OBJETIVO

ITA
Matemática
Livro do Professor

5

MÓDULO 17

Radiciações e Equações

1. Mostre que

$\sqrt{31 + 8\sqrt{15}} + \sqrt{31 - 8\sqrt{15}}$ é múltiplo de 4.

RESOLUÇÃO:

$\sqrt{31 + 8\sqrt{15}} + \sqrt{31 - 8\sqrt{15}} = x$, com $x > 0$

$\left(\sqrt{31 + 8\sqrt{15}} + \sqrt{31 - 8\sqrt{15}}\right)^2 = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{31 + 8\sqrt{15}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{31 + 8\sqrt{15}}\right)\left(\sqrt{31 - 8\sqrt{15}}\right) +$

$+ \left(\sqrt{31 - 8\sqrt{15}}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 31 + \cancel{8\sqrt{15}} + 2\sqrt{31^2 - \left(8\sqrt{15}\right)^2} + 31 - \cancel{8\sqrt{15}} = x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 62 + 2 \cdot \sqrt{961 - 960} = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow x = 8$, pois $x > 0$

Assim sendo $\sqrt{31 + 8\sqrt{15}} + \sqrt{31 - 8\sqrt{15}} = 8$, múltiplo de 4.

2.

a) Escreva $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ como uma soma de radicais simples.

b) Escreva $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}}$ como uma diferença de radicais simples.

RESOLUÇÃO:

a) $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow \left(\sqrt{A + \sqrt{B}}\right)^2 = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A + \sqrt{B} = x + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A + \sqrt{B} = x + y + \sqrt{4xy} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = A \Rightarrow y = A - x \\ 4xy = B \Rightarrow 4x(A - x) = B \Rightarrow 4x^2 - 4Ax + B = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4A \pm \sqrt{(-4A)^2 - 4 \cdot 4 \cdot B}}{2 \cdot 4} = \frac{4A \pm 4\sqrt{A^2 - B}}{8}$$

Fazendo $C = \sqrt{A^2 - B}$ tem-se $x = \dfrac{A \pm C}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{A + C}{2} \Rightarrow y = \dfrac{A - C}{2} \\ x = \dfrac{A - C}{2} \Rightarrow y = \dfrac{A + C}{2} \end{cases}$$

Assim sendo, $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A + C}{2}} + \sqrt{\dfrac{A - C}{2}}$, com $C = \sqrt{A^2 - B}$

b) $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}} = \sqrt{12 - \sqrt{140}} =$

$= \sqrt{\dfrac{12 + 2}{2}} - \sqrt{\dfrac{12 - 2}{2}} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$, pois

$C = \sqrt{12^2 - 140} = \sqrt{144 - 140} = 2$

3. O valor de k para que uma das raízes da equação $x^2 - kx + 18 = 0$ seja $\sqrt{19 + 6\sqrt{10}} - \sqrt{19 - 6\sqrt{10}}$ é:

a) 7 b) 9 c) 12 d) 15 e) 19

RESOLUÇÃO:

Sendo a e b as raízes da equação e fazendo

$\sqrt{19 + 6\sqrt{10}} - \sqrt{19 - 6\sqrt{10}} = a$, **com** $a > 0$ **tem-se**

$\left(\sqrt{19 + 6\sqrt{10}} - \sqrt{19 - 6\sqrt{10}}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 19 + 6\sqrt{10} - 2\sqrt{19 + 6\sqrt{10}} \,.\, \sqrt{19 - 6\sqrt{10}} + 19 - 6\sqrt{10} = a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 38 - 2\sqrt{19^2 - (6\sqrt{10})^2} = a^2 \Leftrightarrow a^2 = 36 \Leftrightarrow a = 6$

Além disso

$$\left.\begin{array}{l} a + b = k \\ a \,.\, b = 18 \\ a = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = k \\ b = 3 \\ a = 6 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 6 \\ b = 3 \\ k = 9 \end{array}\right.$$

Resposta: B

4. Se **a** e **b** $(a > b)$ são as raízes da equação $x^2 - \sqrt{9 + 6\sqrt{2}} \,.\, x + 3\sqrt{2} = 0$, então:

a) $a \,.\, b = \sqrt{3}$ b) $a^2 + b^2 = 3$

c) $a^2 - b^2 = 3$ d) $a + b = \sqrt{5}$

e) $a - b = 2$

RESOLUÇÃO:

$\sqrt{9+6\sqrt{2}} = \sqrt{9+\sqrt{72}} = \sqrt{\dfrac{9+3}{2}} + \sqrt{\dfrac{9-3}{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{3}$

$C = \sqrt{9^2 - 72} = 3$

$x^2 - \sqrt{9+6\sqrt{2}}\, x + 3\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} \,.\, \sqrt{3} = 0$

$V = \{\sqrt{6}\,;\, \sqrt{3}\} \Rightarrow a = \sqrt{6}$ **e** $b = \sqrt{3}$, **pois** $a > b$.

Assim $a^2 - b^2 = (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2 = 3$

Resposta: C

Obs.: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A - C}{2}}$

onde $C = \sqrt{A^2 - B}$

5. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $(a + b + c)x^2 - (2a + b + c)x + a = 0$, sabendo-se que $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO:

$S = \dfrac{2a + b + c}{a + b + c} = 1 + \dfrac{a}{a + b + c}$

$P = \dfrac{a}{a + b + c} = 1 \,.\, \dfrac{a}{a + b + c}$

$V = \left\{1;\ \dfrac{a}{a + b + c}\right\}$

MÓDULO 18

Equações

1. Sejam **a**, **b** e **c** números reais não-nulos. Se 1 é raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$, assinale a afirmação falsa:

a) $a + b + c = 0$ b) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

c) $b^2 \geq 4ac$ d) a outra raiz é c

e) uma das anteriores é falsa.

RESOLUÇÃO:

Se 1 é raiz, então $a \,.\, 1^2 + b \,.\, 1 + c = 0$

$a + b + c = 0$

$b + c = -a \Rightarrow (b + c)^3 = (-a)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^3 + 3bc(b + c) + c^3 + a^3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^3 + 3bc(-a) + c^3 + a^3 = 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow 1 \,.\, x_2 = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{c}{a}$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 4ac$

Resposta: D

2. Resolver, em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o sistema

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x + xy + y = 19 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x + xy + y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - xy = 37 \\ (x + y) + xy = 19 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 + (x + y) - 56 = 0 \Leftrightarrow x + y = -8$ ou $x + y = 7$

Assim sendo tem-se

1) $\begin{cases} x + xy + y = 19 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 3$ e $y = 4)$ ou $(x = 4$ e $y = 3)$

2) $\begin{cases} x + xy + y = 19 \\ x + y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -8 \\ xy = 27 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{-44}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Portanto $V = \{(3; 4); (4; 3)\}$

3. A soma e o produto das raízes positivas da equação $(x^2 + 2x - 12)^2 - 9x^3 + 108x = 0$ são respectivamente iguais a:

a) 8 e 12 b) 10 e 24 c) 12 e 16
d) 18 e 36 e) 16 e 24

RESOLUÇÃO:

$(x^2 + 2x - 12)^2 - 9x^3 + 108x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(x^2 - 12) + 2x]^2 - 9x(x^2 - 12) = 0$ fazendo $x^2 - 12 = y$ tem-se
$(y + 2x)^2 - 9xy = 0 \Leftrightarrow y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = x$ ou $y = 4x \Leftrightarrow x^2 - 12 = x$ ou $x^2 - 12 = 4x$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$ ou $x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -2, x = -3, x = 4$ ou $x = 6$

A soma e o produto das raízes positivas são $4 + 6 = 10$ e $4 \cdot 6 = 24$

Resposta: B

4. As equações $x^3 - 19x + a = 0$ e $x^3 - 28x + a + 18 = 0$ têm uma raiz comum. Determinar o conjunto-verdade de cada uma delas.

RESOLUÇÃO:

Sendo α a raiz comum, tem-se:

$$\left.\begin{matrix} \alpha^3 - 19\alpha + a = 0 \\ \alpha^3 - 28\alpha + a + 18 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 9\alpha - 18 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \text{ e } a = 30$$

1ª equação:

$x^3 - 19x + 30 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x - 15x + 30 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x(x + 2)(x - 2) - 15(x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x - 15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \\ x = 3 \end{cases}$$

2ª equação:

$x^3 - 28x + 48 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x - 24x + 48 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x - 24) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \\ x = 4 \end{cases}$$

Respostas: $V_1 = \{2; -5; 3\}$
$V_2 = \{2; -6; 4\}$

MÓDULO 19

Equações

1. **(ITA)** – Dada a equação
$x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$, em que m é uma constante real, considere as seguintes afirmações:

I. Se $m \in]-6, 6[$, então existe apenas uma raiz real.
II. Se $m = -6$ ou $m = +6$, então existe raiz com multiplicidade 2.
III. $\forall m \in R$, todas as raízes são reais.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I b) II c) III
d) II e III e) I e II

RESOLUÇÃO:

$x^3 + (m + 1) \cdot x^2 + (m + 9) \cdot x + 9 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^3 + mx^2 + x^2 + mx + 9x + 9 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2(x + 1) + mx(x + 1) + 9(x+1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x + 1) \cdot (x^2 + mx + 9) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 36}}{2}.$$

Assim sendo:

1) Para $m^2 - 36 < 0 \Leftrightarrow -6 < m < 6$, a equação terá uma única raiz real igual a -1 e duas raízes não reais. Desta forma a afirmação (I) é verdadeira e a afirmação (III) é falsa.

2) Para $m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 6$, a equação inicial terá uma raiz real simples igual a -1 e uma raiz real dupla igual a 3 ou igual a -3. Portanto, a afirmação (II) é verdadeira.

Resposta: E

2. **(ITA)** – Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que

a) $x \in]0, 2[$.
b) x é racional.
c) $\sqrt{2x}$ é irracional.
d) x^2 é irracional.
e) $x \in]2; 3[$.

RESOLUÇÃO

$$x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2$$

Portanto, x é racional.

Resposta: B

3. **(IME)** – Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + (m - 15)x + m = 0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para m.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m + 15 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = -x_1x_2 + 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_1x_2 = 15 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + 1) + x_2(1 + x_1) = 16 \Leftrightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 16$$

Sendo x_1 e x_2 números inteiros, podemos ter:

$x_1 + 1$	$x_2 + 1$	x_1	x_2	$m = x_1 \cdot x_2$
1	16	0	15	0
2	8	1	7	7
4	4	3	3	9
8	2	7	1	7
16	1	15	0	0
– 1	– 16	– 2	– 17	34
– 2	– 8	– 3	– 9	27
– 4	– 4	– 5	– 5	25
– 8	– 2	– 9	– 3	27
– 16	– 1	– 17	– 2	34

Resposta: O conjunto de valores possíveis para m é {0, 7, 9, 25, 27, 34}

4. Se **m** e **n** são raízes reais estritamente positivas da equação $x^2 - bx + 1 = 0$, então é falso afirmar que:

a) $b \geq 2$
b) $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} \geq 2$
c) $0 < \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} < 2$
d) $(m + n) \cdot \left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right) = b^2 \geq 4$
e) uma das anteriores é falsa.

RESOLUÇÃO

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = (-b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq 4 \\ S = m + n = b > 0 \quad P = m \cdot n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow b \geq 2$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m + n}{m \cdot n} = \frac{b}{1} = b \geq 2$$

$$(m + n) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = b \cdot b = b^2 \geq 4$$

Resposta: C

5. **(ITA)** – O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é

a) 2499. b) 2501. c) 2500.
d) 3600. e) 4900.

RESOLUÇÃO:

$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0{,}01 \Leftrightarrow \sqrt{n} + 0{,}01 < \sqrt{n-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sqrt{n} + 0{,}01)^2 < \left(\sqrt{n-1}\,\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n + 0{,}02 \,.\, \sqrt{n} + 0{,}0001 < n - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}02\sqrt{n} < -1 - 0{,}0001 \Leftrightarrow 0{,}02\sqrt{n} > 1{,}0001 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} > \dfrac{1{,}0001}{0{,}02} \Leftrightarrow \sqrt{n} > \dfrac{100{,}01}{2} \Leftrightarrow \sqrt{n} > 50{,}005 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n > 2500{,}\ldots$

O menor inteiro positivo n que satisfaz a sentença é, portanto, 2501.

Resposta: B

MÓDULO 20

Equações

1. **(ITA)** – Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos

$$(x + a)^3 - (x + b)^3.$$

Neste caso, $\left|a + |b| - c\right|$ é igual a

a) 104. b) 114. c) 124. d) 134. e) 144.

RESOLUÇÃO:

Para que $9x^2 - 63x + c = (x + a)^3 - (x + b)^3$, devemos ter:

$9x^2 - 63x + c = (3a - 3b)x^2 + (3a^2 - 3b^2)x + (a^3 - b^3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 9 \\ 3a^2 - 3b^2 = -63 \\ a^3 - b^3 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ a^2 - b^2 = -21 \\ a^3 - b^3 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -5 \\ c = 117 \end{cases}$$

Logo, $\left|a + |b| - c\right| = \left|-2 + |-5| - 117\right| = |-114| = 114$

Resposta: B

2. **(ITA)** – Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação

$|x|^{\frac{6}{5}} - 26 \,.\, |x|^{\frac{3}{5}} - 27 = 0$

RESOLUÇÃO:

Fazendo $|x|^{\frac{3}{5}} = y$ teremos $|x|^{\frac{6}{5}} = y^2$ e a equação

$|x|^{\frac{6}{5}} - 26 \,.\, |x|^{\frac{3}{5}} - 27 = 0$ pode ser escrita da forma

$y^2 - 26y - 27 = 0$, com $y \geq 0$.

Como $y^2 - 26y - 27 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ ou

$|x|^{\frac{3}{5}} = 27 \Leftrightarrow \left(|x|^{\frac{1}{5}}\right)^3 = 3^3 \Leftrightarrow |x|^{\frac{1}{5}} = 3 \Leftrightarrow |x| = 3^5 \Leftrightarrow y = 27$, temos:

$|x| = 243 \Leftrightarrow x = 243$ ou $x = -243$

Resposta: $\{-243; 243\}$

3. **(EPUSP)** – Sendo a a hipotenusa, b e c os catetos de um triângulo retângulo, a equação $a^2x^2 - b^2x - c^2 = 0$:

a) tem uma raiz igual a – 1 e outra entre 0 e 1;

b) tem raízes imaginárias;

c) tem uma raiz igual a 1 e outra entre 0 e –1;

d) não admite raízes racionais;

e) nenhuma das respostas anteriores.

RESOLUÇÃO 1:

Sendo *a* a hipotenusa, *b* e *c* os catetos de um triângulo retângulo, tem-se $a^2 = b^2 + c^2$.

1 é raiz da equação, pois $a^2 1^2 - b^2 1 - c^2 = b^2 + c^2 - b^2 - c^2 = 0$. A outra raiz é $-\dfrac{c^2}{a^2}$, que está entra 0 e – 1, pois $0 < \dfrac{c}{a} < 1$.

RESOLUÇÃO 2:

Sendo *a* a hipotenusa, *b* e *c* os catetos de um triângulo retângulo, tem-se $a^2 = b^2 + c^2$.

$\Delta = (-b^2)^2 - 4 \cdot a^2 \cdot (-c)^2 = b^4 + 4a^2c^2 = b^4 + 4(b^2 + c^2) \cdot c^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = b^4 + 4 \cdot b^2 \cdot c^2 + 4 \cdot c^4 = (b^2 + 2c^2)^2$

$$x = \frac{b^2 \pm \sqrt{(b^2 + 2c^2)^2}}{2 \cdot a^2} = \frac{b^2 \pm (b^2 + 2c^2)}{2 \cdot a^2} =$$

$$= \begin{cases} = \dfrac{b^2 + (b^2 + 2c^2)}{2 \cdot a^2} = \dfrac{2 \cdot (b^2 + c^2)}{2 \cdot a^2} = \dfrac{2 \cdot a^2}{2 \cdot a^2} = 1 \\ = \dfrac{b^2 - (b^2 + 2c^2)}{2 \cdot a^2} = -\dfrac{c^2}{a^2}, \text{ com } -1 < -\dfrac{c^2}{a^2} < 0 \end{cases}$$

4. Determine os valores de **a** para que as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + x + a = 0$ tenha pelo menos uma raiz em comum.

RESOLUÇÃO:

Para a = 1 as duas equações são idênticas e, obviamente, possuem raízes comuns.

Para $a \neq 1$, se α for a raiz comum temos:

$$\begin{cases} \alpha^2 + a \cdot \alpha + 1 = 0 \\ \alpha^2 + 1 \cdot \alpha + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a - 1) \cdot \alpha + 1 - a = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a - 1) \cdot \alpha = a - 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$. Se *1* é a raiz comum, então $1^2 + a \cdot 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -2$

Resposta: 1 e – 2

5. Para que valores de a, b e c inteiros o polinômio $(x - a)(x - 10) + 1$ pode ser fatorado como o produto de $(x + b)(x + c)$?

RESOLUÇÃO:

Sendo $(x - a)(x - 10) + 1$ fatorável em $(x + b)(x + c)$, temos $(x - a)(x - 10) + 1 = (x + b)(x + c)$ para todo x. Para x = – b, temos $(-b - a)(-b - 10) + 1 = (-b + b)(-b + c) \Leftrightarrow (b + a)(b + 10) = -1$.

Desta forma, $\begin{cases} b + a = 1 \\ b + 10 = -1 \end{cases}$ **ou** $\begin{cases} b + a = -1 \\ b + 10 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (a = 12 e b = – 11) ou (a = 8 e b = – 9)

Respostas: (a = 12 e b – 11) ou (a = 8 e b = – 9)

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 17

1. O valor de $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$ é:

a) 1 b) $\sqrt{6}$ c) 3 d) 7 e) $\sqrt{12}$

2. A soma $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} +$

$+ \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$ vale:

a) $\sqrt{100} - \sqrt{2}$ b) 9 c) $10 + \sqrt{2}$

d) $9 + \sqrt{2}$ e) $\sqrt{2} - \sqrt{99}$

3. Obter uma equação do 2º grau, de coeficientes inteiros, cujas raízes sejam o quadrado das raízes da equação $5x^2 - 7x + 1 = 0$.

■ MÓDULO 18

1. As raízes da equação $x^2 + px + q = 0$, aumentadas de uma unidade, são raízes da equação $x^2 - px + 2pq = 0$. Determine **p**, **q** e o conjunto-verdade de cada equação.

2. As equações $x^3 - px + 2q = 0$ e $x^3 - qx + 2p = 0$, com $p \neq q$, têm uma raiz comum. Determine esta raiz e a soma $p + q$.

3. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação
$(x^2 - 3x + 18)^2 - 14x^3 + 90x^2 - 252x = 0$.

■ MÓDULO 19

1. **(ITA)** – Sabendo-se que as soluções da equação $|x|^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, pode-se afirmar que:

a) $a = 1$ e $b = 6$ b) $a = 0$ e $b = -6$

c) $a = 1$ e $b = -6$ d) $a = 0$ e $b = -9$

e) não existem **a** e **b** tais que $x^2 - ax + b = 0$ contenha as raízes da equação dada.

2. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\dfrac{x+a}{x-a} + \dfrac{x+b}{x-b} = 2$, sabendo-se que $\{a; b\} \subset \mathbb{R}^*$ e $a \neq b$. Mostre que o inverso da raiz é a média aritmética dos inversos de **a** e **b**.

■ MÓDULO 20

1. **(EPUSP)** – Os trinômios $y = ax^2 + bx + c$ tais que $a + b + c = 0$:

a) tem em comum o ponto do eixo x;
b) tem em comum o ponto do eixo y;
c) tem em comum a origem;
d) não tem ponto em comum;
e) Nada disso.

2. A soma dos quadrados com a soma dos cubos das raízes da equação $x^2 - 3x + 5 = 0$ é:

a) 18 b) 19 c) 20 d) – 18 e) – 19

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 17

1) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}} = x \Rightarrow \sqrt{6+x} = x$ e $x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$ e $x > 0 \Rightarrow x = 3$

Resposta: C

2) $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{1})} \cdot \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1})}{(\sqrt{2}-\sqrt{1})} = \sqrt{2}-\sqrt{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

De forma análoga

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})} \cdot \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})} =$$

$= \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

Assim

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+$$

$+ \sqrt{100} - \sqrt{99} = \sqrt{100} - \sqrt{1} = 9$

Resposta: B

3) Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $5x^2 - 7x + 1 = 0$, as raízes da nova equação serão x_1^2 e x_2^2.

$S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \,.\, x_2 =$

$= \left(-\dfrac{-7}{5}\right)^2 - 2\,.\left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{39}{25}$

$P = x_1^2 \,.\, x_2^2 = (x_1 \,.\, x_2)^2 = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{25}\right)$

Uma equação nestas condições é

$x^2 - \dfrac{39}{25}x + \dfrac{1}{25} = 0$; **outra é** $25x^2 - 39x + 1 = 0$.

■ MÓDULO 18

1) Sendo x_1 e x_2 as raízes da primeira equação, e $(x_1 + 1)$ e $(x_2 + 1)$ as raízes da segunda equação, tem-se:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \,.\, x_2 = q \\ (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = p \\ (x_1 + 1)\,.\,(x_2 + 1) = 2pq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \,.\, x_2 = q \\ p = 1 \\ q - p + 1 = 2pq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = 0 \end{cases}$$

As equações são $x^2 + x = 0$ e $x^2 - x = 0$, cujos conjuntos-verdade são, respectivamente, $V_1 = \{-1; 0\}$ e $V_2 = \{0; 1\}$

2) Sendo α a raiz comum das equações $x^3 - px + 2q = 0$ e $x^3 - qx + 2p = 0$, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^3 - p\alpha + 2q = 0 \\ \alpha^3 - q\alpha + 2p = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (p - q)\,\alpha = 2q - 2p \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -2}$, **pois $p \neq q$**

Substituindo em uma das equações, tem-se:

$(-2)^3 - q\,(-2) + 2p = 0 \Rightarrow \boxed{p + q = 4}$

3) $(x^2 - 3x + 18)^2 - 14x^3 + 90x^2 - 252x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 18)^2 - 14x(x^2 + 18) + 90x^2 = 0.$

Fazendo $x^2 + 18 = y$, temos

$(y - 3x)^2 - 14xy + 90x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 - 6xy + 9x^2 - 14xy + 90x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 - 20xy + 99x^2 = 0 \Leftrightarrow y = 9x$ ou $y = 11x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 18 = 9x$ ou $x^2 + 18 = 11x \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$ ou $x^2 - 11x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = 3, x = 6$ ou $x = 9$

Resposta: V = {2; 3; 6; 9}

■ MÓDULO 19

1) $|x|^2 - |x| - 6 = 0 \Leftrightarrow |x| = -2$ ou $|x| = 3 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3$

$S = (-3) + 3 = a \Leftrightarrow a = 0$

$P = (-3)\,.\,3 = b \Leftrightarrow b = -9$

Resposta: D

2) $\dfrac{x + a}{x - a} + \dfrac{x + b}{x - b} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + a)(x - b) + (x + b)(x - a) = 2(x - a)(x - b)$ e $x - a \neq 0$ e $x - b \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax + bx = 2ab$ e $x \neq a$ e $x \neq b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2ab}{a + b} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{a + b}{2ab} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{2}$ **cqd.**

■ MÓDULO 20

1) RESOLUÇÃO 1:

1 é raiz do trinômio, pois

$y = a\,.\,1^2 + b\,.\,1 + c = a + b + c = 0.$

A outra raiz é $\dfrac{c}{a}$. Assim, o gráficos que representam os trinômios passa pelo ponto (1; 0) do eixo x.

Resposta: A

RESOLUÇÃO 2:

Sendo $a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$

$y = ax^2 + bx + c = ax^2 + bx - a - b =$

$= a(x^2 - 1) + b(x - 1) = a(x + 1)(x - 1) + b(x - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = (x - 1)\,.\,(ax + a + b)$

O ponto (1; 0) pertence aos gráficos dos trinômios, pois $y = (1 - 1)\,.\,(a\,.\,1 + a + b) = 0$, para quaisquer valores de a e b.

Resposta: A

2) Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação, temos:

$x_1 + x_2 = 3$ e $x_1 \,.\, x_2 = 5$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (3)^2 - 2\,.\,5 = -1$

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\,.\,(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) =$

$= (3)\,.\,(-1 - 5) = -18$

Resposta: D