MATEMÁTICA

FRENTE: MATEMÁTICA I

PROFESSOR(A): FABRÍCIO MAIA

EAD – ITA/IME

AULAS 25 A 27

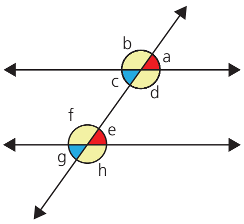
ASSUNTO: PARALELISMO, TRIÂNGULOS, CONGRUÊNCIA, BASE MÉDIA E MEDIANA DE EULER

Resumo Teórico

Paralelismo

- Ângulos determinados por duas paralelas cortadas por uma transversal.

Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam um plano e oito ângulos.

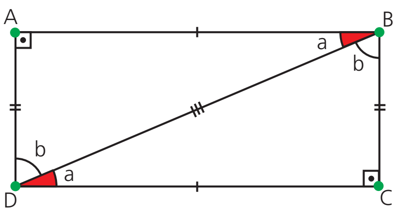


Classificação dos ângulos

- Correspondentes: {(a, e); (b, f); (c, g); (d, h)}
- Opostos pelos vértices: {(a, c); (b, d); (e, g); (f, h)}
- Alternos $\begin{cases} \text{internos } \{(c, e); (d, f)\} \\ \text{externos } \{(a, g); (b, h)\} \end{cases}$
- Colaterais $\begin{cases} \text{internos } \{(c, f); (d, e)\} \\ \text{externos } \{(a, h); (b, g)\} \end{cases}$

Nota:
- Os ângulos correspondentes, alternos internos, alternos externos e opostos pelos vértices são congruentes (medidas iguais).
- Os ângulos colaterais internos e colaterais externos são suplementares (soma igual a 180º).

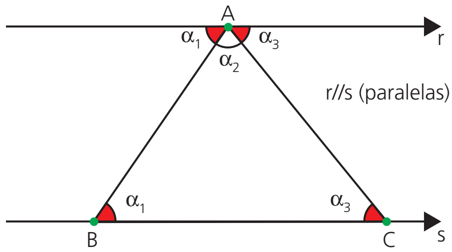
Compreensão da propriedade



I) ABCD é um retângulo;
II) Sua diagonal $\overline{BD}$ determina dois triângulos retângulos BAD e DCB, iguais;
III) Fazendo a superposição dos triângulos citados, temos que:

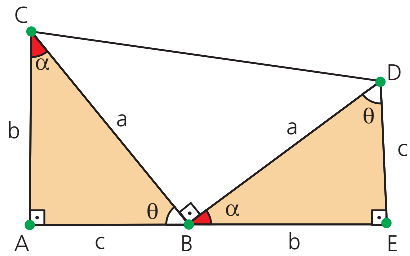
$$A\hat{B}D \equiv B\hat{D}C$$
$$A\hat{D}B \equiv C\hat{B}D$$

Consequência



A soma dos ângulos internos de um ΔABC qualquer é igual a 180º.

Um notável teorema da geometria



I) ΔCAB ≡ ΔBED (sobreposição, evidente)
II) Área(ΔCAB) + Área(ΔDEB) + Área(ΔCBD) = Área (trapézio ACDE)

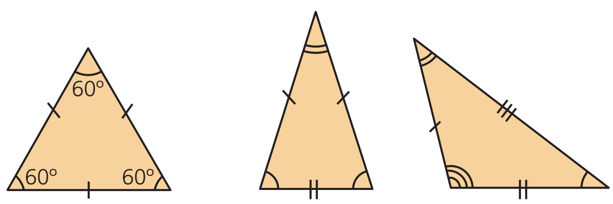
Então: $\frac{c \cdot b}{2} + \frac{c \cdot b}{2} + \frac{a \cdot a}{2} = \frac{(b+c)\cdot(b+c)}{2}$

Simplificando, obtemos:
$a^2 = b^2 + c^2$ (Relação de Pitágoras)

Triângulos

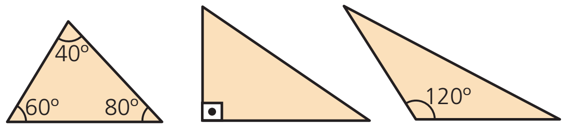
Classificação

Quanto ao lados:



Equilátero (3 lados congruentes) — Isósceles (2 lados congruentes) — Escaleno (3 lados diferentes)

Quanto aos ângulos

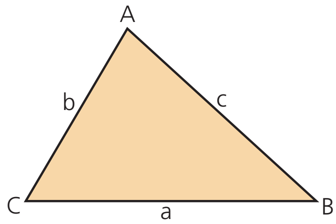


Acutângulo (3 ângulos agudos) | Retângulo (1 ângulo reto) | Obtusângulo (1 ângulo obtuso)

Condição de existência

Sabemos que a menor distância entre dois pontos distintos é representada pelo segmento de reta que une estes pontos.

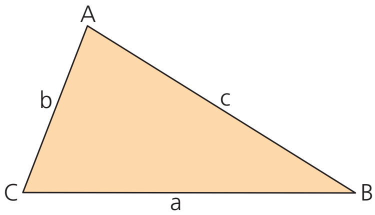
Então:



Qualquer lado de um triângulo é sempre menor que a soma dos outros dois e maior que a diferença em módulo dos outros dois.

$$\boxed{|b-c| < a < b + c}$$

Reconhecimento da natureza de um triângulo



Se **a** é o maior lado do triângulo, temos:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$ triângulo retângulo

$a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow$ triângulo acutângulo

$a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow$ triângulo obtusângulo

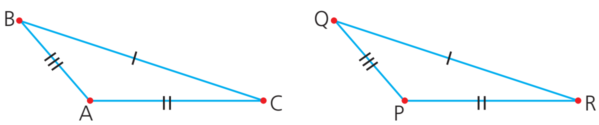
Congruência de triângulos

Dois triângulos são iguais se, e somente se, seus lados e seus ângulos são ordenadamente iguais.

Critérios de congruência

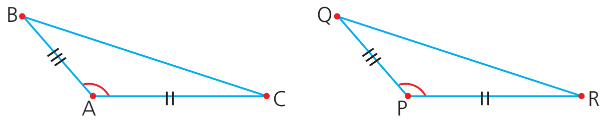
Para assegurarmos que dois triângulos são congruentes, basta verificar a igualdade de alguns de seus elementos. Estamos nos referindo às condições mínimas para que se possa concluir que dois triângulos dados são congruentes.

Critério 1 (L.L.L): Dois triângulos são iguais se têm, na devida ordem, os três lados iguais.



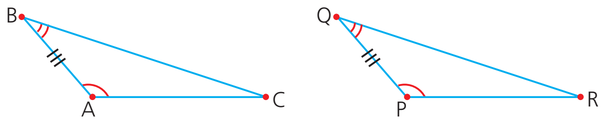
$$\text{Se } \begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{PQ} \\ \overline{BC} \equiv \overline{QR} \\ \overline{CA} \equiv \overline{RP} \end{cases} \text{, então } \Delta ABC \equiv \Delta PQR.$$

Critério 2 (L.A.L): Dois triângulos são iguais se têm, na devida ordem, além de dois lados iguais, o ângulo compreendido entre eles.



$$\text{Se } \begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{PQ} \\ \hat{A} \equiv \hat{P} \\ \overline{CA} \equiv \overline{RP} \end{cases} \text{, então } \Delta ABC \equiv \Delta PQR.$$

Critério 3 (A.L.A): Dois triângulos são iguais se têm, na devida ordem, além de um lado congruente, os dois ângulos a ele adjacentes.



$$\text{Se } \begin{cases} \hat{B} \equiv \hat{Q} \\ \overline{AB} \equiv \overline{PQ} \\ \hat{A} \equiv \hat{P} \end{cases} \text{, então } \Delta ABC \equiv \Delta PQR.$$

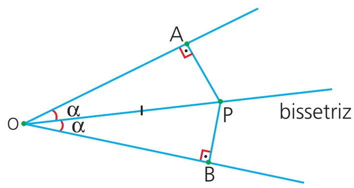
Consequências triviais

Bissetriz

Todos os pontos pertencentes à bissetriz de um ângulo equidistam dos lados do ângulo.

Veja que:

$\Delta PAO \equiv \Delta PBO$, então PA = PB

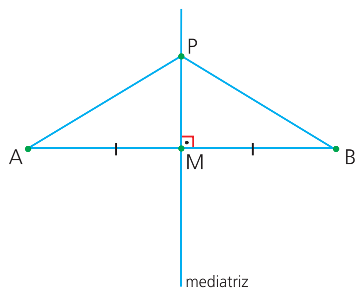


Mediatriz

Todos os pontos pertencentes à mediatriz de um segmento equidistam das extremidades do segmento.

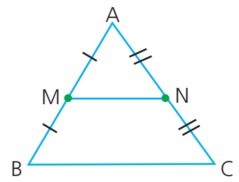
Veja que:

$\Delta PMA \equiv \Delta PMB$, então PA = PB



Base média de um triângulo

Um segmento de reta é a base média de um triângulo se, e somente se, esse segmento tiver as extremidades nos pontos médios de dois lados desse triângulo.



M e N são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$; $\overline{MN}$ é uma base média do ΔABC.

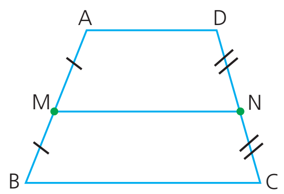
Propriedade

A base média de um triângulo é paralela à base desse triângulo e mede a metade dessa base. Assim, na figura anterior, teremos:

$$\boxed{\overline{MN}\,//\,\overline{BC} \text{ e } MN = \frac{BC}{2}}$$

Base média de um trapézio

Um segmento de reta é a base média de um trapézio se, e somente se, esse segmento tiver extremidades nos pontos médios dos lados **não paralelos**.



$\overline{MN}$ é a base média do trapézio ABCD

Propriedade

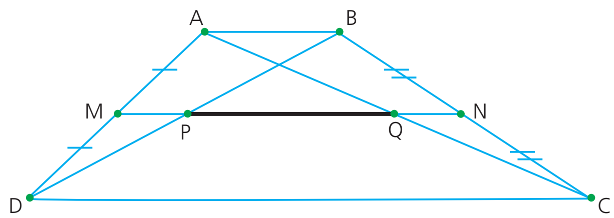
A base média de um trapézio é paralela às bases e sua medida é a média aritmética das medidas das bases.

Assim, temos:

$$\boxed{\overline{MN}\,//\,\overline{AD}\,//\,\overline{BC} \text{ e } MN = \frac{AD + BC}{2}}$$

Mediana de Euler

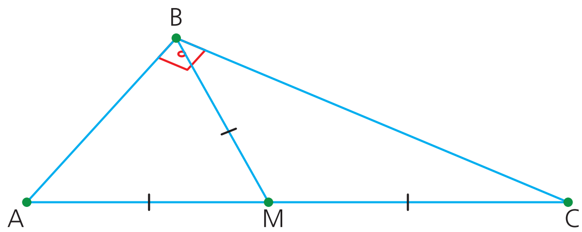
Se os pontos P e Q são os pontos de interseção da base média $\overline{MN}$ com as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, então $\overline{PQ}$ é a mediana de Euler.



Propriedade: $PQ = \dfrac{CD - AB}{2}$ (mediana de Euler)

Mediana relativa à hipotenusa

A medida da mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo equivale à metade da hipotenusa.



ΔABC é retângulo em $\hat{B} \rightarrow BM = \dfrac{AC}{2}$ (propriedade)

Exercícios

01. Considere que h_a e h_b são as alturas relativas aos vértices A e B, respectivamente, de um triângulo ABC.

Determine entre que valores pode variar o comprimento da altura relativa ao vértice C.

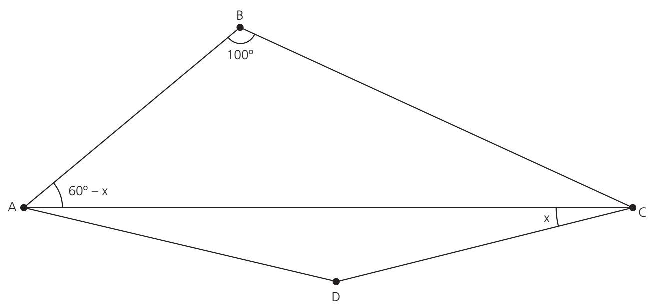
02. Pode ser equilátero um triângulo cujas distâncias dos vértices até duas retas perpendiculares entre si são expressas por números inteiros?

03. Se **a**, **b** e **c** são os comprimentos dos lados de um triângulo; prove que $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

04. Em um triângulo acutângulo de perímetro 8 cm, determine a medida do circunraio, sabendo que é expressa por um número inteiro.

05. Sejam **a**, **b** e **c** os comprimentos dos lados de um triângulo. Mostre que o polinômio $P(x) = a^2x^2 + (b^2 - a^2 - c^2)x + c^2$ é positivo, para todo **x** real.

06. Na figura a seguir, AB = AD = CD.

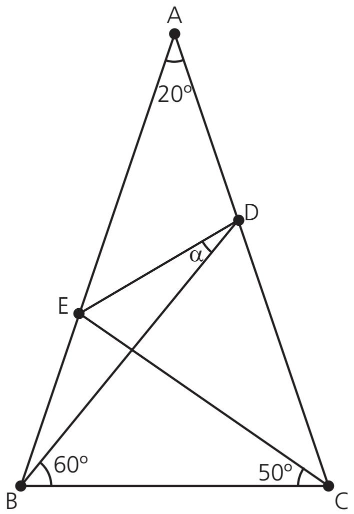


Então, o ângulo $A\hat{C}D$ mede:

A) 6°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 20°

07. Se m_a é a mediana relativa ao lado **a** de um triângulo de lados **a**, **b** e **c**, prove que $\left|\frac{b-c}{2}\right| < m_a < \frac{b+c}{2}$.

08. Na figura a seguir, AB = AC. Determine a medida do ângulo $E\hat{D}B$

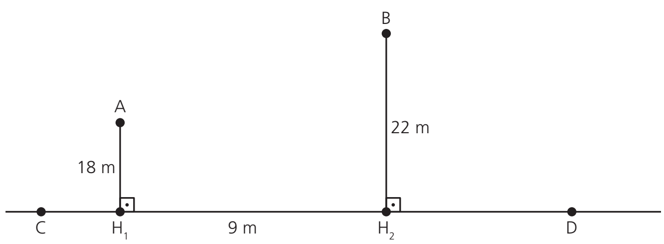


A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 30°
E) 36°

09. Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, $B\hat{A}C$, mede 40°. Sobre o lado $\overline{AB}$, tome o ponto E tal que $A\hat{C}E$ = 15°. Sobre o lado $\overline{AC}$ tome o ponto D tal que $D\hat{B}C$ = 35°.

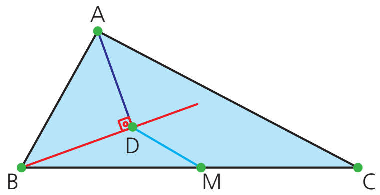
Então, o ângulo $E\hat{D}B$ vale
A) 35°
B) 45°
C) 55°
D) 75°
E) 85°

10. São dados dois pontos A e B situados ambos em um dos semiplanos determinados pela reta $\overleftrightarrow{CD}$, conforme a figura a seguir.



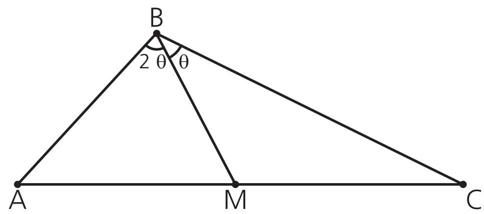
A menor distância, em metros, entre A e B, quando se toca a reta $\overleftrightarrow{CD}$, é igual a
A) 38
B) 39
C) 40
D) 41
E) 42

11. Na figura abaixo, $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$; AB = 9 cm; $\overline{AC}$ = 15 cm; e M é o ponto médio $\overline{BC}$. A medida do segmento $\overline{DM}$ é igual a:



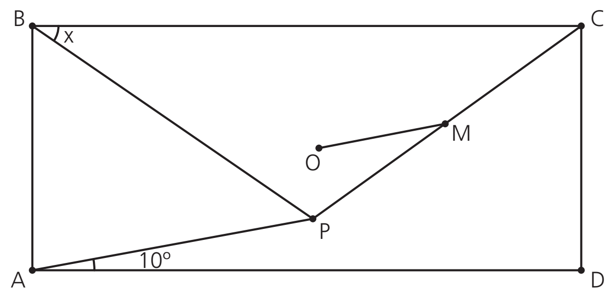
A) 2 cm
B) 3 cm
C) 4 cm
D) 5 cm
E) 6 cm

12. Na figura a seguir, M é o ponto médio de $\overline{AC}$ e BC = 2 · BM.



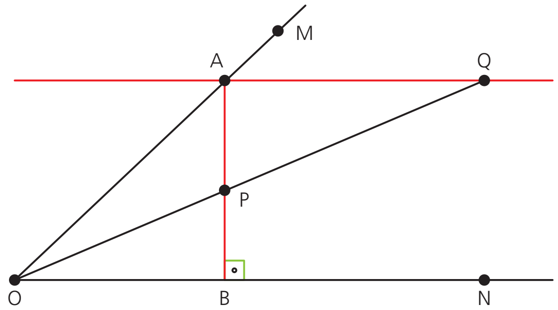
Determine a medida do ângulo $C\hat{B}M$.

13. Na figura a seguir, O é o centro do retângulo ABCD.



Se CD = 2 · OM e PM = MC, determine **x**.

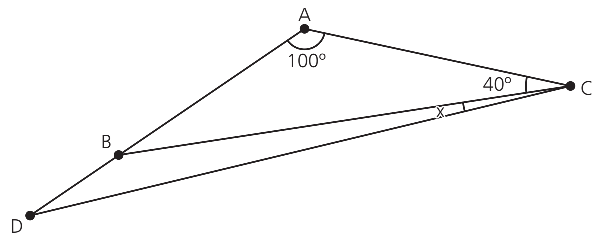
14. Um ponto A qualquer é considerado sobre o lado $\overline{OM}$ do ângulo $M\hat{O}N$ da figura, no qual traçamos:



I. $\overline{AB} \perp \overline{ON}$
II. $\overline{AQ} // \overline{ON}$
III. $PQ = 2 \cdot OA$

Se $P\hat{O}B = 26°$, então $M\hat{O}N$ é igual a:
A) 66º
B) 72º
C) 78º
D) 79º
E) 80º

15. Na figura a seguir, AD = BC.



Determine a medida do ângulo $B\hat{C}D$.

GABARITO				
01	**02**	**03**	**04**	**05**
–	–	–	*	–
06	**07**	**08**	**09**	**10**
B	–	D	D	D
11	**12**	**13**	**14**	**15**
B	*	*	C	*

* **04.** R = 2 (inteiro).
12. 36º
13. x = 40º
15. 10º.

– Demonstração.

Anotações

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: FABRÍCIO MAIA
DIG.: SAMUEL – 19/01/19 – REV.: SARAH