EXTENSIVO 2021.2

MATEMÁTICA PARA EEAR

GEOMETRIA ESPACIAL II

Prof. Victor So

AULA 09

07 DE NOVEMBRO DE 2020

Sumário

APRESENTAÇÃO 4

1. SÓLIDOS REDONDOS 5

1.1. CILINDROS 5
1.1.1. SUPERFÍCIE CILÍNDRICA E CILINDRO DE REVOLUÇÃO 5
1.1.2. ÁREA LATERAL E ÁREA TOTAL 7
1.1.3. VOLUME DO CILINDRO 7
1.1.4. SECÇÃO PARALELA AO EIXO 8
1.1.5. TRONCO DE CILINDRO 9

1.2. CONES 11
1.2.1. SECÇÃO MERIDIANA 13
1.2.2. ÁREA LATERAL E ÁREA TOTAL 14
1.2.3. VOLUME DO CONE 15
1.2.4. TRONCO DE CONE DE BASES PARALELAS 15

1.3. ESFERAS 18
1.3.1. SECÇÃO PLANA DA ESFERA 19
1.3.2. VOLUME DA ESFERA 20
1.3.3. ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA 23
1.3.4. FUSO ESFÉRICO E CUNHA ESFÉRICA 24
1.3.5. SEGMENTOS ESFÉRICOS 26

2. INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE SÓLIDOS 40

2.1. ESFERA E CUBO 40

2.2. ESFERA E OCTAEDRO REGULAR 42

2.3. ESFERA E CILINDRO 44

2.4. ESFERA E CONE 45

2.5. ESFERA E TETRAEDRO REGULAR 46

2.6. ESFERA E TRONCO DE CONE 49

3. TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN 56

3.1. ÁREA DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO 57

3.2. VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO 59

4. LISTA DE QUESTÕES 68
4.1. GABARITO 101

5. LISTA DE QUESTÕES RESOLVIDAS E COMENTADAS 102

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA 176

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **176**

8. VERSÕES DAS AULAS **176**

APRESENTAÇÃO

Olá,

Iniciaremos o último assunto de geometria, a espacial. Para aprender bem essa aula, o requisito básico é ter feito as aulas de geometria plana e ter bem consolidado os diversos conceitos abordados nelas. Nesta aula, estenderemos o conceito que aprendemos no plano ao espaço tridimensional. Veremos muitos exemplos e teoremas que nos ajudarão a resolver os exercícios da prova.

Se você for um aluno que já possui os conceitos de geometria espacial bem fundamentados, pule direto para a lista de exercícios e tente resolver todas questões. Caso você não consiga resolver alguma, consulte a resolução e sempre que precisar, você poderá nos encontrar no fórum de dúvidas.

Então, vamos à aula.

Bons estudos.

FALE COMIGO

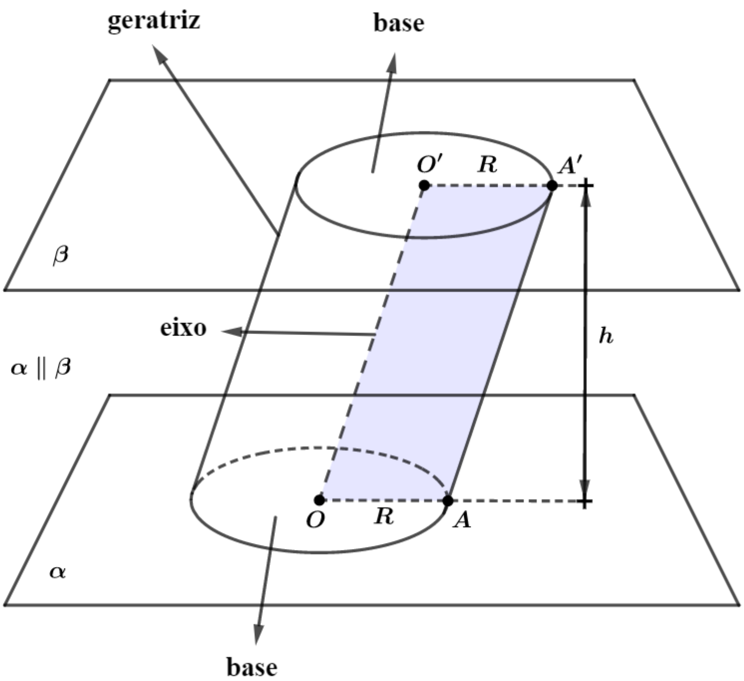
/victorso /profvictorso /profvictorso

1. SÓLIDOS REDONDOS

Vamos começar nosso estudo de sólidos redondos, são eles: os cilindros, os cones e as esferas. Iniciemos pelos cilindros.

1.1. CILINDROS

Os cilindros são figuras muito parecidas com os prismas, a diferença é que ao invés da base ser um polígono convexo, a base do cilindro é um círculo. Podemos pensar em um prisma arredondado. Vejamos os elementos presentes no cilindro.

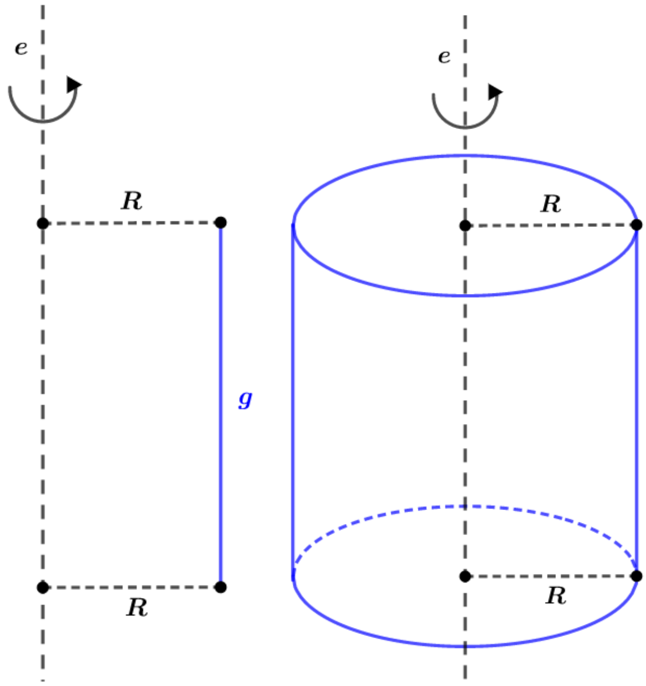


Note que o cilindro possui duas bases circulares congruentes de raio R e que $OAA'O$ é um paralelogramo. Geratriz é o termo usado para qualquer segmento de reta do cilindro distando R do eixo OO', e paralelo ao mesmo.

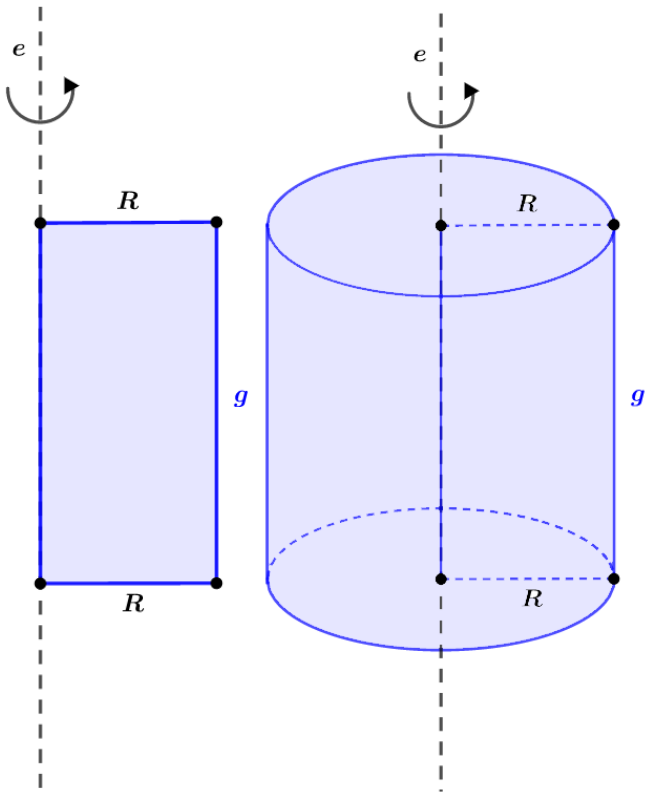
Quando as geratrizes do cilindro são oblíquas às bases, temos um cilindro circular oblíquo e quando elas são perpendiculares às bases, temos um cilindro circular reto. Neste caso, a altura do cilindro será igual à medida da geratriz, ou seja, $h = g$.

1.1.1. SUPERFÍCIE CILÍNDRICA E CILINDRO DE REVOLUÇÃO

Tomando-se um eixo e e rotacionando um segmento de reta g (reta geratriz) de uma distância R ao longo de e, obtemos uma **superfície cilíndrica de revolução**.

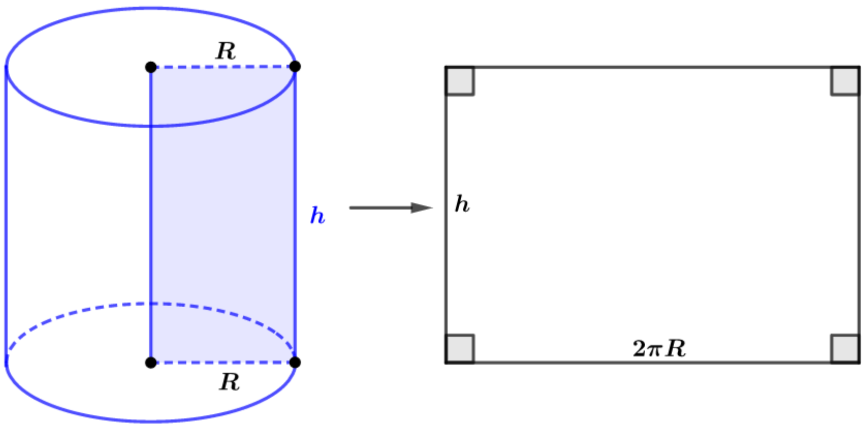


Se ao invés de um segmento de reta, rotacionarmos um retângulo que possui um lado contido no eixo e, obtemos um **cilindro de revolução**. Perceba que esse cilindro é circular reto, ou seja, a geratriz é perpendicular ao plano da base.



1.1.2. ÁREA LATERAL E ÁREA TOTAL

Se cortarmos uma superfície cilíndrica de revolução de altura h e a colocarmos em cima de uma mesa esticada, obtemos a figura de um retângulo de dimensões iguais à altura h e ao comprimento da base circular. Sabemos que o comprimento de uma circunferência de raio R é $2\pi R$. Assim, temos que a superfície lateral de um cilindro circular reto planificada é equivalente a um retângulo de dimensões h e $2\pi R$.



Logo, a área lateral de um cilindro é:

$$\boxed{A_L = 2\pi Rh}$$

Para encontrar a área total do cilindro circular reto, basta somar duas vezes a área da base. Como a base é um círculo de raio R, temos:

$$A_B = \pi R^2$$

$$A_T = A_L + 2A_B = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

$$\therefore \boxed{A_T = 2\pi R(h + R)}$$

1.1.3. VOLUME DO CILINDRO

Para encontrar o volume de um cilindro, podemos usar o princípio de Cavalieri. Assim, tomando-se um cilindro circular de raio R e um prisma tais que ambos possuem a mesma altura h e também bases de mesma área, temos:

$$A_{base\_prisma} = A_{base\_cilindro} = \pi R^2$$

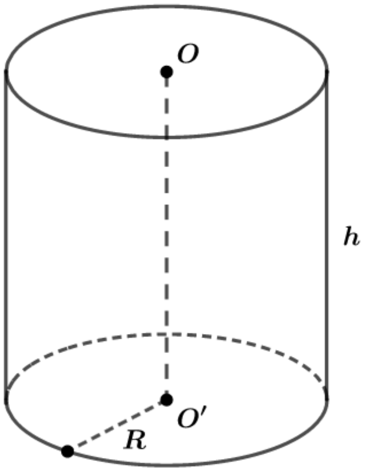
Pelo princípio de Cavalieri:

$$V_{cilindro} = V_{prisma} = A_{base_{prisma}} \cdot h$$

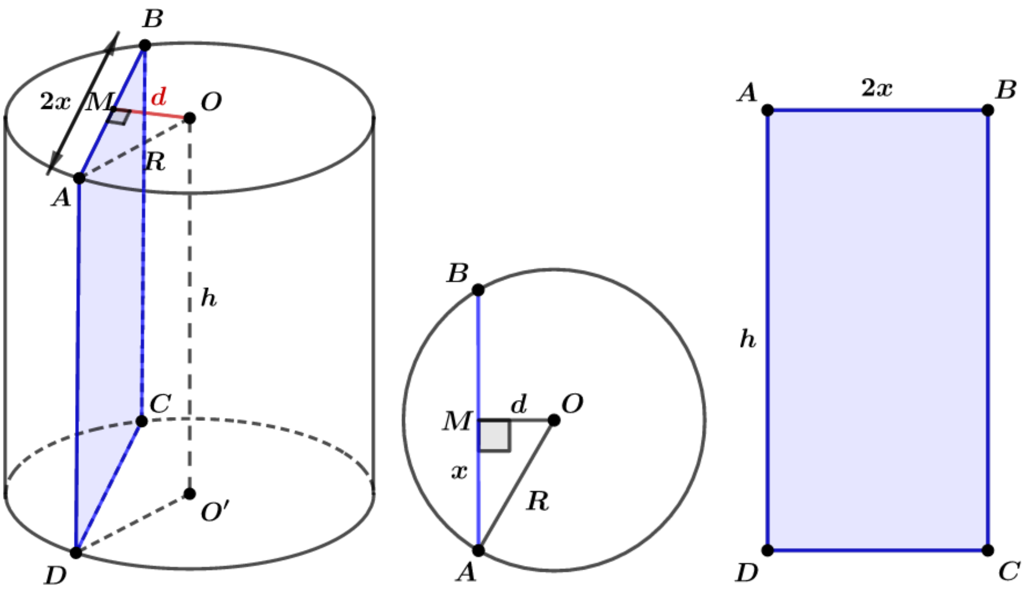
$$\therefore \boxed{V_{cilindro} = \pi R^2 h}$$

1.1.4. SECÇÃO PARALELA AO EIXO

Consideremos um cilindro circular reto de eixo OO' e altura h conforme representado pela figura abaixo:



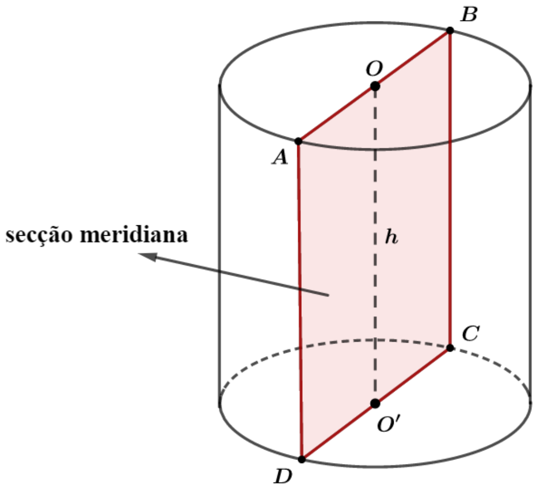
Ao seccionarmos esse cilindro por um plano paralelo ao seu eixo e a uma distância d deste, a secção plana formada é um retângulo de dimensões h e $2x$. Podemos calcular o valor de x da seguinte forma:



Observando a circunferência e aplicando o teorema de Pitágoras no ΔAOM:

$$R^2 = x^2 + d^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{R^2 - d^2}; 0 \leq d \leq R}$$

Se a distância d for nula, chamamos a secção plana obtida de secção meridiana.

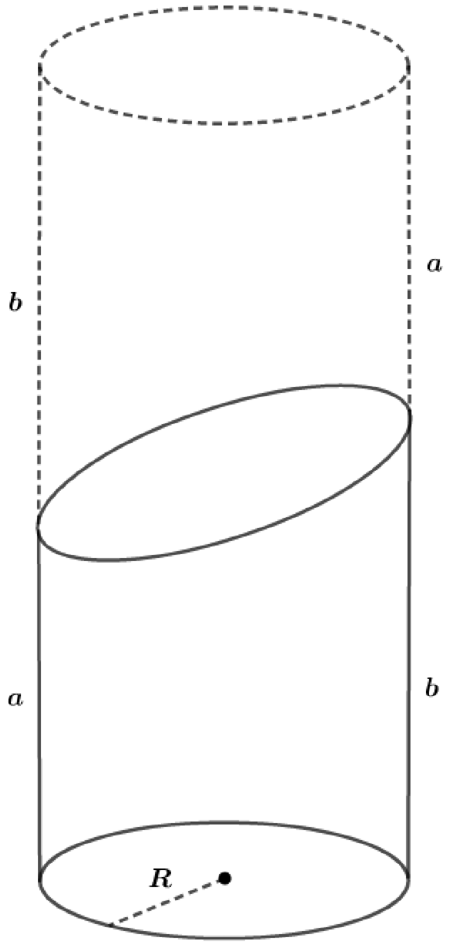


Note que a secção meridiana divide o cilindro em dois semicilindros. Quando a **secção meridiana é um quadrado**, temos um **cilindro equilátero**. Neste caso:

$$g = h = 2R$$

1.1.5. TRONCO DE CILINDRO

Consideremos o seguinte tronco de cilindro:



Nesse tronco, podemos ver que ao completarmos esse tronco com um outro com as mesmas dimensões, obtemos um cilindro reto. Assim, temos que seu volume V_T é dado por:

$$2V_T = V_{cilindro\ reto}$$

$$2V_T = \pi R^2(a+b)$$

$$\therefore \boxed{V_T = \frac{\pi R^2(a+b)}{2}}$$

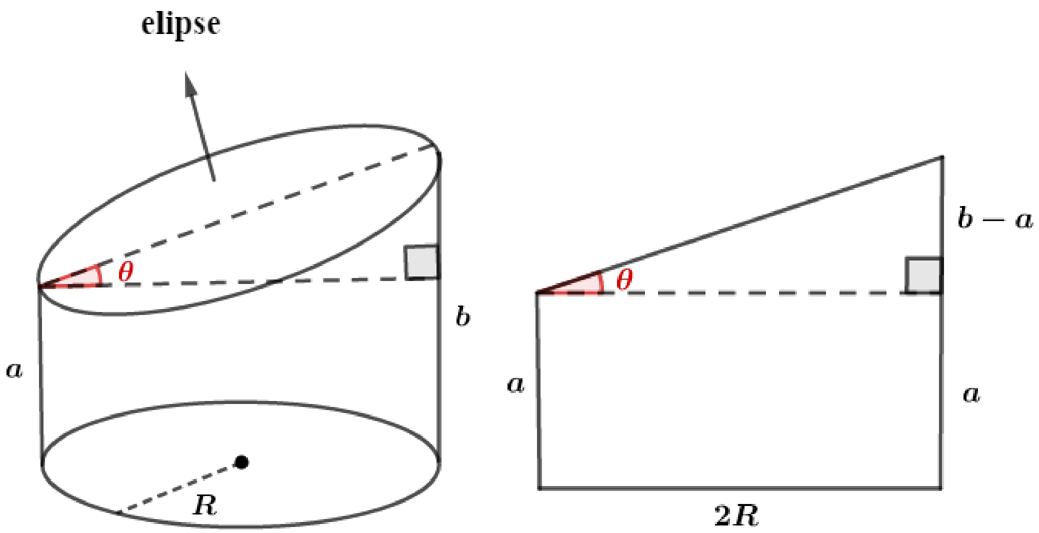
Da mesma forma, podemos calcular sua área lateral:

$$2A_l = A_{lateral\ cilindro\ reto}$$

$$2A_l = 2\pi R(a+b)$$

$$\therefore \boxed{A_l = \pi R(a+b)}$$

Agora, vejamos o caso de um tronco de cilindro que possui uma base reta e a outra base inclinada de um ângulo θ em relação à base reta.



A base superior é uma elipse. Fazendo a projeção ortogonal da área dessa elipse, obtemos a área da base circular. Assim, podemos escrever:

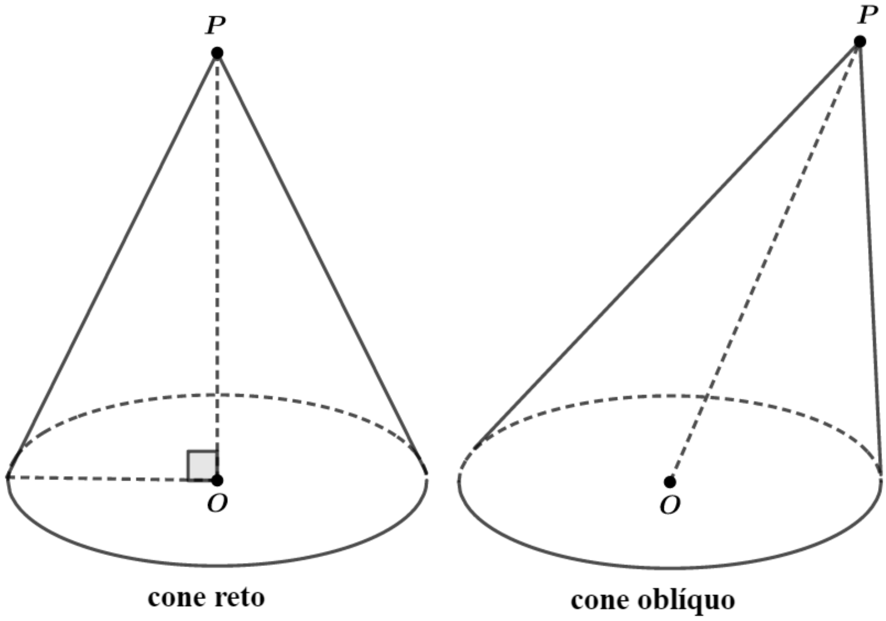
$$A_{elipse} \cdot \cos\theta = \pi R^2 \Rightarrow \boxed{A_{elipse} = \frac{\pi R^2}{\cos\theta}}$$

A figura planificada é a secção do plano que corta o tronco ao meio. Ela é um trapézio e como podemos ver, o ângulo θ deve satisfazer:

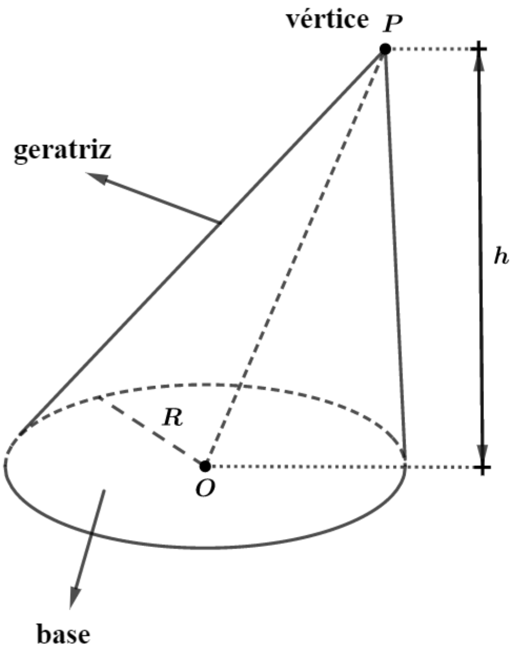
$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{b-a}{2R}}$$

1.2. CONES

Cones são sólidos que possuem uma base circular contida num plano e um vértice fora deste plano. Podemos pensar no cone como uma pirâmide arredondada. Assim, quando a projeção ortogonal do cone se encontra no centro da sua base circular, temos um cone reto. Por outro lado, quando essa projeção não está no centro da circunferência, temos um cone oblíquo.

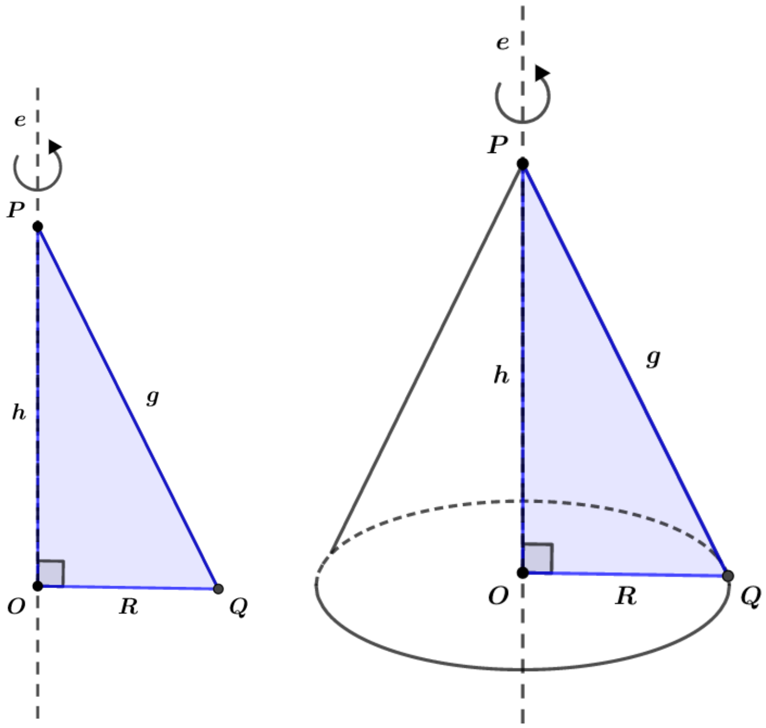


Vejamos os elementos presentes no cone:



Note que no caso do cone oblíquo, a geratriz pode ter medidas diferentes. Além disso, o termo geratriz também pode ser referido como apótema do cone.

Um **cone reto** pode ser chamado de **cone de revolução**. Pois, ao rotacionarmos um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos, obtemos um cone reto.

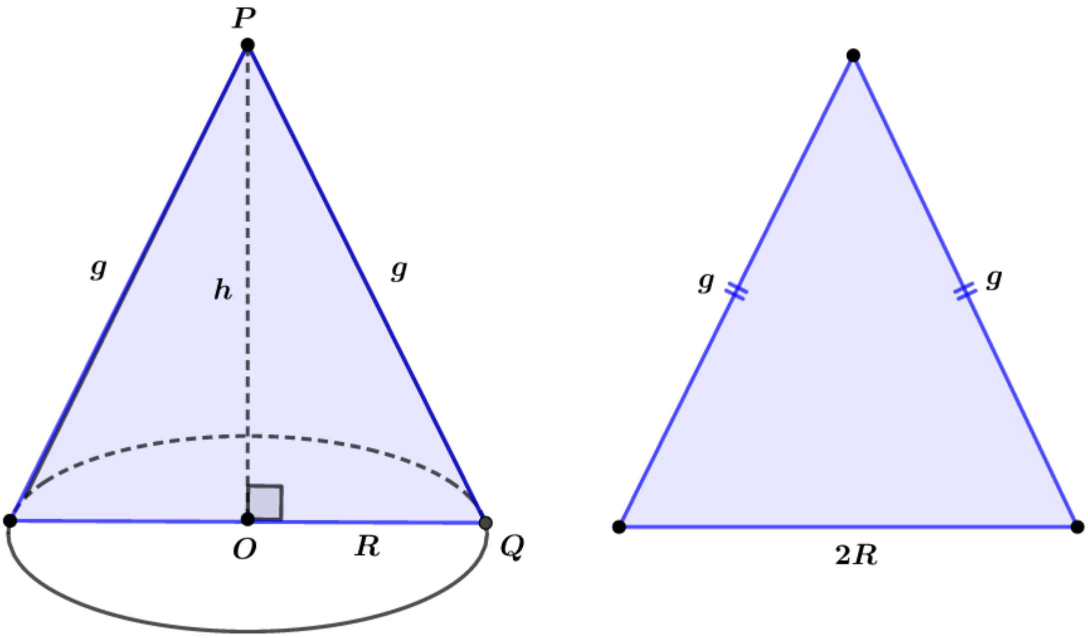


No caso do cone reto, temos a seguinte relação:

$$\boxed{g^2 = h^2 + R^2}$$

1.2.1. SECÇÃO MERIDIANA

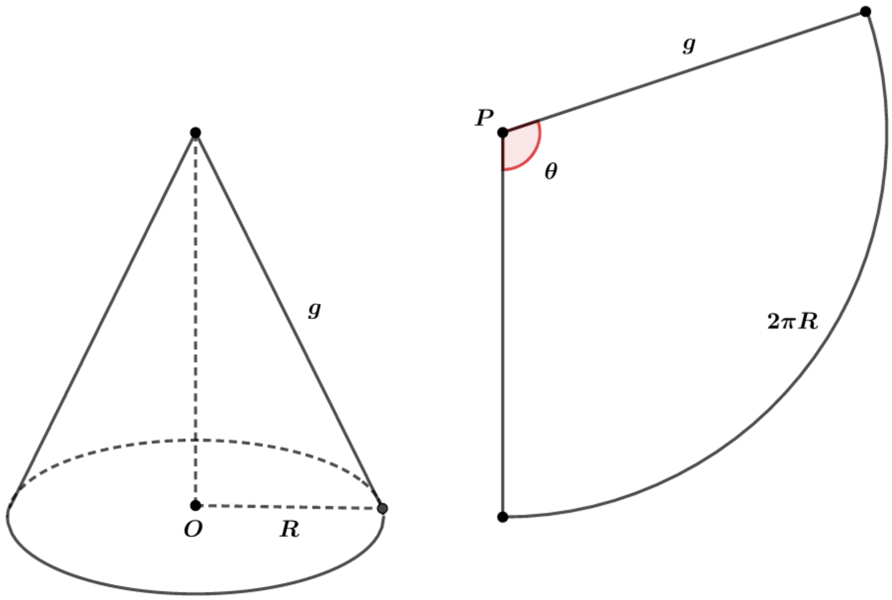
Quando seccionamos um cone reto por um plano que contém seu eixo PO, obtemos uma secção meridiana. Essa figura será um triângulo isósceles.



Se a secção meridiana for um triângulo equilátero, chamamos o cone de cone equilátero. Neste caso, temos $g = 2R$ e $h = R\sqrt{3}$.

1.2.2. ÁREA LATERAL E ÁREA TOTAL

Podemos afirmar que a superfície lateral de um cone de geratriz g e raio R é equivalente a um setor circular de raio g e comprimento de arco $2\pi R$.



Do setor circular, temos:

$$\theta = \frac{2\pi R}{g}$$

A área lateral do cone será igual à área do setor circular, logo:

$$A_L = \pi g^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{g^2}{2} \cdot \frac{2\pi R}{g}$$

$$\therefore \boxed{A_L = \pi R g}$$

A área total do cone é igual à soma da área lateral com a área da base:

$$A_T = A_L + A_B$$

$$A_T = \pi R g + \pi R^2$$

$$\boxed{A_T = \pi R(g + R)}$$

1.2.3. VOLUME DO CONE

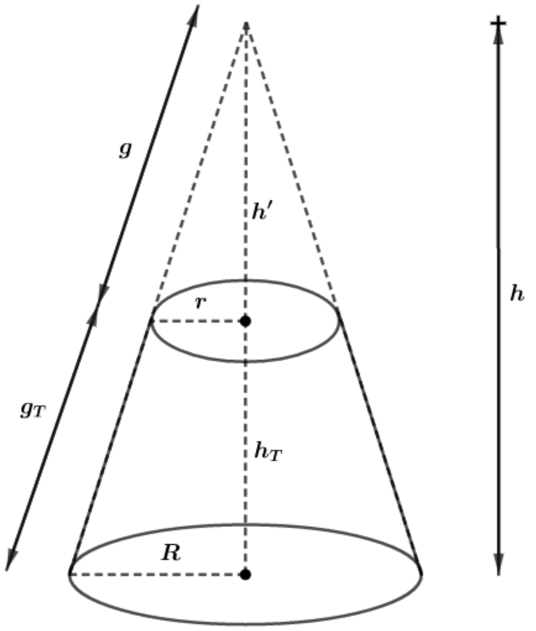
O volume do cone pode ser obtido pelo princípio de Cavalieri tomando-se um cone e uma pirâmide de mesma altura e área da base. Assim, temos para um cone de raio R e altura h:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

$$\boxed{V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$$

1.2.4. TRONCO DE CONE DE BASES PARALELAS

Vamos deduzir a fórmula para calcular o volume de um tronco de cone de bases paralelas. Consideremos a seguinte figura:



Sejam V_1, V_2, V_T os volumes do cone menor, do cone maior e do tronco de cone. Assim, temos:

$$V_T = V_2 - V_1$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{\pi r^2 h'}{3} = \frac{\pi R^2 (h' + h_T)}{3} - \frac{\pi r^2 h'}{3}$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{\pi h' (R^2 - r^2)}{3} + \frac{\pi R^2 h_T}{3}$$

Pela semelhança dos cones, podemos escrever:

$$\frac{h'}{h} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{h'}{h' + h_T} = \frac{r}{R} \Rightarrow Rh' = h'r + h_T r \Rightarrow h' = \frac{h_T r}{R - r}$$

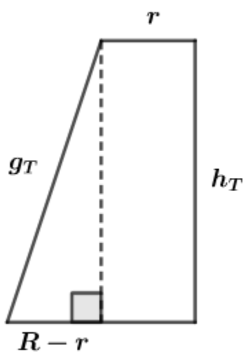
Substituindo h' na expressão do volume do tronco:

$$V_T = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h_T r}{R - r}\right)(R^2 - r^2) + \frac{\pi R^2 h_T}{3}$$

Portanto, o volume do tronco é:

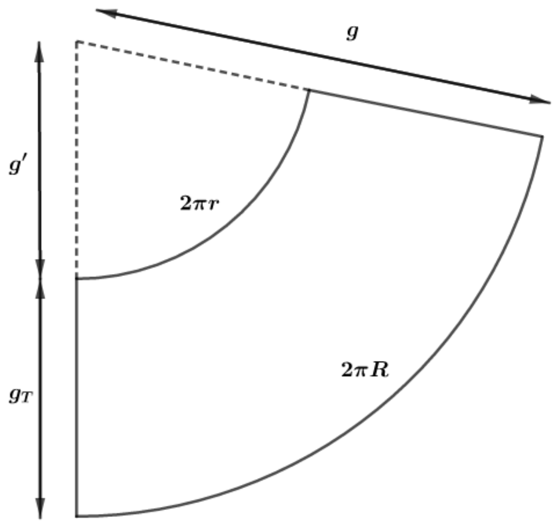
$$\boxed{V_T = \frac{\pi h_T}{3}(R^2 + r^2 + Rr)}$$

Pela figura da região planificada, vemos que podemos relacionar a geratriz, a altura e os raios das bases do tronco:



$$\boxed{g_T^2 = h_T^2 + (R-r)^2}$$

A área lateral do tronco pode ser calculada subtraindo-se a área lateral do cone menor da área lateral do cone maior. Sejam A_L, A_l, A_{LT} as áreas laterais do cone maior, do cone menor e do tronco. Assim, temos:



$$A_{LT} = A_L - A_l = \pi R g - \pi r g' = \pi R(g' + g_T) - \pi r g'$$

$$\Rightarrow A_{LT} = \pi[(R-r)g' + R g_T]$$

Pela razão de proporção, temos:

$$\frac{g'}{g} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{g'}{g' + g_T} = \frac{r}{R} \Rightarrow g' = \frac{r g_T}{R - r}$$

Substituindo na expressão da área:

$$A_{LT} = \pi\left[(R-r)\left(\frac{r g_T}{R-r}\right) + R g_T\right]$$

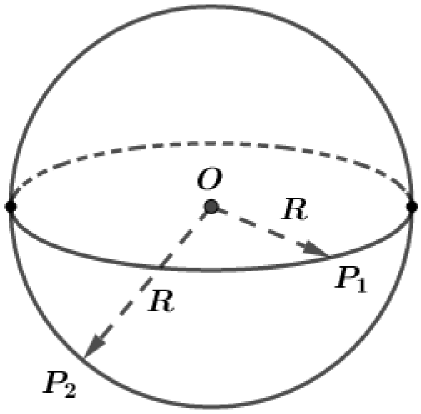
Portanto, a área lateral do tronco de cone é:

$$\boxed{A_{LT} = \pi g_T (R + r)}$$

1.3. ESFERAS

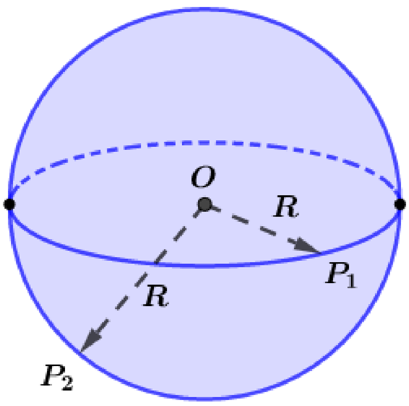
Vimos no capítulo de lugares geométricos que uma superfície esférica é o conjunto dos pontos no espaço que equidistam de um determinado ponto, denominado de centro.

$$S\{O,R\} = \left\{ P \in \underbrace{\epsilon}_{espaço} \middle| d_{P,O} = \underbrace{R}_{raio\,da\,esfera} \right\}$$

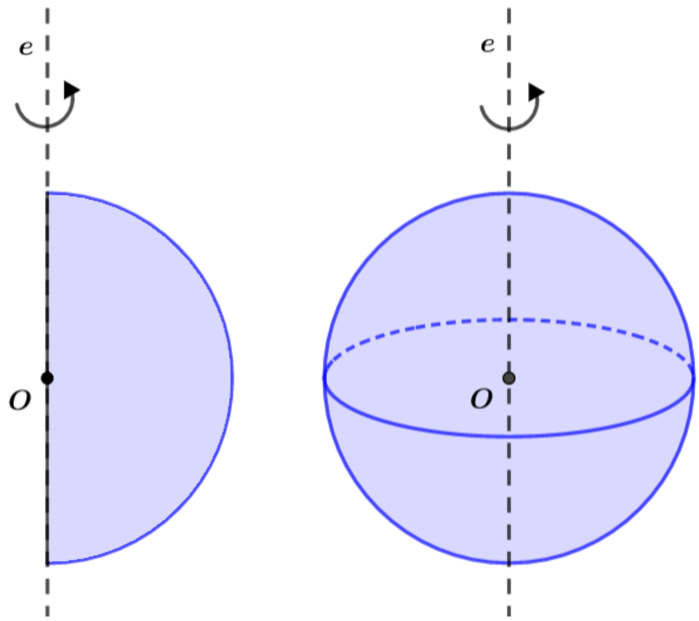


Uma esfera é o conjunto dos pontos no espaço que satisfazem a seguinte relação:

$$S_1\{O,R\} = \left\{ P \in \epsilon \middle| d_{P,O} \leq R \right\}$$

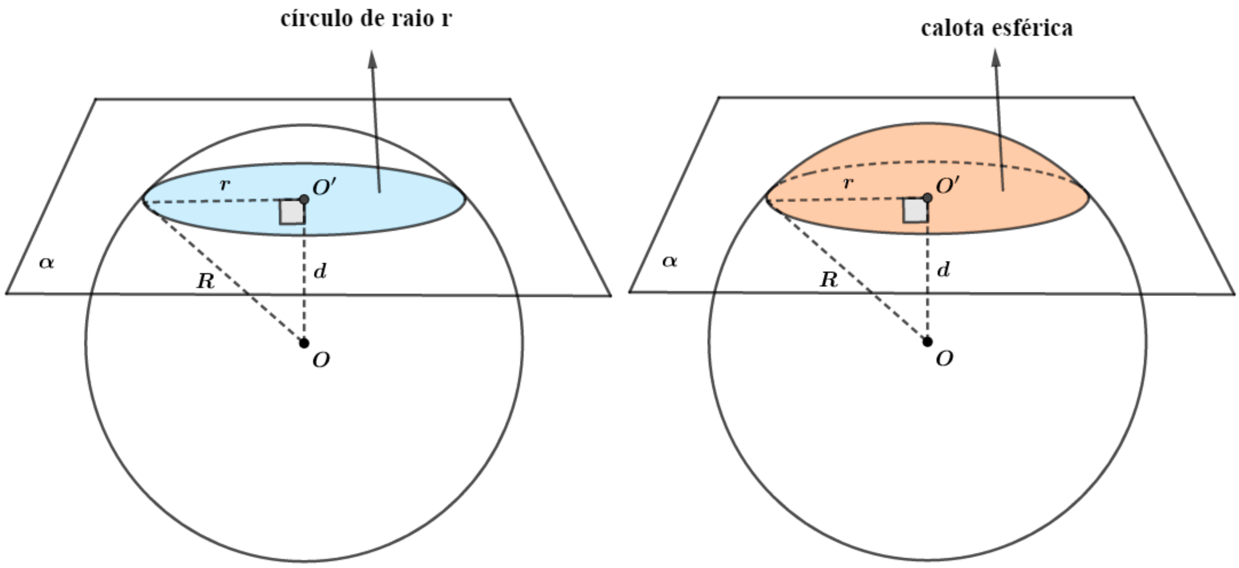


Também podemos dizer que a esfera é um sólido de revolução gerado pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém seu diâmetro.



1.3.1. SECÇÃO PLANA DA ESFERA

Toda secção plana de uma esfera é um círculo.



Pela figura, vemos que:

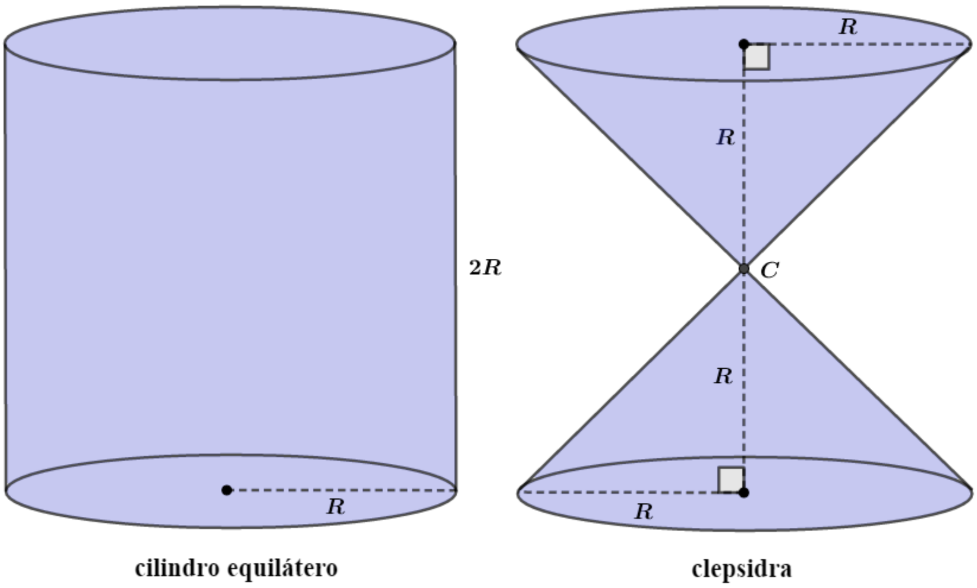
$$\boxed{R^2 = d^2 + r^2; 0 \leq d \leq R}$$

Se o plano secante à esfera passar pelo centro da esfera, a secção formada será o **círculo máximo** da esfera. Neste caso, temos $d = 0$ e, portanto, $r = R$.

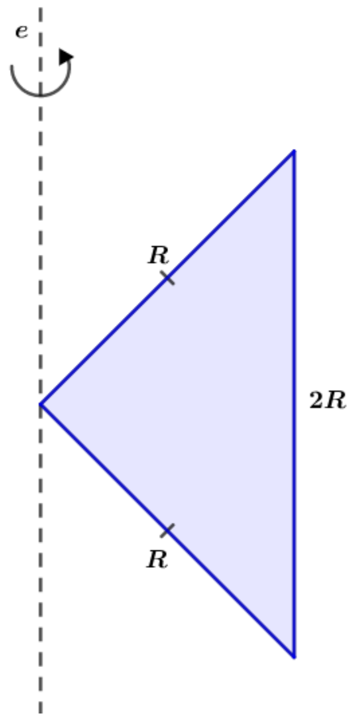
Note que **calota esférica** é o termo usado para a parte da esfera cortada por um plano.

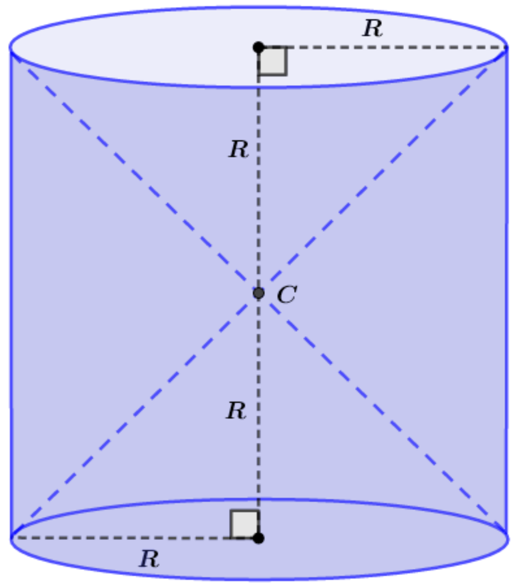
1.3.2. VOLUME DA ESFERA

Para a dedução da fórmula do volume da esfera, usaremos um sólido de volume equivalente. Consideremos um cilindro equilátero de altura $2R$ e dois cones de raio R e com vértice comum C conforme representada na figura abaixo:

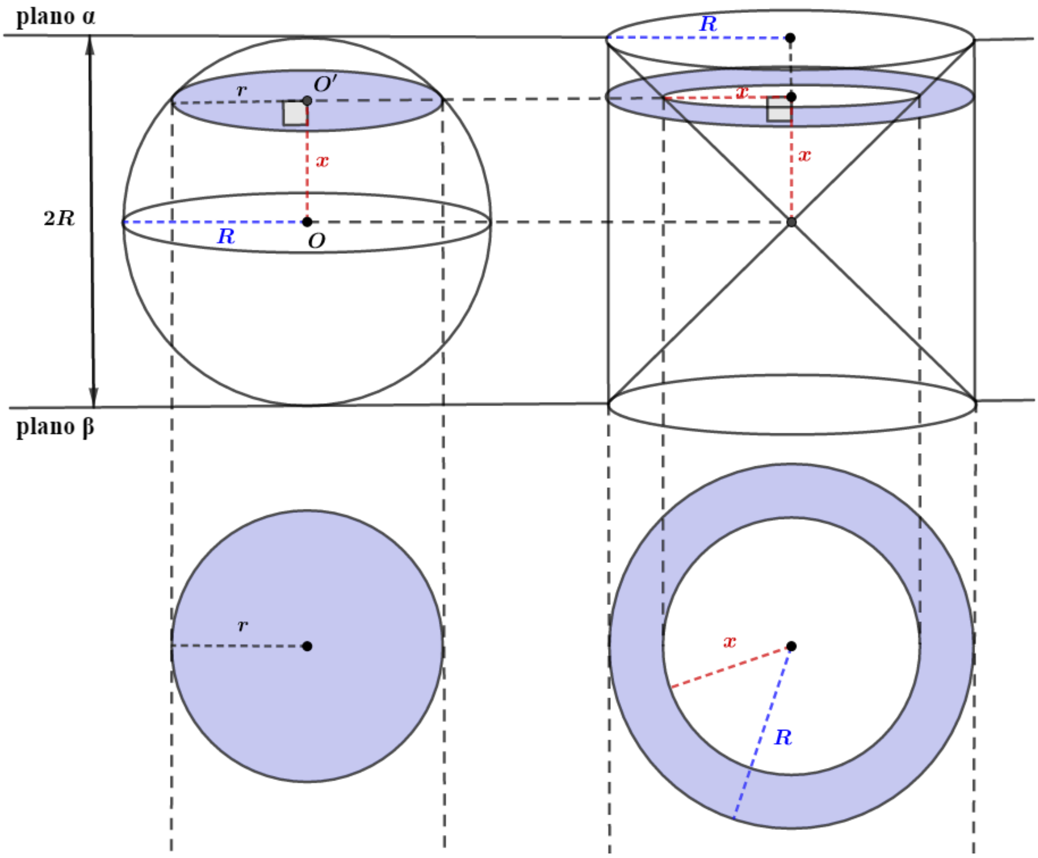


A união de dois cones com vértice comum é um sólido conhecido como **clepsidra**. Tomando o cilindro e removendo uma clepsidra do seu interior, obtemos um sólido conhecido como **anticlepsidra**. Este sólido também pode ser obtido pela rotação de um triângulo isósceles de lados $R, R, 2R$ em torno de um eixo contendo o vértice oposto ao lado de medida $2R$.





Para o cálculo do volume da esfera, usaremos uma esfera de raio R e uma anticlepsidra de raio R.



Os planos α e β são paralelos e ambos tangenciam a esfera. As bases da anticlepsidra estão contidas nesses planos. Vamos calcular a área da secção plana da esfera e da anticlepsidra.

Da esfera, temos um círculo de raio r:

$$A_{secção\_esfera} = \pi r^2$$

Mas podemos escrever r em função de x e R, pelo teorema de Pitágoras:

$$R^2 = x^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - x^2$$

$$\Rightarrow A_{secção\_esfera} = \pi(R^2 - x^2)$$

Da anticlepsidra, temos:

$$A_{secção\_anticlepsidra} = \pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$$

Assim, temos $A_{secção\_esfera} = A_{secção\_anticlepsidra}$. Pelo princípio de Cavalieri, como as áreas das secções são iguais e os sólidos têm mesmo volume, podemos escrever:

$$V_{esfera} = V_{anticlepsidra}$$

O volume da anticlepsidra é igual ao volume do cilindro equilátero menos o volume da clepsidra, ou seja,

$$V_{anticlepsidra} = V_{cilindro} - \underbrace{V_{clepsidra}}_{=dois\ cones} = \underbrace{\pi R^2}_{base\ cilindro}\left(\underbrace{2R}_{altura\ cilindro}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\underbrace{\pi R^2}_{base\ cone}\underbrace{R}_{altura\ cone}\right)$$

$$\Rightarrow V_{anticlepsidra} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Portanto, o volume de uma esfera de raio R é dado por:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

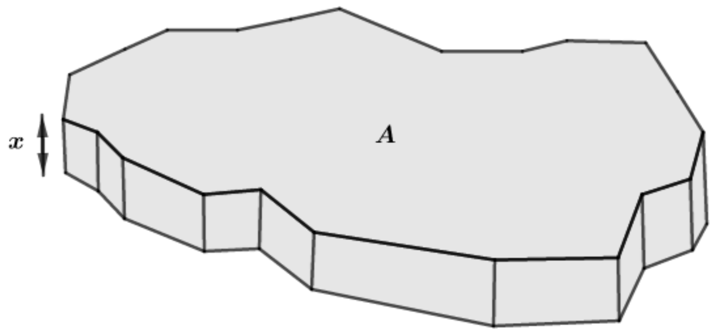
1.3.3. ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

A dedução da área da superfície esférica envolve cálculo diferencial e ela pode ser obtida derivando-se o volume da esfera de raio R em relação à R:

$$A = \frac{dV}{dR} = \frac{d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{dR}$$

$$\boxed{A = 4\pi R^2}$$

Uma outra forma de deduzir é pela noção intuitiva de volume. Tomando-se uma placa sólida de espessura x e área da base A, temos que seu volume é



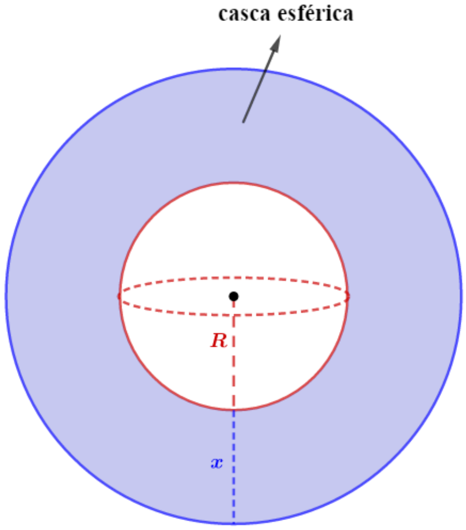
$$V = Ax$$

Assim:

$$A = \frac{V}{x}$$

Ao fazermos a placa a sólida assumir uma espessura infinitamente pequena, ou seja, fazendo x tender a zero, a expressão V/x resultará na área da superfície do sólido. Com base nisso, deduziremos a fórmula da superfície esférica.

Para deduzirmos a área da esfera, consideremos a seguinte casca esférica de espessura x:



Seja ΔV o volume da casca esférica acima. Assim, seu volume é igual ao volume de uma esfera de raio $R+x$ menos o volume de uma esfera de raio R. Desse modo:

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi(R+x)^3-\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi[(R^3+3R^2x+3Rx^2+x^3)-R^3]$$

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi(3R^2x+3Rx^2+x^3)$$

Dividindo a equação por x:

$$\frac{\Delta V}{x}=\frac{4}{3}\pi(3R^2+3Rx+x^2)$$

Ao aplicarmos o limite de $x\to 0$ na equação acima, a casca esférica torna-se a superfície da esfera. Assim, para $x\to 0$, temos a área da superfície esférica:

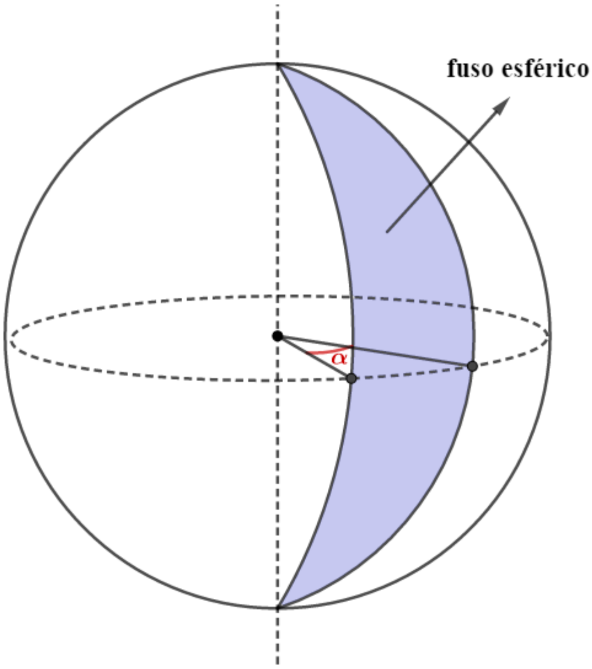
$$A_{esfera}=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta V}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{4}{3}\pi\left(3R^2+\underbrace{3Rx}_{0}+\underbrace{x^2}_{0}\right)\right]=4\pi R^2$$

Portanto, a área de uma superfície esférica de raio R é dada por:

$$\boxed{A=4\pi R^2}$$

1.3.4. FUSO ESFÉRICO E CUNHA ESFÉRICA

Fuso esférico é a parte da superfície esférica formada pela rotação em α graus de uma **semicircunferência** em torno do diâmetro da superfície esférica. Podemos dizer que ele é uma fatia de uma superfície esférica.



Para calcular a área do fuso, podemos fazer uma simples regra de três. Considerando α em radianos:

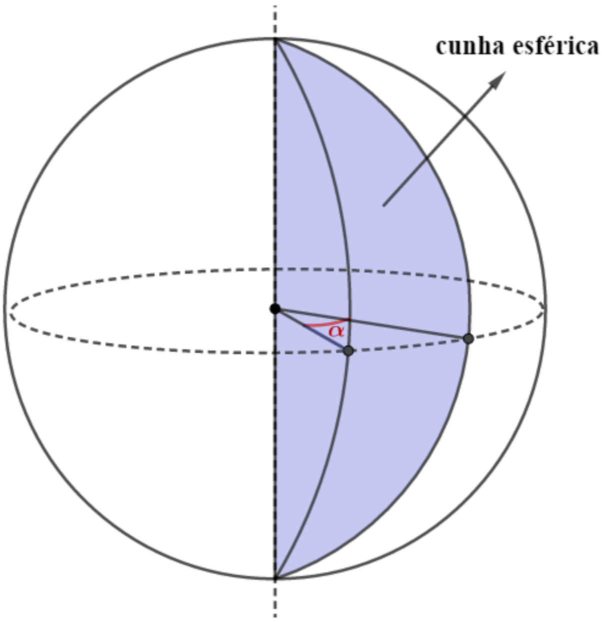
$$2\pi - 4\pi R^2$$

$$\alpha - A_{fuso}$$

$$\Rightarrow A_{fuso} = 4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\therefore \boxed{A_{fuso} = 2R^2\alpha}$$

Cunha esférica é a parte da esfera formada pela rotação em α graus de um **semicírculo** em torno do diâmetro da esfera. Podemos dizer que ela é uma fatia de uma esfera.



Para calcular o volume da cunha, podemos fazer uma simples regra de três. Considerando α em radianos:

$$2\pi - \frac{4}{3}\pi R^3$$

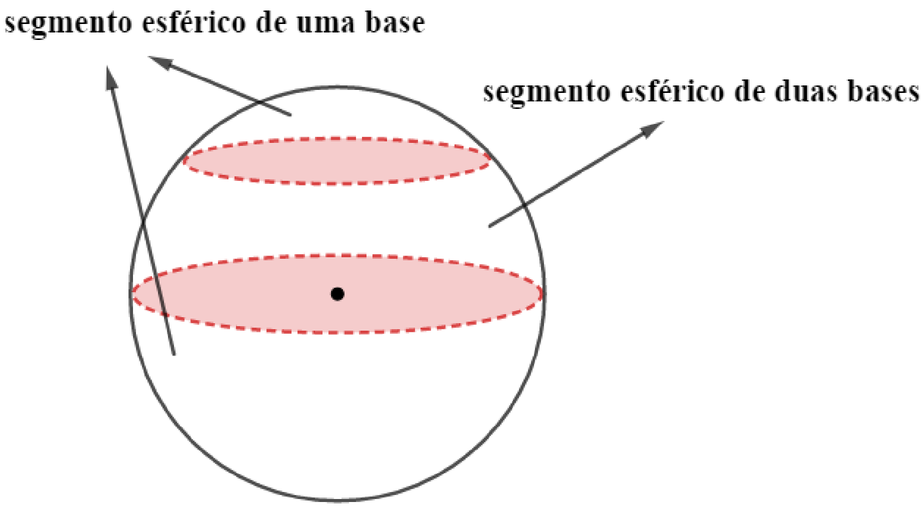
$$\alpha - V_{cunha}$$

$$\Rightarrow V_{cunha} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$

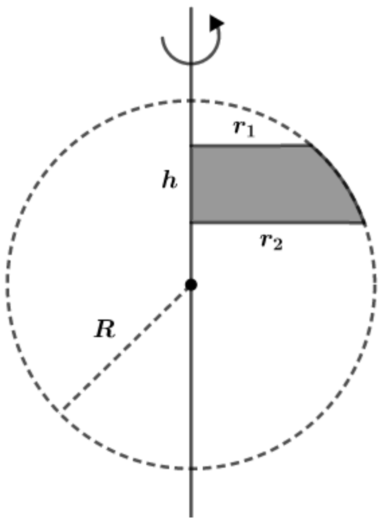
$$\therefore \boxed{A_{fuso} = \frac{2}{3}R^3\alpha}$$

1.3.5. SEGMENTOS ESFÉRICOS

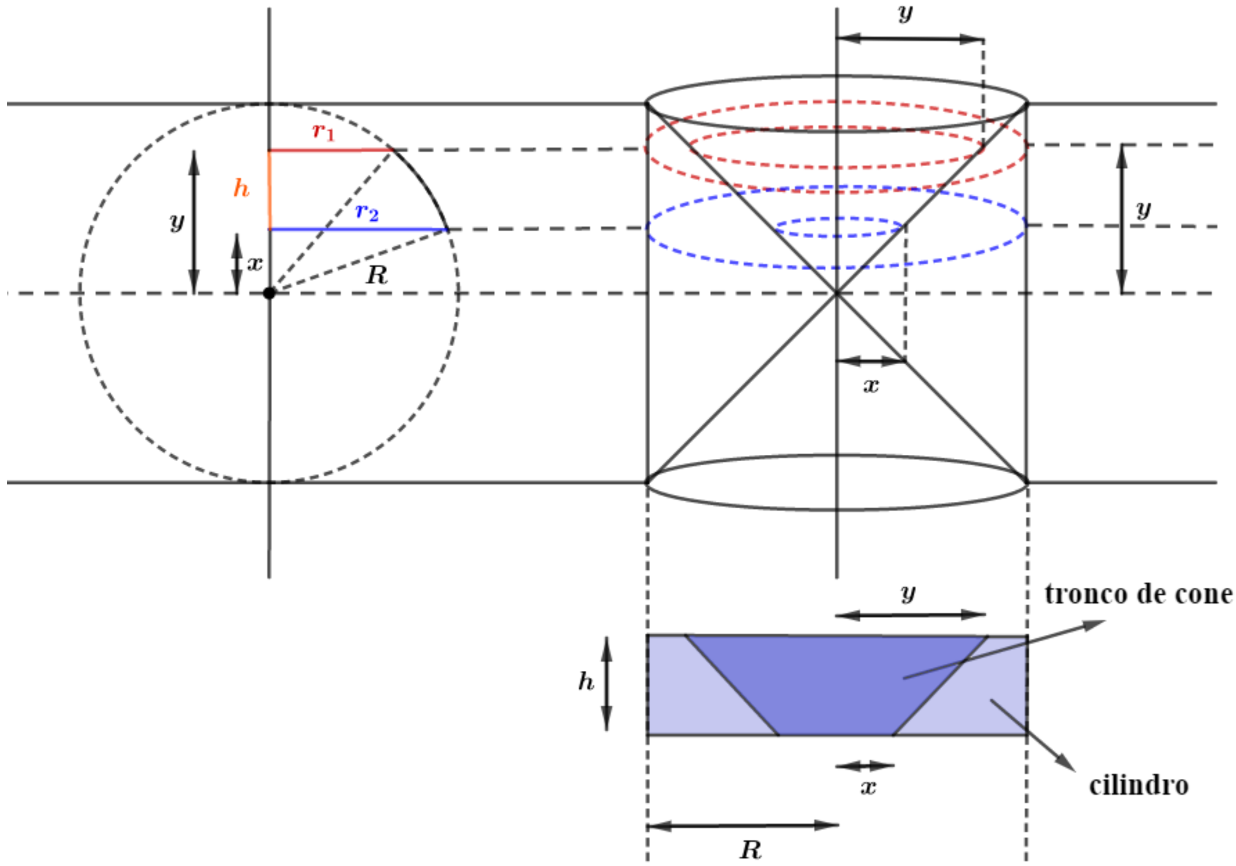
Seccionando-se uma esfera com dois planos paralelos entre si, dividimos a esfera em três partes. A região compreendida entre os planos é chamada de **segmento esférico de duas bases**. As outras duas são chamadas de **segmentos esféricos de uma base**, essas também podem ser denominadas de **calotas esféricas**.



Vamos calcular o volume de um segmento esférico de duas bases. Podemos construir esse sólido rotacionando-se a seguinte figura em torno de um eixo:



Assim, vamos usar o princípio de Cavalieri e uma anticlepsidra para encontrar o volume desse sólido.



Note que o volume do segmento esférico é igual ao volume da anticlepsidra. Este é igual à diferença entre os volumes do cilindro e do tronco de cone. Logo, temos:

$$V_{segmento\ esférico} = V_{cilindro} - V_{tronco} = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}(x^2 + y^2 - xy)$$

$$\Rightarrow V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}(6R^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}(6R^2 - 3(x^2 + y^2) + x^2 + y^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}(6R^2 - 3(x^2 + y^2) + (y - x)^2)$$

Na figura da esfera, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$R^2 = y^2 + r_1^2$$

$$R^2 = x^2 + r_2^2$$

Somando-se essas duas relações:

$$2R^2 = x^2 + y^2 + r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow 3(x^2 + y)^2 = 6R^2 - 3(r_1^2 + r_2^2)$$

Além disso, temos $y - x = h$, logo:

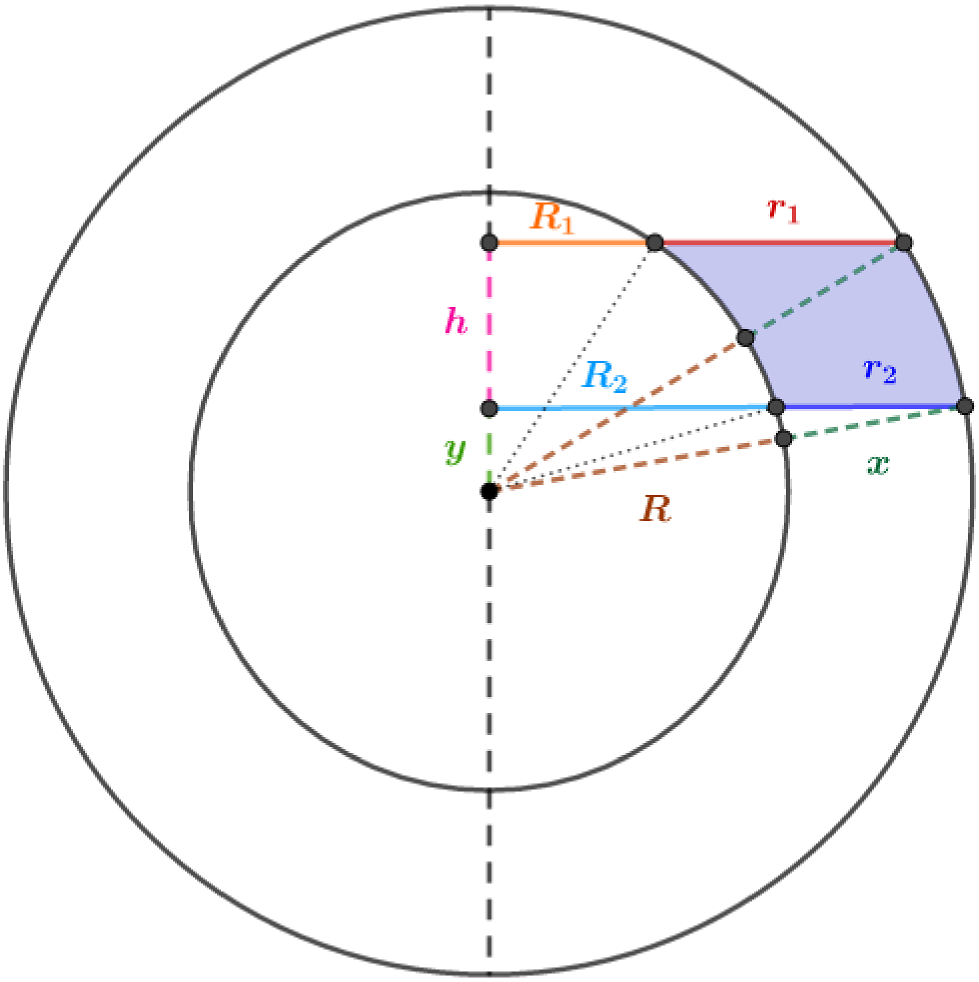
$$\Rightarrow V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}\left(6R^2 - \left(6R^2 - 3(r_1^2 + r_2^2)\right) + h^2\right)$$

$$\therefore \boxed{V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2]}$$

Para o volume do segmento esférico de uma base, basta considerar $r_1 = 0$ e $r_2 = r$. Logo:

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2)}$$

Podemos calcular a área da superfície do segmento esférico usando a expressão do seu volume. Para isso, usaremos uma casca esférica de espessura x e tomaremos um segmento esférico dessa casca. Consideremos a seguinte figura que é a secção plana que passa pelo centro desse segmento esférico:



Assim, temos que a diferença de volumes entre os segmentos de esferas concêntricas é:

$$\Delta V = \frac{\pi h}{6}[3(R_1 + r_1)^2 + 3(R_2 + r_2)^2 + h^2] - \frac{\pi h}{6}[3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2]$$

$$\Delta V = \frac{\pi h}{6}[3R_1^2 + 6R_1 r_1 + 3r_1^2 + 3R_2^2 + 6R_2 r_2 + 3r_2^2 + h^2] - \frac{\pi h}{6}[3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2]$$

$$\Delta V = \frac{\pi h}{6}(6R_1 r_1 + 3r_1^2 + 6R_2 r_2 + 3r_2^2)$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{\pi h}{2}(2R_1 r_1 + 2R_2 r_2 + r_1^2 + r_2^2)} \ (I)$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(R + x)^2 = y^2 + (R_2 + r_2)^2 \ \ (II)$$

$$(R + x)^2 = (h + y)^2 + (R_1 + r_1)^2 \ \ (III)$$

$$R^2 = y^2 + R_2^2 \Rightarrow y^2 = R^2 - R_2^2 \ \ (IV)$$

$$R^2 = (h + y)^2 + R_1^2 \Rightarrow (h + y)^2 = R^2 - R_1^2 \ \ (V)$$

Somando (I) e (II), temos:

$$2(R + x)^2 = y^2 + (h + y)^2 + (R_1 + r_1)^2 + (R_2 + r_2)^2$$

Substituindo (III) e (IV) na equação acima:

$$2(R + x)^2 = R^2 - R_2^2 + R^2 - R_1^2 + (R_1 + r_1)^2 + (R_2 + r_2)^2$$

$$2(R + x)^2 = 2R^2 + 2R_1r_1 + 2R_2r_2 + r_1^2 + r_2^2$$

$$\Rightarrow 2R_1r_1 + 2R_2r_2 + r_1^2 + r_2^2 = 2(R + x)^2 - 2R^2 \ \ (VI)$$

Substituindo (VI) em (I):

$$\Delta V = \frac{\pi h}{2}[2(R + x)^2 - 2R^2]$$

$$\Delta V = \frac{\pi h}{2}(4Rx + 2x^2)$$

Dividindo a equação por x:

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{x} = \frac{\pi h}{2}(4R + 2x)$$

Aplicando o limite de $x \to 0$:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta V}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\pi h}{2}\left(4R + \underbrace{2x}_{0}\right)$$

Portanto, a área da superfície do segmento esférico é:

$$\therefore \boxed{A = 2\pi Rh}$$

14. (Inédito)

O volume de uma esfera de raio $r = 5$ é interceptada por um plano que contém seu diâmetro.

A intersecção entre a esfera e o plano forma

a) uma esfera de raio $r = 5$

b) uma circunferência de raio $r = 5$ pertencente ao plano

c) uma esfera de raio $r > 5$ perpendicular a plano

d) uma circunferência de raio $r < 5$ oblíqua ao plano

e) uma reta pertencente ao plano

Comentários

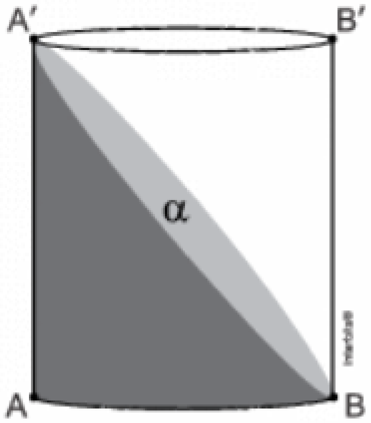
A intersecção entre um plano que contém o centro de uma esfera e a própria esfera gera uma circunferência pertencente ao plano e de mesmo raio da esfera, neste caso, $r = 5$.

Gabarito: “b”.

---

15. (UERJ/2017)

Um cilindro circular reto possui diâmetro AB de $4\,cm$ e altura AA' de $10\,cm$. O plano α, perpendicular à seção meridiana $ABB'A'$, que passa pelos pontos B e A' das bases, divide o cilindro em duas partes, conforme ilustra a imagem.



O volume da parte do cilindro compreendida entre o plano a e a base inferior, em cm³, é igual a:

a) 8π

b) 12π

c) 16π

d) 20π

Comentários

Apesar de o plano estar inclinado, divide o cilindro em duas partes de igual volume.

Dessa forma, o volume solicitado é igual à metade do volume do cilindro completo.

$$V_{metade} = \frac{1}{2} \cdot Área\ da\ base \cdot altura$$

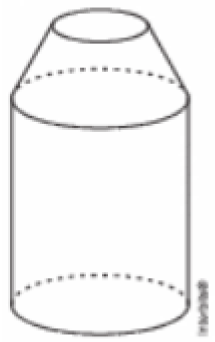
$$V_{metade} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 10$$

$$V_{metade} = 20\pi$$

Gabarito: “d”.

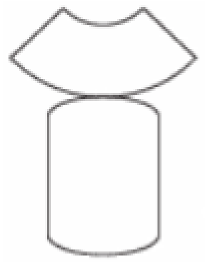
16. (ENEM-Libras/2017)

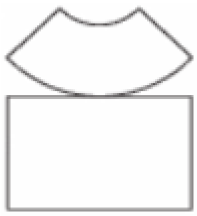
Para divulgar sua marca, uma empresa produziu um porta-canetas de brinde, na forma do sólido composto por um cilindro e um tronco de cone, como na figura.

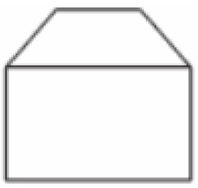


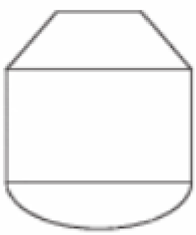
Para recobrir toda a superfície lateral do brinde, essa empresa encomendará um adesivo na forma planificada dessa superfície.

Que formato terá esse adesivo?

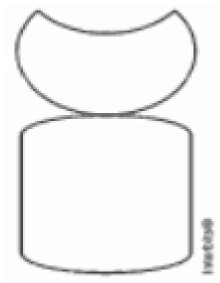
a) 

b) 

c) 

d) 

e)

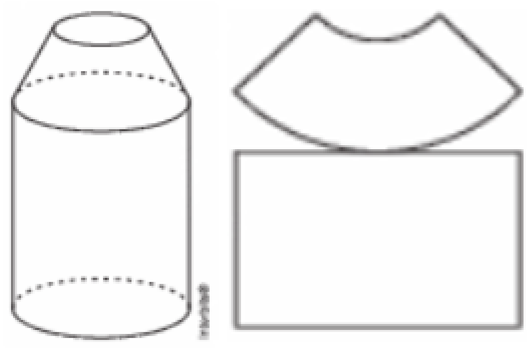


Comentários

Ao planificar um tronco de cone, presente na parte superior, temos, como planificação a superfície de um setor circular.

Ao planificar um cilindro, temos um retângulo.

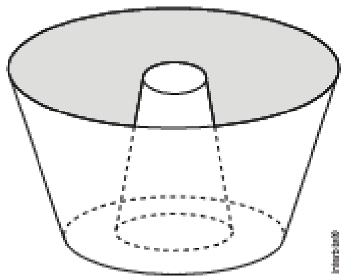
Dessa forma, a única alternativa que apresenta essas opções é a alternativa b)



Gabarito: "b".

17. (ENEM/2013)

Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais.

Essas figuras são

a) um tronco de cone e um cilindro.

b) um cone e um cilindro.

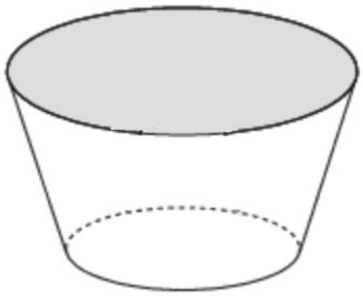
c) um tronco de pirâmide e um cilindro.

d) dois troncos de cone.

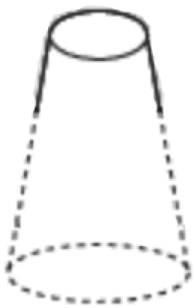
e) dois cilindros.

Comentários

Se retirarmos a parte interna da forma, a que faz o "buraco no bolo", vemos um tronco de cone invertido, ou seja, com o vértice para baixo.



Já a parte interna, sozinha, representa outro tronco de cone, veja.



Dessa forma, a forma é composta de dois troncos de cone.

Gabarito: "d".

---

18. (UFPA/2011)

Uma rasa é um paneiro utilizado na venda de frutos de açaí. Um típico exemplar tem forma de um tronco de cone, com diâmetro de base $28\ cm$, diâmetro de boca $34\ cm$ e altura $27\ cm$. Podemos afirmar, utilizando $\pi = 3,14$, que a capacidade da rasa, em litros, é aproximadamente

a) 18 **b) 20** **c) 22** **d) 24** **e) 26**

Comentários

Já sabemos que a rasa é um tronco de cone. O enunciado nos informou os diâmetros das bases, inferior e superior. Com eles, conseguimos os raios respectivos.

$$r = \frac{28}{2} = 14 \qquad R = \frac{34}{2} = 17$$

Sabendo que a altura do tronco é de $27\ cm$, podemos calcular o volume diretamente.

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

$$V \cong \frac{3{,}14}{3} \cdot 27 \cdot (17^2 + 17 \cdot 14 + 14^2)$$

$$V \cong \frac{3{,}14}{\cancel{3}} \cdot {}^{9}\cancel{27} \cdot (289 + 238 + 196)$$

$$V \cong 3{,}14 \cdot 9 \cdot 723$$

$$V \cong 3{,}14 \cdot 6507$$

$$V \cong 20431{,}98\ cm^3$$

Como $1l$ equivale a $1000\ cm^3$, temos que

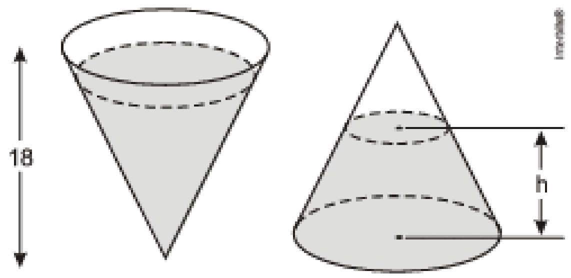
$$V \cong 20{,}43198\ l$$

Gabarito: "b".

---

19. (UFRGS/2008)

A areia contida em um cone fechado, de altura $18\ cm$, ocupa $\frac{7}{8}$ da capacidade do cone.



Voltando-se o vértice do cone para cima, conforme indica a figura, a altura h do tronco de cone ocupado pela areia, em centímetros, é

a) 7. **b) 8.** **c) 9.** **d) 10.** **e) 11.**

Comentários

Chamemos v o volume de areia contido no cone e de V o volume total do cone.

Pelo enunciado, temos que

$$v = \frac{7}{8}V.$$

Sendo assim, podemos calcular o volume do cone menor, na parte superior da segunda figura, como sendo

$$V - v = V - \frac{7}{8}V = \frac{1}{8}V$$

Com essa informação, temos condição de encontrar a constante de proporcionalidade entre o cone menor, não ocupado pela areia, e o cone completo. Como estamos lidando com volumes, a razão k ao cubo é igual à razão entre os volumes dos dois cones.

$$k^3 = \frac{V\ cone\ pequeno}{V\ cone\ grande}$$

$$k^3 = \frac{\frac{1}{8}V}{V}$$

$$k^3 = \frac{1}{8}$$

$$\sqrt[3]{k^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Por semelhança de triângulos na segunda figura, podemos dizer que a razão entre as alturas (cone pequeno para cone grande) é igual a k.

$$\frac{H - h}{H} = k$$

$$\frac{18 - h}{18} = \frac{1}{2}$$

$$18 - h = \frac{18}{2}$$

$$18 - h = 9$$

$$18 - 9 = h$$

$$9\ cm = h$$

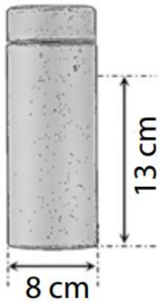
Gabarito: "c".

---

20. (Fatec/2019-1)

Uma garrafa térmica tem formato de um cilindro circular reto, fundo plano e diâmetro da base medindo $8,0\ cm$. Ela está em pé sobre uma mesa e parte do suco em seu interior já foi consumido, sendo que o nível do suco está a $13\ cm$ da base da garrafa, como mostra a figura.

O suco é despejado num copo vazio, também de formato cilíndrico e base plana, cujo diâmetro da base é $4\ cm$ e com altura de $7\ cm$. O copo fica totalmente cheio de suco, sem desperdício.



Adote $\pi = 3$.

Despreze a espessura do material da garrafa e do copo.

Nessas condições, o volume de suco restante na garrafa é, em cm^3, aproximadamente,

a) 250. b) 380. c) 540. d) 620. e) 800.

Comentários

O volume final na garrafa V_f será a diferença entre o valor inicial nela, V_o e o volume constante no copo, V_c.

Como são todos cilindros circulares retos, temos.

$$V_f = V_0 - V_c$$

Como o volume V de um cilindro circular reto é dado por

$$V = ab.h = \pi \cdot r^2 \cdot h,$$

onde r e h representam o raio da base e a altura do cilindro, respectivamente, podemos calcular V_f.

$$V_f = V_0 - V_c$$

$$V_f = \pi \cdot R^2 \cdot h - \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Atenção, para não causar confusão, usaremos R para simbolizar o raio da garrafa e r para simbolizar o raio do copo.

Além disso, fique ligado, o enunciado não forneceu os raios e sim os diâmetros, portanto, temos que dividir por dois os valores dados antes de colocá-los na equação. Os valores das alturas permanecem inalterados, ok?

O valor de π deve, segundo enunciado, ser aproximado para 3.

As dimensões dadas estão em cm e o volume final está indicado, nas alternativas, em cm^3. Assim, não são necessárias transformações de unidade.

Vamos à equação.

$$V_f = \pi \cdot R^2 \cdot h - \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_f = 3 \cdot 4^2 \cdot 13 - 3 \cdot 2^2 \cdot 7$$

$$V_f = 624 - 84$$

$$V_f = 540$$

Gabarito: "c".

---

21. (Mackenzie/2019)

Se as áreas laterais de dois cilindros equiláteros são, respectivamente, $16\pi\ cm^2$ e $100\pi\ cm^2$, então seus volumes, em cm^3 são, respectivamente,

a) $16\sqrt{2}\pi$ e $250\sqrt{2}\pi$

b) 32π e 200π

c) 16π e 250π

d) 24π e 150π

e) $24\sqrt{2}\pi$ e $150\sqrt{2}\pi$

Comentários

Sendo r o raio do cilindro menor e R o raio do cilindro maior; A_c a área lateral do cilindro menor e A_C a área lateral do cilindro maior, V_c o volume do cilindro menor e V_C o volume do cilindro maior, lembrando que são ambos equiláteros (altura = diâmetro do raio da base), temos:

$$A_c = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$16\cancel{\pi} = 2 \cdot \cancel{\pi} \cdot r \cdot 2 \cdot r$$

$$16 = 4 \cdot r^2$$

$$\frac{16}{4} = r^2$$

$$4 = r^2$$

$$\sqrt{4} = \sqrt{r^2}$$

$$2 = |r|$$

$$\pm 2 = r$$

Como r é uma distância, podemos considerar apenas $r = 2$.

Assim, para o cálculo do volume, temos:

$$V_c = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_c = \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r$$

$$V_c = 2 \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V_c = 2 \cdot \pi \cdot 2^3$$

$$V_c = \pi \cdot 2^4$$

$$V_c = \pi \cdot 16$$

Aplicando o mesmo raciocínio para o cilindro maior, temos:

$$A_C = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$$

$$16\cancel{\pi} = 2 \cdot \cancel{\pi} \cdot R \cdot 2 \cdot R$$

$$100 = 2^2 \cdot R^2$$

$$\frac{100}{4} = R^2$$

$$25 = R^2$$

$$\sqrt{25} = \sqrt{R^2}$$

$$5 = |R|$$

$$\pm 5 = R$$

Como R é uma distância, podemos considerar apenas $r = 5$.

Assim, para o cálculo do volume, temos:

$$V_C = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_C = \pi \cdot R^2 \cdot 2 \cdot R$$

$$V_C = 2 \cdot \pi \cdot R^3$$

$$V_C = 2 \cdot \pi \cdot 5^3$$

$$V_C = 2 \cdot \pi \cdot 5^3 \cdot \sqrt{2}^3$$

$$V_C = \pi \cdot 250 \cdot \sqrt{2}$$

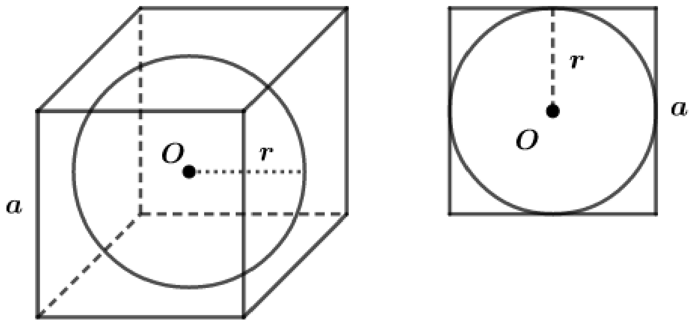
Gabarito: “c”.

2. INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE SÓLIDOS

Neste capítulo, veremos alguns casos de inscrição de circunscrição de sólidos que poderão ser cobrados no vestibular, muitas das questões desse tópico envolverão esferas, então, vamos estudá-las. A ideia aqui é apresentar o raciocínio que deve ser utilizado ao se deparar com esse tipo de questão.

2.1. ESFERA E CUBO

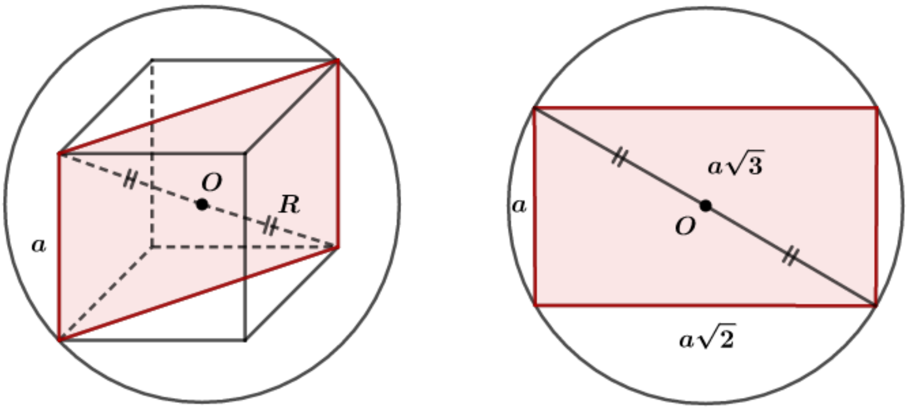
a) Esfera inscrita em cubo



Note que a esfera tangencia todas as faces do cubo. Assim, o centro da esfera equidista das faces, logo:

$$\boxed{r = \frac{a}{2}}$$

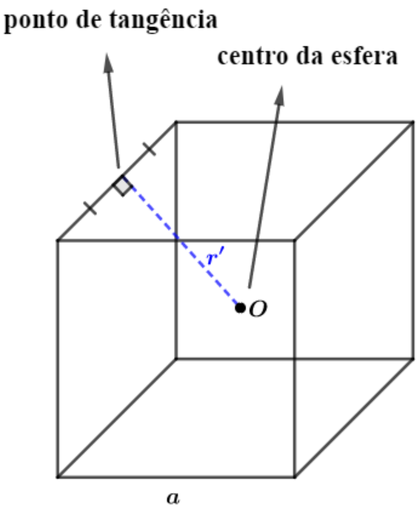
b) Esfera circunscrita ao cubo



O raio da esfera circunscrita é igual à metade da diagonal do cubo, como a diagonal do cubo mede $a\sqrt{3}$, temos:

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

c) Esfera tangente às arestas do cubo



Nesse caso, o centro da esfera equidista do ponto médio das arestas do cubo, ou seja,

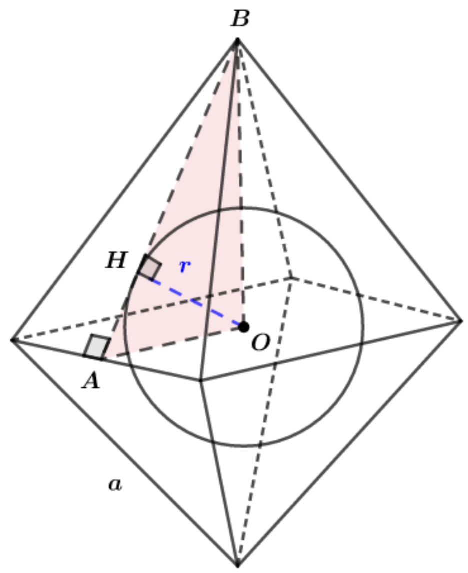
$$\boxed{r' = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

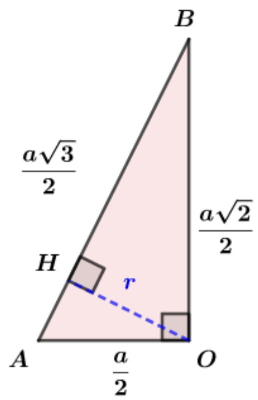
Note que, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{R^2 = r'^2 + r^2}$$

2.2. ESFERA E OCTAEDRO REGULAR

a) Esfera inscrita em um octaedro regular

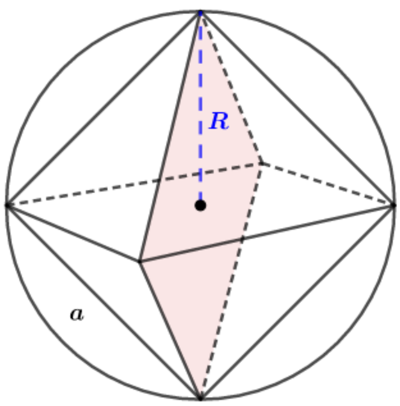


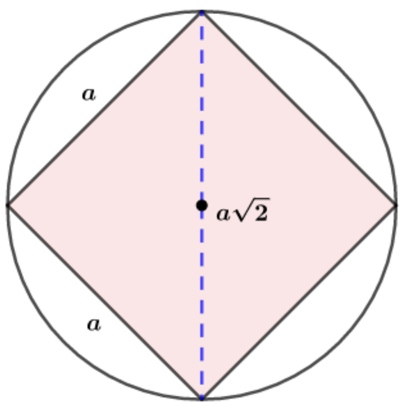


A esfera tangencia todas as faces do octaedro regular. Pela figura, podemos ver que o raio da esfera inscrita é igual à altura do triângulo retângulo AOB, logo:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}r=\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow\boxed{r=\frac{a\sqrt{6}}{6}}$$

b) Esfera circunscrita ao octaedro regular

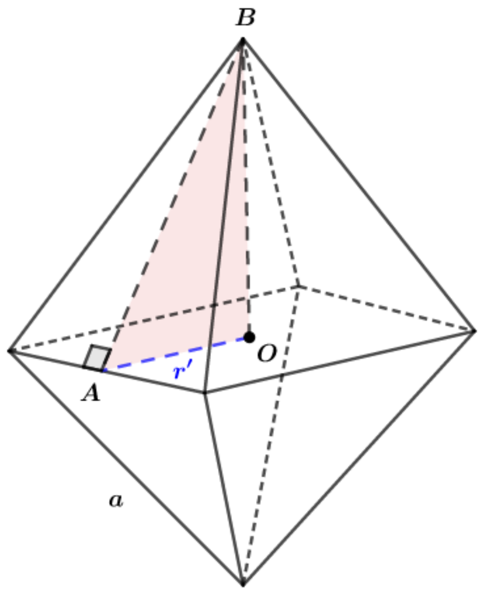




Nesse caso, o raio da esfera é igual à metade da diagonal do octaedro regular, logo:

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

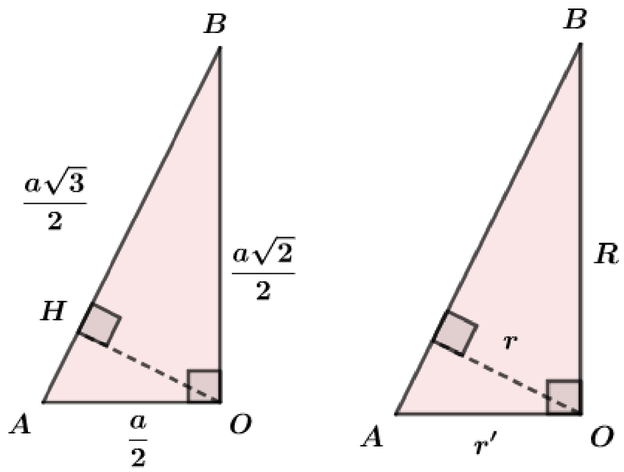
c) Esfera tangente às arestas do octaedro regular



O raio dessa esfera é

$$r' = \frac{a}{2}$$

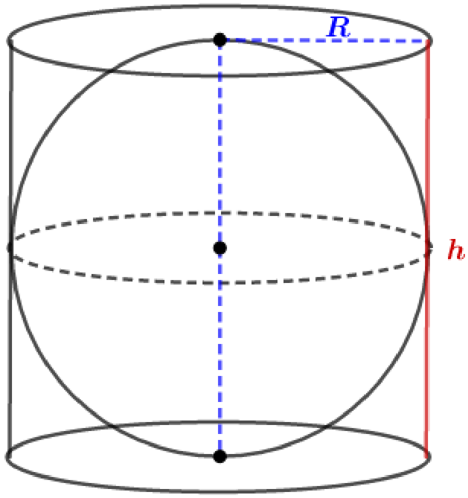
Note que os raios das esferas que estudamos podem se relacionar da seguinte forma:



$$\boxed{\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{r'^2}}$$

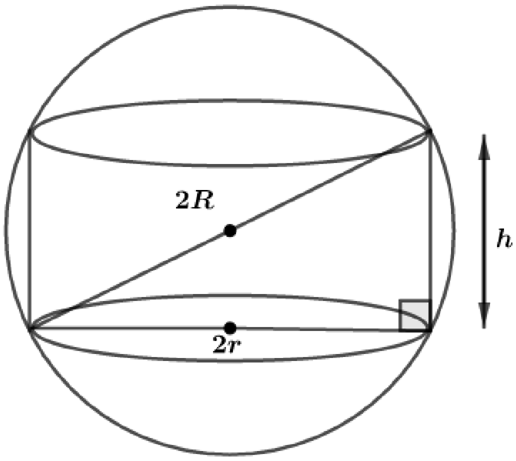
2.3. ESFERA E CILINDRO

a) Cilindro circunscrita a uma esfera



Note que o cilindro circunscrito a uma esfera é um cilindro equilátero com $\boxed{h = 2R}$.

b) Cilindro inscrito em uma esfera



Legenda:

$$R - raio\ da\ esfera$$

$$r - raio\ da\ base\ do\ cilindro$$

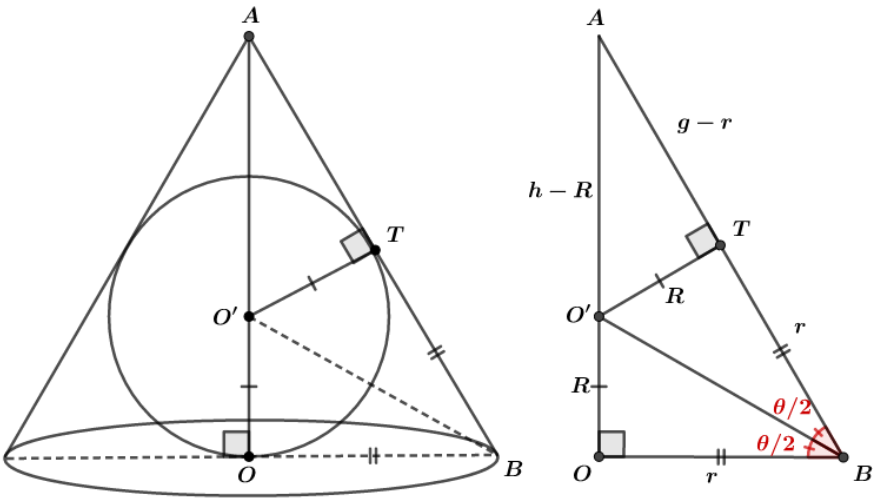
$$h - altura\ do\ cilindro$$

Temos a seguinte relação:

$$\boxed{(2R)^2 = (2r)^2 + h^2}$$

2.4. ESFERA E CONE

a) Esfera inscrita em um cone



Legenda:

$$R - raio\ da\ esfera$$

$$h - altura\ do\ cone$$

$$r - raio\ da\ base\ do\ cone$$

$$g - geratriz\ do\ cone$$

$$\theta - \hat{a}ngulo\ entre\ a\ geratriz\ e\ a\ base\ do\ cone$$

T e O são pontos de tangência entre a esfera e o cone. T também é o ponto de tangência da geratriz com a esfera.

Do $\Delta ATO'$, temos:

$$\boxed{(h - R)^2 = (g - r)^2 + R^2}$$

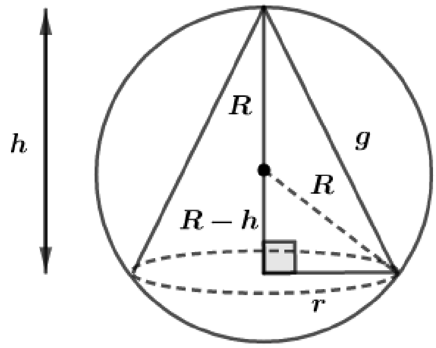
Note que $\Delta ATO' \sim \Delta AOB$, assim, pela semelhança de triângulos:

$$\boxed{\frac{h - R}{R} = \frac{g}{r}}$$

Pelas relações trigonométricas:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R}{r} \Rightarrow \boxed{\theta = 2\,\text{arctg}\left(\frac{R}{r}\right)}$$

b) Esfera circunscrita ao cone



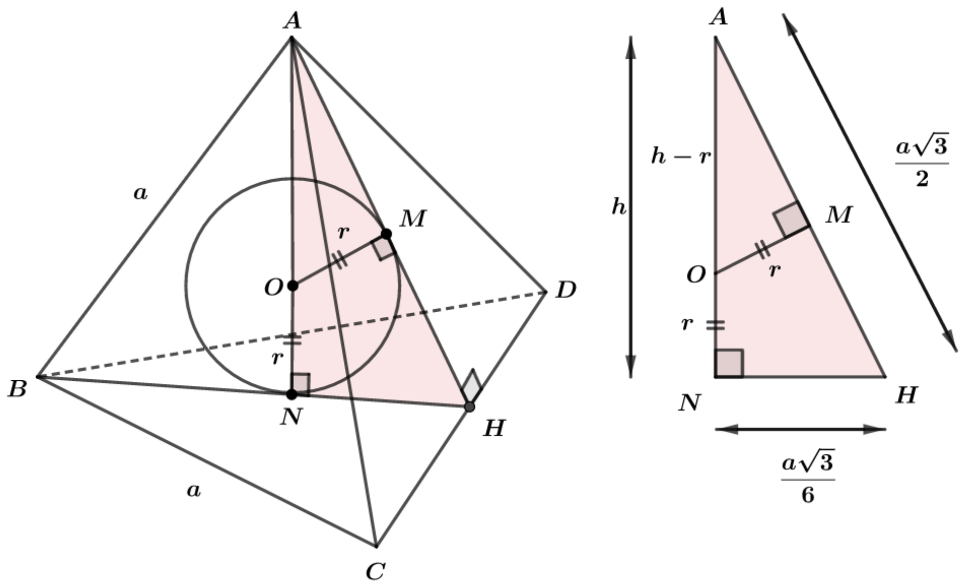
O cone possui base de raio r e altura h. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$R^2 = (R-h)^2 + r^2 \Rightarrow R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + r^2$$

$$\therefore \boxed{R = \frac{h^2 + r^2}{2h}}$$

2.5. ESFERA E TETRAEDRO REGULAR

a) Esfera inscrita em um tetraedro regular



As faces do tetraedro são triângulo equiláteros, assim, AH é altura de um triângulo equilátero de lado a, logo:

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

No triângulo equilátero BCD, N é o baricentro desse triângulo, logo:

$$NH = \frac{BH}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Pelo teorema de Pitágoras, podemos achar a altura do tetraedro:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = a^2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12}\right) \Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

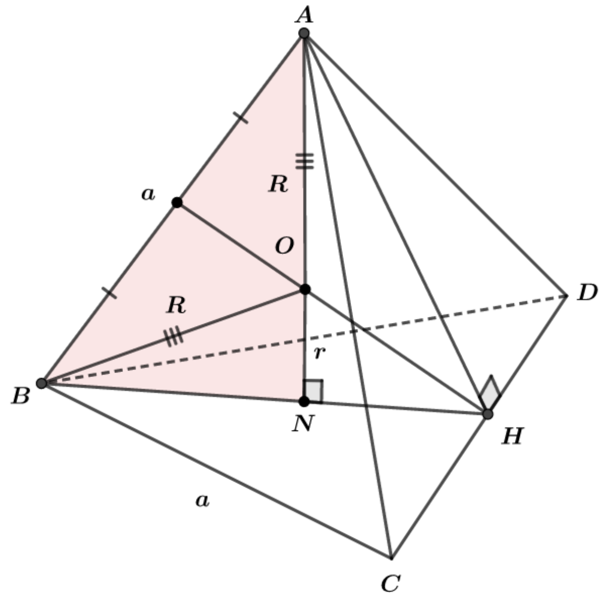
Por semelhança de triângulos, temos:

$$\Delta AMO \sim \Delta ANH \Rightarrow \frac{h - r}{r} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow h = 4r \therefore r = \frac{h}{4}$$

Portanto, o raio da esfera inscrita é:

$$\boxed{r = \frac{a\sqrt{6}}{12}}$$

b) Esfera circunscrita ao tetraedro regular



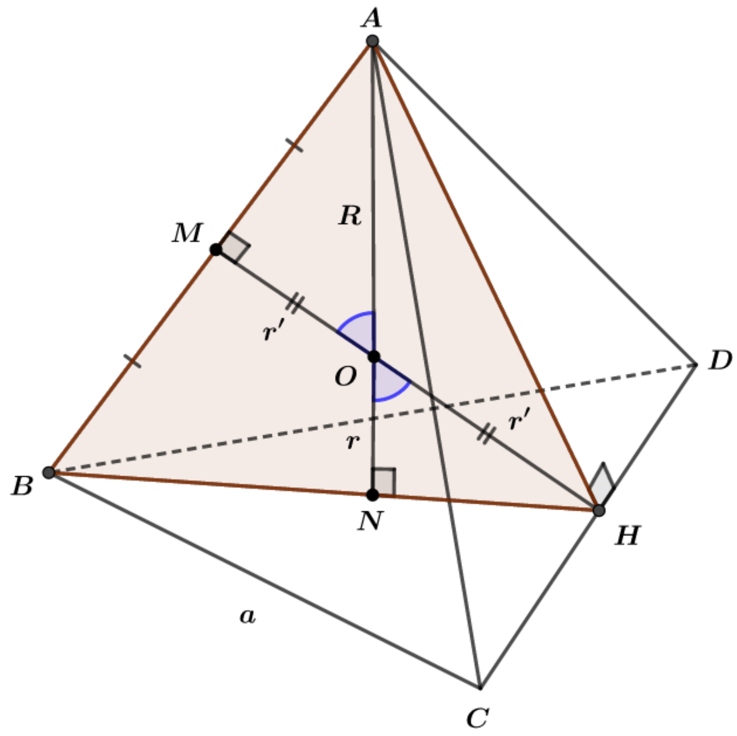
R é o raio da esfera circunscrita ao tetraedro regular. Note que $r + R = h$, desse modo:

$$r + R = 4r \Rightarrow R = 3r \Rightarrow \boxed{\frac{R}{r} = 3}$$

Substituindo a expressão de r, obtemos:

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{6}}{4}}$$

c) Esfera tangente às arestas do tetraedro regular



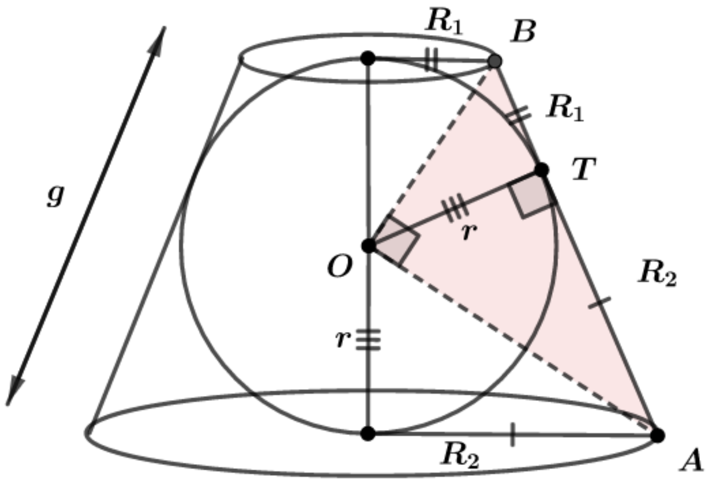
r' é o raio da esfera tangente às arestas. Por semelhança, temos:

$$\Delta AOM \sim \Delta HON \Rightarrow \frac{r'}{R} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \boxed{r' = \sqrt{Rr}}$$

Portanto, o raio da esfera tangente às arestas é a média geométrica entre os raios das esferas inscritas e circunscritas ao mesmo tetraedro.

2.6. ESFERA E TRONCO DE CONE

a) Esfera inscrita em um tronco de cone reto de bases paralelas



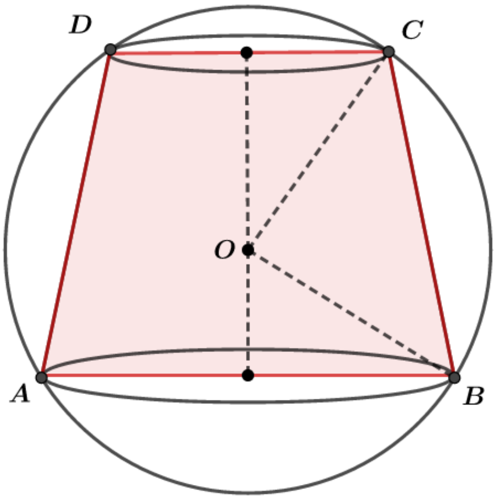
Para o tronco de cone ser circunscritível a uma esfera, devemos ter:

$$\boxed{g = R_1 + R_2}$$

Além disso, analisando o triângulo retângulo AOB, obtemos o raio da esfera inscrita em função de R_1 e R_2:

$$\Delta BTO \sim \Delta OTA \Rightarrow \frac{r}{R_1} = \frac{R_2}{r} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{R_1 R_2}}$$

b) Esfera circunscrita a um tronco de cone reto de bases paralelas



Nesse caso, tomando-se um plano secante que divide o tronco de cone em duas partes iguais, podemos ver que a secção plana é um trapézio isósceles inscrito numa circunferência.

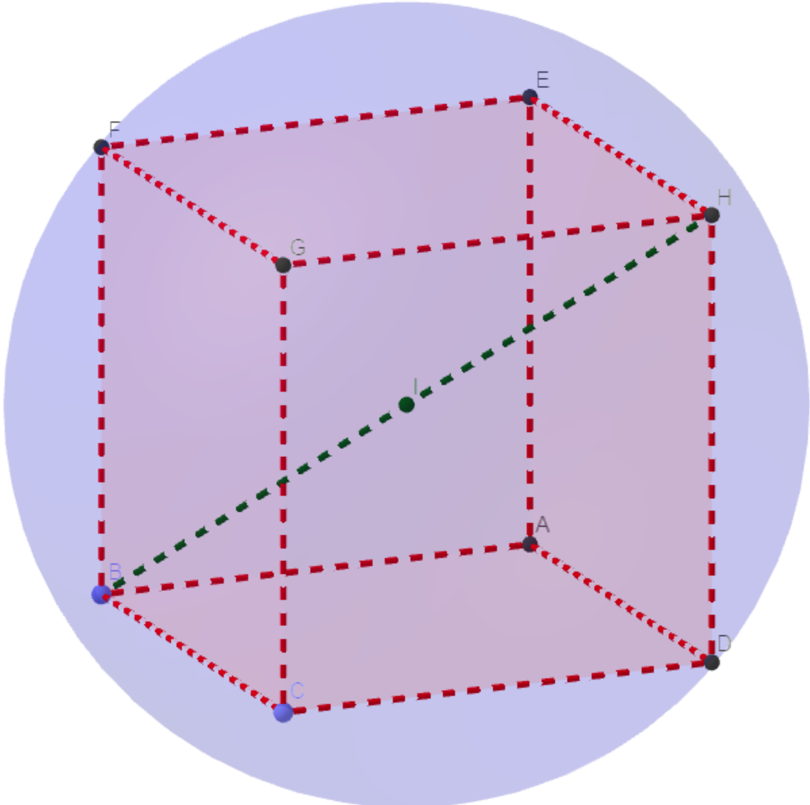
22. (UECE/2017)

Um cubo cuja medida de cada aresta é $3\ dm$ está inscrito em uma esfera de raio R. A medida de um diâmetro $(2R)$ da esfera é

a) $2\sqrt{3}\ dm.$ **b) $3\sqrt{2}\ dm.$** **c) $3\sqrt{3}\ dm.$** **d) $4\sqrt{3}\ dm.$**

Comentários

Perceba que o cubo $ABCDEFGH$ tem uma diagonal BH que passa por I, centro da esfera.



Como a diagonal do cubo é igual ao diâmetro da esfera, podemos dizer que:

$$\color{red}{Diagonal\ do\ quadrado} = \color{green}{Diâmetro\ da\ esfera}$$

$$l\sqrt{3} = D$$

$$3\sqrt{3} = D$$

Gabarito: "c".

---

23. (Unicamp/2016)

Um cilindro circular reto, cuja altura é igual ao diâmetro da base, está inscrito numa esfera. A razão entre os volumes da esfera e do cilindro é igual a

$a)\ \frac{4\sqrt{2}}{3}$ $b)\ \frac{4}{3}$ $c)\ \frac{3\sqrt{2}}{4}$ $d)\ \sqrt{2}$

Comentários

Se considerarmos R o raio da esfera e r o raio do cilindro, a relação entre o raio da esfera e do cilindro inscrito é dada por $R = r\sqrt{2}$.

Assim, a razão entre o volume da esfera e o volume do cilindro é dada por:

$$\frac{V_{esfera}}{V_{cilindro}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \cancel{\pi} \cdot R^3}{\cancel{\pi} \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \left(r\sqrt{2}\right)^3}{2 \cdot r^3} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \cancel{r^3} \sqrt{2}^3}{2 \cdot \cancel{r^3}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \cancel{2} \cdot \sqrt{2}}{\cancel{2}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2}$$

Gabarito: "a".

---

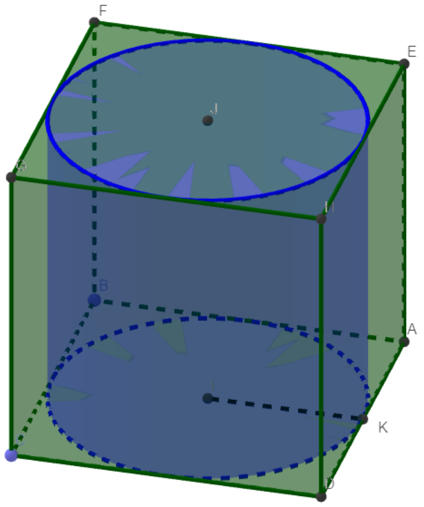
24. (UEPB/2012)

Um cilindro reto está inscrito em um cubo de aresta $b\ cm$. A relação entre o volume do cubo e o volume do cilindro é

$a)\ 2\pi$ $\quad b)\ \frac{\pi}{4}$ $\quad c)\ \pi$ $\quad d)\ \frac{4}{\pi}$ $\quad e)\ \frac{1}{2\pi}$

Comentários

Se o cilindro está inscrito no cubo, seu raio é igual à metade do lado do cubo.



Assim, a razão entre o volume do cubo e o volume do cilindro é

$$\frac{V_{cubo}}{V_{cilindro}} = \frac{aresta\ ao\ cubo}{área\ da\ base \cdot altura} = \frac{b^3}{\pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot b} = \frac{b^3}{\pi \cdot \frac{b^2}{4} \cdot b} = \frac{\cancel{b^3}}{\pi \cdot \frac{\cancel{b^3}}{4}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

Gabarito: "d".

---

25. (CEFET/2015)

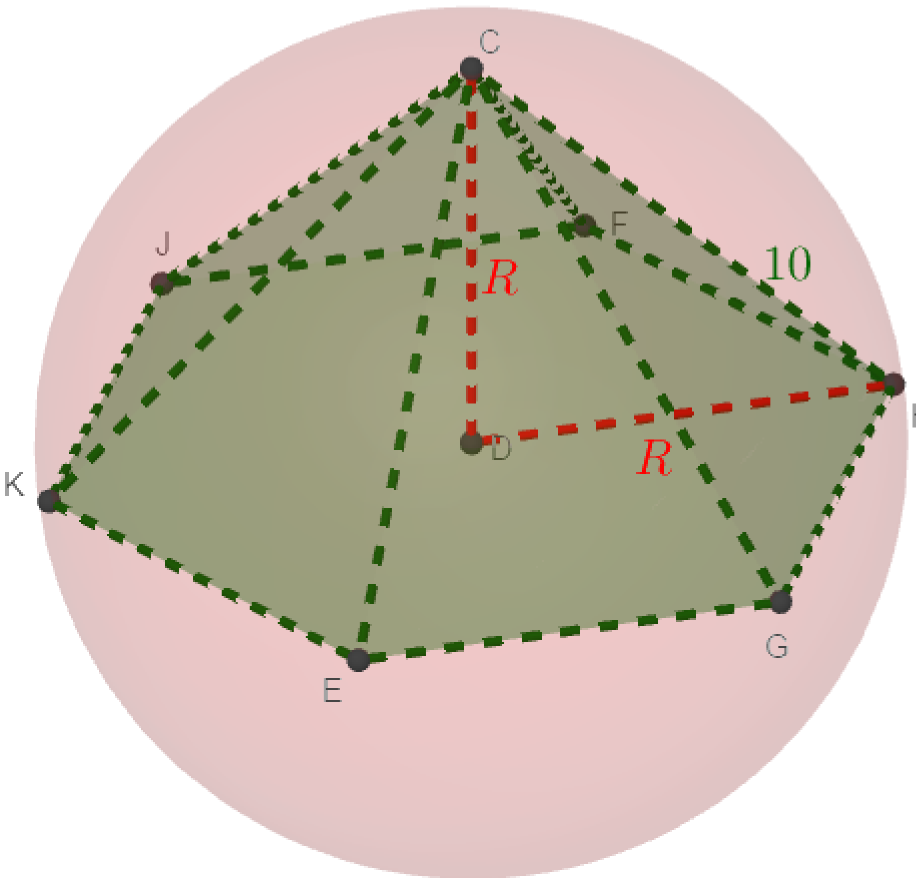
Uma pirâmide regular de base hexagonal tem o vértice sobre uma semiesfera e a base inscrita na base desta semiesfera. Sabendo que a aresta lateral dessa pirâmide mede $10\ cm$, então o volume é igual a:

a) $125\sqrt{6}\ cm^3$ **b)** $500\sqrt{3}\ cm^3$ **c)** $375\sqrt{6}\ cm^3$

d) $\frac{5\sqrt{15}}{2}\ cm^3$ $250\sqrt{3}\ cm^3$

Comentários

Façamos um esboço da situação retratada no enunciado.



Para encontrarmos o raio R, podemos utilizar o teorema de Pitágoras entre a altura R da pirâmide, a distância R entre o centro da base e um vértice do hexágono da base e, como hipotenusa, a aresta da pirâmide, que vale $10\ cm$.

$$R^2 + R^2 = 10^2$$

$$2R^2 = 100$$

$$R^2 = \frac{100}{2}$$

$$R^2 = 50$$

$$\sqrt{R^2} = \sqrt{50}$$

$$|R| = 5 \cdot \sqrt{2}$$

$$R = \pm 5 \cdot \sqrt{2}$$

Como R representa uma distância, fiquemos só com a parte positiva.

$$R = 5 \cdot \sqrt{2}$$

Já sabemos que a altura da pirâmide é igual a $R = 5 \cdot \sqrt{2}$.

Como a base da pirâmide é hexagonal, podemos inferir que a aresta da base também é igual a R, pois um hexágono é formado por seis triângulos equiláteros justapostos, todos de lado também iguais a $R = 5 \cdot \sqrt{2}$.

Dessa forma, podemos calcular o volume da pirâmide.

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot \text{área da base} \cdot \text{altura}$$

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \text{área do triângulo equilátero} \cdot \text{altura}$$

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \cdot R$$

$$V_p = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot {}^{2}\cancel{6} \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{{}_{2}\cancel{4}} \cdot R$$

$$V_p = \frac{R^3\sqrt{3}}{2}$$

$$V_p = \frac{\left(5 \cdot \sqrt{2}\right)^3\sqrt{3}}{2}$$

$$V_p = \frac{5^3 \cdot \sqrt{2}^3\sqrt{3}}{2}$$

$$V_p = \frac{5^3 \cdot \cancel{2} \cdot \sqrt{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$V_p = 125 \cdot \sqrt{6}\, cm^3$$

Gabarito: “a”.

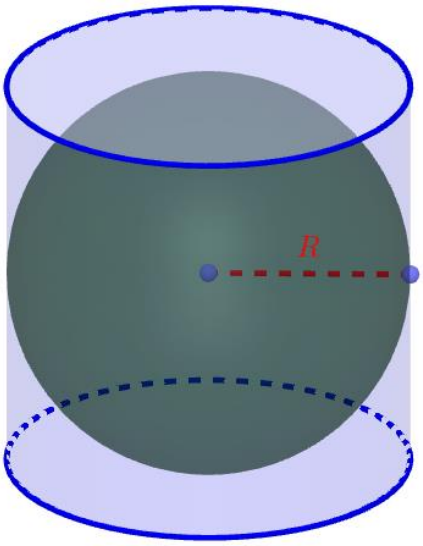
26. (EEAR/2017)

Uma esfera está inscrita num cilindro equilátero cuja área lateral mede $16\ cm^2$. O volume da esfera inscrita é

$a)\ 8\pi$ $\quad b)\ 16\pi$ $\quad c)\ \frac{32}{3}\pi$ $\quad d)\ \frac{256}{3}\pi$

Comentários

Esboçando a situação descrita no enunciado, temos:



Pelo esboço, percebemos que o raio da circunferência inscrita também é raio da base do cilindro.

A área da base de um cilindro é dada por

$$A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$$

$$16\pi = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot 2 \cdot R$$

$$16\cancel{\pi} = 2 \cdot \cancel{\pi} \cdot R \cdot 2 \cdot R$$

$$16 = 4 \cdot R^2$$

$$\frac{16}{4} = R^2$$

$$4 = R^2$$

$$\sqrt{4} = \sqrt{R^2}$$

$$2 = |R|$$

$$\pm 2 = R$$

Como R é uma distância, podemos assumir apenas o valor positivo pelo contexto.

$$2 = R$$

De posse do raio da circunferência, podemos calcular seu volume.

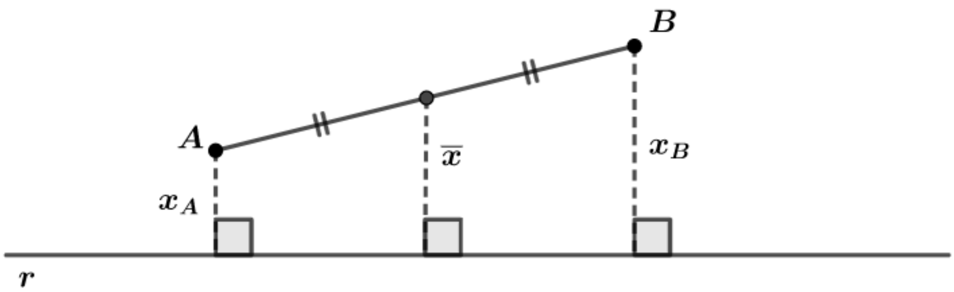
$$V_c = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8 = \frac{32 \cdot \pi}{3}$$

Gabarito: "c".

3. TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN

O teorema de Pappus-Guldin nos permite calcular facilmente a área da superfície e o volume de um sólido de revolução. Para isso, precisamos conhecer a distância do centro de gravidade da figura a ser rotacionada ao eixo de rotação. Vejamos como determinar essa distância com alguns exemplos.

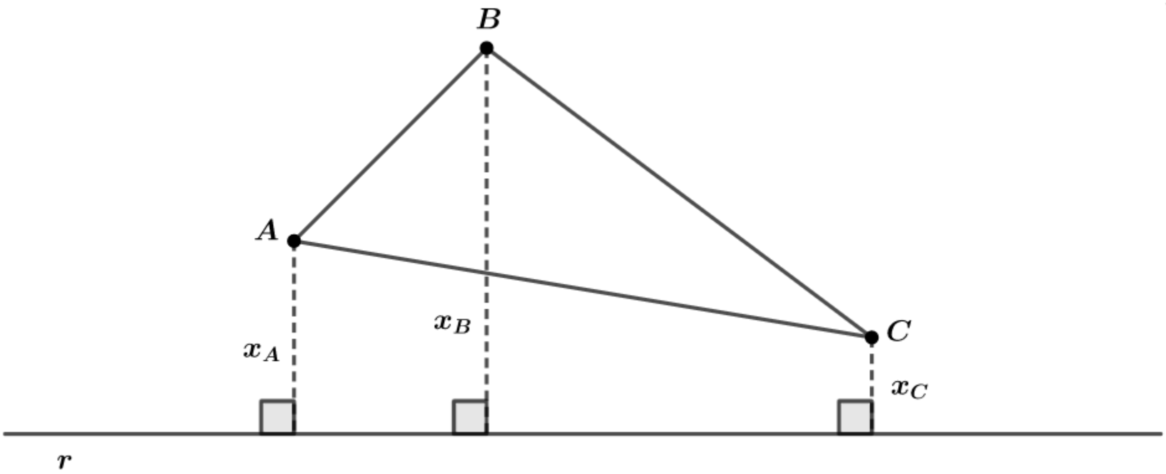
Consideremos o segmento de reta $\overline{AB}$ e a reta r abaixo:



$\overline{x}$ é a distância do centro de gravidade do segmento de reta $\overline{AB}$ à reta r, essa distância é igual à média aritmética entre x_A e x_B:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_A + x_B}{2}}$$

Vejamos o caso de um triângulo:

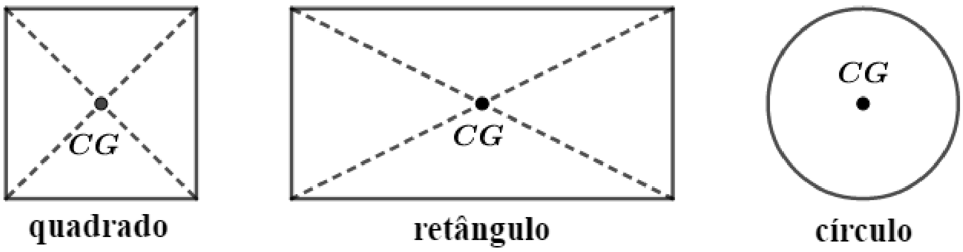


A distância do centro de gravidade do triângulo de vértices A, B e C à reta r é dado pela média aritmética entre x_A, x_B e x_C:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}}$$

Além disso, o **centro de gravidade** de um triângulo é o seu **baricentro**.

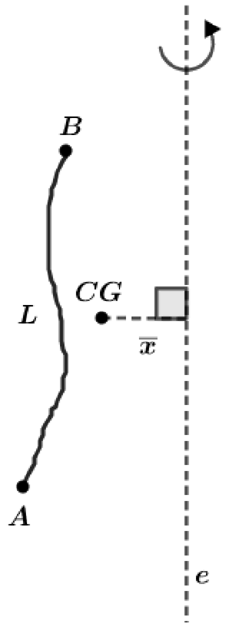
De forma geral, o centro de gravidade de uma figura plana é o seu centro geométrico.



Agora que sabemos o que é centro de gravidade de uma figura plana, vamos aprender os teoremas de Pappus-Guldin.

3.1. ÁREA DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Consideremos a seguinte figura:



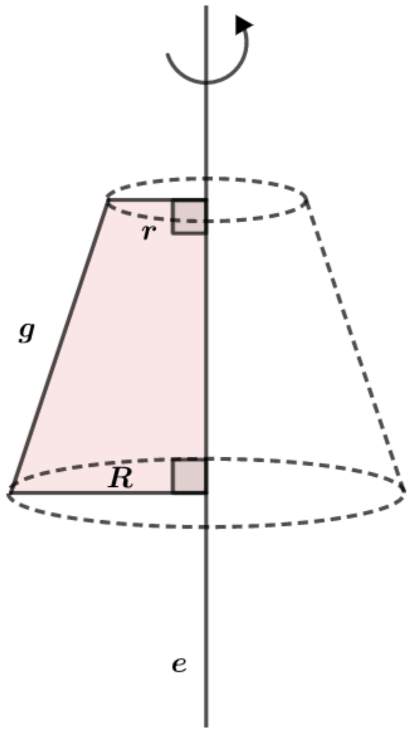
Ao rotacionar a linha em torno do eixo, obteremos uma superfície de revolução cuja área é dada por:

$$\boxed{A = 2\pi\overline{x}L}$$

Onde $\overline{x}$ é a distância do centro de gravidade da linha ao eixo e L é o comprimento da linha.

Vejamos um exemplo.

3.1.a) Calcule a área lateral do sólido de revolução gerado pela seguinte figura plana:



Essa figura é um trapézio cujas bases medem r e R e a distância do seu centro de gravidade ao eixo de rotação é

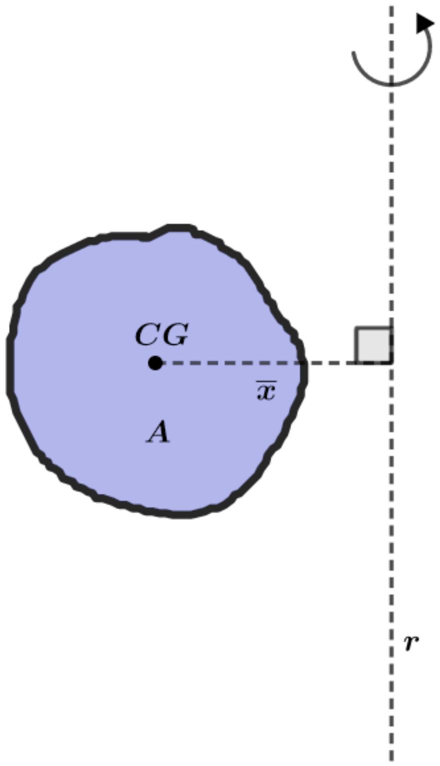
$$\overline{x} = \frac{r+R}{2}$$

O sólido gerado é um tronco de cone. Aplicando o teorema de Pappus-Guldin, obtemos a área lateral desse tronco:

$$A_L = 2\pi g\left(\frac{r+R}{2}\right) \therefore \boxed{A_L = \pi g(r+R)}$$

3.2. VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Para calcular o volume de sólidos de revolução, basta conhecer a área da superfície a ser rotacionada e a distância do centro de gravidade dessa superfície ao eixo de rotação.



O volume do sólido de revolução é dado por:

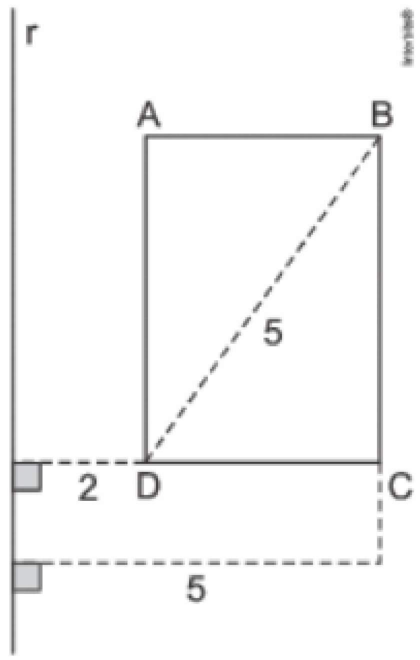
$$\boxed{V = 2\pi\overline{x}A}$$

Onde A é a área da superfície geradora.

Vejamos um exemplo.

3.2.a) (UFRGS/2019)

Considere o sólido obtido pela revolução do retângulo $ABCD$ em torno da reta r, conforme indicado na figura a seguir.



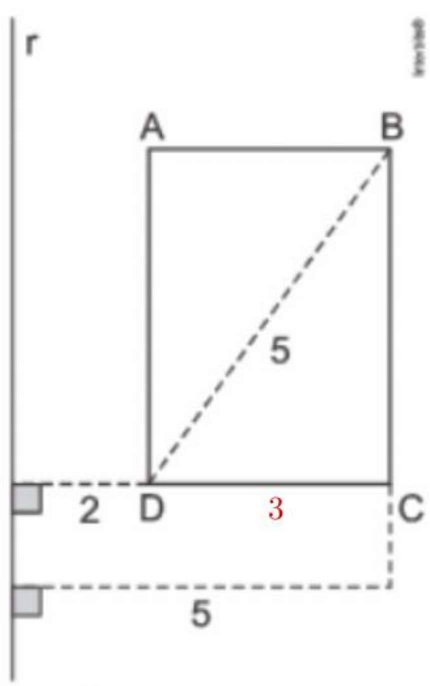
O volume do sólido obtido é

a) 16π b) 84 c) 100 d) 84π e) 100π

Comentários

Solução 1)

Da figura, tiramos que $DC = 3$. Com esse dado, podemos calcular o valor de BC por meio do teorema de Pitágoras.



$BC^2 + CD^2 = 5^2$

$BC^2 + 3^2 = 5^2$

$BC^2 = 25 - 9$

$BC^2 = 16$

$\sqrt{BC^2} = \sqrt{16}$

$|BC| = 4$

$BC = \pm 4$

Entendendo BC como uma distância, podemos descartar a parte negativa.

$BC = 4$

Assim, o volume de revolução é dado por:

$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 - \pi \cdot 2^2 \cdot 4$

$V = 100\pi - 16\pi$

$V = 84\pi$

Solução 2)

A distância do centro de gravidade de $ABCD$ à reta r é igual a

$$\overline{x} = 2 + \frac{DC}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

A área da figura é

$A = 3 \cdot 4 = 12$

Portanto, o volume do sólido de revolução é

$$V = 2\pi\overline{x}A = 2\pi\left(\frac{7}{2}\right)12 = 84\pi$$

Gabarito: "d".

---

27. (ENEM/2011)

A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

Disponível em: http://mdmat.psico.ufrgs.br. Acesso em: 1 maio 2010.

Essa figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

a) pirâmide

b) semiesfera

c) cilindro

d) tronco de cone

e) cone

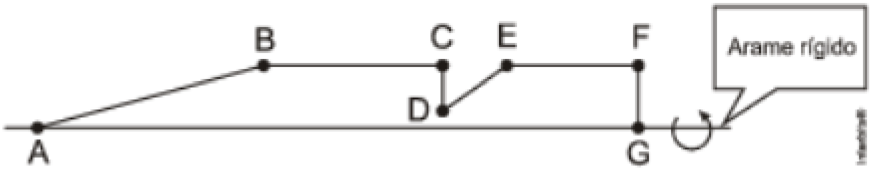
Comentários

Veja que a figura pode ser obtida com a rotação de um segmento de reta oblíquo ao eixo, gerando um cone.

Gabarito: "e".

28. (ENEM/2010)

Numa feira de artesanato, uma pessoa constrói formas geométricas de aviões, bicicletas, carros e outros engenhos com arame inextensível. Em certo momento, ele construiu uma forma tendo como eixo de apoio outro arame retilíneo e rígido, cuja aparência é mostrada na



Ao girar tal forma em torno do eixo, formou-se a imagem de um foguete, que pode ser pensado como composição, por justaposição, de diversos sólidos básicos de revolução.

Sabendo que. a figura, os pontos B, C, E e F são colineares, $AB = 4FG$, $BC = 3FG$, $EF = 2FG$, e utilizando-se daquela forma de pensar o foguete, a decomposição deste, no sentido da ponta para a cauda, é formada pela seguinte sequência de sólidos:

a) pirâmide, cilindro reto, cone reto, cilindro reto.

b) cilindro reto. tronco de cone, cilindro reto, cone equilátero.

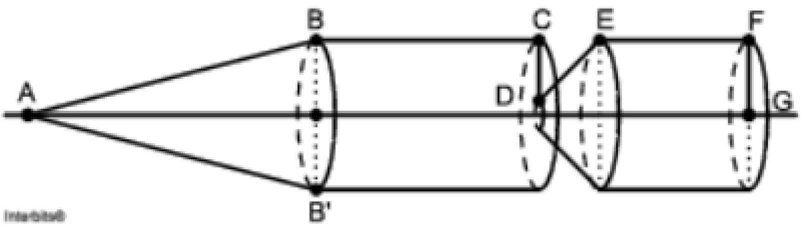
c) cone reto, cilindro reto, tronco de cone e cilindro equilátero.

d) cone equilátero, cilindro reto, pirâmide, cilindro.

e) cone, cilindro equilátero, tronco de pirâmide, cilindro.

Comentários

Fazendo a revolução da parte de arame, temos o seguinte sólido:



$$AB \text{ gera um cone reto}$$

$$BC \text{ gera um cilindro reto}$$

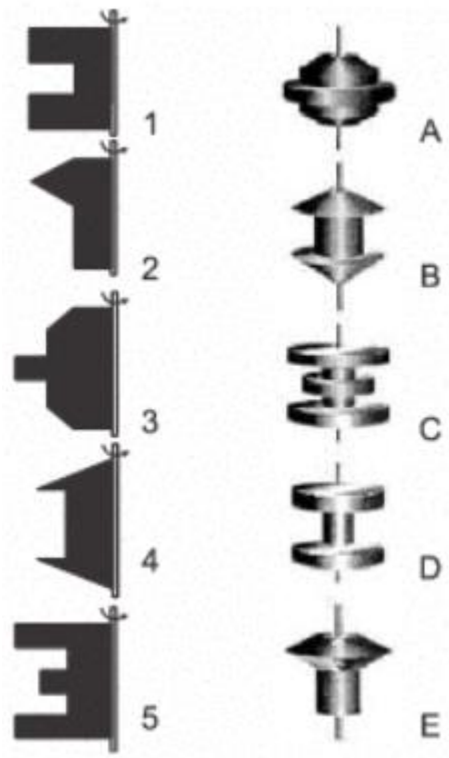
$$DE \text{ gera um tronco de cone}$$

$$EF \text{ gera outro cilindro reto } (\text{equilátero, pois } EF = 2FG)$$

Gabarito: "c".

29. (ENEM/1999)

Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em tomo de um eixo. Girando-se as figuras a seguir em torno da haste indicada obtém-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.



A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é:

a) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E.

b) 1B, 2C, 3D,4E, 5A.

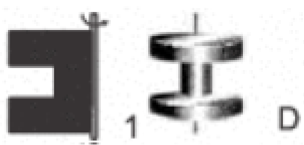
c) 1B, 2D, 3E, 4A, 5C.

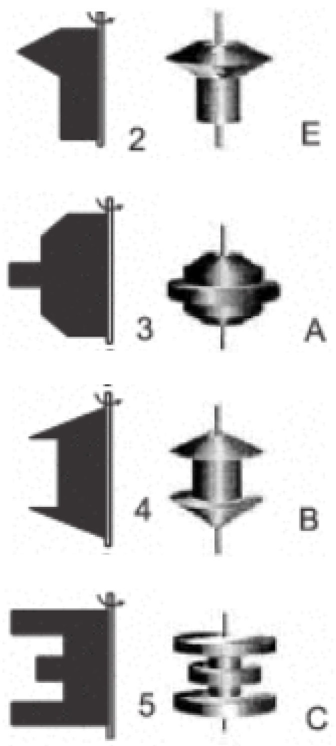
d)1D,2E, 3A, 4B, 5C.

e)1D, 2E, 3B, 4C, 5A.

Comentários

Fazendo a correspondência direta, figura a figura, temos:



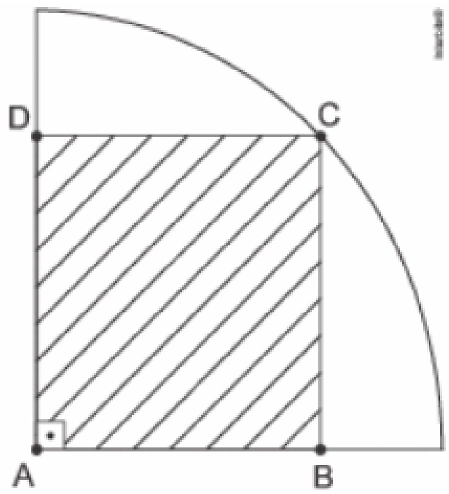


Gabarito: “d”.

---

30. (CEFET/2015)

Na figura a seguir, $ABCD$ é um retângulo inscrito em um setor circular de raio R com $\overline{AB} = \frac{2}{3}R$



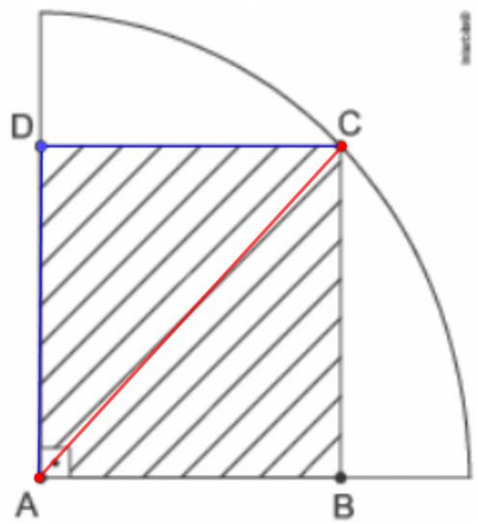
O volume do sólido de revolução gerado pela rotação desse retângulo em torno de um eixo que contenha o segmento $\overline{AD}$, em função de R, é igual a

$a)\ \frac{\sqrt{5}\pi R^3}{3}$ $b)\ \frac{8\pi R^3}{9}$ $c)\ \frac{4\sqrt{5}\pi R^3}{27}$ $d)\ \frac{10\pi R^3}{49}$ $e)\ \frac{5\sqrt{5}\pi R^3}{54}$

Comentários

Solução 1)

Considerando $AC = R$, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para encontrar a altura $\overline{AD}$ do retângulo $ABCD$.



$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

Como $DC = AB$, podemos fazer a substituição.

$$AC^2 = AD^2 + AB^2$$

$$R^2 = AD^2 + \left(\frac{2}{3}R\right)^2$$

$$R^2 - \left(\frac{2}{3}R\right)^2 = AD^2$$

$$R^2 - \frac{4}{9}R^2 = AD^2$$

$$\frac{5}{9}R^2 = AD^2$$

$$\sqrt{\frac{5}{9}R^2} = \sqrt{AD^2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3}R = |AD|$$

$$\pm\frac{\sqrt{5}}{3}R = AD$$

Como AD é equivalente a um lado de um retângulo, podemos considerar apenas a vertente positiva.

$$\frac{\sqrt{5}}{3}R = AD$$

O sólido de rotação gerado por esse retângulo será um cilindro de raio de base igual a AB e de altura igual a AD.

Dessa forma, seu volume é dado por:

$$V = \text{área da base} \cdot altura$$

$$V = \pi \cdot AB^2 \cdot AD$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{2}{3}R\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}R$$

$$V = \pi \cdot \frac{4}{9}R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}R$$

$$V = \frac{4\sqrt{5}\pi R^3}{27}$$

Solução 2)

Vamos aplicar diretamente o teorema de Pappus-Guldin. Inicialmente, devemos calcular a área da figura a ser rotacionada:

$$A = \overline{AD} \cdot \overline{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}R \cdot \frac{2}{3}R = \frac{2\sqrt{5}}{9}R^2$$

Como AB mede $2/3R$, temos que a distância do centro de gravidade do quadrilátero é $\bar{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}R = \frac{1}{3}R$. Logo:

$$V = 2\pi\bar{x}A = 2\pi\left(\frac{1}{3}R\right)\left(\frac{2\sqrt{5}}{9}R^2\right) = \frac{4\sqrt{5}\pi R^3}{27}$$

Gabarito: “c”.

4. LISTA DE QUESTÕES

31. (ESA/2021)

A área da superfície de uma esfera é $144\pi\ cm^2$. O volume da esfera é igual a:

a) $216\pi\ cm^3$

b) $288\pi\ cm^3$

c) $2304\pi\ cm^3$

d) $162\pi\ cm^3$

e) $72\pi cm^3$

32. (EEAR/2019)

Um cilindro circular reto, de altura igual a $\frac{2}{3}$ do raio da base e de $12\pi\ cm^2$ de área lateral, possui raio da base igual a ____cm.

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

33. (EEAR/2018)

Um cilindro equilátero tem $196\pi\ cm^2$ de área lateral. O raio da base desse cilindro mede____cm.

a) 5

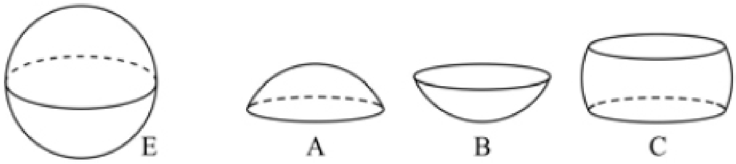
b) 6

c) 7

d) 8

34. (EEAR/2018)

Uma esfera E foi dividida em 3 partes: A, B e C, como mostra o desenho.



Se os volumes dessas partes são tais que: $V(A) = V(B) = \frac{V(C)}{2}$ e $V(C) = 486\pi\ cm^3$, então o raio da esfera é _____cm.

a) 8

b) 9

c) 10

d) 12

35. (EEAR/2018)

A superfície lateral de um cone, ao ser planificada, gera um setor circular cujo raio mede $10\ cm$ e cujo comprimento do arco mede $10\pi\ cm$. O raio da base do cone, em cm, mede

a) 5

b) 10

c) 5π

d) 10π

36. (EEAR/2017)

Uma esfera está inscrita num cilindro equilátero cuja área lateral mede $16\pi\ cm^2$. O volume da esfera inscrita é

a) 8π

b) 16π

c) $\frac{32\pi}{3}$

d) $\frac{256\pi}{3}$

37. (EEAR/2017)

Um escultor irá pintar completamente a superfície de uma esfera de $6\ m$ de diâmetro, utilizando uma tinta que, para essa superfície, rende $3\ m^2$ por litro. Para essa tarefa, o escultor gastará, no mínimo, _____litros de tinta. (Considere $\pi = 3$)

a) 18

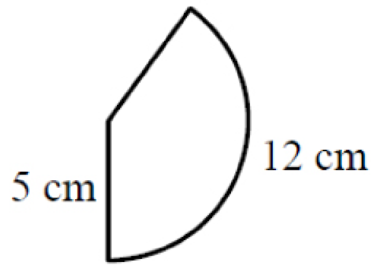
b) 24

c) 36

d) 48

38. (EEAR/2017)

O setor circular da figura representa a superfície lateral de um cone circular reto.



Considerando $\pi = 3$, a geratriz e o raio da base do cone medem, em cm, respectivamente,

a) 5 e 2

b) 5 e 3

c) 3 e 5

d) 4 e 5

39. (EEAR/2017)

Considere um recipiente em forma de cubo, completamente cheio de água. Se três esferas metálicas de $1\ cm$ de raio forem colocadas dentro do recipiente, o volume de água que será derramado será de ______ $\pi\ cm^3$.

a) 3

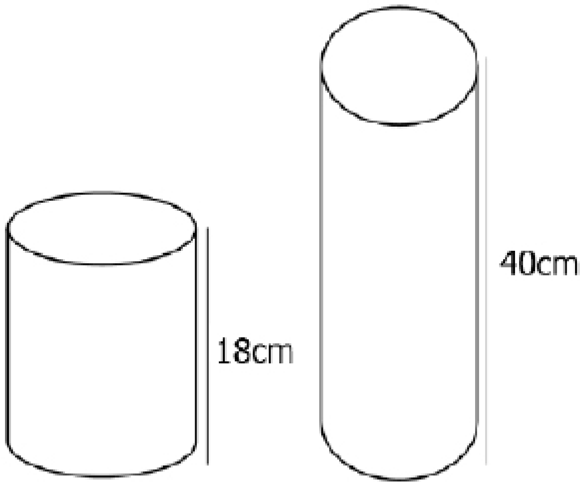
b) 4

c) 5

d) 6

40. (EEAR/2016)

Um cilindro de $18\ cm$ de altura e raio da base igual a $5\ cm$ contém água até a metade de sua altura. Por algum motivo, houve necessidade de despejar essa água em um outro cilindro com $40\ cm$ de altura, cujo raio da base mede $4\ cm$.



Considerando $\pi = 3$, o valor que mais se aproxima da altura atingida pela água no segundo cilindro é

a) $14\ cm$

b) $16\ cm$

c) $20\ cm$

d) $24\ cm$

41. (EEAR/2016)

Uma esfera inscrita em um cubo de diagonal $2\sqrt{3}\ m$ tem o volume igual a

a) $\frac{\pi}{3}\ m^3$

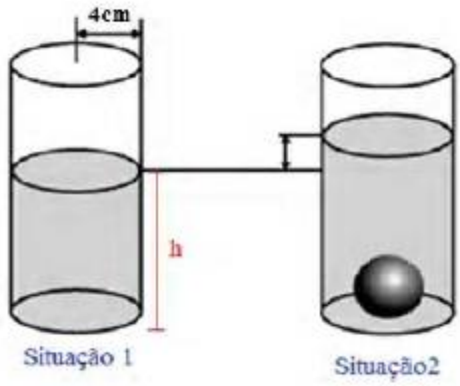
b) $\frac{2\pi}{3}\ m^3$

c) $\frac{4\pi}{3}\ m^3$

d) $\frac{32\pi}{3}\ m^3$

42. (EEAR/2016)

Na ilustração a seguir, são apresentadas duas situações. Na primeira, o cilindro contém um líquido que atinge uma altura h. Inserindo-se uma esfera de $3\ cm$ de raio nesse mesmo cilindro, o nível do líquido aumenta, conforme situação 2. O novo volume, determinado pelo líquido somado à esfera, totaliza $588\ cm^3$.



Considerando $\pi = 3$ e o raio da base do cilindro igual a $4\ cm$, a medida da altura h corresponde a _____cm.

a) $h = 8$

b) $h = 10$

c) $h = 16$

d) $h = 32$

43. (EEAR/2015)

Os especialistas alertam que é preciso beber, em média, 2 litros de água por dia. Isso equivale a 10 copos com capacidade de $200\ cm^3$. Um copo cilíndrico com esta capacidade e $2\ cm$ de raio da base tem, aproximadamente, a _____cm de altura. (Considere $\pi = 3$)

a) 17

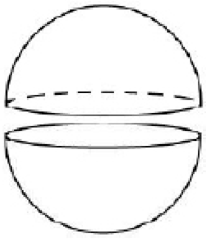
b) 18

c) 19

d) 20

44. (EEAR/2015)

Uma esfera de raio $R = 3\ cm$ foi cortada ao meio, gerando duas semiesferas.



A área da superfície de cada semiesfera é _____$\pi\ cm^2$

a) 20

b) 22

c) 25

d) 27

45. (EEAR/2015)

Se um cone equilátero tem $50\pi\ cm^2$ de área lateral, então a soma das medidas de sua geratriz e do raio de sua base, em cm, é igual a

a) 10

b) 15

c) 20

d) 25

46. (EEAR/2014)

Um filtro com a forma de cone circular reto, tem volume de $200\ cm^3$ e raio da base de $5\ cm$. Usando $\pi = 3$, pode-se determinar que sua altura, em cm, é igual a

a) 10

b) 9

c) 8

d) 6

47. (EEAR/2014)

Considerando $\pi = 3$, utilizando $108\ cm^3$ de chumbo pode-se construir uma esfera de _____ cm de diâmetro.

a) 7

b) 6

c) 5

d) 4

48. (EEAR/2013)

Um cilindro equilátero cuja geratriz mede $8\ cm$, tem área lateral igual a _______$\pi\ cm^2$.

a) 128

b) 64

c) 32

d) 16

49. (EEAR/2012)

Uma Escola de Samba carregou, em um de seus carros alegóricos, uma imensa esfera de $5\ m$ de raio. O pintor da Escola disse que gastou 10 litros de tinta para pintar cada $157\ m^2$ da superfície da esfera. Considerando $\pi = 3,14$, o número de litros de tinta que foram gastos para pintar toda a superfície da esfera foi

a) 16

b) 18

c) 20

d) 22

50. (EEAR/2012)

Um cilindro de altura $H = 5\ cm$ e raio da base $R = 4\ cm$, tem volume $V =$ ________$\pi\ cm^3$.

a) 50

b) 60

c) 70

d) 80

51. (EEAR/2011)

A cuba de uma pia tem a forma de uma semiesfera de $3\ dm$ de raio. A capacidade dessa cuba é______π litros

a) 12

b) 14

c) 16

d) 18

52. (EEAR/2011)

O raio da base de um cone equilátero mede $2\sqrt{3}\ cm$. O volume desse cone, em cm^3, é

a) $42\sqrt{3}\pi$

b) $38\sqrt{3}\pi$

c) 24π

d) 18π

53. (EEAR/2010)

Um cone e um cilindro, ambos equiláteros, têm bases de raios congruentes. A razão entre as áreas das secções meridianas do cone e do cilindro é

$\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

54. (EEAR/2009)

Em um cone, a medida da altura é o triplo da medida do raio da base. Se o volume do cone é $8\pi\ dm^3$, a medida do raio da base, em dm, é

a) 0,5

b) 1,5

c) 2

d) 3

55. (EEAR/2009)

Um triângulo equilátero, de $6\ dm$ de lado, gira em torno de um de seus lados. O volume do sólido gerado, em dm^3, é

a) 24π

b) 36π

c) 48π

d) 54π

56. (EEAR/2008)

A diagonal da secção meridiana de um cilindro equilátero mede $10\sqrt{2}\ cm$. A área lateral desse cilindro, em cm^2, é

a) 250π

b) 200π

c) 100π

d) 50π

57. (EEAR/2008)

Uma esfera tem $100\pi\ cm^2$ de área. Se diminuirmos o raio dessa esfera em $t\ cm$, sua área passa a ser $64\pi\ cm^2$. Logo, o valor de t é

a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

58. (EEAR/2008)

Considere duas esferas: a primeira com $16\pi\ cm^2$ de área, e a segunda com raio igual a $\frac{5}{2}$ do raio da primeira. A área da segunda esfera, em cm^2, é

a) 100π

b) 50π

c) 40π

d) 20π

59. (EEAR/2008)

Um retângulo, de lados $2\ m$ e $5\ m$, gira $360°$ em torno de seu maior lado. A área lateral do sólido obtido, em m^2, é

a) 10

b) 20

c) 10π

d) 20π

60. (EEAR/2008)

Um cilindro de cobre tem volume V, raio da base $R = 50\ cm$ e altura $H = 40\ cm$. Este cilindro será derretido para fazer cilindros de volume v, raio $r = \frac{R}{5}$ e altura $h = \frac{H}{4}$. Dessa forma, $\frac{V}{v} =$

a) 50

b) 100

c) 150

d) 200

61. (EEAR/2008)

Uma esfera tem $9\pi\ cm^2$ de área. Para que a área passe a $100\pi\ cm^2$, o raio deve ter sua medida aumentada em

a) $\frac{70}{9}\%$

b) $\frac{70}{3}\%$

c) $\frac{700}{9}\%$

d) $\frac{700}{3}\%$

62. (EEAR/2007)

Um reservatório, com volume igual a $144\pi\ m^3$, tem a forma de uma semiesfera. Para aumentar seu volume em $342\pi\ m^3$, é preciso aumentar o raio do reservatório em

a) 12 m

b) 9 m

c) 6 m

d) 3 m

63. (EEAR/2007)

Um cilindro equilátero é equivalente a um cone, também equilátero. Se o raio da base do cone mede $\sqrt{3}\ cm$, o raio da base do cilindro mede, em cm,

a) $\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$

c) $\frac{\sqrt[3]{6}}{3}$

d) $\sqrt{6}$

64. (EEAR/2007)

Um chapéu de festa, feito de cartolina, tem a forma de um cone de $1\ dm$ de raio e $5\ dm$ de geratriz. Para fazer 20 chapéus, são necessários, no mínimo, _____dm^2 de cartolina.

Considere $\pi = 3,14$.

a) 157

b) 225

c) 314

d) 426

65. (EEAR/2007)

O raio da base de um cilindro equilátero e a aresta de um cubo são congruentes. A razão entre as áreas totais do cilindro e do cubo é

a) 2

b) 4

c) π

d) 2π

66. (EEAR/2007)

O raio da base de um cone equilátero mede $2\ cm$. A área lateral desse cone, em cm^2, é

a) 4π

b) 5π

c) 8π

d) 10π

67. (EEAR/2006)

Uma esfera tem $36\pi\ m^3$ de volume. A medida de sua superfície, em m^2, é

a) 72π

b) 56π

c) 48π

d) 36π

68. (EEAR/2006)

A base de um cone circular reto está inscrita num triângulo equilátero de área $9\sqrt{3}\ cm^2$. Se as alturas do cone e do triângulo são congruentes, então o volume do cone, em cm^3, é

a) $3\pi\sqrt{6}$

b) $3\pi\sqrt{3}$

c) $6\pi\sqrt{3}$

d) $6\pi\sqrt{6}$

69. (EEAR/2006)

Um plano determina dois semicilindros quando secciona um cilindro reto de $2,5\ cm$ de altura e $4\ cm$ de diâmetro da base, passando pelos centros de suas bases. A área total de cada um desses semicilindros, em cm^2, é aproximadamente igual a

a) 28

b) 30

c) 38

d) 40

70. (EEAR/2005)

Um prisma quadrangular regular está circunscrito a um cilindro equilátero. Se a aresta da base do prisma mede $4\ cm$, então o volume do cilindro, em cm^3, é

a) 16π

b) 12π

c) 8π

d) 4π

71. (EEAR/2005)

A área lateral de um cone circular reto é $24\pi\ cm^2$. Se o raio da base desse cone mede $4\ cm$, então sua altura, em cm, mede

a) $5\sqrt{2}$

b) $5\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{5}$

d) $3\sqrt{5}$

72. (EEAR/2005)

Considere as afirmações:

I. A esfera é um sólido gerado pela rotação de uma semicircunferência em torno de seu diâmetro.

II. A esfera é um sólido gerado pela rotação de um semicírculo em torno de seu diâmetro.

III. Nem toda secção plana de uma esfera é um círculo.

Toda secção plana de uma esfera é um círculo.

São FALSAS as afirmações

a) $I\ e\ IV$

b) $I\ e\ III$

c) $II\ e\ III$

d) $II\ e\ IV$

73. (EEAR/2005)

Num cilindro circular reto, o diâmetro da base mede $8\ cm$ e a geratriz, $10\ cm$. A área lateral desse cilindro, em cm^2, é

a) 160π

b) 80π

c) 80

d) 40

74. (EEAR/2004)

Um vaso tem formato de um cilindro reto, de $16\ cm$ de altura interna e $6\ cm$ de diâmetro interno. Ele contém água até $\frac{1}{3}$ de sua altura. Acrescentando-se uma quantidade de água equivalente ao volume de uma esfera de $6\ cm$ de diâmetro, o nível da água subirá:

a) 3 cm

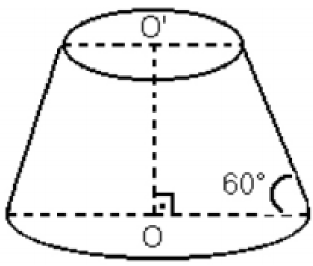
b) 4 cm

c) 5 cm

d) 6 cm

75. (EEAR/2004)

No tronco de cone reto, as bases são paralelas.



Se o raio da base maior mede $5\ cm$ e a distância entre as duas bases, $4\sqrt{3}\ cm$, então o volume desse tronco de cone, em cm^3, é

a) $\frac{124\pi\sqrt{3}}{3}$

b) $\boldsymbol{125\pi\sqrt{3}}$

c) $\boldsymbol{\frac{96\pi\sqrt{3}}{3}}$

d) $\boldsymbol{124\pi\sqrt{3}}$

76. (EEAR/2004)

Sejam dois cones, A e B, de volumes V e V', respectivamente. Se as razões entre os raios das bases e entre as alturas de A e B são, respectivamente, 2 e $\frac{1}{2}$, então podemos afirmar que

a) $\boldsymbol{V' = V}$

b) $\boldsymbol{V = 2V'}$

c) $\boldsymbol{V' = 2V}$

d) V$\boldsymbol{= 3V'}$

77. (EEAR/2004)

Num cone reto, o raio da base mede $\sqrt{3}\ cm$. Para que os números que expressam as medidas do raio da base, da altura e do volume desse cone formem, nessa ordem, uma P.G., a altura, em cm, deve ser

a) $\boldsymbol{3\pi\sqrt{3}}$

b) $\boldsymbol{\pi\sqrt{3}}$

c) $\boldsymbol{\pi}$

d) $\boldsymbol{\frac{\pi\sqrt{3}}{3}}$

78. (EEAR/2003)

Um barril, cuja forma é a de um cilindro reto, está repleto de vinho. Este vinho deve ser distribuído em copos cilíndricos de altura igual a $\frac{1}{8}$ da altura do barril, e de diâmetro da base igual a $\frac{1}{5}$ do diâmetro da base do barril. A quantidade de copos necessária para distribuir todo o vinho é

a) 400

b) 300

c) 200

d) 100

79. (EEAR/2003)

Num triângulo ABC, o lado maior $\overline{AC}$ mede $10\ cm$; o lado menor $\overline{BC}$ mede $3\ cm$; e o ângulo que eles formam mede $45°$. O volume do sólido gerado pela rotação de $360°$ desse triângulo em torno do lado maior, em cm^3, é

a) $\frac{3\sqrt{2\pi}}{2}$

b) $3\sqrt{2\pi}$

c) $\frac{5\pi}{2}$

d) 15π

80. (EEAR/2003)

A geratriz de um cone de revolução mede $6\ cm$ e o ângulo da geratriz com a altura do cone é de $30°$. O volume desse cone, em cm^3, é

a) 9π

b) $3\pi\sqrt{3}$

c) $9\pi\sqrt{3}$

d) $27\pi\sqrt{3}$

81. (EEAR/2003)

Se um cubo está inscrito em uma esfera de $\sqrt{3}\ m$ de raio, então o volume do cubo, em m^3, é igual a

a) 8

b) 27

c) $12\sqrt{3}$

d) $24\sqrt{3}$

82. (EEAR/2003)

A área lateral do sólido geométrico formado pela rotação de um triângulo equilátero, de perímetro $30\ cm$, em torno de um de seus lados é, em cm^2, igual a

a) 100π

b) 200π

c) $50\pi\sqrt{3}$

d) $100\pi\sqrt{3}$

83. (EEAR/2002)

Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de altura $6\ m$ e raio da base $3\ m$. O nível da água nele contida está a uma distância do fundo do tanque igual aos $\frac{2}{3}$ da sua altura. Adotando-se $\pi = 3,14$, a quantidade de litros de água que o cilindro contém é

a) 113010

b) 113040

c) 113050

d) 113080

84. (EEAR/2002)

A geratriz de um cilindro de revolução mede $10\ cm$. Qual o seu raio da base, sabendo-se que, aumentando-se esse raio em $10\ cm$ e mantendo-se a altura, a área lateral do novo cilindro é igual à área total do primeiro?

a) $2,5\ cm$

b) $5\sqrt{2}\ cm$

c) $10\ cm$

d) $20\ cm$

85. (EEAR/2002)

A geratriz de um cone de revolução forma com o eixo do cone um ângulo de $45°$. A área lateral, em dm^2, desse cone, sabendo-se que a área de sua secção meridiana é $18\ dm^2$, é

a) $18\pi\sqrt{2}$

b) $9\pi\sqrt{2}$

c) 18π

d) $18\pi(\sqrt{2} + 1)$

86. (EEAR/2002)

Se um cilindro reto está circunscrito a uma esfera de raio R, então a razão entre a área da superfície esférica e a área total do cilindro é

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{4}{5}$

87. (EEAR/2002)

A área da secção paralela ao eixo de um cilindro circular reto, de $8\ m$ de altura e $1\ m$ de raio, feita a $0,6\ m$ do eixo, em m^2, é

a) 16,00

b) 12,80

c) 6,40

d) 8,60

88. (EEAR/2002)

Um tanque cilíndrico com água tem raio da base R. Mergulha-se nesse tanque uma esfera de aço e o nível da água sobe $\frac{9}{16}R$. O raio da esfera é

a) $\frac{3}{4}R$

b) $\frac{9}{16}R$

c) $\frac{3}{5}R$

d) $\frac{R}{2}$

89. (EEAR/2002)

O maior e o menor lado de um triângulo medem, respectivamente, $10\ cm$ e $3\ cm$ e formam entre si um ângulo de $45°$. O volume do sólido gerado pela rotação de $360°$ desse triângulo em torno do seu lado maior é, em cm^3,

a) 30π

b) 20π

c) 15π

d) 10π

90. (EEAR/2001)

Num cone circular reto, cujo raio da base mede r e a geratriz mede g, a base é equivalente à secção meridiana. A altura desse cone mede

a) $\pi r g$

b) $\frac{\pi r}{g}$

c) πr

d) πg

91. (EEAR/2001)

Ao seccionar uma esfera, um plano determina um círculo de raio $16\ cm$. Se a distância do plano ao centro da esfera é de $12\ cm$, então o raio da esfera, em cm, vale

a) 20

b) 28

c) 30

d) 38

92. (EEAR/2001)

Um cilindro circular reto tem o volume igual ao de um cubo de aresta a e a área lateral igual à área total do cubo. O raio e a altura desse cilindro medem, respectivamente:

a) $\frac{a}{2}$ **e** $3\pi a$

b) $\frac{a}{3}$ **e** $\frac{9a}{\pi}$

c) $2a$ **e** $3\pi a$

d) $3a$ **e** $\frac{9a}{\pi}$

93. (EEAR/2001)

Um plano secciona uma esfera, determinando um círculo de raio igual à distância do plano ao centro da esfera. Sendo $36\pi\ cm^2$ área do círculo, o volume da esfera, em cm^3, é

a) $228\sqrt{2}\pi$

b) $576\sqrt{2}\pi$

c) 288π

d) 576π

94. (EEAR/2001)

A secção meridiana de um cilindro equilátero tem $4\sqrt{2}\ cm$ de diagonal. O volume do cilindro, em cm^3, é de:

a) 16π

b) 24π

c) 32π

d) 54π

95. (ESA/2019)

Um cilindro equilátero é aquele cilindro reto que possui a altura igual ao dobro do raio da base. Sabendo que o volume é calculado da forma $\pi r^2 h$, quanto mede o volume de um cilindro equilátero que possui raio igual a π?

a) $4\pi^2$

b) 6π

c) 2π

d) $2\pi^4$

e) π^6

96. (ESA/2017)

A geratriz de um cone circular reto de altura 8cm é10cm, então a área da base desse cone é:

a) $64\pi\ cm^2$

b) $9\pi\ cm^2$

c) $16\pi\ cm^2$

d) $36\pi\ cm^2$

e) $25\pi\ cm^2$

97. (ESA/2016)

Duas esferas de raios $3cm$ e $\sqrt[3]{51}cm$ fundem-se para formar uma esfera maior. Qual é o raio da nova esfera?

a) $\sqrt[3]{78}$

b) $\sqrt[3]{36}$

c) $\sqrt[3]{68}$

d) $\sqrt[3]{104}$

e) $\sqrt[3]{26}$

98. (ESA/2015)

Em uma pirâmide reta de base quadrada, de $4m$ de altura, uma aresta da base mede 6m. A área total dessa pirâmide, em m^2, é

a) 144

b) 84

c) 48

d) 72

e) 96

99. (ESA/2014)

Dobrando o raio da base de um cone e reduzindo sua altura à metade, seu volume:

a) dobra

b) quadriplica

c) não se altera

d) reduz-se à metade do volume original.

e) reduz-se a um quarto do volume original.

100. (ESA/2012)

Duas esferas de aço de raio 4cm e $\sqrt[3]{61}\ cm$ fundem-se para formar uma esfera maior. Considerando que não houve perda de material das esferas durante o processo de fundição, a medida do raio da nova esfera é de:

a) $5\ cm$

b) $5,5\ cm$

c) $4,5\ cm$

d) $6\ cm$

e) $7\ cm$

101. (ESA/2012)

Dobrando-se a altura de um cilindro circular reto e triplicando o raio de sua base, pode-se afirmar que seu volume fica multiplicado por:

a) 6

b) 9

c) 12

d) 18

e)36

102. (ESA/2011)

Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone invertido. Esse tanque está completamente cheio com$8dm^3$ de água e $56dm^3$ de petróleo. Petróleo e água não se misturam, ficando o petróleo na parte superior do tanque e a água na parte inferior. Sabendo que o tanque tem12m de profundidade, a altura da camada de petróleo é:

a) $10m$

b) $9m$

c) $8m$

d) $7m$

e) $6m$

103. (ESA/2010)

Um cone reto, de altura H e área da base B, é seccionado por um plano paralelo à base. Consequentemente, um novo cone com altura $\frac{H}{3}$ é formado. Qual a razão entre os volumes do maior e o do menor cone, o de altura H e o de altura $\frac{H}{3}$?

a) 3

b) 6

c) 9

d) 18

e) 27

104. (EsPCEx/2017)

A angioplastia é um procedimento médico caracterizado pela inserção de um cateter em uma veia ou artéria com o enchimento de um pequeno balão esférico localizado na ponta desse cateter. Considerando que, num procedimento de angioplastia, o raio inicial do balão seja desprezível e aumente a uma taxa constante de $0,5mm/s$ até que o volume seja igual a $500\ mm^3$, então o tempo, em segundos, que o balão leva para atingir esse volume é

a) 10

b) $10\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$

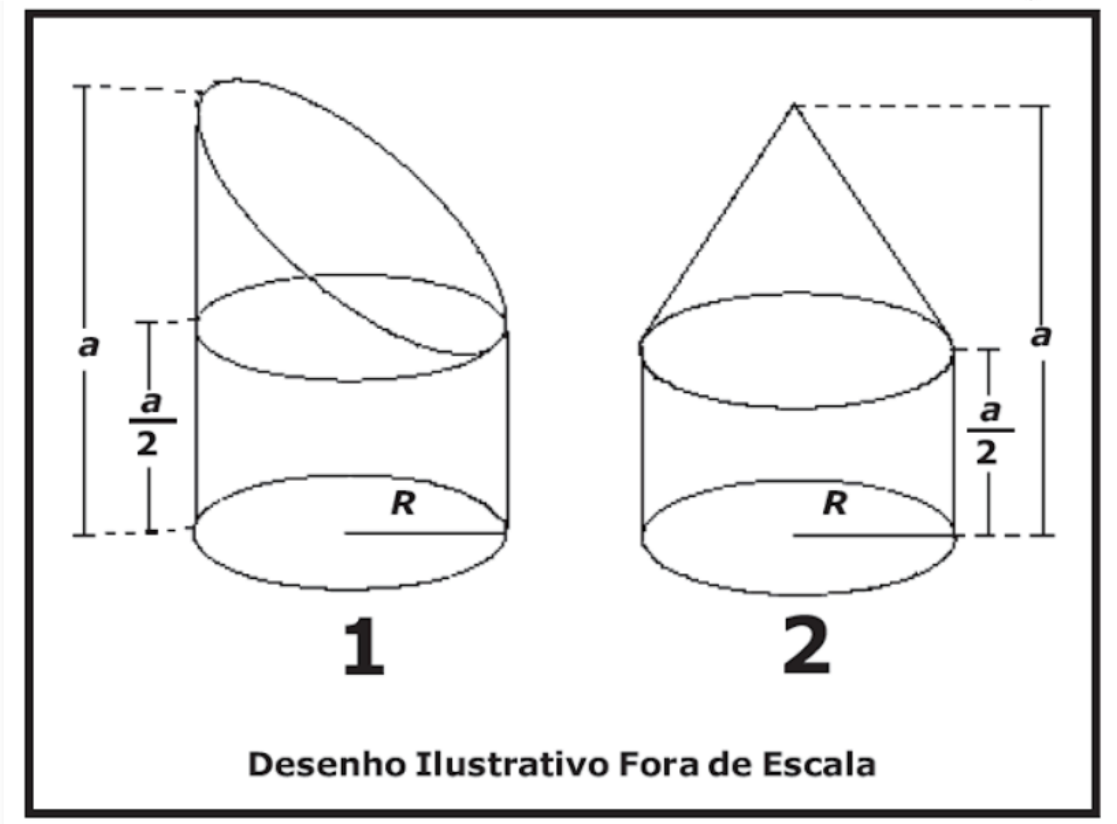
c) $10\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$

d) $10\sqrt[3]{\pi}$

e) $10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$

105. (EsPCEx/2017)

O valor da altura de um cilindro reto de raio R, cujo volume é a soma dos volumes dos sólidos 1 e 2 é



a) $\frac{13}{12}a$

b) $\frac{7}{6}a$

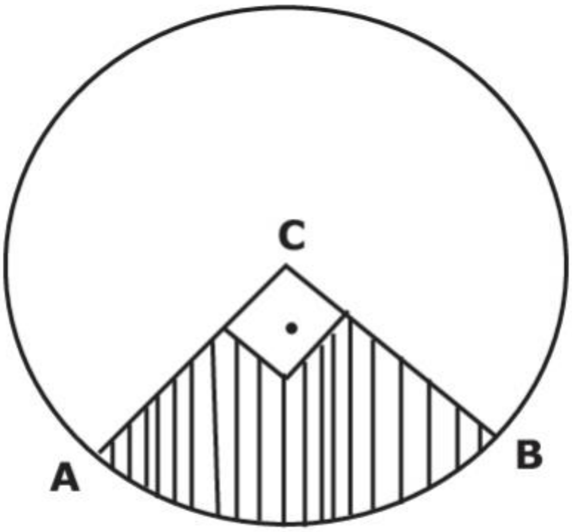
c) $\frac{5}{4}a$

d) $\frac{4}{3}a$

e) $\frac{17}{12}a$

106. (EsPCEx/2016)

Corta-se de uma circunferência de raio 4 cm, um setor circular de ângulo $\frac{\pi}{2}\ rad$ (ver desenho ilustrativo), onde o ponto C é o centro da circunferência. Um cone circular reto é construído a partir desse setor circular ao se juntar os raios $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$. O volume desse cone, em cm^3, é igual a:



desenho ilustrativo-fora de escala

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

b) $\frac{\sqrt{3}}{5}\pi$

c) $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$

d) $\frac{\sqrt{15}}{5}\pi$

e) $\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$

107. (EsPCEx/2015)

Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida R, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede

a) $\frac{2}{3}R$

b) $\frac{3}{4}R$

c) $\frac{4}{9}R$

d) $\frac{1}{3}R$

e) $\frac{9}{16}R$

108. (EsPCEx/2014)

Um cone de revolução tem altura $4\ cm$ e está circunscrito a uma esfera de raio $1\ cm$. O volume desse cone (em cm^3) é igual a

a) $\frac{1}{3}\pi$

b) $\frac{2}{3}\pi$

c) $\frac{4}{3}\pi$

d) $\frac{8}{3}\pi$

e) 3π

109. (EsPCEx/2013)

Considere que uma laranja tem a forma de uma esfera de raio $4\ cm$, composta de 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede

a) $\frac{4^3\pi}{3}\ cm^2$

b) $\frac{4^3\pi}{9}\ cm^2$

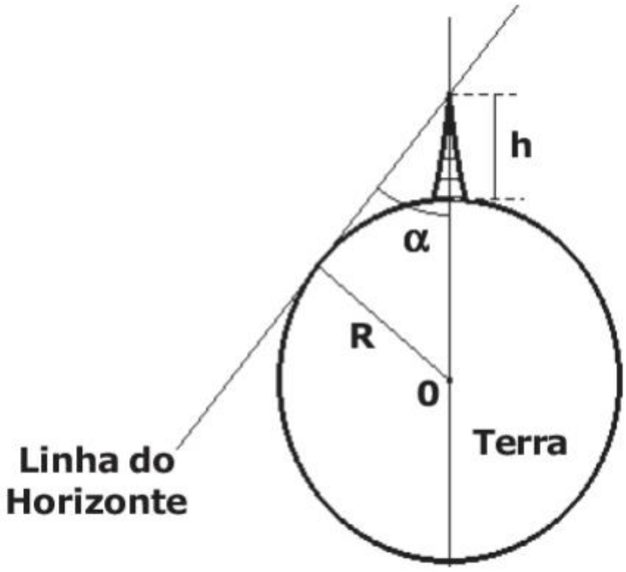
c) $\frac{4^2\pi}{3}\ cm^2$

d) $\frac{4^2\pi}{9}\ cm^2$

e) $4^3\pi\ cm^2$

110. (EsPCEx/2012)

Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura conhecida, o ângulo sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica, conforme mostra a figura. Segundo esse raciocínio, o raio terrestre em função do ângulo α é dado por:



a) $R = \frac{sen(\alpha h)}{1 - sen\,\alpha}$

b) $R = \frac{h\,sen\,\alpha}{1 - sen\,\alpha}$

c) $R = \frac{h\,sen\,\alpha}{sen\,\alpha - 1}$

d) $R = \frac{1 - sen\,\alpha}{h\,sen\,\alpha}$

e) $R = \frac{1 + sen\,\alpha}{h\,sen\,\alpha}$

111. (EsPCEx/2012)

Um recipiente em forma de cone circular reto, com raio da base R e altura h, está completamente cheio com água e óleo. Sabe-se que a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone. O recipiente dispõe de uma torneira que permite escoar os líquidos de seu interior, conforme indicado na figura.

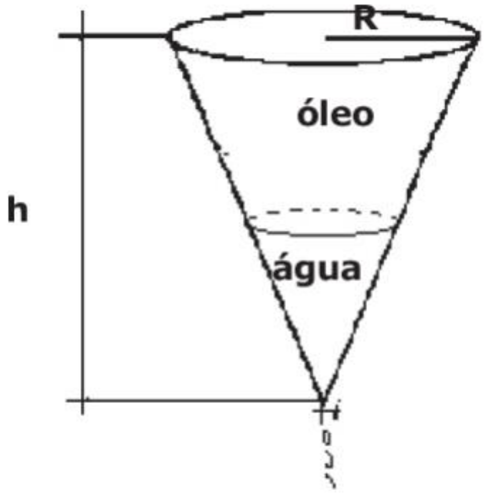


Figura fora de escala

Se essa torneira for aberta, exatamente até o instante em que toda água e nenhum óleo escoar, a altura do nível do óleo, medida a partir do vértice será

a) $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$

b) $\frac{\sqrt[3]{7}}{3}h$

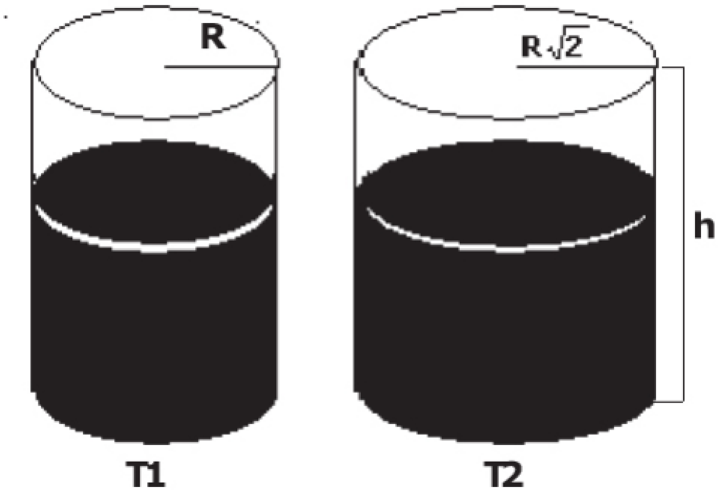
c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}h$

d) $\frac{\sqrt[3]{23}}{2}h$

e) $\frac{\sqrt[3]{23}}{3}h$

112. (EsPCEx/2011)

A figura abaixo representa dois tanques cilíndricos, $T1$ e $T2$, ambos com altura h, e cujos raios das bases medem R e $R\sqrt{2}$, respectivamente. Esses tanques são usados para armazenar combustível e a quantidade de combustível existente em cada um deles é tal que seu nível corresponde a $\frac{2}{3}$ da altura.



O tanque $T1$ contém gasolina pura e o tanque $T2$ contém uma mistura etanol-gasolina, com 25% de etanol.

Deseja-se transferir gasolina pura do tanque $T1$ para $T2$ até que o teor de etanol na mistura em $T2$ caia para 20%. Nessas condições, ao final da operação, a diferença entre a altura dos níveis de $T1$ e $T2$ será

a) $\frac{1}{2}h$

b) $\frac{1}{3}h$

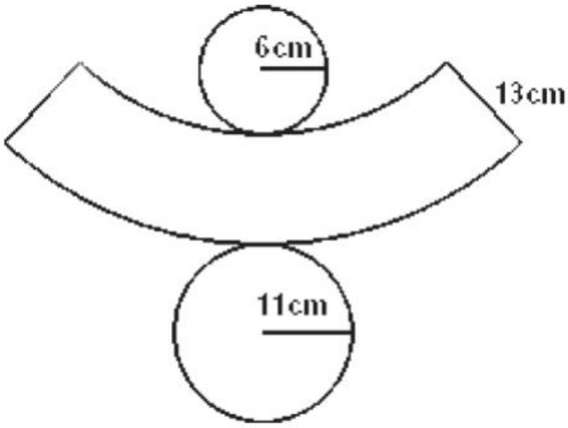
c) $\frac{1}{4}h$

d) $\frac{1}{5}h$

e) $\frac{1}{6}h$

113. (EsPCEx/2010)

A figura abaixo representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz.



Desenho fora de escala

A medida da altura desse tronco de cone é

a) 13 cm

b) 12 cm

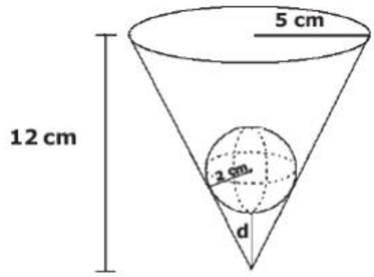
c) 11 cm

d) 10 cm

e) 9 cm

114. (EsPCEx/2008)

Uma esfera de $2\ cm$ de raio é colocada no interior de um vaso cônico, conforme a figura a seguir.



Desenho Fora de Escala

O vaso tem $12\ cm$ de altura e sua abertura é uma circunferência com $5\ cm$ de raio. Nessas condições, a menor distância (d) entre a esfera e o vértice do cone é

a) $3,0\ cm$

b) $3,2\ cm$

c) $3,4\ cm$

d) $3,6\ cm$

e) $3,8\ cm$

115. (EsPCEx/2006)

Um tonel, em forma de cilindro circular reto, tem $60\ cm$ de altura. Uma miniatura desse tonel tem $20\ cm$ de altura e raio diretamente proporcional à altura. Se a miniatura tem $100\ ml$ de volume, então o volume do tonel original é de

a) $30\ l$

b) $27\ l$

c) $2,7\ l$

d) $3\ l$

e) $300\ ml$

116. (EsPCEx/2004)

Se a área lateral e a área total de um cilindro reto são $2\pi A$ e $2\pi S$ respectivamente, então, o volume deste sólido é igual a:

a) $\pi A\sqrt{S-A}$

b) $\pi S\sqrt{S-A}$

c) $\pi A\sqrt{S+A}$

d) $\pi S\sqrt{S+A}$

e) $\pi\sqrt{S+A}$

117. (EsPCEx/2003)

Uma lata cilíndrica está completamente cheia de um líquido que deve ser distribuído totalmente em potes iguais entre si, também cilíndricos. A altura de cada pote é igual a $\frac{2}{5}$ da altura da lata e o diâmetro de sua base é $\frac{1}{3}$ do diâmetro da base da lata. Para tal distribuição, a quantidade mínima de potes a serem utilizados é

a) 22

b) 23

c) 24

d) 25

e) 26

118. (EsPCEx/2002)

Dois recipientes, um em forma de cilindro e o outro, de paralelepípedo, cujas bases estão num mesmo plano, são unidos por uma tubulação com uma válvula no meio. Inicialmente, a válvula está fechada, o paralelepípedo está vazio e o cilindro é ocupado, em parte, por um líquido cujo volume é de 2000π litros, atingindo uma altura de 2 metros. A válvula é aberta e, após certo tempo, verifica-se que os dois recipientes têm o mesmo nível do líquido. Considerando desprezível o volume da tubulação que une os dois reservatórios e sabendo que a área da base do paralelepípedo é de $1,5\pi\ m^2$, o volume final, em litros, de líquido no paralelepípedo é

a) 600π

b) 800π

c) 1000π

d) 1200π

e) 1500π

119. (EsPCEx/2001)

Denomina-se rolamento a um dispositivo mecânico constituído por dois anéis em forma de casca cilíndrica e um conjunto de esferas. Desejando obter o volume de uma das esferas de aço que compõe o rolamento dado na $figura\ 1$, sem desmontá-lo, e não dispondo de todos os instrumentos necessários para executar as medições, um estudante executou os seguintes procedimentos:

a. Com os instrumentos de que dispunha, mediu o anel interno, em forma de casca cilíndrica, obtendo $3,46\ cm$ para o diâmetro interno, $4\ cm$ para o diâmetro externo e $1\ cm$ para altura;

b. Repetiu as operações para o anel externo, anotou as medidas e calculou o volume, obtendo $3,8\ cm^3$;

c. Lembrando o princípio de Arquimedes, que afirma que o volume de um objeto imerso num recipiente com líquido corresponde à variação do volume do líquido, colocou água numa proveta graduada em cm^3, conforme a $figura\ 2$, mergulhou o rolamento na água e obteve a leitura indicada na $figura\ 3$.

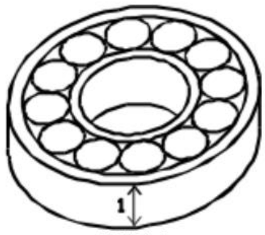


FIGURA 1

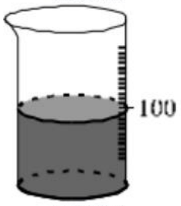


FIGURA 2

FIGURA 3

Nessas condições pode-se afirmar que o valor que mais se aproxima do volume de cada esfera, em cm^3, é (aproximações aceitas: $1,73^2 \approx 3$, $3,46^2 \approx 12$, $\pi \approx 3,1$):

a) 3,4

b) 4,6

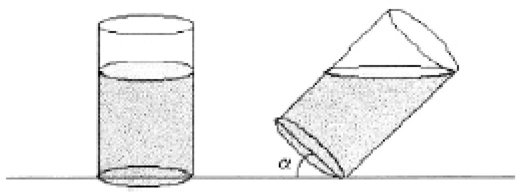
c) 3,8

d) 4,2

e) 5,0

120. (EsPCEx/2000)

Num recipiente em forma de cilindro circular reto, com raio da base $2\ cm$ e altura $6\sqrt{3}\ cm$ (dimensões internas), há um volume de água de $16\sqrt{3}\pi\ cm^3$. O maior ângulo a que o plano da base do cilindro pode fazer com a horizontal para que a água não derrame ao se inclinar o cilindro é de, aproximadamente:



(considere: $tg\ 30° = 0,58$, $tg\ 40° = 0,84$, $tg\ 50° = 1,19$, $tg\ 60° = 1,73$ e $tg\ 70° = 2,75$)

a) $30°$

b) $40°$

c) $50°$

d) $60°$

e) $70°$

4.1. GABARITO

31. B
32. c
33. c
34. b
35. a
36. c
37. c
38. a
39. b
40. a
41. c
42. b
43. a
44. d
45. b
46. c
47. b
48. b
49. c
50. d
51. d
52. c
53. b
54. c
55. d
56. c
57. d
58. a
59. d
60. b
61. d
62. d
63. b
64. c
65. c
66. c
67. d
68. b
69. c
70. a
71. c
72. b
73. b
74. b
75. a
76. b
77. b
78. c
79. d
80. c
81. a
82. d
83. b
84. c
85. a
86. c
87. b
88. a
89. c
90. c
91. a
92. b
93. b
94. a
95. d
96. d
97. a
98. e
99. a
100. a
101. d
102. e
103. e
104. e
105. e

106.	c	111.	a	116.	a
107.	b	112.	a	117.	b
108.	d	113.	b	118.	d
109.	a	114.	b	119.	d
110.	b	115.	c	120.	d
121.					

5. LISTA DE QUESTÕES RESOLVIDAS E COMENTADAS

31. (ESA/2021)

A área da superfície de uma esfera é $144\pi\ cm^2$. O volume da esfera é igual a:

a) $216\pi\ cm^3$

b) $288\pi\ cm^3$

c) $2304\pi\ cm^3$

d) $162\pi\ cm^3$

e) $72\pi cm^3$

Comentários

A área de uma esfera é dada por:

$$A = 4\pi R^2 = 144\pi$$

$$R^2 = 36$$

$$R = 6$$

O volume da esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(6)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 = 4 \cdot 72\pi = 288\pi\ cm^3$$

Gabarito: B

---

32. (EEAR/2019)

Um cilindro circular reto, de altura igual a $\frac{2}{3}$ do raio da base e de $12\pi\ cm^2$ de área lateral, possui raio da base igual a ____cm.

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

Comentários

A área lateral é dada por:

$$A_l = 12\pi = 2\pi r \cdot h = 2\pi r \cdot \left(\frac{2}{3}r\right) = \frac{4}{3}\pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 9 \quad \therefore r = 3\ cm$$

Gabarito: "c".

---

33. (EEAR/2018)

Um cilindro equilátero tem $196\pi\ cm^2$ de área lateral. O raio da base desse cilindro mede____cm.

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

Comentários

No cilindro equilátero, a seção meridiana forma um quadrado, portanto, a altura é o dobro do raio. Posto isso:

$$A_l = 196\pi = 2\pi r \cdot (h) = 2\pi r \cdot (2r) = 4\pi r^2$$

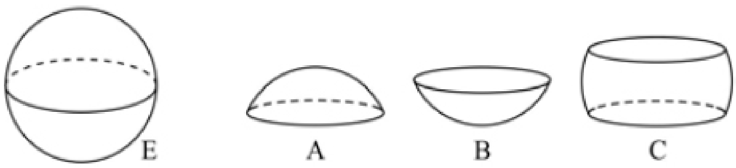
$$\Rightarrow \quad r^2 = 49 \quad \therefore \quad r = 7\ cm$$

Gabarito: "c".

---

34. (EEAR/2018)

Uma esfera E foi dividida em 3 partes: A, B e C, como mostra o desenho.



Se os volumes dessas partes são tais que: $V(A) = V(B) = \frac{V(C)}{2}$ e $V(C) = 486\pi\ cm^3$, então o raio da esfera é _____cm.

a) 8

b) 9

c) 10

d) 12

Comentários

O volume total é dado por:

$$V_{esf} = V(A) + V(B) + V(C) = \frac{V(C)}{2} + \frac{V(C)}{2} + V(C) = 2 \cdot V(C) = 2 \cdot 486\pi$$

$$= 972\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \quad R^3 = 729 \quad \Rightarrow \quad R = 9\ cm$$

Gabarito: "b".

---

35. (EEAR/2018)

A superfície lateral de um cone, ao ser planificada, gera um setor circular cujo raio mede $10\ cm$ e cujo comprimento do arco mede $10\pi\ cm$. O raio da base do cone, em cm, mede

a) 5

b) 10

c) 5π

d) 10π

Comentários

O comprimento do arco do cone planificado corresponde ao perímetro da base do cone. Logo:

$$2\pi R = 10\pi \quad \Rightarrow \quad R = 5\ cm$$

Gabarito: "a".

---

36. (EEAR/2017)

Uma esfera está inscrita num cilindro equilátero cuja área lateral mede $16\pi\ cm^2$. O volume da esfera inscrita é

a) 8π

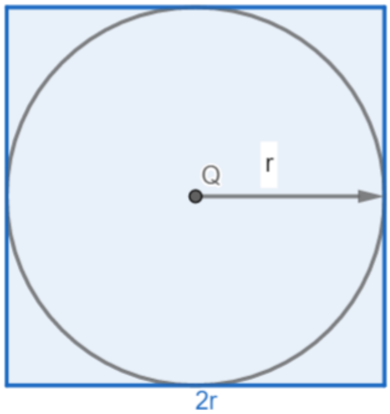
b) 16π

c) $\frac{32\pi}{3}$

d) $\frac{256\pi}{3}$

Comentários

O raio da esfera é igual ao raio do cilindro, conforme:



No cilindro equilátero a seção meridiana forma um quadrado, portanto, a altura é o dobro do raio. Posto isso:

$$A_l = 16\pi = 2\pi r \cdot (h) = 2\pi r \cdot (2r) = 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 4 \quad \therefore \quad r = 2\ cm$$

Como o valor de raio é o mesmo, então:

$$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32}{3}\pi$$

Gabarito: "c".

---

37. (EEAR/2017)

Um escultor irá pintar completamente a superfície de uma esfera de $6\ m$ de diâmetro, utilizando uma tinta que, para essa superfície, rende $3\ m^2$ por litro. Para essa tarefa, o escultor gastará, no mínimo, ______litros de tinta. (Considere $\pi = 3$)

a) 18

b) 24

c) 36

d) 48

Comentários

Primeiramente devemos calcular a área superficial da esfera que é dada por:

$$S_{esf} = 4\pi R^2 = 4 \cdot (3) \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 108\, m^2$$

Como a tinta pinta 3 m^2 por litro, precisaremos de:

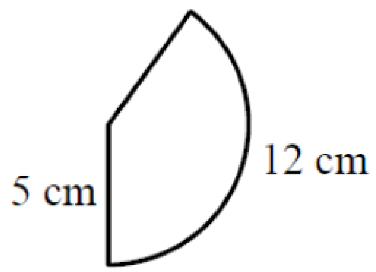
$$\frac{108}{3} = 36\, l$$

Gabarito: “c”.

---

38. (EEAR/2017)

O setor circular da figura representa a superfície lateral de um cone circular reto.



Considerando $\pi = 3$, a geratriz e o raio da base do cone medem, em cm, respectivamente,

a) 5 e 2

b) 5 e 3

c) 3 e 5

d) 4 e 5

Comentários

Perceba que a geratriz do cone será o próprio raio do setor circular, $g = R = 5\, cm$. O comprimento do arco do setor será o perímetro da base do cone, logo:

$$2\pi r = 12\, cm \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot (3) \cdot r = 12 \;\Rightarrow\; r = 2\, cm$$

Gabarito: “a”.

---

39. (EEAR/2017)

Considere um recipiente em forma de cubo, completamente cheio de água. Se três esferas metálicas de $1\ cm$ de raio forem colocadas dentro do recipiente, o volume de água que será derramado será de ______ $\pi\ cm^3$.

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

Comentários

Como o cubo está cheio, o volume das esferas corresponderá ao volume derramado. Perceba que metal em água afunda totalmente, logo, todo o volume de água será substituído por volume de metal dentro do recipiente, e, feito isso, todo o volume das 3 esferas corresponderá ao volume total de água derramado.

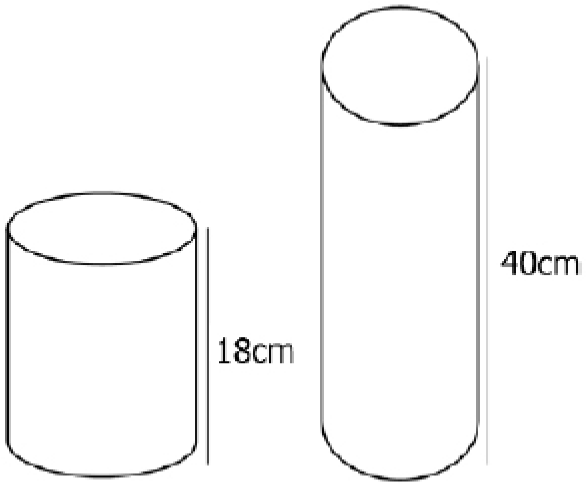
$$V_{derr} = 3 \cdot V_{esf} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi (1)^3\right) = 4\pi\ cm^3$$

Gabarito: "b".

---

40. (EEAR/2016)

Um cilindro de $18\ cm$ de altura e raio da base igual a $5\ cm$ contém água até a metade de sua altura. Por algum motivo, houve necessidade de despejar essa água em um outro cilindro com $40\ cm$ de altura, cujo raio da base mede $4\ cm$.



Considerando $\pi = 3$, o valor que mais se aproxima da altura atingida pela água no segundo cilindro é

a) $14\ cm$

b) $16\ cm$

c) $20\ cm$

d) $24\ cm$

Comentários

O volume de água no primeiro cilindro é igual ao volume de água no segundo:

$$V_1 = V_2$$

$$\Rightarrow \quad \pi R_1^2 h_1 = \pi R_2^2 h_2$$

$$\Rightarrow R_1^2 h_1 = R_2^2 h_2$$

Sendo $R_1 = 5\ cm$, $R_2 = 4\ cm$, $h_1 = \frac{18}{2} = 9\ cm$

$$(5)^2 \cdot 9 = (4)^2 \cdot h_2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{25 \cdot 9}{16} = 14{,}0625 \approx 14\ cm$$

Gabarito: "a".

---

41. (EEAR/2016)

Uma esfera inscrita em um cubo de diagonal $2\sqrt{3}\ m$ tem o volume igual a

a) $\frac{\pi}{3}\ m^3$

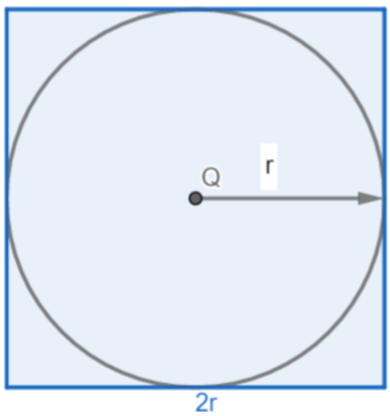
b) $\frac{2\pi}{3}\ m^3$

c) $\frac{4\pi}{3}\ m^3$

d) $\frac{32\pi}{3}\ m^3$

Comentários

O lado do cubo corresponde ao dobro do raio da esfera, conforme:



A diagonal do cubo é $d = l\sqrt{3}$ em que $l - aresta\ do\ cubo$, mas sabemos que $l = 2r$. Então:

$$d = 2r\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad r = 1\, m$$

Agora o volume da esfera pode ser calculado, conforme:

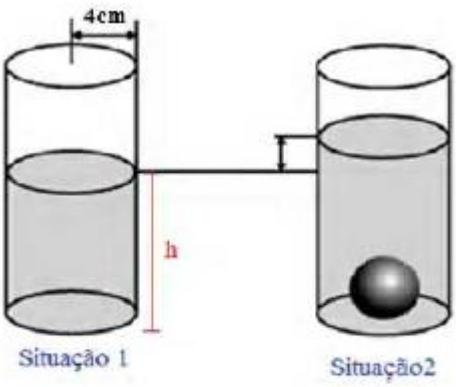
$$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (1)^3 = \frac{4}{3}\pi\, m^3$$

Gabarito: "c".

---

42. (EEAR/2016)

Na ilustração a seguir, são apresentadas duas situações. Na primeira, o cilindro contém um líquido que atinge uma altura h. Inserindo-se uma esfera de $3\ cm$ de raio nesse mesmo cilindro, o nível do líquido aumenta, conforme situação 2. O novo volume, determinado pelo líquido somado à esfera, totaliza $588\ cm^3$.



Considerando $\pi = 3$ e o raio da base do cilindro igual a $4\ cm$, a medida da altura h corresponde a _____cm.

a) $h = 8$

b) $h = 10$

c) $h = 16$

d) $h = 32$

Comentários

Na situação 2 o volume do líquido variou devido à inserção da esfera. Sendo o volume da esfera correspondente a própria variação de volume.

$$V_{esf} = \Delta V = V_{fim} - V_{ini}$$

Sabemos que:

$$V_{fim} = 588, \qquad V_{esf} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot (3) \cdot (3)^3 = 108, \qquad V_{ini} = \pi R^2 h = (3) \cdot (4)^2 \cdot h = 48h$$

Logo,

$$108 = 588 - 48h \quad \Rightarrow \quad h = 10\ cm$$

Gabarito: “b”.

---

43. (EEAR/2015)

Os especialistas alertam que é preciso beber, em média, 2 litros de água por dia. Isso equivale a 10 copos com capacidade de $200\ cm^3$. Um copo cilíndrico com esta capacidade e $2\ cm$ de raio da base tem, aproximadamente, a _____cm de altura. (Considere $\pi = 3$)

a) 17

b) 18

c) 19

d) 20

Comentários

O volume do cilindro é dado por:

$$V_{copo} = \pi r^2 h \ \Rightarrow$$

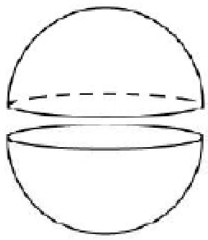
$$\Rightarrow \quad 200 = (3) \cdot (2)^2 h = 12h \quad \therefore \quad h = \frac{50}{3} \approx 17\ cm$$

Gabarito: “a”.

---

44. (EEAR/2015)

Uma esfera de raio $R = 3\ cm$ foi cortada ao meio, gerando duas semiesferas.



A área da superfície de cada semiesfera é _____$\pi\ cm^2$

a) 20

b) 22

c) 25

d) 27

Comentários

A área superficial total de cada semiesfera será metade da área superficial de uma esfera somado à área de uma circunferência de mesmo raio. Conforme:

$$S_{\frac{1}{2}esf} = \frac{1}{2} \cdot S_{esf} + S_{circun} = \frac{1}{2} \cdot (4\pi R^2) + (\pi R^2) = 3\pi R^2 = 3\pi \cdot (3)^2 = 27\pi$$

Gabarito: “d”.

---

45. (EEAR/2015)

Se um cone equilátero tem $50\pi\ cm^2$ de área lateral, então a soma das medidas de sua geratriz e do raio de sua base, em cm, é igual a

a) 10

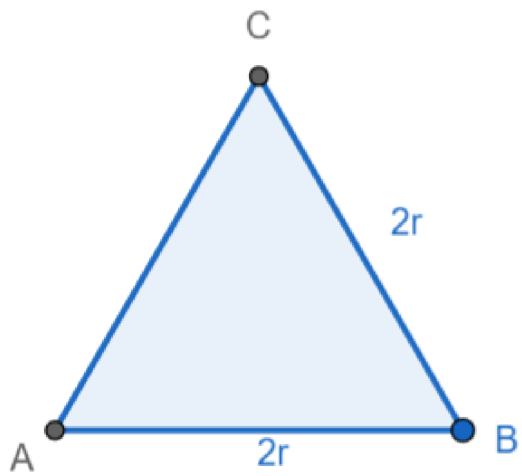
b) 15

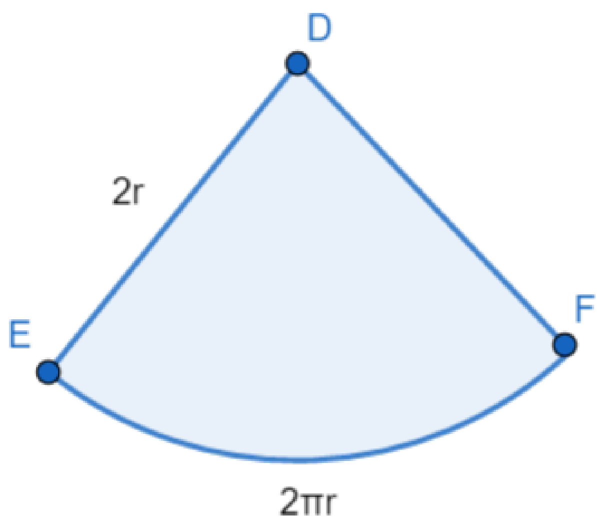
c) 20

d) 25

Comentários

No cone equilátero a seção meridiana forma um triângulo equilátero. Então, planificando a superfície lateral do cone, obtemos:





No cálculo da área do setor circular calcula-se o ângulo central do setor em radianos:

$$\alpha = \frac{2\pi r}{2r} = \pi\, rad$$

A superfície lateral do cone é então calculada conforme:

$$S_l = \alpha \cdot \left(\frac{R^2}{2}\right) = (\pi) \cdot \left(\frac{(2r)^2}{2}\right) = 2\pi r^2 = 50\pi \quad \Rightarrow \quad r = 5\ cm$$

Logo a geratriz do cone mede $g = 2r = 10\ cm$

$$g + r = 10 + 5 = 15\ cm$$

Gabarito: "b".

---

46. (EEAR/2014)

Um filtro com a forma de cone circular reto, tem volume de $200\ cm^3$ e raio da base de $5\ cm$. Usando $\pi = 3$, pode-se determinar que sua altura, em cm, é igual a

a) 10

b) 9

c) 8

d) 6

Comentários

O volume do cone é dado por:

$$V_{filtro} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 200 = \frac{1}{3} \cdot (3) \cdot (5)^2 h = 25h \quad \therefore \quad h = 8\ cm$$

Gabarito: "c".

---

47. (EEAR/2014)

Considerando $\pi = 3$, utilizando $108\ cm^3$ de chumbo pode-se construir uma esfera de _____ cm de diâmetro.

a) 7

b) 6

c) 5

d) 4

Comentários

O volume da esfera é dado por:

$$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Logo, utilizando todo o chumbo disponível teremos uma esfera de $108\ cm^3$ de volume

$$108 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot (3) \cdot R^3 = 4R^3 \quad \Rightarrow \quad R^3 = 27$$

$$\therefore R = 3\ cm$$

Logo, o diâmetro da esfera mede $D = 2R = 2 \cdot 3 = 6\ cm$

Gabarito: "b".

---

48. (EEAR/2013)

Um cilindro equilátero cuja geratriz mede $8\ cm$, tem área lateral igual a _______$\pi\ cm^2$.

a) 128

b) 64

c) 32

d) 16

Comentários

No cilindro equilátero a seção meridiana forma um quadrado. Portanto, a altura do cilindro mede o dobro do raio da base $H = 2R$. Sendo a área lateral dada por:

$$S_l = 2\pi R \cdot H = 2\pi \left(\frac{H}{2}\right) \cdot H = \pi H^2$$

Perceba que a geratriz de um cilindro mede a própria altura dele, portanto: $H = 8\ cm$

Então:

$$S_l = \pi H^2 = \pi \cdot (8)^2 = 64\pi\ cm^2$$

Gabarito: "b"

---

49. (EEAR/2012)

Uma Escola de Samba carregou, em um de seus carros alegóricos, uma imensa esfera de $5\ m$ de raio. O pintor da Escola disse que gastou 10 litros de tinta para pintar cada $157\ m^2$ da superfície da esfera. Considerando $\pi = 3,14$, o número de litros de tinta que foram gastos para pintar toda a superfície da esfera foi

a) 16

b) 18

c) 20

d) 22

Comentários

Primeiramente devemos calcular a área superficial da esfera que é dada por:

$$S_{esf} = 4\pi R^2 = 4 \cdot (3{,}14) \cdot (5)^2 = 314\ m^2$$

Como a tinta pinta $157\ m^2$ por 10 litros, precisaremos de:

$$\frac{314}{157} = 2\ (10\ l\ de\ tinta) = 20\ l\ de\ tinta$$

Gabarito: "c".

---

50. (EEAR/2012)

Um cilindro de altura $H = 5\ cm$ e raio da base $R = 4\ cm$, tem volume $V =$ ________$\pi\ cm^3$.

a) 50

b) 60

c) 70

d) 80

Comentários

O volume do cilindro é dado por:

$$V_{cil} = \pi R^2 \cdot h = \pi(4)^2 \cdot (5) = 80\pi\ cm^3$$

Gabarito: "d".

---

51. (EEAR/2011)

A cuba de uma pia tem a forma de uma semiesfera de $3\ dm$ de raio. A capacidade dessa cuba é______π litros

a) 12

b) 14

c) 16

d) 18

Comentários

O volume da semiesfera é dado por:

$$V_{cuba} = \frac{1}{2} \cdot V_{esf} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{2}{3}\pi(3)^3 = 18\pi\ dm^3 = 18\pi\ l$$

Gabarito: "d".

---

52. (EEAR/2011)

O raio da base de um cone equilátero mede $2\sqrt{3}\ cm$. O volume desse cone, em cm^3, é

a) $42\sqrt{3}\pi$

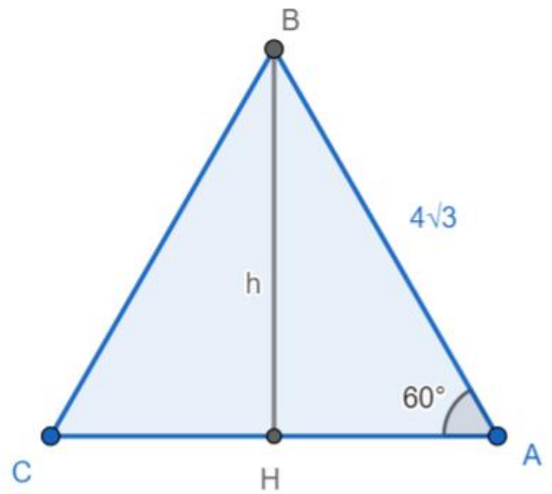
b) $38\sqrt{3}\pi$

c) 24π

d) 18π

Comentários

No cone equilátero a seção meridiana forma um triângulo equilátero. Portanto, a geratriz do cone tem o dobro da medida do raio da base:



Aplicando Pitágoras no triângulo ABH. Obtemos que $h = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 6\ cm$

Logo, o volume do cone é dado por:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot (6) = 24\pi\ cm^3$$

Gabarito: "c".

---

53. (EEAR/2010)

Um cone e um cilindro, ambos equiláteros, têm bases de raios congruentes. A razão entre as áreas das secções meridianas do cone e do cilindro é

$\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$

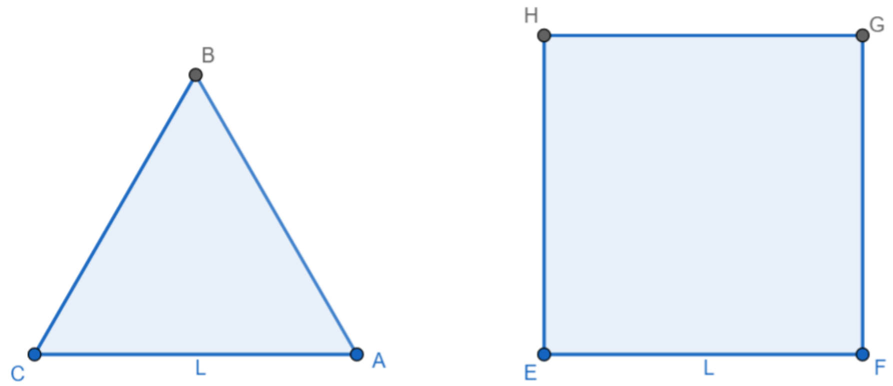
b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

Comentários

A seção meridiana de um cilindro equilátero forma um quadrado, e a seção meridiana de um cone equilátero forma um triângulo equilátero. Como o raio da base de ambos são iguais, o lado do triângulo e o lado do quadrado são iguais.



Logo, seja L o lado, temos que:

$$\frac{S_{cone}}{S_{cil}} = \frac{S_{triang}}{S_{quad}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}L^2}{L^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Gabarito: "b".

---

54. (EEAR/2009)

Em um cone, a medida da altura é o triplo da medida do raio da base. Se o volume do cone é $8\pi\ dm^3$, a medida do raio da base, em dm, é

a) 0,5

b) 1,5

c) 2

d) 3

Comentários

Segundo o enunciado: $h = 3r$

Logo, o volume é dado por:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot (3r) = \pi r^3$$

$$\pi r^3 = 8\pi \quad \Rightarrow \quad r = 2\ dm$$

Gabarito: "c".

---

55. (EEAR/2009)

Um triângulo equilátero, de $6\ dm$ de lado, gira em torno de um de seus lados. O volume do sólido gerado, em dm^3, é

a) 24π

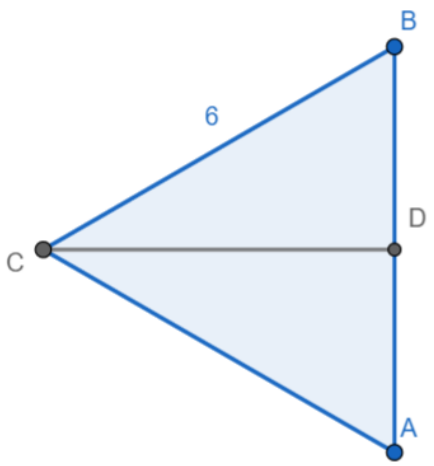
b) 36π

c) 48π

d) 54π

Comentários

Observe a seguinte figura que representa o triângulo:



Observe que a irão se formar 2 cones unidos pela base. Sendo o lado $\overline{CD}$ o raio da base dos cones e a medida $\overline{BD} = \overline{AD}$ representam a altura dos cones formados.

Sabemos que:

$$\overline{BD} = \frac{l}{2} = \frac{6}{2} = 3\ dm \quad e \quad \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}}{2}(6) = 3\sqrt{3}\ dm$$

Então: $h = 3\ dm$ e $r = 3\sqrt{3}\ dm$

Logo, o volume final é o volume de 2 cones conforme:

$$V_t = 2V_{cone} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h\right) = \frac{2}{3} \cdot \pi\left(3\sqrt{3}\right)^2 \cdot (3) = 54\pi\ dm^3$$

Gabarito: "d".

---

56. (EEAR/2008)

A diagonal da secção meridiana de um cilindro equilátero mede $10\sqrt{2}\ cm$. A área lateral desse cilindro, em cm^2, é

a) 250π

b) 200π

c) 100π

d) 50π

Comentários

No cilindro equilátero a seção meridiana forma um quadrado. A diagonal do quadrado mede $D = L\sqrt{2}$, logo:

$$10\sqrt{2} = L\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad L = 10\ cm$$

O lado L mede o dobro da medida do raio da base do cilindro $L = 2r \quad \Rightarrow \quad r = 5\ cm$ e o lado L representa a altura do cilindro $h = L = 10\ cm$

Sendo assim, a medida da área lateral do cilindro é dada por:

$$S_l = 2\pi r \cdot h = 2\pi(5) \cdot (10) = 100\pi\ cm^2$$

Gabarito: "c".

---

57. (EEAR/2008)

Uma esfera tem $100\pi\ cm^2$ de área. Se diminuirmos o raio dessa esfera em $t\ cm$, sua área passa a ser $64\pi\ cm^2$. Logo, o valor de t é

a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

Comentários

No caso inicial temos que:

$$S_{ini} = 4\pi R^2 = 100\pi \quad \Rightarrow \quad R^2 = 25 \quad \therefore \quad R = 5\ cm$$

No caso final temos que:

$$S_{fim} = 4\pi r^2 = 64\pi \quad \Rightarrow \quad r^2 = 16 \quad \therefore \quad r = 4\ cm$$

Sabemos que $R - t = r \quad \therefore \quad t = R - r = 5 - 4 = 1\ cm$

Gabarito: "d".

---

58. (EEAR/2008)

Considere duas esferas: a primeira com $16\pi\ cm^2$ de área, e a segunda com raio igual a $\frac{5}{2}$ do raio da primeira. A área da segunda esfera, em cm^2, é

a) 100π

b) 50π

c) 40π

d) 20π

Comentários

Sendo $R - raio\ da\ esfera\ maior$ e $r = raio\ da\ esfera\ menor$, sabemos que:

$$R = \frac{5}{2}r$$

Então a área lateral da esfera maior é dada por:

$$S_{maior} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{5}{2}r\right)^2 = \frac{25}{4}(4\pi r^2) = \frac{25}{4} \cdot S_{menor}$$

$$S_{maior} = \frac{25}{4} \cdot (16\pi) = 100\pi$$

Gabarito: "a".

---

59. (EEAR/2008)

Um retângulo, de lados $2\ m$ e $5\ m$, gira $360°$ em torno de seu maior lado. A área lateral do sólido obtido, em m^2, é

a) 10

b) 20

c) 10π

d) 20π

Comentários

O retângulo irá definir um cilindro em que o seu eixo de rotação será a altura e o outro lado será o raio da base, logo, $h = 5\ m$ e $r = 2\ m$.

$$S_l = 2\pi r \cdot h = 2\pi(2) \cdot (5) = 20\pi\ m^2$$

Gabarito: "d".

---

60. (EEAR/2008)

Um cilindro de cobre tem volume V, raio da base $R = 50\ cm$ e altura $H = 40\ cm$. Este cilindro será derretido para fazer cilindros de volume v, raio $r = \frac{R}{5}$ e altura $h = \frac{H}{4}$. Dessa forma, $\frac{V}{v} =$

a) 50

b) 100

c) 150

d) 200

Comentários

Perceba que não precisaremos utilizar os valores do raio e da altura para determinar a razão dos volumes, conforme:

$$\frac{V}{v} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{\left(\frac{R}{5}\right)^2 \left(\frac{H}{4}\right)} = \frac{R^2 H}{\left(\frac{R^2 H}{100}\right)} = 100$$

Gabarito: "b".

---

61. (EEAR/2008)

Uma esfera tem $9\pi\ cm^2$ de área. Para que a área passe a $100\pi\ cm^2$, o raio deve ter sua medida aumentada em

a) $\frac{70}{9}\%$

b) $\frac{70}{3}\%$

c) $\frac{700}{9}\%$

d) $\frac{700}{3}\%$

Comentários

Segundo o enunciado temos que

$$9\pi = 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \quad r = \frac{3}{2}\, cm$$

E

$$100\pi = 4\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad R = 5\, cm$$

Por fim,

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{R - r}{r} = \frac{R}{r} - 1 = \frac{5}{\frac{3}{2}} - 1 = \frac{10}{3} - 1 = \frac{7}{3}$$

Este aumento em porcentagem equivale a

$$\frac{700}{3}\%$$

Gabarito: "d".

---

62. (EEAR/2007)

Um reservatório, com volume igual a $144\pi\ m^3$, tem a forma de uma semiesfera. Para aumentar seu volume em $342\pi\ m^3$, é preciso aumentar o raio do reservatório em

a) 12 m

b) 9 m

c) 6 m

d) 3 m

Comentários

Sabe-se que

$$144\pi = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad r^3 = 216 \quad \Rightarrow \quad r = 6\, m$$

Sabe-se também que após o aumento teremos $V_f = 342\pi + 144\pi = 486\pi\ m^3$

$$486\pi = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad R^3 = 729 \quad \Rightarrow \quad R = 9\, m$$

Então $\Delta r = R - r = 9 - 6 = 3\, m$

Gabarito: "d".

---

63. (EEAR/2007)

Um cilindro equilátero é equivalente a um cone, também equilátero. Se o raio da base do cone mede $\sqrt{3}\ cm$, o raio da base do cilindro mede, em cm,

a) $\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$

c) $\frac{\sqrt[3]{6}}{3}$

d) $\sqrt{6}$

Comentários

Sólidos equivalentes são aqueles que possuem o mesmo volume. Logo, o volume do cone e do cilindro são iguais. Lembre também das definições de cilindro e cone equilátero, a seção meridiana destes forma, respectivamente, um quadrado e um triângulo equilátero. Sendo assim:

$$h_{cone} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (2R_{con}) = \sqrt{3}R_{con}$$

$$h_{cil} = 2R_{cil}$$

Sendo assim:

$$V_{con} = V_{cil}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \pi R_{con}^2 \cdot h_{con} = \pi R_{cil}^2 \cdot h_{cil}$$

$$\frac{1}{3} \cdot R_{con}^2 \cdot \left(\sqrt{3}R_{con}\right) = R_{cil}^2 \cdot (2R_{cil})$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot R_{con}^3 = 2R_{cil}^3$$

$$\Rightarrow \quad R_{cil}^3 = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot R_{con}^3$$

$$R_{cil}^3 = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow R_{cil} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}$$

Gabarito: "b".

---

64. (EEAR/2007)

Um chapéu de festa, feito de cartolina, tem a forma de um cone de $1\ dm$ de raio e $5\ dm$ de geratriz. Para fazer 20 chapéus, são necessários, no mínimo, _____dm^2 de cartolina.

Considere $\pi = 3,14$.

a) 157

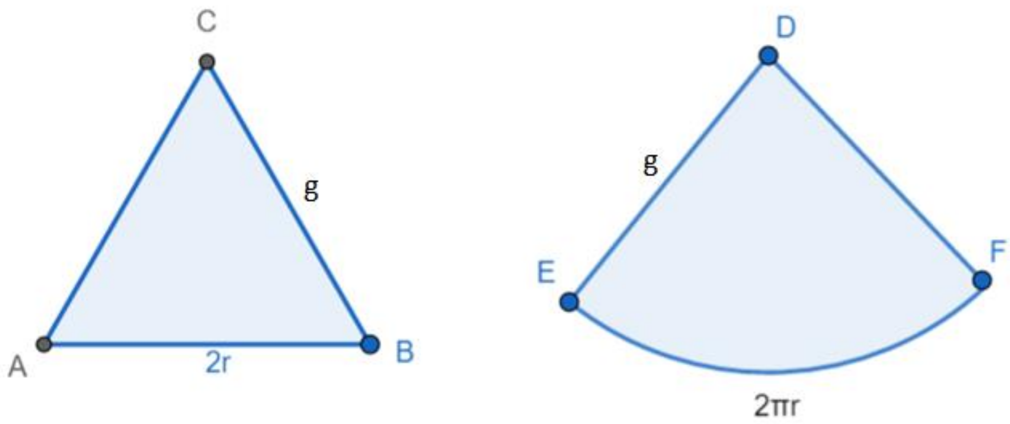
b) 225

c) 314

d) 426

Comentários

Precisamos calcular a área lateral do cone.



Consideraremos a figura aberta do cone calcularemos a área do setor circular, conforme:

$$S_{lat} = \frac{2\pi r}{g} \cdot \left(\frac{g^2}{2}\right) = \pi r g = (3{,}14) \cdot (1) \cdot (5) = 15{,}7$$

Precisa-se de um total de cartolina dado por:

$$S_{tot} = 20 \cdot 15{,}7 = 314\ dm^2$$

Gabarito: "c".

65. (EEAR/2007)

O raio da base de um cilindro equilátero e a aresta de um cubo são congruentes. A razão entre as áreas totais do cilindro e do cubo é

a) 2

b) 4

c) π

d) 2π

Comentários

Lembre-se da definição de cilindro equilátero, a seção meridiana forma um quadrado. Sendo assim:

$$h_{cil} = 2R_{cil}$$

Segundo o enunciado: $R_{cil} = L_{cubo} = d$

Sendo assim, calculamos a área superficial do cilindro conforme:

$$S_{cilindro} = S_{lat} + 2S_{base} = 2\pi R_{cil}h_{cil} + 2\pi R_{cil}^2$$

$$= 2\pi R_{cil}(2R_{cil}) + 2\pi R_{cil}^2 = 6\pi R_{cil}^2 = 6\pi d^2$$

$$S_{cilindro} = 6\pi d^2$$

A área superficial do cubo é dada por:

$$S_{cubo} = 6 \cdot L_{cubo}^2 = 6d^2$$

Então a razão entre as áreas vale:

$$\frac{S_{cilindro}}{S_{cubo}} = \frac{6\pi d^2}{6d^2} = \pi$$

Gabarito: "c".

---

66. (EEAR/2007)

O raio da base de um cone equilátero mede $2\ cm$. A área lateral desse cone, em cm^2, é

a) 4π

b) 5π

c) 8π

d) 10π

Comentários

Lembre-se da definição de cone equilátero, a seção meridiana forma um triângulo equilátero. Sendo assim:

$$h_{cone} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (2R_{cone}) = \sqrt{3}R_{cone}$$

$$\Rightarrow \quad g_{cone} = \sqrt{\left(\sqrt{3}R_{cone}\right)^2 + (R_{cone})^2} = 2R_{cone}$$

Sendo assim, calculamos a área superficial do cone conforme:

$$S_{lat} = \frac{2\pi R_{cone}}{g_{cone}} \cdot \left(\frac{g_{cone}^2}{2}\right) = \pi R_{cone} g_{cone} = 2\pi R_{cone}^2$$

$$S_{lat} = 2\pi \cdot (2)^2 = 8\pi$$

Gabarito: "c".

---

67. (EEAR/2006)

Uma esfera tem $36\pi\ m^3$ de volume. A medida de sua superfície, em m^2, é

a) 72π

b) 56π

c) 48π

d) 36π

Comentários

Sabemos que:

$$36\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad R^3 = 27 \quad \therefore \quad R = 3\,m$$

Então:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi(3)^2 = 36\pi\ m^2$$

Gabarito: "d".

---

68. (EEAR/2006)

A base de um cone circular reto está inscrita num triângulo equilátero de área $9\sqrt{3}\ cm^2$. Se as alturas do cone e do triângulo são congruentes, então o volume do cone, em cm^3, é

a) $3\pi\sqrt{6}$

b) $3\pi\sqrt{3}$

c) $6\pi\sqrt{3}$

d) $6\pi\sqrt{6}$

Comentários

Sabemos que a área de um triângulo equilátero é dada:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}l^2 = 9\sqrt{3} \quad \therefore \quad l = 6\ cm$$

Então o semi-perímetro do triângulo é dado por:

$$p = \frac{3l}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9\ cm$$

O valor do raio da circunferência inscrita é dado por:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{9\sqrt{3}}{9} = \sqrt{3}\ cm$$

O raio da base do cone vale $r = \sqrt{3}\ cm$

A altura do cone é igual a altura do triângulo que mede$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}\ cm$

Portanto, remos um cone de raio da base $r = \sqrt{3}\ cm$ e altura $h = 3\sqrt{3}\ cm$

O volume do cone é, portanto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi(\sqrt{3})^2 \cdot (3\sqrt{3}) = 3\pi\sqrt{3}\ cm^3$$

Gabarito: "b".

---

69. (EEAR/2006)

Um plano determina dois semicilindros quando secciona um cilindro reto de $2,5\ cm$ de altura e $4\ cm$ de diâmetro da base, passando pelos centros de suas bases. A área total de cada um desses semicilindros, em cm^2, é aproximadamente igual a

a) 28

b) 30

c) 38

d) 40

Comentários

Na situação dada do enunciado, cada semicilindro terá metade da área total de um cilindro inteiro, somado à área do retângulo definido pelo corte do plano.

Sendo assim, calculamos a área superficial do cilindro conforme:

$$S_{cilindro} = S_{lat} + 2S_{base} = 2\pi R_{cil} h_{cil} + 2\pi R_{cil}^2$$

$$= 2\pi R_{cil}(R_{cil} + h_{cil}) = 2\pi(2)((2) + (2,5))$$

$$S_{cilindro} = 18\pi\ cm^2$$

E a área do plano é dada por:

$$S_{secção} = B \cdot h = 4 \cdot 2{,}5 = 10\ cm^2$$

Então a área total do semicilindro é dada:

$$S_{tot} = \frac{1}{2} \cdot S_{cilindro} + S_{secção} = \frac{1}{2} \cdot (18\pi) + (10) = 9\pi + 10 \approx 38\ cm^2$$

Gabarito: "c".

---

70. (EEAR/2005)

Um prisma quadrangular regular está circunscrito a um cilindro equilátero. Se a aresta da base do prisma mede $4\ cm$, então o volume do cilindro, em cm^3, é

a) 16π

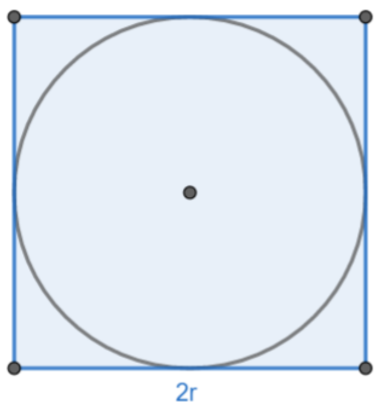
b) 12π

c) 8π

d) 4π

Comentários

Na base do cilindro temos a seguinte situação:



O lado da base do prisma mede $2r = 4 \quad \therefore \quad R_{cil} = 2\ cm$ é o raio da base do cilindro.

Lembre-se da definição de cilindro equilátero, a seção meridiana forma um quadrado. Sendo assim:

$$h_{cil} = 2R_{cil} = 4\ cm$$

Então o volume do cilindro é dado por:

$$V_{cil} = \pi {R_{cil}}^2 \cdot h_{cil} = \pi(2)^2 \cdot (4) = 16\pi$$

Gabarito: “a”.

---

71. (EEAR/2005)

A área lateral de um cone circular reto é $24\pi\ cm^2$. Se o raio da base desse cone mede $4\ cm$, então sua altura, em cm, mede

a) $5\sqrt{2}$

b) $5\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{5}$

d) $3\sqrt{5}$

Comentários

No cone circular reto, temos que:

$$g = \sqrt{(h)^2 + (r)^2}$$

E a área lateral do cone é dada por: $S_{lat} = \pi r g \quad \Rightarrow \quad 24\pi = \pi r g \quad \therefore \quad rg = 24$

Logo,

$$rg = r\sqrt{(h)^2 + (r)^2} = 24$$

$$4\sqrt{(h)^2 + (4)^2} = 24 \quad \Rightarrow \quad (h)^2 + 16 = 6^2 = 36$$

$$\Rightarrow \quad h^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad h = 2\sqrt{5}\ cm$$

Gabarito: “c”.

---

72. (EEAR/2005)

Considere as afirmações:

I. A esfera é um sólido gerado pela rotação de uma semicircunferência em torno de seu diâmetro.

II. A esfera é um sólido gerado pela rotação de um semicírculo em torno de seu diâmetro.

III. Nem toda secção plana de uma esfera é um círculo.

Toda secção plana de uma esfera é um círculo.

São FALSAS as afirmações

a) $I\ e\ IV$

b) $I \text{ e } III$

c) $II \text{ e } III$

d) $II \text{ e } IV$

Comentários

No item I a rotação de uma semicircunferência irá formar uma casca esférica. Logo, esta assertiva é falsa.

No item III toda a seção plana de uma esfera forma um círculo, logo este item é falso.

O item II é verdadeiro.

Gabarito: “b”.

---

73. (EEAR/2005)

Num cilindro circular reto, o diâmetro da base mede $8\ cm$ e a geratriz, $10\ cm$. A área lateral desse cilindro, em cm^2, é

a) 160π

b) 80π

c) 80

d) 40

Comentários

No cilindro dado, o raio da base mede $R = 4\ cm$. E a área lateral do cilindro é calculada como:

$$S_l = 2\pi R \cdot h = 2\pi(4) \cdot (10) = 80\pi\ cm^2$$

Gabarito: “b”.

---

74. (EEAR/2004)

Um vaso tem formato de um cilindro reto, de $16\ cm$ de altura interna e $6\ cm$ de diâmetro interno. Ele contém água até $\frac{1}{3}$ de sua altura. Acrescentando-se uma quantidade de água equivalente ao volume de uma esfera de $6\ cm$ de diâmetro, o nível da água subirá:

a) 3 cm

b) 4 cm

c) 5 cm

d) 6 cm

Comentários

No problema dado, o volume de água da esfera causará um aumento no volume de um cilindro de diâmetro $d = 6\ cm \quad \Rightarrow \quad r = 3\ cm$ e altura Δh.

$$V_{esf} = \Delta V$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi r^2 \cdot \Delta h$$

$$\frac{4}{3}\left(\frac{6}{2}\right)^3 = (3)^2 \cdot \Delta h$$

$$4 \cdot 9 = 9 \cdot \Delta h$$

$$\Rightarrow \quad \Delta h = 4\ cm$$

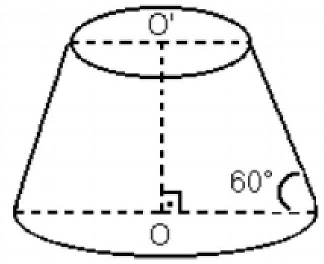
Obs.: perceba que $h_{ini} = \frac{16}{3}$ e $h_{fim} = \frac{16}{3} + 4 = \frac{38}{3} < 13\ cm$, ou seja, o vaso não transborda.

Gabarito: "b".

---

75. (EEAR/2004)

No tronco de cone reto, as bases são paralelas.



Se o raio da base maior mede $5\ cm$ e a distância entre as duas bases, $4\sqrt{3}\ cm$, então o volume desse tronco de cone, em cm^3, é

a) $\frac{124\pi\sqrt{3}}{3}$

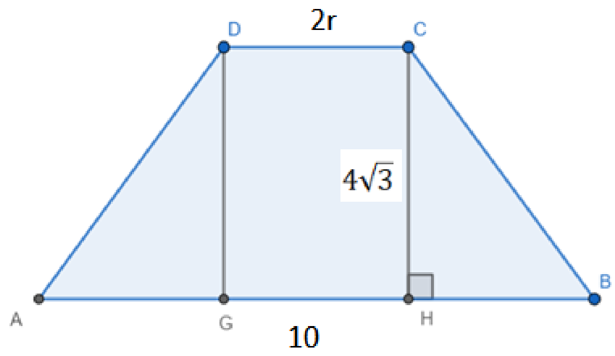
b) $125\pi\sqrt{3}$

c) $\frac{96\pi\sqrt{3}}{3}$

d) $124\pi\sqrt{3}$

Comentários

Efetuando a seção meridiana do tronco obtemos:



Devido a simetria da figura obtemos que $HB = \frac{10-2r}{2} = 5 - r$

Mas,

$$tg(60°) = \frac{\overline{CH}}{\overline{HB}} = \frac{4\sqrt{3}}{5-r} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 4 = 5 - r \quad \Rightarrow r = 1\ cm$$

A fórmula que calcula o volume do tronco de cone é dada por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi(R^2 + Rr + r^2) \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi((5)^2 + (5) \cdot (1) + (1)^2) \cdot \left(4\sqrt{3}\right) = \frac{31 \cdot 4\sqrt{3}\pi}{3}$$

$$V = \frac{124\pi\sqrt{3}}{3}$$

Gabarito: "a".

---

76. (EEAR/2004)

Sejam dois cones, A e B, de volumes V e V', respectivamente. Se as razões entre os raios das bases e entre as alturas de A e B são, respectivamente, 2 e $\frac{1}{2}$, então podemos afirmar que

a) $V' = V$

b) $V = 2V'$

c) $V' = 2V$

d) V= $3V'$

Comentários

Segundo o enunciado:

$$\frac{R_V}{R_{V'}} = 2$$

$$\frac{H_V}{H_{V'}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi R_V^2 \cdot H_V}{\frac{1}{3} \cdot \pi R_{V'}^2 \cdot H_{V'}} = \left(\frac{R_V}{R_{V'}}\right)^2 \cdot \left(\frac{H_V}{H_{V'}}\right) = 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \quad V = 2V'$$

Gabarito: "b".

---

77. (EEAR/2004)

Num cone reto, o raio da base mede $\sqrt{3}\ cm$. Para que os números que expressam as medidas do raio da base, da altura e do volume desse cone formem, nessa ordem, uma P.G., a altura, em cm, deve ser

a) $3\pi\sqrt{3}$

b) $\pi\sqrt{3}$

c) π

d) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

Comentários

Queremos que r, h e V sejam uma PG, então:

$$\frac{h}{r} = \frac{V}{h} \quad \Rightarrow \quad h^2 = V \cdot r \ (numericamente)$$

Mas sabemos que:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

$$\Rightarrow \quad h^2 = r \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^3$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{1}{3} \cdot \pi\left(\sqrt{3}\right)^3 = \pi\sqrt{3}$$

Gabarito: "b".

---

78. (EEAR/2003)

Um barril, cuja forma é a de um cilindro reto, está repleto de vinho. Este vinho deve ser distribuído em copos cilíndricos de altura igual a $\frac{1}{8}$ da altura do barril, e de diâmetro da base igual a $\frac{1}{5}$ do diâmetro da base do barril. A quantidade de copos necessária para distribuir todo o vinho é

a) 400

b) 300

c) 200

d) 100

Comentários

A quantidade de copos é expressa pela razão entre o volume cilíndrico do barril e o volume cilíndrico de um copo:

$$n = \frac{V}{v} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{\left(\frac{R}{5}\right)^2 \left(\frac{H}{8}\right)} = \frac{R^2 H}{\frac{R^2 H}{200}} = 200\ copos$$

Gabarito: "c".

---

79. (EEAR/2003)

Num triângulo ABC, o lado maior $\overline{AC}$ mede $10\ cm$; o lado menor $\overline{BC}$ mede $3\ cm$; e o ângulo que eles formam mede $45°$. O volume do sólido gerado pela rotação de $360°$ desse triângulo em torno do lado maior, em cm^3, é

a) $\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$

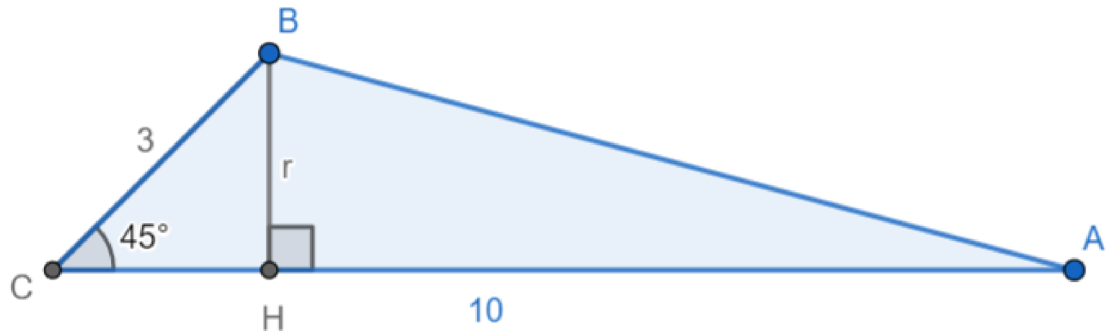
b) $3\sqrt{2}\pi$

c) $\frac{5\pi}{2}$

d) 15π

Comentários

O seguinte desenho representa a situação proposta:



Primeiramente perceba que

$$r = 3 \cdot sen(45°) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ cm$$

Note que $\overline{CH} = r$, pois o triângulo BCH é retângulo e isósceles.

O volume do sólido final corresponde ao volume de dois cones de raio da base r e altura $10 - r$ e altura r

$$V_S = V_1 + V_2 = \left(\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\right) + \left(\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (10 - r)\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 (r + 10 - r)$$

$$V_S = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 10 = \frac{10}{3}\pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{10}{3}\pi \cdot \frac{9}{2} = 15\pi\ cm^3$$

Gabarito: "d".

---

80. (EEAR/2003)

A geratriz de um cone de revolução mede $6\ cm$ e o ângulo da geratriz com a altura do cone é de $30°$. O volume desse cone, em cm^3, é

a) 9π

b) $3\pi\sqrt{3}$

c) $9\pi\sqrt{3}$

d) $27\pi\sqrt{3}$

Comentários

Primeiramente, perceba que um cone de revolução é um cone reto, logo, o raio, a altura e a geratriz formam um triângulo retângulo.

Segundo o enunciado, podemos calcular:

$$h = g \cdot cos(30°) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ cm$$

$$r = g \cdot sen(30°) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3\ cm$$

Logo,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi (3)^2 \cdot \left(3\sqrt{3}\right) = 9\pi\sqrt{3}\ cm^3$$

Gabarito: "c".

---

81. (EEAR/2003)

Se um cubo está inscrito em uma esfera de $\sqrt{3}\ m$ de raio, então o volume do cubo, em m^3, é igual a

a) 8

b) 27

c) $12\sqrt{3}$

d) $24\sqrt{3}$

Comentários

No cubo inscrito na esfera. O diâmetro do cubo deve ser igual ao diâmetro da esfera. Logo:

$$D = l\sqrt{3} = 2r = 2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \quad l = 2\ m$$

Então:

$$V = l^3 = (2)^3 = 8\ m^3$$

Gabarito: "a".

---

82. (EEAR/2003)

A área lateral do sólido geométrico formado pela rotação de um triângulo equilátero, de perímetro $30\ cm$, em torno de um de seus lados é, em cm^2, igual a

a) 100π

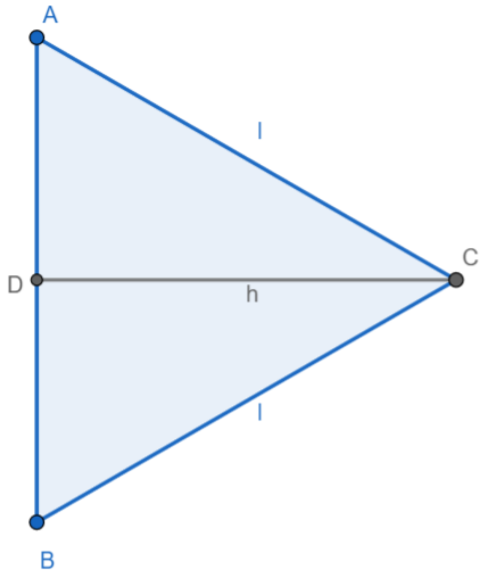
b) 200π

c) $50\pi\sqrt{3}$

d) $100\pi\sqrt{3}$

Comentários

Perceba que o lado do triângulo vale $l = \frac{30}{3} = 10\ cm$.



O solido formado corresponde a dois cones de raio da base $h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ e geratriz l.

Sendo a área total a soma das áreas laterais dos dois cones:

Lembre-se que a área lateral de um cone de geratriz g e raio da base r é dado

$$S_{tot} = 2 \cdot S_{lat} = 2 \cdot (\pi r g) = 2\pi r g$$

Mas $r = h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ e $g = l$, então:

$$S_{tot} = 2\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} l\right) \cdot (l) = \pi l^2 \sqrt{3} = \pi (10)^2 \sqrt{3} = 100\pi\sqrt{3}$$

Gabarito: "d".

---

83. (EEAR/2002)

Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de altura $6\ m$ e raio da base $3\ m$. O nível da água nele contida está a uma distância do fundo do tanque igual aos $\frac{2}{3}$ da sua altura. Adotando-se $\pi = 3,14$, a quantidade de litros de água que o cilindro contém é

a) 113010

b) 113040

c) 113050

d) 113080

Comentários

Na situação dada:

$$h = \frac{2}{3}H = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4\ m$$

Então:

$$V = \pi R^2 \cdot h = \pi(3)^2 \cdot (4) = 36\pi \approx 113{,}04\ m^3 = 113040\ litros$$

Gabarito: "b".

---

84. (EEAR/2002)

A geratriz de um cilindro de revolução mede $10\ cm$. Qual o seu raio da base, sabendo-se que, aumentando-se esse raio em $10\ cm$ e mantendo-se a altura, a área lateral do novo cilindro é igual à área total do primeiro?

a) $2,5\ cm$

b) $5\sqrt{2}\ cm$

c) $10\ cm$

d) $20\ cm$

Comentários

Um cilindro de revolução é um cilindro reto.

A área lateral de um cilindro é dada por:

$$S_l = 2\pi Rh$$

A área total de um cilindro é dada por:

$$S_{tot} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + h)$$

Segundo o enunciado: $R_2 = R_1 + 10$, $h = 10$ e existe uma relação entre as áreas conforme:

$$2\pi R_2 h = 2\pi R_1(R_1 + h)$$

$$(R_1 + 10)10 = R_1(R_1 + 10)$$

$$10R_1 + 100 = R_1^2 + 10R_1$$

$$R_1^2 = 100 \Rightarrow \quad R_1 = 10\ cm$$

Gabarito: "c".

---

85. (EEAR/2002)

A geratriz de um cone de revolução forma com o eixo do cone um ângulo de $45°$. A área lateral, em dm^2, desse cone, sabendo-se que a área de sua secção meridiana é $18\ dm^2$, é

a) $\mathbf{18\pi\sqrt{2}}$

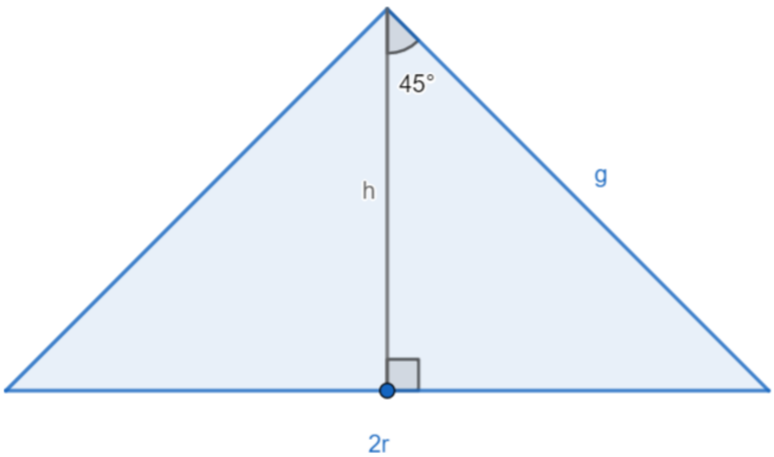
b) $\mathbf{9\pi\sqrt{2}}$

c) $\mathbf{18\pi}$

d) $\mathbf{18\pi(\sqrt{2}+1)}$

Comentários

Um cone de revolução é um cone reto. Então, se o ângulo entre a geratriz e o eixo mede $45°$, o triângulo que forma o cone por revolução é um triângulo retângulo isósceles e a altura é igual ao raio. Observe a figura a seguir que representa a seção meridiana do cone:



A área da seção meridiana vale:

$$S_{sec} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = r \cdot h = r^2 = 18 \ \Rightarrow r = 3\sqrt{2}\, dm$$

A geratriz pode ser calculada usando a definição de seno, logo:

$$g = r\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6\ dm$$

A área lateral do cone é dada por:

$$S_{lat} = \pi r g = \pi \cdot \left(3\sqrt{2}\right) \cdot (6) = 18\pi\sqrt{2}$$

Gabarito: “a”.

---

86. (EEAR/2002)

Se um cilindro reto está circunscrito a uma esfera de raio R, então a razão entre a área da superfície esférica e a área total do cilindro é

a) 1

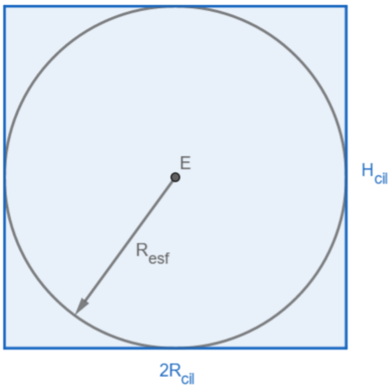
b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{4}{5}$

Comentários

Na situação dada, temos a seguinte seção meridiana:



$$R_{cil} = R_{esf} = R$$

$$H_{cil} = 2R_{esf} = 2R$$

Sendo assim:

$$\frac{S_{esf}}{S_{cil}} = \frac{4\pi R_{esf}^2}{2\pi R_{cil}(R_{cil} + H_{cil})} =$$

$$= \frac{2R^2}{R(R + 2R)} = \frac{2R^2}{3R^2} = \frac{2}{3}$$

Gabarito: "c".

---

87. (EEAR/2002)

A área da secção paralela ao eixo de um cilindro circular reto, de $8\ m$ de altura e $1\ m$ de raio, feita a $0,6\ m$ do eixo, em m^2, é

a) 16,00

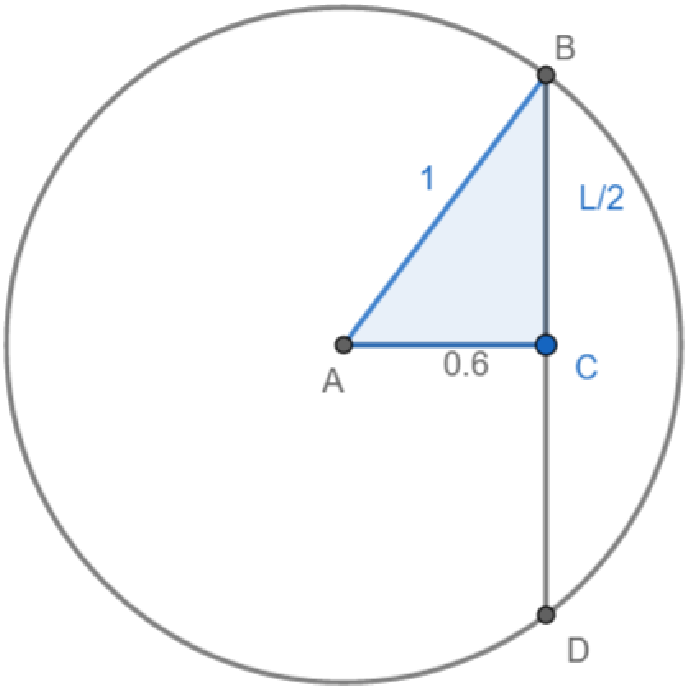
b) 12,80

c) 6,40

d) 8,60

Comentários

Na situação dada, a altura da face gerada pelo plano é a mesma altura do cilindro, mas devemos descobrir o comprimento da base. Observe a seguinte figura que mostra a visão superior do cilindro:



O segmento $\overline{BD}$ representa o plano que secciona o cilindro.

Perceba que aplicando Pitágoras no triângulo ABC, obtemos que $\overline{BC} = 0{,}8\ m$.

Logo,

$$\frac{L}{2} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad L = 1{,}6\ m$$

A área do plano é dada por:

$$S = B \cdot h = (8) \cdot (1{,}6) = 12{,}8\ m^2$$

Gabarito: "b".

---

88. (EEAR/2002)

Um tanque cilíndrico com água tem raio da base R. Mergulha-se nesse tanque uma esfera de aço e o nível da água sobe $\frac{9}{16}R$. O raio da esfera é

a) $\frac{3}{4}R$

b) $\frac{9}{16}R$

c) $\frac{3}{5}R$

d) $\frac{R}{2}$

Comentários

O volume de água deslocado é o volume de um cilindro, assim, temos:

$$V_{desloc} = \pi R^2 \cdot h = \pi R^2 \cdot \left(\frac{9}{16}R\right) = \frac{9}{16}\pi R^3$$

Esse volume deslocado corresponde ao volume de uma esfera de raio r:

$$V_{esf} = V_{desloc}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{9}{16}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{27}{64}R^3$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{3}{4}R$$

Gabarito: “a”.

---

89. (EEAR/2002)

O maior e o menor lado de um triângulo medem, respectivamente, $10\ cm$ e $3\ cm$ e formam entre si um ângulo de $45°$. O volume do sólido gerado pela rotação de $360°$ desse triângulo em torno do seu lado maior é, em cm^3,

a) 30π

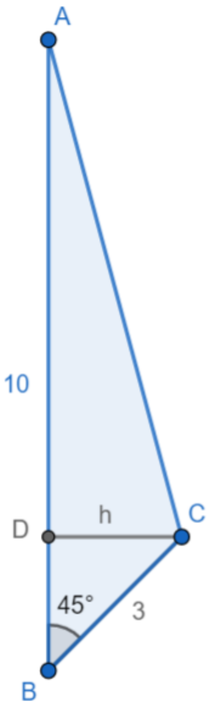
b) 20π

c) 15π

d) 10π

Comentários

O enunciado nos permite construir a seguinte figura:



O sólido formado corresponde à junção de dois cones. O cone 1 possui altura $h_1 = \overline{AD}$ e raio da base $r = \overline{CD}$. O cone 2 possui altura $h_2 = \overline{BD}$ e raio da base $r = \overline{CD}$.

Podemos utilizar a geometria plana para obter o valor de $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$ através da definição de seno e cosseno aplicados ao triângulo BCD. Desse modo:

$$\overline{CD} = \overline{BD} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Logo,

$$\overline{AD} = 10 - \overline{BD} = 10 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Portanto:

$$h_1 = 10 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad ; h_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} ; r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Portando, o volume final do solido formado é dado por:

$$V_{solido} = V_1 + V_2$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2)$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\left(10 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{9}{2} \cdot (10) = 15\pi\ cm^3$$

Gabarito: "c".

---

90. (EEAR/2001)

Num cone circular reto, cujo raio da base mede r e a geratriz mede g, a base é equivalente à secção meridiana. A altura desse cone mede

a) $\pi r g$

b) $\frac{\pi r}{g}$

c) πr

d) πg

Comentários

Nesse contexto, a área da base é igual a área da secção meridiana, sendo assim:

$$S_{base} = S_{seção}$$

$$\pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h$$

$$\Rightarrow h = \pi r$$

Gabarito: "c".

---

91. (EEAR/2001)

Ao seccionar uma esfera, um plano determina um círculo de raio $16\ cm$. Se a distância do plano ao centro da esfera é de $12\ cm$, então o raio da esfera, em cm, vale

a) 20

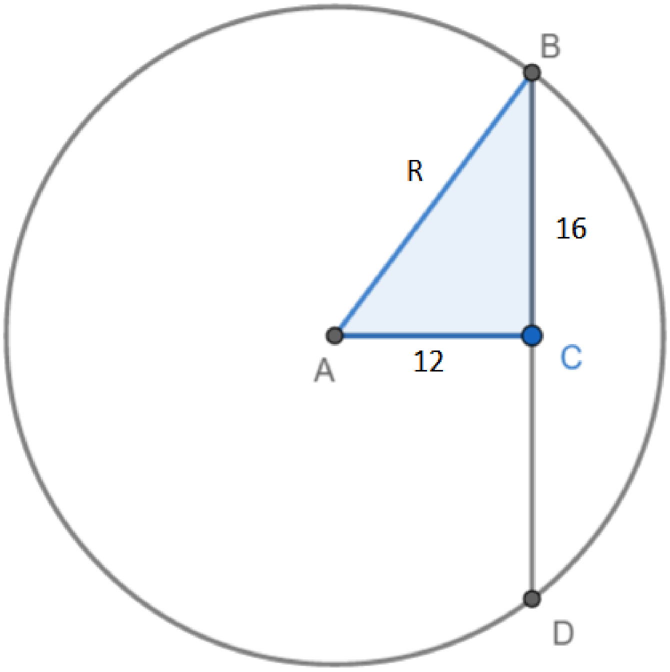
b) 28

c) 30

d) 38

Comentários

Fazendo uma secção que passa pelo centro da esfera e é perpendicular à primeira secção, obtém-se a figura abaixo:



O segmento $\overline{BD}$ representa o plano que secciona a esfera.

Perceba que aplicando Pitágoras no triângulo ABC, obtemos que $\overline{AB} = 20\ cm$.

Logo,

$$R = 20\ cm$$

Gabarito: "a".

---

92. (EEAR/2001)

Um cilindro circular reto tem o volume igual ao de um cubo de aresta a e a área lateral igual à área total do cubo. O raio e a altura desse cilindro medem, respectivamente:

a) $\frac{a}{2}$ **e** $3\pi a$

b) $\frac{a}{3}$ **e** $\frac{9a}{\pi}$

c) $2a$ **e** $3\pi a$

d) $3a$ **e** $\frac{9a}{\pi}$

Comentários

Obteremos duas equações que representam as informações dadas no enunciado.

A primeira vem das equações de volume:

$$V_{cil} = V_{cub}$$

$$\pi R^2 H = a^3 \quad (eq.1)$$

A segunda vem das equações de área:

$$S_{cil} = S_{cubo}$$

$$2\pi RH = 6a^2 \quad (eq.2)$$

Da $eq.2$ na $eq.1$ obtemos:

$$\pi R(RH) = a^3$$

$$\pi R\left(\frac{3a^2}{\pi}\right) = a^3$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{a}{3} \quad (eq.3)$$

Da $eq.3$ na $eq.2$ obtemos:

$$2\pi\left(\frac{a}{3}\right)H = 6a^2$$

$$H = \frac{9a}{\pi}$$

Gabarito: "b".

---

93. (EEAR/2001)

Um plano secciona uma esfera, determinando um círculo de raio igual à distância do plano ao centro da esfera. Sendo $36\pi\ cm^2$ área do círculo, o volume da esfera, em cm^3, é

a) $228\sqrt{2}\pi$

b) $576\sqrt{2}\pi$

c) 288π

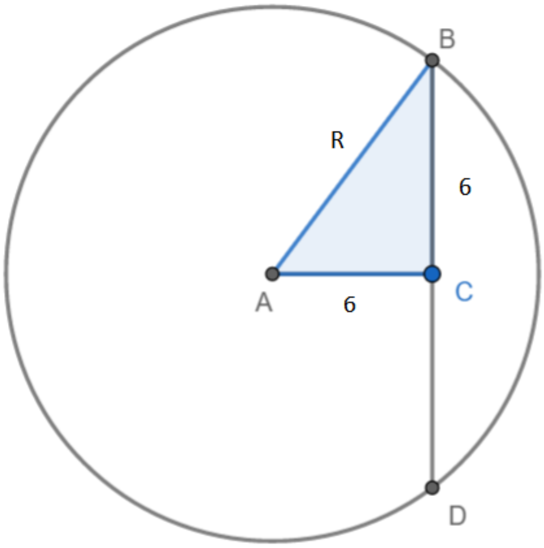
d) 576π

Comentários

Primeiramente, determinaremos o raio do círculo:

$$\pi r^2 = 36\pi \quad \Rightarrow \quad r = 6\ cm$$

Fazendo uma secção que passa pelo centro da esfera e é perpendicular à primeira secção, obtém-se a figura abaixo:



O segmento $\overline{BD}$ representa o plano que secciona a esfera.

Perceba que aplicando Pitágoras no triângulo ABC, obtemos que $\overline{AB} = 6\sqrt{2}\ cm$.

Logo,

$$R = 6\sqrt{2}\ cm$$

Então o volume da esfera é dado por:

$$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(6\sqrt{2}\right)^3 = 576\sqrt{2}\pi$$

Gabarito: “b”.

---

94. (EEAR/2001)

A secção meridiana de um cilindro equilátero tem $4\sqrt{2}\ cm$ de diagonal. O volume do cilindro, em cm^3, é de:

a) 16π

b) 24π

c) 32π

d) 54π

Comentários

Primeiramente, lembremos que a secção meridiana de um cilindro equilátero forma um quadrado. Sendo assim, a diagonal de um quadrado de lado l é dada por:

$$D = l\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \quad \therefore \quad l = 4\ cm$$

O diâmetro d da base do cilindro mede $l = 4\ cm$ e a altura h do cilindro mede $l = 4\ cm$.

Então calcularemos o volume do cilindro, conforme:

$$V_{cil} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h = \frac{\pi (4)^2}{4} \cdot (4) = 16\pi\ cm^3$$

Gabarito: "a".

---

95. (ESA/2019)

Um cilindro equilátero é aquele cilindro reto que possui a altura igual ao dobro do raio da base. Sabendo que o volume é calculado da forma $\pi r^2 h$, quanto mede o volume de um cilindro equilátero que possui raio igual a π?

a) $4\pi^2$

b) 6π

c) 2π

d) $2\pi^4$

e) π^6

Comentários

Se o cilindro é equilátero:

$$h = 2r$$

$$r = \pi \Rightarrow h = 2\pi$$

Portanto, o volume é:

$$V = \pi r^2 h = \pi(\pi^2)2\pi = 2\pi^4$$

Gabarito: "d".

---

96. (ESA/2017)

A geratriz de um cone circular reto de altura 8cm é10cm, então a área da base desse cone é:

a) $64\pi\ cm^2$

b) $9\pi\ cm^2$

c) $16\pi\ cm^2$

d) $36\pi\ cm^2$

e) $25\pi\ cm^2$

Comentários

Sabemos que a geratriz de um cone é a hipotenusa dos catetos que correspondem ao raio e à altura do cone circular reto.

Portanto, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$g^2 = r^2 + h^2$$
$$10^2 = r^2 + 8^2$$
$$r^2 = 10^2 - 8^2$$
$$r^2 = 36$$
$$r = 6$$

Como o raio da base é $r = 6$, temos que a área da base é:

$$A_b = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$$

Gabarito: "d".

---

97. (ESA/2016)

Duas esferas de raios $3cm$ e $\sqrt[3]{51}cm$ fundem-se para formar uma esfera maior. Qual é o raio da nova esfera?

a) $\sqrt[3]{78}$

b) $\sqrt[3]{36}$

c) $\sqrt[3]{68}$

d) $\sqrt[3]{104}$

e) $\sqrt[3]{26}$

Comentários

Temos que na fusão das esferas a única propriedade que se mantem é o volume das mesmas, portanto, temos a relação:

$$V_1 + V_2 = V_{1+2}$$

Sabemos que o volume de uma esfera é:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

Logo:

$$\cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot 3^3 + \cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot \left(\sqrt[3]{51}\right)^3 = \cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot r^3$$
$$3^3 + 51 = r^3$$
$$r^3 = 78$$
$$r = \sqrt[3]{78}$$

Gabarito: "a".

---

98. (ESA/2015)

Em uma pirâmide reta de base quadrada, de $4m$ de altura, uma aresta da base mede 6m. A área total dessa pirâmide, em m^2, é

a) 144

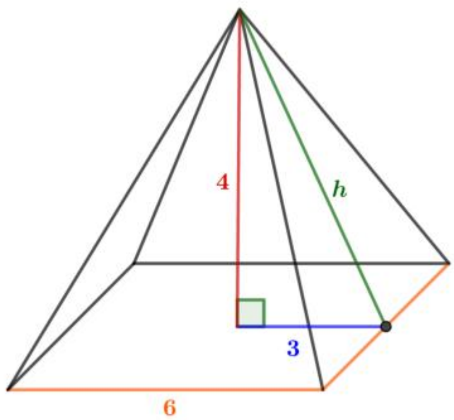
b) 84

c) 48

d) 72

e) 96

Comentários



Sabemos que a base quadrada de aresta de $6\ m$ tem a área de:

$$A_b = 6 \cdot 6 = 36$$

Do triângulo retângulo da figura, temos:

$$h^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow h = 5$$

Assim, as laterais triangulares da pirâmide têm área de:

$$A_l = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Logo, a área total da pirâmide é:

$$A_t = A_b + 4 \cdot A_l$$
$$A_t = 36 + 4 \cdot 15 = 36 + 60$$
$$A_t = 96$$

Gabarito: "e".

99. (ESA/2014)

Dobrando o raio da base de um cone e reduzindo sua altura à metade, seu volume:

a) $\boldsymbol{dobra}$

b) $\boldsymbol{Quadriplica}$

c) $\boldsymbol{n\tilde{a}o\ se\ altera}$

d) $\boldsymbol{reduz - se\ \grave{a}\ metade\ do\ volume\ original.}$

e)$\boldsymbol{reduz - se\ a\ um\ quarto\ do\ volume\ original.}$

Comentários

Sabemos que o volume de um cone é obtido pela seguinte equação:

$$V_c = \frac{\pi \cdot r_b^2 \cdot h}{3}$$

Portanto, temos que se dobramos o raio da base $r_b' = 2r_b$ e reduzimos a altura pela metade $h' = \frac{h}{2}$, obtemos:

$$V_c' = \frac{\pi \cdot {r_b'}^2 \cdot h'}{3}$$
$$V_c' = \frac{\pi \cdot (2r_b)^2 \cdot \left(\frac{h}{2}\right)}{3}$$
$$V_c' = \frac{2\,\pi \cdot r_b^2 \cdot h}{3}$$
$$V_c' = 2\,V_c$$

Logo, o volume duplica.

Gabarito: "a".

---

100. (ESA/2012)

Duas esferas de aço de raio 4cm e $\sqrt[3]{61}\ cm$ fundem-se para formar uma esfera maior. Considerando que não houve perda de material das esferas durante o processo de fundição, a medida do raio da nova esfera é de:

a) $\mathbf{5}\ \boldsymbol{cm}$

b) $\mathbf{5,5}\ \boldsymbol{cm}$

c) $\mathbf{4,5}\ \boldsymbol{cm}$

d) $\mathbf{6}\ \boldsymbol{cm}$

e) $\mathbf{7}\ \boldsymbol{cm}$

Comentários

Temos que na fusão das esferas a única propriedade que se mantém é o volume das mesmas, portanto, temos a relação:

$$V_1 + V_2 = V_{1+2}$$

Sabemos que o volume de uma esfera é:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

Logo:

$$\cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot 4^3 + \cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot \left(\sqrt[3]{61}\right)^3 = \cancel{\frac{4}{3}\pi} \cdot r^3$$
$$4^3 + 61 = r^3$$
$$r^3 = 125$$
$$r = \sqrt[3]{125}$$
$$r = 5$$

Gabarito: "a".

---

101. (ESA/2012)

Dobrando-se a altura de um cilindro circular reto e triplicando o raio de sua base, pode-se afirmar que seu volume fica multiplicado por:

a) 6

b) 9

c) 12

d) 18

e)36

Comentários

Sabemos que o volume de um cilindro é obtido pela seguinte equação:

$$V_c = \pi \cdot r_b^2 \cdot h$$

Portanto, temos que se triplicamos o raio da base $r_b' = 3r_b$ e dobramos a altura $h' = 2h$, obtemos então:

$$V_c' = \pi \cdot {r_b'}^2 \cdot h'$$
$$V_c' = \pi \cdot (3r_b)^2 \cdot (2h)$$
$$V_c' = 18\,\pi \cdot r_b^2 \cdot h$$
$$V_c' = 18\,V_c$$

Logo, o volume duplica.

Gabarito: “d”.

---

102. (ESA/2011)

Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone invertido. Esse tanque está completamente cheio com$8dm^3$ de água e $56dm^3$ de petróleo. Petróleo e água não se misturam, ficando o petróleo na parte superior do tanque e a água na parte inferior. Sabendo que o tanque tem12m de profundidade, a altura da camada de petróleo é:

a) $10m$

b) $9m$

c) $8m$

d) $7m$

e) $6m$

Comentários

Como o cone é invertido e a água fica na parte inferior e também por estar trabalhando com quantidades volumétricas, temos a seguinte proporção, sendo x altura de água:

$$\frac{8}{8+56} = \left(\frac{x}{12}\right)^3$$
$$\sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \frac{x}{12}$$
$$x = \frac{12}{\sqrt[3]{8}}$$
$$x = 6$$

Logo, a altura da coluna de petróleo é $12 - 6 = 6$.

Gabarito: “e”.

---

103. (ESA/2010)

Um cone reto, de altura H e área da base B, é seccionado por um plano paralelo à base. Consequentemente, um novo cone com altura$\frac{H}{3}$ é formado. Qual a razão entre os volumes do maior e o do menor cone, o de altura H e o de altura$\frac{H}{3}$?

a) 3

b) 6

c) 9

d) 18

e) 27

Comentários

Sejam V_t e V_1 os volumes dos cones de altura H e $H/3$, respectivamente.

$$\frac{V_t}{V_1} = \left(\frac{H}{\frac{H}{3}}\right)^3$$

$$V_1 = V_t \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$V_1 = \frac{V_t}{27}$$

Gabarito: "e".

---

104. (EsPCEx/2017)

A angioplastia é um procedimento médico caracterizado pela inserção de um cateter em uma veia ou artéria com o enchimento de um pequeno balão esférico localizado na ponta desse cateter. Considerando que, num procedimento de angioplastia, o raio inicial do balão seja desprezível e aumente a uma taxa constante de $0,5mm/s$ até que o volume seja igual a $500\ mm^3$, então o tempo, em segundos, que o balão leva para atingir esse volume é

a) 10

b) $10\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$

c) $10\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$

d) $10\sqrt[3]{\pi}$

e) $10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$

Comentários

A função que representa a variação do raio em função do tempo é dada por:

$$r(t) = 0{,}5 \cdot t$$

A função que representa o volume em função do raio é dada por:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad V(t) = \frac{4}{3}\pi(0{,}5t)^3 = \frac{1}{6}\pi t^3$$

Queremos t tal que $V(t) = 500$. Então

$$500 = \frac{1}{6}\pi t^3 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 500}{\pi}} = 10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$$

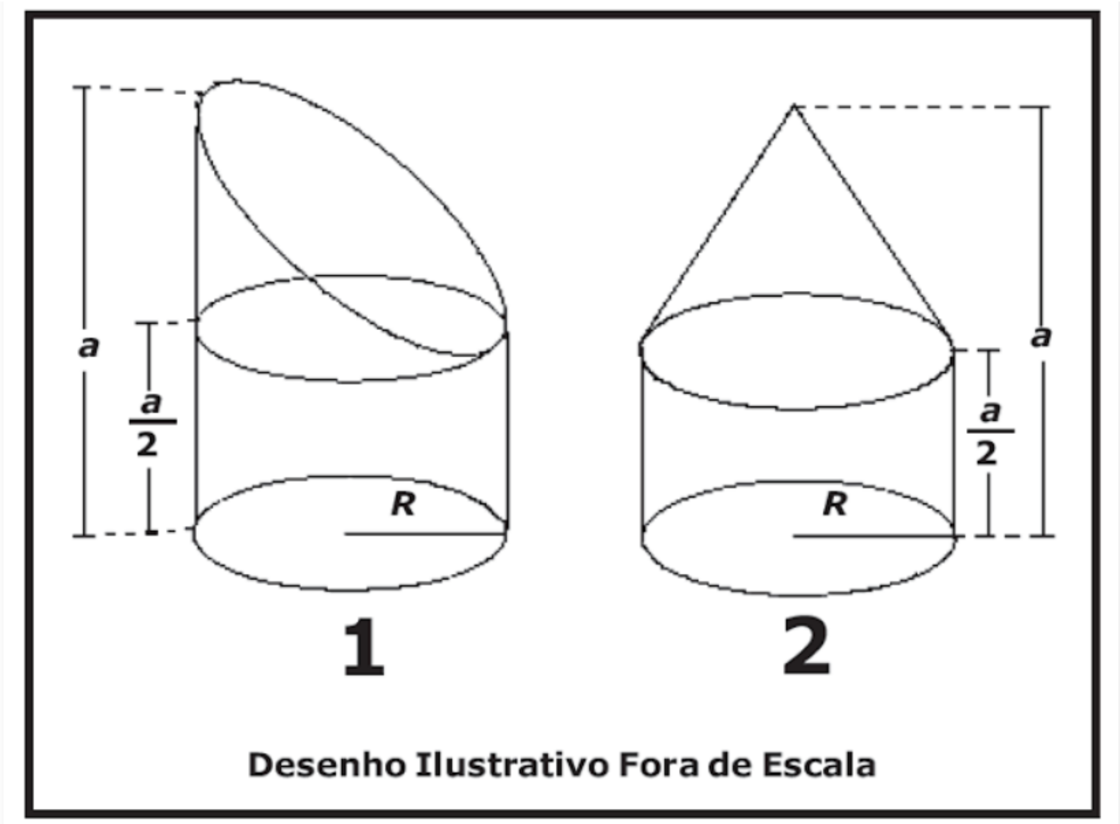
$$t = 10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\ s$$

Gabarito: “e”.

---

105. (EsPCEx/2017)

O valor da altura de um cilindro reto de raio R, cujo volume é a soma dos volumes dos sólidos 1 e 2 é



a) $\frac{13}{12}a$

b) $\frac{7}{6}a$

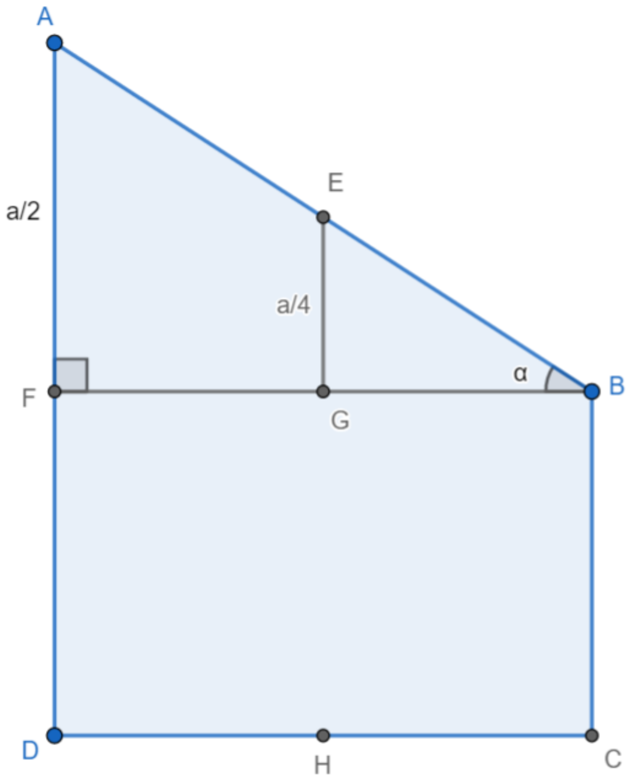
c) $\frac{5}{4}a$

d) $\frac{4}{3}a$

e) $\frac{17}{12}a$

Comentários

Fazendo a seção meridiana do sólido 1, obtemos:



Sendo o ponto E o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, percebemos que a semelhança dos triângulos ABC e EBG permite-nos concluir que $\overline{EG}$ mede $\frac{a}{4}$. Sendo assim a altura do ponto E em relação ao segmento $\overline{CD}$ é dada por:

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{4}=\frac{3a}{4}$$

O volume do cilindro é definido com a altura sendo a distância entre o centro de suas bases. Então o comprimento do segmento $\overline{EH}$ representa a altura do cilindro, sendo $\overline{EH}=\frac{3a}{4}$.

$$V_1=B\cdot h=\pi R^2\cdot\frac{3a}{4}=\frac{3aR^2\pi}{4}$$

O solido 2 pode ser dividido em um cilindro de raio R e altura $\frac{a}{2}$ e um cone de raio R e altura $\frac{a}{2}$. Sendo assim:

$$V_2=\pi R^2\cdot\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{2aR^2\pi}{3}$$

Então, sendo $V_1+V_2=V_3=\pi R^2h$, temos que:

$$V_1+V_2=\frac{3aR^2\pi}{4}+\frac{2aR^2\pi}{3}=\frac{17aR^2\pi}{12}=\pi R^2h$$

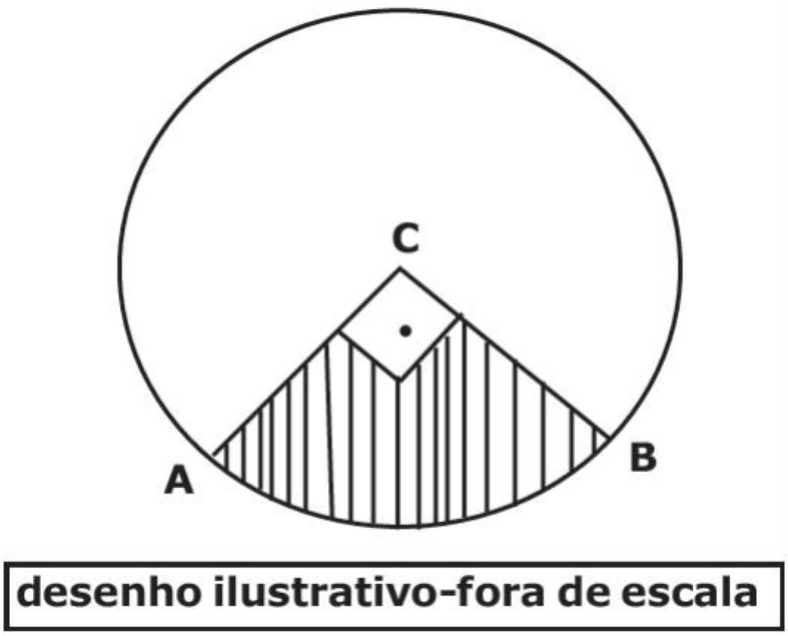
$$\Rightarrow \quad h = \frac{17a}{12}$$

Gabarito: "e".

---

106. (EsPCEx/2016)

Corta-se de uma circunferência de raio 4 cm, um setor circular de ângulo $\frac{\pi}{2}\ rad$ (ver desenho ilustrativo), onde o ponto C é o centro da circunferência. Um cone circular reto é construído a partir desse setor circular ao se juntar os raios $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$. O volume desse cone, em cm^3, é igual a:



a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

b) $\frac{\sqrt{3}}{5}\pi$

c) $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$

d) $\frac{\sqrt{15}}{5}\pi$

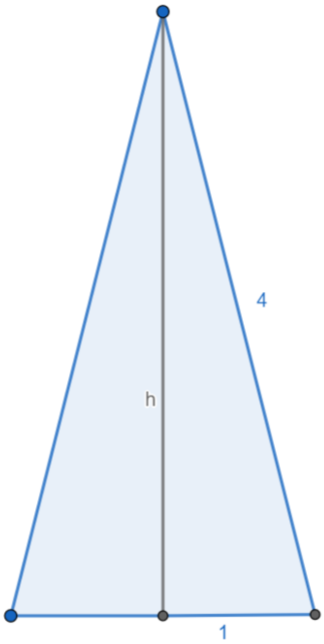
e) $\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$

Comentários

No cone formado, o raio da circunferência se tornará a geratriz do novo cone e o arco definido por AB será o perímetro da base. Logo:

$$\frac{\pi}{2}R = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

O raio do cone mede 1 cm e a geratriz do cone mede 4 cm, conforme a figura ilustra:



Aplicando Pitágoras, descobrimos que $h = \sqrt{4^2 - (1)^2} = \sqrt{15}$

Portanto o volume do novo cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi(1)^2 \cdot \left(\sqrt{15}\right) = \frac{\sqrt{15}}{3}\pi$$

Gabarito: "c".

---

107. (EsPCEx/2015)

Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida R, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede

a) $\frac{2}{3}R$

b) $\frac{3}{4}R$

c) $\frac{4}{9}R$

d) $\frac{1}{3}R$

e) $\frac{9}{16}R$

Comentários

O volume da esfera é responsável pelo ΔV causado no nível da água do cilindro

Volume inicial: $V_i = \pi R^2 h_i$

Volume final: $V_f = \pi R^2 h_f$

Variação do volume: $\Delta V = V_f - V_i = \pi R^2 (h_f - h_i) = \pi R^2 \cdot \Delta h = \pi R^2 \cdot \left(\frac{9}{16} R\right)$

Mas, o volume da esfera é igual ao volume do ΔV, então:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{9}{16}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{27}{64}R^3} = \frac{3}{4}R$$

$$r = \frac{3}{4}R$$

Gabarito: "b".

---

108. (EsPCEx/2014)

Um cone de revolução tem altura $4\ cm$ e está circunscrito a uma esfera de raio $1\ cm$. O volume desse cone (em cm^3) é igual a

a) $\frac{1}{3}\pi$

b) $\frac{2}{3}\pi$

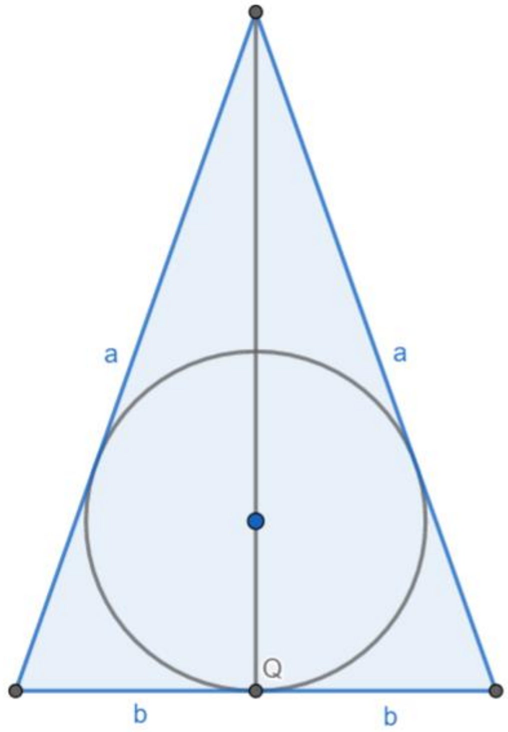
c) $\frac{4}{3}\pi$

d) $\frac{8}{3}\pi$

e) 3π

Comentários

Efetuando a secção meridiana do cone, obtemos:



Do enunciado sabemos que a altura do cone mede $4\ cm$, então: $4 = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$a^2 - b^2 = 16 \qquad (eq.1)$$

Mas também possuímos a medida do raio da circunferência inscrita, que pode ser obtido a partir da área S e do semi-perímetro p do triângulo.

$$r = \frac{S}{p}$$

Sendo $S = \frac{1}{2} \cdot B \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (2b) \cdot (4) = 4b$, e $p = \frac{1}{2} \cdot (a + a + b + b) = a + b$

$$\Rightarrow \ r = \frac{4b}{a+b} = 1 \ \Rightarrow \ a + b = 4b \ \Rightarrow \ a = 3b$$

Substituindo em $eq.1$

$$(3b)^2 - b^2 = 16 \ \Rightarrow \ 8b^2 = 16 \Rightarrow \ b^2 = 2$$

O volume do cone pode então ser calculado, segundo:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi b^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi(2) \cdot (4) = \frac{8}{3}\pi$$

Gabarito: “d”.

---

109. (EsPCEx/2013)

Considere que uma laranja tem a forma de uma esfera de raio $4\ cm$, composta de 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede

a) $\frac{4^3\pi}{3}\ cm^2$

b) $\frac{4^3\pi}{9}\ cm^2$

c) $\frac{4^2\pi}{3}\ cm^2$

d) $\frac{4^2\pi}{9}\ cm^2$

e) $4^3\pi\ cm^2$

Comentários

A superfície lateral de cada gomo será composta de 3 regiões. Duas regiões laterais -simétricas entre si - terão cada uma delas área correspondente a uma semicircunferência de raio $4\ cm$. A terceira região corresponderá a $\frac{1}{12}$ da área superficial de uma esfera de raio $4\ cm$.

Sendo assim:

$$S_t = 2 \cdot S_1 + \frac{1}{12} \cdot S_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \pi r^2\right) + \frac{1}{12} \cdot (4\pi r^2) = \frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi(4)^2 = \frac{64}{3}\pi$$

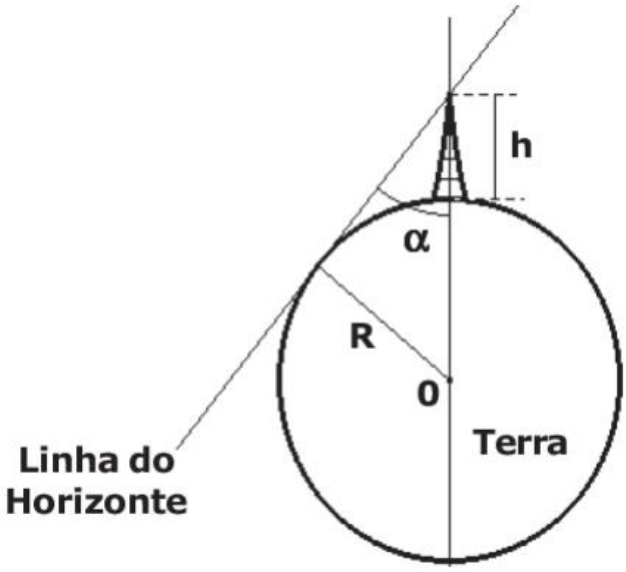
$$S_t = \frac{4^3}{3}\pi\ cm^2$$

Gabarito: "a".

---

110. (EsPCEx/2012)

Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura conhecida, o ângulo sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica, conforme mostra a figura. Segundo esse raciocínio, o raio terrestre em função do ângulo α é dado por:



a) $R = \frac{sen(\alpha h)}{1 - sen\,\alpha}$

b) $R = \frac{h\,sen\,\alpha}{1 - sen\,\alpha}$

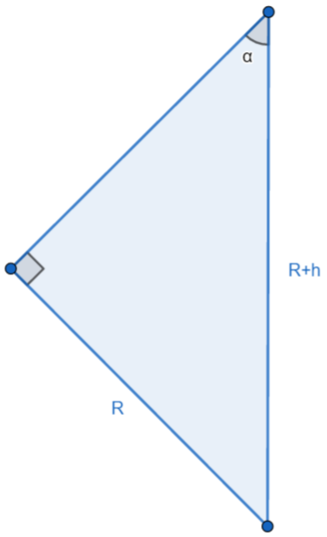
c) $R = \frac{h\,sen\,\alpha}{sen\,\alpha - 1}$

d) $R = \frac{1 - sen\,\alpha}{h\,sen\,\alpha}$

e) $R = \frac{1 + sen\,\alpha}{h\,sen\,\alpha}$

Comentários

Primeiramente, o ângulo de uma reta tangente à circunferência mede $90°$, sendo assim temos o seguinte triângulo:



Aplicando a definição de seno no ângulo α, obtemos:

$$sen\ \alpha = \frac{R}{R+h} \quad \Rightarrow \quad sen\ \alpha \cdot (R+h) = R \quad \Rightarrow \quad h \cdot sen\ \alpha = R - R \cdot sen\ \alpha = R \cdot (1 - sen\ \alpha)$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{h \cdot sen\ \alpha}{1 - sen\ \alpha}$$

Gabarito: "b".

---

111. (EsPCEx/2012)

Um recipiente em forma de cone circular reto, com raio da base R e altura h, está completamente cheio com água e óleo. Sabe-se que a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone. O recipiente dispõe de uma torneira que permite escoar os líquidos de seu interior, conforme indicado na figura.

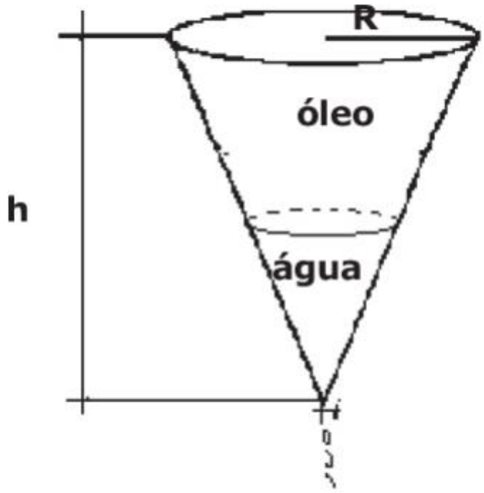


Figura fora de escala

Se essa torneira for aberta, exatamente até o instante em que toda água e nenhum óleo escoar, a altura do nível do óleo, medida a partir do vértice será

a) $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$

b) $\frac{\sqrt[3]{7}}{3}h$

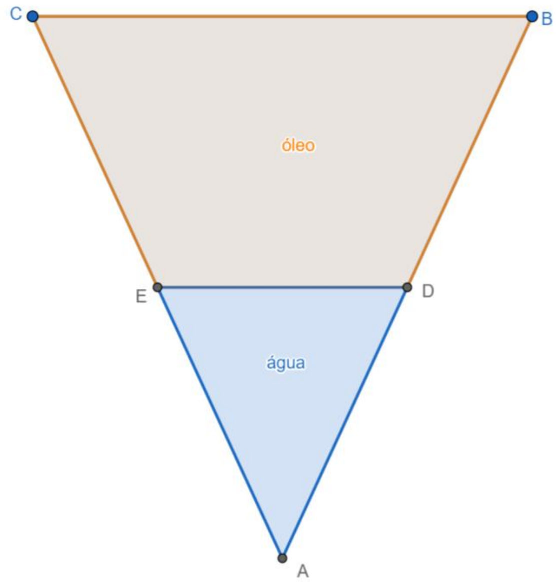
c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}h$

d) $\frac{\sqrt[3]{23}}{2}h$

e) $\frac{\sqrt[3]{23}}{3}h$

Comentários

Fazendo a seção meridiana do cone, obtemos:



Segundo a semelhança entre os triângulos ABC e ADE obtemos que a razão das medidas é de $2:1$. Sendo assim, a razão dos volumes será de $2^3:1^3$, sendo de $8:1$. Logo:

$$\frac{V_{água+óleo}}{V_{água}} = \frac{8}{1} \quad \Rightarrow \quad V_{água+óleo} = 8 \cdot V_{água} = V_{óleo} + V_{água} \quad \Rightarrow \quad V_{óleo} = 7 \cdot V_{água}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_{óleo}}{V_{água}} = \frac{7}{1}$$

Após a evasão da água haverá uma nova semelhança de triângulos somente com o óleo no cone. Comparando a seção meridiana do cone preenchido somente com óleo e o cone de água da situação inicial, podemos obter uma nova semelhança de triângulos em que a razão entre as medidas é dada por: $\sqrt[3]{7}:\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{7}:1$

Portanto a altura é calculada:

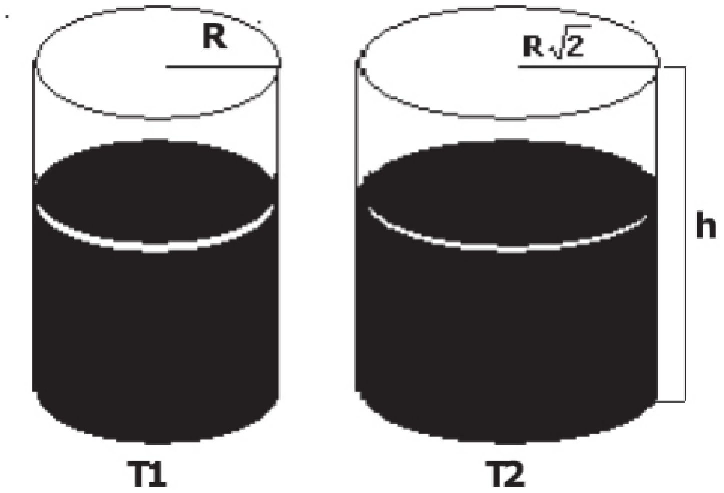
$$\frac{h_{óleo}}{h_{água}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{1} = \frac{h_{óleo}}{\left(\frac{h}{2}\right)} = \sqrt[3]{7} \quad \Rightarrow h_{óleo} = \frac{\sqrt[3]{7}}{2} \cdot h$$

Gabarito: “a”.

---

112. (EsPCEx/2011)

A figura abaixo representa dois tanques cilíndricos, $T1$ e $T2$, ambos com altura h, e cujos raios das bases medem R e $R\sqrt{2}$, respectivamente. Esses tanques são usados para armazenar combustível e a quantidade de combustível existente em cada um deles é tal que seu nível corresponde a $\frac{2}{3}$ da altura.



O tanque $T1$ contém gasolina pura e o tanque $T2$ contém uma mistura etanol-gasolina, com 25% de etanol.

Deseja-se transferir gasolina pura do tanque $T1$ para $T2$ até que o teor de etanol na mistura em $T2$ caia para 20%. Nessas condições, ao final da operação, a diferença entre a altura dos níveis de $T1$ e $T2$ será

a) $\frac{1}{2}h$

b) $\frac{1}{3}h$

c) $\frac{1}{4}h$

d) $\frac{1}{5}h$

e) $\frac{1}{6}h$

Comentários

Iremos trabalhar com os volumes dos tanques:

$$V_1 = \pi R^2 \cdot \frac{2}{3}h \quad e \quad V_2 = \pi\left(R\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}h = 2V_1$$

Volume de gasolina V_g e volume de álcool V_a em T_2:

$$V_a + V_g = V_2 \; ; \; \frac{V_a}{V_2} = 0,25 \;\; \Rightarrow \; V_a = \frac{V_2}{4} \quad \therefore \quad V_g = \frac{3}{4}V_2$$

Queremos transferir V_t de gasolina para T_2 a fim de que haja 20% de etanol, logo:

$$\frac{V_a}{V_2 + V_t} = 0,20 \quad \Rightarrow \quad V_a = \frac{V_2}{4} = \frac{V_2 + V_t}{5} \quad \therefore \quad V_t = \frac{1}{4}V_2 = \frac{1}{2}V_1$$

Logo, o novo volume de T_1 será

$$V_1 - V_t = V_1 - \frac{1}{2}V_1 = \frac{1}{2}V_1 = \frac{1}{2}\left(\pi R^2 \cdot \frac{2}{3}h\right) = \pi R^2 \cdot \frac{1}{3}h$$

Logo T_1 terá altura final medindo $\frac{1}{3}h$

E T_2 terá novo volume

$$V_2 + V_t = V_2 + \frac{1}{4}V_1 = \frac{5}{4}V_2 = \frac{5}{4}\left(\pi\left(R\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}h\right) = \pi\left(R\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{6}h$$

Logo T_2 terá altura final medindo $\frac{5}{6}h$

Portanto:

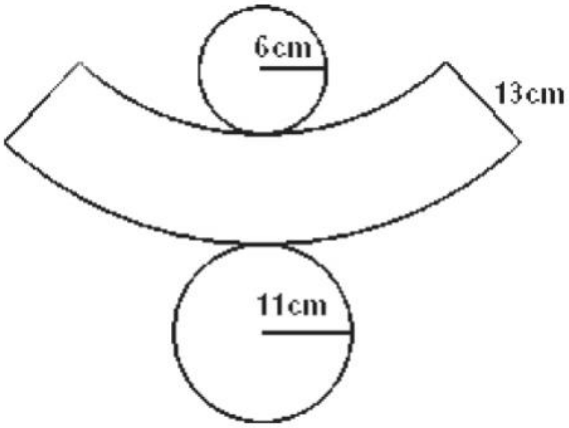
$$\Delta h = \frac{5}{6}h - \frac{1}{3}h = \frac{3}{6}h = \frac{1}{2}h$$

Gabarito: "a".

---

113. (EsPCEx/2010)

A figura abaixo representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz.



Desenho fora de escala

A medida da altura desse tronco de cone é

a) 13 cm

b) 12 cm

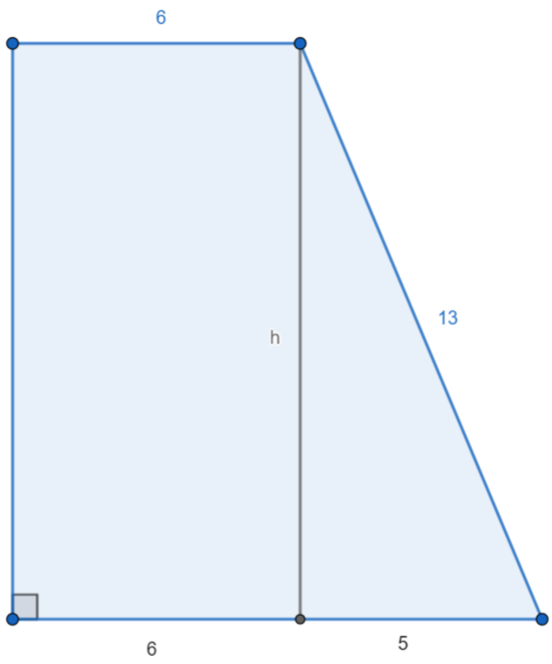
c) 11 cm

d) 10 cm

e) 9 cm

Comentários

Após montar o tronco de cone e fazer a seção meridiana do mesmo obtemos o seguinte:



Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo formado, obtemos:

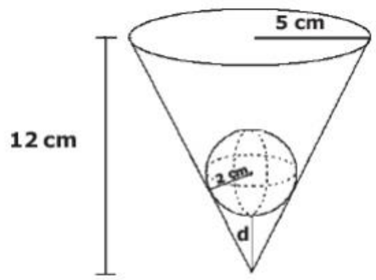
$$h = \sqrt{(13)^2 - (5)^2} = 12\ cm$$

Gabarito: "b".

---

114. (EsPCEx/2008)

Uma esfera de $2\ cm$ de raio é colocada no interior de um vaso cônico, conforme a figura a seguir.



Desenho Fora de Escala

O vaso tem $12\ cm$ de altura e sua abertura é uma circunferência com $5\ cm$ de raio. Nessas condições, a menor distância (d) entre a esfera e o vértice do cone é

a) $3,0\ cm$

b) $3,2\ cm$

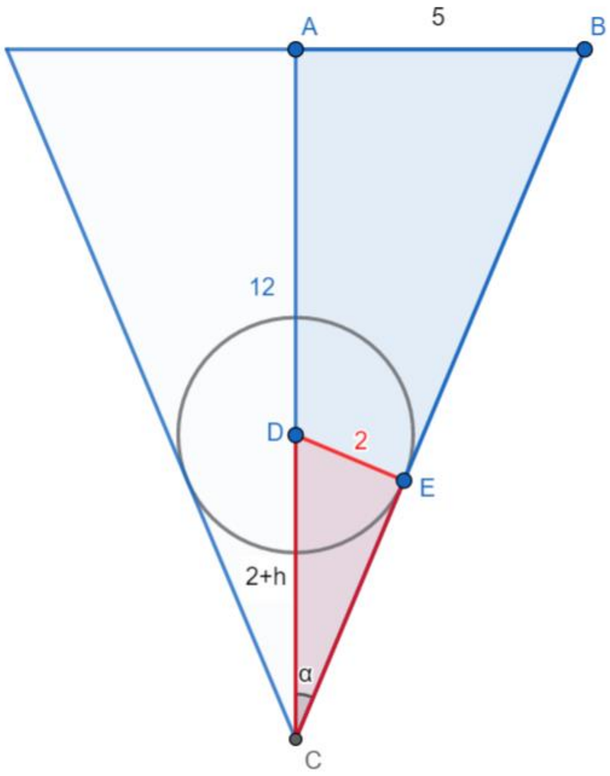
c) $3,4\ cm$

d) $3,6\ cm$

e) $3,8\ cm$

Comentários

Fazendo a seção meridiana e observando as relações trigonométricas, obtemos:



Perceba que aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC obtemos que $\overline{BC} = 13\ cm$.

Utilizando a semelhança entre os triângulos retângulo ABC e CDE

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{2}{2+h}$$

$$\Rightarrow \quad 10 + 5h = 26$$

$$\Rightarrow \quad h = 3,2\ cm$$

Gabarito: "b".

---

115. (EsPCEx/2006)

Um tonel, em forma de cilindro circular reto, tem $60\ cm$ de altura. Uma miniatura desse tonel tem $20\ cm$ de altura e raio diretamente proporcional à altura. Se a miniatura tem $100\ ml$ de volume, então o volume do tonel original é de

a) $30\ l$

b) $27\ l$

c) $2,7\ l$

d) $3\ l$

e) $300\ ml$

Comentários

Aplicando as devidas proporções nas medidas dos cilindros:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{H} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{20} = \frac{R}{60} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{r} = 3$$

Segundo o enunciado, os cilindros possuem proporção linear nas medidas, sendo assim, haverá uma proporção cúbica nos volumes. Tal que:

$$\frac{V}{v} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = 3^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad V = 27 \cdot v$$

$$V = 27 \cdot 100 = 2700\ ml = 2,7\ l$$

Gabarito: "c".

---

116. (EsPCEx/2004)

Se a área lateral e a área total de um cilindro reto são $2\pi A$ e $2\pi S$ respectivamente, então, o volume deste sólido é igual a:

a) $\pi A\sqrt{S - A}$

b) $\pi S\sqrt{S - A}$

c) $\pi A\sqrt{S + A}$

d) $\pi S\sqrt{S + A}$

e) $\pi\sqrt{S + A}$

Comentários

A área lateral de um cilindro reto é dada por:

$$A_l = 2\pi Rh = 2\pi A \quad \therefore \quad A = hR \quad \boldsymbol{eq.1}$$

A área total de um cilindro reto é dada por:

$$A_t = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(R+h) = 2\pi S \quad \therefore \quad S = R^2 + hR \quad \boldsymbol{eq.2}$$

De $\boldsymbol{eq.1}$ em $\boldsymbol{eq.2}$, obtemos:

$$S = R^2 + A \quad \Rightarrow \quad R^2 = S - A \quad \boldsymbol{eq.3}$$

De $\boldsymbol{eq.3}$ em $\boldsymbol{eq.2}$, obtemos:

$$A = h \cdot \sqrt{S-A} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{A}{\sqrt{S-A}}$$

Portando o volume do cilindro é dado por:

$$V = \pi R^2 h = \pi(S-A)\left(\frac{A}{\sqrt{S-A}}\right) = \pi A\sqrt{S-A}$$

Gabarito: "a".

---

117. (EsPCEx/2003)

Uma lata cilíndrica está completamente cheia de um líquido que deve ser distribuído totalmente em potes iguais entre si, também cilíndricos. A altura de cada pote é igual a $\frac{2}{5}$ da altura da lata e o diâmetro de sua base é $\frac{1}{3}$ do diâmetro da base da lata. Para tal distribuição, a quantidade mínima de potes a serem utilizados é

a) 22

b) 23

c) 24

d) 25

e) 26

Comentários

Seja n a quantidade de cilindros, V o volume da lata e V_c o volume dos cilindros

$$V = n \cdot V_c$$

$$V = \frac{\pi D^2}{4} \cdot H = n \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot h = n \cdot \frac{\pi\left(\frac{1}{3}D\right)^2}{4} \cdot \left(\frac{2}{5}h\right) = \frac{2}{45}n \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot H = \frac{2}{45}n \cdot V$$

$$V = \frac{2}{45}n \cdot V \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{45}n = 1 \quad \therefore n = 22{,}5$$

Mas n deve ser um número natural, logo, a menor quantidade de potes que comporta o líquido deve ser 23 potes.

Gabarito: “b”.

---

118. (EsPCEx/2002)

Dois recipientes, um em forma de cilindro e o outro, de paralelepípedo, cujas bases estão num mesmo plano, são unidos por uma tubulação com uma válvula no meio. Inicialmente, a válvula está fechada, o paralelepípedo está vazio e o cilindro é ocupado, em parte, por um líquido cujo volume é de 2000π litros, atingindo uma altura de 2 metros. A válvula é aberta e, após certo tempo, verifica-se que os dois recipientes têm o mesmo nível do líquido. Considerando desprezível o volume da tubulação que une os dois reservatórios e sabendo que a área da base do paralelepípedo é de $1,5\pi\ m^2$, o volume final, em litros, de líquido no paralelepípedo é

a) 600π

b) 800π

c) 1000π

d) 1200π

e) 1500π

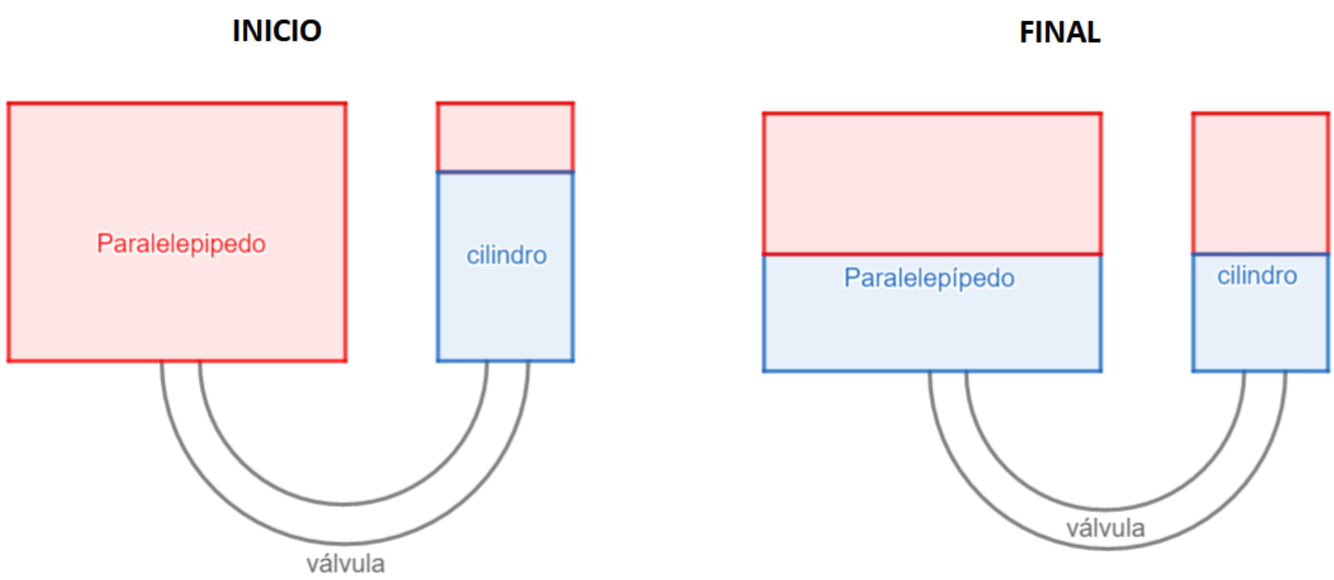
Comentários

Primeiramente vamos uniformizar as unidades transformando os volumes em litros para m^3.

$$V_{cil}^{ini} = 2000\pi\ l = 2\pi\ m^3$$

Sabemos que $V_{cil} = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot 2 = 2\pi \quad \Rightarrow \quad R = 1\ m$ sendo R o raio do cilindro.

Considere as figuras abaixo para representar as situações do problema:



A altura final do líquido é igual em ambos os recipientes, sendo assim:

$$V_{cil}^{ini} = V_{cil}^{fim} + V_{paral}^{fim} \quad \Rightarrow \quad 2\pi = \pi R^2 \cdot h + A_{base} \cdot h =$$

$$= h \cdot (\pi(1)^2 + 1{,}5\pi) = 2{,}5\pi \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2}{2{,}5} = \frac{4}{5} = 0{,}8\ m$$

A altura final do líquido é de $h = 0{,}8\ m$, sendo assim:

$$V_{paral}^{fim} = A_{base} \cdot h = 1{,}5\pi \cdot 0{,}8 = 1{,}2\pi\ m^3 = 1200\pi\ litros$$

Gabarito: “d”.

---

119. (EsPCEx/2001)

Denomina-se rolamento a um dispositivo mecânico constituído por dois anéis em forma de casca cilíndrica e um conjunto de esferas. Desejando obter o volume de uma das esferas de aço que compõe o rolamento dado na $figura\ 1$, sem desmontá-lo, e não dispondo de todos os instrumentos necessários para executar as medições, um estudante executou os seguintes procedimentos:

a. Com os instrumentos de que dispunha, mediu o anel interno, em forma de casca cilíndrica, obtendo $3,46\ cm$ para o diâmetro interno, $4\ cm$ para o diâmetro externo e $1\ cm$ para altura;

b. Repetiu as operações para o anel externo, anotou as medidas e calculou o volume, obtendo $3,8\ cm^3$;

c. Lembrando o princípio de Arquimedes, que afirma que o volume de um objeto imerso num recipiente com líquido corresponde à variação do volume do líquido, colocou água numa proveta graduada em cm^3, conforme a $figura\ 2$, mergulhou o rolamento na água e obteve a leitura indicada na $figura\ 3$.

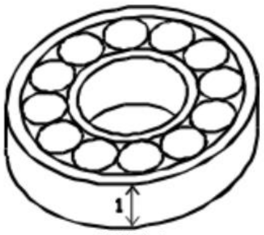


FIGURA 1

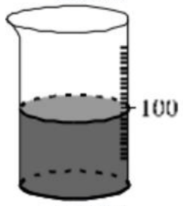


FIGURA 2

FIGURA 3

Nessas condições pode-se afirmar que o valor que mais se aproxima do volume de cada esfera, em cm^3, é (aproximações aceitas: $1,73^2 \approx 3$, $3,46^2 \approx 12$, $\pi \approx 3,1$):

a) 3,4

b) 4,6

c) 3,8

d) 4,2

e) 5,0

Comentários

Primeiramente calcularemos o volume da casca cilíndrica menor como a diferença entre dois cilindros

$$V_{c.menor} = \frac{\pi D^2}{4}h - \frac{\pi d^2}{4}h = \frac{\pi h}{4}(R^2 - r^2) = \frac{3,1 \cdot 1}{4} \cdot ((4)^2 - (3,46)^2) = 3,1\ cm^3$$

O volume que o nível do líquido variou corresponde ao volume do rolamento, sendo assim:

$$\Delta V = 157,3 - 100 = 57,3\ cm^3$$

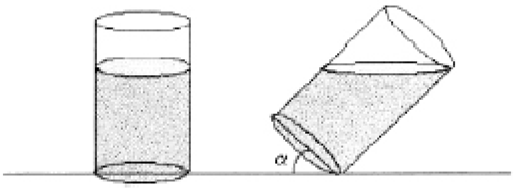
Agora, o volume do rolamento é a soma dos volumes das cascas cilíndricas e os volumes das 12 esferas

$$57,3 = 12V_{esf} + 3,8 + 3,1 \quad \Rightarrow \quad 12V_{esf} = 50,4 \quad \therefore \quad V_{esf} = 4,2\ cm^3$$

Gabarito: "d".

120. (EsPCEx/2000)

Num recipiente em forma de cilindro circular reto, com raio da base $2\ cm$ e altura $6\sqrt{3}\ cm$ (dimensões internas), há um volume de água de $16\sqrt{3}\pi\ cm^3$. O maior ângulo a que o plano da base do cilindro pode fazer com a horizontal para que a água não derrame ao se inclinar o cilindro é de, aproximadamente:



(considere: $tg\ 30° = 0,58$, $tg\ 40° = 0,84$, $tg\ 50° = 1,19$, $tg\ 60° = 1,73$ e $tg\ 70° = 2,75$)

a) $30°$

b) $40°$

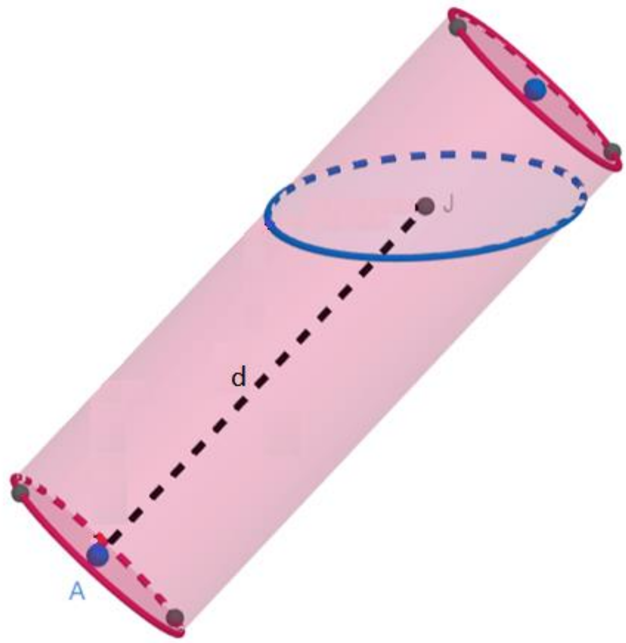
c) $50°$

d) $60°$

e) $70°$

Comentários

O volume do tronco de cilindro é baseado no raio do cilindro e no valor de altura média - que é a distância entre os centros das faces de suas bases - logo, com esta generalização, podemos obter facilmente o volume do líquido na situação inclinada, conforme:



$$V_{liq} = \pi R^2 \cdot d$$

Posto isso, façamos a seção meridiana do segundo cilindro já supondo a situação limite de derramamento.

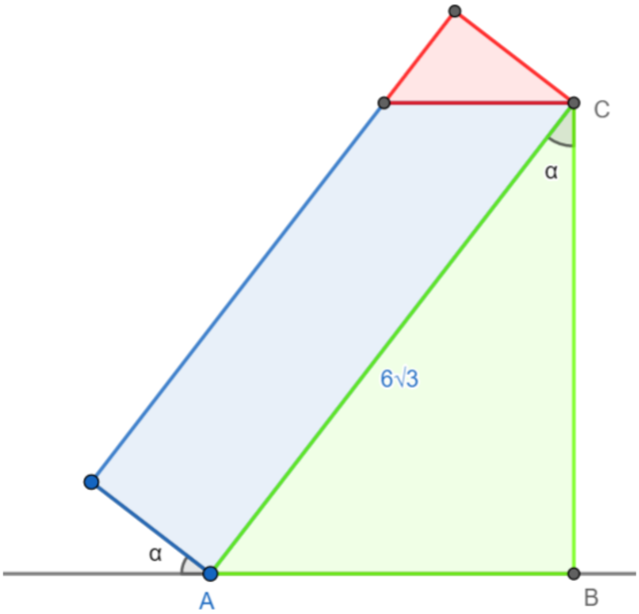


FIGURA 1

Na figura 1 depreende-se que $\overline{BC} = 6\sqrt{3} \cdot cos\alpha$

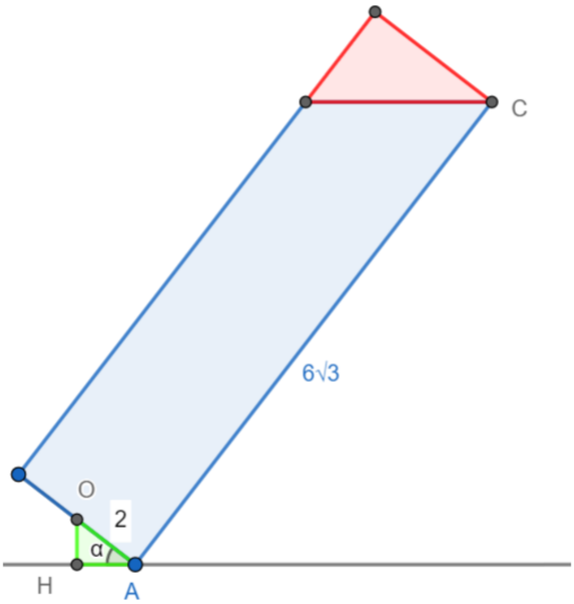


FIGURA 2

Na figura 2 depreende-se que $\overline{HO} = 2 \cdot sen\alpha$

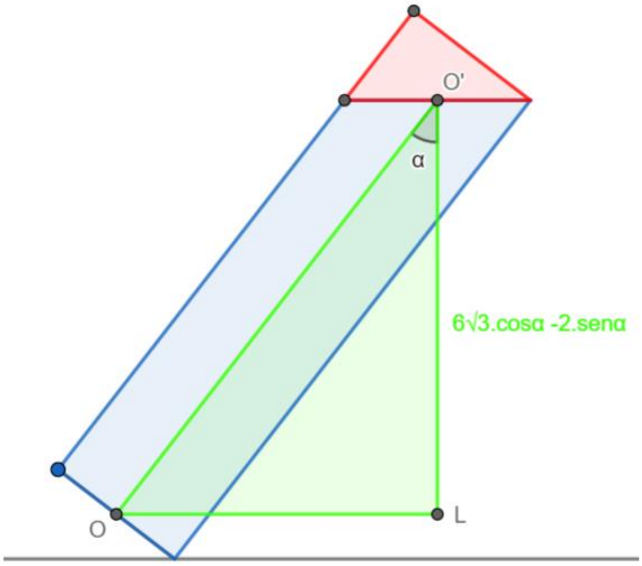


FIGURA 3

Considerando o obtido nas figuras 1 e 2, na figura 3 depreende-se que

$$\overline{O'L} = 6\sqrt{3} \cdot \cos\alpha - 2 \cdot sen\,\alpha$$

Sendo assim, temos que $\overline{O'L} = \overline{OO'} \cdot \cos\alpha$

$$\overline{OO'} \; = 6\sqrt{3} - 2 \cdot tg\,\alpha$$

O volume inicial e final do líquido no cilindro se mantém, portanto:

$$V_{ini} = V_{fim} \quad \Rightarrow \quad V_{ini} = \pi R^2 d$$

$$16\sqrt{3}\pi = \pi(2)^2 \cdot \left(6\sqrt{3} - 2 \cdot tg\,\alpha\right)$$

$$6\sqrt{3} - 2 \cdot tg\,\alpha = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad tg\,\alpha = \sqrt{3}$$

O ângulo α cuja tangente vale $\sqrt{3}$ é o ângulo de 60°.

Gabarito: “d”.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final do curso. Ao longo da lista de exercícios, você deve ter percebido que a maioria dos problemas de geometria espacial podem ser resolvidas por geometria plana. A grande dificuldade nas questões de geometria espacial é ter uma boa imaginação para conseguir imaginar os objetos descritos nos enunciados. Por meio da resolução de diversas questões, conseguimos melhorar isso.

Lembre-se! O melhor caminho para aprender Matemática é resolvendo questões! Vimos todos os temas que podem ser cobrados na prova. Agora, você está pronto para enfrentar as provas! Boa sorte e espero ver seu nome na lista de aprovados!

Quaisquer dúvidas, você pode entrar em contato conosco pelo fórum de dúvidas ou caso prefira:

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial. 7. ed. Atual, 2013. 472p.

[2] Carvalho, Paulo. Introdução à Geometria Espacial. 4 ed. SBM, 2005. 93p.

8. VERSÕES DAS AULAS

Caro aluno! Para garantir que o curso esteja atualizado, sempre que alguma mudança no conteúdo for necessária, uma nova versão da aula será disponibilizada.