

1. A equação dos fabricantes de lentes

Demonstração da equação dos fabricantes de lentes

1ª parte: dióptro esférico

Consideremos uma superfície esférica separando dois meios homogêneos, (1) e (2), de índices de refração n_1 e n_2 . Vamos supor que $n_1 < n_2$. Tudo se passa como se fossem, por exemplo, o ar e o vidro. A figura 1 nos mostra a formação da imagem de um ponto P em I , por refração.

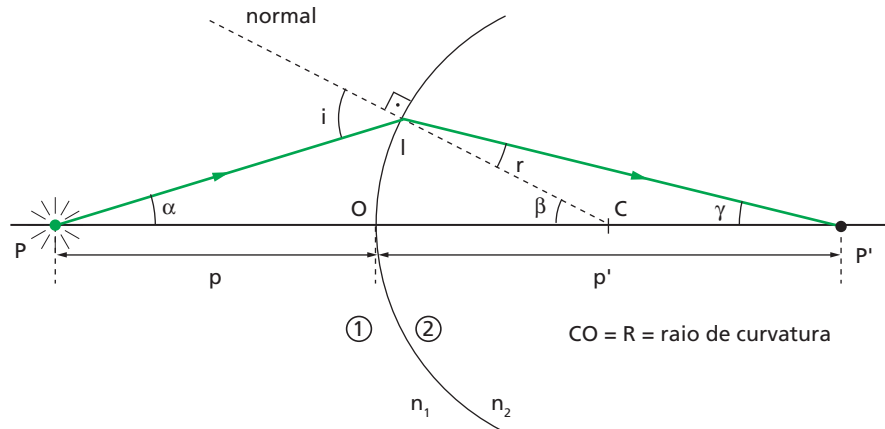


Figura 1. Dióptro esférico.

A refração obedece à Lei de Snell. Vale a equação:

$$n_1 \cdot \text{sen } i = n_2 \cdot \text{sen } r$$

Como o ângulo de incidência é muito pequeno (condições de Gauss), podemos fazer:

$$\text{sen } i \cong i \quad \text{e} \quad \text{sen } r \cong r \Rightarrow n_1 \cdot i \cong n_2 \cdot r \quad \text{(I)}$$

No triângulo PIC, temos:

$$i = \alpha + \beta$$

No triângulo CIP', temos:

$$\beta = r + \gamma \Rightarrow r = \beta - \gamma$$

Voltando com essas equações a (I), temos:

$$\begin{aligned} n_1 \cdot (\alpha + \beta) &= n_2 \cdot (\beta - \gamma) \\ n_1 \cdot \alpha + n_1 \cdot \beta &= n_2 \cdot \beta - n_2 \cdot \gamma \\ n_1 \cdot \alpha + n_2 \cdot \gamma &= (n_2 - n_1) \beta \end{aligned} \quad \text{(II)}$$

Como os ângulos α , β e γ são pequenos, podemos considerar OI retilíneo e perpendicular ao eixo principal do dióptro.

Voltando ao triângulo POI , onde α é muito pequeno, podemos escrever:

$$\text{tg } \alpha = \frac{OI}{OP} \quad \text{e} \quad \text{tg } \alpha \cong \alpha \Rightarrow \alpha \cong \frac{OI}{p} \quad \text{(III)}$$

No triângulo OIP' , onde γ é muito pequeno, podemos escrever:

$$\text{tg } \gamma = \frac{OI}{OP'} \quad \text{e} \quad \text{tg } \gamma \cong \gamma \Rightarrow \gamma \cong \frac{OI}{p'} \quad \text{(IV)}$$

No triângulo OIC, onde β é muito pequeno, podemos escrever:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{OI}{OC} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \beta \cong \beta \Rightarrow \beta \cong \frac{OI}{R} \quad (\text{V})$$

Substituindo as equações (III), (IV) e (V) em (II), vem:

$$n_1 \cdot \frac{OI}{p} + n_2 \cdot \frac{OI}{p'} = (n_2 - n_1) \cdot \frac{OI}{R}$$

Simplificando, temos:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = (n_2 - n_1) \cdot \frac{1}{R}$$

2ª parte: lente esférica

Uma lente esférica é um conjunto de dois dióptros esféricos, como o da figura 2.

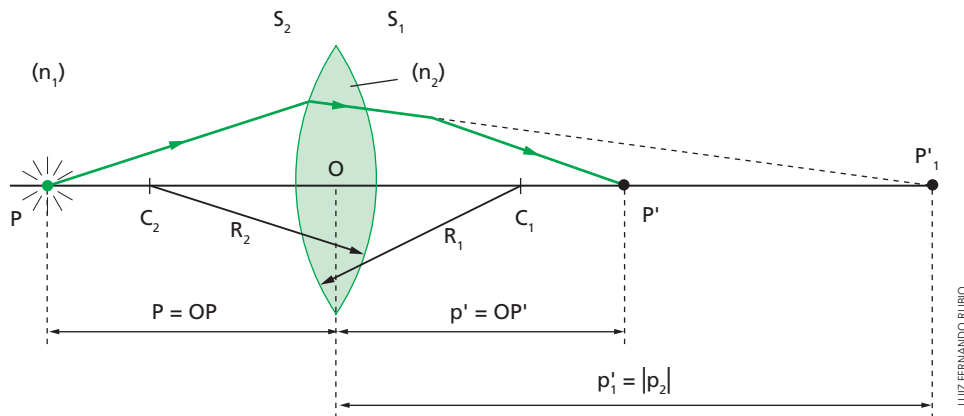


Figura 2. Lente delgada (espesura desprezível).

A imagem P'_1 , do objeto P , conjugada pelo primeiro dióptro, de superfície S_1 , tem abscissa p'_1 . Vale:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'_1} = (n_2 - n_1) \cdot \frac{1}{R_1} \quad (\text{VI})$$

A imagem real P'_1 é objeto virtual para o dióptro de superfície S_2 . Ele conjuga a imagem final P' .

Temos, então, $p_2 = -p'_1$:

$$\frac{n_2}{p_2} + \frac{n_1}{p'} = (n_2 - n_1) \cdot \frac{1}{R_2} \Rightarrow \frac{n_2}{-p'_1} + \frac{n_1}{p'} = (n_2 - n_1) \cdot \frac{1}{R_2} \quad (\text{VII})$$

Somemos as equações (VI) e (VII) membro a membro:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'_1} + \frac{n_2}{-p'_1} + \frac{n_1}{p'} = (n_2 - n_1) \cdot \frac{1}{R_1} + (n_2 - n_1) \cdot \frac{1}{R_2}$$

Fazendo a simplificação, ao dividir por n_1 vem:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_1}{p'} = (n_2 - n_1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

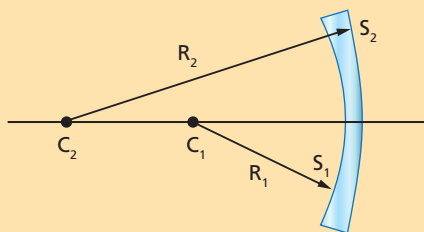
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Exercícios

1. Uma lente esférica de vidro, delgada, convexo-côncava, imersa no ar, tem o raio da superfície côncava igual a 20,0 cm e o da superfície convexa igual a 40,0 cm. Sendo o índice de refração do vidro, em relação ao ar, igual a 1,50, determine:

- a) sua vergência, em dioptrias;
b) sua distância focal, em metros.

Resolução:



LUIZ FERNANDO RUBIO

- a) Para o cálculo da vergência, temos:

1º) para a face côncava S_1 :

$$R_1 = -20,0 \text{ cm} = -0,200 \text{ m}$$

2º) para a face convexa S_2 :

$$R_2 = +4 \text{ cm} = +0,40 \text{ m}$$

$$n_{2,1} = \frac{n_{\text{vidro}}}{n_{\text{ar}}} = \frac{1,50}{1,00} = 1,50$$

Aplicando a equação dos fabricantes:

$$C = \frac{1}{f} = (n_{2,1} - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C = \frac{1}{f} = (1,50 - 1) \cdot \left(\frac{1}{0,200} + \frac{1}{0,400} \right)$$

$$C = -1,25 \text{ di}$$

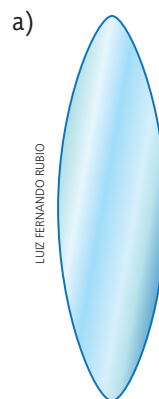
- b) Sua distância focal é dada pela definição de vergência:

$$C = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{C}$$

$$f = \frac{1}{-1,25} \Rightarrow f = -0,80 \text{ m}$$

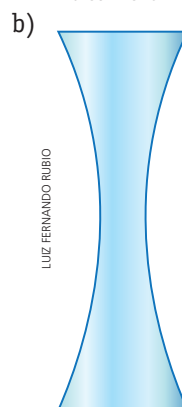
Observação: Como era de se esperar, a lente convexo-côncava, no ar, tem um comportamento divergente.

2. Uma lente delgada plano-convexa é constituída de vidro de índice de refração 1,50. O raio de curvatura da face convexa é 3,0 cm, e a lente está imersa no ar. Determine sua distância focal.
3. Todas as lentes de vidro abaixo, representadas por sua secção transversal, apresentam a face esférica com o mesmo raio R de curvatura. O índice de refração absoluto do vidro é N e as lentes estão imersas no ar. Determine a convergência C de cada uma delas.



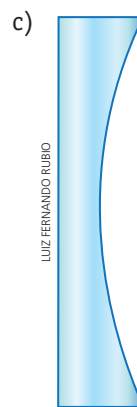
LUIZ FERNANDO RUBIO

biconvexa



LUIZ FERNANDO RUBIO

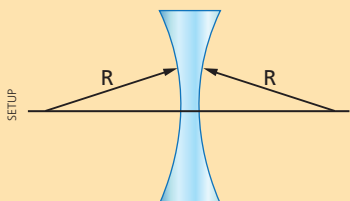
bicôncava



LUIZ FERNANDO RUBIO

plano-côncava

4. Uma lente bicôncava simétrica cujas faces têm raios iguais a R , apresenta distância focal de módulo 10 cm quando se encontra no ar. Sabe-se que o vidro da lente possui índice de refração 1,5.



Determine:

- os raios das faces;
- a nova distância focal se imergirmos a lente num líquido de índice de refração 1,8;
- nas condições do item *b*, qual é o comportamento óptico da lente?

Resolução:

- Determinação dos raios R , usando a equação dos fabricantes:

$$\frac{1}{f} = (n_{2,1} - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

A lente está imersa no ar, possui índice de refração 1,8 e tem distância focal de módulo: $|f| = 10$ cm. Porém, seu comportamento é divergente: $f < 0$.

$$-\frac{1}{10 \text{ cm}} = (1,5 - 1) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right)$$

$$-\frac{1}{10 \text{ cm}} = 0,5 \cdot \frac{2}{R} \Rightarrow R = -10 \text{ cm}$$

O sinal negativo é uma decorrência da convenção de Gauss. Na realidade os raios medem 10 cm cada um.

- A lente é imersa num líquido mais refringente:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1,5}{1,8} - 1 \right) \cdot \left(-\frac{1}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{10 \text{ cm}} \right)$$

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1,5 - 1,8}{1,8} \right) \cdot \left(-\frac{2}{10 \text{ cm}} \right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{-0,3}{1,8} \cdot \left(-\frac{1}{5 \text{ cm}} \right) \Rightarrow f = 30 \text{ cm}$$

- o novo comportamento da lente é agora convergente, pois a distância focal tornou-se positiva.

2. Aberrações cromáticas na lente

No capítulo anterior, estudamos o fenômeno da dispersão da luz no prisma. Como vimos, ele resulta do fato de serem diferentes entre si os respectivos índices de refração do vidro para cada uma das cores que compõem a luz branca incidente. Cada cor sofre um desvio angular diferente: por isso ocorre a dispersão.

Radiação	Vidro crown	Vidro flint	Dissulfeto de carbono
Vermelho	1,5146	1,6224	1,6182
Amarelo	1,5171	1,6272	1,6276
Azul	1,5233	1,6385	1,6523
Violeta	1,5325	1,6625	1,6994

Tabela 1. Variação do índice de refração de acordo com o meio e com a cor (radiação).

Numa lente de vidro também ocorre um fenômeno semelhante, quando um feixe de luz branca incide sobre ela, e esta dispersão da luz dificulta a formação nítida de imagens. Objetos luminosos brancos apresentam imagens brancas com contornos coloridos e indefinidos. Este fato constitui um fenômeno denominado **aberração cromática**.

Numa lente convergente de vidro, por exemplo, o desvio da luz vermelha é menor que o da luz azul (fig. 3). O inverso ocorre numa lente divergente (fig. 4).

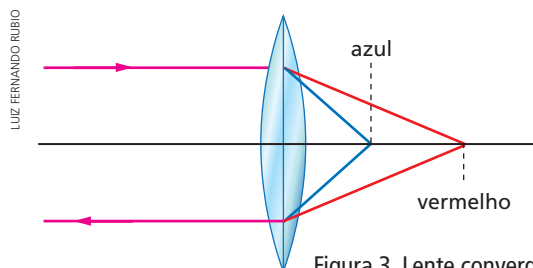


Figura 3. Lente convergente.

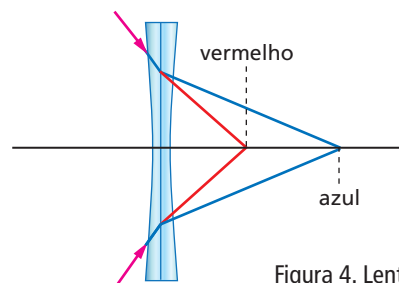


Figura 4. Lente divergente.

A figura nos sugere uma maneira de tentar corrigir a aberração cromática, pelo menos para duas cores distintas. É possível combinar duas lentes de vidros diferentes (*crown* e *flint*), sendo uma delas convergente e a outra divergente, obtendo-se uma lente convergente acromática (que não apresenta aberração cromática), pelo menos para duas radiações distintas. Por exemplo, podemos acoplar uma lente plano-convexa de vidro *crown* com uma lente convexo-côncava de vidro *flint* (fig. 5). Seja:

- f' = distância focal da lente de vidro *flint*;
- f'' = distância focal da lente de vidro *crown*;
- f = distância focal do conjunto.

Do teorema das vergências, temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f''} \quad (1)$$

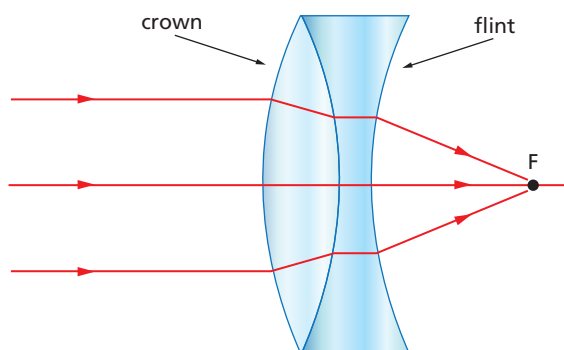
A condição de acromatismo é que se obtenha a mesma distância focal f , tanto para a cor azul como para a cor vermelha.

Para a radiação "azul", teremos as distâncias focais f'_a e f''_a , respectivamente, nas lentes de vidro *flint* e *crown*.

Para a radiação "vermelho", teremos as distâncias focais f'_v e f''_v , respectivamente, nas lentes de vidro *flint* e *crown*.

Da equação (1) e da condição de acromatismo, resulta:

$$\frac{1}{f'_a} + \frac{1}{f''_a} = \frac{1}{f'_v} + \frac{1}{f''_v}$$



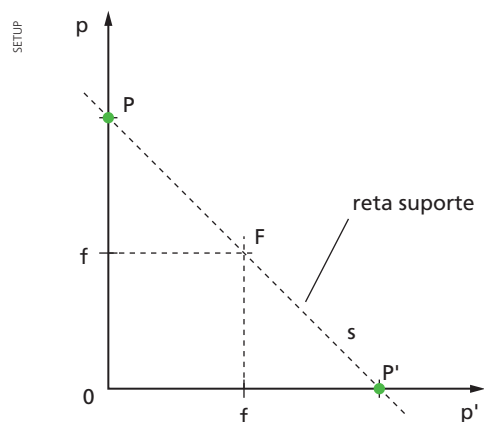
LUIZ FERNANDO RUBIO

Figura 5.

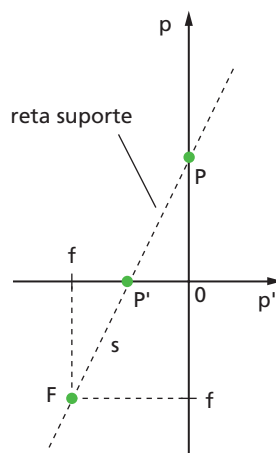
3. Método gráfico das coordenadas ou método de Pierre Lucie – Espelhos esféricos e lentes

O método gráfico de Pierre Lucie é um interessante processo para obter a abscissa p' da imagem (dado p) ou p do objeto (dado p'). Ele pode ser usado tanto para espelhos esféricos como para lentes esféricas que respeitam as condições de astigmatismo de Gauss.

Construímos um par de eixos cartesianos usando p e p' e nele determinamos o ponto $F(f, f)$, correspondente ao foco. A seguir, traçamos uma reta (s) qualquer que passe por F e esta interceptará os respectivos eixos nos pontos P' e P , como mostra a figura 6. O ponto P' corresponde à imagem e sua abscissa é p' ; o ponto P corresponde ao objeto e sua ordenada é p .



a) Espelho côncavo ou lente convergente: $f > 0$.



b) Espelho convexo ou lente divergente: $f < 0$.

Figura 6. Apresentação do MGC.

A reta suporte (s) ficará determinada se conhecermos dois de seus pontos (por exemplo: F e P , sendo o terceiro a determinar).

Nas lentes convergentes e nos espelhos côncavos, a distância focal é positiva e o ponto F cai no 1º quadrante, enquanto nas lentes divergentes e espelhos convexos a distância focal é negativa e o ponto F está no 3º quadrante.

Ressaltemos mais uma vez o papel da reta suporte: ela não representa a função $p \times p'$; ela é uma simples reta auxiliar. O seu papel é apenas geométrico.

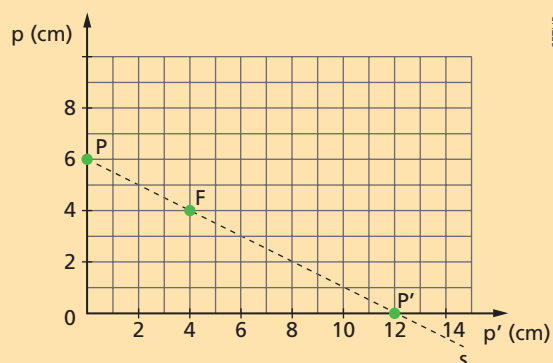
Exercícios

5. Diante de uma lente delgada esférica, de distância focal 4,0 cm, encontra-se um ponto luminoso sobre o seu eixo principal, situado a 6,0 cm do centro óptico. Usando o Método Gráfico das Coordenadas, determine:

- a abscissa da imagem;
- a natureza da imagem.

Resolução:

O MGC requer o uso de um quadriculado, onde serão construídos os eixos cartesianos p e p' . Inicialmente, plotamos o ponto F (4;4). A seguir, determinamos o ponto P sobre o eixo das ordenadas, tal que $p = 6,0$ cm. Passando pelos pontos P e F , desenhamos a reta suporte (s), que interceptará o eixo das abscissas em P' .



- A reta suporte (s) determinou o valor da abscissa da imagem, ou seja, $p' = 12$ cm.
- Como a abscissa da imagem é positiva, sua natureza é real.

6. Um objeto real puntiforme encontra-se no eixo principal de uma lente esférica delgada convergente, a 3,0 cm de seu centro óptico. A lente possui distância focal 2,0 cm. Determine, pelo MGC e usando um papel quadriculado:

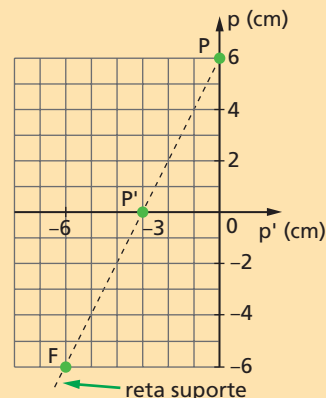
- a abscissa da imagem;
- a natureza da imagem.

7. Um objeto luminoso extenso é colocado frontalmente diante de uma lente esférica delgada divergente de distância focal igual a $-6,0$ cm. Estando o objeto real situado a 6,0 cm da lente, determine pelo MGC:

- a abscissa da imagem;
- a natureza da imagem;
- o aumento linear transversal.

Resolução:

Na figura que se segue, representamos os eixos p e p' e plotamos o ponto F ($-6; -6$), bem como o ponto P ($0; +6$), correspondente ao objeto. Note que, sendo a lente divergente, o ponto F , correspondente ao foco, cai no 3º quadrante.



- A reta suporte foi determinada pelos pontos P ($0; +6$) e F ($-6; -6$). Ela interceptou o eixo p' no ponto P' , correspondente à imagem e de abscissa $-3,0$ cm. Logo:

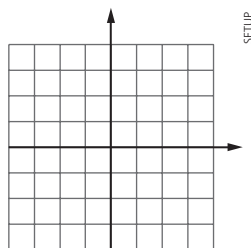
$$p' = -3,0 \text{ cm}$$

- A imagem é virtual, pois resultou $p' < 0$.
- O aumento linear transversal é dado por:

$$A = \frac{i}{o} = \frac{-p'}{p} \Rightarrow A = \frac{-(-3,0)}{(+6,0)} = \frac{+3,0}{6,0} \Rightarrow A = +\frac{1}{2}$$

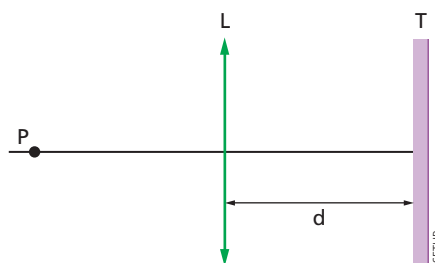
A imagem é reduzida, direita, e sua altura é metade da do objeto. Ela também é direita, pois $A > 0$.

8. Usando o papel quadriculado e o MGC, determine a abscissa de um objeto que conjugou uma imagem virtual a 2,0 cm de uma lente divergente cuja distância focal vale $-4,0$ cm. Determine, além disso, o aumento linear transversal.



9. (UF-CE) A figura mostra um pequeno ponto luminoso P , uma lente delgada convergente L e uma tela T . A distância focal da lente é $f = 6$ cm e a distância entre o ponto P e a lente é de 24 cm. Para que a imagem na tela tenha a maior nitidez possível, a distância d , indicada na figura, deverá ser de:

- a) 24 cm c) 12 cm e) 6 cm
b) 18 cm d) 8 cm



10. (Mackenzie-SP) Um ponto luminoso é colocado a uma distância $2f$ de uma lente de distância focal $+f$. Quando o ponto luminoso se move ao longo do eixo principal da lente, afastando-se dela, a distância da imagem à lente varia de:
- a) f para infinito. d) $2f$ para f .
b) f para $2f$. e) $2f$ para zero.
c) $2f$ para infinito.