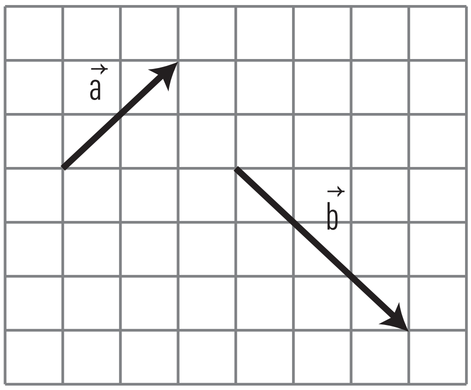
Vetores Algébrica

1. Soma de Vetores

Nesta aula, faremos um tratamento algébrico com os vetores. Comparado ao que vimos na aula anterior, algumas ferramentas matemáticas nos darão suporte para resolver problemas mais complexos durante os nossos estudos em Física.

1.2. Paralelogramo e sua regra

Olhando rapidamente para um polígono qualquer, vamos analisar a comutatividade da soma dos vetores, ou seja, a possibilidade de somar o vetor $\vec{a}$ com $\vec{b}$ e também $\vec{b}$ com $\vec{a}$, gerando um mesmo resultado.

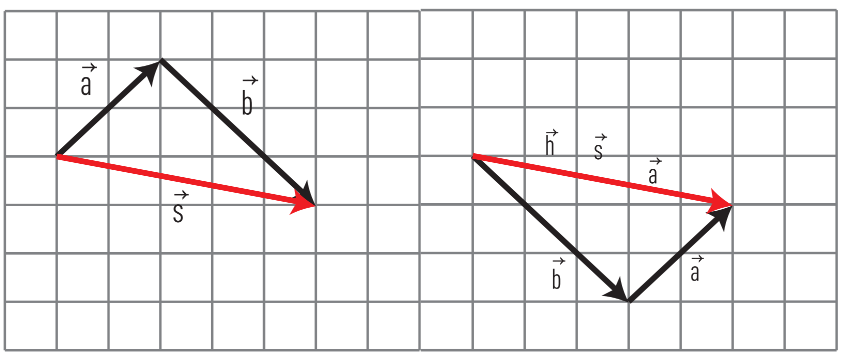


A propriedade comutativa na adição de vetores apresenta: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

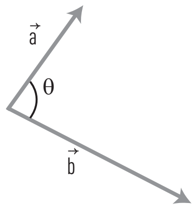
Em caso de um dos vetores ser nulo: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

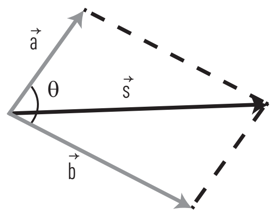
Preste atenção: $|\vec{s}\,| < |\,\vec{a}\,| + |\vec{b}\,|$

O módulo de $\vec{s}$ é menor que a soma dos módulos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ .Portanto, o módulo de $\vec{s}$ será obrigatoriamente igual à soma dos módulos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ somente no caso em que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tenham direção e sentido iguais.



A seguinte relação pode ser usada para calcular o módulo da soma de dois vetores quaisquer.





$$|\vec{s}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$$

A regra do paralelogramo é uma prática comum na soma de vetores.

1.3. Subtração de vetores

O módulo da diferença de dois vetores quaisquer pode ser calculado usando a seguinte relação:

$$|\vec{d}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$$

Em que θ é o ângulo formado entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ quando ambos estão partindo da mesma origem.

1.4. Multiplicação e divisão de um vetor por um número real

Definimos a multiplicação de um vetor $\vec{a}$ por um número real r da seguinte forma:

$$\vec{b} = r \cdot \vec{a}$$

Módulo: $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$

Direção: a mesma direção do vetor $\vec{a}$.

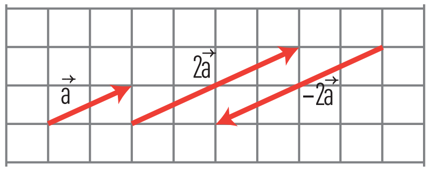
Sentido: se r é positivo, mesmo sentido de $\vec{a}$; se r é negativo, o sentido é oposto ao de $\vec{a}$.

Ao longo do ano, veremos exemplos como:

a) $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ (m escalar positivo)
b) $\vec{F} = |q| \cdot \vec{E}$ ($q > 0$ ou $q < 0$)

Por exemplo:

Na figura, representamos os vetores $\vec{a}$, $2\vec{a}$ e $-2\vec{a}$. Note que tanto $2\vec{a}$ como $-2\vec{a}$ têm módulos iguais ao dobro do módulo de $\vec{a}$. O vetor $2\vec{a}$ tem o mesmo sentido do vetor $\vec{a}$ e o vetor $-2\vec{a}$ tem sentido oposto ao do vetor $\vec{a}$.



Para dividir um vetor por um número real r, podemos utilizar o raciocínio de multiplicar o vetor $\vec{a}$ pelo inverso de r, ou seja, $\frac{1}{r}$.

Assim, o vetor resultante $\vec{c}$ será:

Podemos também dividir o vetor $\vec{a}$ por r, obtendo o vetor $\vec{c}$.

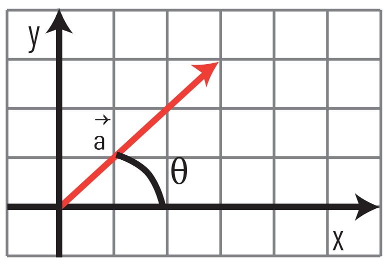
$$\vec{c} = \frac{1}{r}\, a$$

As características módulo, direção e sentido seguem o que vimos para multiplicação por número real.

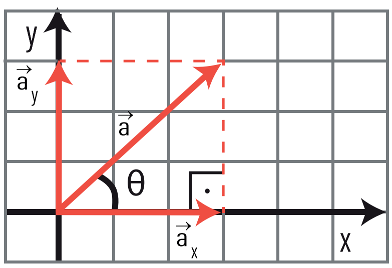
Se $r = 0$, não podemos calcular $\frac{\vec{a}}{r}$.

1.5. Projeções ortogonais ou decomposição de um vetor

Em Matemática, estudaremos a fundo o famoso plano cartesiano. Por enquanto, nos basta saber que se trata de um sistema referencial que contempla toda representação vetorial. Seja um vetor $\vec{a}$, conforme a representação abaixo:



A projeção de $\vec{a}$, no eixo (x) pode ser representada pelo vetor $\vec{a}_x$, bem como a projeção do vetor $\vec{a}$ no eixo (y) pode ser representado pelo vetor $\vec{a}_y$.



O vetor analisado pode ser representado como uma soma vetorial, ou seja:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Nesse caso:

$$\vec{a}_x = 3\vec{i}$$
$$\vec{a}_y = 3\vec{j}$$

Sendo $\vec{i}$ e $\vec{j}$ os vetores unitários nas direções indicadas pelos eixos (x) e (y), respectivamente o vetor também pode ser representando por:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$$

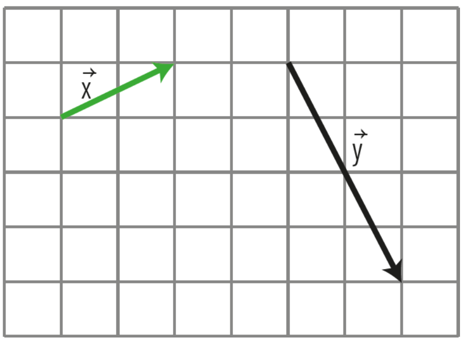
Devemos lembrar que os módulos dos componentes também podem ser representados por relações trigonométricas:

$$\text{sen}\theta = \frac{a_y}{a} \rightarrow a_y = a \cdot \text{sen}\theta$$

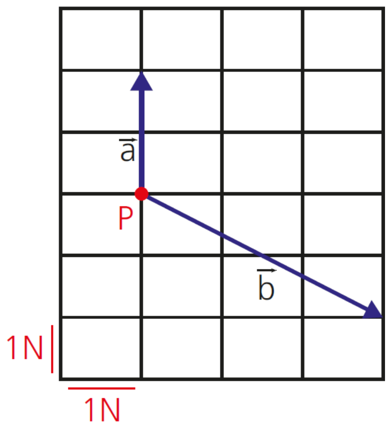
$$\cos\theta = \frac{a_x}{a} \rightarrow a_x = a \cdot \cos\theta$$

Exercícios de sala

1. Determinar o módulo da resultante dos vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Cada quadradinho mede uma unidade.



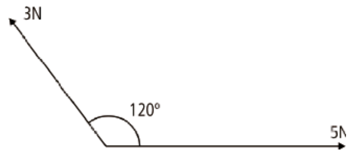
2. **(UNESP ADAPTADO)** Em escala, temos duas forças $\vec{a}$ e $\vec{b}$, atuando num mesmo ponto material P.



a) Represente na figura reproduzida a força $\vec{R}$ resultante das forças $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e determine o valor de seu módulo, em newtons.

b) Determine o cosa formado entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$

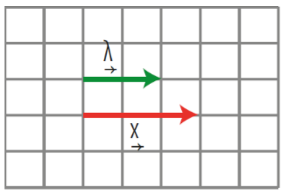
3. Sobre uma superfície lisa (atrito desprezível), um corpo está sendo tracionado por duas cordas. Qual a intensidade da força resultante Fr? (UEM)



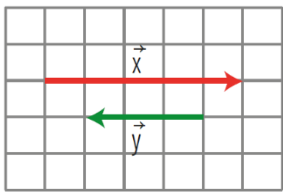
a) $Fr = \sqrt{19}$ N
b) $Fr = \sqrt{18}$ N
c) $Fr = \sqrt{34}$ N
d) $Fr = \sqrt{49}$ N
e) $Fr = \sqrt{2}$ N

4. Qual a soma dos vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, se cada quadradinho tem lados iguais a uma unidade.

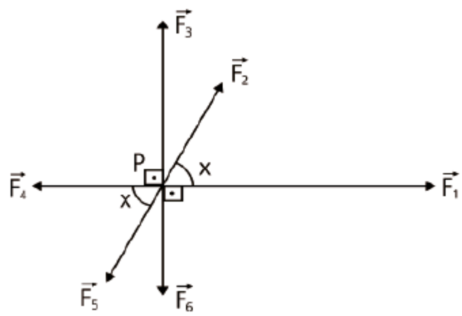
a)

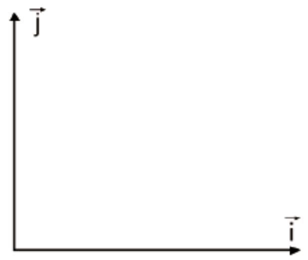


b)



5. Em um ponto material P, estão aplicadas seis forças coplanares $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$ e $\vec{F}_6$, representadas conforme figura a seguir, cujas intensidades são, respectivamente, 12 N, 8,0 N, 15 N, 6,0 N, 8,0 N e 7,0 N.

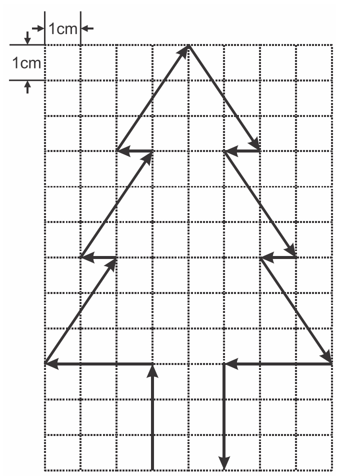




A resultante desse sistema de forças tem intensidade:
a) 10 N.
b) 8,0 N.
c) zero.
d) 12 N.
e) 16 N.

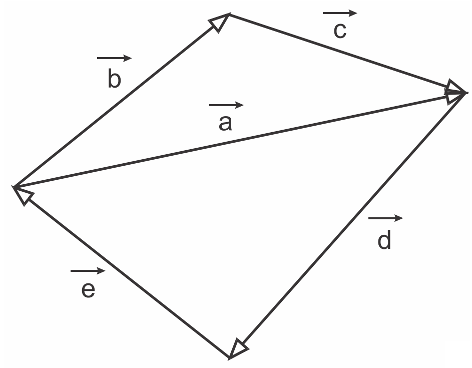
Estudo Individualizado (E.I.)

1. **(ACAFE 2015)** Considere a árvore de natal de vetores, montada conforme a figura a seguir.



A alternativa correta que apresenta o módulo, em cm, do vetor resultante é:
a) 4.
b) 0.
c) 2.
d) 6.

2. **(ESPCEX (AMAN) 2022)** O desenho a seguir representa a disposição dos vetores deslocamento não nulos: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$.

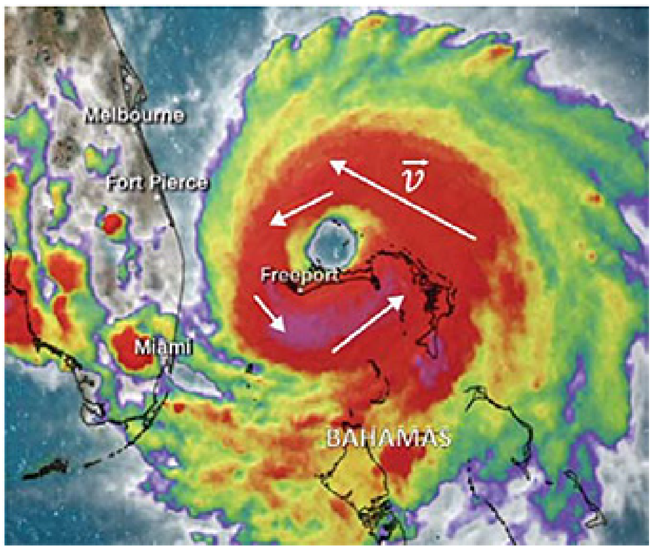


Desenho Ilustrativo - Fora de Escala

Podemos afirmar que, a partir do desenho, a relação vetorial correta, entre os vetores, é:

a) $\vec{b} + \vec{c}, = \vec{d} + \vec{e}$
b) $\vec{a} + \vec{d} = -\vec{b} - \vec{e}$
c) $\vec{e} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{d}$
d) $\vec{b} + \vec{d} = -\vec{e} - \vec{a}$
e) $\vec{b} + \vec{e} = -\vec{c} - \vec{d}$

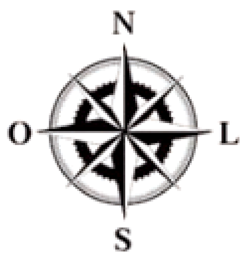
3. **(FUVEST-ETE 2022)** O furacão Dorian, em 2019, devastou a região do Caribe, movendo-se em velocidades de centenas de km/h. Na imagem em radar, estão representados, em escala, quatro vetores velocidade do vento.



Com base nessa informação, escolha o vetor que melhor indica a trajetória do furacão naquele momento.

a)	
b)	
c)	
d)	
e)	

4. **(UEL)** Em uma brincadeira de caça ao tesouro, o mapa diz que para chegar ao local onde a arca de ouro está enterrada, deve-se, primeiramente, dar dez passos na direção norte, depois doze passos para a direção leste, em seguida, sete passos para o sul, e finalmente oito passos para oeste.



A partir dessas informações, responda aos itens a seguir.

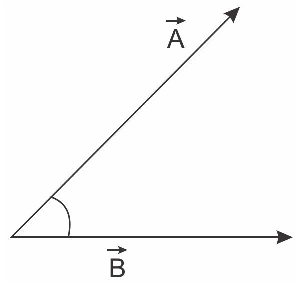
a) Desenhe a trajetória descrita no mapa, usando um diagrama de vetores.
b) Se um caçador de tesouro caminhasse em linha reta, desde o ponto de partida até o ponto de chegada, quantos passos ele daria?

Justifique sua resposta, apresentando os cálculos envolvidos na resolução deste item.

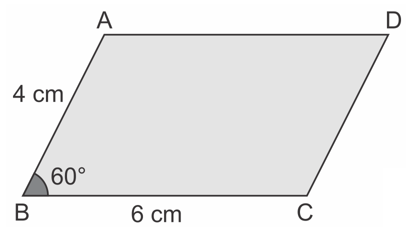
5. **(EEAR 2019)** Dois vetores V_1 e V_2 formam entre si um ângulo θ e possuem módulos iguais a 5 unidades e 12 unidades, respectivamente. Se a resultante entre eles tem módulo igual a 13 unidades, podemos afirmar corretamente que o ângulo θ entre os vetores V_1 e V_2 vale:
a) 0°
b) 45°
c) 90°
d) 180°

6. **(EEAR)** A adição de dois vetores de mesma direção e mesmo sentido resulta num vetor cujo módulo vale 8. Quando estes vetores são colocados perpendicularmente, entre si, o módulo do vetor resultante vale $4\sqrt{2}$. Portanto, os valores dos módulos destes vetores são
a) 1 e 7.
b) 2 e 6.
c) 3 e 5.
d) 4 e 4

7. **(G1 - CFTCE 2007)** Os deslocamentos A e B da figura formam um ângulo de 60° e possuem módulos iguais a 8,0 m. Calcule os módulos dos deslocamentos A + B, A – B e B – A e desenhe-os na figura.



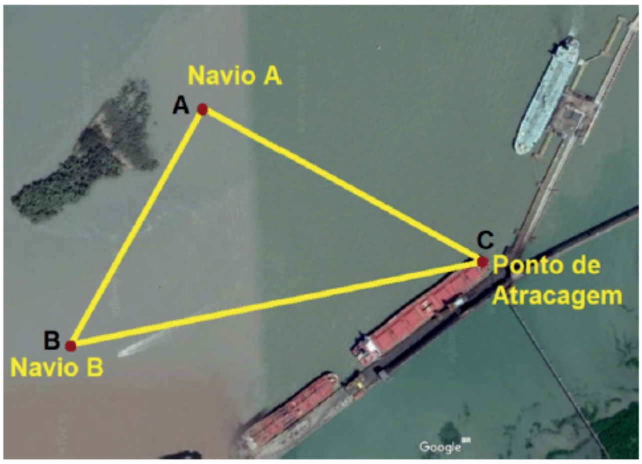
8. **(UPE-SSA 1 2022)** No paralelogramo ABCD da figura, as medidas dos segmentos AB e BC são, respectivamente, 4 cm e 6 cm, e a medida do ângulo formado por esses segmentos é 60°.



Qual a medida, em cm, da diagonal AC? Use $\sqrt{7} = 2,65$.
a) 5,1
b) 5,3
c) 5,6
d) 6,2
e) 6,8

9. (UEMA 2020) O Porto do Itaqui, porto brasileiro localizado na cidade de São Luís do estado do Maranhão, é nacionalmente conhecido por ter uma das maiores amplitudes de maré do Brasil, podendo ultrapassar 7 metros.
O Itaqui é o 11º no ranking geral e o 6º entre os portos públicos em movimentação de cargas.
A profundidade de seu canal de acesso é de 23 metros. Frequentemente, existem navios atracando, descarregando, desatracando e à espera na baía de São Marcos.

Analise a imagem a seguir.



https://pt.wikipedia.org/wiki/Porto_do_Itaqui

Considere a medida do ângulo $A\hat{C}B = 60°$, a distância AC igual a 5 km e a distância CB igual a 8 km Nessas condições: (Use: $\cos 60° = 0{,}5$), calcule a distância do navio A até o navio B, em km.

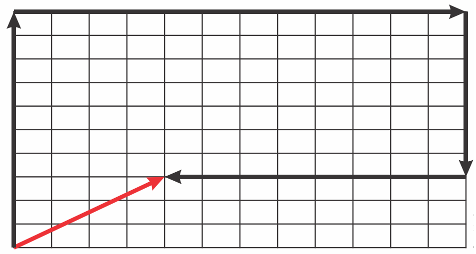
10. (FGV 2020) Jorge e Miguel estão jogando tênis. Jorge rebate a bolinha e esta percorre 16 metros em linha reta. Miguel a devolve em linha reta com um ângulo de 30° com a linha reta descrita pela bolinha após a rebatida de Jorge. Desta vez, a bolinha percorre 10 metros. Que distância deverá percorrer Jorge para rebater a bolinha?

Use a aproximação: $\sqrt{3} = 1{,}7$.

Gabarito (E.I.)

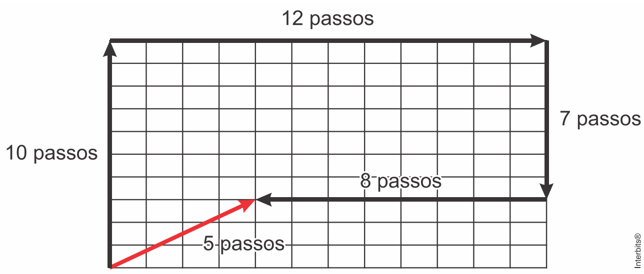
1. C **2.** E **3.** B

4.
Trajetória descrita em quadrículas, cada uma contendo um passo de distância:



a) Os vetores pretos representam os passos dados nas direções sugeridas, sendo o ponto de partida à esquerda do diagrama, sendo 10 passos no sentido norte, doze no sentido leste, sete para o sul e oito para oeste.
b) Em linha reta do ponto de partida até o ponto de chegada está representado no diagrama com a cor vermelha e a soma vetorial de todos os passos dados e representados em preto, ou seja, o vetor resultante. O seu cálculo é realizado usando o teorema de Pitágoras entre o início e o final do trajeto:

$R = \sqrt{4^2 + 3^2} \therefore R = 5$ passos.

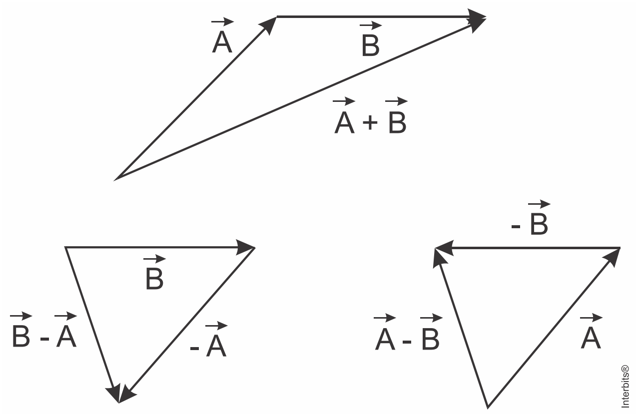


5. C **6.** D

7.

$$|A + B| = 8\sqrt{3}\ \text{m}$$
$$|A - B| = |B - A| = 8\ \text{m}$$

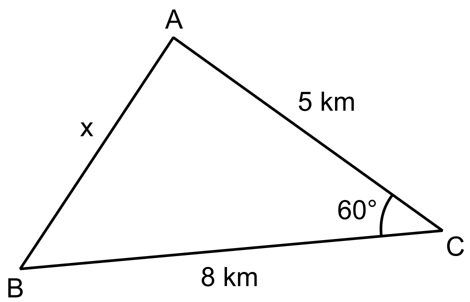
Observe a figura a seguir:



8. B

9.

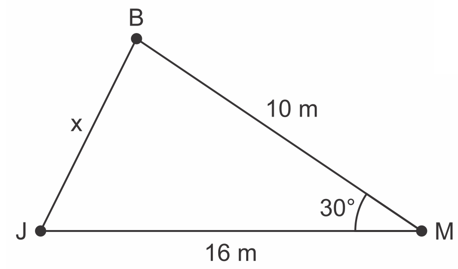
Aplicando a lei dos cossenos no triângulo abaixo, obtemos a distância x entre o navio A e o navio B:



$$x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60°$$
$$x^2 = 25 + 64 - \cancel{2} \cdot 40 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$
$$x^2 = 49$$
$$\therefore x = 7\ \text{km}$$

10.

Sendo x a distância procurada, pela lei dos cossenos, obtemos:



$$x^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos 30°$$
$$x^2 = 256 + 100 - 320 \cdot \frac{1{,}7}{2}$$
$$x = \sqrt{84}$$
$$\therefore x = 2\sqrt{21}\ \text{cm}$$