Canguru Brasil 2014 – Nível J - Soluções

3 pontos

1. Em todos os anos, o concurso Canguru é realizado na terceira quinta-feira do mês de março. Qual é a possível data mais adiantada para o concurso?

(A) 14 de março (B) 15 de março (C) 20 de março (D) 21 de março (E) 22 de março

1. Alternativa B
A terceira quinta-feira ocorrerá mais cedo se o mês de março começar na quinta-feira. Logo, a segunda semana começará no dia 1 + 7 = 8 e a terceira semana começará no dia 8 + 7 = 15, dia da prova do Canguru.

2. O navio MSC Fabíola detém o recorde de ser o maior cargueiro a entrar na Baía de São Francisco. Sua capacidade é de 12 500 contêineres, que, enfileirados, cobririam uma distância de aproximadamente 75 km. Qual é o comprimento aproximado de um contêiner?

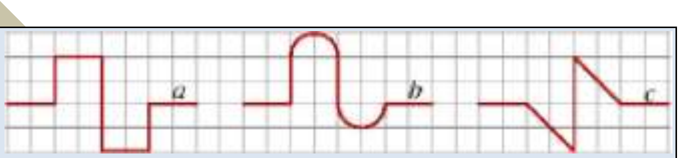
(A) 6 m (B) 16 m (C) 60 m (D) 160 m (E) 600 m

2. Alternativa A
75 km = 75 000 m, logo $\frac{75000}{12500} = 6$ m.

3. Na figura ao lado, as letras *a*, *b* e *c* representam os comprimentos dos segmentos. Qual das desigualdades a seguir é verdadeira?

(A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $b < a < c$ (D) $b < c < a$ (E) $c < b < a$

3. Alternativa E

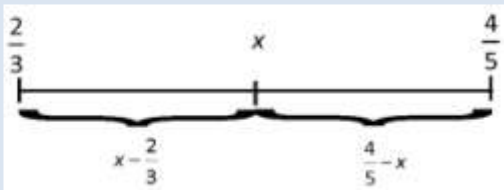


Como queremos comparar comprimentos, podemos supor que os lados dos quadradinhos têm comprimento 1, logo as semicircunferências têm raio 1 e os segmentos inclinados são diagonais de quadrados de lado 2. Assim, temos *a* = 16, $b = 8 + 2\pi \cdot 1 \cong 14{,}28$ e $c = 8 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cong 13{,}6$. Logo $c < b < a$.

4. Na reta numérica, qual é a fração que fica bem no meio entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$?

(A) $\frac{11}{15}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{6}{15}$ (E) $\frac{5}{8}$

4. Alternativa A



A distância entre dois números *a* e *b*, tais que *a* < *b*, é igual a *b* – *a*. Se *x* é o número que está entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ e à mesma distância dos dois, então

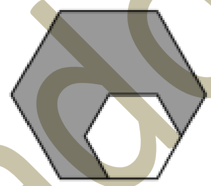
$x - \frac{2}{3} = \frac{4}{5} - x \Leftrightarrow 2x = \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{22}{15} \Leftrightarrow x = \frac{11}{15}$.

5. No número 2014, o último algarismo é maior do que a soma dos outros três algarismos. Antes, há quantos anos isto aconteceu pela última vez?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 6

5. Alternativa D
Nos anos anteriores, 2013, 2012, 2011 e 2010, o fato não ocorre. Mas em 2009 sim.
Portanto, isto aconteceu pela última vez há 2014 – 2009 = 5 anos.

6. Na figura, o lado do hexágono maior é o dobro do lado do hexágono menor, que tem 4 cm^2 de área. Qual é a área do hexágono maior, em cm^2?



(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

6. Alternativa E
Os dois hexágonos são figuras semelhantes. Se o lado do hexágono maior é o dobro do lado do menor, então a sua área é quatro vezes maior, ou seja, é igual a 4 x 4 = 16 cm^2.

7. Qual é a negação da sentença: “Todos resolveram mais do que 20 problemas.”?
(A) Ninguém resolveu mais do que 20 problemas.
(B) Alguém resolveu menos do que 21 problemas.
(C) Todos resolveram menos do que 21 problemas.
(D) Alguém resolveu exatamente 20 problemas.
(E) Alguém resolveu mais do que 20 problemas.

7. Alternativa B
A negação de “todos” é “existe algum” e a negação de “mais do que 20” é “igual ou menos do que 20”, ou ainda, “menos do que 21”, no caso de números inteiros. Portanto, a negação de “Todos resolveram mais do que 20 problemas” é “Alguém resolveu menos do que 21 problemas”.

8. No sistema de coordenadas cartesianas, foi desenhado um quadrado com uma diagonal possuindo vértices $(-1;0)$ e $(5;0)$. Qual dos pontos a seguir é um dos outros dois vértices desse quadrado?

(A) $(2;0)$ (B) $(2;3)$ (C) $(2;-6)$ (D) $(3;5)$ (E) $(3;-1)$

8. Alternativa B
A outra diagonal passa pelo ponto médio da diagonal fornecida, que é o centro do quadrado $\left(\dfrac{-1+5}{2};0\right)=(2;0)$ e é perpendicular ao eixo *Ox*. Logo, os dois outros vértices têm coordenadas $(2;y)$. Como a distância do centro do quadrado é igual a 6 – 2 = 3, concluímos que $y=3 \text{ ou } y=-3$.
Portanto, um dos vértices do quadrado é o ponto $(2;3)$.

9. Numa cidade, a razão entre o número de homens adultos e o de mulheres adultas é $2:3$ e a razão entre o número de mulheres adultas e o de crianças é $8:1$. Qual é a razão entre o número de adultos (homens e mulheres) e o de crianças?

(A) $5:1$ (B) $10:3$ (C) $13:1$ (D) $12:1$ (E) $40:3$

9. Alternativa E

Sendo *H* o número de homens adultos, *M* o número de mulheres adultas e *C* o número de crianças, temos $\frac{H}{M}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{H+M}{M}=\frac{2+3}{3}=\frac{5}{3}$ e $\frac{M}{C}=\frac{8}{1}$, logo $\frac{H+M}{M}\cdot\frac{M}{C}=\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{1}=\frac{40}{3}$, ou seja, a razão entre o número de adultos e o número de crianças é 40:3.

10. O perímetro da roda maior de uma bicicleta é 4,2 metros e o perímetro da menor é 0,9 metros. Num certo momento, as duas válvulas dos pneus estão em seu ponto mais baixo e a bicicleta caminha para a esquerda. Depois de quantos metros as duas válvulas estarão novamente em sua posição mais baixa?

(A) 4,2 (B) 6,3 (C) 12,6 (D) 25,2 (E) 37,8

10. Alternativa C

A distância percorrida pelas rodas é a mesma e é um múltiplo inteiro dos números de voltas que as rodas dão. As rodas voltarão para a mesma posição relativa novamente quando esse número for o menor possível. O mmc de 42 e 09 é 126, logo o mmc de 4,2 e 0,9 é 12,6. As rodas estarão novamente com as válvulas em sua posição mais baixa após terem percorrido 12,6 metros.

4 pontos

11. Neste ano, uma vovó, sua filha e sua neta têm 100 anos como soma de suas idades. A idade de cada uma delas é uma potência de dois. Em que ano nasceu a neta?

(A) 1998 (B) 2006 (C) 2010 (D) 2012 (E) 2013

11. Alternativa C

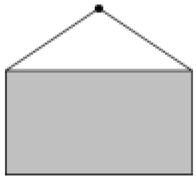
As idades são potências de 2, diferentes. Um valor razoável para a idade da avó é a potência $2^6=64$ e metade disso para a filha, ou seja, 32. Como a soma desses dois valores é 96, resta para a neta a idade de 4 anos. Note que o próximo valor maior para a idade da avó é 128 e o menor é 32, impossíveis. Logo, a neta tem 4 anos, tendo nascido em 2010.

Solução alternativa:

Todo número inteiro positivo pode ser representado de forma única como soma de potências de dois, distintas, dada pela base binária. Assim,

$100_{10}=1100100_2=1000000_2+100000_2+100_2=2^6+2^5+2^2$.

12. Paulo pendurou alguns quadros na parede. Para cada quadro ele usou um fio de dois metros, preso pelas pontas nos cantos superiores e um prego fixado a dois metros e meio do chão. Entre os quadros de dimensões (comprimento x altura) dadas em centímetros, a seguir, qual está mais próximo do chão?

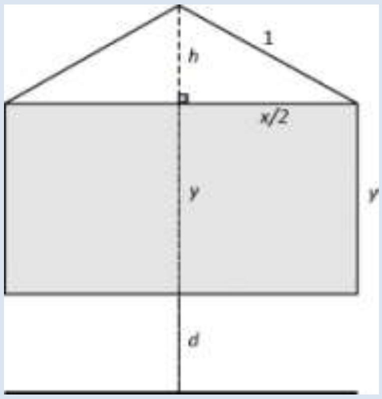


(A) 120×90 (B) 120×50 (C) 60×40 (D) 160×60 (E) 160×100

12. Alternativa A

Seja *h* a distância do prego à borda superior do quadro de comprimento *x* e altura *y*. Então, pelo teorema de Pitágoras, temos $h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$. Consequentemente, a distância entre a borda inferior e o piso é igual a $d = 2{,}5 - (h + y)$. A tabela ao lado, com medidas em metros, mostra os cálculos para cada uma das alternativas.

	$x/2$	h	y	d
(A)	0,6	0,8	0,9	0,8
(B)	0,6	0,8	0,5	1,2
(C)	0,3	0,95	0,4	1,15
(D)	0,8	0,6	0,6	1,3
(E)	0,8	0,6	1	0,9



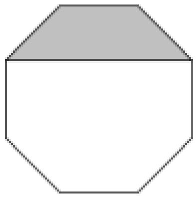
13. Seis amigas dividem um apartamento com dois banheiros, que elas usam todas as manhãs a partir das 7 horas. Cada banheiro é usado apenas por uma garota de cada vez e os tempos que elas levam usando um banheiro são de 9, 11, 13, 18, 22 e 23 minutos, respectivamente. Se elas quiserem terminar de usar os banheiros o mais rapidamente possível, a que horas isto poderá acontecer?

(A) 7h 48min (B) 7h 49min (C) 7h 50min (D) 7h 51min (E) 8h 03min

13. Alternativa B

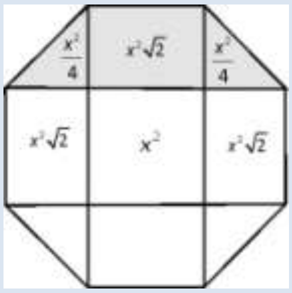
A soma dos tempos utilizados é $9+11+13+18+22+23=96$ minutos. Portanto, um dos banheiros será usado durante pelo menos $96:2=48$ minutos. Com os números dados, três não podem somar 48, mas podem somar 47, já que $11+13+23=47$. As outras três garotas levarão 9 + 18 + 22 = 49 minutos. Assim, elas terminarão de usar os banheiros em pelo menos 49 minutos, ou seja, às 7h 49min.

14. O contorno da figura ao lado é um octógono regular. A região limitada pelos lados e uma diagonal, em cinza, tem 3 cm^2 de área. Qual é a área de toda a região octogonal, em cm^2?



(A) $8+4\sqrt{2}$ (B) 9 (C) $8\sqrt{2}$ (D) 12 (E) 14

14. Alternativa D



Seja x a medida do lado do octógono. Este pode ser subdividido em quatro triângulos retângulos de catetos $\frac{x}{\sqrt{2}}$, cada um com área igual a $\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{x^2}{4}$, quatro retângulos de lados x e $\frac{x}{\sqrt{2}}$, de área $\frac{x^2}{\sqrt{2}}=x^2\sqrt{2}$ cada um e um quadrado de lado x e área x^2. Temos $2\cdot\frac{x^2}{4}+x^2\sqrt{2}=\frac{x^2}{2}+x^2\sqrt{2}=3$ (área da região cinza) logo a área da faixa intermediária é igual a $2\cdot x^2\sqrt{2}+x^2=2\left(\frac{x^2}{2}+x^2\sqrt{2}\right)=2\cdot 3=6$. Portanto, a área do octógono é $3+6+3=12\ \text{cm}^2$.

Solução alternativa

Podemos considerar a área do octógono como sendo quatro vezes a área do trapézio cinza menos quatro vezes a área dos triângulos retângulos mais a área do quadrado central. Isto resulta $4\times 3-4\cdot\frac{x^2}{4}+x^2=12-x^2+x^2=12\text{cm}^2$.

15. Um tipo especial de jacaré tem sua cauda com comprimento igual a um terço do seu comprimento total. Sua cabeça tem 93 cm de comprimento, correspondente a um quarto do comprimento total descontada a cauda. Qual é o comprimento total do jacaré, em centímetros?

(A) 186 (B) 372 (C) 490 (D) 496 (E) 558

15. Alternativa E

Se x é o comprimento total do jacaré, então $\frac{x}{3}$ é comprimento da cauda. Temos, então, $93=\frac{x-\frac{x}{3}}{4}\Leftrightarrow 93=\frac{x}{6}\Leftrightarrow x=558\,\text{cm}$.

16. Num dado diferente, os números em algumas faces podem ser vistos na figura. Os números das faces não visíveis são todos primos. Sabendo que as somas dos números em faces opostas são iguais, qual é o número da face oposta à face com o número 14?

(A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 19 (E) 23

16. Alternativa E
Temos $35+x=14+y=18+z$, sendo x,y,z primos. Apenas 2 e -2 são primos pares e nenhum deles poderia se opor a 14 ou 18, pois a soma dos números nas faces opostas seria menor do que 35. Portanto, os primos opostos às faces 14 e 18 são ambos ímpares, logo o número oposto à face 35 tem forçosamente que ser par, já que as somas nas faces consideradas anteriormente são ímpares. Esse número não pode ser -2, pois $35+(-2)=33$, o que forçaria a face oposta a 18 ter número 15, que não é primo. Mas se $x = 2$, então $y = 23$ e $z = 19$. Logo, o número oposto ao número 14 é 23.

17. Ana andou 8 km com velocidade constante de 4 km/h e passou a correr com velocidade constante de 8 km/h. Quanto tempo ela correu com esta velocidade até que a sua velocidade média no percurso atingiu 5 km/h ?

(A) 15 min (B) 20 min (C) 30 min (D) 35 min (E) 40 min

17. Alternativa E
Ana andou com velocidade de 4 km/h durante $\frac{8\text{km}}{4\text{km/h}}=2\text{h}$ e andou um tempo x com velocidade de 8km/h. A velocidade média no intervalo de tempo 2 + x é igual a $\frac{4\cdot 2+8\cdot x}{2+x}=5$. Assim, $\frac{8+8x}{2+x}=5 \Leftrightarrow 8+8x=10+5x \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\text{h}=40\text{min}$.

18. Um jogador de xadrez jogou 40 partidas e conquistou 25 pontos, sendo que a vitória vale um ponto, o empate vale meio ponto e a derrota vale zero ponto. Quantas vitórias a mais do que derrotas ele conseguiu?

(A) 5 (B) 7 (C) 10 (D) 12 (E) 15

18. Alternativa C
Seja x o número de vitórias e y, o número de empates. Sabemos que $1\cdot x+0{,}5\cdot y=25 \Leftrightarrow y=50-2x$. Assim, o número de derrotas é $40-(x+y)=40-(x+50-2x)=x-10$. Logo, a diferença entre o número de vitórias e o número de derrotas é $x-(x-10)=x-x+10=10$.

19. As amigas Jane, Daniela e Ana querem comprar chapéus iguais. Entretanto, falta dinheiro para Jane no valor de um terço do preço do chapéu, para Daniela falta um quarto e para Ana falta um quinto. Quando os chapéus ficaram R$9,40 reais mais baratos, as amigas, juntando o dinheiro que tinham, puderam comprá-los, sem sobrar nem faltar dinheiro. Quanto custava cada chapéu antes do desconto?

(A) R$ 12,00 (B) R$ 16,00 (C) R$ 28,00 (D) R$ 36,00 (E) R$ 112,00

19. Alternativa D
Sendo x o preço original de cada chapéu, temos:
$\left(x-\frac{x}{3}\right)+\left(x-\frac{x}{4}\right)+\left(x-\frac{x}{5}\right)=3\left(x-9{,}40\right)\Leftrightarrow 3x-\frac{20x+15x+12x}{60}=3x-28{,}2\Leftrightarrow\frac{47x}{60}=28{,}2$
$\Leftrightarrow x=\text{R\$ }36{,}00$

20. Sejam p,q,r números inteiros positivos tais que $p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}=\frac{25}{19}$. Qual é o valor de pqr ?

(A) 6 (B) 10 (C) 18 (D) 36 (E) 42

20. Alternativa C
Temos $p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}=\frac{25}{19}\Leftrightarrow p+\frac{r}{qr+1}=1+\frac{6}{19}<2$. Como p é inteiro positivo, concluímos que p = 1, logo $\frac{r}{qr+1}=\frac{6}{19}\Leftrightarrow 19r=6qr+6\Leftrightarrow 19r-6qr=6\Leftrightarrow r=\frac{6}{19-6q}$. Como r e q são inteiros positivos, temos q = 3 e r = 6. Logo, $pqr=1\cdot 3\cdot 6=18$.

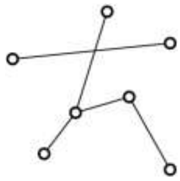
5 pontos

21. Na igualdade $N\times Ú\times(M+E+R+O)=33$, cada letra representa um algarismo e diferentes letras representam diferentes algarismos. De quantas maneiras distintas podem ser escolhidos os valores dessas letras?

(A) 12 (B) 24 (C) 30 (D) 48 (E) 60

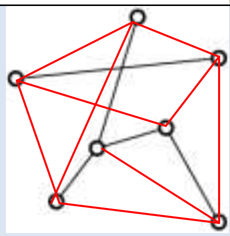
21. Alternativa D
Como $33=1\times 3\times 11$ e na expressão $N\times Ú\times(M+E+R+O)=33$ as letras N e $Ú$ são algarismos, isto é, nenhuma delas isoladamente pode valer 11, podendo assumir somente um dos valores 1 ou 3, então devemos ter $M+E+R+O=11$. O menor valor para cada uma dessas letras é 0, restando para a soma das três restantes o valor 11. O menor valor de uma destas é 4 e as outras duas devem somar 7, o que pode ser feito com 2 e 5. Podemos permutar os valores 0, 2, 4 e 5. Portanto, os valores dessas letras podem ser escolhidos de $2\cdot 4!=48$ maneiras diferentes.

22. Carina quer adicionar alguns segmentos na figura à direita de modo que cada um dos sete pontos tenha o mesmo número de ligações com os demais. Pelo menos quantos segmentos ela deve traçar?



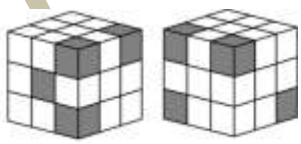
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 9 (E) 10

22. Alternativa D



Há sete pontos e um deles liga-se a outros três. Se cada um dos pontos pudes-se ligar-se a outros três, teríamos um total de $\frac{7\times 3}{2}=10,5$ ligações, o que é impossível. Se cada ponto ligar-se a quatro outros, teremos um total de $\frac{7\times 4}{2}=14$ ligações, faltando 14 – 5 = 9 ligações. Logo, basta traçar nove seg-mentos para isso ocorrer (como no exemplo da figura ao lado).

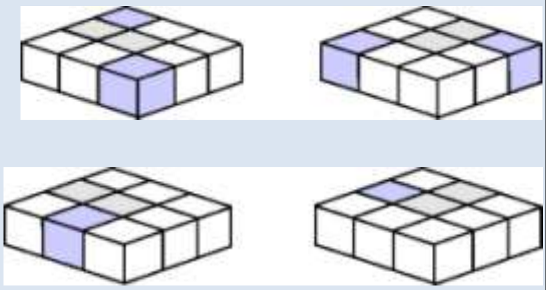
23. A figura mostra duas vistas diferentes do mesmo cubo, construído com 27 cubinhos, alguns cinza e outros brancos. No máximo, quantos são os cubinhos cinza?



(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

23. Alternativa D

Concluímos, através das duas vistas, que a camada superior apresenta exatamente dois cubos cinzentos. As duas vistas da camada inferior, conforme ilustração à direita, acima, mostram que pode haver quatro cubos cinzentos na mesma, dois dos quais, na cor cinza mais clara, estão ocultos. Na camada interme-diária, pode haver três cubos, dois dos quais ocultos (em cinza claro). Portanto, há no máximo 9 cubinhos cinza.



24. Numa ilha, os sapos são verdes ou azuis. O número de sapos azuis cresceu 60% enquanto que o número de sapos verdes diminuiu 60%. Se a razão entre o número de sapos azuis e o número de sapos verdes é agora o inverso dessa razão antes da variação, qual é a porcentagem da variação do número total de sapos?

(A) 0% (B) 20% (C) 30% (D) 40% (E) 50%

24. Alternativa B

Se a é o número de sapos azuis e v é o número de sapos verdes no início, então, depois da variação, esses números são $a + 60^{0}$ de $a = 1,6\,a$ e $v - 60^{0}$ de $v = 0,4\,v$. De acordo com as informações, temos $\frac{a}{v}=\frac{0,4v}{1,6a}\Leftrightarrow 1,6a^2=0,4v^2\Leftrightarrow 4a^2=v^2\Leftrightarrow a=2v$. A razão entre a população atual e a original é $\frac{1,6a+0,4v}{a+v}=\frac{1,6\cdot 2v+0,4v}{2v+v}=\frac{3,6}{3}=1,2=1+20\%$. Portanto, o número total de sapos aumentou 20%.

25. Tom quer escrever uma lista de vários números inteiros menores do que 100 e cujo produto não é divisível por 18. No máximo, quantos números poderão ser escritos?

(A) 5 (B) 17 (C) 68 (D) 69 (E) 90

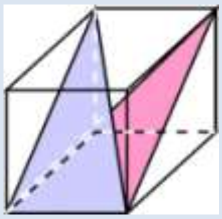
25. Alternativa C
Como $18 = 2 \cdot 3^2$, para fazer a lista devemos descobrir o que é mais vantajoso. Por exemplo, se eliminarmos todos os números pares, o produto dos 50 ímpares restantes não será divisível por 18. Podemos excluir menos números se eliminarmos todos os múltiplos de 3, exceto um número com apenas um fator 3. Eliminamos menos números com a segunda opção, pois há 33 números positivos divisíveis por 3 menores do que 100, enquanto que há 49 números pares positivos menores do que 100. Assim, a quantidade máxima de números que Tom pode escrever é $100 - 33 + 1 = 68$ (por exemplo: 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, ..., 97,98).

26. Três vértices de um cubo são também vértices de um triângulo. Quantos desses triângulos não possuem vértices pertencentes a uma mesma face do cubo?

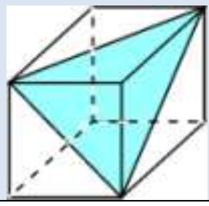
(A) 16 (B) 24 (C) 32 (D) 40 (E) 48

26. Alternativa C
Um cubo tem oito vértices e seis faces. O número total de triângulos cujos vértices são vértices de um cubo é igual a $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$. O número de triângulos cujos vértices são vértices de um quadrado (face do cubo) é igual a $\binom{4}{3} = 4$. Portanto, o número de triângulos cujos vértices são vértices de um cubo mas não da mesma face do cubo é igual a $56 - 6 \cdot 4 = 32$.

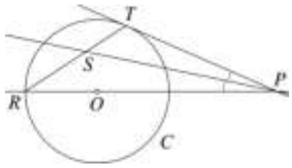
Solução alternativa
Um cubo tem 12 arestas e 8 vértices. Cada aresta é um lado de dois triângulos que não estão contidos em nenhuma das duas faces que contêm esta aresta, conforme figura ao lado. Como são 12 arestas, temos 2 x 12 = 24 triângulos desse tipo.



Para cada vértice, as outras extremidades das arestas que nele concorrem são vértices de um triângulo equilátero, num total de 8 triângulos, conforme figura ao lado. Portanto, o número de triângulos com vértices coincidindo com os vértices do cubo, sem estar contidos nas faces, é 24 + 8 = 32.

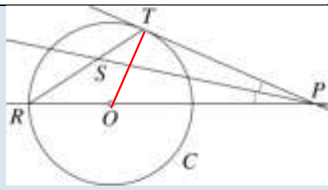


27. Na figura, PT é tangente ao círculo C com centro O. Se PS é a bissetriz do ângulo $T\hat{P}R$, qual é a medida do ângulo $T\hat{S}P$?



(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75°
(E) Depende da posição do ponto P

27. Alternativa B



No triângulo isósceles ROT temos $m(R\hat{T}O)=m(O\hat{R}T)=\beta$. Temos também $m(T\hat{P}S)=m(S\hat{P}R)=\alpha$. No triângulo SRP, a medida do ângulo externo $T\hat{S}P$ é $\alpha+\beta$ e no triângulo TOP, retângulo em T, a medida do ângulo externo $R\hat{O}T$ é $90^{\circ}+2\alpha$. Assim, no triângulo ROT, temos $\beta+\beta+90^{\circ}+2\alpha=180^{\circ}\Leftrightarrow\alpha+\beta=45^{\circ}$. Logo, a medida do ângulo $T\hat{S}P$ é 45°.

28. Maria fez uma lista, em ordem crescente, de todos os números de sete algarismos distintos que podem ser escritos com todos os algarismos de 1 a 7. Então, ela dividiu a lista exatamente no meio. Qual é o maior número da primeira metade da lista?

(A) 1234567 (B) 3765421 (C) 4123567 (D) 4352617 (E) 4376521

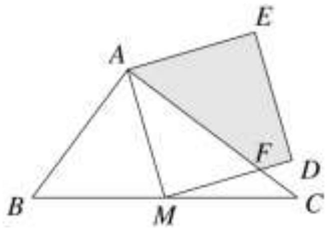
28. Alternativa E

Tomando como exemplo todos os números formados com os algarismos de 1 a 3, temos a lista 123, 132, 213|231, 312, 321. O último número da primeira metade é 213 e o primeiro da segunda metade é 231, isto é, basta olhar para o bloco central, formado pelos números que começam com 2 e achar o maior número da sua primeira metade. Olhando para a lista dos números formados com os algarismos de 1 a 4, vemos que o maior número da primeira metade é exatamente o último número que começa com 2, ou seja, 2431. No caso dos números formados pelos algarismos de 1 a 7, o bloco central é o dos números que começam com 4. O primeiro desses números é **4**123567 e o último é o número **4**765321. A lista de todos os números com os seis algarismos 1,2,3,5,6 e 7 tem sua primeira metade terminando com o maior número que começa com 3, ou seja, 376521. Portanto, o maior número da primeira metade da lista original é 4376521.

Solução alternativa

Existem 7! números com 7 algarismos distintos. Ao dividir a lista com todos esses números ao meio, teremos $\frac{7!}{2}=7\cdot3\cdot5!=21\cdot5!$ números em cada metade. Da lista, fixado um algarismo inicial, verificamos que há $6\cdot5!$ números começando com este algarismo. Vemos, assim, que há $3\cdot6\cdot5!=18\cdot5!$ números iniciando com 1, 2 ou 3. Logo, a primeira metade da lista possui vários números começando com o algarismo 4, na verdade $\frac{6}{2}\cdot5!=3\cdot5!$ números. Desses números, há 5! começando com 41, 5! começando com 42 e 5! começando com 43, completando os $3\cdot5!$ números. Portanto, o maior número da primeira lista é o número 4376521.

29. Na figura, o triângulo *ABC* tem *AB* = 6 cm, *AC* = 8 cm e *BC* = 10 cm. Sendo *M* o ponto médio do lado *BC*, o lado *MD* do quadrado *AMDE* encontra o lado *AC* no ponto *F*. Qual é a área do quadrilátero *AFDE* em cm^2 ?



(A) $\frac{125}{8}$ (B) $\frac{126}{8}$ (C) $\frac{127}{8}$ (D) $\frac{128}{8}$ (E) $\frac{129}{8}$

29. Alternativa A

Como *AB* = 6, *AC* = 8 e *BC* = 10, temos $BC^2 = AB^2 + AC^2$, logo o triângulo *ABC* é retângulo em *A*, pela recíproca do teorema de Pitágoras. Sendo *M* o ponto médio da hipotenusa *BC*, temos *AM* = *MC* = 5. Assim, o triângulo *AMC* é isósceles, tal que $\mathrm{m}(M\hat{A}C) = \mathrm{m}(M\hat{C}A)$ e o triângulo retângulo *AMF* é semelhante ao triângulo *CAB*, de modo que $\frac{AM}{AC} = \frac{MF}{AB} \Leftrightarrow \frac{5}{8} = \frac{MF}{6} \Leftrightarrow MF = \frac{15}{4}$. A área do triângulo *AMF* é $\frac{1}{2} \cdot AM \cdot MF = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{4} = \frac{75}{8}$. Portanto, a área do quadrilátero *AFDE* é $5^2 - \frac{75}{8} = \frac{200-75}{8} = \frac{125}{8}$ cm^2.

30. Há 2014 pessoas numa fila, sendo cada uma delas um mentiroso (nunca diz a verdade) ou um virtuoso (sempre diz a verdade). Cada uma delas afirma que há mais mentirosos depois dela do que virtuosos antes dela. Quantos mentirosos há na fila?

(A) 0 (B) 1 (C) 1007 (D) 1008 (E) 2014

30. Alternativa C

Seja *k* o número de virtuosos na fila. Olhando para a fila, da esquerda para a direita, aparecem os virtuosos 1, 2, 3, ... até o de número *k*. Este afirma, verdadeiramente, que há mais mentirosos atrás dele do que virtuosos à sua frente. Como o número de virtuosos à sua frente é $k-1$, o número de mentirosos atrás dele é maior do que $k-1$. Mas o número total de mentirosos é igual a $2014-k$ e este número não é inferior ao número de mentirosos depois do *k*-ésimo virtuoso. Portanto, $2014-k > k-1 \Leftrightarrow 2015 > 2k \Leftrightarrow k < \frac{2015}{2} \Leftrightarrow k \leq 1007$ (*k* é um número inteiro). Supondo $k < 1007$, concluímos que $k < 1007 \Leftrightarrow -k > -1007 \Leftrightarrow 2014-k > 1007$, isto é, o número de mentirosos é maior ou igual a 1008. Neste caso, o primeiro mentiroso à esquerda teria 1007 mentirosos atrás de si e, ao afirmar que o número de virtuosos à sua frente (que seria então no máximo 2014 – 1008 = 1006) é menor do que o número de mentirosos atrás de si, estaria dizendo a verdade, coisa que ele não pode fazer (absurdo). Logo, o número 2014 – *k* de mentirosos é igual a 2014 – 1007 = 1007.