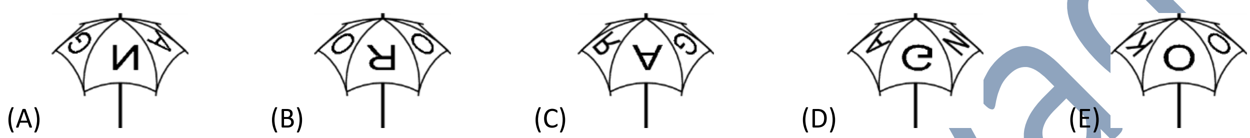
Canguru de Matemática Brasil – 2015 – Nível C - Respostas

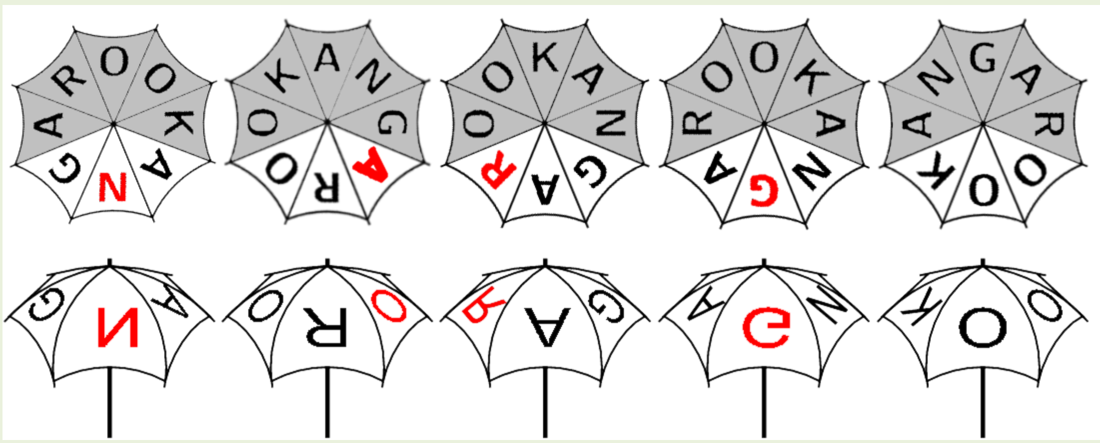
Problemas de 3 pontos

1. Quando Gabriel esteve na Austrália, comprou um guarda-chuva que, aberto, mostrava a palavra *canguru*, em inglês, conforme figura ao lado. Qual das figuras abaixo mostra o mesmo guarda-chuva?



1. Resposta E

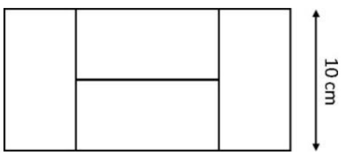
Podemos comparar cada alternativa com o que se vê ao girar o guarda-chuva:



Neste caso, apenas a alternativa E coincide com o que é visto no guarda-chuva.

2. O retângulo maior ao lado é formado por quatro retângulos menores iguais. Se o seu lado menor mede 10 cm, qual é a medida do seu lado maior?

(A) 10 cm (B) 20 cm (C) 30 cm (D) 40 cm (E) 50 cm



2. Resposta B

Seja x a medida do lado menor dos retângulos menores. Então $2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$ cm. Portanto, o lado maior do retângulo maior mede $5 + 10 + 5 = 20$ cm.

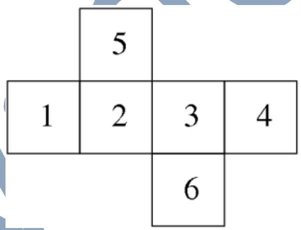
3. Qual dos números a seguir é o mais próximo de $2{,}015 \times 510{,}2$?

(A) 0,1 (B) 1 (C) 10 (D) 100 (E) 1000

3. Resposta E

$2{,}015 \times 510{,}2 \cong 2 \times 510 = 1020$. Dos números apresentados, o mais próximo é 1000.

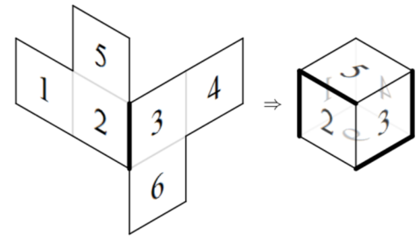
4. Suzana desenha a planificação de um cubo e numera suas faces conforme mostrado na figura. Em seguida, ela soma os números das faces opostas, obtendo três números. Quais são eles?



(A) 4,6,11 (B) 4,5,12 (C) 5,6,10 (D) 5,7,9 (E) 5,8,8

4. Resposta A

Fazendo as dobras indicadas, vemos que as faces opostas são 1 e 3, 2 e 4, 5 e 6, com somas 1 + 3 = 4, 2 + 4 = 6 e 5 + 6 = 11.



5. Qual dos números a seguir não é um número inteiro?

(A) $\frac{2011}{1}$ (B) $\frac{2012}{2}$ (C) $\frac{2013}{3}$ (D) $\frac{2014}{4}$ (E) $\frac{2015}{5}$

5. Resposta D

2011 é divisível por 1, 2012 é divisível por 2, 2013 é divisível por 3 e 2015 é divisível por 5. O número 2014 não é divisível por 4, logo o quociente de $\frac{2014}{4}$ não é inteiro.

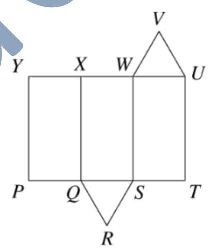
6. Uma viagem de Piracanjuba para Piapara passando por Piracema dura 130 minutos. O trecho entre Piapara e Piracema demora 35 minutos. Quanto tempo leva para percorrer o trecho entre Piracema e Piracanjuba?

(A) 55min (B) 1h 5min (C) 1h 35min (D) 1h 45min (E) 1h 55min

6. Resposta C

Como Piracema fica num ponto entre Piracanjuba e Piapara, concluímos que a viagem de Piracema para Piracanjuba dura 130 minutos menos 35 minutos, ou seja, 95 minutos. Isto corresponde a 60 + 35 min= 1h 35min.

7. A figura ao lado é a planificação de um prisma de base triangular. Quando dobramos a folha para montar o prisma, o segmento *UV* irá coincidir com outro segmento da planificação. Qual é esse segmento?



(A) *WV* (B) *XY* (C) *XW* (D) *QR* (E) *RS*

7. Resposta B

Dobrando ao longo de *WS* e depois ao longo de *WU* e *XQ*, vemos que *VW* se junta com *WX* e *VU* com *XY*.

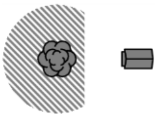
8. Os lados de um triângulo medem 6 cm, 10 cm e 11 cm. Um triângulo equilátero tem o mesmo perímetro que esse triângulo. Qual é a medida do lado do triângulo equilátero?

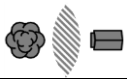
(A) 6 cm (B) 9 cm (C) 10 cm (D) 11 cm (E) 18 cm

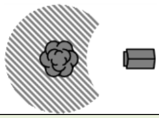
8. Resposta B

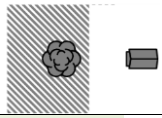
O perímetro do triângulo de lados 6, 10 e 11 centímetros é igual a $6+10+11=27$ cm. Como o triângulo equilátero tem lados iguais, a medida desses lados é igual a $\frac{27}{3}=9$ cm.

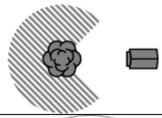
9. Quando o sagui Simão desce para o chão, ele não passa de cinco metros de distância do tronco da sua árvore. Além disso, ele sempre fica pelo menos a cinco metros de distância da casinha do cachorro. Qual das figuras abaixo mostra, hachurada, a parte do solo em que ele pode andar?

(A) 

(B) 

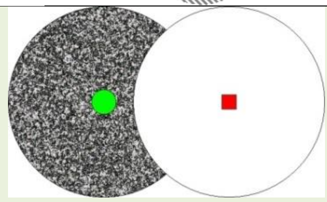
(C) 

(D) 

(E) 

9. Resposta C

Supondo que a distância entre o tronco e a casinha seja menor do que 10 metros, a região escura na figura ao lado representa a parte do solo em que Simão pode caminhar.



10. Um ciclista anda cinco metros por segundo. As rodas de sua bicicleta têm comprimento de 125 centímetros. Quantas voltas completas cada roda dá em cinco segundos?

(A) 4 (B) 5 (C) 10 (D) 20 (E) 25

10. Resposta D

Em 5 segundos o ciclista percorre $5x5 = 25$ metros e 25 metros = 2500 centímetros. A cada volta, as rodas da bicicleta andam 125 centímetros. Portanto, nesses 5 segundos, cada roda dá $\frac{2500}{125} = 20$ voltas.

Problemas de 4 pontos

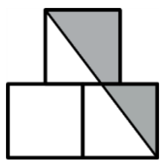
11. Numa classe do nono ano não há dois garotos que nasceram no mesmo dia da semana, nem duas garotas que nasceram no mesmo mês. Entretanto, se algum aluno novo for aceito na sala, uma dessas duas condições não será mais verdadeira. Quantos alunos há na sala?

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 24 (E) 25

11. Resposta B

Se o novo aluno for menino, deverá nascer no mesmo dia da semana que algum outro menino. Logo, há 7 meninos na sala, já que a semana tem 7 dias. Por outro lado, se entrar uma nova menina, deverá fazer o aniversário no mesmo mês que alguma outra menina. Logo, há 12 meninas na sala, já que o ano tem 12 meses. Portanto, no nono ano há 7 + 12 = 19 alunos.

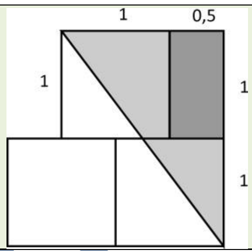
12. Na figura, o centro do quadrado de cima está alinhado com o lado comum dos dois quadrados de baixo. Os quadrados têm lados de medida 1. Qual é a área da região cinza?



(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) 1 (D) $1\frac{1}{4}$ (E) $1\frac{1}{2}$

12. Resposta C

Podemos completar a parte cinza com um retângulo 0,5 x 1, como na figura. A área total cinza é igual à metade da área de um retângulo 1,5 x 2, ou seja, 1,5. Retirando a área do retângulo mais escuro, igual a 0,5, sobra a área da região original cinza, igual a $1{,}5-0{,}5=1$.



13. Na igualdade

$$2*0*1*5*2*0*1*5*2*0*1*5=0,$$

todos os asteriscos devem ser substituídos pelos sinais $+$ ou $-$ de forma que a igualdade esteja correta. Qual é a menor quantidade possível de asteriscos que devem ser substituídos pelo sinal $+$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

13. Resposta B

Se somarmos todos os 12 números, obtemos $3\times(2+0+1+5)=24$, então após colocar os sinais de $+$ e $-$, a soma dos números positivos deve ser 12 e a dos negativos -12 para que no final o resultado seja 0. O primeiro 2 é sempre positivo (não há asterisco na frente) e como queremos a menor quantidade possível de sinais de $+$, devemos colocá-los nos maiores números, o que neste caso será em dois cincos para se obter o 12 (2 + 5 + 5 = 12). Logo, a menor quantidade de asteriscos substituídos pelo sinal $+$ é dois.

14. Durante uma chuva forte, caíram 15 litros de água por metro quadrado. De quanto subiu o nível de água de uma piscina que recebeu esta chuva?

(A) 0.15 cm (B) 1,5 cm (C) 15 cm (D) 150 cm (E) depende do tamanho da piscina

14. Resposta B

Um litro equivale a 1000 cm^3. Considere um recipiente cuja base tem um metro quadrado. Se 15 litros de água forem despejados no recipiente, a água ocupará um volume de $1000\times 15=15000\,cm^3$. Como a base tem $1m^2=10000cm^2$ e a água atinge uma altura h no recipiente, temos $10^4h=15000 \Leftrightarrow h=\frac{15000}{10000}=1{,}5$ cm.

15. Um arbusto tem 10 galhos. Cada galho tem cinco folhas ou duas folhas e uma flor. Qual dos números abaixo pode ser a quantidade total de folhas do arbusto?

(A) 31 (B) 37 (C) 39 (D) 45 (E) 47

15. Resposta E

Se x é o número de galhos com 5 folhas, então 10 – x é o número de galhos com duas folhas e uma flor. Portanto, a quantidade total de folhas no arbusto é igual a $5x+2(10-x)=5x+20-2x=3x+20=3(x+6)+2$. Entre os números dados, somente 47 serve, pois somente $47=3\cdot15+2$ deixa resto 2 quando dividido por 3.

16. A média aritmética das notas de Matemática dos alunos do nono ano foi 6. O número de alunos aprovados corresponde a 60% dos alunos que fizeram a prova e a média aritmética das notas desses alunos foi 8. Qual foi a média dos alunos que foram reprovados nessa prova?

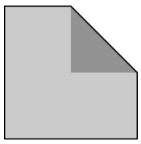
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

16. Resposta C

Se n é o número de alunos que fizeram a prova, então a média aritmética das notas dos n alunos é 6 e a média aritmética das notas de 60% de n = 0,6n alunos é 8.

A soma das notas de todos os alunos é 6n e a soma das notas dos alunos aprovados é $8\cdot0{,}6n=4{,}8n$. Logo, a soma das notas dos alunos reprovados é $6n-4{,}8n=1{,}2n$. Sendo 40% de n = 0,4n a quantidade desses alunos, concluímos que a média aritmética de suas notas é $\dfrac{1{,}2n}{0{,}4n}=3$.

17. Um canto de uma folha quadrada foi dobrado até o centro da folha, obtendo-se um pentágono, conforme a figura. As áreas do pentágono e da folha são números inteiros consecutivos. Qual é a área da folha?



(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16 (E) 32

17. Resposta C

A parte da folha que foi dobrada, junto com a parte que ela cobre, forma um quadrado cuja área é um quarto da área da folha. Portanto, a parte dobrada é a metade disso, ou seja, um oitavo. Logo, o pentágono tem área igual a $1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$ da área da folha. Se x é a área da folha, então x – 1 é a área do pentágono e

$$\frac{x-1}{x}=\frac{7}{8}\Leftrightarrow 8x-8=7x\Leftrightarrow x=8.$$

18. Raquel somou as medidas de três lados de um retângulo e obteve 44 cm. Renata somou as medidas de três lados do mesmo retângulo e achou 40 cm. Qual é o perímetro desse retângulo?

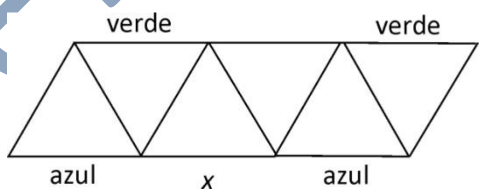
(A) 42 cm (B) 56 cm (C) 64 cm (D) 84 cm (E) 112 cm

18. Resposta B

O retângulo tem dois lados de medida *x* e dois lados de medida *y*. Raquel somou $2x+y=44$ e Renata somou $x+2y=40$. Somando lado a lado as duas equações, temos:

$2x+y+x+2y=44+40\Leftrightarrow 3x+3y=84\Leftrightarrow x+y=28$. Portanto, o perímetro é $2(x+y)=2\cdot 28=56$.

19. Cada um dos treze segmentos da figura pode ser pintado de azul, verde ou vermelho, desde que cada triângulo tenha seus lados com três cores diferentes. Alguns segmentos já foram pintados, conforme a figura. Qual cor pode ser usada para pintar o segmento indicado com *x*?

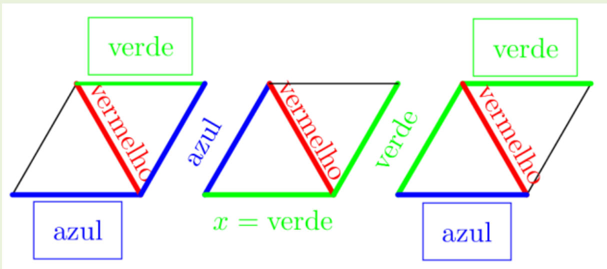


(A) somente azul (B) somente verde (C) somente vermelho

(D) azul ou vermelho (E) nenhuma delas

19. Resposta B

Nos dois primeiros triângulos (da esquerda para a direita), o lado em comum entre eles deve ser vermelho (já que o azul e verde já foram usados). Do mesmo modo, o lado comum entre os dois últimos triângulos também é vermelho. Assim, conseguimos preencher um lado do 3º e 4º triângulos com azul e verde, respectivamente. Portanto o lado comum entre eles será vermelho e o lado com um x terá que ser verde.



20. A professora Íris perguntou a cinco de seus alunos quais deles haviam estudado no dia anterior. Respostas de Ana, Beatriz, Carlos, Dina e Ernesto, respectivamente: "Ninguém", "Só um", "Exatamente dois", "Exatamente três" e "Exatamente quatro". Íris sabia que os que não estudaram não estavam dizendo a verdade, mas os que tinham estudado estavam dizendo a verdade. Quantos desses cinco alunos estudaram?

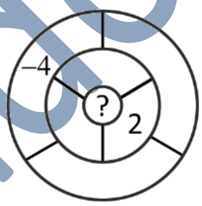
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

20. Resposta B

Observe que no máximo uma das cinco respostas dadas pode ser verdadeira. Além disso, se todas as respostas forem falsas, então nenhum deles estudou no dia anterior, logo quem respondeu “Ninguém” disse a verdade, absurdo. Portanto, exatamente uma das cinco respostas é verdadeira e apenas um dos cinco alunos estudou no dia anterior.

Problemas de 5 pontos

21. Lia deseja escrever um número em cada uma das sete regiões no diagrama ao lado, de modo que o número numa região qualquer deve ser igual à soma dos números escritos nas regiões vizinhas (regiões com linhas limites comuns). Ela já colocou alguns números, conforme a figura. Qual número deve ser escrito na região indicada pelo ponto de interrogação?



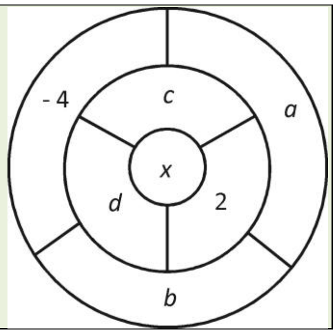
(A) –4 (B) –2 (C) 0 (D) 1 (E) 6

21. Resposta E

Da figura, temos $x = c + d + 2$. Temos também

$$\begin{cases} a = -4 + c + 2 + b \\ b = -4 + d + 2 + a \end{cases} \Rightarrow a + b = a + b + c + d - 4 \Leftrightarrow c + d = 4$$

Logo, $x = c + d + 2 = 4 + 2 = 6$.



22. Cinco números inteiros positivos, não necessariamente distintos, foram escritos em cinco cartões, um em cada cartão. Pedro calculou todas as possíveis somas dos números escritos em cada par de cartões, obtendo somente três resultados diferentes: 57, 70 e 83. Qual foi o maior número escrito nos cartões?

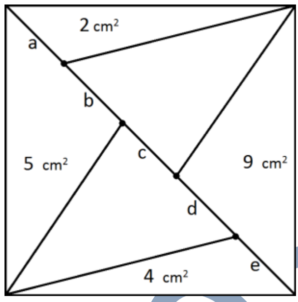
(A) 35 (B) 42 (C) 48 (D) 53 (E) 82

22. Resposta C

Se os cinco números fossem diferentes, Pedro obteria mais do que três somas diferentes. Logo, alguns números são iguais. A soma de dois números iguais é um número par e como apenas 70 é par, então $\frac{70}{2} = 35$ é o único número que se repete.

Por outro lado, as outras duas somas são ímpares e resultam das soma de números diferentes. Portanto, foram escritos apenas três números diferentes: 35, 83 – 35 = 48 e 57 – 35 = 22. Os cinco cartões foram numerados assim: 22, 35, 35, 35, 48. O maior deles é o 48.

23. Um quadrado de área 30 cm^2 é dividido pela metade por uma diagonal e cada uma dessas metades é dividida em triângulos, conforme figura. As áreas de alguns desses triângulos aí estão indicadas. A diagonal está dividida em cinco segmentos de comprimentos a, b, c, d, e. Qual dessas medidas é a maior?



(A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

23. Resposta D

A diagonal divide o quadrado em dois triângulos de área $\frac{30}{2}=15\text{ cm}^2$. Logo, as áreas dos triângulos de bases $b+c$ e $c+d$ são, respectivamente, $15-2-9=4\,\text{cm}^2$ e $15-5-4=6\,\text{cm}^2$. Os seis triângulos menores têm mesma altura (metade da diagonal do quadrado), logo suas áreas são proporcionais às medidas dos comprimentos de suas bases. Se dividirmos a diagonal do quadrado em 15 pedaços de comprimento p, então temos que $a=2p$, $a+b=5p$, $b+c=4p$, $c+d=6p$, $d+e=9p$ e $e=4p$, ou seja, $a=2p$, $b=5p-a=3p$, $c=4p-b=p$, $d=6p-c=5p$ e $e=9p-d=4p$. Portanto o segmento de maior comprimento tem medida **d**.

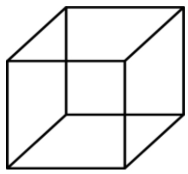
24. Num bando de cangurus, os dois mais leves pesam 25% da soma dos pesos de todos os cangurus do grupo. Os três cangurus mais gordos pesam 60% daquele mesmo total. Quantos cangurus há no grupo?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 15 (E) 20

24. Resposta A

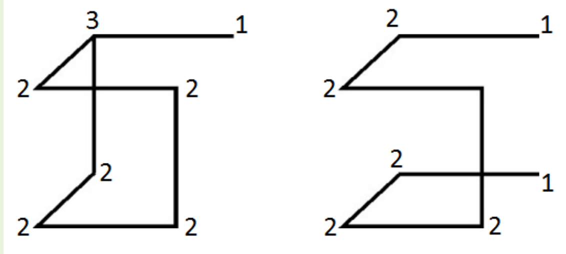
Se os dois cangurus mais leves pesam 25% do total e os três mais gordos pesam 60% do total, resta para os demais cangurus $100\%-25\%-60\%=15\%$ do total. Não pode haver dois cangurus nesse grupo, pois a soma de seus pesos seria menor que a dos dois mais leves. Logo, só pode haver um canguru entre os restantes. Portanto, o número total de cangurus é 2 + 3 + 1 = 6.

25. Ciro tem sete varetas de arame com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 centímetros de comprimento, respectivamente. Dobrando e soldando as pontas de algumas dessas peças, sem sobreposição de arestas, Ciro constrói um cubo de arame, representado ao lado. Pelo menos quantas varetas ele será obrigado a usar?

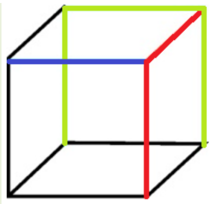


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

25. Resposta D



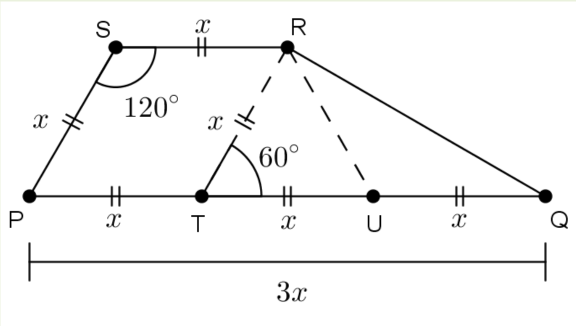
Observe que de cada vértice do cubo saem 3 arestas, enquanto que, ao dobrar um arame, de suas pontas saem 1 ou 3 arestas (3 no caso de a ponta ser soldada numa dobra anterior do arame) e de suas dobras saem 2 arestas. Portanto, não importa quantas vezes o arame é dobrado, apenas das pontas inicial e final é que saem um número ímpar de arestas. Como um cubo tem 8 arestas, são necessários pelo menos $\frac{8}{2}=4$ arames para que de cada vértice saia uma quantidade ímpar de arestas. Podemos construir um exemplo tomando quatro arames de medidas 1, 2, 3 e 6 centímetros. Ao dobrá-las conforme a figura ao lado, obtemos um cubo de 1 cm de lado.



26. No trapézio *PQRS*, os lados *PQ* e *SR* são paralelos. O ângulo $R\hat{S}P$ mede 120° e $RS = SP = \frac{1}{3}PQ$. Qual é a medida do ângulo $P\hat{Q}R$?

(A) 15° (B) $22{,}5^{\circ}$ (C) 25° (D) 30° (E) 45°

26. Resposta D



Seja $SR = SP = x$. Então $PQ = 3x$.

Traçamos a paralela $\overline{RT}$ a $\overline{SP}$. O quadrilátero *SRTP* é um losango, logo $TP = SR = x$. Como $\overline{SR}\,//\,\overline{TP}$ e $\overline{SP}\,//\,\overline{RT}$, temos $m(R\hat{T}U) = m(S\hat{P}T) = 180^{\circ} - m(R\hat{S}P) = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$.

Traçando a mediana $\overline{RU}$ do ΔRTQ, temos que $TU = UQ = x$ e o ΔRTU é equilátero, logo $RU = x$, $m(R\hat{U}T) = 60^{\circ}$ e o triângulo *RUQ* é isósceles, portanto $m\left(P\hat{Q}R\right) = m\left(R\hat{Q}U\right) = \frac{60^{\circ}}{2} = 30^{\circ}$.

27. Alexandre marcou cinco pontos distintos numa reta e mediu as distâncias entre todos os pares possíveis de pontos, obtendo os seguintes números, em ordem crescente: 2, 5, 6, 8, 9, *k*, 15, 17, 20 e 22. Qual é o valor de *k*?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

27. Resposta E

Há dois pontos cuja distância é 2 e há dois pontos cuja distância é 5. Esses não podem ser três pontos consecutivos, porque não há distância 7 nem distância 3. Podemos localizar os dois primeiros à esquerda e os outros dois à direita, sendo que a distância entre o primeiro e o último é 22. Há dois pontos cuja distância é 6 e dois pontos cuja distância é 8. Então os dois primeiros e este terceiro são consecutivos: 2, 6 e 8 são suas distâncias. A posição dos pontos é a seguinte:

As distâncias possíveis são 2, 8, 17, 22, 6, 15, 20, 9, 14 e 5. Logo, $k = 14$.

28. Eliana anotou o número de telefone de sua amiga, mas em vez de anotar sete algarismos, anotou somente seis. Sobre o algarismo esquecido, ela não tem a menor ideia de qual é nem de sua posição no número. Qual é o maior número possível de chamadas que ela poderá dar, até poder falar com sua amiga no telefone?

(A) 55 (B) 60 (C) 64 (D) 70 (E) 80

28. Resposta C

Se Eliana anotou o número ABCDEF e falta um algarismo, este pode ocupar uma das sete posições indicadas a seguir: _A_B_C_D_E_F_. O algarismo que falta pode ser zero. Na posição à esquerda de A, temos 10 possibilidades. À esquerda de B, temos apenas 9 possibilidades. Não é difícil ver isto: quando foram feitas as tentativas com o algarismo à esquerda de A, um desses algarismos era o próprio A: o número era AABCDEF. Na posição à esquerda de B (ou direita de A), o algarismo A também vai aparecer, ou seja, o número AABCDEF aparece novamente. O mesmo ocorre à direita de B, C, D, E, F. Portanto, o número total de chamadas que Eliana pode dar é 10 + 9 x 6 = 64.

29. Maria divide 2015 sucessivamente por todos os inteiros de 1 a 1000 e anota os restos dessas divisões. Qual é o maior desses restos?

(A) 15 (B) 215 (C) 671 (D) 999 (E) 1007

29. Resposta C

Como queremos o maior resto possível, pensamos na divisão pelo maior número, depois pelo seu antecessor, e assim sucessivamente, para verificar o que ocorre:

divisor	quociente	resto
999	2	17
998	2	19
997	2	21
⋮	⋮	⋮

A tabela sugere que o menor número para o qual o quociente é 2 é 672, uma vez que no começo, os restos aumentam de 2 em 2. Neste caso o resto da divisão é $2015 - 672 \cdot 2 = 2015 - 1344 = 671$. Note que, ao dividir por números menores ou iguais a 671, o resto será menor do que 671. Portanto, o maior resto possível é 671.

30. Todo número inteiro positivo pode ser pintado de acordo com as três regras a seguir:

(i) cada número só pode ter uma das duas cores: azul ou vermelho.

(ii) a soma de dois números vermelhos distintos é um número vermelho.

(iii) a soma de dois números azuis distintos é um número azul.

De quantas maneiras diferentes os números podem ser pintados?

(A) nenhuma (B) 2 (C) 4 (D) 6

30. Resposta D

Como 1 + 2 = 3, vamos analisar o que ocorre com os três primeiros números inteiros positivos. As possibilidades são AAA, AAV, AVA, VAA, VVA, VAV, AVV, VVV (A, azul e V, vermelho).

Os casos AAA e VVV são imediatos: se o 1 e o 2 forem de mesma cor, todos os números terão esta cor.

Os casos VVA e AAV também são imediatos: não é possível que isto ocorra.

Resta analisar os casos AVA,VAA, VAV, AVV. A tabela abaixo mostra que estes casos são possíveis:

	1	2	3	4	5	6	7	...
i	A	V	A	A	A	A	A	...
ii	V	A	A	A	A	A	A	...
iii	V	A	V	V	V	V	V	...
iv	A	V	V	V	V	V	V	...

Nos casos i e iii, vemos que os números $1+3=4$, $1+4=5$, $1+5=6$,..., devem ter todos a mesma cor dos números 1 e 3, portanto há apenas uma pintura possível, em que apenas um número é de cor diferente: o 2.

Nos casos ii e iv, vemos que os números 2, 3, $2+3=5$, $2+5=7$, $2+7=9$,..., têm todos a mesma cor, assim como os números 3, 5, $3+5=8$, $3+7=10$, $3+9=12$, etc. Faltam as cores dos números 4 e 6: se forem da mesma cor que 1, os números 1, 4, 6, $1+4=5$, $1+6=7$ têm todos a mesma cor, o que é absurdo. Logo, 4 e 6 têm a mesma cor que 2 e há apenas uma pintura, em que o único número de cor distinta é o 1.

Portanto, há exatamente 6 maneiras de colorir os números.