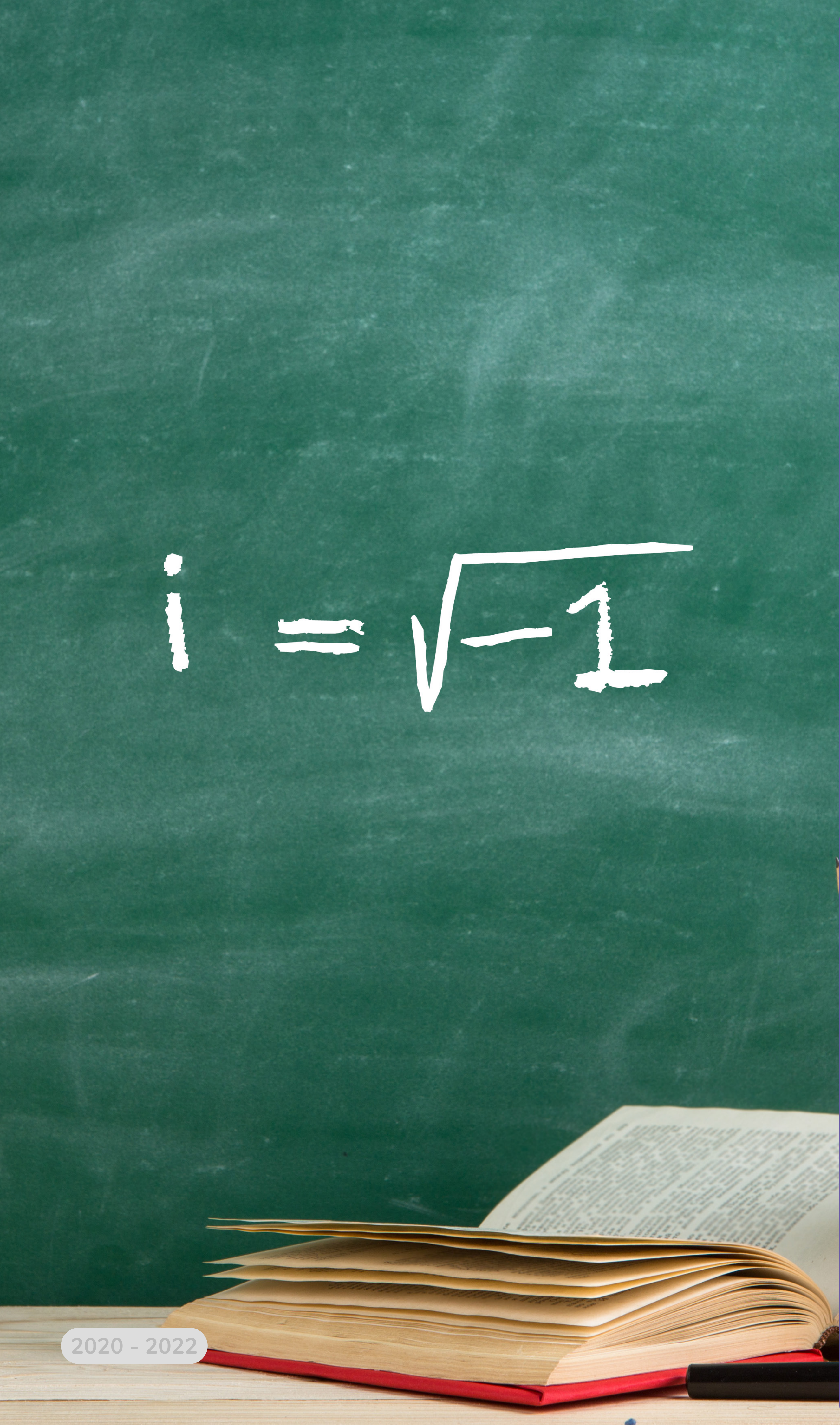
NÚMEROS COMPLEXOS

i



2020 - 2022

NÚMEROS COMPLEXOS

A matemática parece muito complexa, não é mesmo? Acredite, ela não é! Venha desmistificar essa ideia junto com a gente nessa apostila.

Esta subárea é composta pelos módulos:

1. Números Complexos
2. Forma Polar dos Números Complexos
3. Potenciação e Radiciação de Números Complexos

NÚMEROS COMPLEXOS

INTRODUÇÃO

Em algum momento da sua vida de estudante você deve ter ouvido a seguinte expressão: "Não existe raiz quadrada de números negativos". Saiba que por muito tempo achávamos que isso era correto, até ser definido o conjunto dos números complexos.

Ao contrário do que muitos pensam, não foi com o objetivo de resolver equações quadráticas como $x^2 = -1$ que surgiu o estudo dos números complexos. A equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ possui 4, $-2+\sqrt{3}$ e $-2-\sqrt{3}$ como raízes dessa equação. Contudo, uma fórmula desenvolvida por uma cara chamado Tartaglia, hoje conhecida como Fórmula de Cardano ou Cardano-Tartaglia, diz que a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ tem como raiz $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$.

Como seria possível uma raiz da forma $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ sendo que já conhecemos as 3 raízes? Pensou-se que não era possível e que a fórmula não se aplicava a esses casos, pois aparecia um radicando negativo, como -121.

Para nossa sorte, muitos apreciadores e estudiosos da matemática intrigaram-se com esse tipo de resultado, iniciando uma jornada de estudo com o objetivo de explicar essa situação. Foi então que Bombelli, um matemático italiano, desenvolveu uma álgebra capaz de fornecer resultados para expressões como $\sqrt{-121}$, a qual chamamos hoje de Números Complexos.

NÚMEROS COMPLEXOS

Todo conjunto possui uma característica clara dos elementos que o contém, por exemplo, o conjunto composto pelos estados da Região Sudeste do Brasil: Espírito Santo, Minas Gerais, Rio de Janeiro, São Paulo. Podemos também representá-los de maneira mais simbólica, como {ES, MG, RJ, SP}. Na matemática, temos os conhecidos conjuntos numéricos:

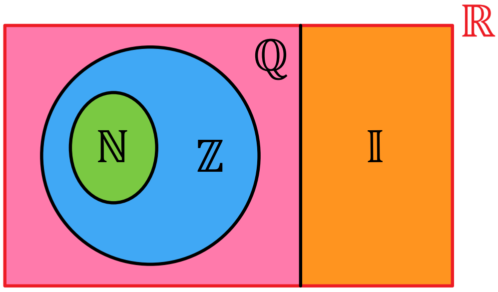
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\};$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\};$

$\mathbb{Q} = \{É\ qualquer\ número\ x\ de\ modo\ que\ \ x = \frac{a}{b}, com\ a\ e\ b \in \mathbb{Z}\ \text{e}\ b \neq 0\};$

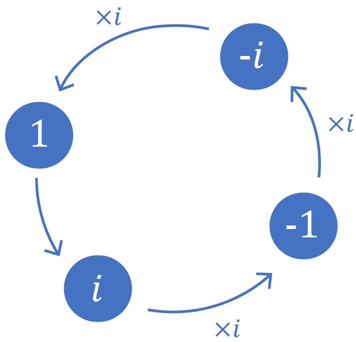
$\mathbb{I} = \{números\ que\ não\ podem\ ser\ escritos\ na\ forma\ de\ fração\};$

$\mathbb{R} = \{A\ união\ dos\ conjuntos\ \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ e\ \mathbb{I}\}.$



Durante o estudo realizado, Bombelli identificou uma nova classe de números, aqueles que resultam da extração da raiz quadrada de um número negativo, os quais ele chamou de números imaginários. A unidade imaginária é determinada por $i = \sqrt{-1}$. Uma característica bem importante de ser observada na unidade imaginária são suas potências:

$$i^0 = 1 \qquad i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i$$



Esses são os 4 possíveis resultados para potências da unidade imaginária, pois ele possui uma característica de ciclicidade. Sempre que quisermos encontrar o resultado de uma potência imaginária, vamos reduzir a um desses casos, utilizando o seguinte método: dada uma potência natural da unidade imaginária, ou seja, i^n com $n \in \mathbb{N}$, o resultado será:

I. 1, se o resto da divisão de n por 4 for 0 $(n = 4k + 0)$;

II. i, se o resto da divisão de n por 4 for 1 $(n = 4k + 1)$;

III. -1, se o resto da divisão de n por 4 for 2 $(n = 4k + 2)$;

IV. $-i$, se o resto da divisão de n por 4 for 3 $(n = 4k + 3)$.

Por exemplo, para calcular o resultado da potência imaginária i^{2021}, vamos realizar a divisão de 2021 por 4:

$$2021 \div 4 = 4 * 505 + 1$$

Logo, o resto da divisão de 2021 por 4 é 1. Portanto $i^{2021} = i^1 = i$.

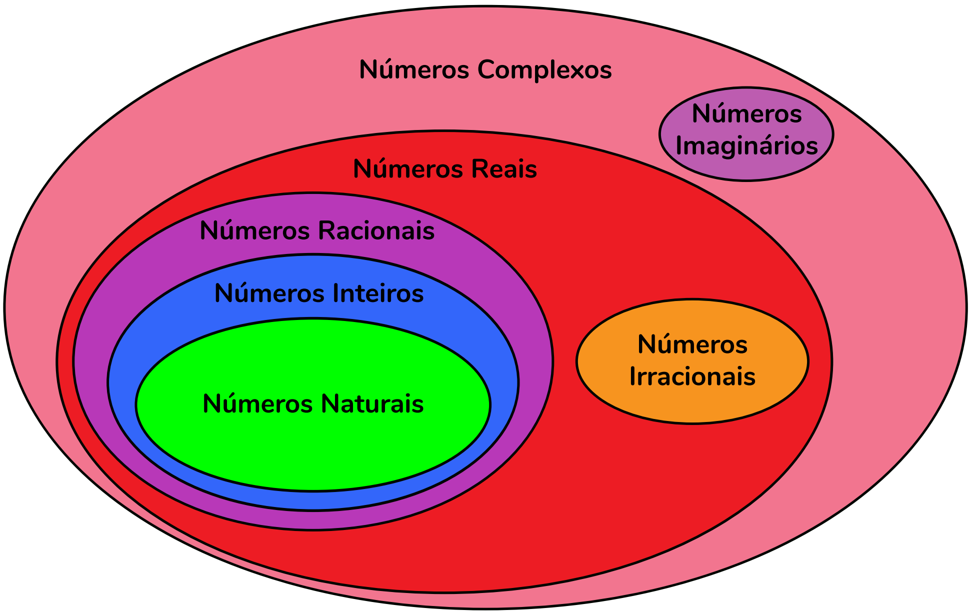
FORMA ALGÉBRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O conjunto dos números complexo é o conjunto $\mathbb{C} = \{z\ tal\ que\ z = a + bi, a\ e\ b \in \mathbb{R}\}$, ou seja, o número complexo z é da forma $z = a + bi$, com a e b sendo valores reais e i é a unidade imaginária. Um número complexo é composto por duas partes, parte real (a) e a parte imaginária (b). Quando o valor de $b = 0$, podemos falar que z é um número real $(z \in \mathbb{R})$.

$$Z = \underbrace{a}_{a\ é\ a\ parte\ real} + \underbrace{b}_{b\ é\ a\ parte\ imaginária} . i$$

Separamos os números complexos em duas categorias:

Quando a e b diferentes de zero, temos os números complexos. Porém quando a é igual a zero, temos os números imaginários. Note que um número real é também um número complexo, porém um número real não é um número imaginário:



Um ponto importante aqui é enunciar quando dois números complexos são iguais, pois, como os números complexos são compostos por duas partes, será que é necessário que ambas as partes de um número seja igual à do outro? A resposta é sim.

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, eles serão iguais se e somente se:

$$z = w \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

Vamos agora enunciar cinco propriedades muito importantes acerca dos números complexos. Seja $z = a + bi$ um número complexo, podemos calcular para ele:

1. Conjugado de z, simbolizado por $\bar{z}$.

O conjugado do número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $\bar{z} = a - bi$;

2. Simétrico de z

O simétrico do número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $z = -a + bi$;

3. Oposto de z $(-z)$

O oposto de do número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $-z = -a - bi$;

4. Módulo de z $(|z|)$

O módulo do número complexo $z = a + bi$ é o número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5. Norma de z $(\|z\| \text{ ou } |z|^2)$

A norma de número complexo $z = a + bi$ é o número real $\|z\| = a^2 + b^2$.

OPERAÇÕES ALGÉBRICAS COM NÚMEROS COMPLEXOS

Assim como realizamos operações dentro de outros conjuntos numéricos, como os reais, assim também faremos nos conjuntos complexos. Aprenderemos agora como adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números complexos:

Adição: Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos. A soma $z + w$, resultado da adição de dois números, é dada por:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Exemplo: $z = 3 + 4i$ e $w = -7 + 5i$. A soma será:

$$z + w = (3 + 4i) + (-7 + 5i) = (3 + (-7)) + (4 + 5)i = -4 + 9i$$

$$z + w = -4 + 9i$$

Subtração: Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos. A diferença $z - w$ é dada por:

$$z - w = (a + bi) - (\ c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Exemplo: $z = 3 + 4i$ e $w = -7 + 5i$. A diferença será:

$$z - w = (3 + 4i) - (-7 + 5i) = (3 - (-7)) + (4 - 5)i = 10 - i$$

$$z - w = 10 - i$$

Multiplicação: Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos. O produto $z \cdot w$, resultado da multiplicação de dois números, é dada por:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di)$$

$$= ac + adi + bci + bdi^2$$

$$= ac + adi + bci + bd\ (-1)$$

$$= ac + adi + bci - bd$$

$$= ac - bd + adi + bci$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemplo: $z = 3 + 4i$ e $w = -7 + 5i$. O produto será:

$$z \cdot w = (3 + 4i) \cdot (-7 + 5i) = (3 \cdot (-7) - 4 \cdot 5) + (3 \cdot 5 + 4 \cdot (-7))i$$

$$z \cdot w = [(-21 - 20) + (15 - 28)i] = -41 - 13i$$

$$z - w = -41 - 13i$$

Uma observação que deve ser feita neste momento é que não é preciso decorar que $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$, pois esse resultado final é obtido aplicando a propriedade distributiva.

Divisão: Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos. O quociente $\frac{z}{w}$, resultado da divisão de dois números, é dada por:

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di}$$

$$= \frac{(a + bi)(c + di)}{(c - di)(c + di)} = \frac{(a + bi)(c + di)}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{(ac - bd) + (bc + ad)i}{c^2 + d^2}$$

Exemplo: $z = 4 + 5i$ e $w = 2 - 3i$. O produto será:

$$\frac{z}{w} = \frac{4 + 5i}{2 - 3i} = \frac{(4 + 5i)(2 + 3i)}{2^2 + 3^2} = \frac{(4 \cdot 2 - 5 \cdot 3) + (5 \cdot 2 + 4 \cdot 3)i}{4 + 9}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{(8 - 15) + (10 + 12)i}{13} = \frac{-7 + 22i}{13}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{-7 + 22i}{13}$$

ANOTAÇÕES