EXPONENCIAIS II

Função Exponencial

O assunto de funções exponenciais, no qual trabalharemos nesta seção é comumente usado para descrições de crescimento de colônia de bactérias, decaimento radioativo, cálculo de juros, entre outros. Comecemos então apresentando a forma da função exponencial:

$$y = b^x$$

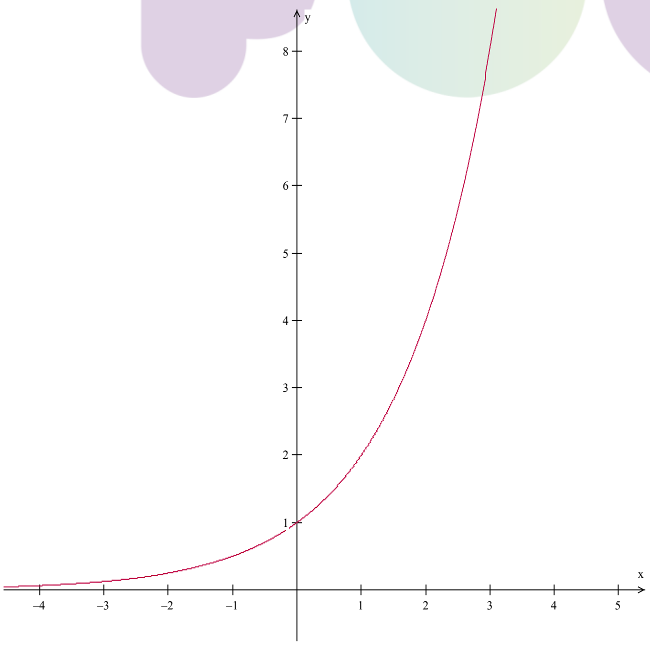
Você já deve ter ouvido a expressão "cresce exponencialmente" em jornais para determinar o aumento de juros ou mesmo inflação em determinado período. Então nesse caso existe uma função que representa esse aumento, e é dada pela forma apresentada.

O termo b é sempre maior que 0(zero) e o termo X pode ser qualquer número real.

Gráfico da função:

Se b>1 temos um gráfico crescente: Exemplo:

$f(x) = 2^x$



Para construirmos o gráfico, montamos uma tabela com pontos.

Para x=-1:

$f(x) = 2^{-1} \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$

Para x = 0

$f(x) = 2^0 \rightarrow f(x) = 1$

Para x=1

$f(x) = 2^1 \rightarrow f(x) = 2$

Para x=2

$f(x) = 2^2 \rightarrow f(x) = 4$

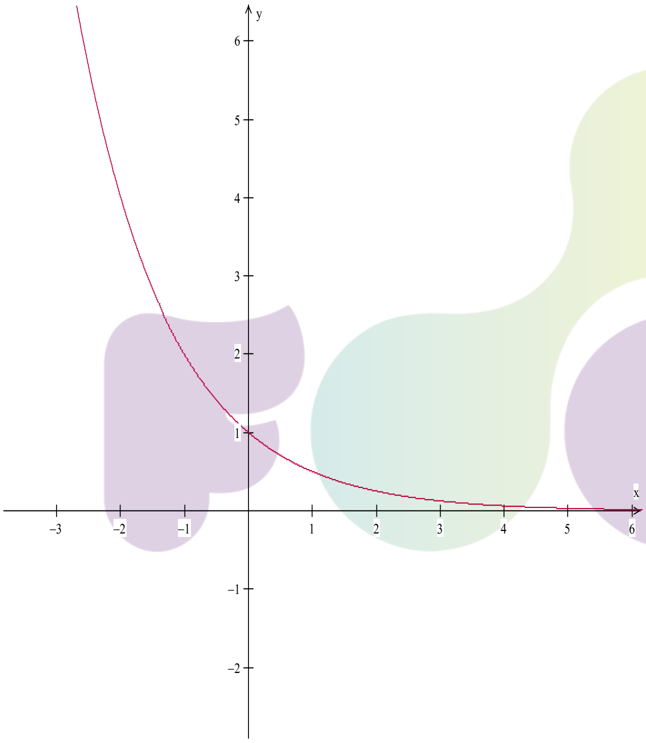
Para x=3

$f(x) = 2^3 \rightarrow f(x) = 8$

Se colocarmos esses pontos no sistema cartesiano ficará como a ilustração acima.

X	Y
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

Se 0<b<1 temos um gráfico decrescente. Podemos montar uma tabela com alguns pontos também. Pegaremos como exemplo $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Para x=-3:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ → $f(x) = 8$

Para x=-2:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ → $f(x) = 4$

Para x=-1:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ → $f(x) = 2$

Para x=0:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0}$ → $f(x) = 1$

Para x=1:

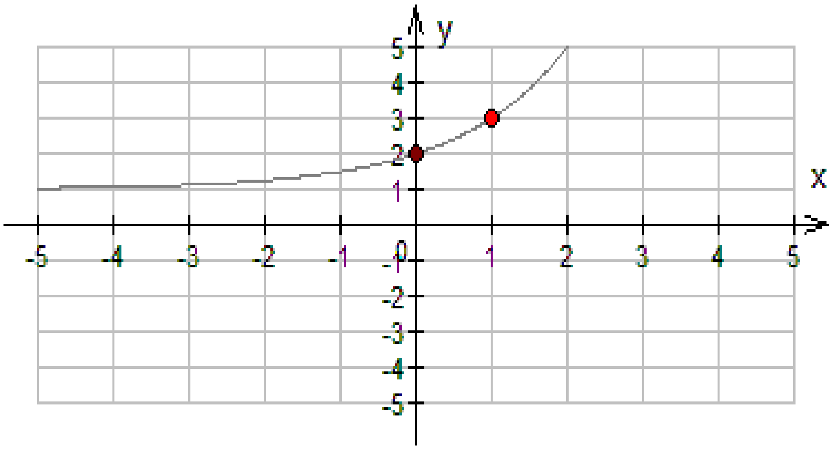
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$ → $f(x) = \frac{1}{2}$

X	Y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2

A partir dessa tabela de pontos construímos o gráfico ilustrado acima.

Exemplo:

O gráfico a seguir corresponde a uma função do tipo y = b^x + c. determine a fórmula dessa função.



Para resolver essa questão, vamos achar pontos do gráfico:

Quando X=0, temos que Y=2.

Quando X=1, temos Y=3

Portanto, temos os pontos A(0,2) e B(1,3). Agora podemos substituir esses pontos na equação modelo que o problema trouxe.

$y = b^x + c$

Para o ponto A:

$2 = b^0 + c$

Como b^0é 1 conseguiremos descobrir o valor de C.

$2 = 1 + c$

$c = 1$

Para o ponto B:

$3 = b^1 + c$

$3 = b + 1$

$b = 2$

Portanto a função procurada substituindo os valores de b e c é:

$f(x) = b^x + c = 2^x + 1$

Exercício 1:

Sendo *a* e *k* constantes reais e sabendo-se que o gráfico da função $f(x)=a2^{kx}$ passa pelos pontos $A(0,5)$ e $B(1,10)$, o valor da expressão $2a+k$ é:

Sabemos dois pontos da função, então vamos substituir esses pontos na equação:

Ponto A (0,5): Quando x = 0 a função vale 5:

$f(x) = a.2^{kx}$

$5 = a.2^{k0}$

$5 = a.2^{0}$

$5 = a$

Agora substituindo o valor do ponto B(1,10): Quando x=1 a função vale 10:

$f(x) = a.2^{kx}$

$10 = a.2^{k}$

Mas sabemos o valor de a = 5:

$10 = 5.2^{k}$

$2 = 2^{k}$

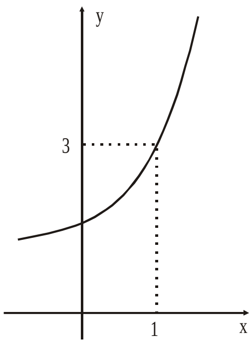
Portanto para que a relação seja valida, tem-se que k = 1.

Então:

2.a + k = 2.(5) + 1 = 11

Exercício 2:

Na figura temos o esboço do gráfico $y = a^{x} + 1$. O valor de 2^{3a-2} é:



Pelo gráfico podemos observar que conhecemos um ponto da função A(1,3), ou seja, quando x vale 1, o valor da função y é 3.

Vamos então substituir essa informação na equação geral:

$y = a^x + 1$

$3 = a^1 + 1$

$a = 3 - 1 = 2$

Achamos o valor de “a”. Vamos substituir na expressão que o exercício nos pediu:

$2^{3a-2} =$

$= 2^{3.2-2}$

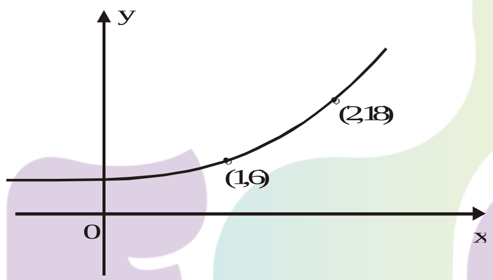
$2^4 = 16$

Portanto:

$2^{3a-2} = 16$

Exercício 3:

O gráfico representa a função $y = m.a^x$. Nessas condições, o valor de a^mé:



Novamente temos dois pontos do gráfico nesse exercício que podemos utilizar para resolver o problema. Para o ponto A(1,6) quando X = 1 a função Y = 6, e para o ponto B(2,18) quando X = 2, a função Y = 18.

Agora vamos substituir esses dois pontos na equação geral da função:

Para o ponto A(1,6) e B(2,18):

$y = m.a^x$

$6 = m.a^1$

$18 = m.a^2$

Vou escrever a expressão de modo diferente:

$18 = m.a.a$

Mas sabemos que $m.a = 6$

$18 = 6.a$

Portanto $a = 3$

E ainda $6 = m.a = m.3$

$m = 2$

Substituindo na equação geral:

$y = 2.3^x$ (Equação que procuramos)

Exercício 4:

Após beber um tanto de cachaça um motorista passa a ter 4 gramas de álcool por litro de sangue. Se isso ocorrer na hora zero, após "t" horas o motorista terá 4 . $(0,5)^t$ gramas de álcool por litro de sangue. Nessas condições, a quantidade de álcool em seu sangue após 3 horas será?

A função $y = 4.(0.5)^t$ representa a quantidade de gramas de álcool por litro de sangue ao passar das horas. Quando t = 0:

$y = 4.(0.5)^0 = 4$ *gramas de álcool por litro de sangue como o exercício já passou*

Quando t = 3 horas:

$y = 4.(0.5)^3 = 4.(0{,}125) = 0{,}5$ *gramas de álcool por litro de sangue*

Exercício 5:

Um computador desvaloriza-se exponencialmente em função do tempo, de modo que seu valor *y*, daqui a *x* anos, será $y = A \cdot k^x$, em que *A* e *k* são constantes positivas. Se hoje o computador vale R$5 000,00 e valerá a metade desse valor daqui a 2 anos, seu valor daqui a 6 anos será:

Para resolvermos esse exercício precisamos saber retirar dois pontos em que conhecemos o valor de X e Y da função.

Hoje é contado como tempo 0, ou seja x = 0 anos, o valor do computador é R$5 000,00. Portanto temos o ponto B(0,5000).

Daqui 2 anos, x = 2 anos, o valor do computador é metade do valor inicial, ou seja, R$2 500,00. Portanto temos o ponto C(2,2500).

Agora substituímos esses pontos na função geral dada:

$y = A.k^x$

$5000 = A.k^0$ (Ponto B)

$A = 5000$

$2500 = A.k^2$

$2500 = 5000.k^2$

$\frac{1}{2} = k^2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = k$

Portanto nossa função é:

$y = 5000.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$