,20^2 - 0,10^2)$$

$$\Delta p = 18 \text{ Pa}$$

115. (ITA-SP) Durante uma tempestade, Maria fecha as janelas do seu apartamento e ouve o zumbido do vento lá fora. Subitamente o vidro de uma janela se quebra. Considerando-se que o vidro tenha soprado tangencialmente à janela, o acidente pode ser mais bem explicado pelo(a):

- a) princípio de conservação da massa.
- b) equação de Bernoulli.
- c) princípio de Arquimedes.
- d) princípio de Pascal.
- e) princípio de Stevin.

116. O ar de um furacão sopra sobre o telhado de uma casa com velocidade de módulo igual a 108 km/h. A densidade do ar vale $1,2 \text{ kg/m}^3$.

A diferença entre a pressão do lado interno e do lado externo do telhado vale:

- a) zero
- b) 500 Pa
- c) 520 Pa
- d) 540 Pa
- e) 560 Pa

117. (Unicamp-SP) **Tornado destrói telhado de ginásio da Unicamp.** Um tornado com ventos de 180 km/h destruiu o telhado do ginásio de esportes da Unicamp [...] Segundo engenheiros da universidade, a estrutura destruída pesa aproximadamente 250 toneladas." (*Folha de S.Paulo*, 29/11/95)

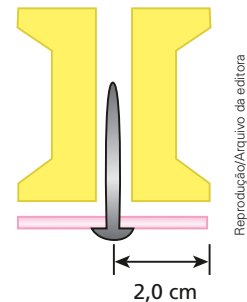
Uma possível explicação para o fenômeno seria considerar uma diminuição de pressão atmosférica, devida ao vento, na parte superior do te-

lhado. Para um escoamento ideal de ar, essa redução de pressão é dada por: $\frac{\rho v^2}{2}$, em que

$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ é a densidade do ar e v é a intensidade da velocidade do vento. Considere que o telhado do ginásio tem 5400 m^2 de área e que estava simplesmente apoiado sobre as paredes. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- a) Calcule a variação da pressão externa devida ao vento.
- b) Quantas toneladas poderiam ser levantadas pela força devida a esse vento?
- c) Qual a menor intensidade da velocidade do vento (em km/h) que levantaria o telhado?

118. (UFBA) Um fenômeno bastante curioso, associado ao voo dos pássaros e do avião, pode ser visualizado através de um experimento simples, no qual se utiliza um carretel de linha para empinar pipas, um prego e um pedaço circular de cartolina.

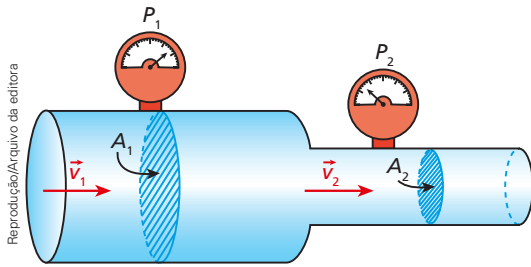


O prego é colocado no centro da cartolina e inserido no buraco do carretel, conforme a figura. Soprando de cima para baixo pelo buraco superior do carretel, verifica-se que o conjunto cartolina-prego não cai. Considere a massa do conjunto cartolina-prego igual a 10 g, o raio do disco igual a 2,0 cm e a aceleração da gravidade local com módulo igual a 10 m/s^2 .

A partir dessas informações, apresente a lei física associada a esse fenômeno e calcule a diferença de pressão média mínima, entre as faces da cartolina, necessária para impedir que o conjunto caia.

119. (ITA-SP) Considere uma tubulação de água que consiste de um tubo de 2,0 cm de diâmetro por onde a água entra com velocidade de módulo $2,0 \text{ m/s}$ sob uma pressão de $5,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Outro tubo de 1,0 cm de diâmetro encontra-se a 5,0 m de altura, conectado ao tubo de entrada. Considerando-se a densidade da água igual $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e desprezando-se as perdas, calcule a pressão da água no tubo de saída. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

120. (UnB-DF)

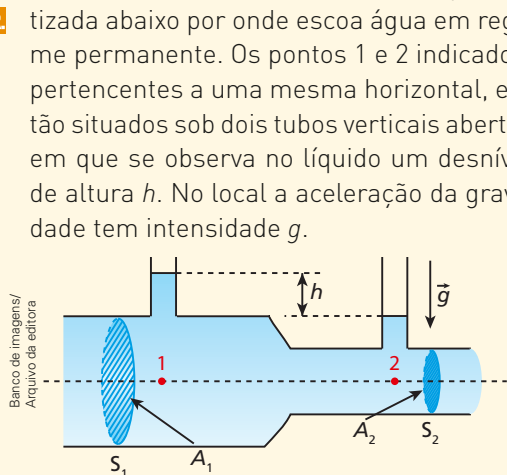


A figura acima ilustra uma tubulação que tinha, inicialmente, em toda a sua extensão, área seccional A_1 . Após um acidente, parte da tubulação sofreu modificações no seu diâmetro, e a área da seção transversal passou a ser igual a $A_2 = \frac{A_1}{2}$, como mostrado na figura. Sabia-se que, no início do acidente, o sistema tubulação-fluido trabalhava em um regime de pressão (P_1) máxima permitida, acima da qual ocorreria rompimento da tubulação sempre que a pressão máxima do fluido fosse superior a P_1 .

Com base nessas informações, considerando-se que não há variação de pressão com a altura e que a vazão do fluido é constante em toda a extensão da tubulação, assinale a opção correspondente à correta variação da pressão.

- a) $P_1 - P_2 > 0$
- b) $P_1 - P_2 < 0$
- c) $P_1 - P_2 = 0$
- d) $P_1 + P_2 = 0$
- e) ΔP pode ser positivo ou negativo.

121. Considere a tubulação hidráulica esquematizada abaixo por onde escoar água em regime permanente. Os pontos 1 e 2 indicados, pertencentes a uma mesma horizontal, estão situados sob dois tubos verticais abertos em que se observa no líquido um desnível de altura h . No local a aceleração da gravidade tem intensidade g .



Supondo conhecidas as áreas A_1 e A_2 das seções retas S_1 e S_2 , respectivamente, e considerando a água um fluido ideal, determine a intensidade da velocidade do líquido no ponto 1.

Resolução:

I. Equação da Continuidade:

$$Z_2 = Z_1 \Rightarrow A_2 v_2 = A_1 v_1$$

Assim:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \quad (I)$$

II. Teorema de Bernoulli:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

$$\rho g h_1 + p_{atm} + \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g h_2 + p_{atm} + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Da qual:

$$g(h_1 - h_2) + \frac{v_1^2}{2} = \frac{v_2^2}{2} \quad (II)$$

Observando-se que $h_1 - h_2 = h$ e substituindo-se (I) em (II), vem:

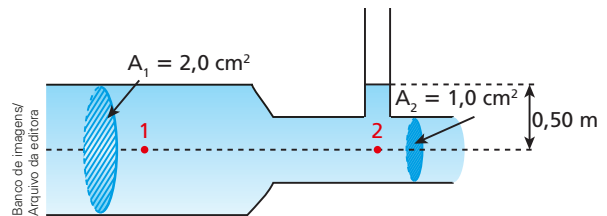
$$gh + \frac{v_1^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{A_2} v_1 \right)^2$$

$$2gh = v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]$$

Assim:

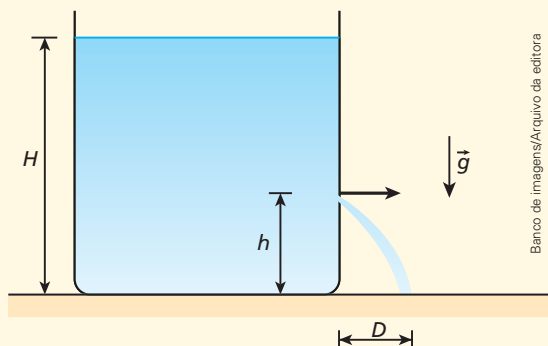
$$v_1 = \left[\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

122. Na tubulação horizontal esquematizada na figura a seguir, o líquido escoar com vazão de $400 \text{ cm}^3/\text{s}$ e atinge a altura de $0,50 \text{ m}$ no tubo vertical. A massa específica do líquido, admitido ideal, é $1,0 \text{ g/cm}^3$.



Adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$ e supondo-se o escoamento em regime permanente, pede-se calcular a pressão efetiva no ponto 1, que é a diferença entre a pressão estática nesse ponto e a pressão atmosférica.

123. Em uma caixa-d'água cilíndrica de eixo vertical, a superfície livre de água atinge uma altura H . Faz-se um pequeno furo na parede lateral da caixa, a uma altura h , por onde a água extravasa, projetando-se horizontalmente, conforme ilustra a figura. No local, a resistência do ar é desprezível e a aceleração da gravidade tem intensidade g .



Sendo D o alcance horizontal atingido pela água, determine:

- o máximo valor de D ;
- os valores de h para os quais se obtêm alcances horizontais iguais.

Resolução:

- A intensidade da velocidade de escoamento da água através do furo é v , dada pela Equação de Torricelli:

$$v = \sqrt{2g(H - h)} \quad (I)$$

O movimento das gotas de água a partir do furo é uniformemente variado na vertical; logo:

$$\Delta y = v_{0y}t + \frac{\alpha_y}{2}t^2 \Rightarrow h = \frac{g}{2}t_q^2$$

Da qual:

$$t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (II)$$

O movimento das gotas de água a partir do furo é uniforme na horizontal; logo:

$$\Delta x = vt \Rightarrow D = vt_q \quad (III)$$

Substituindo-se (I) e (II) em (III), segue que:

$$D = \sqrt{2g(H - h)} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

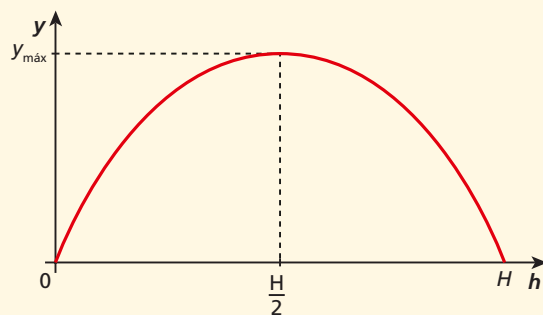
Assim:

$$D = 2\sqrt{(H - h)h}$$

Chamemos de y o radicando $(H - h)h$.

$$y = (H - h)h$$

A função $y = f(h)$ é do segundo grau e sua representação gráfica é um arco de parábola com concavidade voltada para baixo, conforme aparece a seguir.



Observando-se que $y = 0$ para $h = 0$ e $h = H$, tem-se:

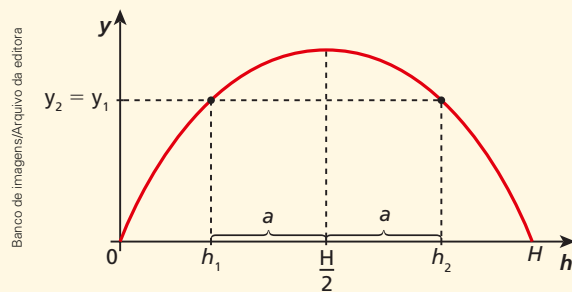
$$\text{Para } h = \frac{H}{2} \Rightarrow y_{\text{máx}} \Rightarrow d_{\text{máx}}$$

$$\text{Logo: } D_{\text{máx}} = 2\sqrt{\left(H - \frac{H}{2}\right)\frac{H}{2}}$$

$$\text{Donde: } \boxed{D_{\text{máx}} = H}$$

- Alcances horizontais iguais são obtidos para um mesmo valor de y , isto é, quando $y_2 = y_1$.

Analisando-se o gráfico anterior, vem:

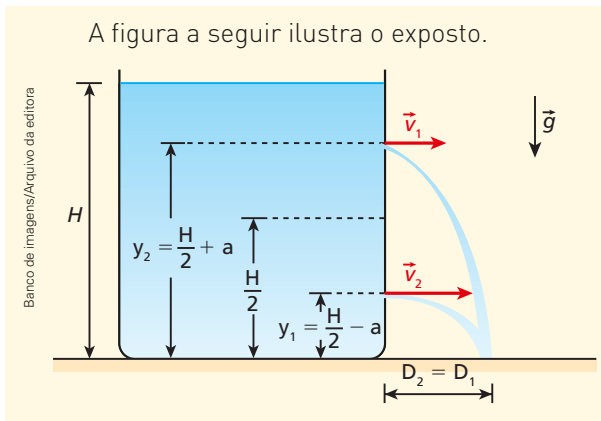


$$D_2 = D_1 \Rightarrow y_2 = y_1$$

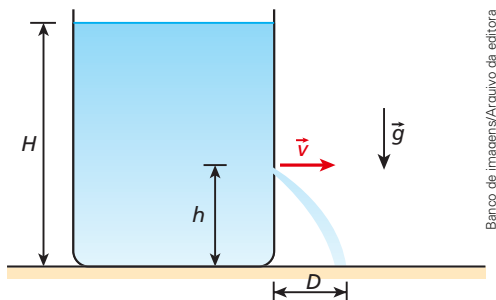
Nesse caso:

$$\boxed{h_1 = \frac{H}{2} - a} \text{ e } \boxed{h_2 = \frac{H}{2} + a}$$

$$\left(\text{com } 0 < a < \frac{H}{2} \right)$$



124. Na figura a seguir está esquematizado um grande tanque aberto cheio de água até uma altura H apoiado sobre uma superfície horizontal.



Faz-se um pequeno furo na parede lateral do reservatório, a uma altura h em relação à sua base, por onde jorra um filete d'água com velocidade horizontal de intensidade v . No local, a resistência do ar é desprezível e a aceleração da gravidade tem módulo igual a g . Sendo D o alcance horizontal da água, determine em função de H , h e g :

- a) o valor de v ; b) o valor de D .

125. (Unirio-RJ) Um menino deve regar o jardim de sua mãe e pretende fazer isso da varanda de sua residência, segurando uma mangueira na posição horizontal, conforme a figura abaixo.

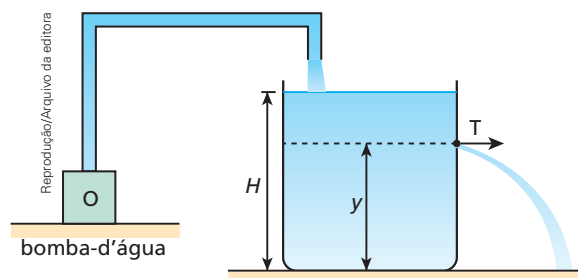


Durante toda a tarefa, a altura da mangueira, em relação ao jardim, permanecerá constante. Inicialmente, a vazão de água, que pode ser definida como o volume de água que atravessa a área

transversal da mangueira na unidade de tempo, é φ_0 . Para que a água da mangueira atinja a planta mais distante no jardim, ele percebe que o alcance inicial deve ser quadruplicado. A mangueira tem em sua extremidade um dispositivo com orifício circular de raio variável. Para que consiga molhar todas as plantas do jardim sem molhar o resto do terreno, ele deve:

- reduzir o raio do orifício em 50% e quadruplicar a vazão de água.
- manter a vazão constante e diminuir a área do orifício em 50%.
- manter a vazão constante e diminuir o raio do orifício em 50%.
- manter constante a área do orifício e dobrar a vazão de água.
- reduzir o raio do orifício em 50% e dobrar a vazão de água.

126. (Unirio-RJ) Uma bomba-d'água enche o reservatório representado na figura a seguir até a altura H . Assim que a água atinge esse nível, a tampa T de um escoadouro é aberta. A tampa está a uma altura y do fundo do reservatório e sua vazão é igual à da bomba, que permanece ligada o tempo todo. Sabendo que a água sai horizontalmente pela tampa, determine a expressão para o alcance máximo, $A_{\text{máx}}$, atingido pela água e a altura y do escoadouro.



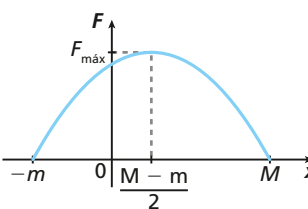
Despreze os atritos.

- $A_{\text{máx}} = 2\sqrt{y(H-y)}$; $y = \frac{H}{2}$
- $A_{\text{máx}} = 4\sqrt{y(H-y)}$; $y = \frac{H}{4}$
- $A_{\text{máx}} = 3\sqrt{y(H-y)}$; $y = \frac{H}{3}$
- $A_{\text{máx}} = 5\sqrt{y(H-y)}$; $y = \frac{H}{6}$
- $A_{\text{máx}} = 6\sqrt{y(H-y)}$; $y = \frac{H}{5}$

Unidade 2 – Dinâmica

Tópico 4 – Gravitação

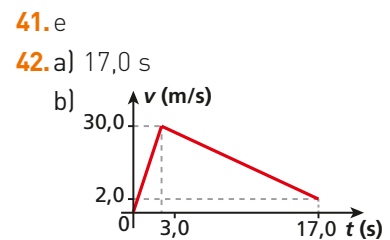
1. e
 2. a) $\frac{A_1}{A_2} = 1$
 b) 2ª Lei de Kepler
 3. e 4. c 5. 11
 6. Nenhuma modificação, pois o período de translação da EEI independe de sua massa.
 7. c
 8. a) $V_{\text{máx}}$ em **A**; $V_{\text{mín}}$ em **B**.
 b) $\Delta t_{\text{DAB}} < \Delta t_{\text{ABC}} = \Delta t_{\text{CDA}} < \Delta t_{\text{BCD}}$
 9. c
 11. a) $9R$ b) $8R \leq d \leq 10R$
 12. a) 1 dia ou 24 h
 b) Aproximadamente 6,7R
 13. a 14. b 15. c
 17. 20 18. d
 20. a) 2 dias b) $\frac{v_{\text{Te}}}{v_{\text{Ti}}} = 2$
 21. a) 24 h
 b) Como o satélite está em movimento ao longo da órbita, o peso dele desempenha a função de resultante centrípeta.
 23. 90%
 24. a) Aproximadamente 35,3 km/s
 b) 847 200 km
 26. a) 25 UA b) $\frac{1}{5}$
 27. a) $\sqrt{\frac{GM}{r}}$ b) $\left(\frac{R_e}{R_i}\right)^2$
 28. As pessoas e o avião têm aceleração vetorial igual a $|\vec{g}|$.
 29. 17 31. 60 kg e 600 N
 32. b 34. b
 35. $2,56 \cdot 10^4$ km
 37. $4,0 \text{ m/s}^2$ 38. $\frac{1}{2}$
 39. $\frac{3\pi}{GT^2}$ 41. 3,0 m
 42. $0,10 \text{ m/s}^2$ 43. e
 45. a) $4,0 \text{ m/s}^2$ b) 5 m
 46. $m\omega^2 R$ 47. d 48. a
 49. b 50. b
 51. 18 52. b

53. a) $4,2 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$
 b) $1,25 \cdot 10^{-4} \text{ N}$
 54. $\frac{1}{2}$
 55. a) $1,5 \cdot 10^{-2}$
 b) $2,0 \cdot 10^2 \text{ m/s}$
 56. a) $\alpha = \beta^2$ c) $r_T = \sqrt{\frac{1}{\beta}}$
 b) β d) $r_V = \sqrt{\beta}$
 57. Demonstração.
 58. $\left(\frac{3\pi r^3}{G\mu R^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ 59. $\frac{16\pi^3}{3} \cdot \frac{\mu R^3 r}{T^2}$
 60. $\frac{3\pi}{GT^2}$ 61. e
 62. $T = 2\pi R \sqrt{\frac{R\sqrt{3}}{GM}}$
 63. $\frac{4\pi R}{3} \sqrt{\frac{R}{GM}}$ 64. c
 65. a) 
 b) 1

Tópico 5 – Movimentos em campo gravitacional uniforme

1. c
 3. a) 2,5 m/s b) 0,8
 4. b 5. e 6. c
 7. a) 4,5 m/s b) 1,8 m
 9. a) 3,2 m b) 9,6 m
 10. 3,75
 11. a) 2,25 m b) 0,4 m
 12. 3,2 m e 6,4 m
 13. a) 10 m/s c) 3,8 m
 b) 8,0 m
 14. a) 300 m b) 2,0 s
 15. a) 12 m b) 13 m/s
 16. a 17. c 19. 800 m
 20. a) 80 cm b) 24 cm
 21. a
 23. $3,0 \text{ m/s} \leq v_0 \leq 6,0 \text{ m/s}$
 24. $6,0 \text{ m/s}^2$
 25. d 26. d 27. d 28. c

29. a) 13,0 m
 b) 5,0 m/s e 13,0 m/s
 30. d
 31. a) 0,75 s c) 64 m/s
 b) 32 m/s
 32. a) 5,0 s b) 100 m
 33. a) 4,1 s c) 20,7 m
 b) 28,7 m/s
 34. d
 35. a) 6,0 m c) 0,95 s
 b) 0,20 s
 36. e 37. d 38. d
 39. $0,50 \text{ m/s}^2$ 40. 7ª degrau



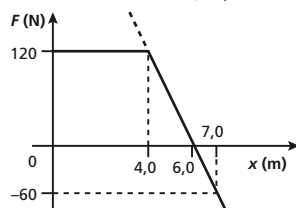
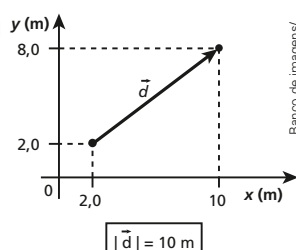
- c) 269 m
 43. a) 2,5 m/s c) 7,0 kg
 b) $2,5 \text{ m/s}^2$
 44. a) 6,0 rad/s b) 6,0 m
 45. 3
 46. $3(1 + 2n) \text{ rad/s}$
 47. $v_p = \frac{v_A}{\cos \theta}$ e $v_p \geq \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{2gH}$
 48. a) $\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ c) $\frac{2v_0 \sin \theta}{g}$
 b) 90°

49. a) 48 m b) 400 m
 50. a) 40 m b) 15 m

Tópico 6 – Trabalho e potência

1. Trabalho nulo.
 2. b 4. 60 J 5. c
 6. a) 50 N b) zero
 7. a) 120 J c) 40 J
 b) -80 J
 8. $3,2 \cdot 10^3 \text{ J}$
 9. a) 0,15 e 0,10
 b) 100 J
 c) Trabalho nulo.
 11. a) $1,0 \cdot 10^3 \text{ J}$
 b) $-1,0 \cdot 10^3 \text{ J}$

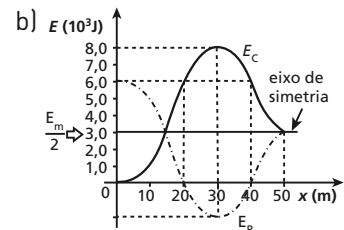
12. $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 300 \text{ J}$, $\tau_3 = 0$ e $\tau_4 = -250 \text{ J}$
 13. a) 5,0 N b) 10 J e $-6,0 \text{ J}$
 14. $6,0 \cdot 10^2 \text{ J}$
 15. a) $4,0 \cdot 10^2 \text{ J}$ c) $6,0 \cdot 10^2 \text{ J}$
 b) $-1,0 \cdot 10^2 \text{ J}$
 16. a) 30 N c) zero
 b) 5,0 rad/s
 17. a) 714 N b) 350 J
 18. c 19. 10 m/s 20. 1,5 m
 21. a) 45 J b) 10 m/s
 23. 57 J 24. d
 25. 21 400 J 26. d
 27. a) 20 J b) -40 J
 28. b 29. c
 30. a) $-5,0 \cdot 10^2 \text{ J}$ b) 5,0 s
 31. a) 4,0 m/s
 b) $8,0 \cdot 10^2 \text{ J}$ e $-8,0 \cdot 10^2 \text{ J}$
 32. $3,6 \cdot 10^2 \text{ N}$ 33. 4,0 m/s
 35. $-3 360 \text{ J}$
 37. 2,5 m
 38. a) 5,0 m/s b) 0,25
 39. a) $\frac{MgH}{h}$ b) $\left(\frac{H}{h} - 1\right)g$
 40. a) 5,0 J
 b) $-5,0 \text{ J}$
 c) $4,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}$
 41. a) 3,0 m b) zero
 42. d 44. $2,5 \cdot 10^3 \text{ J}$
 45. a) $8,0 \cdot 10^2 \text{ J}$ b) 32 W
 46. a) $3,2 \cdot 10^3 \text{ J}$
 b) Ela despenderá em 20 s potência maior que em 40 s.
 47. a) $2,0 \cdot 10^4 \text{ J}$ b) 1 min 40 s
 48. d 49. c 50. c
 51. a) $6,75 \cdot 10^5 \text{ J}$ b) 90 cv
 52. a) $5,5 \cdot 10^2 \text{ J}$ b) $1,1 \cdot 10^2 \text{ W}$
 54. 590 MW 55. b
 56. 5,0 kW
 57. a) $0,50 \text{ m/s}^2$ b) 2,0 W
 58. a) 300 N b) 150 N
 59. 2,0 kg
 60. a) $4,5 \cdot 10^4 \text{ J}$ b) $1,5 \cdot 10^2 \text{ W}$
 62. c
 63. a) 40 hp b) 4 hp
 64. a 65. b
 66. a) $-6,8 \cdot 10^4 \text{ J}$ b) 34 kW

67. a) 9,0 kN b) 90 kW
 68. 240 hp 70. 5
 72. a) 16 W b) 9,0 m/s
 73. a) 2 000 kW b) 300 kN
 74. $2,0 \cdot 10^2 \text{ W}$
 75. e 76. e
 77. a) 4,5 N c) 1,5 N
 b) 54 J d) 25 cm
 78. a) 0,5 m b) $3,0 \cdot 10^{-15} \text{ J}$
 79. a 80. c
 81. a) 80 N b) 26,2 m
 82. a 83. a
 84. a) 400 N b) 2,0 m/s
 85. a)  b) Aproximadamente 10,7 m/s
 86. 10 m/s
 87. a) 2,7 kW
 b) Aproximadamente 33 s
 88. a) 1,6 MW c) 6 144 famílias
 b) 428 MW
 89. c
 90. a) 80 km/h c) 4,0 h
 b) 280
 91. d
 92. a) $2,0 \cdot 10^2 \text{ s}$
 b) $8,0 \cdot 10^3 \text{ N}$
 c) $2,0 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$
 93. a) $\frac{\pi}{20} \text{ rad/s}$ c) 4,0 kN
 b) $5,0 \text{ m/s}^2$ d) $2,0 \cdot 10^5 \text{ W}$
 94. 17 J
 95. a) 3,0 N b) 9,0 m
 96. $p > \frac{v_0^2}{4g} + \frac{H}{2}$
 97. a)  b) $4,0 \cdot 10^2 \text{ J}$ e 40 N

98. e
 99. $\frac{1}{2}$
 100. a) $-3,6 \text{ J}$
 b) 180 N
 c) Módulo nulo.
 101. a) 1,0 kJ b) 50 W
 102. $\frac{3}{4}$

Tópico 7 – Energia mecânica e sua conservação

1. $4,5 \cdot 10^{11} \text{ J}$ 2. d
 4. c 5. $1,5 \cdot 10^3 \text{ J}$
 6. a) zero b) 4,9 J
 7. a 8. 6,4 J 9. b
 10. b 11. b 12. b
 13. c 14. b 16. a
 17. a) $5,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}$
 b) 300 N
 c) 4,0 J
 19. 8,0 J 20. c
 21. 12 J 22. d
 24. a) 400 J e zero.
 b) $2,0 \cdot 10^2 \text{ m/s}$
 25. b 26. e 28. a 29. b
 30. a) 4,0 kJ b) 20 m/s
 31. a) 10 m/s b) 3,0 kJ
 32. b
 34. a) 6,0 m/s b) 1,8 m
 35. a) 3,0 J b) 5,0 m
 36. a 38. 13,0 m 39. d
 40. a) 5,0 m e 10 m/s



41. e 42. c
 43. a) 20 J b) 6,0 m/s
 44. $v_B = \sqrt{v_0^2 + \frac{gh}{2}}$ e $v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$
 45. 8,0 m/s
 46. a) $-mgh$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
 47. a 49. a 50. $2\sqrt{gR}$

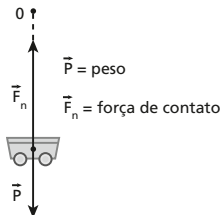
51. a) $T_a = T_b < T_c$
 b) $v_A < v_B = v_C$

52. d 53. b 55. 1,2 m

56. e

57. a) 20 m b) 160 N/m

59. a)



Banco de imagens/Arquivo da editora

b) 4,0 kN

60. $5,0 \cdot 10^{-2}$ J

61. a) 10 m/s b) 72 N

62. 10 J

63. a) 2 281 500 J b) 400,0 m

64. $3,0 \cdot 10^{-1}$ J

65. 2,0 kW 66. b

67. a) $\sqrt{11gL}$ b) 12 mg

68. d

69. $v_1 = \sqrt{2gl}$ e $v_2 = \sqrt{2,4gl}$

70. c

71. a) $5,0 \text{ m/s}^2$ b) $1,0 \text{ rad/s}$

72. d

73. a) Aproximadamente $9,2 \text{ m/s}^2$
 b) Aproximadamente $8,8 \text{ m/s}$

74. $\frac{11}{4}$

75. a) 2,5 m b) 5,0 m/s

76. a) 3 816,0 J c) 8,4 m
 b) 0,80 s

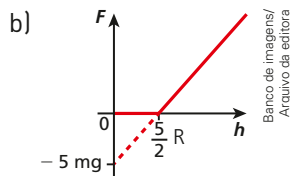
77. Aproximadamente 1,4 m/s

78. a) 28 m/s c) 30 m/s^2
 b) 100 N/m d) 30 m/s

79. 2,0 m/s 80. $\frac{4}{5}$ 81. c

82. a) $v_{II} = v_I = \sqrt{2gL(1 + \sin \alpha)}$
 b) $\Delta t_{II} < \Delta t_I$

83. a) $\frac{R}{2}$



Banco de imagens/Arquivo da editora

84. $\text{tg } \theta = \sqrt{2}$ 85. b

86. a) $2\sqrt{Rh}$ c) 2R

b) $\frac{R}{h} = 1$

87. $\sqrt{gR \left[\frac{1}{\cos \theta} + 2(1 + \cos \theta) \right]}$

88. a) Aproximadamente 7,5 cm

b) Não retorna: $F_{\text{mola}} < F_{\text{atd}}$

90. $\sqrt{\frac{3GM}{2R}}$ 91. 11,3 km/s

92. a

93. a) $\frac{GM^2}{4D}$ b) $-\frac{GM^2}{2D}$

Tópico 8 – Quantidade de movimento e sua conservação

1. $1,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

2. d 3. c

5. a) 60 N b) 2,0 cm

6. 14 s

8. 4,0 m/s, 7,0 m/s e 4,0 m/s

9. d

10. a) Sim. b) Não.

11. c 12. d 13. e

14. $4,0 \cdot 10^2$ J 16. 40 N

17. 100 kg 18. 20

20. $2,0 \cdot 10^4$ Ns

21. a) 20 s b) 1250 N

22. a) $18 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ b) $3,6 \cdot 10^2$ J

23. a) 6,0 m/s b) 1080 J

24. b 25. 11 26. d

28. 0,40 m/s 29. d

30. 2 min 30 s 31. c

32. e 33. d 34. e

36. $v_G = 1,0 \text{ m/s}$ e $v_P = 10 \text{ m/s}$

37. a) $8,4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$
 b) -2436 J

38. a) 0,20 m/s b) 20 N

40. a) $\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{3}$

b) Bloco 1: 2,0 J; bloco 2: 1,0 J

41. a) $\frac{t_2}{t_1} = 1$; $\frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

42. a) 58,5 km/h
 b) 0,025 ou 2,5%

44. a) $\frac{Q_H}{Q_P} = 1$

b) 50 cm

c) 0,50 m/s e 0,75 m/s

45. $\frac{M}{m} \sqrt{2gL}$

46. 24 m/s 47. c

48. $-1,0 \cdot 10^3$ m/s

49. a) 4,0 m/s para cima
 b) 432 J

50. 10 m/s

51. a) 1,0 m/s b) 1,0 m/s

53. a) $v\sqrt{2}$ b) $2\frac{M}{3}v^2$

54. e

55. a) 0,25; parcialmente elástica

b) 0; totalmente inelástica

c) 1; elástica

d) 0,6; parcialmente elástica

e) 0; totalmente inelástica

57. a) $\frac{m_1}{m_2} = 1$ b) $\frac{m_1}{m_2} = 0,6$

59. 14,4 km/h 60. 2,5 m/s

61. c

62. a) 10 cm/s b) 4,5 Ns

63. a) 0,6 b) 0,2 kg

64. b 65. b

67. $v_A' = -1,0 \text{ m/s}$ e $v_B' = 2,0 \text{ m/s}$

68. 10 m/s 69. c 70. b

71. A: 1,0 m/s; B: 4,0 m/s;
 C: 12 m/s

73. (A): 6,0 m/s; (B): 8,0 m/s

74. a) (1): $-4,0 \text{ m/s}$; (2): $1,0 \text{ m/s}$
 b) $\frac{5}{14}$

75. a) 0,5 b) 45%

76. a) 0,5; parcialmente elástico
 b) 8,0 kg
 c) $2,8 \cdot 10^4$ N

77. d

78. a) 2,0 m/s b) $-6,0$ J

79. $\frac{H}{9}$ 80. $3,0 \cdot 10^{-2}$ m

82. a) 2,0 m/s b) 20 cm

83. a) $\sqrt{\frac{h}{H}}$

b) $h = H$, elástico; $0 < h < H$, parcialmente elástico e $h = 0$, totalmente inelástico

- 84.a 85.a 86.c
 87. 20 kN
 88.a) 60 m/s b) $7,0 \cdot 10^2$ J
 89.c
 90.a) 1,0 m/s b) 80 J
 91. Aproximadamente 1,2 km/h
 92.a
 93.a) $\sqrt{\frac{2GM}{R_0}}$
 b) $\sqrt{\frac{GM}{R_0}}$
 c) $(\sqrt{8} - 1)\sqrt{\frac{GM}{R_0}}$
 94. Aproximadamente 5,31 MeV
 95.a
 96.a) 40,0 m/s
 b) 20,0 m/s
 c) 0,5
 d) $\tau = 0$ e $I = 30,0$ Ns
 97.a) 12,0 cm/s b) $7,56 \cdot 10^{-7}$ J
 98.a) 4,0 m/s
 b) Aproximadamente 3,5 m
 c) 2,0 m e a mola não será comprimida.
 99.b
 100.a) 2,0 m/s
 b) 2,0 m/s
 c) 1,0 m, e o bloco não atinge a caçapa.
 101.a) $1,0 \cdot 10^2$ J c) 1,0 m/s
 b) 6,0 m/s
 102.a) $\sqrt{\frac{gR}{2}}$
 b) $\frac{R}{4} \left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right)^2$
 103.a) 4,5 m/s c) 40 cm
 b) 5,0 cm
 104.c 105.b 106. 27°
 107.a) $\frac{\sqrt{3}}{3} v_0$ b) $\frac{2}{3}$
 108. $\frac{5}{6} v$
 109.a) 3,0 m/s e 5,0 m/s
 b) $\frac{9}{25}$
 c) $\frac{17}{32}$
 110. 5,0 cm

- 111.a) 2,0 g b) $5,6 \cdot 10^{-2}$ N
 112.a) 2,0 g · m/s
 b) 140 g
 113. 2,0 m
 114.a) Não.
 b) 4,0 m
 c) 640 kg · m/s
 115.a) 1,28 s; 25,6 m/s
 b) 24,0 m/s
 c) Maior que 18,4 m
 116. $\sqrt{\frac{(M+m)}{M}} \cdot 2gL$
 117. $e^{2n} H$
 118.a) 50,0 cm b) 390 N
 119. Partícula 1: $2,0 \cdot 10^4$ m/s;
 partícula 2: $1,0 \cdot 10^5$ m/s
 120.a) 3,0 m/s c) 4,0 m/s
 b) 5,0 m/s
 121.a) 90° b) $\frac{\sqrt{2}}{2} v_0$
 123.a
 124.a) $\frac{20}{27} R$
 b) **CM** interno à esfera terrestre, pois $\bar{x} < R$.
 125.a) $60 \cdot 10^3$ km/h
 b) 246 anos
 c) Aproximadamente 710 km/h
 127. **CM** da barra coincide com seu centro geométrico.
 128.c
 129. $\bar{x} = R$ e $\bar{y} = \frac{5R}{6}$
 131.b 132. 5,0 m/s
 133. Velocidade nula
 134.b 135.e
Unidade 3 – Estática
Tópico 1 – Estática dos sólidos
 1.e 3.d
 5.a) $2,0 \text{ N} \leq F_R \leq 14,0 \text{ N}$
 b) 10,0 N
 6.c 7.a
 8.a) Não.
 b) Os diagramas apresentados não estabelecem situações de equilíbrio. A linha poligonal formada pelos três vetores não é fechada.

- 10.a 11. 280 N 13.a
 14.e 15.b 16.e
 17. $\frac{P}{2 \sin \alpha}$
 18.d 19.e 20.d 21.b
 22.c 23.c 24.d
 26.a) 150 N b) 7,0 cm
 27.a) 25 cm b) $500\sqrt{2}$ N
 28.c 29.e 30.b
 31.a) $\frac{PR}{L}$
 b) $\frac{P\sqrt{L^2 + R^2}}{L}$
 32. Reação da parede: $P \operatorname{tg} \theta$;
 reação do plano: $\frac{P}{\cos \theta}$.
 33.b 34.c 35.e 36.e
 37.c 39.d 40.e 41.d
 43.a) $\frac{F_m}{F_p} = \frac{d_p}{d_m}$.
 b) 150 N
 45.c 46.e 48.c 49.d 50.d
 51.a 52. 1,5 m 53.c
 54.d 56.b 57.c
 58.a 59.c 60.a
 61. O peso do objeto de ferro preso na extremidade da haste desloca o centro de gravidade, situando-o abaixo do ponto de suspensão e estabelecendo o equilíbrio do tipo estável para o brinquedo.
 62.a
 63.a) **A**: instável; **B**: estável; **C**: indiferente.
 b) Em **A**, qualquer pequena perturbação fará a bolinha abandonar a posição e não mais retornar a ela. Em **B**, quando ligeiramente perturbada, a bolinha tende a retornar para a posição inicial. Equilíbrio estável. Em **C**, uma vez deslocada, a partícula permanece em repouso na nova posição. Equilíbrio indiferente.

64. a 65. d 66. e 67. b

68. e 69. b 70. a 71. e

73. b 74. b 75. e 76. d

77. a) 30% b) 22, 75

78. c

80. $\frac{V_p}{V_c} = 1,5$ e $M = 40$ kg

81. a 82. a 83. e 84. a 85. d

86. e 87. a 88. 6 cm

89. c 90. c 91. c 92. a 93. a

94. $\frac{P(x-y)}{4(x+y)}$

95. a 96. b 97. e 98. a 99. a

100. a 101. b 102. a 103. d

Tópico 2 – Estática dos fluidos

1. d

2. a) $1,0 \text{ g/cm}^3$
b) $1,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$

3. 1,26

5. a) $2,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$
b) $4,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$

6. c 8. c 9. d

10. $\frac{1}{2}$ 11. b

12. $\frac{p_A}{p_B} = \frac{1}{3}$

13. $\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2}$

14. $1,2 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ ou aproximadamente 0,12 atm.

15. a) $1,8 \cdot 10^3 \text{ N}$ b) $1,0 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

16. c 17. e

18. a) $p_A = p_B = p_C$
b) $F_A = F_B = F_C$

20. 7,0 N 22. d

23. 60 cmHg 24. $\frac{|f_1|}{|f_2|} = \frac{1}{4}$

25. $2,5 \cdot 10^2 \text{ Pa}$ 27. a

28. $\alpha \cong 60^\circ$ 29. 0,80 30. a

31. Gás **M**: 90 cmHg;
gás **N**: 20 cmHg

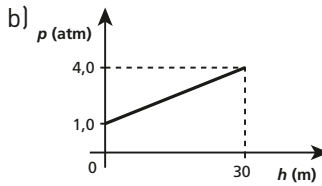
32. 0,32 atm 33. a

34. a) 30 m b) 1,0 m/s

35. $13,6 \text{ g/cm}^3$ 36. 24,0 cm

37. d 38. 80 N

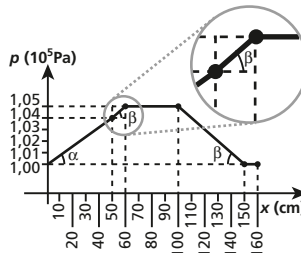
39. a) 1,0 atm ou $1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$



40. c 41. b

42. $x = \frac{8}{3} h$

43. a) $2,0 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$
b)



44. 786 mmHg

46. a 47. e

48. a) $1,0 \cdot 10^3 \text{ N}$
b) $3,0 \cdot 10^4 \text{ J}$ e $3,0 \cdot 10^4 \text{ J}$

49. e 50. b 51. d

53. a) $L = 10 \text{ cm}$; $A = 20 \text{ cm}$
b) $2,0 \text{ g/cm}^3$

54. a) 0,40 N
b) $8,0 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$

55. d 57. 90%

58. a) 6,3 N b) glicerina

59. e 60. $\frac{3}{4}$

61. a) 0,80 N b) 60%

62. a) Para cima.
b) $1,0 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$

63. a) 30 N c) 2,0 kg
b) 12 N

64. a) 3,0 N
b) $1,0 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$

65. a) 10 N b) 5,0 cm

66. d 68. e 69. b 70. b

71. c 72. c 74. b 75. d

77. A indicação de **(B)** aumentará, enquanto a indicação de **(b)** diminuirá.

78. b 79. a 80. 5,0 s

81. a) 20 m b) $4\sqrt{2}$ s

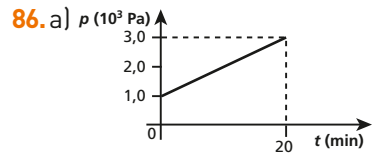
82. c

83. a) A partir do instante $t = 10$ s.
b) 60 N/m^2

84. a) 3,8 m c) 7,6 J

b) $3,8 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

85. 0,75 N



b) Fundo: $3,0 \cdot 10^3 \text{ N}$;
laterais: $4,5 \cdot 10^2 \text{ N}$

87. $1,2 \text{ g/cm}^3$

88. b 89. c

90. a) 50 N/m c) 107,5 cm
b) 30 N

91. a) 3,6 m/s
b) $6,25 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$

92. a) 1,5 cm
b) $2,2 \cdot 10^{-2} \text{ N}$

93. $h' = h$, pois o volume imerso é o mesmo em ambos os casos.

94. c

95. a) Aproximadamente 396,2 atm
b) $5,0 \cdot 10^4 \text{ m}^3$
c) 12,5%

96. b 97. $\frac{\rho_b - \rho}{\rho_b - \rho_c}$

98. d 99. $3,0 \text{ cm}^3$

100. a) 9,5%
b) 20,0 cm
c) Receber 74,24 kN.

101. 10 barras.

102. a) 17,6 kgf; 42,4 kgf
b) 60,0 kgf

103. c 104. 50 cm/s

105. a) $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
b) Líquido 1: 2; líquido 2: 1

106. b 107. b 108. b

110. 72 s ou 1 min 12 s

111. d 112. e 113. c

115. b 116. d

117. a) $1,5 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$
b) 810 toneladas.
c) Aproximadamente 100 km/h

118. Princípio de Bernoulli e aproximadamente $79,6 \text{ N/m}^2$.

119. $4,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ 120. a

122. $1,1 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$

124. a) $v = \sqrt{2g(H-h)} = \sqrt{2g(H-h)}$

b) $D = 2\sqrt{(H-h)h}$

125. c 126. a

Banco de imagens/
Arquivo da editora

Banco de imagens/
Arquivo da editora

Banco de imagens/
Arquivo da editora



O CONECTE agora é CONECTE LIVE!

O CONECTE, coleção voltada para o Ensino Médio que alia Tecnologia à Educação, apresenta uma novidade nesta reformulação: o CONECTE LIVE!

O CONECTE LIVE integra conteúdos digitais exclusivos às obras de autores renomados. Além disso, promove maior interação entre alunos, professores e autores. Livros digitais, objetos educacionais digitais, entre outros conteúdos interativos, compõem a coleção.

Outra novidade! As atualizações no material didático não se encerram no momento em que os livros são impressos. Ofertas complementares e atividades diferenciadas são disponibilizadas na plataforma digital ao longo de todo o ano escolar, garantindo novidades frequentes a professores e alunos!

Para conhecer todos os materiais e os serviços do CONECTE LIVE, acesse: <http://conecte.plurall.net/>