Estratégia
Militares

Aula 01

Quadriláteros

EPCAR - 2020

Prof. Ismael Santos

Sumário

1 – Introdução

Olá, querido aluno!

Como andam os estudos? Espero que bem!!

Vamos à nossa aula!

O primeiro dos assuntos é: **Quadriláteros**. Tema muito importante para qualquer concurso militar, ainda mais o seu. Desta forma, peço que preste bastante atenção na teoria, além de praticar bastante cada propriedade. Este tópico irá ajudar lá na frente. Não dê mole. Foco total.

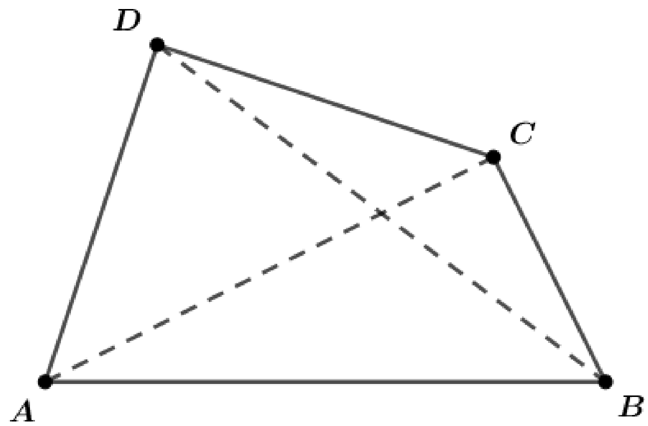
Simbora?

Fale comigo!

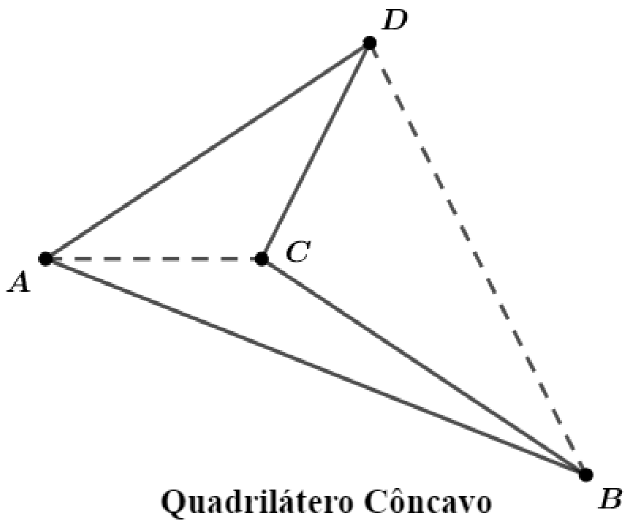
@profismael_santos	*Ismael Santos*	*@IsmaelSantos*

2. Quadriláteros Notáveis

Um quadrilátero é formado pela união de 4 pontos distintos do plano e três desses pontos não podem ser colineares. Vejamos os dois tipos de quadriláteros abaixo:



Quadrilátero Convexo



Quadrilátero Côncavo

Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais dos quadriláteros acima. A soma dos ângulos internos do quadrilátero é igual a $360°$ e a soma dos ângulos externos também é igual a $360°$. Basta notar que o quadrilátero é formado pela união de dois triângulos, por exemplo, no caso do quadrilátero convexo, temos a união dos triângulos ABD e CBD.

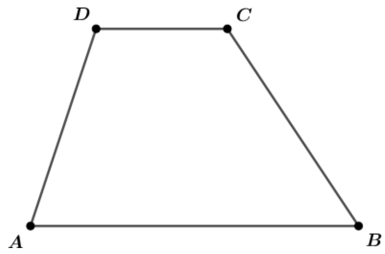
Para nossa prova, vamos estudar apenas os quadriláteros convexos. Os principais que podem ser cobrados na prova são: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado.

2.1 – Trapézio

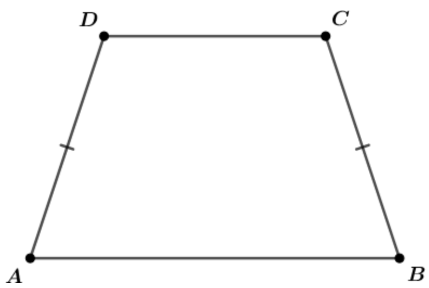
- **Definição**

Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se possui dois lados paralelos entre si. Chamamos esses lados de base do trapézio. Essa figura geométrica pode receber a seguinte classificação dependendo dos lados adjacentes às bases:

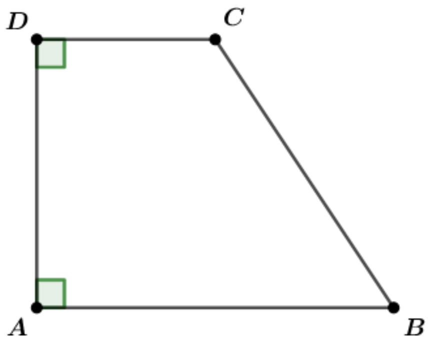
Trapézio Escaleno: os lados adjacentes não são congruentes.



Trapézio Isósceles: os lados adjacentes são congruentes.

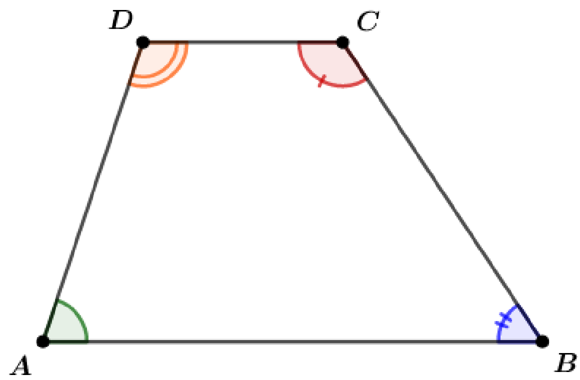


Trapézio Retângulo: um dos lados adjacentes forma dois ângulos retos com as bases.



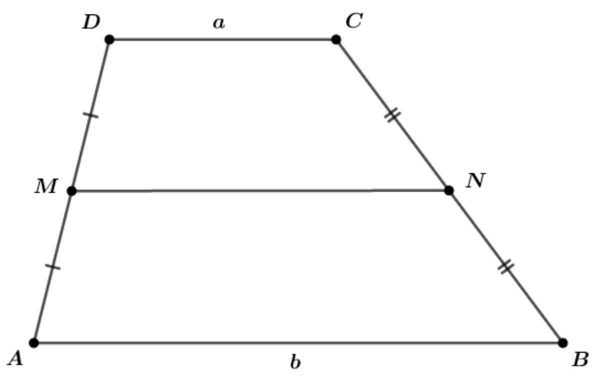
- **Propriedades**

Ângulo Interno



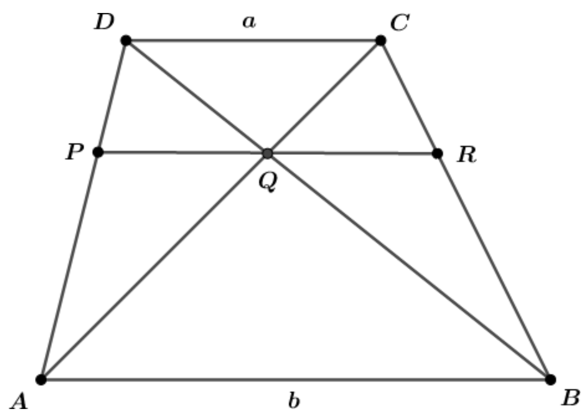
$$A + D = B + C = 180°$$

Base Média



$$MN = \frac{a+b}{2}$$

Base que intercepta o encontro das diagonais



Sejam P, Q, R pontos do trapézio, tal que Q é o ponto de encontro das diagonais e PR é paralelo às bases AB e CD. Então:

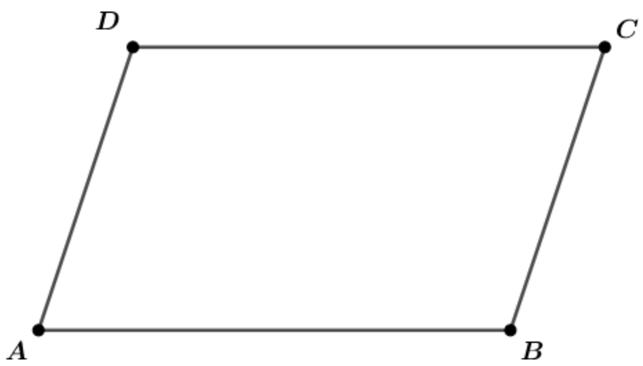
$$PQ = QR = \frac{ab}{a+b}$$

$$\boldsymbol{PR = \frac{2ab}{a+b}}$$

2.2 - Paralelogramo

- **Definição**

Um quadrilátero plano convexo é classificado como paralelogramo quando seus lados opostos são paralelos.

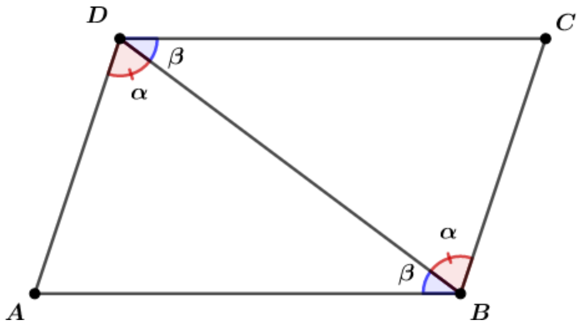


$\boldsymbol{\overline{AB} // \overline{CD}}$ e $\boldsymbol{\overline{AD} // \overline{BC}}$

- **Propriedades**

Lados Opostos Congruentes

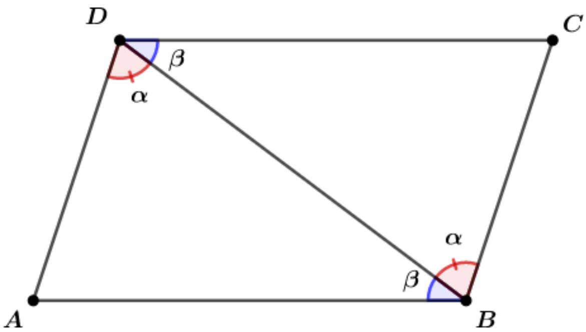
Traçando-se a diagonal $\overline{BD}$ temos pela propriedade das retas paralelas:



Pelo critério de congruência *ALA,* temos $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$, então:

$$\overline{AD} = \overline{BC} \;\; e \;\; \overline{AB} = \overline{CD}$$

Ângulos Opostos Congruentes



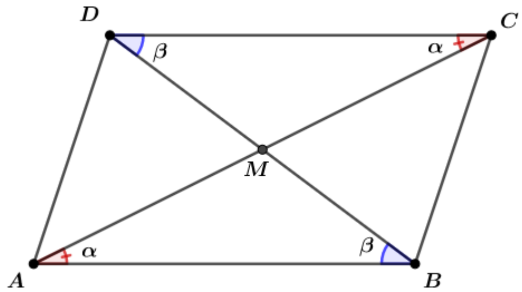
Note que $\widehat{D} = \alpha + \beta$ e $\widehat{B} = \alpha + \beta$, logo:

$$\widehat{B} \equiv \widehat{D}$$

Analogamente para $\hat{A}\; e\; \hat{C}$:

$$\hat{A} \equiv \hat{C}$$

As Diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios



Se $ABCD$ é um paralelogramo, então?

$$AB = CD$$

$$A\hat{B}D \equiv B\hat{D}C \text{ e } B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$$

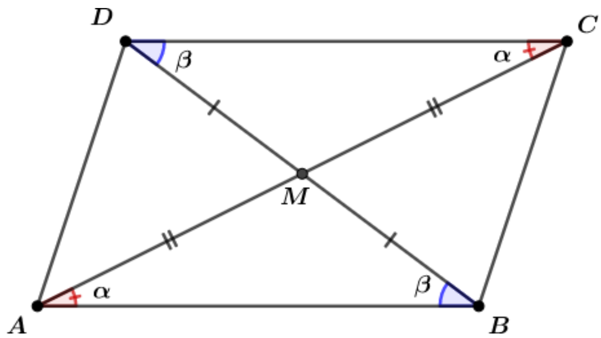
Pelo critério de congruência *ALA*, temos:

$$\Delta AMB \equiv \Delta CMD$$

Logo:

$$MD = MB \ e \ AM = CM$$

Portanto, M é ponto médio das diagonais



2.3 - Retângulo

- **Definição**

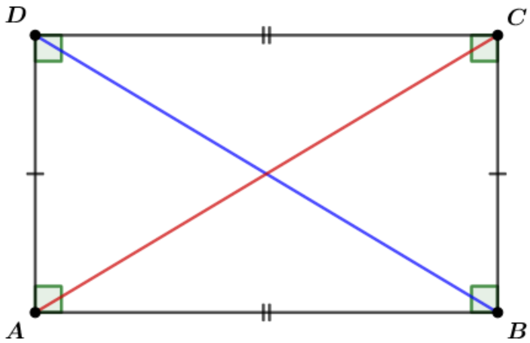
Se um quadrilátero plano convexo é equiângulo, então, ele é um retângulo.

- **Propriedades**

Todo retângulo é paralelogramo

Pela definição de ângulos opostos congruentes do paralelogramo, como todos os ângulos internos do retângulo são congruentes, temos que todo retângulo é paralelogramo. Logo, todas as propriedades do paralelogramo são válidas para o retângulo.

Diagonais congruentes

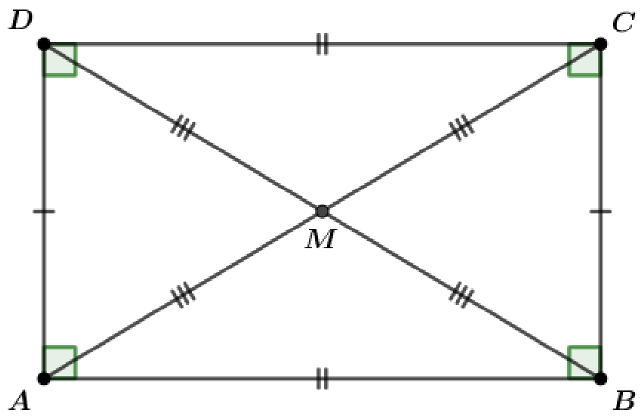


Sabendo que todo retângulo é um paralelogramo, então, $AB = CD$ e $AD = BC$. Usando o critério de congruência *LAL*:

$$AD = BC,\ \hat{A} \equiv \hat{B} \text{ e } AB = AB \Rightarrow \Delta ABD \equiv \Delta BAC \Rightarrow AC = BD$$

Uma consequência dessa propriedade é que se M é o ponto de cruzamento das diagonais do retângulo, temos:

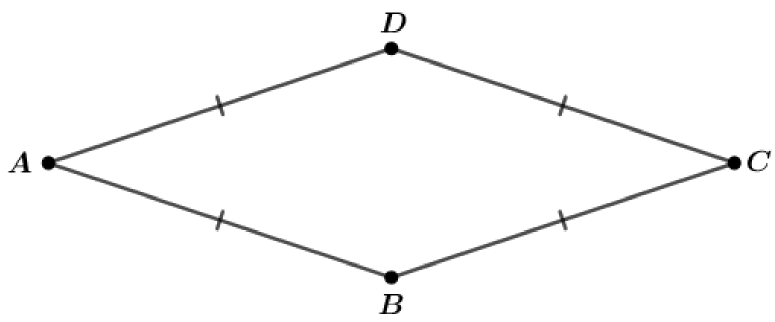
$$AM = MC = DM = MB$$



2.4 - Losango

- **Definição**

Um quadrilátero plano convexo é equilátero, então, ele é um losango.



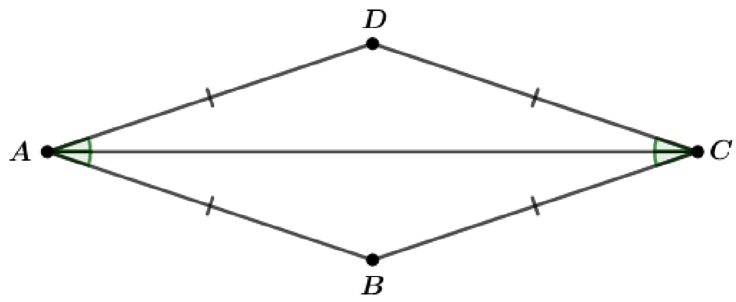
- **Propriedades**

Todo losango é um paralelogramo.

Todas as propriedades do paralelogramo são válidas para o losango.

As diagonais são bissetrizes e mediatrizes.

Como o losango é equilátero, temos:



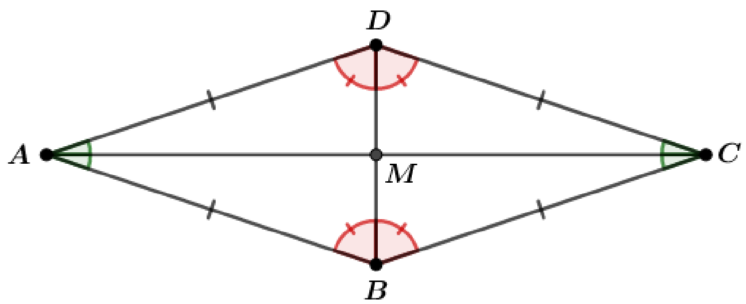
Os triângulos ACD e ACB são isósceles, então, como $AD = CD = AB = CB$ e $\overline{AC}$ é um segmento em comum.

$D\hat{A}C \equiv D\hat{C}A \equiv B\hat{A}C \equiv B\hat{C}A$

Logo, a diagonal $\overline{AC}$ é bissetriz do losango. Analogamente, podemos provar que $\overline{BD}$ também é bissetriz.

Assim, os ângulos opostos são congruentes, portanto, um losango também é um paralelogramo.

Seja M o ponto de intersecção das diagonais:



Como $ABCD$ também é um paralelogramo, temos que M divide as diagonais ao meio. Então:

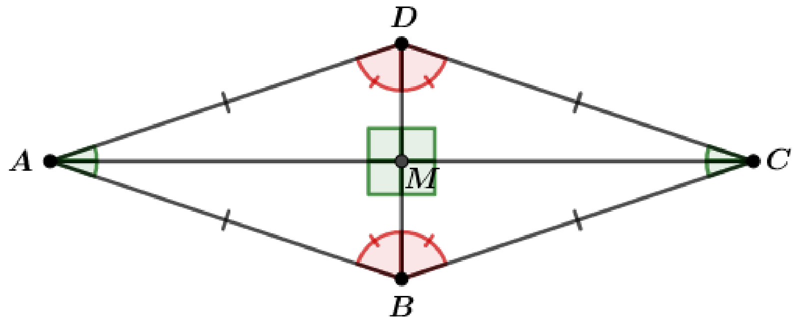
$AM = MC$ e $DM = MB$

Usando o critério de congruência *LLL*, temos:

$\Delta MAD \equiv \Delta MAB \equiv \Delta MCB \equiv \Delta MCD \Rightarrow A\widehat{M}D \equiv A\widehat{M}B \equiv C\widehat{M}D = \theta$

$$\theta + \theta + \theta + \theta = 360° \Rightarrow \theta = 90°$$

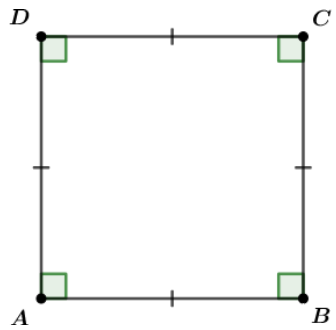
Desse modo, as diagonais são perpendiculares entre si e M é o ponto médio deles, portanto, as diagonais também são mediatrizes.



2.5 - Quadrado

- **Definição**

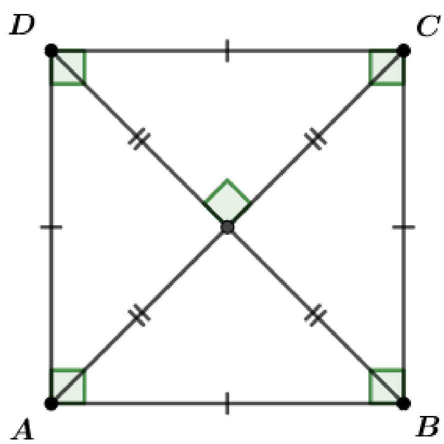
Um quadrilátero convexo plano é um quadrado quando é equilátero e equiângulo.



- **Propriedades**

Todo quadrado é um retângulo e losango

Todas as propriedades do retângulo e losango são válidas para o quadrado.



3 – Lista de Questões

1. (Uece 2019) José somou as medidas de três dos lados de um retângulo e obteve $40\text{ cm}.$ João somou as medidas de três dos lados do mesmo retângulo e obteve $44\text{ cm}.$ Com essas informações, pode-se afirmar corretamente que a medida, em $\text{cm},$ do perímetro do retângulo é

a) $48.$
b) $52.$
c) $46.$
d) $56.$

---

2. (Uece 2019) No retângulo $OYZW,$ E é um ponto do lado ZW equidistante de O e $Z.$ Se a medida do ângulo $W\hat{O}E$ é sete vezes a medida do ângulo $Z\hat{O}Y,$ então, a medida, em graus, do ângulo $E\hat{O}Z$ é

a) $20.$
b) $15.$
c) $10.$
d) $5.$

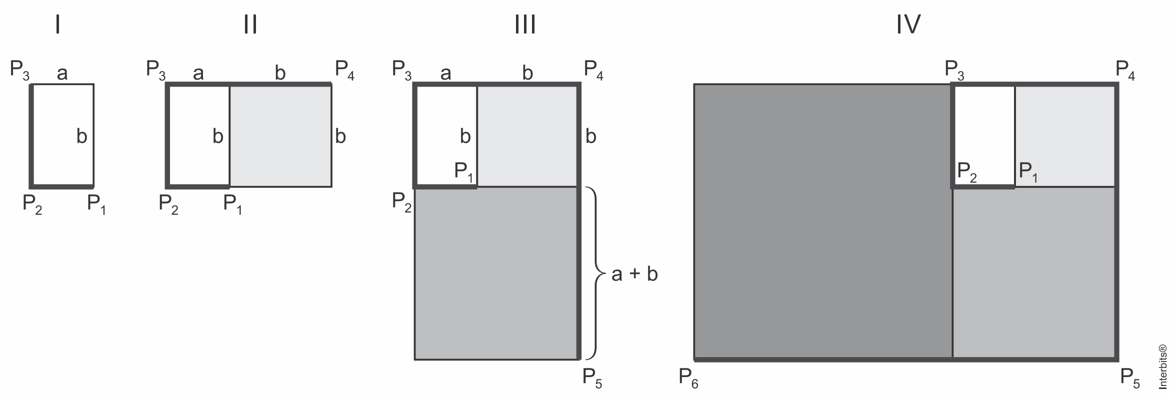
---

3. (Uece 2018) Em um plano, duas circunferências têm seus centros nos pontos P e Q e as medidas de seus raios são ambas iguais a $3\text{ m}.$ Se essas circunferências cortam-se nos pontos R e S e se a distância entre P e Q é igual à distância entre R e $S,$ então, a medida da área do quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos P, Q, R e $S,$ em $m^2,$ é

a) $18.$
b) $9\sqrt{2}.$
c) $9\sqrt{3}.$
d) $9.$

---

4. (Uerj 2018) Admitindo um retângulo cujos lados medem a e $b,$ sendo $a < b,$ é possível formar uma sequência ilimitada de retângulos da seguinte forma: a partir do primeiro, cada novo retângulo é construído acrescentando-se um quadrado cujo lado é igual ao maior lado do retângulo anterior, conforme ilustrado a seguir.



A figura IV destaca a linha poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, formada pelos lados dos retângulos, que são os elementos da sequência $(a, b, a+b, a+2b, 2a+3b)$.

Mantendo o mesmo padrão de construção, o comprimento da linha poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$, de P_1 até o vértice P_7, é igual a:

a) $5a+7b$

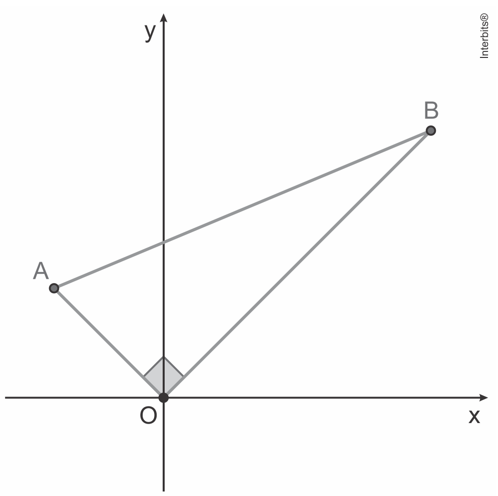
b) $8a+12b$

c) $13a+20b$

d) $21a+33b$

---

5. (Upf 2017) Na figura a seguir, está representado, num referencial xy, um triângulo AOB.



Sabe-se que:

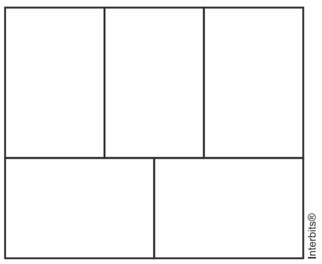
1. a semirreta AO é a bissetriz do 2º quadrante;
2. a semirreta OB é a bissetriz do 1º quadrante;

3. a ordenada do ponto B excede em 3 unidades a ordenada do ponto A;
4. a área do triângulo AOB é igual a 10.

As coordenadas dos pontos A e B são:
a) $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $B\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$
b) $A(-1, 1)$ e $B(4, 4)$
c) $A(-2, 2)$ e $B(5, 5)$
d) $A(-3, 3)$ e $B(6, 6)$
e) $A(-4, 4)$ e $B(7, 7)$

---

6. (G1 - ifce 2016) Um terreno com perímetro de 176 m é subdividido em 5 retângulos congruentes, como mostrado na figura a seguir.



O perímetro de qualquer um dos 5 retângulos congruentes vale, em m,
a) 80.
b) 76.
c) $35,2$.
d) 84.
e) 86.

---

7. (Ufjf-pism 1 2016) Sejam A, B, C e D os vértices de um trapézio isósceles. Os ângulos A e B ambos agudos são os ângulos da base desse trapézio, enquanto que os ângulos C e D são ambos obtusos e medem cada um, o dobro da medida de cada ângulo agudo desse trapézio. Sabe-se ainda que a diagonal $\overline{AC}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$. Sendo a medida do lado $\overline{AB}$ igual a 10 cm, o valor da medida do perímetro do trapézio $ABCD$, em centímetros, é:
a) 21
b) 22

c) 23
d) 24
e) 25

---

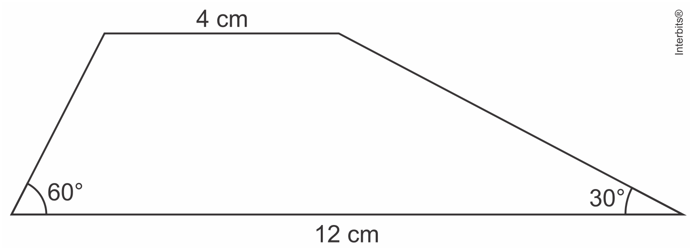
8. (G1 - ifal 2016) Julgue as afirmativas abaixo e assinale a alternativa correta.

I. Todo paralelogramo é losango.
II. Se um quadrilátero tem todos os lados com a mesma medida, então esse quadrilátero é um quadrado.
III. As diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si.
a) Só I é verdadeira.
b) Só II é verdadeira.
c) Só III é verdadeira.
d) I e III são verdadeiras.
e) II e III são verdadeiras.

9. (Uece 2016) No retângulo $PQRS$, a medida dos lados PQ e QR são respectivamente $3\,m$ e $2\,m$. Se V é um ponto do lado PQ tal que a medida do segmento VQ é igual a $1\,m$ e U é o ponto médio do lado PS, então, a medida, em graus, do ângulo $V\hat{U}R$ é
a) 40.
b) 35.
c) 50.
d) 45.

---

10. (Uefs 2016)



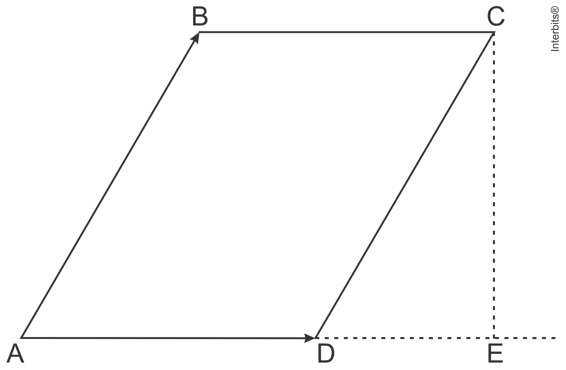
O trapézio representado na figura tem bases medindo 12 cm e 4 cm, e os ângulos internos da base maior medem $60°$ e $30°$.

Seu perímetro, em cm, é igual a

a) $16+4\sqrt{2}$
b) $16+4\sqrt{3}$
c) $20+3\sqrt{2}$
d) $20+4\sqrt{2}$
e) $20+4\sqrt{3}$

---

11. (Ucs 2016) Na figura a seguir, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, em que os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ representam duas forças, sendo $\text{med}\left(\overline{AD}\right)=80,$ $\text{med}\left(\overline{AB}\right)=100$ e $\text{med}\left(A\hat{B}C\right)=120°.$

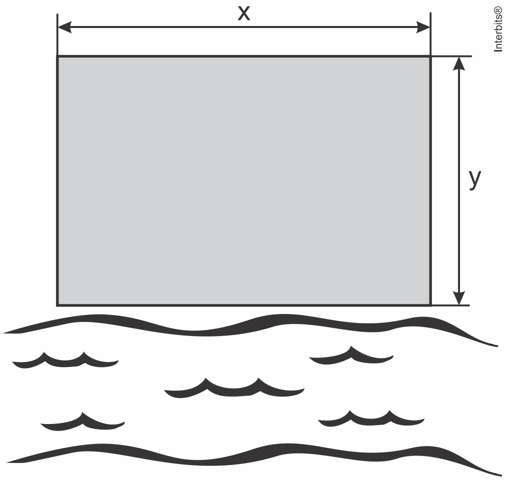


Assinale a alternativa que contém a afirmação correta sobre a $\text{med}\left(\overline{AE}\right)$ do segmento $\overline{AE},$ e sobre a medida q do ângulo $D\hat{A}C.$

a) $\text{med}\left(\overline{AE}\right)=50$ e $q=30°$
b) $\text{med}\left(\overline{AE}\right)=130$ e $q=30°$
c) $\text{med}\left(\overline{AE}\right)=130$ e $q>30°$
d) $\text{med}\left(\overline{AE}\right)=50$ e $q<30°$
e) $\text{med}\left(\overline{AE}\right)=85$ e $q=30°$

---

12. (Enem 2ª aplicação 2016) Um terreno retangular de lados cujas medidas, em metro, são x e y será cercado para a construção de um parque de diversões. Um dos lados do terreno encontra-se às margens de um rio. Observe a figura.



Para cercar todo o terreno, o proprietário gastará R$ 7.500,00. O material da cerca custa R$ 4,00 por metro para os lados do terreno paralelos ao rio, e R$ 2,00 por metro para os demais lados.

Nessas condições, as dimensões do terreno e o custo total do material podem ser relacionados pela equação

a) $4(2x+y)=7.500$

b) $4(x+2y)=7.500$

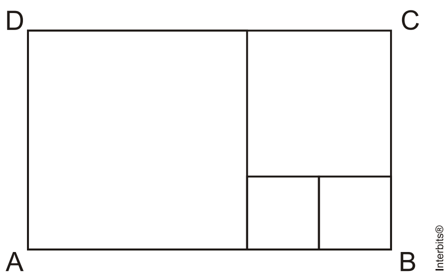
c) $2(x+y)=7.500$

d) $2(4x+y)=7.500$

e) $2(2x+y)=7.500$

---

13. (Unicamp 2015) A figura abaixo exibe um retângulo ABCD decomposto em quatro quadrados.



O valor da razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ é igual a

a) $\frac{5}{3}$.

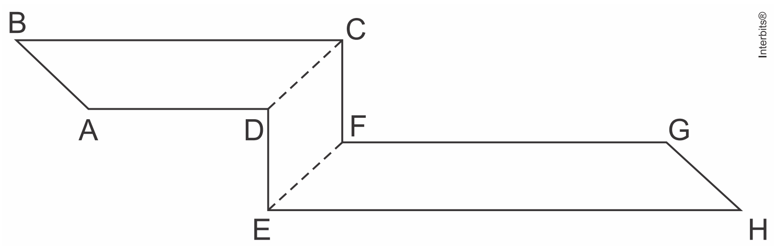
b) $\frac{5}{2}$.

c) $\frac{4}{3}$.

d) $\frac{3}{2}$.

---

14. (G1 - cftmg 2015) A figura abaixo é plana e composta por dois trapézios isósceles e um losango.



O comprimento da base maior do trapézio $ABCD$ é igual ao da base menor do trapézio $EFGH$, que vale $2x$ e, a base maior de cada trapézio é o dobro da base menor, e o lado EF do losango vale y.
O perímetro da figura dada, expresso em função de x e y, é

a) $6x + 4y$

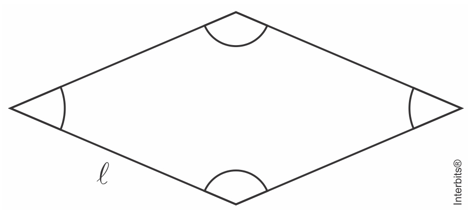
b) $9x + 4y$

c) $12x + 2y$

d) $15x + 2y$

---

15. (Ucs 2015) No losango abaixo dois ângulos medem $120°$ e o lado ℓ mede $4\,cm$.



Qual das expressões a seguir, corresponde à soma das medidas das diagonais do losango?

a) $4(1+\sqrt{3})$

b) $1+\sqrt{3}$

c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

---

16. (Fgv 2015) A figura representa um trapézio isósceles $ABCD$, com $AD = BC = 4cm$. M é o ponto médio de $\overline{AD}$, e o ângulo $B\hat{M}C$ é reto.

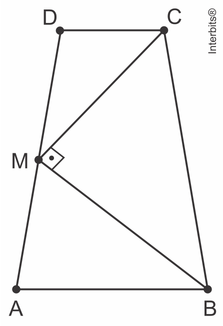


Figura fora de escala

O perímetro do trapézio $ABCD$, em cm, é igual a
a) 8.
b) 10.
c) 12.
d) 14.
e) 15.

---

17. (Ufjf-pism 1 2015) Dadas as seguintes afirmações:

I. Se um paralelogramo tem dois ângulos de vértices consecutivos congruentes, então ele é um retângulo.
II. A altura de um trapézio retângulo que tem o ângulo agudo medindo $30°$ é igual à metade do lado não perpendicular às bases.
III. Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e perpendiculares, então elas são bissetrizes dos ângulos desse quadrilátero.

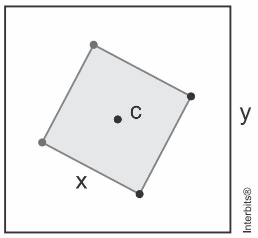
É **CORRETO** afirmar que:
a) Apenas I é verdadeira.
b) Apenas II é verdadeira.
c) Todas as afirmações são verdadeiras.
d) Apenas I e II são verdadeiras.

e) Apenas II e III são verdadeiras.

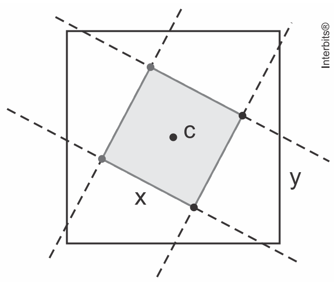
---

18. (G1 - cp2 2015) Em uma aula de Artes Visuais, a professora pediu aos seus alunos que construíssem um quadrado a partir do recorte de dois quadrados de lados medindo x e y. Mirian, uma das alunas mais criativas, decidiu confeccionar a sua peça quadrada de acordo com os passos seguintes:

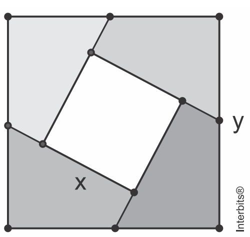
Passo 1 – marcou o centro dos dois quadrados, colocou um sobre o outro, fazendo com que os centros coincidissem no ponto C.



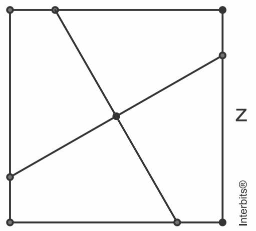
Passo 2 – traçou retas pontilhadas sobre os lados do quadrado menor.



Passo 3 – recortou quatro quadriláteros congruentes a partir da área visível do quadrado maior.



Passo 4 – posicionou os quatro quadriláteros de tal maneira que formassem um novo quadrado de lado de medida z.



Uma relação válida entre as medidas x, y e z dos lados dos quadrados é

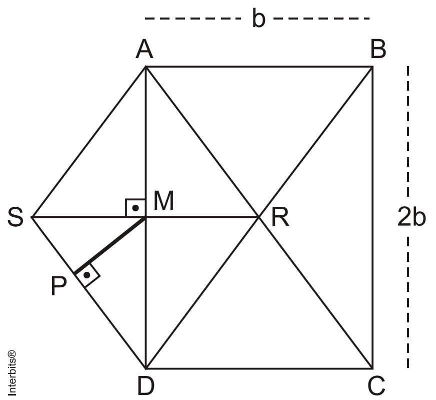
a) $z = y - x.$

b) $z = \frac{y - x}{2}.$

c) $z = \sqrt{y - x}.$

d) $z = \sqrt{y^2 - x^2}.$

19**.** (G1 - cftmg 2014) Nessa figura, ABCD é um retângulo cujos lados medem *b* e 2*b*. O ponto R pertence aos segmentos AC e BD e, ARDS é um quadrilátero em que M é ponto médio do segmento RS.



O segmento MP, expresso em função de *b*, é

a) $\frac{b\sqrt{5}}{5}.$

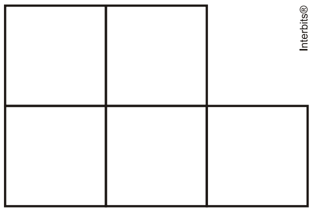
b) $\frac{b\sqrt{5}}{3}.$

c) $\frac{2b\sqrt{5}}{3}.$

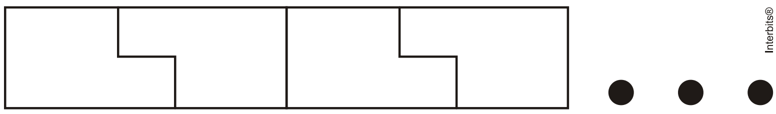
d) $\frac{3b\sqrt{5}}{5}.$

---

20. (Upe 2014) A figura a seguir mostra uma das peças do jogo “Pentaminós”.



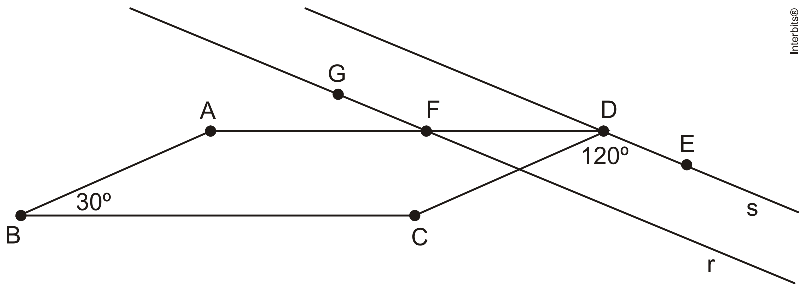
Cada peça é formada por cinco quadradinhos, e o lado de cada quadradinho mede 5cm.
Com 120 dessas peças, Jorge montou uma faixa, encaixando perfeitamente as peças como mostra a figura a seguir:



Quanto mede o perímetro dessa faixa?
a) 1 200 cm
b) 1 500 cm
c) 3 000 cm
d) 3 020 cm
e) 6 000 cm

---

21. (G1 - cftrj 2014) Na figura abaixo, ABCD é um paralelogramo, as retas r e s são paralelas, D e E são pontos de s, F e G são pontos de r, F é um ponto de AD, $A\hat{B}C = 30^\circ$ e $C\hat{D}E = 120^\circ$. Quanto mede, em graus, o ângulo $D\hat{F}G$?



a) 120°
b) 130°
c) 140°
d) 150°

22. (Enem 2014) Diariamente, uma residência consome $20.160\text{Wh}.$ Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões $6\text{cm} \times 8\text{cm}.$ Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?
a) Retirar 16 células.
b) Retirar 40 células.
c) Acrescentar 5 células.
d) Acrescentar 20 células.
e) Acrescentar 40 células.

23. (Ita 2014) Considere o trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}.$ Sejam M e N os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD},$ respectivamente. Então, se $\overline{AB}$ tem comprimento x e $\overline{CD}$ tem comprimento $y < x,$ $\overline{MN}$ é igual a
a) $x - y.$
b) $\frac{1}{2}(x - y).$
c) $\frac{1}{3}(x - y).$
d) $\frac{1}{3}(x + y).$
e) $\frac{1}{4}(x + y).$

24. (G1 - ifsp 2014) Considerando que as medidas de dois ângulos opostos de um losango são dadas, em graus, por $3x + 60°$ e $135° - 2x,$ a medida do menor ângulo desse losango é
a) 75°.
b) 70°.
c) 65°.
d) 60°.
e) 55°.

25. (Ufrn 2013) Uma indústria compra placas de alumínio em formato retangular e as corta em quatro partes, das quais duas têm a forma de triângulos retângulos isósceles (Fig. 1). Depois, reordena as quatro partes para construir novas placas no formato apresentado na Fig. 2.

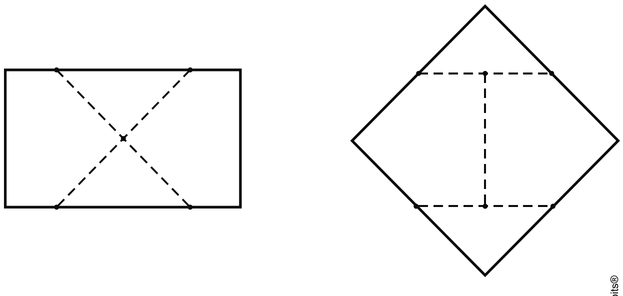


Fig.1: Placa retangular

Fig. 2: Nova placa

Interbits®

Se a medida do lado menor da placa retangular é 30 cm, a medida do lado maior é

a) 70 cm.

b) 40 cm.

c) 50 cm.

d) 60 cm.

---

26. (Enem PPL 2012) Em uma das paredes de um depósito existem compartimentos de mesmo tamanho para armazenamento de caixas de dimensões frontais a e b. A terceira dimensão da caixa coincide com a profundidade de cada um dos compartimentos. Inicialmente as caixas são arrumadas, em cada um deles, como representado na Figura 1. A fim de aproveitar melhor o espaço, uma nova proposta de disposição das caixas foi idealizada e está indicada na Figura 2. Essa nova proposta possibilitaria o aumento do número de caixas armazenadas de 10 para 12 e a eliminação de folgas.

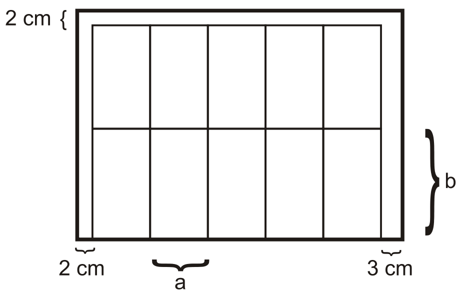


Figura 1

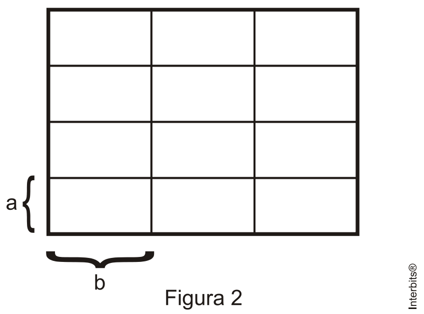


Figura 2

É possível ocorrer a troca de arrumação segundo a nova proposta?

a) Não, porque a segunda proposta deixa uma folga de 4 cm na altura do compartimento, que é de 12 cm, o que permitiria colocar um número maior de caixas.

b) Não, porque, para aceitar a segunda proposta, seria necessário praticamente dobrar a altura e reduzir à metade a largura do compartimento.

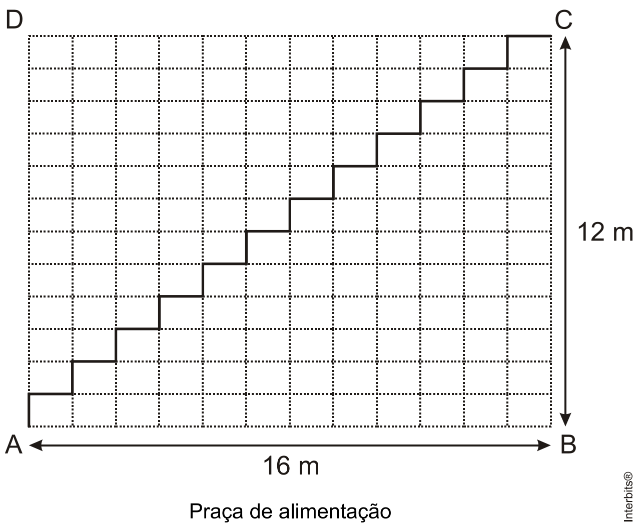
c) Sim, porque a nova disposição das caixas ficaria acomodada perfeitamente no compartimento de 20 cm de altura por 27 cm de largura.

d) Sim, pois efetivamente aumentaria o número de caixas e reduziria o número de folgas para apenas uma de 2 cm na largura do compartimento.

e) Sim, porque a nova disposição de caixas ficaria acomodada perfeitamente no compartimento de 32 cm de altura por 45 cm de largura.

---

27. (Udesc 2012) Numa praça de alimentação retangular, com dimensões 12 m por 16 m, as mesas estão dispostas em fileiras paralelas às laterais do ambiente, conforme o esquema da figura, sendo as linhas pontilhadas os corredores entre as mesas.



Pela disposição das mesas, existem várias maneiras de se chegar do ponto *A* ao ponto *C*, movendo-se apenas pelos corredores. Seguindo-se o caminho destacado e desprezando-se a largura dos corredores, a distância percorrida é:

a) 12 m
b) 20 m
c) 24 m
d) 28 m
e) 16 m

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:
Considere um losango ABCD em que M, N, P e Q são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Um dos ângulos internos desse losango mede α, sendo $0° < \alpha < 90°$.

28. (Insper 2012) Se $\alpha = 60°$, então a razão entre o perímetro do losango ABCD e o perímetro do quadrilátero MNPQ, nessa ordem, é igual a

a) $\sqrt{3}+1$
b) 2.
c) $\sqrt{3}$.
d) $\frac{3}{2}$.
e) $2\sqrt{3}-2$.

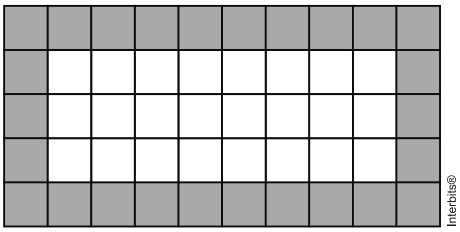
---

29. (Insper 2012) Nessas condições, o quadrilátero convexo MNPQ

a) é um quadrado.
b) é um retângulo que não é losango.
c) é um losango que não é retângulo.
d) é um paralelogramo que não é retângulo nem losango.
e) não possui lados paralelos.

---

30. (Espm 2011) Uma parede retangular cujo comprimento mede o dobro da altura, foi revestida com azulejos quadrados, inteiros e de mesmo tamanho, sendo que, em todo o contorno externo, foi feita uma faixa decorativa com 68 peças mais escuras, como na figura exemplo abaixo.



O número de azulejos mais claros usados no interior da parede foi de:
a) 260
b) 246
c) 268
d) 312
e) 220

-
31. (G1 - ifsc 2011) O perímetro de um losango é 40 cm e uma diagonal mede 16 cm. A outra diagonal mede:
a) 10 cm.
b) 6 cm.
c) 12 cm.
d) 8 cm.
e) 5 cm.

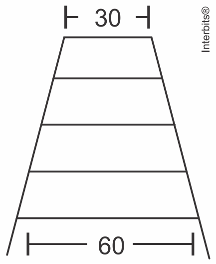
---

32. (G1 - ifce 2011) As medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo são inversamente proporcionais a 5, 8, 10 e 40, então as medidas, em graus, dos ângulos são, respectivamente, iguais a

a) 160°; 100°; 80° e 20°.
b) 100°; 80°; 20° e 160°.
c) 80°; 50°; 40° e 10°.
d) 50°; 40°; 10º e 80°.
e) 75°; 45°; 40° e 20°.

---

33. (Enem 2000) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a $30\text{ cm},$ conforme a figura:



Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em $\text{cm},$ deve ser:
a) $144.$
b) $180.$
c) $210.$
d) $225.$
e) $240.$

---

4 – Questões Comentadas

1. (Uece 2019) José somou as medidas de três dos lados de um retângulo e obteve $40\text{ cm}.$ João somou as medidas de três dos lados do mesmo retângulo e obteve $44\text{ cm}.$ Com essas informações, pode-se afirmar corretamente que a medida, em $\text{cm},$ do perímetro do retângulo é

a) 48.
b) 52.
c) 46.
d) 56.

Comentário:

Sejam a e b as medidas da base e da altura do retângulo, em centímetros. Logo, supondo $a > b$, podemos escrever $a + 2b = 40$ e $2a + b = 44$. Dessa forma, somando as equações, encontramos $3a + 3b = 84$ e, assim, vem $a + b = 28$.
A resposta é $2a + 2b = 56$.

Gabarito: D

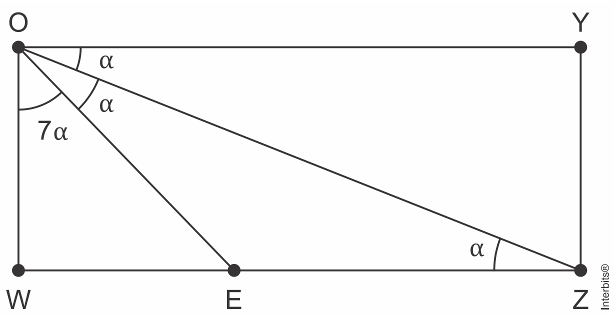
---

2. (Uece 2019) No retângulo $OYZW$, E é um ponto do lado ZW equidistante de O e Z. Se a medida do ângulo $W\hat{O}E$ é sete vezes a medida do ângulo $Z\hat{O}Y$, então, a medida, em graus, do ângulo $E\hat{O}Z$ é

a) 20.
b) 15.
c) 10.
d) 5.

Comentário:

Considere a figura.



Seja $ZOY = \alpha$. Logo, como ZOY e EZO são alternos internos, temos $EZO = \alpha$. Ademais, desde que $\overline{EO} = \overline{EZ}$, podemos concluir que o triângulo EOZ é isósceles de base OZ. Portanto, vem $EOZ = \alpha$.
Finalmente, sendo $WOE = 7 \cdot ZOY = 7\alpha$ e $WOY = 90°$, temos
$7\alpha + \alpha + \alpha = 90° \Leftrightarrow \alpha = 10°$.

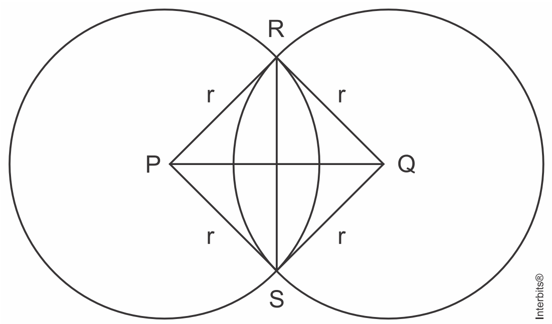
Gabarito: C

3. (Uece 2018) Em um plano, duas circunferências têm seus centros nos pontos P e Q e as medidas de seus raios são ambas iguais a $3\,m.$ Se essas circunferências cortam-se nos pontos R e S e se a distância entre P e Q é igual à distância entre R e $S,$ então, a medida da área do quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos P, Q, R e $S,$ em $m^2,$ é

a) $18.$
b) $9\sqrt{2}.$
c) $9\sqrt{3}.$
d) $9.$

Comentário:

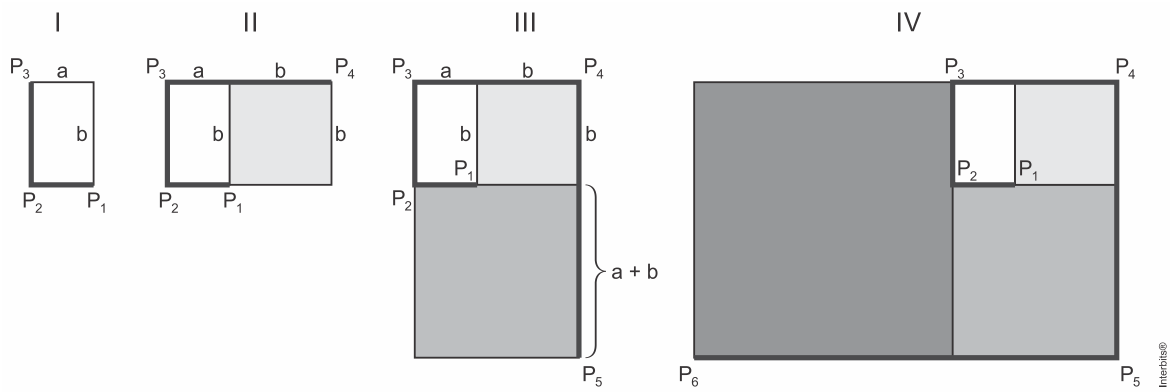
Desenhando conforme o enunciado:



Assim o quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos P, Q, R e S é um quadrado de lado igual ao raio das circunferências, ou seja, igual a $3.$ Logo, sua área será igual a $3 \cdot 3 = 9.$

Gabarito: D

4. (Uerj 2018) Admitindo um retângulo cujos lados medem a e $b,$ sendo $a < b,$ é possível formar uma sequência ilimitada de retângulos da seguinte forma: a partir do primeiro, cada novo retângulo é construído acrescentando-se um quadrado cujo lado é igual ao maior lado do retângulo anterior, conforme ilustrado a seguir.



A figura IV destaca a linha poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, formada pelos lados dos retângulos, que são os elementos da sequência $(a, b, a+b, a+2b, 2a+3b)$.

Mantendo o mesmo padrão de construção, o comprimento da linha poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$, de P_1 até o vértice P_7, é igual a:

a) $5a+7b$

b) $8a+12b$

c) $13a+20b$

d) $21a+33b$

Comentário:

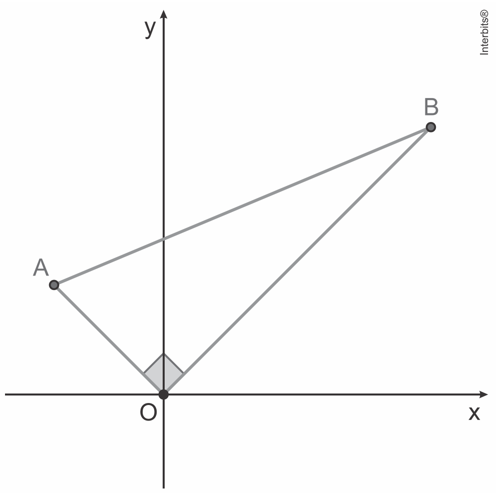
Desde que $\overline{P_6P_7} = a+2b+2a+3b = 3a+5b$, temos

$$\begin{aligned}\overline{P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7} &= a+b+a+b+a+2b+2a+3b+3a+5b \\ &= 8a+12b.\end{aligned}$$

Gabarito: B

---

5. (Upf 2017) Na figura a seguir, está representado, num referencial xy, um triângulo AOB.



Sabe-se que:

1. a semirreta AO é a bissetriz do 2º quadrante;
2. a semirreta OB é a bissetriz do 1º quadrante;
3. a ordenada do ponto B excede em 3 unidades a ordenada do ponto A;
4. a área do triângulo AOB é igual a 10.

As coordenadas dos pontos A e B são:

a) $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $B\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$

b) $A(-1, 1)$ e $B(4, 4)$

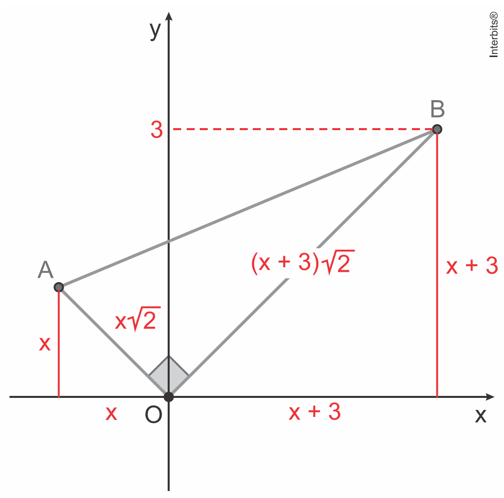
c) $A(-2, 2)$ e $B(5, 5)$

d) $A(-3, 3)$ e $B(6, 6)$

e) $A(-4, 4)$ e $B(7, 7)$

Comentário:

Calculando:



$$S = \frac{\left(x\sqrt{2}\right)\cdot\left((x+3)\cdot\sqrt{2}\right)}{2} = 10 \Rightarrow x\sqrt{2}\cdot\left(x\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right) = 20 \Rightarrow 2x^2+6x-20=0$$

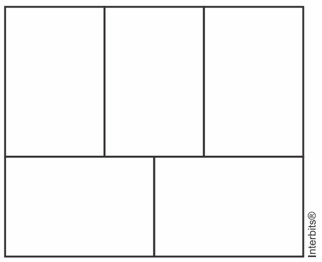
$$2x^2+6x-20=0 \Rightarrow x^2+3x-10=0 \Rightarrow \begin{cases} x' = -5 \text{ (não convém)} \\ x'' = 2 \end{cases}$$

$$A = (-x, x) = (-2, 2)$$
$$B = ((x+3), (x+3)) = (5, 5)$$

Gabarito: C

---

6. (G1 - ifce 2016) Um terreno com perímetro de 176 m é subdividido em 5 retângulos congruentes, como mostrado na figura a seguir.



O perímetro de qualquer um dos 5 retângulos congruentes vale, em m,

a) $80.$

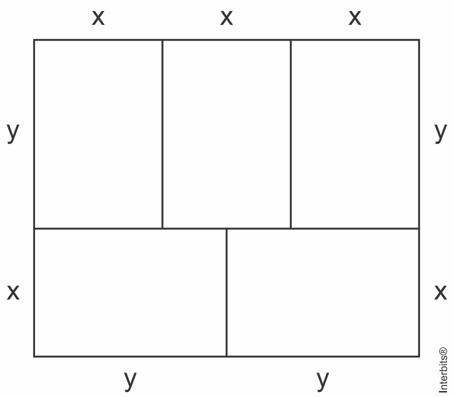
b) $76.$

c) $35{,}2.$

d) $84.$

e) $86.$

Comentário:



De acordo com a figura acima, podemos escrever que:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 176 \\ 2y = 3x \Rightarrow y = \dfrac{3x}{2} \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, temos:

$5x + 6x = 176 \Rightarrow 11x = 176 \Rightarrow x = 16$ e $y = 24.$

Portanto, o perímetro de cada retângulo será dado por:

$P = 2 \cdot (x + y) = 2 \cdot (16 + 24) = 80\text{ m}.$

Gabarito: A

---

7. (Ufjf-pism 1 2016) Sejam A, B, C e D os vértices de um trapézio isósceles. Os ângulos A e B ambos agudos são os ângulos da base desse trapézio, enquanto que os ângulos C e D são ambos obtusos e medem cada um, o dobro da medida de cada ângulo agudo desse trapézio. Sabe-se ainda que a diagonal $\overline{AC}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}.$ Sendo a medida do lado $\overline{AB}$ igual a $10\text{ cm},$ o valor da medida do perímetro do trapézio $ABCD,$ em centímetros, é:

a) 21
b) 22
c) 23
d) 24
e) 25

Comentário:

Se $ABCD$ é isósceles, então os ângulos agudos são congruentes, bem como os obtusos. Além disso, A e D são suplementares, o que implica em $A = 60°.$ Por outro lado, sendo $AC \perp BC,$ e chamando de M o ponto médio de AB, é fácil ver que $AMCD$ e $BCDM$ são losangos congruentes. Portanto, o resultado pedido é $\frac{3}{2}\cdot\overline{AB}+\overline{AB}=25\,\text{cm}.$

Gabarito: E

8. (G1 - ifal 2016) Julgue as afirmativas abaixo e assinale a alternativa correta.

I. Todo paralelogramo é losango.
II. Se um quadrilátero tem todos os lados com a mesma medida, então esse quadrilátero é um quadrado.
III. As diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si.
a) Só I é verdadeira.
b) Só II é verdadeira.
c) Só III é verdadeira.
d) I e III são verdadeiras.
e) II e III são verdadeiras.

Comentário:

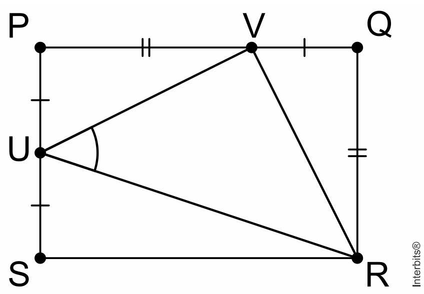
[I] Falsa. Um losango é um paralelogramo de lados congruentes.
[II] Falsa. Um quadrado deve ter todos os lados com a mesma medida e todos os ângulos retos.
[III] Verdadeira. As diagonais de um quadrado são sempre perpendiculares entre si.

Gabarito: C

9. (Uece 2016) No retângulo $PQRS$, a medida dos lados PQ e QR são respectivamente $3\,\text{m}$ e $2\,\text{m}$. Se V é um ponto do lado PQ tal que a medida do segmento VQ é igual a $1\,\text{m}$ e U é o ponto médio do lado PS, então, a medida, em graus, do ângulo $V\hat{U}R$ é
a) $40.$
b) $35.$
c) $50.$
d) $45.$

Comentário:

Considere a figura.

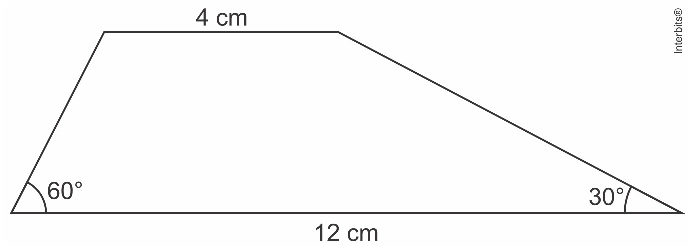


Sabendo que $\overline{VQ} = 1\,\text{m}$ e U é ponto médio de PS, temos $\overline{PV} = \overline{QR} = 2\,\text{m}$ e $\overline{PU} = 1\,\text{m}$. Em consequência, os triângulos PVU e QRV são congruentes por LAL. Portanto, segue que UVR é reto e, assim, o triângulo VRU é retângulo isósceles.

A resposta é $VUR = 45^\circ$.

Gabarito: D

10**.** (Uefs 2016)



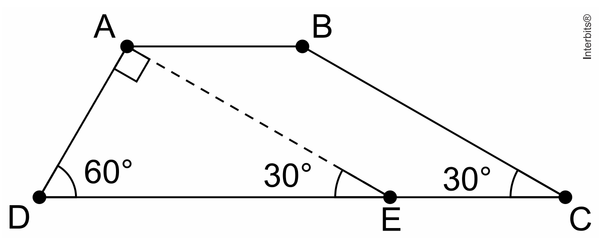
O trapézio representado na figura tem bases medindo $12\,\text{cm}$ e $4\,\text{cm}$, e os ângulos internos da base maior medem 60° e 30°.

Seu perímetro, em cm, é igual a

a) $16 + 4\sqrt{2}$
b) $16 + 4\sqrt{3}$
c) $20 + 3\sqrt{2}$
d) $20 + 4\sqrt{2}$
e) $20 + 4\sqrt{3}$

Comentário:

Considere a figura, em que $AE \parallel BC$.



Sendo $\overline{CD} = 12\,\text{cm}$ e $\overline{EC} = 4\,\text{cm}$, temos $\overline{DE} = \overline{CD} - \overline{EC} = 8\,\text{cm}$. Ademais, $AE \parallel BC$ implica em $A\hat{E}D = 30°$, pois $B\hat{C}E$ e $A\hat{E}D$ são ângulos correspondentes. Logo, como $A\hat{D}E = 60°$, vem $D\hat{A}E = 90°$.

Por conseguinte, do triângulo ADE, encontramos

$$\cos 60° = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \overline{AD} = 4\,\text{cm}$$

e

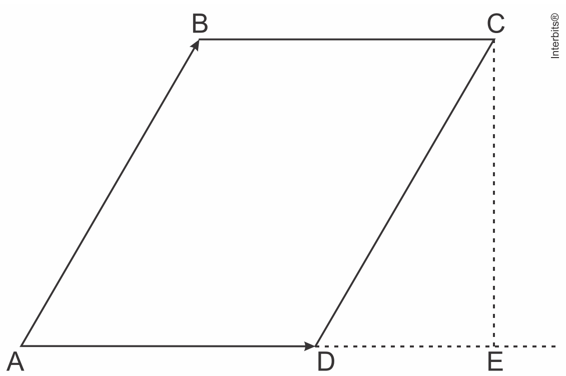
$$\text{sen}\,60° = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \overline{AE} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}.$$

A resposta é $2p_{ABCD} = (20 + 4\sqrt{3})\,\text{cm}$.

Gabarito: E

---

11. (Ucs 2016) Na figura a seguir, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, em que os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ representam duas forças, sendo $\text{med}(\overline{AD}) = 80$, $\text{med}(\overline{AB}) = 100$ e $\text{med}(A\hat{B}C) = 120°$.



Assinale a alternativa que contém a afirmação correta sobre a $\text{med}(\overline{AE})$ do segmento $\overline{AE}$, e sobre a medida q do ângulo $D\hat{A}C$.

a) $\text{med}(\overline{AE}) = 50$ e $q = 30°$

b) $\text{med}(\overline{AE}) = 130$ e $q = 30°$

c) $\text{med}(\overline{AE}) = 130$ e $q > 30°$

d) $\text{med}\left(\overline{AE}\right) = 50$ e $q < 30°$

e) $\text{med}\left(\overline{AE}\right) = 85$ e $q = 30°$

Comentário:

Se $ABCD$ é paralelogramo, então $ABC \equiv ADC = 120°$. Logo, como EDC e ADC são suplementares, vem $EDC = 60°$. Por outro lado, sendo $\overline{AB} = \overline{CD}$, do triângulo retângulo EDC, encontramos

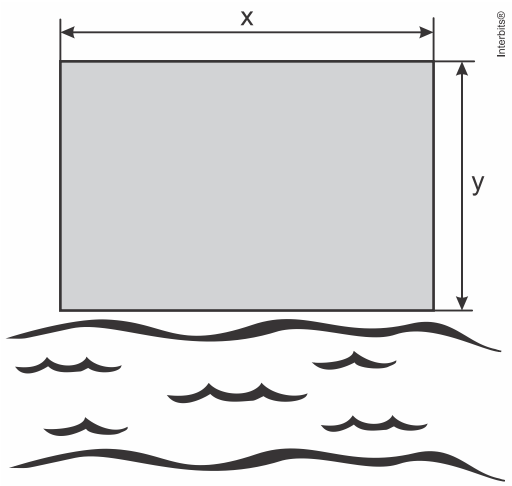
$$\cos EDC = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \cos 60° = \frac{\overline{DE}}{100} \Leftrightarrow \overline{DE} = 50.$$

Em consequência, vem $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = 130$.

Sabemos que $DAC + ACD = 60°$ e $\overline{CD} > \overline{AD}$. Desse modo, $q = DAC$ só pode ser maior do que a média aritmética das medidas dos ângulos DAC e ACD, qual seja, $30°$.

Gabarito: C

12. (Enem 2ª aplicação 2016) Um terreno retangular de lados cujas medidas, em metro, são x e y será cercado para a construção de um parque de diversões. Um dos lados do terreno encontra-se às margens de um rio. Observe a figura.



Para cercar todo o terreno, o proprietário gastará R\$ 7.500,00. O material da cerca custa R\$ 4,00 por metro para os lados do terreno paralelos ao rio, e R\$ 2,00 por metro para os demais lados.

Nessas condições, as dimensões do terreno e o custo total do material podem ser relacionados pela equação

a) $4(2x+y)=7.500$

b) $4(x+2y)=7.500$

c) $2(x+y)=7.500$

d) $2(4x+y)=7.500$

e) $2(2x+y)=7.500$

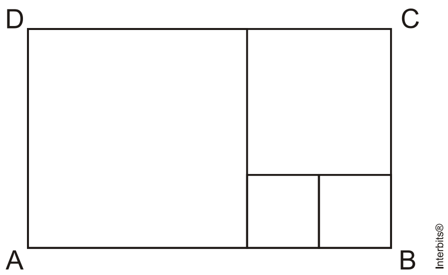
Comentário:

O custo para cercar os lados paralelos ao terreno é igual a $2x\cdot 4=8x,$ enquanto que para cercar os outros lados o custo é $2y\cdot 2=4y.$ Portanto, segue que
$8x+4y=7500 \Leftrightarrow 4(2x+y)=7500.$

Gabarito: A

---

13. (Unicamp 2015) A figura abaixo exibe um retângulo $ABCD$ decomposto em quatro quadrados.



O valor da razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ é igual a

a) $\frac{5}{3}$.

b) $\frac{5}{2}$.

c) $\frac{4}{3}$.

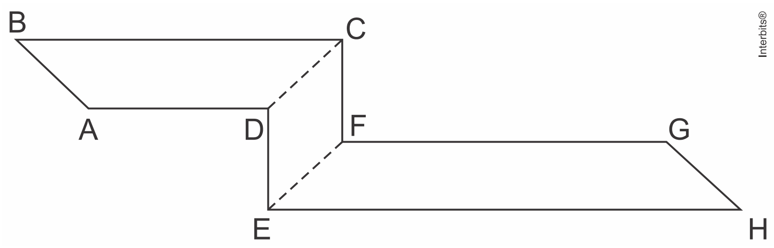
d) $\frac{3}{2}$.

Comentário:

Há três tipos de quadrados, com $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3$ sendo os seus lados. É fácil ver que $\ell_2 = 2 \cdot \ell_1$ e $\ell_3 = \ell_1 + \ell_2 = 3 \cdot \ell_1$. Portanto, temos $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\ell_3 + \ell_2}{\ell_3} = \frac{5}{3}$.

Gabarito: A

14. (G1 - cftmg 2015) A figura abaixo é plana e composta por dois trapézios isósceles e um losango.



O comprimento da base maior do trapézio ABCD é igual ao da base menor do trapézio EFGH, que vale $2x$ e, a base maior de cada trapézio é o dobro da base menor, e o lado EF do losango vale y.
O perímetro da figura dada, expresso em função de x e y, é

a) $6x + 4y$

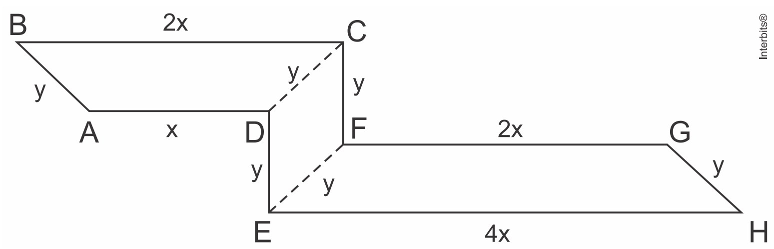
b) $9x + 4y$

c) $12x + 2y$

d) $15x + 2y$

Comentário:

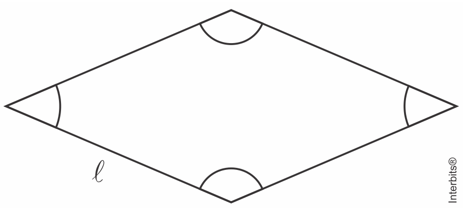
Considerando os trapézios isósceles, o losango e as informações da questão, temos:



Portanto, o Perímetro da figura será dado por $P = x + 4x + 2x + 2x + y + y + y + y = 9x + 4y$.

Gabarito: B

15. (Ucs 2015) No losango abaixo dois ângulos medem $120°$ e o lado ℓ mede 4 cm.



Qual das expressões a seguir, corresponde à soma das medidas das diagonais do losango?

a) $4(1+\sqrt{3})$

b) $1+\sqrt{3}$

c) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

e) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

Comentário:

Se dois ângulos do losango medem $120°$, então cada um dos outros dois mede $\dfrac{360° - 2 \cdot 120°}{2} = 60°$.

Logo, a diagonal menor divide o losango em dois triângulos equiláteros congruentes de lados 4cm.

Portanto, a diagonal menor mede 4cm e a maior mede $2 \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$.

A resposta é $4 + 4\sqrt{3} = 4(1+\sqrt{3})\,\text{cm}$.

Gabarito: A

---

16. (Fgv 2015) A figura representa um trapézio isósceles $ABCD$, com $AD = BC = 4\text{cm}$. M é o ponto médio de $\overline{AD}$, e o ângulo $B\hat{M}C$ é reto.

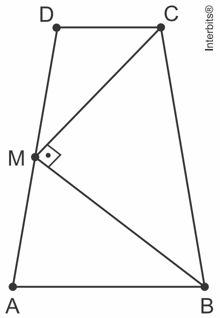


Figura fora de escala

O perímetro do trapézio $ABCD$, em cm, é igual a

a) 8.

b) 10.

c) 12.

d) 14.

e) 15.

Comentário:

Seja N o ponto do segmento BC tal que MN é paralelo a AB. Logo, MN é a base média do trapézio $ABCD$ e, portanto, segue que $\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$. Além disso, MN é a mediana relativa à hipotenusa BC do triângulo BMC. Daí, vem $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2} = 2\,cm$.

Em consequência, podemos afirmar que o perímetro do trapézio $ABCD$ é igual a $12\,cm$.

Gabarito: C

17**.** (Ufjf-pism 1 2015) Dadas as seguintes afirmações:

I. Se um paralelogramo tem dois ângulos de vértices consecutivos congruentes, então ele é um retângulo.
II. A altura de um trapézio retângulo que tem o ângulo agudo medindo $30°$ é igual à metade do lado não perpendicular às bases.
III. Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e perpendiculares, então elas são bissetrizes dos ângulos desse quadrilátero.

É **CORRETO** afirmar que:

a) Apenas I é verdadeira.

b) Apenas II é verdadeira.

c) Todas as afirmações são verdadeiras.

d) Apenas I e II são verdadeiras.

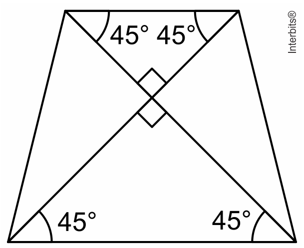
e) Apenas II e III são verdadeiras.

Comentário:

[I] Verdadeira. Sabendo que os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes, e que dois ângulos consecutivos quaisquer são suplementares, tem-se que o paralelogramo é retângulo se esses ângulos forem congruentes.

[II] Verdadeira. Sejam h a altura do trapézio e ℓ a medida do lado não perpendicular às bases. Logo, como $\text{sen}\,30° = \frac{h}{\ell}$, vem $h = \frac{\ell}{2}$.

[III] Falsa. Considere o trapézio isósceles da figura.

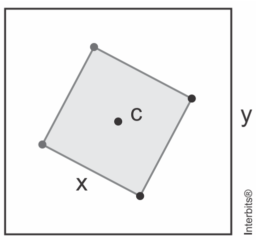


Basta notar que se os quatro segmentos determinados pelo ponto de interseção das diagonais não forem congruentes, então as diagonais não serão bissetrizes dos ângulos do quadrilátero.

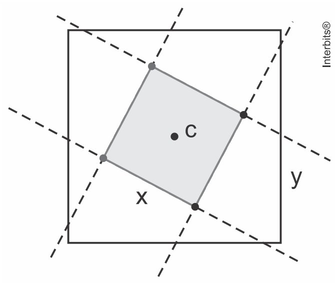
Gabarito: D

18. (G1 - cp2 2015) Em uma aula de Artes Visuais, a professora pediu aos seus alunos que construíssem um quadrado a partir do recorte de dois quadrados de lados medindo x e y. Mirian, uma das alunas mais criativas, decidiu confeccionar a sua peça quadrada de acordo com os passos seguintes:

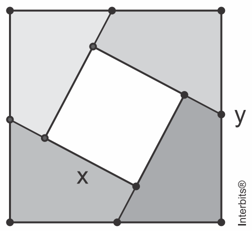
Passo 1 – marcou o centro dos dois quadrados, colocou um sobre o outro, fazendo com que os centros coincidissem no ponto C.



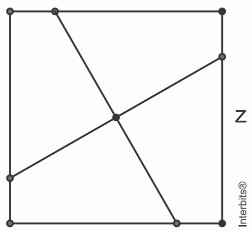
Passo 2 – traçou retas pontilhadas sobre os lados do quadrado menor.



Passo 3 – recortou quatro quadriláteros congruentes a partir da área visível do quadrado maior.



Passo 4 – posicionou os quatro quadriláteros de tal maneira que formassem um novo quadrado de lado de medida z.



Uma relação válida entre as medidas x, y e z dos lados dos quadrados é

a) $z = y - x.$

b) $z = \frac{y - x}{2}.$

c) $z = \sqrt{y - x}.$

d) $z = \sqrt{y^2 - x^2}.$

Comentário:

Percebe-se que o quadrado resultante de lado z e tem área igual à área do quadrado de lado y menos a área do quadrado de lado x. Logo, pode-se escrever:

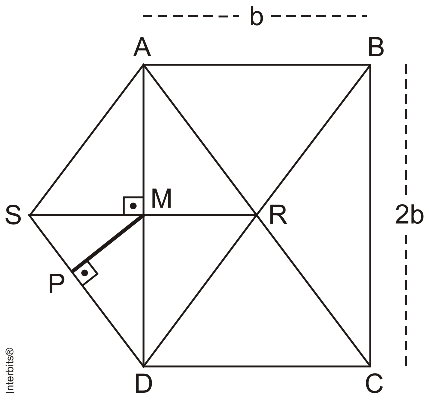
$$S_z = S_y - S_x$$

$$z^2 = y^2 - x^2$$

$$z = \sqrt{y^2 - x^2}$$

Gabarito: D

19**.** (G1 - cftmg 2014) Nessa figura, ABCD é um retângulo cujos lados medem *b* e 2*b*. O ponto R pertence aos segmentos AC e BD e, ARDS é um quadrilátero em que M é ponto médio do segmento RS.



O segmento MP, expresso em função de *b*, é

a) $\dfrac{b\sqrt{5}}{5}$.

b) $\dfrac{b\sqrt{5}}{3}$.

c) $\dfrac{2b\sqrt{5}}{3}$.

d) $\dfrac{3b\sqrt{5}}{5}$.

Comentário:

Como M é ponto médio de SR, $A\hat{M}S = 90^\circ$ e $\overline{AR} = \overline{AD}$, segue-se que $ARDS$ é losango.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ADC, encontramos $\overline{AC} = b\sqrt{5}$. Logo, $\overline{AR} = \overline{DS} = \dfrac{b\sqrt{5}}{2}$.

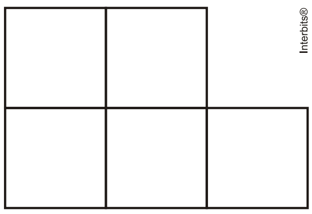
Portanto, como o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura, do triângulo MSD, vem

$$\overline{DS}\cdot\overline{MP}=\overline{MS}\cdot\overline{DM}\Leftrightarrow\frac{b\sqrt{5}}{2}\cdot\overline{MP}=\frac{b}{2}\cdot b$$
$$\Leftrightarrow\overline{MP}=\frac{b\sqrt{5}}{5}.$$

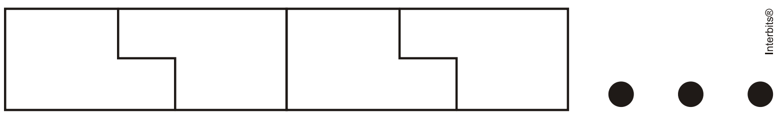
Gabarito: A

---

20. (Upe 2014) A figura a seguir mostra uma das peças do jogo "Pentaminós".



Cada peça é formada por cinco quadradinhos, e o lado de cada quadradinho mede 5cm.
Com 120 dessas peças, Jorge montou uma faixa, encaixando perfeitamente as peças como mostra a figura a seguir:



Quanto mede o perímetro dessa faixa?
a) 1 200 cm
b) 1 500 cm
c) 3 000 cm
d) 3 020 cm
e) 6 000 cm

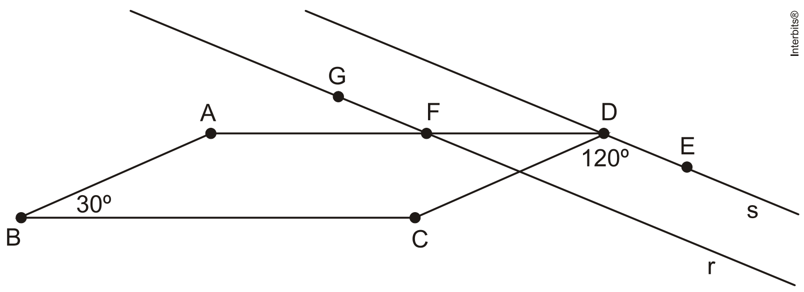
Comentário:

Cada duas peças formam um retângulo de dimensões $10\,cm\times 25\,cm.$ Portanto, o perímetro da faixa é dado por $\frac{120}{2}\cdot 2\cdot 25+2\cdot 10=3020\,cm.$

Gabarito: D

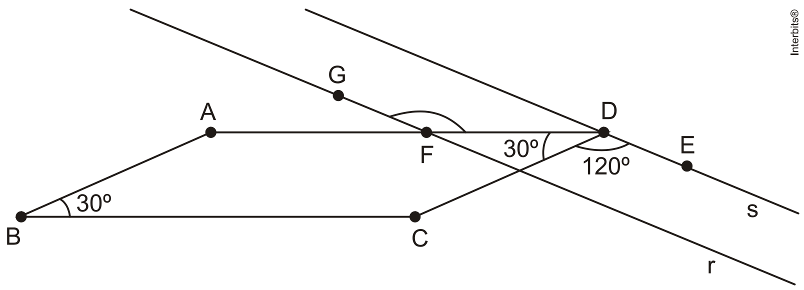
---

21. (G1 - cftrj 2014) Na figura abaixo, ABCD é um paralelogramo, as retas r e s são paralelas, D e E são pontos de s, F e G são pontos de r, F é um ponto de AD, $A\hat{B}C = 30°$ e $C\hat{D}E = 120°$. Quanto mede, em graus, o ângulo $D\hat{F}G$?



a) 120°
b) 130°
c) 140°
d) 150°

Comentário:



$A\hat{D}C = 30°$ (ângulos opostos do paralelogramo)
$G\hat{F}D = 30° + 120° = 150°$ (alternos internos)

Gabarito: D

---

22. (Enem 2014) Diariamente, uma residência consome 20.160Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões $6\text{cm} \times 8\text{cm}$. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

a) Retirar 16 células.
b) Retirar 40 células.
c) Acrescentar 5 células.
d) Acrescentar 20 células.
e) Acrescentar 40 células.

Comentário:

Aplicando o Teorema de Pitágoras, concluímos facilmente que a diagonal de uma célula solar mede $10\,\text{cm}$. Em consequência, as 100 células produzem $100 \cdot 10 \cdot 24 = 24.000\text{ Wh}$. Assim, estão sendo produzidos, diariamente, $24000 - 20160 = 3.840\text{ Wh}$ além do consumo. Portanto, o proprietário deverá retirar $\frac{3840}{240} = 16$ células.

Gabarito: A

---

23. (Ita 2014) Considere o trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sejam M e N os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Então, se $\overline{AB}$ tem comprimento x e $\overline{CD}$ tem comprimento $y < x$, $\overline{MN}$ é igual a
a) $x - y$.
b) $\frac{1}{2}(x - y)$.
c) $\frac{1}{3}(x - y)$.
d) $\frac{1}{3}(x + y)$.
e) $\frac{1}{4}(x + y)$.

Comentário:

O segmento MN é a Mediana de Euler do trapézio $ABCD$. Portanto, $\overline{MN} = \frac{1}{2}(x - y)$.

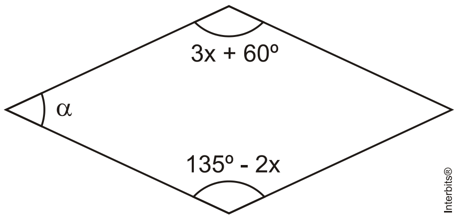
Gabarito: B

---

24. (G1 - ifsp 2014) Considerando que as medidas de dois ângulos opostos de um losango são dadas, em graus, por $3x + 60°$ e $135° - 2x$, a medida do menor ângulo desse losango é
a) 75°.

b) 70°.
c) 65°.
d) 60°.
e) 55°.

Comentário:



$3x + 60° = 135° - 2x$
$5x = 75°$
$x = 15°$
$\alpha + 3 \cdot 15° + 60 = 180° \Rightarrow \alpha = 75°.$

Gabarito: A

25. (Ufrn 2013) Uma indústria compra placas de alumínio em formato retangular e as corta em quatro partes, das quais duas têm a forma de triângulos retângulos isósceles (Fig. 1). Depois, reordena as quatro partes para construir novas placas no formato apresentado na Fig. 2.

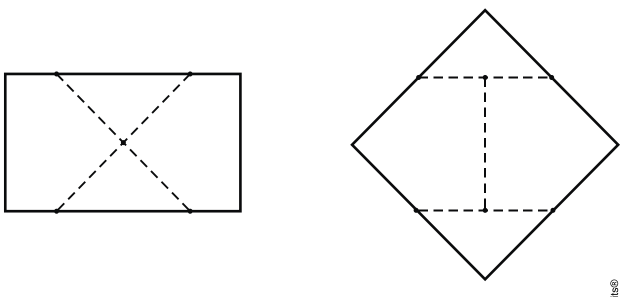
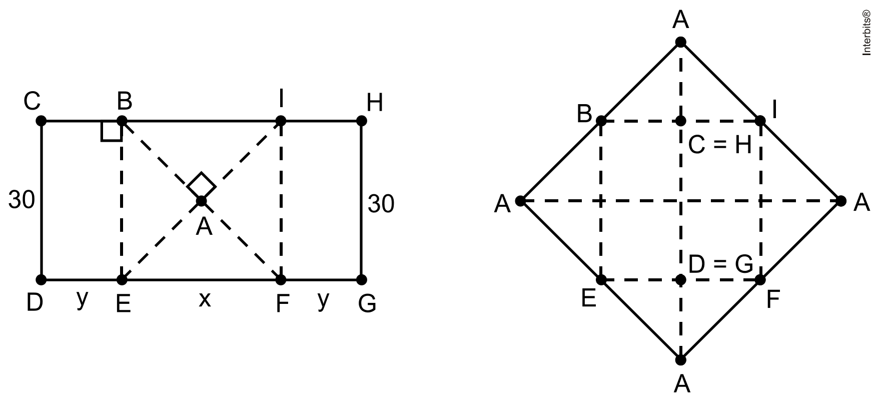


Fig.1: Placa retangular   Fig. 2: Nova placa

Se a medida do lado menor da placa retangular é 30 cm, a medida do lado maior é
a) 70 cm.
b) 40 cm.
c) 50 cm.
d) 60 cm.

Comentário:

Considere as figuras, em que $\overline{EF} = \overline{BI} = x$ e $\overline{DE} = \overline{BC} = \overline{FG} = \overline{HI} = \overline{FG} = y.$



É fácil ver que $\overline{BI} = \overline{BC} + \overline{HI} \Leftrightarrow x = 2y.$ Além disso, como A é o ponto médio das diagonais BF e $EI,$ $\overline{BF} = \overline{EI}$ e $EI \perp BF,$ segue que $BEFI$ é quadrado. Daí, temos $x = 30$ e, portanto, $\overline{DG} = 2x = 2 \cdot 30 = 60\,\text{cm}.$

Gabarito: D

26. (Enem PPL 2012) Em uma das paredes de um depósito existem compartimentos de mesmo tamanho para armazenamento de caixas de dimensões frontais a e b. A terceira dimensão da caixa coincide com a profundidade de cada um dos compartimentos. Inicialmente as caixas são arrumadas, em cada um deles, como representado na Figura 1. A fim de aproveitar melhor o espaço, uma nova proposta de disposição das caixas foi idealizada e está indicada na Figura 2. Essa nova proposta possibilitaria o aumento do número de caixas armazenadas de 10 para 12 e a eliminação de folgas.

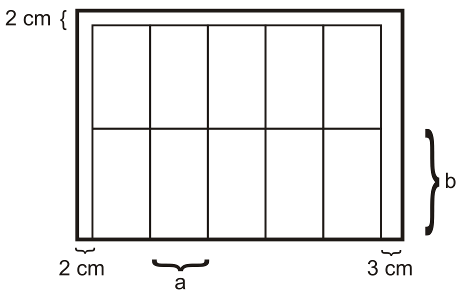


Figura 1

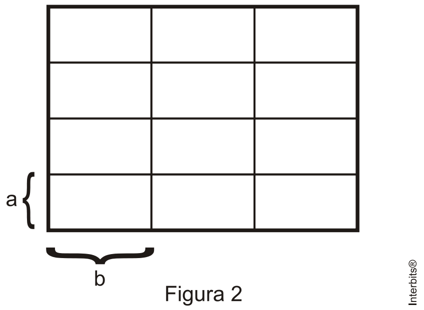


Figura 2

É possível ocorrer a troca de arrumação segundo a nova proposta?

a) Não, porque a segunda proposta deixa uma folga de 4 cm na altura do compartimento, que é de 12 cm, o que permitiria colocar um número maior de caixas.

b) Não, porque, para aceitar a segunda proposta, seria necessário praticamente dobrar a altura e reduzir à metade a largura do compartimento.

c) Sim, porque a nova disposição das caixas ficaria acomodada perfeitamente no compartimento de 20 cm de altura por 27 cm de largura.

d) Sim, pois efetivamente aumentaria o número de caixas e reduziria o número de folgas para apenas uma de 2 cm na largura do compartimento.

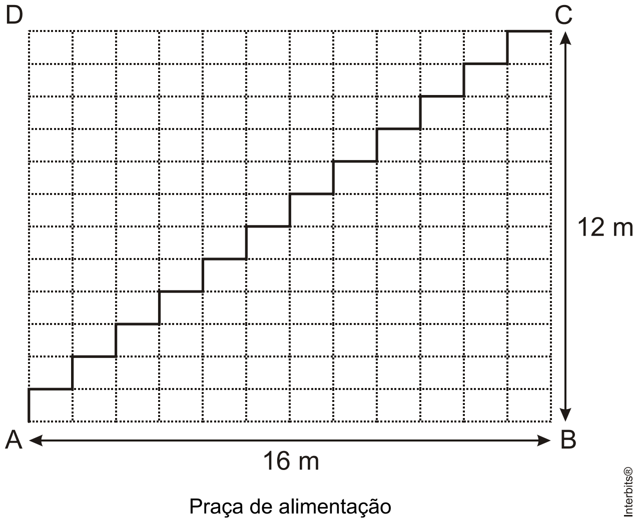
e) Sim, porque a nova disposição de caixas ficaria acomodada perfeitamente no compartimento de 32 cm de altura por 45 cm de largura.

Comentário:

Para que a troca seja possível, deve-se ter $4a = 2b + 2$ e $3b = 5a + 5.$ Logo, se $4a = 32\text{cm},$ ou seja, $a = 8\text{cm},$ então $3b = 45\text{cm}$ e, portanto, a troca será possível.

Gabarito: E

27**.** (Udesc 2012) Numa praça de alimentação retangular, com dimensões 12 m por 16 m, as mesas estão dispostas em fileiras paralelas às laterais do ambiente, conforme o esquema da figura, sendo as linhas pontilhadas os corredores entre as mesas.



Pela disposição das mesas, existem várias maneiras de se chegar do ponto *A* ao ponto *C*, movendo-se apenas pelos corredores. Seguindo-se o caminho destacado e desprezando-se a largura dos corredores, a distância percorrida é:

a) 12 m

b) 20 m

c) 24 m

d) 28 m

e) 16 m

Comentário:

A distância percorrida é dada pela soma das dimensões da praça de alimentação, ou seja, $16 + 12 = 28$ m.

Gabarito: D

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:

Considere um losango ABCD em que M, N, P e Q são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Um dos ângulos internos desse losango mede α, sendo $0° < \alpha < 90°$.

28. (Insper 2012) Se $\alpha = 60°$, então a razão entre o perímetro do losango ABCD e o perímetro do quadrilátero MNPQ, nessa ordem, é igual a

a) $\sqrt{3} + 1$

b) 2.

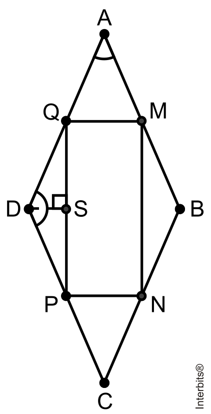
c) $\sqrt{3}$.

d) $\frac{3}{2}$.

e) $2\sqrt{3}-2$.

Comentário:

Considere a figura.



Seja ℓ a medida do lado do losango $ABCD$.

Assim, como $\overline{AQ} = \overline{AM} = \frac{\ell}{2}$ e supondo $QAM = 60^\circ$, temos que o triângulo AQM é equilátero e, portanto, $\overline{MQ} = \frac{\ell}{2}$. Analogamente, segue que $\overline{PN} = \frac{\ell}{2}$.

Por outro lado, temos que $QDP = 120^\circ$. Daí, se S é o pé da perpendicular baixada de D sobre PQ, concluímos que $QDS = 60^\circ$, pois $\overline{DP} = \overline{DQ} = \frac{\ell}{2}$. Logo, do triângulo DQS, vem

$$\operatorname{sen} QDS = \frac{\overline{QS}}{\overline{DQ}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{\overline{PQ}}{2}}{\frac{\ell}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{PQ} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

Por conseguinte, a razão pedida é igual a

$$\frac{2p_{ABCD}}{2p_{MNPQ}} = \frac{4\ell}{2 \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2} + \frac{\ell}{2}\right)}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

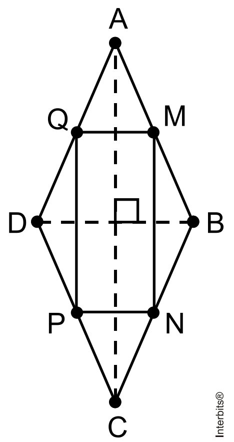
$$= 2\sqrt{3}-2.$$

Gabarito: E

29. (Insper 2012) Nessas condições, o quadrilátero convexo MNPQ
a) é um quadrado.
b) é um retângulo que não é losango.
c) é um losango que não é retângulo.
d) é um paralelogramo que não é retângulo nem losango.
e) não possui lados paralelos.

Comentário:

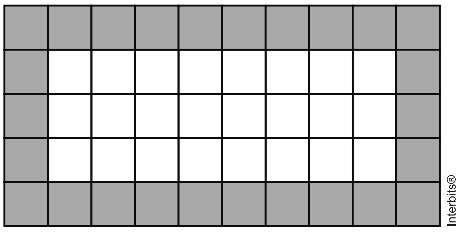
Considere a figura.



Sabendo que M e Q são os pontos médios de AB e AD, temos que MQ é base média do triângulo ABD. Desse modo, $MQ \parallel BD$. Analogamente, concluímos que $NP \parallel BD$ e $PQ \parallel AC \parallel MN$. Além disso, como as diagonais AC e BD do losango são perpendiculares, segue que $MNPQ$ é retângulo.
Por outro lado, dado que $MAQ \equiv NCP = \alpha$, com $0° < \alpha < 90°$, é imediato que $PDQ \equiv MBN = 180° - \alpha$. Mas $\overline{AQ} = \overline{AM} = \overline{DQ} = \overline{DP}$ e, portanto, $\overline{MQ} \neq \overline{PQ}$, ou seja, $MNPQ$ é um retângulo que não é losango.

Gabarito: B

30. (Espm 2011) Uma parede retangular cujo comprimento mede o dobro da altura, foi revestida com azulejos quadrados, inteiros e de mesmo tamanho, sendo que, em todo o contorno externo, foi feita uma faixa decorativa com 68 peças mais escuras, como na figura exemplo abaixo.



O número de azulejos mais claros usados no interior da parede foi de:

a) 260

b) 246

c) 268

d) 312

e) 220

Comentário:

Sejam c e h, respectivamente, o número de azulejos utilizados numa fileira horizontal e numa fileira vertical.
Do enunciado, temos que $c = 2h$. Além disso, o número de azulejos usados no contorno externo é tal que $2 \cdot (c + h) - 4 = 68$.
Logo, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} c = 2h \\ 2 \cdot (c + h) - 4 = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2h \\ c + h = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 24 \\ h = 12 \end{cases}.$$

Portanto, o número de azulejos mais claros usados no interior da parede foi de $(c - 2) \cdot (h - 2) = (24 - 2) \cdot (12 - 2) = 220$.

Gabarito: E

31**.** (G1 - ifsc 2011) O perímetro de um losango é 40 cm e uma diagonal mede 16 cm. A outra diagonal mede:

a) 10 cm.

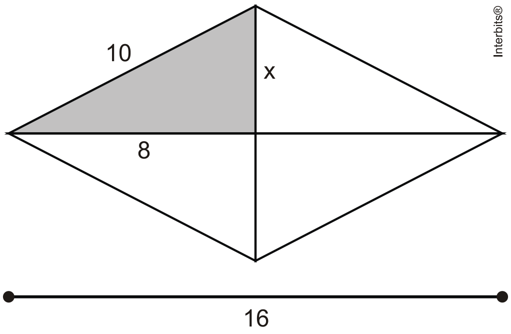
b) 6 cm.

c) 12 cm.

d) 8 cm.

e) 5 cm.

Comentário:



O lado do losango é 10 cm, já que seu perímetro é 40 cm.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo destacado, temos $x^2 = 10^2 - 8^2 \Leftrightarrow x = 6 \text{ cm}$.
Logo, a outra diagonal mede 2.6 = 12 cm.

Gabarito: C

32**.** (G1 - ifce 2011) As medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo são inversamente proporcionais a 5, 8, 10 e 40, então as medidas, em graus, dos ângulos são, respectivamente, iguais a

a) 160°; 100°; 80° e 20°.
b) 100°; 80°; 20° e 160°.
c) 80°; 50°; 40° e 10°.
d) 50°; 40°; 10º e 80°.
e) 75°; 45°; 40° e 20°.

Comentário:

Sejam a, b, c e d as medidas dos ângulos internos do quadrilátero.
Temos que $\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{8}} = \frac{c}{\frac{1}{10}} = \frac{d}{\frac{1}{40}} = k,$ sendo k a constante de proporcionalidade.
Além disso, sabendo que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é $360°,$ vem

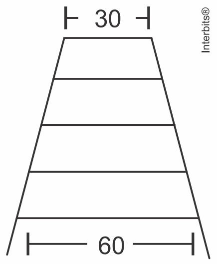
$$\begin{aligned} a + b + c + d = 360° &\Leftrightarrow \frac{k}{5} + \frac{k}{8} + \frac{k}{10} + \frac{k}{40} = 360° \\ &\Leftrightarrow 8k + 5k + 4k + k = 40 \cdot 360° \\ &\Leftrightarrow k = \frac{40 \cdot 360°}{18} = 800°. \end{aligned}$$

Portanto, $a = 160°, b = 100°, c = 80°$ e $d = 20°.$

Gabarito: A

---

33. (Enem 2000) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a $30\text{ cm},$ conforme a figura:



Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em $\text{cm},$ deve ser:

a) $144.$
b) $180.$
c) $210.$
d) $225.$
e) $240.$

Comentário:

Duplicando a figura dada, como na figura a seguir, podemos observar 5 degraus de 90 cm cada.

Gabarito: D

Crítica, sugestão ou elogio, só entrar em contato pelas redes sociais abaixo:

Fale comigo!		
@profismael_santos	***Ismael Santos***	***@IsmaelSantos***

Vamos que vamos! Fé na missão, FUTURO MARUJO!