RADICIAÇÃO

A operação inversa da potenciação é chamada de radiciação. É utilizada para descobrir qual número que multiplicado por ele mesmo determinadas vezes resulta em um valor já conhecido.

Por exemplo, qual é o número que multiplicado por ele mesmo, duas vezes, resulta em 64? Resposta: $8 \times 8 = 64$. Sendo assim, o número que estamos procurando é o número 8.

O símbolo usado na radiciação é $\sqrt{}$, e este símbolo é chamado de radical. Sendo assim, para indicar a radiciação é usada a notação:

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Sendo n o índice da raiz, a o radicando e b a raiz (resultado).

Quando não aparece índice na raiz, é considerado o índice 2, neste caso lê-se raiz quadrada. Exemplo: $\sqrt{16}$ lê-se raiz quadrada de dezesseis.

Quando o índice é 3, lê-se raiz cúbica. Se for índice 4, então lê-se raiz quarta e a partir daí segue da mesma forma. Raiz quinta, raiz sexta, e assim por diante.

- **Raiz quadrada:** é a raiz mais comum. Significa encontrar o número que multiplicado por ele mesmo dá o radicando (número que fica dentro da raiz)

Exemplos:

$$\sqrt{25} = 5, \text{pois } 5 \times 5 = 25$$

$$\sqrt{81} = 9, \text{pois } 9 \times 9 = 81$$

- **Raiz cúbica:** como já vimos, neste caso a raiz tem o índice 3, ou seja, é necessário encontrar o número que multiplicado por ele mesmo 3 vezes resulta no radicando.

Exemplos:

$$\sqrt[3]{27} = 3, \text{pois } 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$\sqrt[3]{125} = 5, \text{pois } 5 \times 5 \times 5 = 125$$

PROPRIEDADES DAS RAÍZES

Vamos aprender agora as propriedades das raízes, para isso considere a e b números reais quaisquer e m, n, k e p números naturais não nulos.

1. $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

A raiz enésima de a é igual a b se, e somente se, b elevado na n é igual a a.

2. $\sqrt[n]{a^n} = a$, caso n seja ímpar

Quando o índice do radical for **ímpar** e igual ao expoente do radicando, então o resultado será o **próprio radicando**.

Exemplos:

- $\sqrt[3]{9^3} = 9$
- $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{(2)^5} = 2$
- $\sqrt[7]{(-5)^7} = -5$
- $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

3. $\sqrt[n]{a^n}$ = |a|, caso n seja par

Quando o índice do radical for **par** e igual ao expoente do radicando, então o resultado será o **módulo do radicando**.

Exemplos:

- $\sqrt[2]{9^2} = |9| = 9$
- $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{(2)^4} = |2| = 2$
- $\sqrt[2]{(-5)^2} = |-5| = 5$
- $\sqrt[4]{-81} = |-3| = 3$

4. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$ e $\sqrt[n \div p]{a^{m \div p}}$

O índice do radical pode ser multiplicado ou dividido por qualquer número real, desde que o expoente do radicando seja multiplicado ou dividido pelo mesmo número.

5. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b}$

A raiz de um produto é igual ao produto das raízes.

Exemplo: $\sqrt[3]{8.27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 6$

6. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, a raiz de uma divisão é igual a divisão das raízes, com b diferente de zero.

Exemplo: $\sqrt[2]{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt[2]{4}}{\sqrt[2]{25}} = \frac{2}{5}$

7. $(\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{a^{m.p}}$, uma potência de uma raiz pode ser reescrita colocando o expoente no radicando.

8. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[p.n]{a^m}$

A raiz de uma raiz pode ser reescrita multiplicando seus índices e transformando em apenas uma raiz.

9. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, toda raiz pode ser escrita na forma de potência com expoente fracionário, desde que $n > 1.$ O índice passa a ser o denominador do expoente, e o expoente do radicando para a ser o numerador do expoente.

10. $k\sqrt[n]{a} \pm p\sqrt[n]{a} = (k \pm p)\sqrt[n]{a}$, adição e subtração de raízes só poderão ser feitas quando os radicais forem iguais. Observado isto, basta adicionar ou subtrair os números que estiverem multiplicando as raízes, sem alterar o radical.

Exemplo: $7\sqrt[3]{18} \pm 3\sqrt[3]{18} = (7 \pm 3)\sqrt[3]{18} = 10\sqrt[3]{18}\ e\ 4\sqrt[3]{18}$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Racionalizar uma fração significa fazer uma multiplicação conveniente para que o denominador deixe de ter um radical.

A ideia da racionalização é multiplicar o numerador e o denominador da fração por um valor conveniente para encontrarmos uma fração equivalente que não possua raiz no denominador.

Casos de racionalização

Caso 1: $\sqrt{a}$ no denominador

Nesse caso, multiplicamos o numerador e o denominador da fração por $\sqrt{a}$. Veja os exemplos abaixo:

1. $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$

Portanto, $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$

2. $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot 5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Portanto, $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Caso 2: $\sqrt[n]{a^m}$ no denominador

Neste caso, multiplicamos o numerador e o denominador da fração por um termo conveniente. Veja os exemplos abaixo:

1. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4^2}} = \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4 \cdot 4^2}} = \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{\sqrt[3]{4^2}}{4}$

Portanto, $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4^2}}{4}$

2. $\frac{5}{\sqrt[7]{6^2}} = \frac{5}{\sqrt[7]{6^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{6^5}}{\sqrt[7]{6^5}} = \frac{5 \cdot \sqrt[7]{6^5}}{\sqrt[7]{6^2} \cdot \sqrt[7]{6^5}} = \frac{5\ \sqrt[7]{6^5}}{\sqrt[7]{6^2 \cdot 6^5}} = \frac{5\ \sqrt[7]{6^5}}{\sqrt[7]{6^7}} = \frac{5\ \sqrt[7]{6^5}}{6}$

Portanto, $\frac{5}{\sqrt[7]{6^2}} = \frac{5\ \sqrt[7]{6^5}}{6}$

Caso 3: $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ no denominador

Neste caso, multiplicamos o numerador e o denominador da fração por um termo conveniente. Veja os exemplos abaixo:

1. $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{\sqrt{3} - \sqrt{7}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7})}{(\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7})} =$

$\frac{2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} =$

$\frac{2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7})}{\sqrt{9} - \sqrt{49}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7})}{3 - 7} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7})}{-4} = -\frac{2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7})}{4} =$

$-\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{7})}{2}$

Portanto, $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} = -\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{7})}{2}$

2. $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = -\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{3}$

Você pode tentar fazer e chegar ao resultado, basta multiplicar o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$ por $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Observação: nesse caso, se no lugar de alguma das raízes aparecer apenas um número, o processo é análogo, observe:

$$\frac{1}{\sqrt{8} - 3} = \frac{1}{\sqrt{8} - 3} \cdot \frac{\sqrt{8} + 3}{\sqrt{8} + 3} = \frac{\sqrt{8} + 3}{\sqrt{8^2} - 3^2} = \frac{\sqrt{8} + 3}{\sqrt{64} - 9} = \frac{\sqrt{8} + 3}{8 - 9} = \frac{\sqrt{8} + 3}{-1} = -(\sqrt{8} + 3)$$

Portanto, $\frac{1}{\sqrt{8} - 3} = -(\sqrt{8} + 3)$